



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Maria Girlandia de Sousa

Análise termoestatística dos potenciais de Yukawa e Lee–Wick em espaços de  
fase não comutativos

Juiz de Fora

2026

Maria Girlandia de Sousa

Análise termoestatística dos potenciais de Yukawa e Lee–Wick em espaços de fase não comutativos

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sousa, Maria Girlandia de.

Análise termoestatística dos potenciais de Yukawa e Lee–Wick em espaços de fase não comutativos / Maria Girlandia de Sousa. – 2026.  
66 f. : il.

Orientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, Instituto de Ciências Exatas - ICE. Programa de Pós Graduação em Física, 2026.

1. Potencial de Yukawa. 2. Potencial de Lee–Wick. 3. Não Comutatividade. 4. Análise termoestatística. I. Mendes, Albert Carlo Rodrigues, Abreu, Everton Murilo Carvalho de. II. Análise termoestatística dos potenciais de Yukawa e Lee-Wick em espaços de fase não comutativos.

Maria Girlandia de Sousa

**Análise termostática dos potenciais de Yukawa e Lee-Wick em espaços de fase não comutativos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 24 de junho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes - Orientador**

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

**Prof. Dr. Clifford Neves Pinto**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

**Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

**Prof. Dr. Jorge Ananias Neto**

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

**Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto**

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 22/06/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Membro**, em 24/06/2026, às 15:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 24/06/2026, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto, Servidor(a)**, em 24/06/2026, às 17:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clifford Neves Pinto, Usuário Externo**, em 24/06/2026, às 18:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Junior de Oliveira Neves, Usuário Externo**, em 24/06/2026, às 18:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3039325** e o código CRC **B921BA29**.

Dedico este trabalho a todos os corajosos, sejam homens, mulheres ou jovens, que, assim como eu, persistem na jornada universitária em busca do conhecimento e do desejo de revelar um pouco do mundo como ele é. Dedico também às nossas famílias pelo apoio, incentivo e compreensão. Que esse esforço constante impulsione a construção do conhecimento, contribuindo para a criação de melhores condições de vida e para a evolução contínua da humanidade.

## Agradecimentos

Expresso aqui minha gratidão:

A Deus, pela dádiva da vida. Minha fé em ti mantém minha vitalidade e me resgata do estado de inércia. É um dos motivos pelos quais busco novos projetos, conquistas e aprendizados, visando contribuir na construção de conhecimentos compartilhados com outras pessoas.

Ao meu orientador, Albert Mendes, por sua orientação excelente, apoio constante e incentivo fundamental para a concretização deste projeto. Sua colaboração e ensinamentos foram essenciais para dar forma a este trabalho.

Ao professor Everton Abreu, sua ideia inicial sobre o tema, ensinamentos e orientação na fase inicial deste trabalho, assim como os estudos dirigidos, foram fundamentais para minha formação acadêmica.

Ao professor Mário Neves, pela colaboração e valiosa contribuição ao artigo.

À minha família, que sempre me apoiou em todas as etapas da minha vida. Minha mãe, Maria Isabel, e meu pai Francisco Ramos (In memoriam); Meus irmãos: Everlons, Evelanja, Francisco e Isidório; Meus cunhados: Adão e Silvaneide. Não tenho palavras para agradecer o amor incondicional, o apoio e a motivação que vocês me proporcionam.

Ao meu namorado, Ueberti Luis, cuja presença ao meu lado trouxe equilíbrio e alegria, tornando cada passo desta jornada mais significativo. Sua constante compreensão, paciência, incentivo, ajuda com o programa Mathematica e apoio foram fundamentais para que eu pudesse concluir este trabalho.

Ao professor e amigo Francisco Brito, pelos diálogos sobre a pesquisa e pela solicitude quando eu precisava entender algo dos estudos. Ele, que já foi meu orientador de dissertação, sempre teve atenção em esclarecer teorias e foi de grande ajuda para a finalização dessa pesquisa.

Aos meus amigos, por me lembrarem da importância de encontrar um equilíbrio entre o trabalho e a vida pessoal, e por sempre estarem ao meu lado, mesmo nos momentos mais desafiadores. Em especial, aos amigos: Clemilton, Ítalo, Elisandra, Rafaela e Jodainy.

À comunidade acadêmica da Universidade Federal de Juiz de Fora, pela atmosfera inspiradora e pelas oportunidades de aprendizado contínuo que oferecem.

À CAPES, por conceder o financiamento necessário para a realização deste projeto. Sua contribuição foi essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

"Somos como árvores, com raízes profundas no solo da nossa essência, mas nossos ramos alcançam os céus dos potenciais inexplorados." (Autor Desconhecido)

## Resumo

Nos últimos anos, modelos físicos baseados em álgebras não comutativas têm atraído considerável interesse, pois fornecem uma estrutura para investigar teorias envolvendo um parâmetro fundamental na escala de Planck, frequentemente associado a aspectos semiclássicos da gravidade quântica. A geometria não comutativa modifica a estrutura subjacente do espaço de fase, podendo conduzir a novos entendimentos sobre problemas ainda em aberto na física teórica. Nesta tese, adotamos uma abordagem clássica para realizar uma análise termoestatística dos potenciais de interação de Yukawa e Lee – Wick em espaços de fase não comutativos. Utilizando a álgebra não comutativa, obtemos as equações de movimento associadas a esses potenciais e investigamos grandezas termodinâmicas, como a densidade de estados, a função de partição, a energia média e a capacidade térmica. Empregamos os formalismos dos ensembles microcanônico e canônico no contexto da mecânica estatística de Boltzmann – Gibbs. Nossos resultados mostram que a introdução do parâmetro de não comutatividade  $\Theta$  induz modificações não triviais nas quantidades termodinâmicas, incluindo mudanças qualitativas na capacidade térmica. Em particular, podem emergir regiões com capacidade térmica negativa, as quais interpretamos como assinaturas das limitações do tratamento semiclássico e perturbativo, e não como efeitos físicos definitivos. A análise é realizada sob as hipóteses de não comutatividade fraca e  $|\beta V(r)| \ll 1$ , o que restringe o regime de validade dos resultados. Dentro desse domínio, nossos achados destacam o papel da geometria do espaço de fase na determinação do comportamento termodinâmico.

**Palavras-chaves:** Potencial de Yukawa. Potencial de Lee–Wick. Não Comutatividade. Análise termoestatística.

## Abstract

In recent years, physical models based on noncommutative algebras have attracted considerable interest, since they provide a framework for investigating theories involving a fundamental parameter at the Planck scale, often associated with semiclassical aspects of quantum gravity. Noncommutative geometry modifies the underlying phase-space structure, potentially leading to new insights into unresolved problems in theoretical physics. In this thesis, we adopt a classical approach to perform a thermostistical analysis of the well-established Yukawa and Lee – Wick interaction potentials in a noncommutative phase space. Using the noncommutative algebra, we derive the equations of motion associated with these potentials and investigate the corresponding thermodynamic quantities, including the density of states, partition function, mean energy, and heat capacity. Both the microcanonical and canonical ensemble formalisms are considered within the framework of Boltzmann – Gibbs statistical mechanics. Our results show that the introduction of the noncommutative parameter  $\Theta$  induces nontrivial modifications in thermodynamic quantities, including qualitative changes in the heat capacity. In particular, regions with negative heat capacity may emerge, which we interpret as signatures of the limitations of the semiclassical and perturbative treatment rather than definitive physical effects. The analysis is carried out under the assumptions of weak noncommutativity and  $|\beta V(r)| \ll 1$ , which constrain the regime of validity of the results. Within this domain, our findings highlight the role of phase-space geometry in shaping thermodynamic behavior.

**Keywords:** Yukawa potential. Lee–Wick potential. Noncommutativity. Thermostistical Analysis.

## Lista de Ilustrações

Figura 1 – Potencial de Yukawa em comparação ao NCYP . . . . .	24
Figura 2 – Potencial LW em comparação ao NCLWP. . . . .	25
Figura 3 – Função de partição NCYP. . . . .	35
Figura 4 – Energia média NCYP. . . . .	36
Figura 5 – Capacidade térmica NCYP. . . . .	37
Figura 6 – Função de partição NCLWP. . . . .	38
Figura 7 – Energia média NCLWP. . . . .	39
Figura 8 – Capacidade térmica NCLWP. . . . .	40

## Lista de Abreviaturas e Siglas

NC	Não Comutatividade/Não Comutativo
MCNC	Mecânica Clássica Não Comutativa
QED	Quantum Electrodynamics (na sigla em inglês)
MQ	Mecânica Quântica
NCMQ	Mecânica Quântica Não Comutativa
QFT	Quantum Field Theory (na sigla em inglês)
YP	Yukawa Potential (na sigla em inglês)
NCYP	Yukawa Potential in Non-commutativity (na sigla em inglês)
LWP	Lee-Wick Potential (na sigla em inglês)
NCLWP	Lee-Wick Potential in Non-commutativity (na sigla em inglês)

## Lista de Símbolos

$\zeta$	Zeta
$\alpha$	Alfa
$\mu$	Massa reduzida / Blindagem do potencial
$\epsilon_{ijk}$	Tensor Levi-Civita
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\hbar$	Constante de Planck reduzida
$i$	Número imaginário (ou índices)
$\partial$	Derivada parcial
$\tilde{\Theta}_{ij}$	Matriz real antissimétrica
$\Theta$	Parâmetro Não Comutativo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>MECÂNICA CLÁSSICA E POTENCIAIS CENTRAIS EM ESPAÇOS DE FASE NÃO COMUTATIVOS . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1	ESPAÇO DE FASE NC . . . . .	15
2.1.1	<b>Produto estrela e a Estrutura Simplética . . . . .</b>	<b>16</b>
2.2	MECÂNICA CLÁSSICA NO ESPAÇO NC . . . . .	17
2.3	POTENCIAIS CENTRAIS NO ESPAÇO DE FASE NÃO COMUTATIVO	19
2.3.1	<b>Quantidades Conservadas . . . . .</b>	<b>20</b>
2.3.2	<b>Equações de Movimento em Coordenadas Esféricas . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>MODELO NÃO COMUTATIVO DOS POTENCIAIS DE YUKAWA E LEE-WICK . . . . .</b>	<b>23</b>
3.1	POTENCIAL YUKAWA NO ESPAÇO DE FASE NC . . . . .	23
3.2	POTENCIAL LEE-WICK NO ESPAÇO DE FASE NC . . . . .	24
<b>4</b>	<b>PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DOS POTENCIAIS DE YUKAWA E LEE-WICK EM SISTEMAS NC . . . . .</b>	<b>27</b>
4.1	ENSEMBLES CANÔNICO E MICROCANÔNICO . . . . .	27
4.1.1	<b>Densidade de estado e temperatura para o potencial Yukawa no espaço de fase NC . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1.2	<b>Densidade de estado e temperatura para o potencial Lee-Wick no espaço de fase NC . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>A ABORDAGEM NÃO COMUTATIVA NA MECÂNICA ESTADÍSTICA DE BOLTZMANN-GIBBS . . . . .</b>	<b>33</b>
5.1	PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS . . . . .	33
5.1.1	<b>Capacidade Térmica para o Potencial Yukawa não comutativo</b>	<b>34</b>
5.1.2	<b>Capacidade térmica para o potencial Lee-Wick NC . . . . .</b>	<b>36</b>
5.2	CAPACIDADES TÉRMICAS NEGATIVAS E EFEITOS DA NÃO COMUTATIVIDADE . . . . .	40
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>APÊNDICE – DEMONSTRAÇÕES COMPLEMENTARES .</b>	<b>49</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As teorias de espaço de fases não comutativas (NC) surgiram como uma estrutura promissora na física teórica, desafiando as concepções convencionais de continuidade do espaço-tempo e oferecendo novos insights sobre a estrutura microscópica da matéria e das interações. Essas abordagens são motivadas por diversas indicações independentes, desde teorias fundamentais da gravidade até sistemas de matéria condensada em condições extremas, nos quais o próprio espaço-tempo pode possuir uma estrutura discreta ou deformada em distâncias muito curtas.

Estruturas NC também têm sido amplamente exploradas em diferentes áreas da física teórica, como teorias de altas energias e teorias quânticas de campos, nas quais divergências surgem naturalmente. A introdução de uma álgebra NC nesses contextos busca mitigar tais divergências ao impor uma escala fundamental de comprimento no espaço-tempo, regularizando naturalmente as divergências ultravioletas (UV)[1–21]. Em escalas de comprimento muito pequenas, a invariância de Lorentz pode ser efetivamente violada. No entanto, no limite em que o parâmetro de NC tende a zero, os resultados comutativos convencionais são recuperados [1, 2, 21–27].

As formulações de espaço de fase NC oferecem uma alternativa complementar às abordagens convencionais baseadas em renormalização, particularmente diante de suas limitações conhecidas [20, 28]. Ao preservar a invariância de escala, essas estruturas fornecem uma descrição unificada em diferentes escalas de energia, do ultravioleta (UV) ao infravermelho (IR) [4, 29]. Como resultado, permitem a construção de modelos cujas previsões podem, em princípio, ser confrontadas com dados experimentais ou observacionais em uma ampla variedade de regimes.

Estudos recentes têm explorado as implicações das estruturas NC em diversos contextos, incluindo relações de incerteza modificadas, termodinâmica quântica e máquinas térmicas. Nesses cenários, mostrou-se que a não comutatividade pode alterar os espectros de energia, a entropia e a eficiência de ciclos termodinâmicos, levando a desvios potencialmente observáveis em relação às previsões da teoria convencional [30–33].

Embora as formulações NC sejam frequentemente desenvolvidas no contexto da mecânica quântica e de teorias de campos baseadas em operadores, o presente trabalho adota uma abordagem complementar fundamentada na deformação da estrutura do espaço de fase. Essa perspectiva permite investigar diretamente como modificações geométricas afetam a dinâmica clássica e, conseqüentemente, as propriedades termoestatísticas de sistemas interagentes.

Diferentemente da maior parte dos estudos disponíveis na literatura, que se concentram em sistemas de partícula única ou em aspectos estritamente quânticos da termodinâmica, nossa análise considera sistemas interagentes descritos por potenciais centrais de

curto alcance. Dessa forma, estabelece-se uma conexão entre a geometria não comutativa do espaço de fase e a mecânica estatística.

Apesar do crescente interesse por sistemas não comutativos, ainda são relativamente escassos os trabalhos dedicados à investigação termoestatística de potenciais centrais em espaços de fase não comutativos. Em particular, até onde sabemos, não se identifica na literatura uma análise sistemática unificada dos potenciais de Yukawa e Lee–Wick que trate simultaneamente os ensembles microcanônico e canônico dentro de uma abordagem clássica em espaço de fase não comutativo. Essa lacuna motivou o desenvolvimento da presente tese.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é investigar de que maneira deformações induzidas pela não comutatividade alteram o comportamento termodinâmico de sistemas interagentes. Para isso, são considerados dois importantes modelos de interação de curto alcance, os potenciais de Yukawa e Lee–Wick, amplamente empregados em diferentes áreas da física, incluindo teorias nucleares, física de plasmas e teorias efetivas de campos [34–38]. A questão central é se correções NC podem induzir mudanças qualitativas nas propriedades termodinâmicas, como o surgimento de regimes não triviais ou comportamentos anômalos, mesmo em sistemas que não são intrinsecamente de longo alcance. Essa questão é ainda motivada pela perspectiva mais ampla de que propriedades termodinâmicas podem codificar informações sobre a geometria subjacente do espaço de fase, um ponto de vista que tem recebido atenção em diferentes abordagens de gravidade emergente.

Explorar a termodinâmica de sistemas com estruturas deformadas de espaço de fase pode fornecer insights sobre como modificações geométricas em nível microscópico influenciam observáveis macroscópicos e possivelmente mimetizam características tipicamente associadas a sistemas fortemente correlacionados ou de interação de longo alcance. Além disso, uma motivação adicional para investigar a termodinâmica de potenciais de curto alcance reside na conexão entre interações de alcance finito e fenômenos emergentes em gravidade e cosmologia.

Nos últimos anos, trabalhos como os de Jacobson [39] e Verlinde [40] exploraram a ideia de que a gravidade pode emergir como um fenômeno entrópico, ligado à termodinâmica de horizontes e a princípios holográficos. Nesse contexto, uma compreensão detalhada de como potenciais de curto alcance influenciam quantidades termodinâmicas, como entropia, temperatura e capacidade térmica, pode fornecer insights sobre a origem microscópica da dinâmica gravitacional e sobre a descrição termodinâmica de sistemas confinados, incluindo estrelas, núcleos atômicos e modelos cosmológicos com interações efetivas de curto alcance [44–49].

Motivada por essas questões, esta tese investiga os efeitos da não comutatividade sobre potenciais centrais de curto alcance e suas propriedades termoestatísticas em espaços de fase não comutativos. Para isso, a presente tese está organizada da seguinte forma. No

Capítulo 2, apresenta-se uma revisão sobre espaços de fase NC e mecânica clássica, na qual discutimos a álgebra não comutativa e sua aplicação a um sistema hamiltoniano confinado composto por duas partículas arbitrárias. No Capítulo 3, apresentam-se as extensões NC dos potenciais de Yukawa e Lee–Wick, detalhando-se a derivação dos Hamiltonianos modificados, bem como das equações de movimento e das quantidades conservadas. No Capítulo 4, realiza-se a análise no ensemble microcanônico, na qual são calculadas a densidade de estados e a temperatura para os potenciais de Yukawa e Lee–Wick na estrutura NC. No Capítulo 5, desenvolve-se a análise no ensemble canônico, obtendo as funções de partição, as energias médias e as capacidades térmicas para os potenciais mencionados anteriormente, com dependência explícita do parâmetro NC. O Capítulo 6 apresenta as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros. Por fim, no Apêndice A, apresentam-se algumas das passagens matemáticas mais importantes dos cálculos desenvolvidos ao longo da tese.

Parte dos resultados obtidos nesta tese foi publicada no artigo *Thermostatistical analysis and negative heat capacities of Yukawa and Lee–Wick potentials in noncommutative phase spaces* [62], evidenciando a relevância das investigações realizadas sobre os efeitos termodinâmicos da NC em potenciais centrais.

## 2 MECÂNICA CLÁSSICA E POTENCIAIS CENTRAIS EM ESPAÇOS DE FASE NÃO COMUTATIVOS

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão da mecânica clássica em espaços de fase NC, estabelecendo as bases teóricas necessárias para a análise dos sistemas físicos considerados ao longo deste trabalho. A motivação para essa abordagem reside na possibilidade de incorporar, em um contexto semiclássico, efeitos associados à NC do espaço-tempo, frequentemente relacionados a escalas da ordem do comprimento de Planck. Inicialmente, discutimos o conceito de espaço de fase NC e sua conexão com a estrutura algébrica da MQ e da NCMQ, nas quais relações de não comutação entre observáveis desempenham papel fundamental. Em seguida, apresentamos a deformação da estrutura simplética clássica por meio da introdução de colchetes de Poisson generalizados, os quais codificam a NC entre as coordenadas do espaço de fase. Posteriormente, aplicamos esse formalismo ao estudo de sistemas sujeitos a potenciais centrais, obtendo as equações de movimento modificadas pela estrutura NC e discutimos suas interpretações físicas. Para esta revisão, utilizamos como base as referências [50-54].

### 2.1 ESPAÇO DE FASE NC

As teorias de espaço de fase NC são um conceito importante em física teórica, referindo-se à ordem em que as operações são realizadas. Embora, em alguns contextos físicos, a ordem das operações seja irrelevante e as quantidades possam ser comutativas, existem casos em que ela desempenha um papel fundamental.

Um exemplo ocorre na MQ, onde operadores  $x$  e  $p$  satisfazem a relação de comutação a seguir

$$[x, p] = i\hbar, \quad (2.1)$$

a qual está associada ao princípio da incerteza de Heisenberg. Esse princípio estabelece que posição e momento linear não podem ser determinados simultaneamente com precisão arbitrária. Em vez disso, há uma relação de incerteza que envolve constantes fundamentais, como  $\hbar$ , a constante de Planck [53, 54].

Além da MQ, a teoria de espaço de fase NC também aparece em diversos contextos da física teórica, como a teoria das cordas, a teoria quântica de campos e a gravidade quântica. Em tais abordagens, sugere-se que o espaço-tempo pode apresentar uma estrutura NC em escalas extremamente pequenas, da ordem do comprimento de Planck [21]. Isso significa que as coordenadas espaço-tempo não comutam entre si nessa escala, levando a uma modificação das equações fundamentais da física.

Embora a teoria NC esteja mais formalizada e aplicada nas teorias da física quântica, ela pode ser entendida, em síntese, como um aspecto específico de certos formalismos teóricos, seja na matemática ou na física. Um exemplo disso é o estudo dos espaços NC,

que se aplica a uma variedade de áreas, desde a álgebra NC associada à mecânica clássica até as teorias quânticas e a física da matéria condensada, como no Efeito Hall quântico, no qual a não comutatividade aparece em suas coordenadas canônicas e nos momentos [51].

Na teoria NC, como uma realização particular dessas estruturas, ela é caracterizada pela relação de comutação entre operadores de coordenadas espaciais, isto é,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\tilde{\Theta}_{ij}, \quad (2.2)$$

onde  $\tilde{\Theta}_{ij}$  é uma matriz real antissimétrica que define o parâmetro de não comutatividade ( $\Theta$ ), o qual possui dimensão de área, e  $\hbar = 1$  é a constante de Planck em unidades naturais, adotada ao longo deste trabalho.

Tais espaços NC têm encontrado numerosas aplicações, incluindo estudos de buracos negros e gravidade massiva na relatividade geral, modelos efetivos em física da matéria condensada e várias formulações na teoria de cordas [26, 27].

### 2.1.1 Produto estrela e a Estrutura Simplética

No caso estritamente clássico, podemos incluir uma deformação modificando a estrutura simplética usual, gerando uma álgebra  $A_\alpha$  – conjunto de funções infinitamente diferenciáveis – equipada com o produto estrela [41, 42, 43, 44], dado por

$$(f \star g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha_{ab}\partial^a\partial^b\right) f(x)g(x')\Big|_{x'=x}, \quad (2.3)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis, e  $\alpha_{ab}$  é a nova estrutura simplética dada por

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_{ij} & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

As coordenadas espaciais  $x_i$  e os componentes do momento linear  $p_i$  satisfazem os colchetes de Poisson

$$\{x_i, x_j\} = \tilde{\Theta}_{ij}, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker.

A matriz antissimétrica  $\tilde{\Theta}_{ij}$  pode ser escrita em termos do tensor de Levi-Civita como

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Theta^k. \quad (2.6)$$

Essa relação será útil ao longo deste trabalho, pois, no formalismo hamiltoniano,  $\Theta^k$  é o parâmetro de NC que aparecerá nas equações de movimento. A relação completa entre o produto estrela e a estrutura simplética deformada, bem como a construção do mapeamento não comutativo no formalismo simplético, é apresentada em [45].

## 2.2 MECÂNICA CLÁSSICA NO ESPAÇO NC

A MCNC constitui uma extensão da mecânica clássica tradicional, na qual certas variáveis físicas passam a obedecer relações não comutativas. Na mecânica clássica convencional, grandezas como posição e momento são descritas por números reais que satisfazem as regras comutativas usuais da álgebra. Entretanto, na formulação NC, essas variáveis podem apresentar relações de não comutação, de modo que a ordem das operações pode influenciar os resultados.

No âmbito dessa abordagem, espaços de fase NC podem ser tratados a partir da extensão da estrutura do espaço de fase clássico. Consideremos, inicialmente, um conjunto de variáveis canônicas  $\alpha_a$ , com  $a = 1, \dots, 2n$ . Na literatura, essas variáveis são frequentemente denotadas por  $\zeta^a$  [51]; entretanto, neste trabalho adotaremos a notação  $\alpha_a$  por conveniência. Para o caso de interesse deste trabalho, o espaço de fase é definido pelas coordenadas

$$\alpha_a = (x_i, p_i), \quad (2.7)$$

com  $(i = 1, 2, 3)$ . No formalismo hamiltoniano, a evolução temporal de qualquer observável é determinada por seus colchetes de Poisson com a Hamiltoniana  $H(\alpha_a)$ . Assim, as equações de movimento assumem a forma

$$\dot{\alpha}_a = \{\alpha_a, H\}, \quad (2.8)$$

onde  $\dot{\alpha}_a = d\alpha_a/dt$ . De maneira equivalente, para uma função arbitrária  $f$  definida no espaço de fase, tem-se

$$\dot{f} = \{f, H\}. \quad (2.9)$$

Em particular, para as coordenadas de posição e momento, temos

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad (2.10)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.11)$$

Usando os colchetes de Poisson dados pela Eq. (2.5), e considerando as funções arbitrárias  $f(x, p)$  e  $g(x, p)$ , o colchete de Poisson entre essas funções assume a forma generalizada

$$\{f, g\} = \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (2.12)$$

O primeiro termo representa a correção associada à NC espacial, enquanto o segundo termo corresponde ao colchete de Poisson usual da mecânica clássica.

Considerando a Hamiltoniana de um sistema de duas partículas sujeitas a um potencial arbitrário  $V(x)$ ,

$$H = \frac{p_i p^i}{2\mu} + V(x), \quad (2.13)$$

onde  $p_i$  representa o momento linear e  $\mu$  é a massa reduzida, temos que as equações de movimento se tornam

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (2.14)$$

Como

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{\mu}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}, \quad (2.15)$$

segue que

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{\mu} + \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}; \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (2.17)$$

o que fornece

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \quad (2.18)$$

onde usamos a Eq. (2.13) nas Eqs. (2.10) e (2.11). As Eqs. (2.16) e (2.18) representam as equações de Hamilton modificadas pela estrutura do espaço de fase NC.

Para obter uma equação do tipo newtoniana, derivamos a Eq. (2.16) em relação ao tempo,

$$\ddot{x}_i = \frac{\dot{p}_i}{\mu} + \tilde{\Theta}_{ij} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x_j} \right). \quad (2.19)$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k, \quad (2.20)$$

e utilizando a Eq. (2.18), encontramos

$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k. \quad (2.21)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\mu$ , obtemos

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \mu \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k. \quad (2.22)$$

A Eq. (2.16) representa uma generalização da segunda lei de Newton no contexto da mecânica não comutativa. O primeiro termo corresponde à força conservativa usual derivada do potencial, enquanto o segundo termo representa uma força efetiva induzida pela não comutatividade do espaço. Diferentemente da força conservativa, essa contribuição depende explicitamente da velocidade da partícula e da Hessiana do potencial, indicando que a resposta dinâmica do sistema é sensível tanto à geometria local do potencial quanto ao estado de movimento da partícula. Além disso, como o tensor de não comutatividade  $\tilde{\Theta}_{ij}$  é

antissimétrico e pode ser escrito na Eq. (2.6), essa força introduz um acoplamento direcional que pode ser interpretado como uma rotação local da força efetiva, análoga ao efeito produzido por forças giroscópicas ou magnéticas, embora sua origem seja exclusivamente geométrica e decorrente da estrutura não comutativa do espaço de fase. No limite comutativo  $\tilde{\Theta}_{ij} \rightarrow 0$ , recupera-se imediatamente a equação usual da mecânica clássica,

$$\mu \ddot{x}^i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}. \quad (2.23)$$

### 2.3 POTENCIAIS CENTRAIS NO ESPAÇO DE FASE NÃO COMUTATIVO

Consideremos agora um potencial central  $V(r)$ , com  $r = \sqrt{x_i x_i}$ , onde adotamos a convenção de soma de Einstein, segundo a qual índices repetidos implicam soma sobre as componentes espaciais, isto é,  $x_i x_i = \sum_{i=1}^3 x_i^2$ . Nesse caso, a hamiltoniana dada na Eq. (2.13) assume a forma

$$H = \frac{p_i p_i}{2\mu} + V(r). \quad (2.24)$$

Aplicando a Eq. (2.11) ao caso de um potencial central, temos

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{dV}{dr} \frac{x_j}{r}. \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.16), obtemos

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{\mu} + \varepsilon_{ijk} \Theta_k \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} x_j, \quad (2.26)$$

onde usamos a relação dada na Eq. (2.6). Definindo

$$\Omega_j = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \Theta_j, \quad (2.27)$$

que pode ser interpretada como a velocidade angular no espaço de fase NC. A Eq. (2.26) pode ser reescrita como

$$p_i = \mu \dot{x}_i + \mu \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k. \quad (2.28)$$

Esta equação representa os momentos de uma partícula vistos a partir de um sistema não-inercial com velocidade angular  $\Omega_j$  [51].

Derivando a Eq. (2.26) em relação ao tempo, obtemos

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{x_i}{r} \frac{dV}{dr} + \mu \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \Omega_k + \mu \varepsilon_{ijk} x_j \dot{\Omega}_k, \quad (2.29)$$

onde foram usadas as Eqs. (2.18) e (2.25).

A Eq. (2.29) corresponde à equação de Hill–Clohessy–Wiltshire generalizada. Alternativamente, pode ser interpretada como uma equação de movimento análoga à dinâmica

em um referencial efetivamente não inercial. O primeiro termo descreve a força central conservativa derivada do potencial  $V(r)$ . O segundo termo apresenta a estrutura típica de uma força do tipo Coriolis generalizada, sendo linear na velocidade efetiva do sistema e responsável pelo acoplamento entre os graus de liberdade radiais e angulares. O terceiro termo, proporcional a  $\dot{\Omega}_k$ , pode ser interpretado como uma força do tipo Euler, associada à variação temporal da rotação efetiva. Esse termo é identificado como o termo de Euler e contribui apenas quando a estrutura não comutativa apresenta dependência explícita do tempo, desaparecendo no regime estacionário em que  $\Omega$  é constante.

### 2.3.1 Quantidades Conservadas

Embora o Hamiltoniano na Eq.(2.24) seja uma constante de movimento, as componentes do momento angular  $L_i$  não são conservadas no formalismo NC, uma vez que deixam de gerar rotações no espaço de fase deformado, isto é,

$$L_i = \mu \varepsilon_{ijk} x_j \dot{x}_k. \quad (2.30)$$

Para verificarmos a não conservação do momento angular dado na Eq. (2.30), fazemos a derivada em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \mu \varepsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (x_j \dot{x}_k) \\ &= \mu \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k + \mu \varepsilon_{ijk} x_j \ddot{x}_k \\ &= \mu \varepsilon_{ijk} x_j \left[ -\frac{x_k}{r} \frac{dV}{dr} + \mu \varepsilon_{klm} \dot{x}_l \Omega_m + \mu \varepsilon_{klm} x_l \dot{\Omega}_m \right] \\ &= \mu^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} x_j \dot{x}_l \Omega_m + \mu^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} x_j x_l \dot{\Omega}_m \\ &= \mu^2 \left[ (x_m \Omega_m) \dot{x}_i - (x_l \dot{x}_l) \Omega_i + (x_m \dot{\Omega}_m) x_i - r^2 \dot{\Omega}_i \right] \\ &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

ou seja, devido aos termos proporcionais a  $\Omega_i \propto \Theta_i$ , surgem contribuições adicionais na derivada temporal do momento angular. Dessa forma, o torque efetivo induzido pela não comutatividade quebra a conservação do momento angular orbital usual no espaço de fase NC. Ainda assim, existe uma quantidade conservada associada às rotações em torno da direção definida pelo vetor  $\Theta$ ,

$$L_\Theta = \Theta_{ij} x_i p_j + \frac{1}{2} \Theta_{ij} p_j \Theta_{ik} p_k. \quad (2.32)$$

Adotando, sem perda de generalidade, o vetor de NC orientado ao longo do eixo  $z$ ,  $\Theta_i = (0, 0, \Theta)$ , a NC permanece restrita ao plano  $xy$ , preservando a simetria axial do sistema. Nesse caso, o gerador conservado assume a forma

$$L_\Theta = \Theta \left[ (x p_y - y p_x) - \Theta \mu V(r) - \frac{\Theta p_z^2}{2} + \Theta \mu H \right]. \quad (2.33)$$

Sendo a Hamiltoniana uma quantidade conservada, podemos identificar a seguinte constante de movimento,

$$M = xp_y - yp_x - \Theta \mu V(r) - \frac{\Theta p_z^2}{2}, \quad (2.34)$$

o que também constitui uma quantidade conservada. A constante  $M$  generaliza a componente canônica do momento angular  $L_z = xp_y - yp_x$  na presença do NC. Os termos adicionais proporcionais ao parâmetro  $\Theta$  NC surgem da deformação da estrutura do espaço de fase e codificam correções à dinâmica orbital padrão. Nesse sentido,  $M$  pode ser interpretado como uma quantidade conservada deformada associada à simetria rotacional na estrutura NC.

### 2.3.2 Equações de Movimento em Coordenadas Esféricas

Uma escolha apropriada, quando estamos trabalhando com potenciais centrais, é utilizar coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . Fazendo então as transformações de coordenadas, temos para o potencial central

$$\mu \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) = -\frac{dV(r)}{dr} + \mu r \Omega \dot{\phi} \sin^2(\theta); \quad (2.35)$$

$$\mu \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\theta} \right) - \mu r^2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \mu r^2 \Omega \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\theta); \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mu r^2 \dot{\phi} \sin^2(\theta) \right) = -\mu r \sin(\theta) \frac{d}{dt} (r \Omega \sin(\theta)). \quad (2.37)$$

Considerando o caso especial de órbitas equatoriais, ou seja,  $\theta = \pi/2$  [50, 51], obtemos:

$$\mu \left( \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) = -\frac{dV}{dr} + \mu r \Omega \dot{\phi}; \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mu r^2 \dot{\phi} \right) = -\mu r \frac{d}{dt} (r \Omega). \quad (2.39)$$

Em termos dessas coordenadas, a constante de movimento  $M$  dada pela Eq. (2.34) se torna

$$M = \mu r^2 \left( \dot{\phi} + \Omega \right) - \Theta \mu V(r), \quad (2.40)$$

e, a Eq. (2.24) se torna, desconsiderando o termo de  $\mu^2 r^2 \Omega^2$  que é de segunda ordem em  $\Theta$ ,

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\phi}^2}{2} + \mu r^2 \dot{\phi} \Omega + V(r) \quad (2.41)$$

Da Eq. (2.40), temos

$$\dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2} + \left( \frac{\mu r + 2}{r^2} \right) \Theta V(r), \quad (2.42)$$

assim a Eq. (2.41), pode ser reescrita na forma

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + \frac{M}{r^2} \Theta V(r) + V(r), \quad (2.43)$$

ou,

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r), \quad (2.44)$$

onde o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} + V(r) \left( 1 + \frac{M\Theta}{r^2} \right). \quad (2.45)$$

Neste capítulo, trabalhamos o formalismo da mecânica clássica em espaços de fase NC e aplicamos a sistemas sujeitos a potenciais centrais. A introdução dos colchetes de Poisson deformados levou a correções nas equações de movimento, interpretadas como efeitos induzidos pela geometria não comutativa do espaço de fase. Em particular, verificamos que potenciais centrais passam a apresentar termos adicionais análogos a forças inerciais, modificando a dinâmica clássica usual. No próximo capítulo, aplicaremos esse formalismo ao estudo de potenciais de Yukawa e Lee–Wick.

### 3 MODELO NÃO COMUTATIVO DOS POTENCIAIS DE YUKAWA E LEE–WICK

Neste capítulo, investigamos os efeitos da NC do espaço de fase em sistemas descritos pelos potenciais de Yukawa e Lee–Wick. Para isso, incorporamos as correções NC no formalismo hamiltoniano e obtivemos as Hamiltonianas efetivas associadas a cada potencial. Em seguida, derivamos as equações de movimento radiais, analisando as modificações introduzidas pelo parâmetro de  $\Theta$  na dinâmica do sistema. Também discutimos o comportamento dos potenciais efetivos e suas correções NC, destacando que os efeitos da NC tornam-se mais relevantes em escalas microscópicas.

#### 3.1 POTENCIAL YUKAWA NO ESPAÇO DE FASE NC

O potencial de Yukawa, proposto originalmente por Hideki Yukawa [34, 35], descreve interações de curto alcance entre partículas mediadas por bósons massivos. Esse potencial possui ampla aplicação em Física Nuclear, Física de Partículas e Física Atômica, sendo utilizado na descrição de forças efetivas de alcance finito. Sua principal característica é o decaimento exponencial da interação com a distância, sendo dado por

$$V_Y(r) = -k \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (3.1)$$

onde  $k$  é a constante de acoplamento e  $\mu$  é um parâmetro efetivo relacionado à massa reduzida do sistema de dois corpos, que define a escala de comprimento de interação característica, e  $r$  corresponde à distância radial entre as partículas. O termo exponencial  $e^{-\mu r}$  introduz o caráter de curto alcance da interação, fazendo com que o potencial decaia rapidamente para grandes distâncias. Além disso, no limite  $\mu \rightarrow 0$ , o potencial de Yukawa reduz-se ao potencial Coulombiano [44].

Para um sistema de duas partículas interagindo por meio do potencial de Yukawa no espaço de fase NC, utilizamos a Eq. (2.43) e substituímos  $V(r) = V_Y(r)$ . Assim, a Hamiltoniana do sistema pode ser escrita como

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + \frac{M}{r^2} \Theta \left( -k \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) - k \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (3.2)$$

onde utilizamos a Eq. (3.1) na Eq. (2.43).

A Hamiltoniana pode ser reescrita na forma

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + V_{NCYP}(r), \quad (3.3)$$

em que

$$V_{NCYP}(r) = -\frac{ke^{-\mu r}}{r} - \frac{\Theta M ke^{-\mu r}}{r^3}. \quad (3.4)$$

A Fig. (1) ilustra o potencial de Yukawa NC. No painel esquerdo, compara-se o potencial de Yukawa puro  $V_Y(r)$ , o termo de correção não comutativo  $V_{NC}(r)$  e o potencial

resultante  $V_{NCYP}(r)$ . Observa-se que o potencial de Yukawa apresenta o comportamento típico de curto alcance, decaindo exponencialmente com a distância, enquanto a contribuição NC modifica significativamente o potencial em pequenas distâncias, deformando a interação em relação ao caso comutativo. No painel direito, apresenta-se o potencial de Yukawa NC para diferentes valores do parâmetro  $\Theta$ . Verifica-se que o aumento de  $\Theta$  intensifica as correções não comutativas, sobretudo na região de curto alcance. Para valores maiores de  $r$ , as curvas tendem a coincidir, indicando que os efeitos da não comutatividade tornam-se desprezíveis em longas distâncias, preservando o comportamento assintótico do potencial.

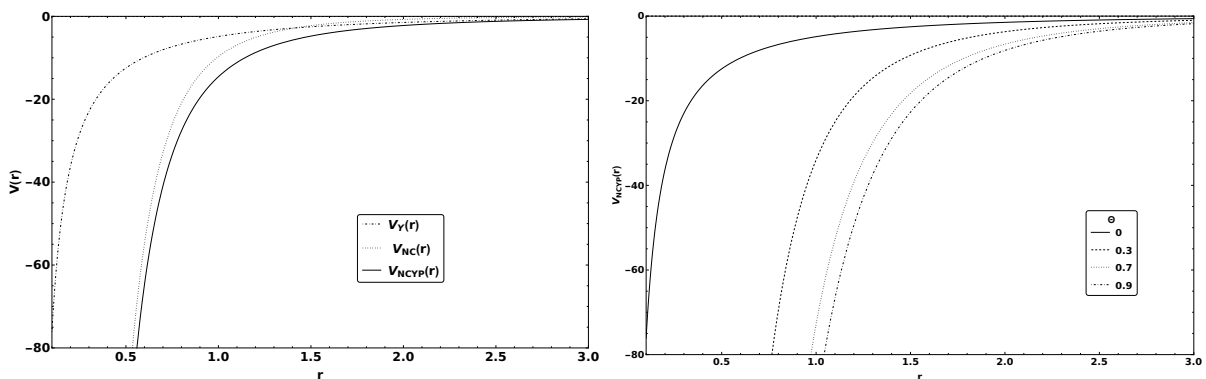


Figura 1 – Painel esquerdo: comparação entre o potencial  $V_Y(r)$ , a correção  $V_{NC}(r)$  e o potencial resultante  $V_{NCYP}(r)$  em função da distância radial  $r$ . Painel direito: comportamento de  $V_{NCYP}(r)$  para  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

Como a Hamiltoniana representa a energia total do sistema,  $E = H$ , utilizando a Eq. (3.2) e derivando em relação ao tempo, obtemos a equação de movimento radial

$$\mu\ddot{r} = \frac{M^2}{\mu r^3} - \frac{k e^{-\mu r}(1 + \mu r)}{r^2} - M\Theta k \frac{e^{-\mu r}(r + 3\mu)}{r^4}. \quad (3.5)$$

A Eq. (3.5) descreve a dinâmica radial do sistema, incorporando os efeitos do termo centrífugo, do potencial de Yukawa e da correção associada à NC do espaço de fase.

### 3.2 POTENCIAL LEE-WICK NO ESPAÇO DE FASE NC

O potencial de Lee-Wick (LW) pode ser interpretado como a subtração do potencial de Coulomb pelo potencial de Yukawa [44], sendo finito na origem, isto é,  $V_{LW}(0) = \mu k$ . Este potencial também incorpora efeitos de curto alcance e é dado por

$$V_{LW}(r) = k \frac{1 - e^{-\mu r}}{r}. \quad (3.6)$$

Usando Eq. (3.6), e considerando  $V(r) = V_{LW}(r)$  e substituindo na Eq. (2.43), temos a hamiltoniana para o sistema de interação via potencial LW

$$H = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + V_{NCLWP}(r), \quad (3.7)$$

onde  $V_{NCLW}(r)$  é o potencial de Lee-Wick no contexto NC, dado por

$$V_{NCLWP}(r) = \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{M k \Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}). \quad (3.8)$$

A dependência radial do termo NC na Eq. (3.8) é proporcional a  $r^{-3}$ , e o NCLWP diverge na origem quando  $\Theta \neq 0$ .

A Fig. (2) ilustra o potencial de Lee-Wick em comparação ao NCLWP. No painel esquerdo, observa-se a comparação entre o potencial puro  $V_{LW}(r)$ , a correção NC  $V_{NC}(r)$  e o potencial resultante  $V_{NCLWP}(r)$ , evidenciando que a contribuição NC modifica significativamente o comportamento do potencial, principalmente na região de curto alcance. No painel direito, verifica-se o efeito da variação do parâmetro  $\Theta$ , mostrando que o aumento da NC intensifica as deformações do potencial, tornando-o mais profundo nas proximidades da origem. Em ambos os casos, as curvas tendem a coincidir para grandes distâncias, indicando que os efeitos da NC tornam-se desprezíveis no regime assintótico, permanecendo relevantes apenas em escalas microscópicas, como esperado fisicamente.

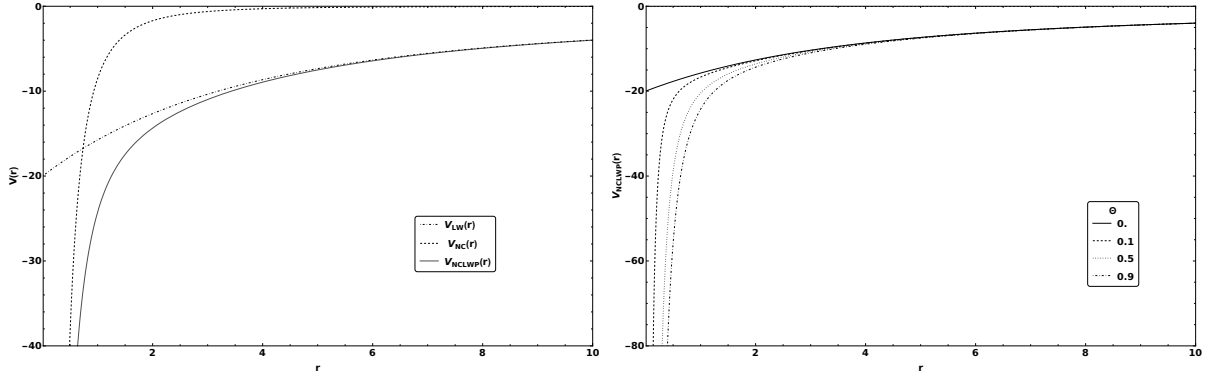


Figura 2 – Painel esquerdo: comparação entre o potencial puro  $V_{LW}(r)$ , a correção  $V_{NC}(r)$  e do potencial resultante  $V_{NCLWP}(r)$  em função da distância radial  $r$ . Painel direito: comportamento de  $V_{NCLWP}(r)$  para  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0.1$ ,  $\Theta = 0.5$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

Voltando a Eq. (3.7) e substituindo a Eq. (3.8) a expressão geral para a hamiltoniana via interação LW no espaço de fase NC se torna,

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{M k \Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}). \quad (3.9)$$

Como a hamiltoniana corresponde a energia do sistema, isto é  $H = E$ , fazemos a derivada segunda da (3.9) e obtemos a equação da órbita, cuja solução será investigada em trabalhos futuros.

$$\mu \ddot{r} = \frac{M^2}{\mu r^3} - k \left[ -\frac{1}{r^2} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r} \right] - M k \Theta \left[ -\frac{3}{r^4} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r^3} \right]. \quad (3.10)$$

A Eq. (3.10) representa a equação radial de movimento do sistema sob a influência do potencial de Lee–Wick no contexto NC. O segundo termo corresponde à contribuição centrífuga associada ao momento angular da partícula, atuando como uma barreira efetiva que dificulta a aproximação à origem. Os termos seguintes descrevem a força derivada do potencial de Lee–Wick, cuja estrutura exponencial regulariza o potencial em pequenas escalas. Os dois últimos termos incorporam as correções associadas à NC, introduzindo contribuições adicionais dependentes de potências mais elevadas de  $1/r$ , que se tornam mais relevantes no regime de curto alcance. Assim, a presença do parâmetro  $\Theta$  modifica a dinâmica radial do sistema, produzindo desvios em relação ao caso comutativo, principalmente em escalas microscópicas.

As Eqs. (3.5) e (3.10) representam as equações de movimento associadas às forças centrais efetivas no espaço de fase NC para os potenciais de Yukawa e Lee–Wick. Devido à presença de termos não lineares, não se espera, em geral, uma solução analítica fechada para  $r(t)$ . Dessa forma, a investigação do sistema pode ser realizada por métodos aproximativos, como expansões perturbativas ou integração numérica, permitindo analisar as modificações introduzidas pela NC. Entretanto, como a obtenção dessas soluções não constitui o foco central desta tese, tal análise é deixada para trabalhos futuros.

Com base na Hamiltoniana obtida para cada potencial estudado neste capítulo no regime clássico NC, o próximo capítulo será dedicado à investigação das propriedades termodinâmicas desses sistemas por meio dos formalismos canônico e microcanônico.

## 4 PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DOS POTENCIAIS DE YUKAWA E LEE-WICK EM SISTEMAS NC

Neste capítulo, introduzimos o formalismo da mecânica estatística para a análise das propriedades termodinâmicas dos potenciais NCYP, NCLWP. Como já mencionado, esses potenciais são de curto alcance e, em sistemas com esse tipo de interação, é comum que a descrição microcanônica seja equivalente à do conjunto canônico, uma vez que, nesse regime, lidamos com integrais mais simples da função de Boltzmann. Na mecânica estatística de Boltzmann, para interações de curto alcance, tanto a energia quanto a entropia são aditivas em relação aos subsistemas [44]. Neste contexto, estabelecemos o arcabouço termoestatístico em um espaço de fase NC, com o objetivo de investigar como a introdução do parâmetro  $\Theta$  modifica as grandezas termodinâmicas de sistemas governados por interações do tipo Yukawa e Lee-Wick. Ao longo deste capítulo, obtemos e analisamos a densidade de estados e o inverso da temperatura. Para esses estudos e análises nos baseamos nas Refs.[44, 57]

### 4.1 ENSEMBLES CANÔNICO E MICROCANÔNICO

Quando trabalhamos com o ensemble canônico, consideramos o sistema a uma temperatura fixa, o que permite analisar propriedades termodinâmicas como a energia interna. Por outro lado, no ensemble microcanônico, fixa-se a energia do sistema para estudar grandezas como a densidade de estados, a temperatura e a capacidade térmica. Nesse ensemble, a energia do sistema,  $E = H$ , permanece constante. A partir dessa descrição, é possível obter diversas propriedades termoestatísticas, sendo a densidade de estados  $g(E)$  uma quantidade fundamental, pois permite o cálculo da entropia, da temperatura e da capacidade térmica.

Para construir a descrição estatística do sistema em análise, iniciamos com a formulação do ensemble microcanônico, considerando um sistema representado por um Hamiltoniano definido no espaço de fase das coordenadas de posição e momento. Assim, a densidade de estados é dada por

$$g(E) = \frac{1}{N!} \int \delta[E - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})] d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  representam, respectivamente, os vetores posição e momento, enquanto  $N!g(E)$  corresponde ao volume do espaço de fase associado à superfície de energia constante [44].

Consideramos que a coordenada radial  $r$  varia no intervalo  $(b, R)$ , assumindo que as partículas podem ser tratadas como esferas rígidas de raio  $b/2$ . Além disso, o sistema encontra-se confinado em uma região esférica de raio  $R$ . Integrando a Eq. (4.1), obtemos

$$g(E) = AR^3 \int_b^{r_{\max}} r^2 [E - V(r)]^2 dr, \quad (4.2)$$

onde  $A = 64\pi^5\mu^3/3$ , e  $b$  corresponde ao raio das partículas. O limite superior  $r_{\max}$  é determinado pela condição  $V(r_{\max}) = E$ , sujeito à restrição geométrica  $b < r_{\max} < R$ .

A Eq (4.2) será a expressão utilizada para a análise dos potenciais de NCYP e NCLWP.

Para obtermos o inverso da temperatura em termos da energia para o potencial  $V(r)$ , utilizamos a equação da entropia  $S(E)$ , dada por

$$S(E) = \ln g(E), \quad (4.3)$$

onde consideramos a constante de Boltzmann  $k_B = 1$  (normalmente a expressão da entropia é  $S(E) = k_B \ln g(E)$ ). Esta se relaciona com a temperatura na forma

$$\frac{1}{T(E)} = \beta(E) = \frac{\partial S(E)}{\partial(E)}, \quad (4.4)$$

sendo  $\beta(E) = \frac{1}{T(E)}$ , onde todas as propriedades termodinâmicas interessantes do sistema podem ser compreendidas a partir da curva  $T(E)$  [56, 57].

A partir dessas expressões, aplicamos o formalismo aos potenciais de Yukawa e Lee–Wick no contexto NC, obtendo as correspondentes relações para a densidade de estados e a temperatura do sistema.

#### 4.1.1 Densidade de estado e temperatura para o potencial Yukawa no espaço de fase NC

Para construir a descrição estatística do sistema em análise, começaremos com a construção do conjunto microcanônico. Usando a Eq. (3.4), na Eq. (4.2), obtemos a expressão para a densidade de estados do NCYP

$$g_{NCYP}(E) = AR^3 \int_b^{r_{\max}} r^2 [E - V_{YPNC}(r)]^2 dr \quad (4.5)$$

Portanto, considerando termos até primeira ordem no parâmetro  $\Theta$ , a densidade de estados  $g(E)$  pode ser escrita como

$$g_{NCYP}(E) = AR^3 \int_b^{r_{\max}} r^2 \left[ E^2 + \frac{2Ek e^{-\mu r}}{r} + \frac{2E\Theta k M e^{-\mu r}}{r^3} + \frac{k^2 e^{-2\mu r}}{r^2} + \frac{2\Theta k^2 M e^{-2\mu r}}{r^4} \right]. \quad (4.6)$$

Realizando os cálculos necessários, encontramos a densidade de estados em termos da energia, desconsiderando os termos de  $\Theta^2$ . Avaliando as integrais na Eq. (4.5), obtemos, até primeira ordem em  $\Theta$ , o seguinte resultado

$$g_{NCYP}(E) = g_{YP}^{(0)}(E) + \Theta g_{YP}^{(1)}(E), \quad (4.7)$$

onde  $g_{YP}^{(0)}(E)$  é a densidade de estados para o caso comutativo [44]

$$\begin{aligned} g_{YP}^{(0)}(E) &= \frac{AR^3 E^2}{3} \left\{ r_{\max}^3 - b^3 - \frac{3k^2}{2E^2\mu} (e^{-2\mu r_{\max}} - e^{-2\mu b}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k}{E\mu} \left[ e^{-\mu r_{\max}} \left( \frac{1}{\mu} + r_{\max} \right) - e^{-\mu b} \left( \frac{1}{\mu} + b \right) \right] \right\}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

e  $g_{YP}^{(1)}(E)$  é a correção correspondente ao termo NC da densidade de estados, dada por

$$g_{YP}^{(1)}(E) = 2AR^3kM \left\{ E [\text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu r_{\max})] + k \left[ \frac{e^{-2\mu b}}{b} - \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + 2\mu (\text{Ei}(2\mu b) - \text{Ei}(2\mu r_{\max})) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

onde Ei é a função integral exponencial, e  $r_{\max}$  é a distância radial máxima, determinada pela condição  $V_{NCYP}(r = r_{\max}) = E$ , com  $e^{-\mu r_{\max}} \simeq 1 - \mu r_{\max}$ , e considerando até a primeira ordem em  $\Theta$ , é dada por

$$r_{\max} \approx -\frac{k}{E - k\mu} - \frac{ME\Theta}{k}, \quad (4.10)$$

para,

$$-\frac{ke^{-\mu b}}{b} - \frac{\Theta k M e^{-\mu b}}{b^3} < \frac{E}{k} < -\frac{ke^{-\mu R}}{R} - \frac{\Theta k M e^{-\mu R}}{R^3}, \quad (4.11)$$

e

$$r_{\max} = R, \quad -\frac{ke^{-\mu R}}{R} - \frac{\Theta k M e^{-\mu R}}{R^3} < \frac{E}{k} < \infty. \quad (4.12)$$

O resultado da Eq. (4.7) mostra como a introdução do parâmetro NC  $\Theta$  modifica o comportamento termostático do sistema em comparação com o caso tradicional ( $\Theta = 0$ ), no qual o resultado usual é recuperado [44].

Usando as relações para a entropia e o inverso da temperatura em função da energia para o caso NCYP, até primeira ordem em  $\Theta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{NCYP}(E)} &= \frac{1}{g_{NCYP}(E)} \frac{\partial g_{NCYP}(E)}{\partial E} \\ &= \frac{1}{g_{NCYP}(E)} \left\{ \frac{\partial g_{YP}^{(0)}(E)}{\partial E} + \Theta \frac{\partial g_{YP}^{(1)}(E)}{\partial E} \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Utilizando as Eqs. (4.8) e (4.9), calculando suas derivadas em relação à energia e substituindo os resultados na Eq. (4.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{NCYP}(E)} &= \frac{1}{g_{NCYP}(E)} \left\{ \frac{2g_{YP}^{(0)}(E)}{E} - \frac{AR^3E}{k} \left\{ B(E) + Er_{\max}^4 \left( 1 - \frac{6e^{-\mu r_{\max}}}{Er_{\max}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k^3}{E^2} \left[ \left( 1 - \frac{Er_{\max}^2}{k} \right) e^{-2\mu r_{\max}} - e^{-2\mu b} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2AR^3kM\Theta \left\{ -\frac{E^2}{2k^2} \left[ r_{\max} + \frac{k}{E} e^{-\mu r_{\max}} \right]^2 + [\text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu r_{\max})] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k}{(k\mu - E)^2} C(E) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

com as funções  $B(E)$  e  $C(E)$  definidas como

$$B(E) = \frac{6k}{E\mu} \left[ e^{-\mu r_{\max}} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) - e^{-\mu b} \left( b + \frac{1}{\mu} \right) \right], \quad (4.15)$$

$$C(E) = -E \frac{e^{\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + k \left[ \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}^2} + 2\mu \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} - 2\mu \frac{e^{2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} \right]. \quad (4.16)$$

Analisando a Eq. (4.7) e a Eq. (4.14), e comparando com os resultados apresentados na Ref. [44], a principal diferença está nos termos adicionais devido à inclusão do parâmetro  $\Theta$ . Em outras palavras, na análise em regime semiclássico para o potencial de Yukawa NC, surgem correções relevantes tanto na densidade de estados quanto no inverso da temperatura.

#### 4.1.2 Densidade de estado e temperatura para o potencial Lee-Wick no espaço de fase NC

A densidade de estados para o potencial de Lee-Wick no espaço de fase não comutativo (NC) é definida por

$$g_{NCLWP}(E) = AR^3 \int_b^{r_{\max}} r^2 [E - V_{NCLWP}(r)]^2 dr, \quad (4.17)$$

onde  $V_{NCLWP}(r)$  é dado na Eq. (3.8). Realizando a integral e considerando termos até primeira ordem em  $\Theta$ , o resultado da densidade de estados é

$$g_{NCLWP}(E) = g_{LWP}^{(0)}(E) + \Theta g_{LWP}^{(1)}(E), \quad (4.18)$$

onde  $g_{LWP}^{(0)}(E)$  é a densidade de estados para o caso comutativo [44]

$$\begin{aligned} g_{LWP}^{(0)}(E) &= -\frac{2AR^3 k^2 E}{\mu} \left\{ \frac{\mu k}{6E^2} \left[ \left( 1 - \frac{E r_{\max}}{k} \right)^3 - \left( 1 - \frac{E b}{k} \right)^3 \right] \right. \\ &\quad - e^{-\mu r_{\max}} \left[ \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} \right) - \frac{1}{k} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) \right] \\ &\quad \left. - e^{-\mu b} \left[ \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{e^{-\mu b}}{4} \right) - \frac{1}{k} \left( b + \frac{1}{\mu} \right) \right] \right\}, \quad (4.19) \end{aligned}$$

e  $g_{LWP}^{(1)}(E)$  é a correção correspondente ao termo NC da densidade de estados, dada por

$$\begin{aligned} g_{LWP}^{(1)}(E) &= -2AR^3 M \left\{ Ek \left[ \log \left( \frac{r_{\max}}{b} \right) - [\text{Ei}(-\mu r_{\max}) - \text{Ei}(-\mu b)] \right] \right. \\ &\quad + k^2 \left[ \frac{1}{r_{\max}} [1 - e^{-\mu r_{\max}}(2 - e^{-\mu r_{\max}})] + 2\mu [\text{Ei}(-\mu r_{\max}) - \text{Ei}(-2\mu r_{\max})] \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{b} [1 - e^{-\mu b}(2 - e^{-\mu b})] + 2\mu [\text{Ei}(-\mu b) - \text{Ei}(-2\mu b)] \right] \right\}, \quad (4.20) \end{aligned}$$

onde a distância radial máxima  $r_{\max}$  é determinada pela condição  $V_{NCLWP}(r = r_{\max}) = E$ , que é dada por

$$r_{\max} \approx \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{M\Theta \left[ \mu - \frac{\mu}{2} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \right]}{2 \left( \mu - \frac{E}{k} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right)},$$

para,

$$\frac{k}{b} (1 - e^{-\mu b}) + \frac{M k \Theta}{b^3} (1 - e^{-\mu b}) < \frac{E}{k} < \frac{k}{R} (1 - e^{-\mu R}) + \frac{M k \Theta}{R^3} (1 - e^{-\mu R}), \quad (4.21)$$

e

$$r_{\max} = R, \quad \text{para} \quad \frac{k}{R} (1 - e^{-\mu R}) + \frac{M k \Theta}{R^3} (1 - e^{-\mu R}) < \frac{E}{k} < \infty. \quad (4.22)$$

A Eq. (4.18) mostra que a NC modifica a estrutura funcional do espaço de fases, introduzindo correções explícitas nas quantidades termodinâmicas. Embora a análise seja desenvolvida apenas até primeira ordem no parâmetro  $\Theta$ , essas contribuições alteram a forma analítica das expressões, em vez de apenas produzirem pequenos deslocamentos numéricos. Os termos logarítmicos e as integrais exponenciais presentes na solução refletem os efeitos cumulativos das interações de curto alcance.

No limite comutativo,  $\Theta = 0$ , recupera-se a densidade de estados clássica associada a um potencial de curto alcance [44]. Já no regime NC, mesmo pequenas correções modificam perceptivelmente o comportamento da densidade de estados. Em particular, a expressão para  $r_{\max}$  passa a depender do parâmetro NC, alterando os limites de integração na definição de  $g_{NCLW}(E)$  e, conseqüentemente, toda a região de energia acessível ao sistema. A partir da Eq. (4.18), o inverso da temperatura em função da energia para o potencial NC LW é

$$\frac{1}{T_{NCLWP}(E)} = \frac{1}{g_{NCLWP}(E)} \frac{\partial g_{NCLWP}(E)}{\partial E} = \frac{1}{g_{NCLWP}(E)} \left\{ \frac{\partial g_{LWP}^{(0)}(E)}{\partial E} + \Theta \frac{\partial g_{LWP}^{(1)}(E)}{\partial E} \right\}, \quad (4.23)$$

Utilizando as Eqs. (4.19) e (4.20), calculando suas derivadas em relação à energia e

substituindo os resultados na Eq. (4.23), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_{NCLWP}(E)} &= \frac{1}{g_{NCLWP}(E)} \left\{ \frac{g_{LW}^{(0)}(E)}{E} - \frac{2AR^3k^2E}{\mu} \left\{ \frac{2}{E}A_1(E) + \frac{1}{\mu kr_{\max}}A_2(E) \right. \right. \\
&- \frac{\mu}{2E^2} \left[ \left( r_{\max} - \frac{E}{\mu^2 r_{\max}} \right) \left( 1 - \frac{Er_{\max}}{k} \right)^2 - b \left( 1 - \frac{Eb}{k} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{E^2} \left[ 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} + \frac{E}{4\mu kr_{\max}} e^{-\mu r_{\max}} - \frac{E^2}{\mu^2 k^2 r_{\max}} \right] \\
&+ \left. \frac{e^{-\mu b}}{E^2} \left( 1 - \frac{e^{-\mu b}}{4} \right) \right\} + 2AR^3kM\Theta \left\{ \frac{kE}{\mu} \left[ \frac{\mu}{2E} \left( 1 - \frac{Er_{\max}}{k} \right)^2 \right. \right. \\
&- \mu e^{-\mu r_{\max}} \left[ \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} \right) - \frac{1}{k} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) \right] \\
&+ \left. e^{-\mu r_{\max}} \left( \frac{\mu}{4E} e^{-\mu r_{\max}} - \frac{1}{k} \right) \right] A_3(E) - \left[ \log \left( \frac{r_{\max}}{b} \right) - \text{Ei}(-\mu r_{\max}) \right. \\
&+ \left. \text{Ei}(-\mu b) \right] - \left[ E \frac{1 - e^{-\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + k \left( -\frac{(1 - e^{-\mu r_{\max}})^2}{r_{\max}^2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{4\mu(e^{-\mu r_{\max}} - e^{-2\mu r_{\max}})}{r_{\max}} \right) \right] \frac{\sqrt{2}}{2\mu k} \sqrt{\frac{k}{\mu k - E}} \left. \right\}, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_1(E) &= \frac{\mu K}{6E^2} \left[ \left( 1 - \frac{Er_{\max}}{K} \right)^3 - \left( 1 - \frac{Eb}{K} \right)^3 \right], \\
A_2(E) &= -e^{-\mu r_{\max}} \left[ \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} \right) - \frac{1}{K} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) \right], \\
A_3(E) &= \frac{M\mu}{k\sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \left( \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right)} + \frac{\left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \right)}{2 \left( \mu - \frac{E}{k} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right)}.
\end{aligned}$$

Esse resultado mostra que as correções introduzidas pela não comutatividade modificam os limites de integração e introduzem efeitos da estrutura espacial quântica no comportamento térmico do sistema. Para pequenas faixas de energia  $E$ , os efeitos de  $\Theta$  podem dominar a dinâmica térmica. Em regimes de energia mais elevados, os termos exponenciais decaem rapidamente, e o sistema tende a apresentar comportamento clássico. O resultado usual apresentado em [44] é recuperado quando  $\Theta = 0$ .

## 5 A ABORDAGEM NÃO COMUTATIVA NA MECÂNICA ESTATÍSTICA DE BOLTZMANN-GIBBS

Neste capítulo, investigamos as propriedades termodinâmicas associadas aos potenciais de Yukawa e Lee–Wick no contexto de espaços de fase NC. Para isso, utilizamos o formalismo da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs no ensemble canônico, tomando como ponto de partida as Hamiltonianas obtidas no capítulo anterior. A partir da função de partição, determinamos a energia média e a capacidade térmica dos sistemas, analisando os efeitos introduzidos pelo parâmetro  $\Theta$  nas quantidades termodinâmicas. Além disso, discutimos o regime de validade das aproximações utilizadas, considerando o tratamento semiclássico do sistema e a expansão perturbativa nas contribuições da NC.

### 5.1 PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS

Para obter as propriedades termodinâmicas dos sistemas descritos pelos potenciais de Yukawa e de Lee–Wick nos espaços de fase NC, utilizamos o formalismo da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Nesse contexto, a função de partição para um sistema de duas partículas interagindo por meio de um potencial central  $V(r)$  é dada por

$$Z_D = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H} d^D x d^D p, \quad (5.1)$$

onde  $\beta = T^{-1}$ , considerando a constante de Boltzmann  $\kappa_B = 1$ ,  $H$  é a Hamiltoniana do sistema e  $D$  representa o número de dimensões do espaço. Assim como no cálculo da densidade de estados, assumimos que a coordenada radial varia no intervalo  $(b, R)$ .

A energia média do sistema é obtida a partir da função de partição por meio da relação

$$\langle U \rangle (T) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta), \quad (5.2)$$

enquanto a capacidade térmica é dada por

$$C_v(T) = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T} = -\beta^2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \beta}. \quad (5.3)$$

As quantidades termodinâmicas serão calculadas dentro de um formalismo semiclássico, utilizando uma expansão perturbativa tanto no parâmetro  $\Theta$  quanto no fator de Boltzmann. Portanto, é essencial especificar claramente o regime de validade dessas aproximações. As correções NC são consideradas até primeira ordem em  $\Theta$ , assumindo que a contribuição NC permanece pequena em comparação com as escalas típicas de comprimento do sistema. Mais precisamente, requer-se

$$\frac{\Theta M}{r^2} \ll 1, \quad (5.4)$$

onde  $M$  é a quantidade conservada definida na Eq. (2.40), e  $r$  representa a escala radial relevante da interação. O fator  $\frac{\Theta M}{r^2}$  corresponde à correção NC relativa ao termo principal do potencial, tanto para os potenciais de Yukawa quanto de Lee–Wick, e mede a importância da contribuição NC em comparação ao potencial usual. Isso garante que contribuições de ordem superior em  $\Theta$  permaneçam subdominantes.

Além disso, no ensemble canônico, assume-se o regime  $|\beta V(r)| \ll 1$ , permitindo expandir perturbativamente a exponencial  $e^{-\beta V(r)}$ . Essa aproximação é válida no regime de altas temperaturas ou quando o potencial de interação permanece suficientemente fraco no domínio radial considerado  $r \in (b, R)$ . Para o potencial de Yukawa, essa condição é geralmente bem controlada devido ao seu decaimento exponencial. Entretanto, para o potencial NC de Lee–Wick, a situação é mais sutil. Embora o potencial comutativo de Lee–Wick seja finito na origem, a correção NC introduz um termo com comportamento  $r^{-3}$ , o que pode aumentar a magnitude de  $\beta V(r)$  próximo ao limite inferior  $r = b$ . Portanto, a expansão perturbativa é confiável apenas se

$$\beta \max_{r \in (b, R)} |V(r)| \ll 1, \quad (5.5)$$

o que impõe uma restrição combinada sobre a temperatura, a escala de limite  $b$  e a intensidade da interação.

Por fim, o tratamento estatístico assume um regime clássico no qual o espaço de fase é tratado como contínuo. Isso requer que a escala típica de ação do sistema seja suficientemente grande em comparação com  $\hbar$  (tomado igual à unidade neste trabalho), de modo que efeitos de interferência quântica possam ser negligenciados. Nesse contexto, o parâmetro  $\Theta$  introduz uma deformação do espaço de fases clássico, modificando a estrutura geométrica subjacente, mas sem incorporar correções quânticas completas além do nível clássico efetivo.

### 5.1.1 Capacidade Térmica para o Potencial Yukawa não comutativo

Substituímos a Hamiltoniana do sistema de duas partículas interagindo via o Potencial Yukawa NC dada na Eq. (2.24), onde  $V(r) = V_{NCYP}(r)$ , na Eq. (5.1), obtendo a função de partição

$$Z_{NCYP}(\beta) = 4\pi \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \int_b^R e^{-\beta V_{NCYP}(r)} r^2 dr, \quad (5.6)$$

e, considerando a condição  $|\beta V(r)| \ll 1$ , podemos escrever a Eq.(5.6) como

$$\begin{aligned} Z_{NCYP}(\beta) &= 4\pi \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \int_b^R r^2 \left[ 1 + \beta \left( \frac{ke^{-\mu r}}{r} + \frac{\Theta k M e^{-\mu r}}{r^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{k^2 e^{-2\mu r}}{r^2} + \frac{2\Theta k^2 M e^{-2\mu r}}{r^4} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

mantendo termos até primeira ordem em  $\Theta$ . Integrando termo a termo, obtemos a forma final da função de partição

$$Z_{NCYP}(\beta) = 4\pi \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \left[ I_0 + \beta k A_1 + \beta \Theta k M A_2 + \frac{1}{4} \beta^2 k^2 A_3 + \Theta \beta^2 k^2 M A_4 \right], \quad (5.8)$$

onde definimos as constantes  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) e  $I_0$  como

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\mu^2} [e^{-\mu b} (1 + \mu b) - e^{-\mu R} (1 + \mu R)] , \\ A_2 &= \text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu R) , \\ A_3 &= \frac{e^{-2\mu b} - e^{-2\mu R}}{\mu} , \\ A_4 &= \frac{e^{-2\mu b}}{b} - \frac{e^{-2\mu R}}{R} + 2\mu [\text{Ei}(2\mu b) - \text{Ei}(2\mu R)] , \\ I_0 &= \frac{R^3 - b^3}{3} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Plotamos a função de partição, Eq. (5.8), em função de  $\beta$  na Fig. (3) para diferentes valores de  $\Theta$ . Como podemos observar, em altas temperaturas (quando  $\beta \rightarrow 0$ ), as contribuições devidas ao parâmetro  $\Theta$  são muito pequenas, mas crescem significativamente em baixas temperaturas ( $\beta \rightarrow \infty$ ).

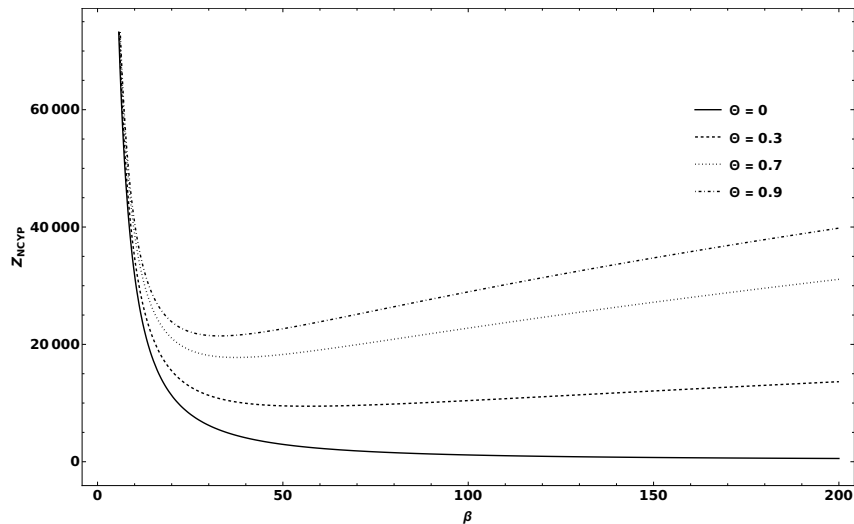


Figura 3 – Função de partição para o potencial de Yukawa NC em função de  $\beta$ , para  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

A partir da função de partição, podemos determinar grandezas termodinâmicas como a energia média e a capacidade térmica. Usando a relação dada na Eq. (5.2) e substituindo a Eq. (5.8) obtemos a energia média dada por

$$\langle U \rangle_{NCYP}(\beta) = \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{\beta^2} \frac{kA_1 + \Theta kMA_2 + \frac{1}{2}\beta k^2 A_3 + 2\beta \Theta k^2 MA_4}{I_0 + \beta kA_1 + \beta \Theta kMA_2 + \frac{1}{4}\beta^2 k^2 A_3 + \beta^2 \Theta k^2 MA_4}, \quad (5.10)$$

onde as constantes  $A_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) são definidas na Eq. (5.9).

Plotamos a energia média, Eq. (5.10), em função de  $\beta$  na Fig. (4), para diferentes valores de  $\Theta$ . Observa-se que a energia média aumenta à medida que  $\beta$  cresce até atingir um valor máximo, passando então a decrescer. Note que, quanto menor a correção associada ao parâmetro  $\Theta$ , maior é o pico da energia média em baixas temperaturas.

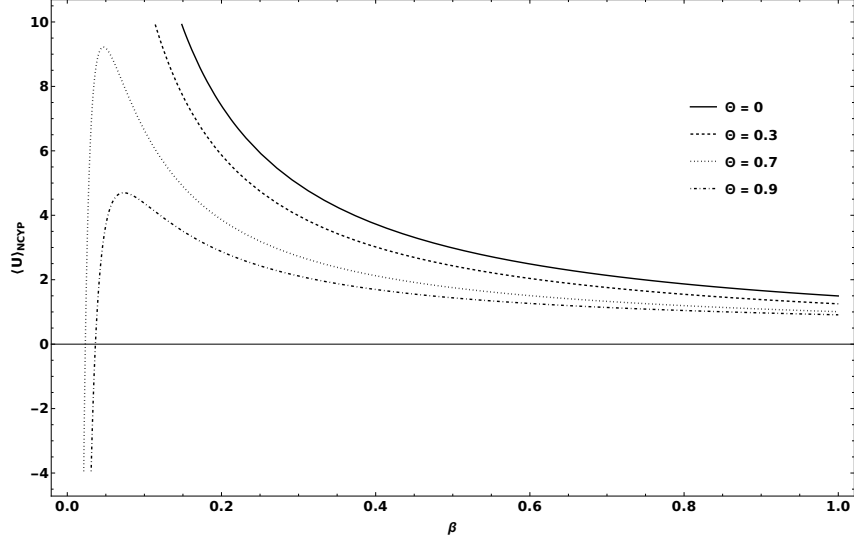


Figura 4 – Energia média para o potencial Yukawa NC em função de  $\beta$ . Utilizamos  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$ , neste gráfico (em unidades de área).

Para a capacidade térmica do potencial Yukawa NC, usamos a relação dada pela Eq. (5.3), substituímos a Eq. (5.10) e obtemos

$$C_V^{NCYP}(\beta) = \frac{3}{2} - \frac{2N}{\beta D} + \frac{N' D - N D'}{D^2}, \quad (5.11)$$

em que as constantes  $N$ ,  $D$ ,  $N'$  e  $D'$  são definidas por

$$\begin{aligned} N &= k A_1 + \Theta k M A_2 + \frac{1}{2} \beta k^2 A_3 + 2\Theta \beta k^2 M A_4, \\ D &= I_0 + \beta k A_1 + \Theta \beta k M A_2 + \frac{1}{4} \beta^2 k^2 A_3 + \beta^2 \Theta k^2 M A_4, \\ N' &= \frac{1}{2} k^2 A_3 + 2\Theta k^2 M A_4, \\ D' &= k A_1 + \Theta k M A_2 + \frac{1}{2} \beta k^2 A_3 + 2\Theta \beta k^2 M A_4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A capacidade térmica, Eq. (5.11), como função de  $\beta$ , é ilustrada na Fig. (5), para diferentes valores de  $\Theta$ . Observa-se que a capacidade térmica  $C_V^{NCYP}$  decresce monotonicamente com o aumento de  $\beta$ . Note que essa diminuição é mais rápida para valores maiores do parâmetro  $\Theta$ .

### 5.1.2 Capacidade térmica para o potencial Lee-Wick NC

Assim como fizemos para o potencial Yukawa NC, aqui substituímos a Hamiltoniana do sistema de duas partículas interagindo por meio do potencial de Lee-Wick NC Eq. (2.24),

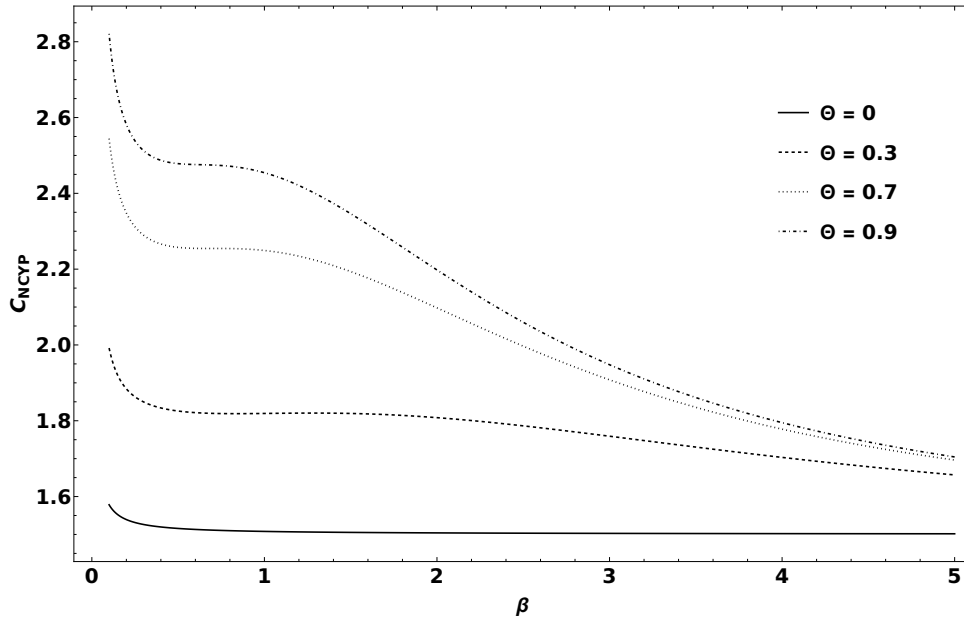


Figura 5 – A capacidade térmica para o potencial NCYP em função de  $\beta$ , para os valores de  $\Theta = 0$ ;  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

onde  $V(r) = V_{NCLWP}(r)$ , na Eq. (5.1) obtendo a função de partição

$$Z_{NCLW}(\beta) = 4\pi \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \int_b^R e^{-\beta V_{NCLW}(r)} r^2 dr. \quad (5.13)$$

Considerando o potencial de Lee–Wick NC dado na Eq. (3.8) sob a condição  $|\beta, V(r)| \ll 1$ , obtemos a função de partição correspondente até primeira ordem no parâmetro  $\Theta$

$$\begin{aligned} Z_{NCLW}(\beta) = & 4\pi \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \int_b^R r^2 \left[ 1 - \beta \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) - \beta \Theta \frac{Mk}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right. \\ & \left. + \beta^2 \frac{k^2}{2r^3} (1 - e^{-\mu r})^2 + \beta^2 \Theta \frac{k^2 M}{r^4} (1 - e^{-\mu r})^2 \right] dr. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Após as integrações radiais, a função de partição é

$$Z_{NCLWP}(\beta) = \frac{4\pi V}{h^3} \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \left[ I_0 - \beta I_1^{(0)} + \frac{1}{2} \beta^2 I_2^{(0)} - \beta \Theta I_1^{(1)} + \beta^2 \Theta I_2^{(1)} \right], \quad (5.15)$$

onde as constantes são definidas como

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{R^3 - b^3}{3}, \\
I_1^{(0)} &= k \left[ \frac{R^2 - b^2}{2} + \frac{e^{-\mu R}(1 + \mu R) - e^{-\mu b}(1 + \mu b)}{\mu^2} \right], \\
I_1^{(1)} &= Mk \left[ \ln \frac{R}{b} - \text{Ei}(-\mu R) + \text{Ei}(-\mu b) \right], \\
I_2^{(0)} &= k^2 \left[ (R - b) + \frac{2}{\mu}(e^{-\mu R} - e^{-\mu b}) - \frac{1}{2\mu}(e^{-2\mu R} - e^{-2\mu b}) \right], \\
I_2^{(1)} &= Mk^2 \left[ \frac{1 - 2e^{-\mu b} + e^{-2\mu b}}{b} - \frac{1 - 2e^{-\mu R} + e^{-2\mu R}}{R} \right] \\
&\quad + 2\mu Mk^2 [\text{Ei}(-2\mu b) - \text{Ei}(-2\mu R) - \text{Ei}(-\mu b) + \text{Ei}(-\mu R)]. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Plotamos a função de partição, Eq. (5.15), em função de  $\beta$  na Fig. (6). Como podemos observar, as contribuições devidas ao parâmetro NC  $\Theta$  são muito pequenas em altas temperaturas ( $\beta \rightarrow 0$ ), mas crescem significativamente em baixas temperaturas ( $\beta \rightarrow \infty$ ).

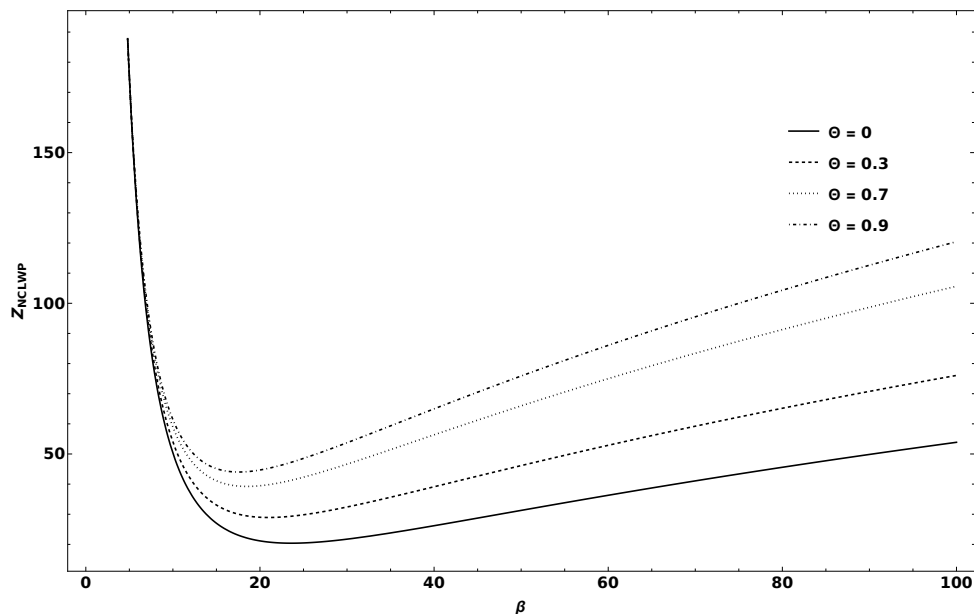


Figura 6 – Função de partição para o potencial de Lee-Wick NC em função de  $\beta$ , com os valores de  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

A partir da função de partição Eq. (5.15), aplicando na relação dada na Eq. (5.2) calculamos a energia média e obtemos

$$\langle U \rangle_{NCLWP} = \frac{3}{2\beta} + \frac{I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)}}{D_0(\beta)} + \Theta \left[ \frac{I_1^{(1)} - 2\beta I_2^{(1)}}{D_0(\beta)} + \frac{\beta(I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)})(I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)})}{D_0(\beta)^2} \right], \quad (5.17)$$

onde

$$D_0(\beta) = I_0 - \beta I_1^{(0)} + \frac{1}{2} \beta^2 I_2^{(0)}. \quad (5.18)$$

A energia média, Eq. (5.17), em função do inverso da temperatura ( $\beta$ ), é ilustrada na Fig. (7). Observamos que, quanto maior o parâmetro  $\Theta$ , maior é o crescimento inicial da curva em altas temperaturas, e ela decresce com  $\beta$  até atingir um valor mínimo, que representa um regime em que o sistema está mais fortemente acoplado devido ao potencial de Lee-Wick. A NC intensifica esse acoplamento, resultando em um poço mais profundo. Todas as curvas convergem lentamente para valores próximos entre si à medida que  $\beta$  aumenta (ou quando a temperatura diminui).

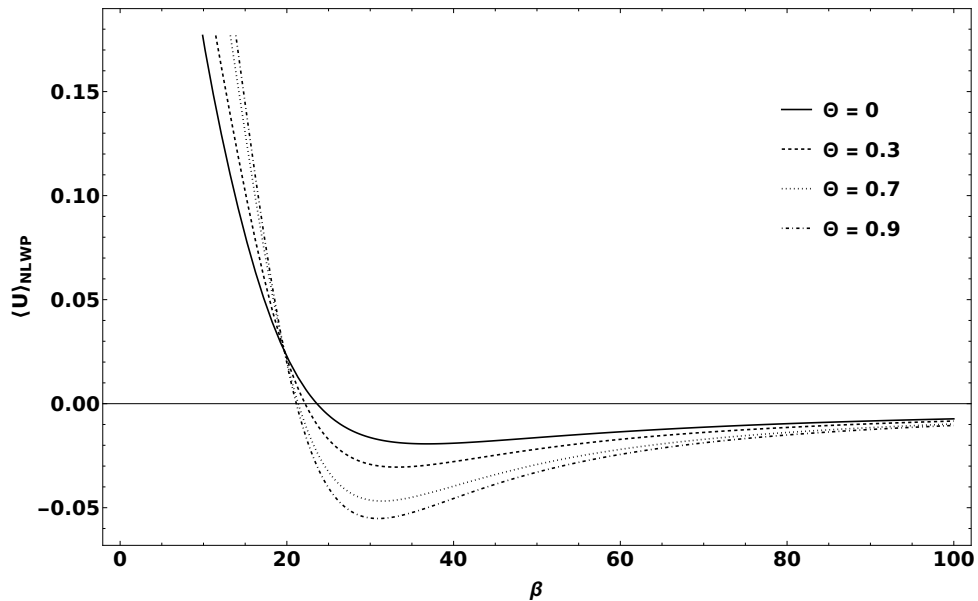


Figura 7 – A energia média para o potencial de Lee–Wick NC em função do inverso da temperatura ( $\beta$ ), para  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0.3$ ,  $\Theta = 0.7$  e  $\Theta = 0.9$  (em unidades de área).

A partir da Eq. (5.17) e usando a relação dada na Eq. (5.3), obtemos a capacidade térmica para o potencial de Lee–Wick NC como

$$C_V^{NCLWP} = \frac{3}{2} + \beta^2 \left[ \frac{I_2^{(0)} D_0(\beta) - (I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)})^2}{D_0^2(\beta)} \right] + \Theta \beta^2 \left[ \frac{2I_2^{(1)} D_0(\beta) + (I_1^{(1)} - 2\beta I_2^{(1)}) D_0'(\beta)}{D_0^2(\beta)} - \frac{B'(\beta) D_0(\beta) - 2B D_0'(\beta)}{D_0^3(\beta)} \right], \quad (5.19)$$

onde

$$D_0'(\beta) = -I_1^{(0)} + \beta I_2^{(0)},$$

$$B'(\beta) = (I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)})(I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)}) - \beta \left[ I_2^{(0)}(I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)}) + I_2^{(1)}(I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)}) \right].$$

Plotamos a capacidade térmica, Eq. (5.19), em função do inverso da temperatura ( $\beta$ ) na Fig. (8). Observamos que as curvas para diferentes valores do parâmetro  $\Theta$  do potencial de Lee–Wick NC revelam que o termo proporcional a  $\Theta$  desempenha um papel na modificação da resposta térmica do sistema. Embora sua influência seja mínima em altas temperaturas, ela se torna dominante no regime intermediário, resultando em picos

mais altos e deslocados, intensificando a dinâmica térmica. Em baixas temperaturas, a NC reforça os efeitos da aproximação perturbativa, resultando em capacidade térmica negativa dentro do modelo truncado.

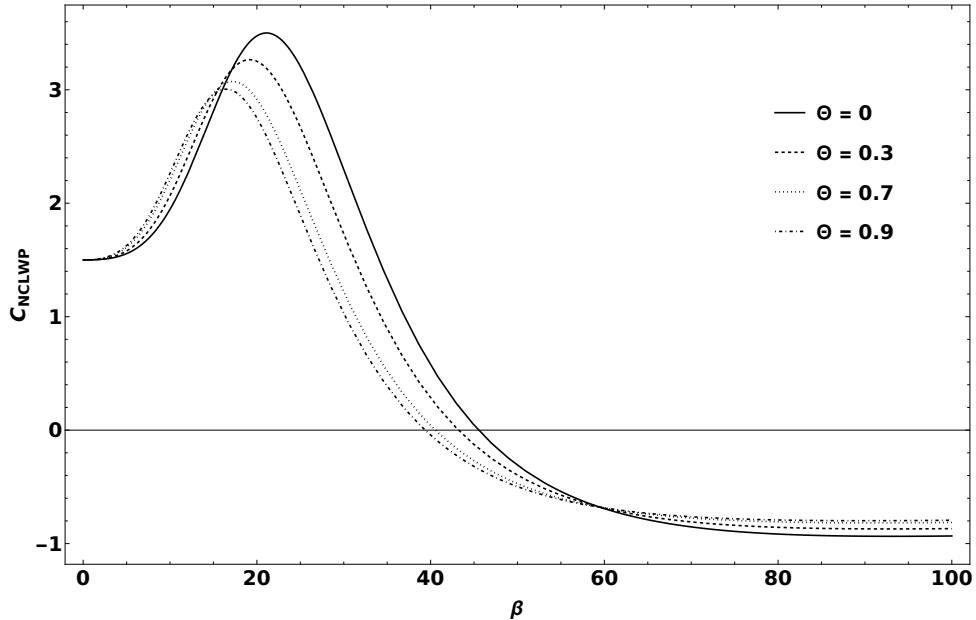


Figura 8 – A capacidade térmica para o potencial de Lee-Wick NC em função de  $(\beta)$ , para os valores de  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 0,3$ ,  $\Theta = 0,7$  e  $\Theta = 0,9$  (em unidades de área).

## 5.2 CAPACIDADES TÉRMICAS NEGATIVAS E EFEITOS DA NÃO COMUTATIVIDADE

Enquanto o sistema de Yukawa NC exhibe correções termodinâmicas suaves, o sistema de Lee-Wick NC desenvolve fortes intensificações em curtas distâncias que modificam qualitativamente sua estabilidade termodinâmica.

O aparecimento de capacidades térmicas negativas no presente modelo requer uma interpretação física cuidadosa. É bem conhecido que capacidades térmicas negativas não constituem necessariamente um problema, mas podem surgir naturalmente em classes específicas de sistemas.

Um exemplo é fornecido pelos sistemas autogravitantes, nos quais a energia total é negativa e a temperatura aumenta à medida que energia é removida, levando a  $C < 0$  [58, 59]. Nesses sistemas, a natureza de longo alcance da interação leva à quebra das hipóteses termodinâmicas padrão, incluindo a equivalência entre ensembles estatísticos.

Mais recentemente, capacidades térmicas negativas também têm sido discutidas em um contexto mais amplo, incluindo sistemas com interações efetivas e estruturas não triviais do espaço de fases. Em particular, os trabalhos de [60, 61] mostram que anomalias termodinâmicas, como capacidade térmica negativa, podem surgir em sistemas nos quais a

dinâmica subjacente ou a geometria induzem fortes correlações ou distribuições de energia não usuais.

De maneira mais geral, sistemas com interações de longo alcance ou fortes correlações podem exibir anomalias termodinâmicas, como capacidade térmica negativa, especialmente no ensemble microcanônico [52]. Essas características estão frequentemente associadas a transições de fase, estados metaestáveis ou instabilidades dinâmicas.

No presente caso, embora o potencial de Lee–Wick seja intrinsecamente de curto alcance, a correção NC introduz um termo proporcional a  $r^{-3}$ , o qual intensifica significativamente a interação em curtas distâncias. Essa contribuição modifica a estrutura efetiva do espaço de fases e pode induzir comportamentos semelhantes aos observados em sistemas com interações de longo alcance ou fortes correlações.

Sob essa perspectiva, o surgimento de capacidade térmica negativa pode ser interpretado como uma manifestação da sensibilidade das quantidades termodinâmicas à geometria implícita do espaço de fases, bem como à presença de fortes correlações em curtas distâncias. Ao mesmo tempo, é importante enfatizar que esse resultado é obtido dentro de um formalismo perturbativo baseado na condição

$$|\beta V(r)| \ll 1. \quad (5.21)$$

O conceito de capacidades térmicas negativas tanto para buracos negros quanto para sistemas clássicos interagentes, como estrelas, é atualmente bem compreendido. A estrutura física de muitos formalismos termodinâmicos conhecidos é difícil em ambos os casos devido ao papel fundamental desempenhado pela gravitação. Um sistema com capacidade térmica negativa aquece ao perder calor e esfria ao ganhá-lo. Assim, se o calor flui do quente para o frio, qualquer diferença de temperatura em relação ao reservatório produzirá fluxos de calor que aumentam essa diferença [46].

A NC introduz uma modificação estrutural e profunda na mecânica estatística e, conseqüentemente, na termodinâmica. O principal efeito é que o espaço de fases deixa de ser clássico, e isso altera a contagem de microestados, bem como a função de partição e todas as quantidades termodinâmicas relacionadas, incluindo a capacidade térmica, que é importante em nossa análise. Como a álgebra NC na Eq. (3) deforma o volume elementar do espaço de fases, ela modifica o espectro de energia dos sistemas quânticos. Conseqüentemente, esses efeitos propagam-se diretamente para a termodinâmica, considerando que a função de partição é modificada. Além disso, a densidade de estados  $g(E)$  apresenta correções dependentes de  $\Theta$ , e as integrais no espaço de fases passam a conter termos corretivos.

A NC não gera capacidade térmica negativa por si só, mas modifica a estrutura do espaço de fases de tal maneira que regiões de instabilidade termodinâmica podem emergir ou ser intensificadas.

Tanto a entropia quanto a capacidade térmica são conhecidamente afetadas por qualquer perturbação da microestrutura do sistema. A não comutatividade pode, em circunstâncias bem definidas, induzir ou preservar uma capacidade térmica negativa, principalmente em sistemas gravitacionais e, em nosso caso, em modelos efetivos nos quais a não comutatividade atua como uma deformação geométrica do espaço de fases. Em outras palavras, a não comutatividade altera a estrutura termodinâmica de modo a permitir, preservar ou até remover regiões nas quais  $C < 0$ .

Tecnicamente, podemos afirmar que o parâmetro  $\Theta$  introduz uma nova escala dada por

$$M_\theta \sim (\sqrt{\Theta})^{-1}, \quad (5.22)$$

e as consequências básicas são as seguintes: para  $M \gg M_\theta$ , temos  $C \approx C_{\text{classic}} < 0$ ; para  $M \sim M_\theta$ , o valor de  $C$  pode divergir, mudar de sinal ou tender a zero; e para  $M < M_\theta$ , o sistema pode tornar-se estável. Assim, para sistemas confinados em espaços NC, a não comutatividade reduz o número efetivo de microestados, introduz uma espécie de limite geométrico e transforma a entropia em uma função não extensiva. Como

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad (5.23)$$

valores negativos de  $C$  implicam que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} > 0, \quad (5.24)$$

o que é típico de sistemas não extensivos [47, 48, 49]. Portanto, é importante compreender que a não comutatividade não cria um comportamento com  $C < 0$ , mas reorganiza transições de fase e pode induzir instabilidade térmica em sistemas efetivos não extensivos.

## 6 CONCLUSÃO

Nesta tese, trabalhamos uma formulação de mecânica clássica baseada na NCMQ, derivada das regras de comutação da mecânica quântica convencional. As relações modificadas conduzem a equações de movimento que incorporam explicitamente o parâmetro de não comutatividade  $\Theta$ , permitindo investigar os efeitos de deformações do espaço de fase sobre sistemas físicos em escalas microscópicas.

A análise foi realizada no contexto de sistemas de duas partículas interagindo por meio dos potenciais centrais de Yukawa e Lee–Wick em um espaço de fase com geometria modificada, dada pela Eq. (2.5). Utilizando a formulação em termos de colchetes de Poisson, obtivemos equações de movimento modificadas e investigamos, nos formalismos canônico e microcanônico, os efeitos da não comutatividade sobre a densidade de estados, a função de partição, a energia média e a capacidade térmica. Nesse contexto, a constante de movimento  $M$ , associada ao gerador de rotações, desempenhou papel fundamental na dinâmica dos sistemas analisados.

Os resultados mostram que as correções induzidas pelo parâmetro  $\Theta$ , embora pequenas em magnitude, produzem efeitos qualitativos relevantes sobre o comportamento termodinâmico dos sistemas. Em particular, observamos modificações na capacidade térmica, incluindo o surgimento de regiões com valores negativos, indicando possíveis instabilidades termodinâmicas associadas à geometria modificada do espaço de fases.

Um resultado central deste trabalho é a diferença qualitativa entre os dois potenciais investigados. Enquanto o potencial de Yukawa NC produz correções termodinâmicas suaves e controladas, o potencial de Lee–Wick NC apresenta fortes intensificações de curto alcance devido à contribuição proporcional a  $r^{-3}$  na distância radial, alterando significativamente a estabilidade termodinâmica do sistema. Esses resultados sugerem que a não comutatividade não gera instabilidades por si só, mas modifica a geometria do espaço de fases de modo a favorecer o aparecimento ou a intensificação de regimes termodinamicamente instáveis.

Entretanto, tais efeitos emergem em uma região na qual as condições perturbativas  $|\beta V(r)| \ll 1$  e  $\Theta M/r^2 \ll 1$  podem ser satisfeitas, especialmente próximas ao limite de curta distância. Dessa forma, os resultados obtidos devem ser interpretados como indicativos de instabilidades subjacentes, e não como previsões quantitativamente exatas. Nesse sentido, uma análise não perturbativa completa da função de partição seria necessária para verificar a robustez física desses efeitos.

De modo geral, os resultados obtidos mostram que deformações NC do espaço de fases introduzem uma escala geométrica efetiva capaz de alterar qualitativamente o comportamento termodinâmico, especialmente em sistemas onde as interações de curta distância são intensificadas. A estrutura desenvolvida aqui pode ser estendida a outros potenciais de interação, sistemas confinados ou campos externos, abrindo novas perspectivas

para a investigação dos efeitos NC em mecânica estatística e termodinâmica.

## REFERÊNCIAS

- 1 H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. 71 (1947) 1947.
- 2 C. N. Yang, *On Quantized Space-Time*, Phys. Rev. 72 (1947) 8.
- 3 M. R. Douglas and C. M. Hull, *D-branes and the Noncommutative Torus*, JHEP 9802 (1998) 008.
- 4 M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, *Noncommutative Field Theory*, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 977.
- 5 V. O. Rivelles, *Noncommutative field theories and gravity*, Phys. Lett. B 558 (2003) 191.
- 6 R. J. Szabo, *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, Phys. Rept. 376 (2003) 207.
- 7 H. O. Girotti, *Noncommutative Quantum Mechanics*, Am. J. Phys. 72 (2004) 608.
- 8 X. Calmet and A. Kobakhidze, *Noncommutative General Relativity*, Phys. Rev. D 72 (2005) 045010.
- 9 R. Banerjee and H. S. Yang, *Exact Seiberg–Witten map, induced gravity and topological invariants in noncommutative field theories*, Nucl. Phys. B 708 (2005) 434.
- 10 L. Freidel and E. R. Livine, *3D Quantum Gravity and Effective Noncommutative Quantum Field Theory*, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 221301.
- 11 L. Álvarez-Gaumé, F. Meyer and M. A. Vázquez-Mozo, *Comments on noncommutative gravity*, Nucl. Phys. B 753 (2006) 92.
- 12 E. Harikumar and V. O. Rivelles, *Noncommutative Gravity*, Class. Quant. Grav. 23 (2006) 7551.
- 13 R. J. Szabo, *Symmetry, Gravity and Noncommutativity*, Class. Quant. Grav. 23 (2006) R199.
- 14 H. Steinacker, *Emergent Gravity from Noncommutative Gauge Theory*, JHEP 0712 (2007) 049.
- 15 F. Müller-Hoissen, *Noncommutative Geometries and Gravity*, AIP Conf. Proc. 977 (2008) 12.
- 16 H. Steinacker, *Emergent Gravity and Noncommutative Branes from Yang–Mills Matrix Models*, Nucl. Phys. B 810 (2009) 1.
- 17 R. J. Szabo, *Quantum Gravity, Field Theory and Signatures of Noncommutative Spacetime*, arXiv:0906.2913 (2009).
- 18 S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *Spacetime quantization induced by classical gravity*, Phys. Lett. B 331 (1994) 39.
- 19 S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys. 172 (1995) 187.

- 20 N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP 09 (1999) 032.
- 21 F. A. Brito and E. M. Lima, *Exploring the thermodynamics of noncommutative scalar fields*, Int. J. Mod. Phys. A 31 (2016) 1650057.
- 22 J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa, and F. Mendez, *Quantum Theory of Noncommutative Fields*, Phys. Lett. B 565 (2003) 222.
- 23 S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and T. Okamoto, *Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 141601.
- 24 I. Hinchliffe and N. Kersting, *CP violation from noncommutative geometry*, Phys. Rev. D 64 (2001) 116007.
- 25 K. Morita, *Lorentz Invariance and the Unitarity Problem in Non-Commutative Field Theory*, Prog. Theor. Phys. 110 (2003) 989.
- 26 A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. A. Ribeiro, V.O. Rivelles and A. J. da Silva, *Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric QED<sub>4</sub>*, Phys. Rev. D 69 (2004) 025008.
- 27 A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. A. Ribeiro and A. J. da Silva, *On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED<sub>3</sub> in the covariant superfield formulation*, Phys. Lett. B 577 (2003) 83.
- 28 R. J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, Phys. Rept. 378 (2003) 207.
- 29 S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, J. High Energy Phys. 02 (2000) 020.
- 30 J. F. G. Santos, A. E. Bernardini, C. Bastos, *Probing phase-space noncommutativity through quantum mechanics and thermodynamics of free particles and quantum rotors*, Physica A 438 (2015) 340.
- 31 T. Pandit, P. Chattopadhyay, and G. PaulMod, *Non-commutative space engine: A boost to thermodynamic processes*, Mod. Phys. Lett. A 36 (2021) 2150174.
- 32 J.F.G. dos Santos, A.E. Bernardini, *Quantum engines and the range of the second law of thermodynamics in the noncommutative phase-space*, Eur. Phys. J. Plus 132 (2017) 260.
- 33 J. F. G. dos Santos, F. S. Luiz, O. S. Duarte and M. H. Y. Moussa, *Non-Hermitian noncommutative quantum mechanics*, Eur. Phys. J. Plus 134 (2019) 332.
- 34 H. Yukawa, *On the interaction of elementary particles. I*, Proc. Phys.-Math. of Japan, 17 (1935) 48.
- 35 H. Yukawa, *On the interaction of elementary particles. II*, Proc. Phys.-Math. Society of Japan, 19 (1937) 1084.
- 36 T. D. Lee and G. Wick, *Finite Theory of Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. D 2 (1970) 1033.

- 37 B. Grinstein, D. O'Connell and M. Wise, *The Lee-Wick standard model*, Phys. Rev. D 77 (2008) 025012.
- 38 T. D. Lee and G. C. Wick, *Negative metric and the unitarity of the S-matrix*, Nucl. Phys. B 9 (1969) 209.
- 39 T. Jacobson, *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1260.
- 40 E. Verlinde, *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, J. High Energy Phys. 1104 (2011) 029.
- 41 H. Groenewold, *On the Principles of elementary quantum mechanics*, Physica 12, 405–460 (1946).
- 42 J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 99–124 (1949).
- 43 E. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. 40, 749–759 (1932)
- 44 M. J. Neves, E. M. C. Abreu, J. B. de Oliveira and M. K. Gonçalves, *Thermostatistical analysis for short-range interaction Potentials* , Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 17 (2020) 2050193.
- 45 M. A. De Andrade, C. Neves, *Noncommutative mapping from the symplectic formalism*, J. Math. Phys. 1 January (2018), 59 (1): 012105. <https://doi.org/10.1063/1.4986964>.
- 46 P. T. Landsberg and R. P. Woodard, *Classical Fluids of Negative Heat Capacity*, University of Florida, preprint unpublished, 1992.
- 47 P. Nicolini, A. Smailagic and E. Spallucci, *Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole*, Phys. Lett. B 632 (2006) 547.
- 48 R. Banerjee, B. R. Majhi and S. Samanta, *Noncommutative black hole thermodynamics*, Phys. Rev. D 77 (2008) 124035.
- 49 P. Nicolini, *Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review*, Int. J. Mod. Phys. A 24 (2009) 1229.
- 50 J. M. Romero and J. D. Vergara, *The Kepler problem and noncommutativity*, Mod. Phys. Lett. A 18 (2003) 1673.
- 51 J. M. Romero, J. A. Santiago and J. D. Vergara, *Newton's second law in a non-commutative space*, Phys. Lett. A 310 (2003) 9.
- 52 A. Campa, T. Dauxois and S. Ruffo, *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*, Physics Reports 480 57 (2009).
- 53 P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford (1981).
- 54 W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. 43 (1927) 172–198.

- 55 A. E. F. Djemai, *On Noncommutative Classical Mechanics*, Int. J. Theor. Phys. 43 (2004) 299.
- 56 T. Padmanabhan, *Statistical mechanics of gravitating systems: An Overview*, preprint (2008), arXiv:0812.2610.
- 57 P. H. Chavanis, *Phase Transitions in Self-Gravitating Systems*, International Journal of Modern Physics B, 20 (2006) 3113.
- 58 D. Lynden-Bell, *Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry*, Physica A 263 293 (1999).
- 59 T. Padmanabhan, *Statistical mechanics of gravitating systems*, Physics Reports 188 285 (1990).
- 60 S. Zaim, H. Guelmamene and Y. Delenda, *Negative heat capacity for a Klein–Gordon oscillator in non-commutative complex phase space*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 14 1750141 (2017).
- 61 P. Serra, M. A. Carignano, F. H. Alharbi and S. Kais, *Quantum confinement and negative heat capacity*, Europhys. Lett. 104 16004 (2013).
- 62 M. G. Sousa, E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes and M. J. Neves, *Thermostatistical analysis and negative heat capacities of Yukawa and Lee–Wick potentials in noncommutative phase spaces*, International Journal of Modern Physics A, 41, No. 18, 2650111 (2026). doi:10.1142/S0217751X26501113.

## A APÊNDICE – DEMONSTRAÇÕES COMPLEMENTARES

Neste apêndice apresentamos os desenvolvimentos matemáticos utilizados na obtenção de algumas das principais equações da tese. O objetivo é explicitar etapas intermediárias das deduções realizadas ao longo do texto, tornando mais clara a construção do formalismo em espaços de fase NC.

### A.1 – Cálculos do Capítulo 2

- Dedução da Eq. (2.12)

Partindo dos colchetes fundamentais do espaço de fase NC,

$$\{x_i, x_j\} = \tilde{\Theta}_{ij}, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (\text{A.1})$$

e considerando funções arbitrárias  $f(x, p)$  e  $g(x, p)$ , o colchete de Poisson generalizado é escrito como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{x_i, p_j\} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_i, x_j\} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_j, p_i\}. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo os colchetes fundamentais, obtemos

$$\{f, g\} = \tilde{\Theta}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (\text{A.3})$$

- Deduções das Eqs. (2.33) e (2.34)

A quantidade conservada associada à simetria rotacional deformada é dada por

$$L_\Theta = \Theta_{ij} x_i p_j + \frac{1}{2} \Theta_{ij} p_j \Theta_{ik} p_k. \quad (\text{A.4})$$

Escolhendo o vetor de não comutatividade ao longo do eixo  $z$ ,

$$\Theta_i = (0, 0, \Theta), \quad (\text{A.5})$$

a matriz antissimétrica possui apenas as componentes

$$\Theta_{12} = -\Theta_{21} = \Theta, \quad (\text{A.6})$$

sendo os demais elementos nulos. O primeiro termo da Eq. (A.4) torna-se

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} x_i p_j &= \Theta_{12} x_1 p_2 + \Theta_{21} x_2 p_1 \\ &= \Theta x p_y - \Theta y p_x \\ &= \Theta (x p_y - y p_x). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para o segundo termo da Eq. (A.4), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Theta_{ij}p_j\Theta_{ik}p_k &= \frac{\Theta^2}{2}(p_x^2 + p_y^2) \\ &= \frac{\Theta^2}{2}(p^2 - p_z^2).\end{aligned}\tag{A.8}$$

Utilizando a Hamiltoniana do sistema,

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r),\tag{A.9}$$

podemos escrever

$$p^2 = 2\mu[H - V(r)].\tag{A.10}$$

Substituindo essa relação na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\Theta^2}{2}(p^2 - p_z^2) &= \Theta^2\mu[H - V(r)] - \frac{\Theta^2}{2}p_z^2 \\ &= \Theta^2\mu H - \Theta^2\mu V(r) - \frac{\Theta^2}{2}p_z^2.\end{aligned}\tag{A.11}$$

Substituindo os dois resultados obtidos na Eq. (A.4), segue que

$$\begin{aligned}L_\Theta &= \Theta(xp_y - yp_x) + \Theta^2\mu H - \Theta^2\mu V(r) - \frac{\Theta^2}{2}p_z^2 \\ &= \Theta\left[(xp_y - yp_x) - \Theta\mu V(r) - \frac{\Theta p_z^2}{2} + \Theta\mu H\right].\end{aligned}\tag{A.12}$$

Como  $L_\Theta$  e  $H$  são conservados,

$$\frac{dL_\Theta}{dt} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = 0,\tag{A.13}$$

a combinação

$$L_\Theta - \Theta^2\mu H\tag{A.14}$$

também é conservada.

Definimos então

$$M \equiv \frac{L_\Theta}{\Theta} - \Theta\mu H.\tag{A.15}$$

Substituindo a expressão obtida para  $L_\Theta$ ,

$$M = xp_y - yp_x - \Theta\mu V(r) - \frac{\Theta p_z^2}{2}.\tag{A.16}$$

## A.2 – Cálculos do Capítulo 3

- Obtenção da Eq. (3.2)

A partir da Eq.(2.43), e usando a da Eq. (2.40), isolando  $\dot{\phi}$ , obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2} - \Omega + \frac{\Theta V(r)}{r^2}. \quad (\text{A.17})$$

Elevando a Eq. (A.17) ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \left( \frac{M}{\mu r^2} - \Omega + \frac{\Theta V(r)}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{M^2}{\mu^2 r^4} + \Omega^2 + \frac{\Theta^2 V^2(r)}{r^4} - \frac{2M\Omega}{\mu r^2} + \frac{2M\Theta V(r)}{\mu r^4} - \frac{2\Theta\Omega V(r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Como o interesse está nas correções de primeira ordem introduzidas pela NC, desprezam-se os termos quadráticos e mistos nos parâmetros de deformação, isto é, as contribuições proporcionais a  $\Theta^2$ ,  $\Omega^2$  e  $\Theta\Omega$ . Assim,

$$\dot{\phi}^2 \simeq \frac{M^2}{\mu^2 r^4} - \frac{2M\Omega}{\mu r^2} + \frac{2M\Theta V(r)}{\mu r^4}. \quad (\text{A.19})$$

Substituindo as Eqs. (A.17) e (A.19) na Hamiltoniana dada na Eq. (2.43), obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2}{2} \left( \frac{M^2}{\mu^2 r^4} - \frac{2M\Omega}{\mu r^2} + \frac{2M\Theta V(r)}{\mu r^4} \right) \\ &\quad + \mu r^2 \Omega \left( \frac{M}{\mu r^2} - \Omega + \frac{\Theta V(r)}{r^2} \right) + V(r). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Desprezando novamente os termos de ordem  $\Omega^2$  e  $\Theta\Omega$ , resulta

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} - M\Omega + \frac{M\Theta V(r)}{r^2} + M\Omega + V(r). \quad (\text{A.21})$$

Observa-se que os termos lineares em  $\Omega$  cancelam-se mutuamente, conduzindo à expressão

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + V(r) \left( 1 + \frac{M\Theta}{r^2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Para o potencial de Yukawa dado na Eq. (3.1) a Eq. (A.22) torna-se

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{k e^{-\mu r}}{r} - \frac{k M \Theta e^{-\mu r}}{r^3}. \quad (\text{A.23})$$

- Obtenção da Eq. (3.5)

Como o sistema é conservativo, a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo. Portanto,

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Utilizando a Eq. (A.23) e derivando-a em relação ao tempo, obtemos

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{M^2}{\mu r^3} \dot{r} - M\Theta k \frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-\mu r}}{r^3} \right) - k \frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = 0. \quad (\text{A.25})$$

Usando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = -\frac{e^{-\mu r}(1 + \mu r)}{r^2} \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-\mu r}}{r^3} \right) = -\frac{e^{-\mu r}(3 + \mu r)}{r^4} \dot{r}. \quad (\text{A.26})$$

Dividindo ambos os lados por  $\dot{r}$  e reorganizando os termos, obtemos

$$\mu \ddot{r} = \frac{M^2}{\mu r^3} - \frac{k e^{-\mu r}(1 + \mu r)}{r^2} - M\Theta k \frac{e^{-\mu r}(3 + \mu r)}{r^4}. \quad (\text{A.27})$$

- Obtenção da Eq. (3.9)

Usando a Eq. (A.17) e a Eq. (A.18) e substituindo a Eq. (3.6), e mantendo apenas termos de primeira ordem em  $\Theta$ , obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2} + \frac{k\Theta(\mu r + 2)}{r^3} (1 - e^{-\mu r}). \quad (\text{A.28})$$

Elevando a Eq. (A.28) ao quadrado, segue que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \left[ \frac{M}{\mu r^2} + \frac{k\Theta(\mu r + 2)}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right]^2 \\ &= \frac{M^2}{\mu^2 r^4} + \frac{2Mk\Theta(\mu r + 2)}{\mu r^5} (1 - e^{-\mu r}) + \mathcal{O}(\Theta^2). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Desprezando os termos de ordem  $\Theta^2$ , resulta

$$\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{\mu^2 r^4} + \frac{2Mk\Theta(\mu r + 2)}{\mu r^5} (1 - e^{-\mu r}). \quad (\text{A.30})$$

Substituindo as Eqs. (A.28) e (A.30) na Eq. (2.43), e desconsiderando termos de segunda ordem em  $\Theta$ , obtemos

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}). \quad (\text{A.31})$$

- Obtenção da Eq. (3.10)

Derivando a Eq. (A.31) em relação ao tempo,

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{M^2}{\mu r^3} \dot{r} + k \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{r} (1 - e^{-\mu r}) \right] + Mk\Theta \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right] = 0. \quad (\text{A.32})$$

Utilizando

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{r} (1 - e^{-\mu r}) \right] = \left[ -\frac{1}{r^2} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r} \right] \dot{r}, \quad (\text{A.33})$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right] = \left[ -\frac{3}{r^4} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r^3} \right] \dot{r}, \quad (\text{A.34})$$

obtemos a equação radial de movimento

$$\mu \ddot{r} = \frac{M^2}{\mu r^3} - k \left[ -\frac{1}{r^2} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r} \right] - Mk\Theta \left[ -\frac{3}{r^4} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r^3} \right]. \quad (\text{A.35})$$

### A.3 – Cálculos do Capítulo 4

- Obtenção da Eq. (4.7)

Usando a Eq. (4.5) e expandindo o integrando até primeira ordem em  $\Theta$ , encontramos

$$r^2 [E - V(r)]^2 = E^2 r^2 + 2Ek r e^{-\mu r} + 2EkM\Theta \frac{e^{-\mu r}}{r} + k^2 e^{-2\mu r} + 2k^2 M\Theta \frac{e^{-2\mu r}}{r^2}. \quad (\text{A.36})$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} g_{NCYP}(E) = AR^3 & \left[ E^2 \int_b^{r_{\max}} r^2 dr + 2Ek \int_b^{r_{\max}} r e^{-\mu r} dr \right. \\ & + 2EkM\Theta \int_b^{r_{\max}} \frac{e^{-\mu r}}{r} dr + k^2 \int_b^{r_{\max}} e^{-2\mu r} dr \\ & \left. + 2k^2 M\Theta \int_b^{r_{\max}} \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} dr \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

As integrais são dadas por

$$\int r^2 dr = \frac{r^3}{3}, \quad (\text{A.38})$$

$$\int r e^{-\mu r} dr = -\frac{e^{-\mu r}}{\mu} \left( r + \frac{1}{\mu} \right), \quad (\text{A.39})$$

$$\int \frac{e^{-\mu r}}{r} dr = -\text{Ei}(-\mu r), \quad (\text{A.40})$$

$$\int e^{-2\mu r} dr = -\frac{e^{-2\mu r}}{2\mu}, \quad (\text{A.41})$$

$$\int \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} dr = -\frac{e^{-2\mu r}}{r} - 2\mu \text{Ei}(-2\mu r). \quad (\text{A.42})$$

Substituindo os resultados acima aplicando os limites de integração  $b$  e  $r_{\max}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
g_{NCYP}(E) = AR^3 \left\{ \frac{E^2}{3} (r_{\max}^3 - b^3) \right. \\
- \frac{2Ek}{\mu} \left[ e^{-\mu r_{\max}} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) - e^{-\mu b} \left( b + \frac{1}{\mu} \right) \right] \\
- \frac{k^2}{2\mu} (e^{-2\mu r_{\max}} - e^{-2\mu b}) \\
- 2EkM\Theta [\text{Ei}(-\mu r_{\max}) - \text{Ei}(-\mu b)] \\
+ 2k^2M\Theta \left[ -\frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + \frac{e^{-2\mu b}}{b} \right. \\
\left. \left. - 2\mu (\text{Ei}(-2\mu r_{\max}) - \text{Ei}(-2\mu b)) \right] \right\}. \quad (\text{A.43})
\end{aligned}$$

A expressão acima pode ser reorganizada na forma

$$g_{NCYP}(E) = g_{YP}^{(0)}(E) + \Theta g_{YP}^{(1)}(E), \quad (\text{A.44})$$

onde  $g_{YP}^{(0)}(E)$  corresponde à contribuição comutativa usual e  $g_{YP}^{(1)}(E)$  representa a correção de primeira ordem em  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned}
g_{YP}^{(0)}(E) = \frac{AR^3 E^2}{3} \left\{ r_{\max}^3 - b^3 - \frac{3k^2}{2E^2\mu} (e^{-2\mu r_{\max}} - e^{-2\mu b}) \right. \\
\left. - \frac{6k}{E\mu} \left[ e^{-\mu r_{\max}} \left( \frac{1}{\mu} + r_{\max} \right) - e^{-\mu b} \left( \frac{1}{\mu} + b \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g_{YP}^{(1)}(E) = 2AR^3 kM \left\{ E [\text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu r_{\max})] \right. \\
\left. + k \left[ \frac{e^{-2\mu b}}{b} - \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + 2\mu (\text{Ei}(2\mu b) - \text{Ei}(2\mu r_{\max})) \right] \right\}. \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

- Determinação da Eq. (4.10)

Para determinar  $r_{\max}$ , usamos a condição  $V_{NCYP}(r_{\max}) = E$ , sendo  $V_{NCYP}(r)$  dada na Eq. (3.4), e no regime  $\mu r \ll 1$ , utiliza-se a aproximação  $e^{-\mu r} \simeq 1 - \mu r$ , de modo que

$$E - k\mu \simeq -\frac{k}{r_{\max}} - \frac{\Theta kM}{r_{\max}^3}. \quad (\text{A.47})$$

Multiplicando por  $r_{\max}^3$ , obtém-se a equação cúbica

$$(E - k\mu)r_{\max}^3 + kr_{\max}^2 + \Theta kM = 0, \quad (\text{A.48})$$

cuja solução exata foi obtida com o software *Mathematica*. Seleccionando a raiz real que recupera o limite comutativo quando  $\Theta \rightarrow 0$  e desprezando termos de ordem superior

em  $\Theta$ , obtém-se uma expressão aproximada para  $r_{\max}$ . A solução exata fornecida pelo *Mathematica* contém radicais associados às três raízes da equação cúbica. Para a raiz física, utilizamos as identidades

$$(-k^3)^{1/3} = -k, \quad (-k^3)^{2/3} = k^2, \quad (\text{A.49})$$

das quais segue que o termo independente de  $\Theta$  é dado por

$$-\frac{k^2 - k(-k^3)^{1/3} + (-k^3)^{2/3}}{3k(E - k\mu)} = -\frac{k}{E - k\mu}, \quad (\text{A.50})$$

enquanto o termo linear em  $\Theta$  reduz-se a

$$-\frac{k [k^2 + (-k^3)^{2/3}] ME\Theta}{2(-k^3)^{4/3}} = -\frac{ME\Theta}{k}. \quad (\text{A.51})$$

Portanto,

$$r_{\max} = -\frac{k}{E - k\mu} - \frac{ME\Theta}{k}. \quad (\text{A.52})$$

- Obtenção da Eq. (4.14)

A partir da Eq. (4.13) calculamos a temperatura microcanônica associada ao potencial de Yukawa NC. Para efetuar essas derivadas, é necessário considerar a dependência do  $r_{\max}$  com a energia, dada na Eq. (A.52), conseqüentemente, temos

$$\frac{\partial r_{\max}}{\partial E} = \frac{k}{(E - k\mu)^2} - \frac{M\Theta}{k}. \quad (\text{A.53})$$

Além disso, são utilizadas as relações

$$\frac{\partial}{\partial E} e^{-\mu r_{\max}} = -\mu e^{-\mu r_{\max}} \frac{\partial r_{\max}}{\partial E}, \quad (\text{A.54})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial E} \text{Ei}(\mu r_{\max}) = \frac{e^{\mu r_{\max}}}{r_{\max}} \frac{\partial r_{\max}}{\partial E}. \quad (\text{A.55})$$

A contribuição comutativa para a densidade de estados é dada pela Eq. (A.45). Derivando essa expressão em relação à energia, aplicando a regra do produto e utilizando a Eq. (A.53), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{YP}^{(0)}(E)}{\partial E} &= \frac{2g_{YP}^{(0)}(E)}{E} - \frac{AR^3 E}{k} \left\{ B(E) + Er_{\max}^4 \left( 1 - \frac{6e^{-\mu r_{\max}}}{Er_{\max}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^3}{E^2} \left[ \left( 1 - \frac{Er_{\max}^2}{k} \right) e^{-2\mu r_{\max}} - e^{-2\mu b} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

onde

$$B(E) = \frac{6k}{E\mu} \left[ e^{-\mu r_{\max}} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) - e^{-\mu b} \left( b + \frac{1}{\mu} \right) \right]. \quad (\text{A.57})$$

Para a correção NC a densidade de estados é fornecida pela Eq. (A.46). Utilizando as Eqs. (A.53)–(A.55), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{YP}^{(1)}(E)}{\partial E} &= 2AR^3kM \left\{ -\frac{E^2}{2k^2} \left[ r_{\max} + \frac{k}{E} e^{-\mu r_{\max}} \right]^2 + [\text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu r_{\max})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{(k\mu - E)^2} C(E) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

onde definimos

$$C(E) = -E \frac{e^{\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + k \left[ \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}^2} + 2\mu \frac{e^{-2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} - 2\mu \frac{e^{2\mu r_{\max}}}{r_{\max}} \right]. \quad (\text{A.59})$$

Substituindo as Eqs. (A.56) e (A.58) na Eq. (4.13), obtém-se a expressão final para a temperatura microcanônica do potencial de Yukawa NC.

- Obtenção da Eq. (4.18)

Usando a Eq. (3.8) e substituindo na Eq. (4.17), temos a expressão

$$g_{\text{NCLWP}}(E) = AR^3 \int_b^{r_{\max}} r^2 \left[ E - \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) - \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right]^2 dr. \quad (\text{A.60})$$

Definindo

$$A(r) = E - \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}), \quad B(r) = \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}), \quad (\text{A.61})$$

temos

$$[A(r) - B(r)]^2 = A(r)^2 - 2A(r)B(r) + B(r)^2. \quad (\text{A.62})$$

Como o interesse está nas correções lineares em  $\Theta$ , desprezamos o termo  $B(r)^2 \sim \Theta^2$ , obtendo

$$[E - V_{\text{NCLWP}}(r)]^2 = \left[ E - \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) \right]^2 - \frac{2Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \left[ E - \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) \right]. \quad (\text{A.63})$$

Expandindo o primeiro termo,

$$\left[ E - \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) \right]^2 = E^2 - \frac{2Ek}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{k^2}{r^2} (1 - e^{-\mu r})^2. \quad (\text{A.64})$$

Substituindo na Eq. (A.60), resulta

$$\begin{aligned} g_{\text{NCLWP}}(E) &= AR^3 \int_b^{r_{\max}} \left[ E^2 r^2 - 2Ek r (1 - e^{-\mu r}) + k^2 (1 - e^{-\mu r})^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2EMk\Theta}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{2Mk^2\Theta}{r^2} (1 - e^{-\mu r})^2 \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Separando as contribuições comutativa e não comutativa,

$$g_{\text{NCLWP}}(E) = g_{\text{LWP}}^{(0)}(E) + \Theta g_{\text{LWP}}^{(1)}(E), \quad (\text{A.66})$$

onde  $g_{\text{LWP}}^{(0)}$  representa a contribuição comutativa e  $g_{\text{LWP}}^{(1)}$  a correção linear em  $\Theta$ . Definindo

$$I_3 = k^2 \int_b^{r_{\text{max}}} (1 - e^{-\mu r})^2 dr = k^2(r_{\text{max}} - b) + \frac{2k^2}{\mu} (e^{-\mu r_{\text{max}}} - e^{-\mu b}) - \frac{k^2}{2\mu} (e^{-2\mu r_{\text{max}}} - e^{-2\mu b}), \quad (\text{A.67})$$

onde utilizamos

$$\int e^{-\mu r} dr = -\frac{e^{-\mu r}}{\mu}, \quad (\text{A.68})$$

e

$$\int e^{-2\mu r} dr = -\frac{e^{-2\mu r}}{2\mu}, \quad (\text{A.69})$$

Substituindo os resultados das integrais na contribuição comutativa, obtém-se

$$\begin{aligned} g_{\text{LWP}}^{(0)}(E) = & AR^3 \left\{ \frac{E^2}{3} (r_{\text{max}}^3 - b^3) + Ek(r_{\text{max}}^2 - b^2) \right. \\ & + \frac{2Ek}{\mu} \left[ e^{-\mu r_{\text{max}}} \left( r_{\text{max}} + \frac{1}{\mu} \right) - e^{-\mu b} \left( b + \frac{1}{\mu} \right) \right] \\ & + k^2(r_{\text{max}} - b) + \frac{2k^2}{\mu} (e^{-\mu r_{\text{max}}} - e^{-\mu b}) \\ & \left. - \frac{k^2}{2\mu} (e^{-2\mu r_{\text{max}}} - e^{-2\mu b}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

A contribuição proporcional a  $\Theta$  é

$$g_{\text{LWP}}^{(1)}(E) = 2AR^3 kM \left[ E \int_b^{r_{\text{max}}} \frac{1 - e^{-\mu r}}{r} dr + k \int_b^{r_{\text{max}}} \frac{(1 - e^{-\mu r})^2}{r^2} dr \right]. \quad (\text{A.71})$$

Definimos

$$J_1 = \int_b^{r_{\text{max}}} \frac{1 - e^{-\mu r}}{r} dr = \ln \left( \frac{r_{\text{max}}}{b} \right) + \text{Ei}(-\mu r_{\text{max}}) - \text{Ei}(-\mu b), \quad (\text{A.72})$$

e

$$\begin{aligned} J_2 = \int_b^{r_{\text{max}}} \frac{(1 - e^{-\mu r})^2}{r^2} dr = & \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r_{\text{max}}} \right) + 2 \left[ \frac{e^{-\mu r_{\text{max}}}}{r_{\text{max}}} - \frac{e^{-\mu b}}{b} \right] \\ & + 2\mu [\text{Ei}(-\mu r_{\text{max}}) - \text{Ei}(-\mu b)] - \frac{e^{-2\mu r_{\text{max}}}}{r_{\text{max}}} + \frac{e^{-2\mu b}}{b} \\ & - 2\mu [\text{Ei}(-2\mu r_{\text{max}}) - \text{Ei}(-2\mu b)], \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

onde utilizamos a solução da integral dada na Eq. (A.38) e a solução da integral seguinte

$$\int \frac{e^{-\mu r}}{r^2} dr = -\frac{e^{-\mu r}}{r} - \mu \text{Ei}(-\mu r). \quad (\text{A.74})$$

Portanto,

$$g_{LWP}^{(1)}(E) = 2AR^3kM \left\{ E \left[ \ln \left( \frac{r_{\max}}{b} \right) + \text{Ei}(-\mu r_{\max}) - \text{Ei}(-\mu b) \right] + kJ_2 \right\}. \quad (\text{A.75})$$

- Obtenção da Eq. (4.21)

A distância radial máxima é determinada pela condição  $V_{NCLWP}(r_{\max}) = E$ . Substituindo o potencial de Lee–Wick NC dado na Eq. (3.8) obtém-se

$$-\frac{k}{r_{\max}} (1 - e^{-\mu r_{\max}}) - \Theta \frac{kM}{r_{\max}^3} (1 - e^{-\mu r_{\max}}) = E. \quad (\text{A.76})$$

Como a Eq. (A.76) não admite uma solução analítica simples para  $r_{\max}$ , consideramos o regime de curto alcance  $\mu r_{\max} \ll 1$ . Nesse caso, a expansão de Taylor da exponencial fornece  $e^{-\mu r_{\max}} \simeq 1 - \mu r_{\max} + \frac{\mu^2 r_{\max}^2}{2}$ . Substituindo essa aproximação na Eq. (A.76) e retendo apenas termos até segunda ordem em  $\mu r_{\max}$ , obtemos uma equação algébrica aproximada para  $r_{\max}$ . Em seguida, introduzimos uma expansão perturbativa em primeira ordem no parâmetro de não comutatividade  $\Theta$ ,

$$r_{\max} = r_0 + \Theta r_1, \quad (\text{A.77})$$

onde  $r_0$  representa a solução comutativa e  $r_1$  corresponde à correção linear em  $\Theta$ . Substituindo essa expansão na Eq. (A.76) e retendo apenas termos até primeira ordem em  $\Theta$ , obtém-se inicialmente a equação de ordem zero,

$$-\frac{k}{r_0} (1 - e^{-\mu r_0}) = E, \quad (\text{A.78})$$

cuja solução pode ser escrita como

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}}. \quad (\text{A.79})$$

Em seguida, considerando os termos lineares em  $\Theta$  e resolvendo para  $r_1$ , encontramos

$$r_1 = -\frac{M \left[ \mu - \frac{\mu}{2} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \right]}{2 \left( \mu - \frac{E}{k} \right) \left[ \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right]}. \quad (\text{A.80})$$

Portanto, a distância radial máxima é dada por

$$r_{\max} \approx \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{M\Theta \left[ \mu - \frac{\mu}{2} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \right]}{2 \left( \mu - \frac{E}{k} \right) \left[ \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right]}. \quad (\text{A.81})$$

- Obtenção da Eq. (4.24)

A partir da Eq. (4.23) calculamos a temperatura microcanônica associada ao potencial de Lee–Wick NC. Para efetuar essas derivadas, é necessário considerar a dependência do  $r_{\max}$  com a energia, dada na Eq.(A.81), que sua derivada corresponde a

$$\frac{\partial r_{\max}}{\partial E} = -\frac{\sqrt{2}}{2k\sqrt{\mu - \frac{E}{k}}} + \Theta A_3(E), \quad (\text{A.82})$$

onde

$$A_3(E) = \frac{M\mu}{k\sqrt{\mu - \frac{E}{k}} \left( \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right)} + \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mu - \frac{E}{k}}}{2 \left( \mu - \frac{E}{k} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\mu} \sqrt{\mu - \frac{E}{k}} - \frac{3}{2} \right)}. \quad (\text{A.83})$$

Como a densidade de estados foi obtida até primeira ordem em  $\Theta$ , Eq. (A.66), além disso, utilizando as derivadas apresentadas nas Eqs. (A.54) e (A.55) e a

$$\frac{\partial}{\partial E} \text{Ei}(-\mu r_{\max}) = \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{r_{\max}} \frac{\partial r_{\max}}{\partial E}, \quad (\text{A.84})$$

e aplicando a regra do produto e a regra da cadeia às Eqs. (4.19) e (4.20), obtêm-se as expressões para

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{LW}^{(0)}(E)}{\partial E} &= \frac{g_{LW}^{(0)}(E)}{E} - \frac{2AR^3 k^2 E}{\mu} \left\{ \frac{2}{E} A_1(E) + \frac{1}{\mu k r_{\max}} A_2(E) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{2E^2} \left[ \left( r_{\max} - \frac{E}{\mu^2 r_{\max}} \right) \left( 1 - \frac{E r_{\max}}{k} \right)^2 - b \left( 1 - \frac{Eb}{k} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{E^2} \left[ 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} + \frac{E}{4\mu k r_{\max}} e^{-\mu r_{\max}} - \frac{E^2}{\mu^2 k^2 r_{\max}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\mu b}}{E^2} \left( 1 - \frac{e^{-\mu b}}{4} \right) \right\}, \quad (\text{A.85}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{LW}^{(1)}(E)}{\partial E} = & 2AR^3kM \left\{ \frac{kE}{\mu} \left[ \frac{\mu}{2E} \left( 1 - \frac{Er_{\max}}{k} \right)^2 \right. \right. \\
& - \mu e^{-\mu r_{\max}} \left( \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{e^{-\mu r_{\max}}}{4} \right) - \frac{1}{k} \left( r_{\max} + \frac{1}{\mu} \right) \right) \\
& \left. \left. + e^{-\mu r_{\max}} \left( \frac{\mu}{4E} e^{-\mu r_{\max}} - \frac{1}{k} \right) \right] A_3(E) \right. \\
& - \left[ \ln \left( \frac{r_{\max}}{b} \right) - \text{Ei}(-\mu r_{\max}) + \text{Ei}(-\mu b) \right] \\
& - \left[ E \frac{1 - e^{-\mu r_{\max}}}{r_{\max}} + k \left( - \frac{(1 - e^{-\mu r_{\max}})^2}{r_{\max}^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\mu (e^{-\mu r_{\max}} - e^{-2\mu r_{\max}})}{r_{\max}} \right) \right] \frac{\sqrt{2}}{2\mu k} \sqrt{\frac{k}{\mu k - E}} \left. \right\}. \tag{A.86}
\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (4.23), chega-se à expressão final para a temperatura microcanônica do potencial de Lee–Wick não comutativo apresentada na Eq. (4.24).

#### A.4 – Cálculos do Capítulo 5

- Obtenção da Eq. (5.8)

Para a Função de Partição, podemos reescrever a Eq. (5.1) na forma

$$Z_{NCYP}(\beta) = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}, \tag{A.87}$$

com

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_{NCYP}(r), \tag{A.88}$$

e  $V_{NCYP}(r)$  dada na Eq. (3.4). Fazendo a integração sobre os Momentos,

$$\int e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}} d^3\mathbf{p} = \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2}, \tag{A.89}$$

$$\int e^{-\beta V_{NCYP}(r)} d^3\mathbf{r} = 4\pi \int_b^R e^{-\beta V_{NCYP}(r)} r^2 dr. \tag{A.90}$$

Fazendo a expansão para a exponencial para resolver divergências

$$\begin{aligned}
e^{-\beta V_{NCYP}(r)} & \approx 1 - \beta V_{NCYP}(r) + \frac{1}{2} \beta^2 V_{NCYP}^2(r) \\
& = 1 + \beta \left( \frac{ke^{-\mu r}}{r} + \frac{\Theta k M e^{-\mu r}}{r^3} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \beta^2 \left( \frac{ke^{-\mu r}}{r} + \frac{\Theta k M e^{-\mu r}}{r^3} \right)^2. \tag{A.91}
\end{aligned}$$

Utilizando os resultados das integrais obtidas nas Eqs. (A.34)–(A.38), e aplicando os limites de integração, temos

$$A_1 = \frac{1}{\mu^2} [e^{-\mu b} (1 + \mu b) - e^{-\mu R} (1 + \mu R)] , \quad (\text{A.92})$$

$$A_2 = \text{Ei}(\mu b) - \text{Ei}(\mu R) , \quad (\text{A.93})$$

$$A_3 = \frac{e^{-2\mu b} - e^{-2\mu R}}{\mu} , \quad (\text{A.94})$$

$$A_4 = \frac{e^{-2\mu b}}{b} - \frac{e^{-2\mu R}}{R} + 2\mu [\text{Ei}(2\mu b) - \text{Ei}(2\mu R)] , \quad (\text{A.95})$$

$$I_0 = \frac{R^3 - b^3}{3} . \quad (\text{A.96})$$

Assim a Função de Partição Final é

$$Z_{NCYP}(\beta) = \frac{4\pi}{h^3} \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \left[ I_0 + \beta k A_1 + \beta \Theta k M A_2 + \frac{1}{4} \beta^2 k^2 A_3 + \beta^2 \Theta k^2 M A_4 \right] . \quad (\text{A.97})$$

- Obtenção da Eq. (5.10)

Para a energia média partimos da Eq. (5.2), usamos a Eq. (A.100) e definimos

$$F(\beta) = I_0 + \beta k A_1 + \beta \Theta k M A_2 + \frac{1}{4} \beta^2 k^2 A_3 + \beta^2 \Theta k^2 M A_4 . \quad (\text{A.98})$$

Assim,

$$Z_{NCYP}(\beta) = \frac{4\pi}{h^3} (2\pi\mu)^{3/2} \beta^{-3/2} F(\beta) . \quad (\text{A.99})$$

Tomando o logaritmo,

$$\ln Z_{NCYP}(\beta) = \ln \left( \frac{4\pi}{h^3} \right) + \frac{3}{2} \ln(2\pi\mu) - \frac{3}{2} \ln \beta + \ln F(\beta) . \quad (\text{A.100})$$

Como

$$\langle U \rangle_{NCYP}(\beta) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{NCYP}(\beta) , \quad (\text{A.101})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_{NCYP}(\beta) &= - \left( - \frac{3}{2\beta} + \frac{1}{F(\beta)} \frac{dF}{d\beta} \right) \\ &= \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{F(\beta)} \frac{dF}{d\beta} , \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

sendo

$$\frac{dF}{d\beta} = k A_1 + \Theta k M A_2 + \frac{1}{2} \beta k^2 A_3 + 2\beta \Theta k^2 M A_4 . \quad (\text{A.103})$$

obtemos

$$\langle U \rangle_{NCYP}(\beta) = \frac{3}{2\beta} - \frac{k A_1 + \Theta k M A_2 + \frac{1}{2} \beta k^2 A_3 + 2\beta \Theta k^2 M A_4}{I_0 + \beta k A_1 + \beta \Theta k M A_2 + \frac{1}{4} \beta^2 k^2 A_3 + \beta^2 \Theta k^2 M A_4} . \quad (\text{A.104})$$

- Obtenção da Eq. (5.11)

Para a capacidade térmica usamos a Eq. (A.104) na Eq. (5.3) e derivando em relação a  $\beta$

$$\frac{\partial \langle U \rangle_{NCYP}(\beta)}{\partial \beta} = -\frac{3}{2\beta^2} - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{N}{D} \right). \quad (\text{A.105})$$

Aplicando a regra do quociente,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{N}{D} \right) = \frac{N'D - ND'}{D^2}, \quad (\text{A.106})$$

onde

$$N' = \frac{dN}{d\beta}, \quad D' = \frac{dD}{d\beta}. \quad (\text{A.107})$$

Assim,

$$\frac{\partial \langle U \rangle_{NCYP}}{\partial \beta} = -\frac{3}{2\beta^2} - \frac{N'D - ND'}{D^2}. \quad (\text{A.108})$$

Substituindo esse resultado na definição da capacidade térmica, obtemos

$$C_V^{NCYP} = \frac{3}{2} + \beta^2 \frac{N'D - ND'}{D^2}. \quad (\text{A.109})$$

com

$$N = kA_1 + \Theta kMA_2 + \frac{1}{2}\beta k^2 A_3 + 2\beta\Theta k^2 MA_4, \quad (\text{A.110})$$

$$D = I_0 + \beta kA_1 + \beta\Theta kMA_2 + \frac{1}{4}\beta^2 k^2 A_3 + \beta^2\Theta k^2 MA_4. \quad (\text{A.111})$$

Compactamos as formas para

$$\alpha_1 = kA_1, \quad \alpha_2 = kMA_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}k^2 A_3, \quad \alpha_4 = k^2 MA_4. \quad (\text{A.112})$$

Utilizando as expressões explícitas de  $N(\beta)$  e  $D(\beta)$ ,

$$N' = \frac{1}{2}k^2 A_3 + 2\Theta k^2 MA_4, \quad (\text{A.113})$$

e

$$D' = kA_1 + \Theta kMA_2 + \frac{1}{2}\beta k^2 A_3 + 2\beta\Theta k^2 MA_4, \quad (\text{A.114})$$

- Obtenção da Eq. (5.15)

Da Eq. (A.85) até a Eq. (A.88) aplicando ao potencial Lee-Wick NC, obtemos a expressão para a função de partição

$$Z_{NCLWP}(\beta) = \frac{4\pi}{h^3} \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \int_b^R e^{-\beta V_{NCLWP}(r)} r^2 dr. \quad (\text{A.115})$$

Para obter uma expressão analítica da integral radial, expandimos a exponencial até segunda ordem em  $\beta$ ,

$$e^{-\beta V_{NCLWP}(r)} \approx 1 - \beta V_{NCLWP}(r) + \frac{\beta^2}{2} V_{NCLWP}^2(r). \quad (\text{A.116})$$

Substituindo o potencial da Eq. (3.8), obtém-se

$$e^{-\beta V_{NCLWP}(r)} \approx 1 - \beta \left[ \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right] + \frac{\beta^2}{2} \left[ \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) \right]^2. \quad (\text{A.117})$$

Mantendo apenas até os termos lineares em  $\Theta$ , o quadrado do potencial torna-se

$$V_{NCLWP}^2(r) \approx \frac{k^2}{r^2} (1 - e^{-\mu r})^2 + \frac{2Mk^2\Theta}{r^4} (1 - e^{-\mu r})^2. \quad (\text{A.118})$$

Consequentemente,

$$e^{-\beta V_{NCLWP}(r)} \approx 1 - \beta \frac{k}{r} (1 - e^{-\mu r}) - \beta \frac{Mk\Theta}{r^3} (1 - e^{-\mu r}) + \frac{\beta^2 k^2}{2r^2} (1 - e^{-\mu r})^2 + \frac{\beta^2 Mk^2\Theta}{r^4} (1 - e^{-\mu r})^2. \quad (\text{A.119})$$

Substituindo esta expansão na integral radial, segue que

$$\begin{aligned} \int_b^R e^{-\beta V_{NCLWP}(r)} r^2 dr &\approx \int_b^R r^2 dr - \beta k \int_b^R r (1 - e^{-\mu r}) dr \\ &\quad - \beta Mk\Theta \int_b^R \frac{1 - e^{-\mu r}}{r} dr \\ &\quad + \frac{\beta^2 k^2}{2} \int_b^R (1 - e^{-\mu r})^2 dr \\ &\quad + \beta^2 Mk^2\Theta \int_b^R \frac{(1 - e^{-\mu r})^2}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

Portanto, a função de partição pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Z_{NCLWP}(\beta) &\approx \frac{4\pi}{h^3} \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \left[ \frac{R^3 - b^3}{3} - \beta k \int_b^R r (1 - e^{-\mu r}) dr \right. \\ &\quad - \beta Mk\Theta \int_b^R \frac{1 - e^{-\mu r}}{r} dr + \frac{\beta^2 k^2}{2} \int_b^R (1 - e^{-\mu r})^2 dr \\ &\quad \left. + \beta^2 Mk^2\Theta \int_b^R \frac{(1 - e^{-\mu r})^2}{r^2} dr \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

Utilizando as integrais já calculadas na obtenção de  $g_{\text{LWP}}^{(0)}(E)$  e  $g_{\text{LWP}}^{(1)}(E)$ , introduzimos as quantidades

$$I_0 = \frac{R^3 - b^3}{3}, \quad (\text{A.122})$$

$$I_1^{(0)} = k \left[ \frac{R^2 - b^2}{2} + \frac{e^{-\mu R}(1 + \mu R) - e^{-\mu b}(1 + \mu b)}{\mu^2} \right], \quad (\text{A.123})$$

$$I_1^{(1)} = Mk \left[ \ln \frac{R}{b} - \text{Ei}(-\mu R) + \text{Ei}(-\mu b) \right], \quad (\text{A.124})$$

$$I_2^{(0)} = k^2 \left[ (R - b) + \frac{2}{\mu}(e^{-\mu R} - e^{-\mu b}) - \frac{1}{2\mu}(e^{-2\mu R} - e^{-2\mu b}) \right], \quad (\text{A.125})$$

$$I_2^{(1)} = Mk^2 \left[ \frac{1 - 2e^{-\mu b} + e^{-2\mu b}}{b} - \frac{1 - 2e^{-\mu R} + e^{-2\mu R}}{R} \right] + 2\mu Mk^2 [\text{Ei}(-2\mu b) - \text{Ei}(-2\mu R) - \text{Ei}(-\mu b) + \text{Ei}(-\mu R)]. \quad (\text{A.126})$$

Portanto, escrevemos a função de partição final na forma

$$Z_{\text{NCLWP}}(\beta) = \frac{4\pi V}{h^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \left[ I_0 - \beta I_1^{(0)} + \frac{1}{2} \beta^2 I_2^{(0)} - \beta \Theta I_1^{(1)} + \beta^2 \Theta I_2^{(1)} \right], \quad (\text{A.127})$$

- Obtenção da Eq. (5.17)

A partir da função de partição, Eq. (A.130), definimos

$$D_0(\beta) = I_0 - \beta I_1^{(0)} + \frac{1}{2} \beta^2 I_2^{(0)}, \quad (\text{A.128})$$

de modo que

$$Z_{\text{NCLWP}}(\beta) = \frac{4\pi V}{h^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \left[ D_0(\beta) - \beta \Theta I_1^{(1)} + \beta^2 \Theta I_2^{(1)} \right]. \quad (\text{A.129})$$

Tomando o logaritmo,

$$\ln Z_{\text{NCLWP}} = \ln \left[ \frac{4\pi V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} \right] - \frac{3}{2} \ln \beta + \ln \left[ D_0(\beta) - \beta \Theta I_1^{(1)} + \beta^2 \Theta I_2^{(1)} \right]. \quad (\text{A.130})$$

Como estamos interessados apenas até os termos de primeira ordem em  $\Theta$ ,

$$\ln Z_{\text{NCLWP}} = \ln \left[ \frac{4\pi V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} \right] - \frac{3}{2} \ln \beta + \ln D_0(\beta) + \Theta \frac{-\beta I_1^{(1)} + \beta^2 I_2^{(1)}}{D_0(\beta)}. \quad (\text{A.131})$$

Como a energia média é dada por

$$\langle U \rangle_{\text{NCLWP}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{\text{NCLWP}}(\beta). \quad (\text{A.132})$$

Calculando a derivada e mantendo apenas termos lineares em  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_{NCLWP} &= \frac{3}{2\beta} + \frac{I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)}}{D_0(\beta)} \\ &+ \Theta \left[ \frac{I_1^{(1)} - 2\beta I_2^{(1)}}{D_0(\beta)} + \frac{\beta \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right) \left( I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)} \right)}{D_0^2(\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

- Obtenção da Eq. (5.19)

A partir da Eq. (5.4) reescrevendo para o potencial de Lee–Wick NC, capacidade térmica a volume constante é definida por

$$C_V^{NCLW} = -\beta^2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \beta}. \quad (\text{A.134})$$

Calculando a derivada do primeiro termo,

$$-\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{3}{2\beta} \right) = \frac{3}{2}. \quad (\text{A.135})$$

Para o segundo termo, usando a regra do quociente,

$$D'_0(\beta) = -I_1^{(0)} + \beta I_2^{(0)}, \quad (\text{A.136})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)}}{D_0(\beta)} \right] = \frac{-I_2^{(0)} D_0(\beta) - \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right) D'_0(\beta)}{D_0^2(\beta)}. \quad (\text{A.137})$$

Assim,

$$-\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)}}{D_0(\beta)} \right] = \beta^2 \frac{I_2^{(0)} D_0(\beta) - \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right)^2}{D_0^2(\beta)}. \quad (\text{A.138})$$

Definindo

$$B(\beta) = \beta \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right) \left( I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)} \right), \quad (\text{A.139})$$

temos

$$B'(\beta) = \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right) \left( I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)} \right) - \beta \left[ I_2^{(0)} \left( I_1^{(1)} - \beta I_2^{(1)} \right) + I_2^{(1)} \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right) \right]. \quad (\text{A.140})$$

Logo

$$\begin{aligned} C_V^{NCLW} &= \frac{3}{2} + \beta^2 \left[ \frac{I_2^{(0)} D_0(\beta) - \left( I_1^{(0)} - \beta I_2^{(0)} \right)^2}{D_0^2(\beta)} \right] \\ &+ \Theta \beta^2 \left[ \frac{2I_2^{(1)} D_0(\beta) + \left( I_1^{(1)} - 2\beta I_2^{(1)} \right) D'_0(\beta)}{D_0^2(\beta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B'(\beta) D_0(\beta) - 2B(\beta) D'_0(\beta)}{D_0^3(\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.141})$$

que é a expressão final da capacidade térmica para o potencial de Lee–Wick não comutativo.