

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Pablo Augusto Santos Nogueira

Cohomologia em Variedades e o Teorema de de Rham

Juiz de Fora

2026

Pablo Augusto Santos Nogueira

Cohomologia em Variedades e o Teorema de de Rham

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia Algébrica

Orientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nogueira, Pablo Augusto Santos.

Cohomologia em Variedades e o Teorema de de Rham / Pablo Augusto Santos Nogueira. – 2026.

131 f. : il.

Orientador: Lonardo Rabelo

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2026.

1. Cohomologia de de Rham. 2. Cohomologia Singular. 3. Teorema de de Rham. I. Rabelo, Lonardo, orient. II. Título.

Pablo Augusto Santos Nogueira

Cohomologia em Variedades e o Teorema de Rham

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 10 de março de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lonardo Rabelo - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr Regis Castijos Alves Soares Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr Luiz Roberto Hartmann Junior
Universidade Federal de São Carlos

Juiz de Fora, 26/06/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Roberto Hartmann Junior, Usuário Externo**, em 26/06/2026, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lonardo Rabelo, Professor(a)**, em 29/06/2026, às 09:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Regis Castijos Alves Soares Junior, Professor(a)**, em 29/06/2026, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3052869** e o código CRC **FF88DCDC**.

A Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pela vida e pela oportunidade concebida!

Aos meus pais, Isabel e Kelson, por sempre me apoiarem, financeiramente e emocionalmente, em minha vida acadêmica, motivando-me pela busca de meus sonhos.

À minha namorada Larissa, gratidão por sempre estar ao meu lado nos momentos mais difíceis, dando-me apoio para que eu não desistisse da batalha. Com ela, vivi momentos de incertezas relacionadas aos meus estudos, porém, com todo carinho e amor, me motivou a continuar.

Não poderia deixar de citar também minha Irmã Isabela, meus avós Raiton, Inacinha, Zélia e Lázaro (in memoriam); e toda minha família que, de alguma forma, apoiam-me nessa jornada!

Aos meus amigos de mestrado, pelos momentos juntos e pela motivação mútua, e à Paula, secretária do programa, pela paciência com minhas dúvidas burocráticas.

Gratidão aos meus grandes amigos Daniel e Pedro Lucas, com os quais pude morar e vivenciar grandes momentos.

À minha psicóloga Rafaella, agradeço pelas sessões de terapia, que me ajudaram nos estudos.

Ao meu orientador Lonardo, pessoa de grande conhecimento, pela oportunidade dada, pela confiança, pela ajuda e dedicação à minha pesquisa!

Aos professores Régis e Luiz por aceitarem o convite para comporem a banca avaliadora, podendo, dessa forma, auxiliar na revisão de meu trabalho e aperfeiçoamento de meu conhecimento!

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e à UFJF, pelos recursos financeiros, os quais possibilitaram-me minha participação em eventos.

E à CAPES, pelos fomentos que contribuíram com o andamento de minha formação.

“A geometria é o conhecimento do eterno.” - Plato, Republic, VII,
527.

RESUMO

Este trabalho apresenta duas abordagens algébricas para o estudo de variedades diferenciáveis: as cohomologias de de Rham e singular. Inicialmente, fundamentando-se na teoria de complexos de cadeias, introduzem-se os conceitos abstratos das teorias homológicas e cohomológicas. Em seguida, apresenta-se a cohomologia de de Rham - ferramenta baseada no quociente entre formas diferenciais fechadas e exatas - e a cohomologia singular, construída como o dual algébrico da homologia singular. Na primeira abordagem, calculam-se de forma rigorosa os grupos de de Rham de variedades conhecidas. Na segunda, prioriza-se a construção teórica, dada a complexidade inerente ao cálculo direto de exemplos nessa teoria. Por fim, enuncia-se e demonstra-se o Teorema de de Rham, o qual estabelece que os grupos de cohomologia de de Rham de uma variedade são isomorfos aos seus grupos de cohomologia singular, integrando as duas perspectivas e viabilizando a obtenção de resultados topológicos via ferramentas analíticas.

Palavras-chave: cohomologia de de Rham; cohomologia singular; Teorema de de Rham.

ABSTRACT

This work presents two algebraic approaches to the study of differentiable manifolds: de Rham cohomology and singular cohomology. Initially, based on chain complex theory, the abstract concepts of homological and cohomological theories are introduced. Next, de Rham cohomology - a tool based on the quotient between closed and exact differential forms - and singular cohomology, constructed as the algebraic dual of singular homology, are presented. In the first approach, the de Rham groups of known manifolds are rigorously calculated. In the second, theoretical construction is prioritized, given the complexity inherent in the direct calculation of examples in this theory. Finally, de Rham's theorem is stated and proven, which establishes that the de Rham cohomology groups of a manifold are isomorphic to its singular cohomology groups, integrating the two perspectives and enabling the obtaining of topological results via analytical tools.

Keywords: de Rham cohomology; singular cohomology; de Rham Theorem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA	13
2.1	HOMOLOGIA	13
2.2	COHOMOLOGIA	15
2.2.1	Complexo de cocadeias	15
2.2.2	Dual algébrico de um complexo de cadeias	17
2.3	HOMOTOPIA ALGÉBRICA	20
2.4	SEQUÊNCIAS EXATAS	22
2.4.1	Sequências exatas e o Lema dos Cinco	22
2.4.2	Sequências de Mayer-Vietoris	25
2.4.3	Dual algébrico de uma sequência exata	28
3	COHOMOLOGIA DE DE RHAM	32
3.1	COMPLEXO DE DE RHAM	32
3.2	INVARIÂNCIA NA COHOMOLOGIA DE DE RHAM	34
3.2.1	Invariância por difeomorfismo	34
3.2.2	Invariância homotópica	35
3.2.3	Retrato por deformação	44
3.3	APLICAÇÕES DA INVARIÂNCIA PARA O CÁLCULO DE GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE DE RHAM	45
3.3.1	Sequência de Mayer-Vietoris na cohomologia de de Rham	45
3.3.2	Exemplos de cohomologia de de Rham	46
4	HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA SINGULARES	70
4.1	HOMOLOGIA SINGULAR	70
4.1.1	Simplexos	70
4.1.2	Complexo singular	72
4.2	INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA EM GRUPOS DE HOMOLOGIA SINGULAR	75
4.3	SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS NA HOMOLOGIA SINGULAR	77
4.4	COHOMOLOGIA SINGULAR	84
4.5	COMPLEXOS SINGULARES DIFERENCIÁVEIS	86
5	COHOMOLOGIA DE DE RHAM vs COHOMOLOGIA SINGULAR	91
5.1	HOMOMORFISMO DE DE RHAM	91
5.2	TEOREMA DE DE RHAM	93
6	CONCLUSÃO	100
	REFERÊNCIAS	101

	APÊNDICE A – Álgebra Abstrata	103
A.1	MÓDULOS	103
A.2	PRODUTO E SOMA DIRETA DE MÓDULOS	105
A.3	MÓDULO DUAL	106
	APÊNDICE B – Topologia	108
B.1	ESPAÇOS TOPOLÓGICOS	108
B.2	CONEXOS E COMPACTOS	110
B.3	CONTINUIDADE	111
B.4	UNIÃO DISJUNTA	112
B.5	TOPOLOGIA QUOCIENTE	113
	APÊNDICE C – Variedades diferenciáveis	115
C.1	DEFINIÇÕES E EXEMPLOS	115
C.2	APLICAÇÕES ENTRE VARIEDADES	120
C.3	ESPAÇO TANGENTE DE UMA VARIEDADE	121
C.4	SUBVARIEDADES	122
C.5	VARIEDADES COM BORDO E COM CANTOS	123
	APÊNDICE D – Formas diferenciais	124
D.1	FORMAS ALTERNADAS	124
D.2	FORMAS DIFERENCIAIS	125
D.3	PULLBACK	127
D.4	INTEGRAÇÃO DE FORMAS	128
D.5	DERIVADA EXTERIOR	130
D.6	TEOREMA DE STOKES	131

1 INTRODUÇÃO

Na década de 1880, Henri Poincaré (1854 - 1912) investigou as condições necessárias para que formas diferenciais fossem exatas. Em 1895, no artigo fundamental [22], Poincaré demonstrou que, em domínios contráteis como o $\mathbb{R}^n$, ser fechada é uma condição necessária e suficiente para que uma forma seja exata (resultado hoje conhecido como Lema de Poincaré). No mesmo trabalho, o autor introduziu conceitos essenciais de homologia e cohomologia, relacionando a existência de formas fechadas que não são exatas à presença de ciclos não-triviais em uma variedade arbitrária - termo utilizado para descrever a existência de “buracos” na variedade. No contexto da topologia de superfícies, essa característica está intrinsecamente ligada ao gênero e é quantificada pelos Números de Betti.

Embora Poincaré tenha estudado essas ferramentas anteriormente, as formas diferenciais e sua álgebra exterior só foram formalizadas em 1899 por Élie Cartan, (1869 - 1951) em [3]. Em 1928, Cartan conjecturou em [5] que as propriedades descritas em [22] sugeriam uma dualidade entre a estrutura algébrica das formas diferenciais e a estrutura dos ciclos geométricos (chamada hoje de homologia singular). Essa dualidade estabelece que a estrutura das formas fechadas (módulo as exatas) é o dual algébrico da estrutura dos ciclos, o que viria a ser demonstrado rigorosamente por Georges de Rham (1903 - 1990) em sua tese de doutorado, publicada em 1931. O Teorema de de Rham, nome atual do resultado provado por de Rham, consolidou uma união entre análise e topologia, formalizando o que conhecemos como cohomologia de de Rham.

No que tange à homologia singular, sua primeira formalização rigorosa ocorreu em 1944, com a publicação do artigo Singular Homology Theory [14] pelo matemático Samuel Eilenberg (1913 - 1998). Nesse trabalho, Eilenberg estabeleceu as definições e os resultados fundamentais dessa teoria, permitindo sua aplicação a espaços topológicos gerais. No mesmo artigo, introduziu-se a cohomologia singular, que atua como o dual algébrico da homologia. Quando calculada com coeficientes no corpo dos números reais, a cohomologia singular revela-se, pelo Teorema de de Rham, isomorfa à cohomologia de de Rham para variedades diferenciáveis, estabelecendo uma ponte definitiva entre as propriedades topológicas discretas e as propriedades analíticas contínuas de um espaço.

O objetivo deste trabalho, portanto, é apresentar os conceitos principais das cohomologias de de Rham e singular, realizando um estudo sistemático de cada uma. Por fim, será enunciado e demonstrado o Teorema de de Rham, cujo propósito, como mencionado nos parágrafos anteriores, é relacionar as duas cohomologias. Estruturalmente, será utilizado como referência o livro [15] e algumas complementações baseadas em [12].

No Capítulo 2, introduziremos a teoria algébrica abstrata da homologia e cohomologia. Na primeira seção, definiremos os complexos de cadeias, uma sequência de pares de módulos e homomorfismos da qual serão obtidos os grupos de homologia. Em

seguida, serão definidos os grupos de cohomologia, construídos através de complexos de cocadeias. Além disso, será apresentada uma maneira de obter uma cohomologia a partir da dualização de uma homologia conhecida. Na terceira parte, abordaremos o conceito de homotopia algébrica. Essa ideia é primordial, pois a partir daí podemos relacionar os grupos de cohomologia dos complexos. Por fim, estudaremos as sequências exatas, obtendo, por exemplo, as sequências de Mayer-Vietoris, ferramenta essencial para futuros cálculos.

O intuito do Capítulo 3 é trabalhar com um exemplo particular da teoria apresentada anteriormente, a cohomologia de de Rham, cujos complexos de cocadeias são compostos pelos módulos formados pelas formas diferenciais definidas em variedade diferenciáveis. Após obtermos os grupos de de Rham, apresentaremos duas maneiras de alcançar uma homotopia algébrica no caso abordado: invariância por difeomorfismo e homotópica. O segundo tipo de invariância é uma ferramenta poderosa, pois garante que duas variedades, não necessariamente difeomorfas, mas obtidas através de uma homotopia, por exemplo, possuam grupos de cohomologia de de Rham isomorfos. Por fim, serão calculados de maneira rigorosa os grupos de cohomologia de de Rham de algumas variedades diferenciáveis conhecidas. As técnicas utilizadas para os respectivos exemplos variam desde o cálculo direto, difeomorfismo entre variedades, até estratégias mais elaboradas como o uso de Mayer-Vietoris.

A finalidade do Capítulo 4 é incluir os conceitos da homologia e cohomologia singular, outro exemplo particular da teoria feita no Capítulo 2. Na primeira seção do capítulo, será definida a homologia singular, cujo propósito é trabalhar aplicações contínuas dominadas em simplexes, uma espécie de generalização n -dimensional de triângulos, com contradomínio em espaços topológicos quaisquer. Tais funções serão chamadas simples singulares. Como no terceiro capítulo, estudaremos a invariância homotópica e a sequência de Mayer-Vietoris para o caso singular. Daí, será possível sistematizar a cohomologia singular, um tipo de dual algébrico da homologia singular, uma vez que seus elementos (as cocadeias) são funções que associam valores escalares aos ciclos da homologia. Por fim, na última seção do capítulo veremos a teoria da cohomologia singular aplicada a variedades diferenciáveis, espaços onde temos o isomorfismo entre as cohomologias de de Rham e singular.

Com o escopo de relacionar as duas cohomologias vistas nos capítulos anteriores, será apresentado no Capítulo 5 o Teorema de de Rham, obtido a partir do homomorfismo de de Rham, formalizado na primeira seção do capítulo.

Este texto pressupõe que o leitor tenha um conhecimento introdutório sobre os seguintes tópicos:

- Álgebra Linear, incluindo conceitos como espaço vetorial, espaço dual, transformações lineares, álgebra de matrizes e o Teorema do Núcleo-Imagem;

- Álgebra Abstrata, em especial teoria de módulos;
- Análise matemática, em particular, derivação e integração no espaço euclidiano;
- Geometria Diferencial elementar, em particular, noções de superfícies, parametrizações e espaços tangentes;
- Topologia, com familiaridade em noções como abertos, fechados, continuidade, conexidade, compacidade e topologia quociente;
- Topologia diferencial, com afinidade em conceitos de variedades diferenciáveis e formas diferenciais.

Esses pré-requisitos são essenciais para acompanhar o desenvolvimento do trabalho. No final serão incluídos apêndices que resumirão os tópicos anteriores.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA

O objetivo desse capítulo é apresentar, de maneira abstrata e resumida, os conceitos algébricos da teoria da homologia e da cohomologia, os quais são utilizados nos capítulos posteriores em casos particulares. A escrita do mesmo é baseada no Capítulo I de [15].

2.1 HOMOLOGIA

Para o decorrer do capítulo, consideremos A um anel comutativo com unidade.

Definição 2.1.1 (Complexo de cadeias). Para cada $p \geq 0$ inteiro, seja C_p um A -módulo e $\partial_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$ um homomorfismo. Dizemos que a sequência $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ é um *complexo de cadeias* com coeficientes em A se $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Ademais, chamamos o módulo C_p de *módulo p -dimensional* de $\mathcal{C}$, o homomorfismo ∂_p de *operador bordo p -dimensional* e cada $x \in C_p$ de uma *p -cadeia* em $\mathcal{C}$.

Para facilitar a interpretação, representaremos o complexo $\mathcal{C}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{C}: \cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Definição 2.1.2 (p -ciclo e p -bordo de um complexo de cadeias). Sejam $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ um complexo de cadeias e $x \in C_p$ uma p -cadeia. Dizemos que x é um *p -ciclo* de $\mathcal{C}$ caso $\partial_p x = 0$. Além disso, se $x = \partial_{p+1} y$, para algum $y \in C_{p+1}$, x é dito um *p -bordo* de $\mathcal{C}$.

Vamos mostrar que é possível tomar o quociente dos conjunto dos p -ciclos de $\mathcal{C}$, denotado por $Z_p(\mathcal{C})$, pelo conjunto dos p -bordos, denotado por $B_p(\mathcal{C})$. De fato, primeiro observe que $Z_p(\mathcal{C}) = \ker \partial_p$ e $B_p(\mathcal{C}) = \text{Im } \partial_{p+1}$, ou seja, ambos os conjuntos são submódulos de C_p . Ademais, temos que $B_p(\mathcal{C}) \subset Z_p(\mathcal{C})$, pois para cada $x \in C_{p+1}$, $(\partial_p \circ \partial_{p+1})x = 0$ e, portanto, $B_p(\mathcal{C})$ é um submódulo de $Z_p(\mathcal{C})$ sobre A . Com isso, podemos então definir o grupo quociente $Z_p(\mathcal{C})/B_p(\mathcal{C})$, o qual pelo Teorema A.1.1 é um A -módulo, como definido a seguir.

Definição 2.1.3 (Grupo de homologia). Dado $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ um complexo de cadeias, para cada inteiro $p \geq 0$, chamamos o A -módulo quociente

$$H_p(\mathcal{C}) = Z_p(\mathcal{C})/B_p(\mathcal{C})$$

de *grupo de homologia p -dimensional* do complexo $\mathcal{C}$. As classes de equivalência

$$[z] = z + B_p(\mathcal{C}) = \{z + \partial_{p+1} x; x \in C_{p+1}\}$$

são ditas *classes de homologia* dos p -ciclos $z \in Z_p(\mathcal{C})$.

Definição 2.1.4 (Ciclos homólogos). Sejam z e z' p -ciclos de um complexo de cadeias $\mathcal{C}$. Caso $[z] = [z']$, dizemos que z e z' são *ciclos homólogos*.

Um fato importante é que caso z e z' sejam p -ciclos homólogos em $\mathcal{C}$, por definição, existe uma $(p+1)$ -cadeia x em $\mathcal{C}$ tal que $z = z' + \partial_{p+1}x$, ou seja, $z - z' = \partial_{p+1}x$.

Definição 2.1.5 (Subcomplexo de cadeias). Seja $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ um complexo de cadeias tal que, para cada inteiro $p \geq 0$, existam submódulos C'_p de C_p com $\partial_{p+1}C'_{p+1} \subset C'_p$, para todo p . Então, escrevendo $\partial'_p = \partial_p|_{C'_p}$, a sequência $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)$ é dito um *subcomplexo de $\mathcal{C}$* .

Observação 2.1.1. É claro que $\partial_p|_{C'_p} \circ \partial_{p+1}|_{C'_{p+1}} = 0$, ou seja, qualquer subcomplexo de cadeias de um complexo de cadeias é um complexo de cadeias.

Exemplo 2.1.1 (Interseção e soma direta de subcomplexos de cadeias). Sejam $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)$ e $\mathcal{C}'' = (C''_p, \partial''_p)$ subcomplexos de um complexo de cadeias $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$, onde $\partial'_p = \partial_p|_{C'_p}$ e $\partial''_p = \partial_p|_{C''_p}$. Afirmamos que as sequências $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = (C'_p \cap C''_p, \partial_p|_{C'_p \cap C''_p})$ e $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' = (C'_p \oplus C''_p, \gamma_p)$, com $\gamma_p : C'_p \oplus C''_p \rightarrow C'_{p-1} \oplus C''_{p-1}$ sendo definido como

$$\gamma_p(x, y) = (\partial_p x, \partial_p y),$$

são complexos de cadeias. Ora, para $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ é claro pois, em particular, é um subcomplexo de $\mathcal{C}$. Em relação a $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$, note que dado $(x, y) \in C'_p \oplus C''_p$, segue que

$$\gamma_{p-1}\gamma_p(x, y) = \gamma_{p-1}(\partial_p x, \partial_p y) = (\partial_{p-1}\partial_p x, \partial_{p-1}\partial_p y) = (0, 0),$$

demonstrando o que queríamos. ◇

Uma maneira inteligente de associar complexos de cadeias é utilizando-se de morfismos.

Definição 2.1.6 (Morfismo entre complexos de cadeias). Sejam $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)$ complexos de cadeias. Uma sequência de homomorfismos $\{F_p : X_p \rightarrow Y_p\}_{p \geq 0}$ entre módulos, representada por $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, tal que

$$F_p(\partial_{p+1}x) = \partial_{p+1}F_{p+1}(x),$$

para todo $x \in X_{p+1}$, é dita um *morfismo entre complexos de cadeias*.

Podemos representar o morfismo F como

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & X_p & \xrightarrow{\partial_p} & X_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \\ & & \downarrow F_{p+1} & & \downarrow F_p & & \downarrow F_{p-1} & & \downarrow F_0 \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & Y_p & \xrightarrow{\partial_p} & Y_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \end{array}$$

Afirmamos que o homomorfismo $F_p : X_p \longrightarrow Y_p$, para todo $p \geq 0$, transforma p -ciclos (respectivamente p -bordos) de $\mathcal{X}$ em p -ciclos (respectivamente p -bordos) de $\mathcal{Y}$, isto é, $F_p(Z_p(\mathcal{X})) \subset Z_p(\mathcal{Y})$ e $F_p(B_p(\mathcal{X})) \subset B_p(\mathcal{Y})$. Com efeito, $\partial_p F_p(x) = F_{p-1}(\partial_p x)$ e $F_p(\partial_{p+1}x) = \partial_{p+1}F_{p+1}(x)$, para todo $x \in X_{p+1}$. Sendo assim, F_p induz um homomorfismo

$$\begin{aligned} (F_p)_* : H_p(\mathcal{X}) &\longrightarrow H_p(\mathcal{Y}) \\ [z] &\longmapsto (F_p)_*[z] = [F_p(z)], \end{aligned}$$

onde $z \in Z_p(\mathcal{X})$, chamado o *homomorfismo induzido* por F_p .

Observação 2.1.2. Dados morfismos $F : X \longrightarrow Y$ e $G : Y \longrightarrow Z$ entre complexos de cadeias, observe que para cada $[z] \in H_p(\mathcal{X})$ temos que

$$(G_p \circ F_p)_*[z] = [(G_p \circ F_p)(z)] = (G_p)_*[F_p(z)] = ((G_p)_* \circ (F_p)_*)[z],$$

ou seja, $(G_p \circ F_p)_* = (G_p)_* \circ (F_p)_*$. Dizemos assim que o homomorfismo induzido é *induzido naturalmente*.

2.2 COHOMOLOGIA

2.2.1 Complexo de cocadeias

As definições e propriedades da teoria da cohomologia são análogas às definições e propriedades da homologia.

Definição 2.2.1 (Complexo de cocadeias). Para cada inteiro $p \geq 0$, sejam C^p um A -módulo e $\delta_p : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ um homomorfismo. Dizemos que a sequência $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$ é um *complexo de cocadeias* com coeficientes em A se $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$. Ademais, chamamos o módulo C^p de *módulo p -dimensional* de $\mathcal{C}$, o homomorfismo δ_p de *operador bordo p -dimensional* e cada $u \in C^p$ de *p -cocadeia* em $\mathcal{C}$.

Escrevemos o complexo de cocadeias como

$$\mathcal{C} : C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \longrightarrow C^{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} C^p \xrightarrow{\delta_p} C^{p+1} \longrightarrow \dots$$

Observe que diferente de um complexo de cadeias, no qual ocorre a diminuição da dimensão de seus módulos, em um complexo de cocadeias acontece o aumento da dimensão de seus módulos ao longo da sequência de operadores cobordos.

Definição 2.2.2 (p -cociclo e p -cobordo de um complexo de cocadeias). Sejam $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$ um complexo de cocadeias e $u \in C^p$ uma p -cocadeia. Dizemos que u é um *p -cociclo* de $\mathcal{C}$ caso $\delta_p u = 0$. Além disso, se $u = \delta_{p-1}v$, para algum $v \in C^{p-1}$, u é dito um *p -cobordo* de $\mathcal{C}$.

Análogo à homologia, temos que o conjunto dos p -cociclos de $\mathcal{C}$, denotado por $Z^p(\mathcal{C})$, o qual é o núcleo de δ_p , é um submódulo de C^p . Além disso, para $p \geq 1$, o conjunto dos p -cobordos de $\mathcal{C}$, isto é, a imagem de δ_{p-1} , denotado por $B^p(\mathcal{C})$, é também um submódulo de C^p . Consideremos $B_0(\mathcal{C}) = \{0\}$. Como $\delta_p \circ \delta_{p-1} = 0$, $B^p(\mathcal{C}) \subset Z^p(\mathcal{C})$, o que nos permite, novamente, tomar o módulo quociente entre $Z^p(\mathcal{C})$ e $B^p(\mathcal{C})$.

Definição 2.2.3 (Grupo de cohomologia). Dado $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$ um complexo de cocadeias, para cada inteiro $p \geq 0$, chamamos o A -módulo quociente

$$H^p(\mathcal{C}) = Z^p(\mathcal{C})/B^p(\mathcal{C})$$

de grupo de cohomologia p -dimensional do complexo $\mathcal{C}$. As classes de equivalência

$$[u] = u + B^p(\mathcal{C}) = \{u + \delta_{p-1}v ; v \in C^{p-1}\}$$

são ditas *classes de cohomologia* dos p -cociclos $u \in Z^p(\mathcal{C})$.

Definição 2.2.4 (Ciclos cohomólogos). Sejam u e u' p -cociclos de um complexo de cocadeias $\mathcal{C}$. Caso $[u] = [u']$, dizemos que u e u' são *cociclos cohomólogos*.

Análogo à homologia, temos que se u e u' são p -cociclos cohomólogos, existe uma $(p-1)$ -cocadeia v tal que $u - u' = \delta_{p-1}v$.

Definição 2.2.5 (Subcomplexo de cocadeias). Seja $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$ um complexo de cocadeias tal que, para cada inteiro $p \geq 0$, exista um submódulo C'^p de C^p com $\delta_p C'^p \subset C'^{p+1}$. Então, escrevendo $\delta'_p = \delta_p|_{C'^p}$, chamamos a sequência $\mathcal{C}' = (C'^p, \delta'_p)$ de um *subcomplexo de* $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.2.1. Como no Exemplo 2.1.1, dados $\mathcal{C}' = (C'^p, \delta'_p)$ e $\mathcal{C}'' = (C''^p, \delta''_p)$ subcomplexos de um complexo de cocadeias $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$. Afirmamos que as sequências $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = (C'^p \cap C''^p, \delta_p|_{C'^p \cap C''^p})$ e $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' = (C'^p \oplus C''^p, \gamma_p)$, com $\gamma_p : C'^p \oplus C''^p \longrightarrow C'^{p+1} \oplus C''^{p+1}$ sendo definido como

$$\gamma_p(x, y) = (\delta_p x, \delta_p y),$$

são complexos de cocadeias

◇

Definição 2.2.6 (Morfismo entre complexos de cocadeias). Sejam $\mathcal{X} = (X^p, \delta_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y^p, \delta_p)$ complexos de cocadeias. Uma sequência de homomorfismos $\{F_p : X^p \longrightarrow Y^p\}_{p \geq 0}$ entre módulos, representada por $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, tal que

$$F_{p+1}(\delta_p u) = \delta_p F_p(u),$$

para todo $u \in X^p$, é dita um *morfismo entre complexos de cocadeias*.

O homomorfismo F pode ser representado como

$$\begin{array}{ccccccc} X^0 & \xrightarrow{\delta_0} & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^p \xrightarrow{\delta_p} X^{p+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & & & \downarrow F_p \quad \downarrow F_{p+1} \\ Y^0 & \xrightarrow{\delta_0} & Y^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Y^p \xrightarrow{\delta_p} Y^{p+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ complexos de cocadeias. Análogo ao que acontece com morfismos entre complexo de cadeias, um morfismo $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ entre os complexos de cocadeias $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, transforma p -cociclos de $\mathcal{X}$ em p -cociclos de $\mathcal{Y}$ e p -cobordos de $\mathcal{X}$ em p -cobordos de $\mathcal{Y}$, ou seja, podemos definir o homomorfismo dado por

$$\begin{aligned} F_p^* : H^p(\mathcal{X}) &\longrightarrow H^p(\mathcal{Y}) \\ [u] &\longmapsto [F_p(u)], \end{aligned}$$

chamado de *homomorfismo induzido* por F_p .

Novamente, análogo ao que acontece na homologia, dados morfismos $F : X \longrightarrow Y$ e $G : Y \longrightarrow Z$ entre complexos de cocadeias, temos que

$$(G_p \circ F_p)_* = (G_p)_* \circ (F_p)_*,$$

o que faz com que o homomorfismo induzido seja dito *induzido naturalmente*.

2.2.2 Dual algébrico de um complexo de cadeias

A partir de um complexo de cadeias, é possível construir um complexo de cocadeias, o qual será visto como uma espécie de dual algébrico do complexo de cadeias em questão. Para isso, considere $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ um complexo de cadeias de A -módulos. Para todo inteiro $p \geq 0$, tomemos o módulo dual $C^p = \text{Hom}(C_p, A)$, no qual seus elementos são homomorfismos $u : C_p \longrightarrow A$. Definamos o operador $\delta_p : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ como o operador adjunto $(\partial_p)^\top$ de $\partial_{p+1} : C_{p+1} \longrightarrow C_p$, isto é,

$$(\delta_p u) \cdot x = u(\partial_{p+1} x),$$

para $u \in C^p$ e $x \in C_{p+1}$. Sobre o operador adjunto, vide Seção 3 do APÊNDICE A. Temos então o complexo de cocadeias $\mathcal{C}^* = (C^p, \delta_p)$, o qual dizemos ser o *dual algébrico* do complexo de cadeias $\mathcal{C}$.

Definição 2.2.7 (Grupos de cohomologia de um complexo de cadeias). Seja $\mathcal{C}^*$ o dual algébrico de um complexo de cadeias $\mathcal{C}$. Para cada inteiro $p \geq 0$, dizemos que os grupos de cohomologia $H^p(\mathcal{C}^*)$ são os *grupos de cohomologia do complexo de cadeias $\mathcal{C}$* de dimensão p .

Vamos mostrar que $\mathcal{C}^*$ é de fato um complexo de cocadeias. Ora, observe que para cada $u \in C^p$ e $x \in C_{p+2}$ quaisquer, segue que

$$(\delta_{p+1}\delta_p u) \cdot x = \delta_p u \cdot (\partial_{p+2}x) = u(\partial_{p+1}\partial_{p+2}x) = u \cdot 0 = 0.$$

Logo, $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$.

Como $C^p = \text{Hom}(C_p, A)$, podemos nos perguntar como $H^p(\mathcal{C}^*)$ se relaciona com $\text{Hom}(H_p(\mathcal{C}), A)$. Em relação a isso tem-se o resultado a seguir.

Proposição 2.2.1. *Sejam $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ um complexo de cadeias de A -módulos. Se A é um corpo (em particular, cada C_p será um espaço vetorial) então, para todo inteiro $p \geq 0$, o grupo de cohomologia $H^p(\mathcal{C}^*)$ é isomorfo ao A -módulo $\text{Hom}(H_p(\mathcal{C}), A)$.*

Demonstração. Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : H^p(\mathcal{C}^*) &\longrightarrow \text{Hom}(H_p(\mathcal{C}), A) \\ [u] &\longmapsto \varphi[u], \end{aligned}$$

onde $(\varphi[u])[z] = u(z)$.

Afirmamos que φ está bem definida. De fato, sejam $u \in Z^p(\mathcal{C}^*)$ e $z, z' \in Z_p(\mathcal{C})$ tais que $[z] = [z']$, ou seja, existe $x \in C_{p+1}$ tal que $z - z' = \partial_{p+1}x$. Logo,

$$(\varphi[u])[z] - (\varphi[u])[z'] = u(z) - u(z') = u(z - z') = u(\partial_{p+1}x) = (\delta_p u)x = 0.$$

Ademais, sejam u e u' p -cociclos homólogos em $\mathcal{C}^*$, ou seja, existe $v \in C^{p-1}$ tais que $u - u' = \delta_{p-1}v$, e $z \in Z_p(\mathcal{C})$. Com isso,

$$(\varphi[u])[z] - (\varphi[u'])[z] = u(z) - u'(z) = (\delta_{p-1}v)z = v(\partial_p z) = v(0) = 0,$$

o que demonstra a boa definição de φ .

Agora, sejam $\eta \in \text{Hom}(H_p(\mathcal{C}), A)$ e $\pi : Z_p(\mathcal{C}) \longrightarrow H_p(\mathcal{C})$ a aplicação quociente. Consideremos uma extensão natural $u : C_p \longrightarrow A$ do homomorfismo $\eta \circ \pi : Z_p(\mathcal{C}) \longrightarrow A$ (ora, sendo $Z_p(\mathcal{C})$ um subespaço vetorial de C_p , existe D um subespaço vetorial de C_p tal que $C_p = Z_p(\mathcal{C}) \oplus D$ e, então, basta tomar $u = \eta \circ \pi$ em $Z_p(\mathcal{C})$ e $u = 0$ em D). Sendo assim, para cada $x \in C_{p+1}$, segue que

$$(\delta_p u)x = u(\partial_{p+1}x) = \eta \circ \pi(\partial_{p+1}x) = \eta[\partial_{p+1}x] = \eta \cdot 0 = 0,$$

ou seja, $u \in Z^p(\mathcal{C}^*)$. Para $z \in Z_p(\mathcal{C})$, temos que

$$(\varphi[u])[z] = u(z) = \eta \circ \pi(z) = \eta[z],$$

o que conclui que φ é sobrejetora.

Resta mostrar que φ é injetora. Com efeito, seja $[u] \in H^p(\mathcal{C}^*)$ tal que $\varphi[u] = 0$. Então, para todo $z \in Z_p(\mathcal{C})$, tem-se que

$$(\varphi[u])[z] = 0$$

e, daí, $u(z) = 0$. Concluimos assim que $Z_p(\mathcal{C}) \subset \ker u$. Pela Proposição A.1.2, existe um único homomorfismo $\bar{u} : \frac{C_p}{Z_p(\mathcal{C})} \longrightarrow A$ tal que $\bar{u}(x + Z_p(\mathcal{C})) = u(x)$. Além disso, novamente pela Proposição A.1.2 e por $\partial_p : C_p \longrightarrow B_{p-1}(\mathcal{C})$ e $Z_p\mathcal{C} = \ker \partial_p$, existe um único isomorfismo $\bar{\partial} : \frac{C_p}{Z_p(\mathcal{C})} \longrightarrow B_{p-1}(\mathcal{C})$. Seja $\zeta : C_{p-1} \longrightarrow A$ uma extensão natural do homomorfismo $\bar{u} \circ \bar{\partial} : B_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow A$. Como

$$(\delta_{p-1}\zeta)x = \zeta(\partial_p x) = \bar{u} \circ \bar{\partial}(\partial_p x) = u(x),$$

para todo $x \in C_p$, então $u = \delta_{p-1}\zeta$, o que faz com que $[u] = 0$, concluindo que φ é injetiva. $\square$

Agora, suponha que $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ seja um morfismo de cadeias. Consideremos o adjunto de F dado por $F^\top : \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$, isto é, um morfismo entre $\mathcal{Y}^*$ e $\mathcal{X}^*$ tal que, para todo inteiro $p \geq 0$, $F_p^\top : Y^p \longrightarrow X^p$ é definido como

$$(F_p^\top v) \cdot x = v \cdot F_p(x), \quad v \in Y^p \text{ e } x \in X_p.$$

Temos que $F^\top$ é, de fato, um morfismo, pois para $v \in Y^p$ e $x \in X_{p+1}$,

$$\begin{aligned} (F_{p+1}^\top \delta_p v) \cdot x &= (\delta_p v) \cdot F_{p+1}(x) = v(\partial_{p+1} F_{p+1}(x)) = v(F_p(\partial_{p+1} x)) = (F_p^\top v)(\partial_{p+1} x) \\ &= (\delta_p F_p^\top v) \cdot x. \end{aligned}$$

Logo, $F_{p+1}^\top \delta_p v = \delta_p F_p^\top v$ e, então, $F_{p+1}^\top \delta_p = \delta_p F_p^\top$.

Para cada inteiro $p \geq 0$, denotemos o homomorfismo induzido pelo morfismo $F^\top : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ simplesmente por $(F_p)^*$, o qual chamaremos de *homomorfismo induzido* por F_p .

Sejam $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ e $G : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ morfismos de cadeias. Temos que

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^p(\mathcal{Z}) \longrightarrow H^p(\mathcal{X}). \quad (2.2.1)$$

Com efeito, $(G \circ F)^*[u] = (G \circ F)_*^\top[u] = [(G \circ F)^\top u] = [F^\top G^\top u] = F_*^\top[G^\top u] = F^*[G^\top u] = (F^* \circ G^*)[u]$. Vamos mostrar que vale a terceira igualdade. De fato, seja $x \in X_p$, então

$$\begin{aligned} ((G \circ F)^\top u) \cdot x &= v \cdot (G \circ F)(x) = v \cdot G(F(x)) = (G^\top v) \cdot F(x) \\ &= (F^\top(G^\top u)) \cdot x = ((F^\top \circ G^\top)u) \cdot x. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2.3 HOMOTOPIA ALGÉBRICA

Uma técnica que auxiliará em futuros cálculos é relacionar dois morfismos de maneira homotópica. Consideremos, no que se segue, $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)$ complexos de cadeias.

Definição 2.3.1 (Homotopia algébrica em homologia). Sejam $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos entre complexos de cadeias. Quando existe uma sequência de homomorfismos de A -módulos $\{\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$ tais que $\partial_{p+1}\mathcal{D}_p + \mathcal{D}_{p-1}\partial_p = F_p - G_p : X_p \longrightarrow Y_p$, para todo $p \geq 0$, dizemos que F e G são morfismos *algebricamente homotópicos* e, nesse caso, escrevemos

$$F \sim G.$$

Chamamos a sequência $\{\mathcal{D} : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}$ de *homotopia algébrica* entre F e G .

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\partial_p} & X_{p-1} \\ \mathcal{D}_p \downarrow & \swarrow F_p - G_p & \downarrow \mathcal{D}_{p-1} \\ Y_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & Y_p \end{array}$$

A relação anterior é uma relação de equivalência. Com efeito, sejam F um morfismo entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ e, para cada $p \geq 0$, $O_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}$ a aplicação nula. Como

$$\partial_{p+1}O_p + O_{p-1}\partial_p = 0 = F_p - F_p,$$

temos que $F \sim F$. Agora, sejam $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos tais que $F \sim G$, com homotopia algébrica entre F e G dada pela sequência $\{\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$. Então, tem-se que

$$\partial_{p+1}\mathcal{D}_p + \mathcal{D}_{p-1}\partial_p = F_p - G_p \Leftrightarrow \partial_{p+1}(-\mathcal{D}_p) + (-\mathcal{D}_{p-1})\partial_p = G_p - F_p,$$

ou seja, $\{-\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$ é uma homotopia algébrica entre G e F . Logo, $G \sim F$. Ademais, sejam $F, G, H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos tais que

$$F \sim G \text{ e } G \sim H,$$

com $\{\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$ uma homotopia algébrica entre F e G e $\{\mathcal{E}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$ uma homotopia algébrica entre G e H . Logo,

$$\begin{aligned} F_p - H_p &= F_p - G_p + G_p - H_p = \partial_{p+1}\mathcal{D}_p + \mathcal{D}_{p-1}\partial_p + \partial_{p+1}\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{p-1}\partial_p \\ &= \partial_{p+1}(\mathcal{D}_p + \mathcal{E}_p) + (\mathcal{D}_{p-1} + \mathcal{E}_{p-1})\partial_p = \partial_{p+1}\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_{p-1}\partial_p, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}_p = \mathcal{D}_p + \mathcal{E}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}$, ou seja, $F \sim H$.

Como uma homotopia algébrica podemos obter a igualdade entre os homomorfismos induzidos.

Proposição 2.3.1. *Sejam $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos algebricamente homotópicos, então os homomorfismos induzidos por F e G nos grupos de homologia coincidem.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}_{p \geq 0}$ uma homotopia algébrica entre F e G . Se $z \in Z_p(\mathcal{X})$, tem-se $\partial_p z = 0$, então escrevendo $y = \mathcal{D}_p z \in Y_{p+1}$, segue-se

$$F_p(z) - G_p(z) = \partial_{p+1} \mathcal{D}_p z + \mathcal{D}_{p-1} \partial_p z = \partial_{p+1} y.$$

Assim,

$$[F_p(z) - G_p(z)] = [\partial_{p+1} y] = 0.$$

Portanto,

$$(F_p)_*[z] = [F_p(z)] = [G_p(z)] = (G_p)_*[z],$$

ou seja, $(F_p)_* = (G_p)_*$. □

Analogamente, podemos definir uma homotopia entre complexos de cocadeias.

Definição 2.3.2 (Homotopia algébrica em cohomologia). Sejam $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos entre complexos de cocadeias $\mathcal{X} = (X_p, \delta_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \delta_p)$. Quando existe uma sequência de homomorfismos de A -módulos $\{\mathcal{D}^p : X_p \longrightarrow Y_{p-1}\}_{p \geq 0}$ tais que $\delta_{p-1} \mathcal{D}^p + \mathcal{D}^{p+1} \delta_p = F_p - G_p : X_p \longrightarrow Y_p$, para todo $p \geq 0$, dizemos que F e G são morfismos *algebricamente homotópicos* e, nesse caso, escrevemos

$$F \sim G.$$

Chamamos a sequência $\{\mathcal{D} : X_p \longrightarrow Y_{p-1}\}$ de *homotopia algébrica* entre F e G .

Como no caso da homologia, temos a proposição a seguir, demonstrada de maneira análoga.

Proposição 2.3.2. *Sejam $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morfismos algebricamente homotópicos, então os homomorfismos induzidos por F e G nos grupos de homologia coincidem.*

Observação 2.3.1. A partir de uma homotopia algébrica de morfismos entre complexos de cadeias, é possível obter uma homotopia algébrica entre os morfismos adjuntos. Ora, dados complexos de cadeias $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)$ e $F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ algebricamente homotópicos com homotopia algébrica dada pela sequência $\{\mathcal{D}_p : X_p \longrightarrow Y_{p+1}\}$, segue que

$$\partial_{p+1} \mathcal{D}_p - \mathcal{D}_{p-1} \partial_p = F_p - G_p : X_p \longrightarrow Y_p. \quad (2.3.1)$$

Afirmamos que a sequência dos operadores adjuntos de cada $\mathcal{D}_p$ será uma homotopia algébrica entre $F^\top$ e $G^\top$. Com efeito, para $u \in Y^p$ e $x \in X_p$, temos que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_{p+1}^\top \partial_p^\top + \partial_{p-1}^\top \mathcal{D}_p^\top)u \cdot x &= (\mathcal{D}_{p+1}^\top \partial_p^\top u + \partial_{p-1}^\top \mathcal{D}_p^\top u) \cdot x = \mathcal{D}_{p+1}^\top \partial_p^\top u \cdot x + \partial_{p-1}^\top \mathcal{D}_p^\top u \cdot x \\
 &= \partial_p^\top u(\mathcal{D}_p \cdot x) + \mathcal{D}_p^\top u(\partial_p \cdot x) = u(\partial_{p+1} \mathcal{D}_p \cdot x) + u(\mathcal{D}_{p-1} \partial_p x) \\
 &= u(\partial_{p+1} \mathcal{D}_p + \mathcal{D}_{p-1} \partial_p) \cdot x \stackrel{\text{Definição 2.3.1}}{=} u(F - G) \cdot x \\
 &= (F^\top - G^\top)u \cdot x,
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

ou seja, $\mathcal{D}_{p+1}^\top \partial_p^\top + \partial_{p-1}^\top \mathcal{D}_p^\top = F^\top - G^\top$.

2.4 SEQUÊNCIAS EXATAS

Até agora, estudamos grupos de homologia como invariantes isolados. No entanto, a verdadeira força da topologia algébrica reside na capacidade de relacionar a homologia ou cohomologia de um espaço complexo com a de suas partes constituintes.

As sequências exatas fornecem a linguagem para essa tradução. Elas atuam como um mecanismo de contabilidade algébrica onde a “perda” de informação em um estágio é recuperada com precisão no próximo. Veremos que a exatidão transforma diagramas de grupos em ferramentas de cálculo poderosas.

2.4.1 Sequências exatas e o Lema dos Cinco

Definição 2.4.1 (Sequência exata). Dizemos que uma sequência $\{\varphi_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}\}_{p \geq 0}$ de homomorfismos de A -módulos é *exata* se o núcleo de cada φ_p é igual à imagem do homomorfismo φ_{p+1} , isto é, $\ker \varphi_p = \text{Im } \varphi_{p+1}$, para todo inteiro $p \geq 0$.

Observação 2.4.1. Note que, $\varphi_p \circ \varphi_{p+1} = 0$, o que faz com que a sequência $\mathcal{C} = (C_p, \varphi_p)$ seja um complexo de cadeias. Além disso, nesse caso temos que $Z_p(\mathcal{C}) = B_p(\mathcal{C})$ e, então, os grupos de homologia medem, de certa forma, o quanto um complexo de cadeias deixa de ser uma sequência exata.

Observação 2.4.2. Dentro de uma sequência exata, a natureza de um homomorfismo está intrinsecamente ligada aos seus vizinhos. Por exemplo, a injetividade de φ_p equivale à nulidade de φ_{p+1} , enquanto a sobrejetividade de φ_{p+1} ocorre se, e somente se, φ_p for o homomorfismo nulo. Essa dinâmica permite identificar casos fundamentais: a sequência $0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C'$ é exata precisamente quando i é injetiva; analogamente, $C \xrightarrow{j} C' \longrightarrow 0$ é exata quando j é sobrejetiva. Combinando esses conceitos, obtemos a chamada *sequência exata curta*:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0.$$

Exemplo 2.4.1. Seja C' um submódulo de um A -módulo C . Definamos $i : C' \rightarrow C$ como a aplicação inclusão e $j : C \rightarrow \frac{C}{C'}$ como a aplicação quociente. Então

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/C' \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. Com efeito, a injetividade de i e a sobrejetividade de j são claras. A igualdade entre a imagem de i e o núcleo de j valem pois $j(i(C')) = j(C') = 0$ e, além disso, $j(x) = 0$ se, e somente se, $x \in C'$, ou seja, $x \in \text{Im } i$. $\diamond$

Podemos associar duas sequências exatas da seguinte forma:

Definição 2.4.2 (Morfismo entre sequências exatas). Sejam $\mathcal{X} = (X_p, \varphi_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \psi_p)$ sequências exatas. Uma sequência de homomorfismos $\{F_p : X_p \rightarrow Y_p\}_{p \geq 0}$ tais que $F_{p-1} \circ \varphi_p = \psi_p \circ F_p$, representada por

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{p+1} & \xrightarrow{\varphi_{p+1}} & X_p & \xrightarrow{\varphi_p} & X_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \\ & & \downarrow F_{p+1} & & \downarrow F_p & & \downarrow F_{p-1} & & \downarrow F_0 \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{p+1} & \xrightarrow{\psi_{p+1}} & Y_p & \xrightarrow{\psi_p} & Y_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \end{array}$$

é chamada um *morfismo entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$* .

Uma vez estabelecida a estrutura das sequências exatas, surge a necessidade de comparar diferentes extensões de módulos ou cadeias de homologia. O Lema dos Cinco surge como o resultado fundamental nessa direção, oferecendo um critério de rigidez para diagramas comutativos. Ele afirma que, em um diagrama onde as linhas são sequências exatas, o comportamento do homomorfismo central está completamente determinado pelos homomorfismos periféricos.

Proposição 2.4.1 (Lema dos Cinco, [15], pp. 7-8). *Sejam*

$$X_5 \xrightarrow{\varphi_5} X_4 \xrightarrow{\varphi_4} X_3 \xrightarrow{\varphi_3} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} X_1 \quad (2.4.1)$$

e

$$Y_5 \xrightarrow{\psi_5} Y_4 \xrightarrow{\psi_4} Y_3 \xrightarrow{\psi_3} Y_2 \xrightarrow{\psi_2} Y_1 \quad (2.4.2)$$

duas sequências exatas e $\{F_i : M_i \rightarrow N_i\}_{i=1}^5$ um morfismo entre as sequências, representado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X_5 & \xrightarrow{\varphi_5} & X_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & X_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & X_2 \xrightarrow{\varphi_2} X_1 \\ \downarrow F_5 & & \downarrow F_4 & & \downarrow F_3 & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_1 \\ Y_5 & \xrightarrow{\psi_5} & Y_4 & \xrightarrow{\psi_4} & Y_3 & \xrightarrow{\psi_3} & Y_2 \xrightarrow{\psi_2} Y_1 \end{array}$$

Se F_1, F_2, F_4 e F_5 são isomorfismos, então F_3 também é um isomorfismo.

Demonstração. Consideremos a sequência

$$X_5 \xrightarrow{\varphi_5} X_4 \xrightarrow{\psi_4 \circ F_4} Y_3 \xrightarrow{F_2^{-1} \circ \psi_3} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} X_1. \quad (2.4.3)$$

Vamos mostrar a exatidão de (2.4.3), ou seja, demonstrar as seguintes afirmações:

1. $\text{Im } \varphi_5 = \ker(\psi_4 \circ F_4)$;
2. $\text{Im } (\psi_4 \circ F_4) = \ker(F_2^{-1} \circ \psi_3)$;
3. $\text{Im } (F_2^{-1} \circ \psi_3) = \ker \varphi_2$.

1) Seja $x \in X_5$. Então,

$$(\psi_4 \circ F_4)(\varphi_5(x)) \stackrel{\text{definição}}{=} (F_3 \circ \varphi_4)(\varphi_5(x)) = F_3(\varphi_4(\varphi_5(x))) \stackrel{\text{exatidão}}{=} F_3(0) = 0.$$

Logo, $\text{Im } \varphi_5 \subset \ker(\psi_4 \circ F_4)$. Além disso, seja $x \in X_4$ tal que $(\psi_4 \circ F_4)(x) = 0$. Por exatidão, $F_4(x) \in \text{Im } \psi_5$, ou seja, existe $y \in Y_5$ tal que $F_4(x) = \psi_5(y)$. Por definição, $F_4(x) = \psi_5(y) = (F_4 \circ \varphi_5 \circ F_5^{-1})(y)$. Como F_4 é um isomorfismo, $x = \varphi_5(F_5^{-1}(y))$, o que mostra que $\ker(\psi_4 \circ F_4) \subset \text{Im } \varphi_5$.

2) Seja $x \in X_4$. Então, $(F_2^{-1} \circ \psi_3)((\psi_4 \circ F_4)(x)) = (F_2^{-1} \circ \psi_3 \circ \psi_4 \circ F_4)(x) \stackrel{\psi_3 \circ \psi_4 = 0}{=} 0$, ou seja, $\text{Im } (\psi_4 \circ F_4) \subset \ker(F_2^{-1} \circ \psi_3)$. Agora, seja $x \in Y_3$ tal que $(F_2^{-1} \circ \psi_3)(x) = 0$. Pelo isomorfismo de F_2 , $\psi_3(x) = 0$. Por exatidão, $x \in \text{Im } \psi_4$, isto é, existe $y \in Y_4$ tal que $x = \psi_4(y)$. Pelo isomorfismo de F_4 , existe $z \in X_4$ tal que $y = F_4(z)$. Sendo assim, $x = (\psi_4 \circ F_4)(z)$. Logo, $\ker(F_2^{-1} \circ \psi_3) \subset \text{Im } (\psi_4 \circ F_4)$.

3) Seja $x \in Y_3$. Então, $(\varphi_2 \circ F_2^{-1} \circ \psi_3)(x) \stackrel{\text{Definição}}{=} (F_1^{-1} \circ \psi_2 \circ \psi_3)(x) \stackrel{\psi_2 \circ \psi_3 = 0}{=} F_1^{-1}(0) = 0$. Logo, $\text{Im } (F_2^{-1} \circ \psi_3) \subset \ker \varphi_2$. Ademais, seja $x \in X_2$ tal que $\varphi_2(x) = 0$. Pela exatidão de (2.4.1), existe $y \in X_3$ tal que $x = \varphi_3(y) \stackrel{\text{Definição}}{=} (F_2^{-1} \circ \psi_3 \circ F_3)(y)$, ou seja, $\ker \varphi_2 \subset \text{Im } (F_2^{-1} \circ \psi_3)$.

Utilizando das afirmações acima, demonstraremos agora o isomorfismo de F_3 . Primeiro, analisemos a injetividade. Seja $x \in X_3$ tal que $F_3(x) = 0$. Por definição,

$$\varphi_3(x) = (F_2^{-1} \circ \psi_3 \circ F_3)(x) = 0.$$

Pela exatidão de (2.4.1), $x = \varphi_4(y)$, para algum $y \in X_4$. Então,

$$(\psi_4 \circ F_4)(y) \stackrel{\text{Definição}}{=} (F_3 \circ \varphi_4)(y) = F_3(x) = 0.$$

Pela afirmação (1) feita anteriormente, existe $z \in X_5$ tal que $y = \varphi_5(z)$, ou seja,

$$x = \varphi_4(y) = (\varphi_4 \circ \varphi_5)(z) \stackrel{\varphi_4 \circ \varphi_5 = 0}{=} 0,$$

o que mostra a injetividade. Para finalizar, seja $y \in Y_3$. Pela exatidão de (2.4.3), $\varphi_2((F_2^{-1} \circ \psi_3)(y)) = 0$. Novamente por exatidão, $(F_2^{-1} \circ \psi_3)(y) = \varphi_3(x)$, para algum $x \in X_3$. Logo,

$$(F_2^{-1} \circ \psi_3 \circ F_3)(x) \stackrel{\text{Definição}}{=} \varphi_3(x) = (F_2^{-1} \circ \psi_3)(y).$$

Como F_2 é um isomorfismo, $(\psi_3 \circ F_3)(x) = \psi_3(y)$, e, então $\psi_3(y - F_3(x)) = 0$. Por exatidão, existe $z \in Y_4$ tal que $y - F_3(x) = \psi_4(z) \stackrel{\text{Definição}}{=} (F_3 \circ \varphi_4 \circ F_4^{-1})(z)$. Logo, $y = F_3(x + (\varphi_4 \circ F_4^{-1})(z))$. Demonstrando a sobrejetividade de F_3 .

Portanto, F_3 é um isomorfismo. $\square$

2.4.2 Sequências de Mayer-Vietoris

Um outro resultado fundamental da álgebra homológica é a transição de sequências curtas de complexos para sequências longas de homologia. O teorema a seguir demonstra que uma sequência exata curta de complexos de cadeias não apenas preserva a relação entre os objetos, mas induz uma estrutura muito mais rica: uma sequência exata longa que conecta grupos de homologia em diferentes dimensões através de um homomorfismo de conexão. Esse resultado é a base para ferramentas de cálculo essenciais, como a sequência de Mayer-Vietoris, a qual será apresentada mais a seguir.

Proposição 2.4.2 (Lema do zig-zag em homologia, [15], Teorema 1, pp. 8-10). *Seja $0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)$, $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ e $\mathcal{C}'' = (C''_p, \partial''_p)$, representado pelo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \varphi_{p+1} & & \downarrow \varphi_p & & \downarrow \varphi_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \psi_{p+1} & & \downarrow \psi_p & & \downarrow \psi_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C''_{p+1} & \xrightarrow{\partial''_{p+1}} & C''_p & \xrightarrow{\partial''_p} & C''_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Existe, para todo $p > 0$, um homomorfismo $\Delta : H_p(\mathcal{C}'') \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}')$ tal que a sequência

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{(\varphi_p)_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\psi_p)_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{(\varphi_{p-1})_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow \cdots$$

é exata.

Demonstração. Conferir em [15], Teorema 1, pp. 8-10. $\square$

O homomorfismo Δ , o qual chamamos de *homomorfismo de conexão* das sequências de homologias, é obtido de uma maneira complexa. Dado $[z''] \in H_p(\mathcal{C}'')$, como ψ_p é sobrejetor, existe $x \in C_p$ tal que $\psi_p(x) = z''$. Como $\psi_{p-1}(\partial_p x) = \partial''_p \psi_p(x) = \partial''_p z'' = 0$, pois $z'' \in Z^p(\mathcal{C}'')$, segue-se que existe $z' \in C'_{p-1}$ tal que $\varphi_{p-1} z' = \partial_p x \in C_{p-1}$. Temos assim

que $z' \in Z^{p-1}(\mathcal{C}')$. Ora, $\varphi_{p-2}(\partial'_{p-1}z') = \partial_{p-1}\varphi_{p-1}z' = \partial_{p-1}\partial_p x = 0$. Sendo φ_{p-2} injetivo, $\partial'_{p-1}z' = 0$. Podemos então definir Δ como $\Delta[z''] = [z']$.

Corolário 2.4.1 (Sequência de Mayer-Vietoris em homologia). *Sejam complexos de cadeias $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)$, $\mathcal{C}'' = (C''_p, \partial''_p)$, tais que $\partial'_p \equiv \partial''_p$ em $C'_p \cap C''_p$, e $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$, onde $C_p = C'_p \oplus C''_p$, para todo $p \geq 0$ e o operador bordo dado por*

$$\begin{aligned} \partial_p : C'_p \oplus C''_p &\longrightarrow C'_{p-1} \oplus C''_{p-1} \\ (x, y) &\longmapsto (\partial'_p x, \partial''_p y). \end{aligned}$$

Então, a sequência de homologia

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{\varphi_*} H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \rightarrow \cdots, \quad (2.4.4)$$

é exata, onde φ , ψ e Δ são dados como na Proposição 2.4.2.

Demonstração. Como visto no Exemplo 2.1.1, os submódulos $C'_p \cap C''_p$, formam um complexo de cadeias denotado como $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$.

Para cada $p \geq 0$, os homomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_p : C'_p \cap C''_p &\longrightarrow C'_p \oplus C''_p \\ x &\longmapsto (x, x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_p : C'_p \oplus C''_p &\longrightarrow C_p \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

compõem a sequência curta

$$0 \longrightarrow C'_p \cap C''_p \xrightarrow{\varphi_p} C'_p \oplus C''_p \xrightarrow{\psi_p} C_p \longrightarrow 0,$$

a qual é exata. Com efeito, sejam $x, y \in C'_p \cap C''_p$ tais que $\varphi_p(x) = \varphi_p(y)$, isto é, $(x, x) = (y, y)$. Então, segue que $x = y$, ou seja, φ_p é injetiva. Ademais, dado $x \in C_p$, note que $\psi_p(x, 0) = x - 0 = x$, o que mostra que ψ_p é sobrejetiva.

Pelo Teorema (2.4.2), a sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

induz a sequência exata de homologia

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{\varphi_*} H_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \rightarrow \cdots. \quad (2.4.5)$$

Observe que temos o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} H_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') &= \frac{Z_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'')}{B_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'')} = \frac{Z_p(\mathcal{C}') \oplus Z_p(\mathcal{C}'')}{B_p(\mathcal{C}') \oplus B_p(\mathcal{C}'')} \stackrel{\text{Proposição A.2.1}}{=} \frac{Z_p(\mathcal{C}')}{B_p(\mathcal{C}')} \oplus \frac{Z_p(\mathcal{C}'')}{B_p(\mathcal{C}'')} \\ &= H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}''), \end{aligned}$$

o que mostra que podemos representar os grupos de homologia de $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$ por $H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'')$. A segunda igualdade vale por definição. Ora, $Z_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') = Z_p(\mathcal{C}') \oplus Z_p(\mathcal{C}'')$ é equivalente a dizer que

$$\ker \partial_p = \ker \partial'_p \oplus \ker \partial''_p \quad (2.4.6)$$

e $B_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') = B_p(\mathcal{C}') \oplus B_p(\mathcal{C}'')$ é equivalente a

$$\text{Im } \partial_{p-1} = \text{Im } \partial'_{p-1} \oplus \text{Im } \partial''_{p-1}. \quad (2.4.7)$$

Mas, (2.4.6) e (2.4.7) valem por definição.

Sendo assim, a sequência (2.4.5) pode ser representada por

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{\varphi_*} H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \rightarrow \cdots,$$

a qual vimos ser exata. $\square$

Chamamos a sequência (2.4.4) de *sequência de Mayer-Vietoris da decomposição* $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$.

A seguir são apresentadas as versões cohomológicas dos resultados enunciados anteriormente.

Proposição 2.4.3 (Lema do zig-zag em cohomologia). *Seja $0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}'' \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos de cocadeias, $\mathcal{C}' = (C^p, \delta'_p)$, $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$ e $\mathcal{C}'' = (C^p, \delta''_p)$. Então, existe um homomorfismo $\Delta : H^p(\mathcal{C}'') \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{C}')$ tal que a sequência longa*

$$\cdots \rightarrow H^p(\mathcal{C}') \xrightarrow{\varphi^*} H^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\psi^*} H^p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\Delta} H^{p+1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\varphi^{*+1}} H^{p+1}(\mathcal{C}) \rightarrow \cdots,$$

é exata.

Dizemos que Δ é o *homomorfismo de conexão* das sequências de cohomologia, obtido como o homomorfismo de conexão das sequências de homologia.

Corolário 2.4.2 (Sequência de Mayer-Vietoris em cohomologia). *Sejam complexos de cocadeias $\mathcal{C}' = (C^p, \delta'_p)$, $\mathcal{C}'' = (C''_p, \delta''_p)$, tais que $\delta'_p \equiv \delta''_p$ em $C'_p \cap C''_p$ e $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$, onde $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$, isto é, $C_p = C'_p \oplus C''_p$, para todo $p \geq 0$, com operador cobordo dado por*

$$\begin{aligned} \delta_p : C'_p \oplus C''_p &\rightarrow C'_{p+1} \oplus C''_{p+1} \\ (x, y) &\mapsto (\delta'_p x, \delta''_p y). \end{aligned}$$

Então, a sequência de cohomologia

$$\cdots \rightarrow H^p(C' \cap C'') \xrightarrow{\varphi_*} H^p(C') \oplus H^p(C'') \xrightarrow{\psi_*} H^p(C) \xrightarrow{\Delta} H^{p-1}(C' \cap C'') \rightarrow \cdots, \quad (2.4.8)$$

é exata, onde φ , ψ e Δ são dados como na Proposição 2.4.3.

2.4.3 Dual algébrico de uma sequência exata

Agora, podemos nos perguntar se, dada uma sequência exata de A -módulos

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\varphi_{p+1}} C_p \xrightarrow{\varphi_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots,$$

sua sequência dual

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}(C_{p-1}, A) \xrightarrow{\varphi_p^\top} \text{Hom}(C_p, A) \xrightarrow{\varphi_{p+1}^\top} \text{Hom}(C_{p+1}, A) \longrightarrow \cdots$$

é também exata. Geralmente, isto não é verdade, o que podemos confirmar com o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.2. Consideremos sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

onde $\varphi(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\psi(n) = 0$, se n é par, e $\psi(n) = 1$, se n é ímpar. Para argumentar a exatidão, devemos mostrar que φ é injetiva, $\text{Im } \varphi = \ker \psi$ e ψ é sobrejetiva. Com efeito, sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $2n_1 = 2n_2$, o que é equivalente a dizer que $n_1 = n_2$, ou seja, φ é injetiva. Agora, seja $n \in \ker \psi$, isto é, $\psi(n) = 0$. Nesse caso, pela definição de ψ , segue que n é par, sendo assim, pertence a $\text{Im } \varphi$, o que implica que $\ker \psi \subset \text{Im } \varphi$. Ademais, dado $n \in \text{Im } \varphi$ qualquer, temos que n é um inteiro par. Com isso, $\psi(n) = 0$, isto é, $n \in \ker \psi$, então, $\text{Im } \varphi \subset \ker \psi$. Além disso, ψ é sobrejetiva pois, note que $\psi(2) = 0$ e $\psi(1) = 1$.

Porém, a sequência dual, dada por

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi^\top} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi^\top} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

não é exata. Ora, note que para $v \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ e $n \in \mathbb{Z}$ segue-se

$$(\varphi^\top v) \cdot n = v \cdot \varphi(n) = v \cdot (2n) = (2v) \cdot n,$$

o que implica que $\varphi^\top v = 2v$. Concluimos então que $\varphi^\top$ não é sobrejetivo, pois dado $w : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definido como $w(n) = 2n + 1$, isto é, a aplicação que cobre todos os inteiros ímpares, não existe $v \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ tal que $2v = w$. $\diamond$

Porém, adicionando algumas hipóteses, vamos obter uma sequência dual exata a partir de uma sequência exata curta. Consideremos a sequência dual de uma sequência exata do tipo

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0, \quad (2.4.9)$$

isto é, a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C_3; A) \xrightarrow{\psi^\top} \text{Hom}(C_2; A) \xrightarrow{\varphi^\top} \text{Hom}(C_1; A) \longrightarrow 0. \quad (2.4.10)$$

Afirmamos que $\psi^\top$ é injetiva e $\text{Im } \psi^\top = \ker \varphi^\top$. De fato, como $\text{Im } \varphi = \ker \psi$, $g \circ f = 0$, ou seja, pela Equação (2.2.2), $\varphi^\top \circ \psi^\top = (\psi \circ \varphi)^\top = 0$. Logo, $\text{Im } \psi^\top \subset \ker \varphi^\top$. Além disso, seja $v : C_2 \longrightarrow A$ é um homomorfismo tal que $\varphi^\top v = 0$. Sendo ψ sobrejetiva, pela exatidão de (2.4.9), podemos definir um homomorfismo $u : C_3 \longrightarrow A$ como

$$u(y) = u(\psi(x)) = v(x),$$

para todo $y \in C_3$ e $x \in C_2$ tal que $y = \psi(x)$. Note que u está bem definido, pois caso $\psi(x) = \psi(y)$, para $x, y \in C_2$, tem-se que $\psi(x - y) = 0$, ou seja, novamente pela exatidão da sequência (2.4.9), $x - y = \varphi(z)$, para algum $z \in C_1$. Como $\varphi^\top v = 0$, temos que

$$v(x - y) = v(\varphi(z)) = (\varphi^\top v) \cdot z = 0.$$

Com isso, $v(x) = v(y)$. Por construção, note que $v = \psi^\top u$. Agora, seja $u \in \text{Hom}(C_3; A)$ tal que $\psi^\top u = 0$. Por definição de aplicação adjunta,

$$u(\psi(x)) = (\psi^\top u) \cdot x = 0, \quad (2.4.11)$$

para todo $x \in C_2$. Sendo uma aplicação sobrejetiva, para todo $y \in C_3$, existe $x \in C_2$ tal que $y = \psi(x)$. Pela Equação (2.4.11), temos que

$$u(y) = u(\psi(x)) = 0,$$

ou seja, $u = 0$, provando assim a injetividade de $\psi^\top$. Com isso, para provar a exatidão da sequência (2.4.10), resta mostrar que $\varphi^\top$ é sobrejetiva. Para isto, introduzamos a seguir o conceito de sequência separável.

Definição 2.4.3 (Sequência separável). Seja $0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0$ uma sequência exata. Se existe um submódulo $B \subset C_2$ tal que $C_2 = \varphi(C_1) \oplus B$, dizemos que esta sequência é *separável*.

Caso a sequência $0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0$ seja separável tal que $C_2 = \varphi(C_1) \oplus B$, sendo B um submódulo de C_2 , dizemos que a mesma é *equivalente* à sequência curta

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi'} C_1 \oplus C_3 \xrightarrow{\psi'} C_3 \longrightarrow 0, \quad (2.4.12)$$

onde $\varphi'(x) = x + 0$ e $\psi'(x + y) = y$, no seguinte sentido: existe um isomorfismo $\eta : C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_3$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_2 & & & \\ & \nearrow \varphi & & \downarrow \eta & \searrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varphi'} & C_1 \oplus C_3 & \xrightarrow{\psi'} & C_3 \longrightarrow 0. \end{array}$$

é comutativo.

Para obter o isomorfismo $\eta : C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_3$, primeiro observemos que cada $z = x + y \in C_2$, onde $x \in \varphi(C_1)$ e $y \in B$, é escrito de modo único. Definamos então η como

$$\eta(z) = \eta(x + y) = (\psi^{-1}(x), \psi(y)),$$

sendo $\varphi : C_1 \longrightarrow \varphi(C_1)$ um isomorfismo, pois φ é, por definição, injetiva. Para mostrar que η é um isomorfismo, resta mostrar que $\psi|_B : B \longrightarrow C_3$ é um isomorfismo. Primeiro, observe que $\psi(x) = 0$, para todo $x \in \varphi(C_1)$, ou seja, sendo $\psi : C_2 = \varphi(C_1) \oplus B \longrightarrow C_3$ sobrejetiva por definição, podemos concluir que $\psi|_B$ é sobrejetiva. Além disso, seja $y \in B$ tal que $\psi(y) = 0$. Como $\text{Im } \varphi = \ker \psi$, por definição, $y = \varphi(x)$, para algum $x \in C_1$, porém, como $C_2 = \varphi(C_1) \oplus B$, $y = 0$, ou seja, $\psi|_B$ é injetiva, demonstrando assim que é um isomorfismo. Dado $x \in C_1$ temos que

$$\varphi'(x) = (x, 0) = (\varphi^{-1}(\varphi(x)), \psi(\varphi(x))) = \eta(\varphi(x)) = (\eta \circ \varphi)(x).$$

Ademais, para $(x, y) \in C_2 = \varphi(C_1) \oplus B$ segue que

$$\begin{aligned} (\psi' \circ \eta)(x + y) &= \psi'(\eta(x + y)) = \psi'(\varphi^{-1}(x), \psi(y)) = \psi(y) = 0 + \psi(y) = \psi(x) + \psi(y) \\ &= \psi(x + y). \end{aligned}$$

Logo, como $\eta \circ \varphi = \varphi'$ e $\psi' \circ \eta = \psi$, o diagrama acima é realmente comutativo, pois também temos que $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \eta \circ \varphi = \psi' \circ \varphi'$. Portanto, caso uma sequência exata do tipo (2.4.9) seja separável, é equivalente trabalhar com a sequência (2.4.12).

Lema 2.4.1. *Seja*

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0 \quad (2.4.13)$$

uma sequência exata curta. Caso C_3 seja um módulo livre, então (2.4.13) é separável.

Demonstração. Sendo C_3 um módulo livre, o mesmo possui uma base $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Sendo ψ sobrejetiva, ou seja, $C_3 = \psi(C_2)$, definamos um homomorfismo $\phi : C_3 \longrightarrow C_2$, associando cada elemento α_λ da base a um elemento $\phi(\alpha_\lambda) = z_\lambda$, onde z_λ é um elemento pertencente

ao conjunto $\psi^{-1}(\{\alpha_\lambda\})$, isto é, $\psi(z_\alpha) = \alpha_\lambda$. Estendamos ϕ para todo C_3 linearmente da seguinte forma:

$$\phi(z) = \sum_{i=0}^n a_i z_i,$$

sendo $z = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$ elemento de C_3 , o qual é escrito de maneira única. Observe que $\phi(z)$ é escrito de maneira única, pois cada $\phi(\alpha_\lambda) = z_\lambda$ foi fixado. Além disso, note que

$$\psi(\phi(z)) = a_1\psi(\phi(\alpha_1)) + \cdots + a_n\psi(\phi(\alpha_n)) \stackrel{\text{Definição}}{=} a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = z. \quad (2.4.14)$$

Denotemos por B a imagem de ϕ . Vamos mostrar que $C_2 = \varphi(C_1) \oplus B$. Com efeito, seja $x \in C_2$, o qual pode ser escrito como $x = (x - \phi(\psi(x)) + \phi(\psi(x)))$. Pela exatidão da sequência (2.4.13), como

$$\psi(x - \phi(\psi(x))) = \psi(x) - \psi(\phi(\psi(x))) \stackrel{(2.4.14)}{=} \psi(x) - \psi(x) = 0,$$

temos que $x - \phi(\psi(x)) \in \varphi(C_1)$. Ademais, $\phi(\psi(x)) \in B$. Resta mostrar que $\varphi(C_1) \cap B = \{0\}$. Ora, caso $y \in \varphi(C_1) \cap B$, $y = \phi(z)$, para algum $z \in C_3$ e $y = \varphi(x)$, para algum $x \in C_1$. Logo, $z = \psi(\phi(z)) = \psi(y) = \psi(\varphi(x)) = 0$. Portanto,

$$y = \phi(z) = \phi(0) = 0.$$

□

Teorema 2.4.1. *Seja uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0. \quad (2.4.15)$$

Caso C_3 seja um módulo livre, então a sequência dual

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C_3; A) \xrightarrow{\psi^\top} \text{Hom}(C_2; A) \xrightarrow{\varphi^\top} \text{Hom}(C_1; A) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Como comentado anteriormente, para demonstrar a exatidão da sequência (2.4.16), basta mostrar que $\varphi^\top$ é sobrejetiva. Pelo Lema 2.4.1, a sequência $0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \longrightarrow 0$ é separável, ou seja, é equivalente à sequência exata padrão (2.4.12). Sendo assim, para mostrar a sobrejetividade de $\varphi^\top$, é equivalente mostrar a sobrejetividade de $\varphi'^\top$, homomorfismo dado como na sequência (2.4.12). Ora, seja $u \in \text{Hom}(C_1, A)$ e $\bar{u} : \text{Hom}(C_1 \oplus C_3, A)$ uma extensão de u . Por definição,

$$(\varphi'^\top \bar{u}) \cdot x = \bar{u}(\varphi'(x)) = \bar{u}(x + 0) = u(x),$$

para todo $x \in C_1$. Portanto, $\varphi'^\top \bar{u} = u$, o que demonstra a sobrejetividade de $\varphi'^\top$. □

3 COHOMOLOGIA DE DE RHAM

Um caso particular da teoria algébrica estudada no Capítulo 2 é o estudo dos quocientes entre formas fechadas (o núcleo da derivada exterior) e formas exatas (a imagem da derivada exterior). Esses quocientes definem os espaços de cohomologia de de Rham, fornecendo um invariante topológico robusto para variedades diferenciáveis. A escrita deste capítulo é baseada, principalmente, em [12], [15], [17] e [26], além de utilizar como parâmetro alguns exemplos calculados em [1] e em [23].

3.1 COMPLEXO DE DE RHAM

No que se segue, consideremos M uma n -variedade diferenciável. Seja a sequência dada por

$$\Omega^*(M) : \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0, \quad (3.1.1)$$

dita o *complexo de de Rham* da variedade M , onde $d_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ é a derivada exterior de grau k de M , a qual é uma transformação linear. Note que, pelo item 2 Proposição D.5.1, $d^2 = 0$, o que faz com que a sequência (3.1.1) seja realmente um complexo de cocadeias. Observe que os subespaços

$$Z^k(\Omega^*(M)) = \{\omega \in \Omega^k(M); d\omega = 0\} = \ker d_k$$

e, para cada inteiro $k \geq 1$,

$$B^k(\Omega^*(M)) = \{\omega \in \Omega^k(M); \omega = d\alpha, \text{ para algum } \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\} = \text{Im } d_{k-1},$$

são os conjuntos das formas fechadas e das formas exatas, respectivamente. Como não existem 0-formas exatas em M , teremos que $B_0(\Omega^*(M)) = \{0\}$, análogo ao que foi considerado na Seção 2.2. Pela igualdade $d^2 = 0$, tem-se que $B^k(\Omega^*(M)) \subset Z^k(\Omega^*(M))$, ou seja, podemos tomar o espaço quociente entre $Z^k(\Omega^*(M))$ e $B^k(\Omega^*(M))$, fazendo sentido assim a definição a seguir.

Definição 3.1.1 (Grupo de cohomologia de de Rham). O espaço quociente

$$H_{dR}^k(\Omega^*(M)) = \frac{Z^k(\Omega^*(M))}{B^k(\Omega^*(M))},$$

é dito o *grupo de cohomologia de de Rham* da variedade M em dimensão k , cujos elementos são as classes de equivalência

$$[\omega] = \omega + B^k(\Omega^*(M)) = \{\omega + d\alpha; \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\},$$

chamadas *classes de cohomologia* das formas fechadas $\omega \in Z^k(\Omega^*(M))$.

No que se segue, para facilitar a escrita, representemos os módulos $Z^k(\Omega^*(M))$, $B^k(\Omega^*(M))$ e $H^k(\Omega^*(M))$ por $Z^k(M)$, $B^k(M)$ e $H^k(M)$, respectivamente, para todo inteiro $k \geq 0$.

Os grupos de grau zero, $H_{dR}^0(M)$, representam o caso mais elementar da cohomologia de de Rham para M .

Proposição 3.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com r componentes conexas. Então, $H_{dR}^0(M) = \mathbb{R}^r$.*

Demonstração. Note que $\Omega^0(M)$ é o espaço das 0-formas diferenciais definidas em M , isto é, funções reais de classe C^∞ definidas em M . É claro que $B^0(M) = \{0\}$. Com isso, $H_{dR}^0(M) = Z^0(M)/B^0(M) = Z^0(M)$, espaço das 0-formas fechadas, ou seja, se $g \in H_{dR}^0(M)$, então $dg = 0$. Seja $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável para M . Pela Observação D.3.2, temos que $f_\alpha^*(g) \stackrel{(D.3.2)}{=} g \circ f_\alpha = g_\alpha$ é a representação de g em U_α . Como visto na Subseção D.5.1, a representação de dg em $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ é dada por

$$dg_\alpha = \sum \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} dx_i.$$

Note que, $dg_\alpha = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} = 0$, para todo i , o que é equivalente a g_α ser constante em V_α . Isso ocorre se, e somente se, g é constante em U_α , para cada α . Concluimos, então, que g é constante em cada componente conexa de M . Como M possui r componentes conexas, podemos identificar cada $g \in H_{dR}^0(M)$ por $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$. Logo, $H_{dR}^0(M) = \mathbb{R}^r$. $\square$

Exemplo 3.1.1 (A cohomologia de de Rham de $\mathbb{R}$, [26], Exemplo 24.3, p. 276). Vamos calcular os grupos de cohomologia de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é conexa, pela Proposição 3.1.1, $H_{dR}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Além disso, como $\mathbb{R}$ é unidimensional, $H_{dR}^k(\mathbb{R}) = 0$ para $k \geq 2$ inteiro, pois a única k -forma em $\mathbb{R}$, para $k \geq 2$, é a forma nula. A maior dificuldade do exemplo é calcular $H_{dR}^1(\mathbb{R})$. Dado $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, temos que $d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R})$, então $d\omega = 0$, isto é, toda 1-forma em $\mathbb{R}$ é fechada ($Z^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$). Note que $\omega = f dx \in B^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, existe uma 0-forma diferencial em $\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f dx = dg = g' dx,$$

onde g' é a derivada de g . Seja $f \in \Omega^1(\mathbb{R})$, podemos definir g como

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $g'(x) = f(x)$. Então, toda 1-forma em $\mathbb{R}$ é exata, ou seja, $B^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$. Portanto, $H_{dR}^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})/B^1(\mathbb{R}) = 0$, o que nos faz concluir que

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

◇

O Exemplo 24.4 de [26] apresenta o cálculo da cohomologia de de Rham do círculo unitário (S^1), no qual obtemos que

$$H_{dR}^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1; \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

A seguir apresentaremos uma outra maneira de obter essa cohomologia, utilizando da sequência de Mayer-Vietoris, introduzida na Seção 2.4 como auxílio.

Caso haja uma relação entre duas variedades, podemos também relacionar seus grupos de cohomologia. Dada uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ entre duas variedades m e n -dimensionais, tomemos o pullback $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$, para cada inteiro $k \geq 0$. Denotemos por F_k^* o pullback na dimensão k . Pelo item 3 da Proposição D.5.1, $F_k^*(d_{k-1}\omega) = d_{k-1}(F_{k-1}^*\omega)$, o que torna $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ um morfismo, o qual é representado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(N) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1(N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega^k(N) & \xrightarrow{d_k} & \Omega^{k+1}(N) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow F_0^* & & \downarrow F_1^* & & & & \downarrow F_k^* & & \downarrow F_{k+1}^* & & \\ \Omega^0(M) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d_k} & \Omega^{k+1}(M) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Para cada $k \geq 0$, o pullback $F_k^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ induz o homomorfismo

$$\begin{aligned} F_k^\# : H_{dR}^k(N) &\longrightarrow H_{dR}^k(M) \\ [\omega] &\longmapsto F_k^\#([\omega]) = [F_k^*\omega], \end{aligned}$$

chamado o *pullback em cohomologia*. Sejam $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis entre variedades. Temos que $(G \circ F)^\# = F^\# \circ G^\#$, o que faz com que o pullback em cohomologia esteja definido naturalmente. A partir de agora $F^\#$ será denotada simplesmente por F^* , utilizando-se da mesma notação que o pullback $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$.

3.2 INVARIÂNCIA NA COHOMOLOGIA DE DE RHAM

O Exemplo 3.1.1 foi calculado de maneira direta pela simples estrutura do espaço $\mathbb{R}$. Porém, para algumas variedades, não temos a mesma facilidade, principalmente pela estrutura complexa das mesmas. Para solucionar este impasse, podemos utilizar da invariância entre certas variedades, simplificando assim os cálculos.

3.2.1 Invariância por difeomorfismo

O caso mais simples de invariância entre variedades é a invariância por difeomorfismo, ou seja, se duas variedades são difeomorfas, seus grupos de cohomologia de de Rham são isomorfos.

Lema 3.2.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e $I_M : M \longrightarrow M$ a identidade de M . Então, para todo inteiro $k \geq 0$,*

$$(I_M)_k^* = I_{H_{dR}^k(M)},$$

onde $I_{H_{dR}^k(M)}$ é identidade de $H_{dR}^k(M)$.

Demonstração. Note que, pela definição de pullback, dados $p \in M$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p M$, temos que

$$I_M^* \omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(I_M(p))(d(I_M)_p(v_1), \dots, d(I_M)_p(v_k)) = \omega(p)(v_1, \dots, v_k).$$

Logo, $I_M^* \omega = \omega$. Com isso, se $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$,

$$I_M^*[\omega] = [I_M^* \omega] = [\omega].$$

Concluimos, então, o Lema. □

Proposição 3.2.1. *Sejam M e N n -variedades diferenciáveis. Se $F : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo com inversa $G : N \longrightarrow M$, os grupos de cohomologia $H^k(N)$ e $H^k(M)$ são isomorfos para todo $k \geq 0$ inteiro.*

Demonstração. Observe que

$$G^* \circ F^* = (F \circ G)^* = (I_N)^* \stackrel{\text{Lema 3.2.1}}{=} I_{H^k(N)} \text{ e } F^* \circ G^* = (G \circ F)^* = (I_M)^* \stackrel{\text{Lema 3.2.1}}{=} I_{H^k(M)},$$

ou seja, $F^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$ possui inversa dada por $G^* : H^k(M) \longrightarrow H^k(N)$. Portanto, $H^k(M) = H^k(N)$ para todo inteiro $k \geq 0$. □

Sendo assim, dado um intervalo aberto $(a, b) \in \mathbb{R}$ por exemplo, concluimos pelo Exemplo 3.1.1 que

$$H_{dR}^k((a, b)) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

3.2.2 Invariância homotópica

Uma outra forma de obter isomorfismo entre grupos de cohomologia de de Rham de duas variedades quaisquer é por meio da invariância homotópica, a qual não exige variedades difeomorfas, mas as quais, por exemplo, se relacionam por uma deformação diferenciável.

Definição 3.2.1 (Aplicações homotópicas). Sejam $F, G : M \longrightarrow N$ aplicações diferenciáveis entre variedades. Dizemos que F e G são aplicações *homotópicas* se existe uma aplicação diferenciável $\mathcal{H} : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tal que $\mathcal{H}(x, 0) = F(x)$ e $\mathcal{H}(x, 1) = G(x)$. Nesse caso, $\mathcal{H}$ é dita uma *homotopia* de F para G .

Observação 3.2.1. Podemos substituir $\mathbb{R}$, no domínio de $\mathcal{H} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, por um intervalo qualquer I contendo $[0, 1]$.

Podemos considerar uma relação de equivalência $\sim$ sobre o conjunto das aplicações diferenciáveis de M em N a qual

$$F \sim G \Leftrightarrow F \text{ e } G \text{ são homotópicas.}$$

Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Com efeito, sejam $F, G, H : M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis entre M e N . A aplicação diferenciável $\mathcal{H} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ definida como $\mathcal{H}(x, t) = F(x)$ é uma homotopia de F para F , ou seja, $F \sim F$. Além disso, vamos supor que $F \sim G$, isto é, existe uma aplicação diferenciável $\mathcal{H}_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tal que $\mathcal{H}_1(x, 0) = F(x)$ e $\mathcal{H}_1(x, 1) = G(x)$. Note que $\mathcal{H}_2 : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ definida como $\mathcal{H}_2(x, t) = \mathcal{H}_1(x, 1 - t)$ é diferenciável e $\mathcal{H}_2(x, 0) = \mathcal{H}_1(x, 1) = G(x)$ e $\mathcal{H}_2(x, 1) = \mathcal{H}_1(x, 0) = F(x)$, então $G \sim F$.

Além disso, suponhamos que $F \sim G$ e $G \sim H$. Então existem aplicações $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ diferenciáveis tais que $\mathcal{H}_1(x, 0) = F(x)$, $\mathcal{H}_1(x, 1) = G(x) = \mathcal{H}_2(x, 0)$ e $\mathcal{H}_2(x, 1) = H(x)$. Para obter uma homotopia entre F e H poderíamos definir a aplicação $\mathcal{H}_3 : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ como

$$\mathcal{H}_3(x, t) = \begin{cases} \mathcal{H}_1(x, 2t), & t \leq 1/2, \\ \mathcal{H}_2(x, 2t - 1), & t \geq 1/2. \end{cases}$$

Porém, é possível que em $t = 1/2$ não haja diferenciabilidade. Para resolver este problema, vamos construir uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável constante igual a 0 em uma vizinhança de $t = 0$ e constante igual a 1 em uma vizinhança de $t = 1$ e definir $\mathcal{H}_3 : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ como

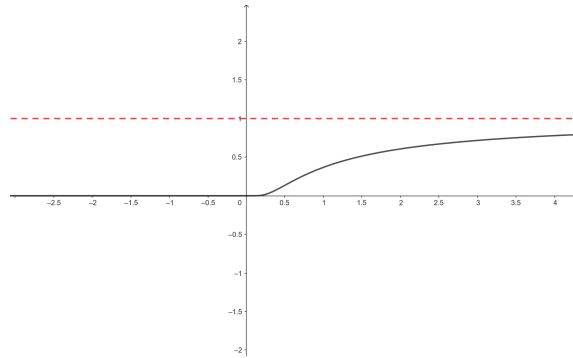
$$\mathcal{H}_3(x, t) = \begin{cases} \mathcal{H}_1(x, \varphi(2t)), & t \leq 1/2, \\ \mathcal{H}_2(x, \varphi(2t - 1)), & t \geq 1/2, \end{cases}$$

garantindo assim a diferenciabilidade de $\mathcal{H}_3$ e, portanto, garantindo que $F \sim H$. Ora, para isso, tomemos a função diferenciável $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

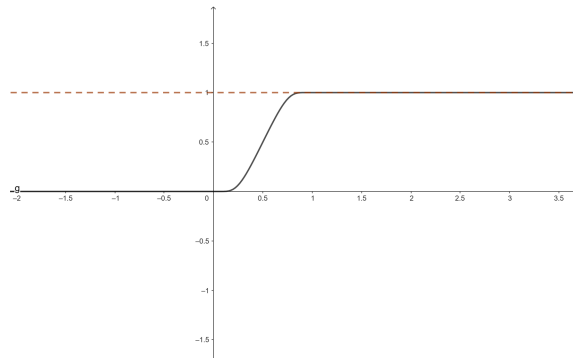
$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-1/t}, & t > 0, \end{cases}$$

com gráfico dado na Figura 1. Agora, seja a função

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \xi(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t) + \psi(1 - t)}, \end{aligned}$$

Figura 1 – Gráfico da função ψ .

Fonte: Nogueira (2024, p. 53).

Figura 2 – Gráfico da função ξ .

Fonte: Nogueira (2024, p. 54).

cujo o gráfico é dado como na Figura 2. Observe que a função é constante igual a 0 para $t \leq 0$ e constante igual a 1 para $t \geq 1$, o que ainda não resolve o problema. Para isso, realizaremos uma mudança linear de variáveis. Seja a função $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

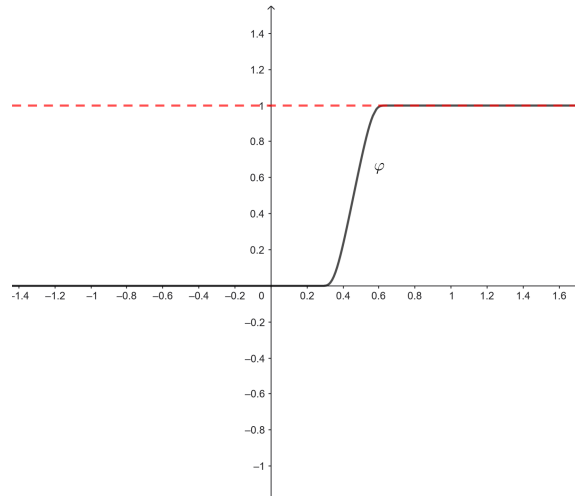
$$\zeta(t) = \frac{t - (1/4)}{(2/3) - (1/4)}.$$

Com isso, definamos a função $\varphi = \xi \circ \zeta$, a qual satisfaz o que queríamos (vide Figura 3), pois é constante igual a 0 para $t \leq 1/4$ e constante igual a 1 para $t \geq 2/3$.

Definição 3.2.2 (Invariância homotópica). Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Dizemos que F é uma *equivalência homotópica* se existe uma aplicação diferenciável $G : N \rightarrow M$ tal que $G \circ F$ e $F \circ G$ sejam aplicações homotópicas às aplicações identidades I_M e I_N , respectivamente, ou seja,

$$G \circ F \sim I_M \text{ e } F \circ G \sim I_N.$$

Caso exista uma equivalência homotópica entre M e N , dizemos que M e N possuem o mesmo *tipo de homotopia*. Além disso, G é dita a *inversa homotópica* de F .

Figura 3 – Gráfico da função φ .

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A seguir demonstraremos que uma invariância homotópica entre duas variedades induz um isomorfismo entre os grupos de cohomologia.

Proposição 3.2.2. *Caso as aplicações $F, G : M \longrightarrow N$ entre as variedades M e N sejam homotópicas, então, para cada inteiro $k \geq 0$,*

$$F^* = G^* : H_{dR}^k(N) \longrightarrow H_{dR}^k(M).$$

A demonstração da Proposição 3.2.2 segue direto da proposição a seguir, a qual afirma que os pullbacks de duas aplicações homotopicas são algebricamente homotópicos e, portanto, pelo que foi provado na Seção 2.3, segue direto a igualdade.

Proposição 3.2.3. *Sejam M e N variedades quaisquer. Se $F, G : M \longrightarrow N$ são aplicações homotopicas, então F^* e G^* são algebricamente homotópicas.*

Antes de demonstrar a Proposição 3.2.3, apresentaremos o conceito de vizinhança tubular, parte da qual tem escrita baseada em [17]. Para isto, utilizaremos fortemente que uma variedade arbitrária pode ser mergulhada em um espaço euclidiano de dimensão suficientemente grande, afirmação a qual tem validade garantida pelo Teorema do Mergulho de Whitney.

Proposição 3.2.4 (Teorema do Mergulho de Whitney, [12], pp. 134-135). *Dada uma n -variedade diferenciável qualquer M , existe um mergulho diferenciável entre M e $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

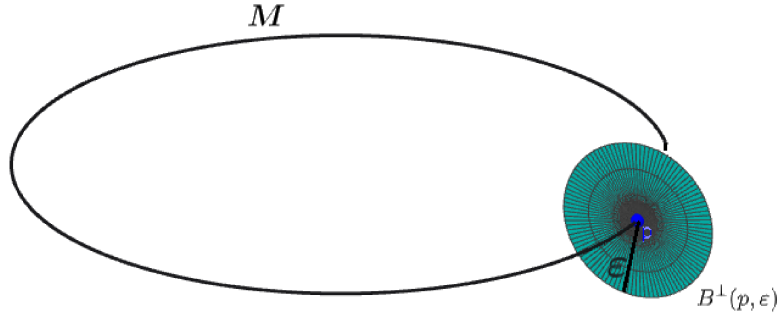
Assim, consideremos $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ uma n -variedade diferenciável com co-dimensão m . Pelo Teorema do Mergulho de Whitney, consideremos que m é igual a no mínimo $n + 1$.

Tomemos então o conjunto

$$B^\perp(p, \varepsilon) = \{p + v; v \in N_p M, \|v\| < \varepsilon\},$$

chamado a *bola normal aberta de raio ε* em $p \in M$, onde $N_p M$, dito o *espaço vetorial normal a M em p* , é o conjunto dos vetores $w \in \mathbb{R}^m$ tais que $\langle w, v \rangle = 0$, para todo $v \in T_p M$.

Figura 4 – Bola normal aberta de raio ε de M em p .



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Agora, é possível construir o conceito de vizinhança tubular, o qual será apresentado no Teorema a seguir.

Proposição 3.2.5 ([17], Teorema 7, p. 82). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ uma n -variedade diferenciável. Existe uma função diferenciável positiva $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$, com as seguintes propriedades:*

1. *Para quaisquer $p \neq q$ em M , as bolas normais abertas $B^\perp(p, \varepsilon(p))$ e $B^\perp(q, \varepsilon(q))$ são disjuntas;*
2. *A reunião $V_\varepsilon(M) = \bigcup_{p \in M} B^\perp(p, \varepsilon(p))$ é um aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$;*
3. *A aplicação $\pi : V_\varepsilon(M) \rightarrow M$, definida por $\pi(q) = p$ se $q \in B^\perp(p, \varepsilon(p))$, é diferenciável;*
4. *Para todo $q \in V_\varepsilon(M)$, $\pi(q)$ é o único ponto de M situado à distância mínima de q (ou seja, se $p \in M$ e $p \neq \pi(q)$ então $\|q - \pi(q)\| < \|q - p\|$).*

Definição 3.2.3 (Vizinhança tubular e aplicação projeção). Chamaremos a reunião $V_\varepsilon(M)$ e a aplicação $\pi : V_\varepsilon(M) \rightarrow M$, respectivamente, de *vizinhança tubular de M* e *projeção de $V_\varepsilon(M)$ em M* .

Os próximos resultados foram baseados na Seção 3.2 de [17].

Lema 3.2.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Temos que M e sua vizinhança tubular $V_\varepsilon(M)$ possuem o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Vamos mostrar que a projeção de $V_\varepsilon(M)$ em M , $\pi : V_\varepsilon(M) \longrightarrow M$ é uma equivalência homotópica, isto é, possui uma inversa homotópica. Ora, consideremos a aplicação inclusão $i : M \longrightarrow V_\varepsilon(M)$. Observe que, $\pi \circ i = I_M$, identidade de M . Agora, seja a aplicação

$$\mathcal{H} : V_\varepsilon(M) \times [0, 1] \longrightarrow V_\varepsilon(M)$$

definida como $\mathcal{H}(p, t) = (1 - t)p + t\pi(p)$. Note que $\mathcal{H}$ está bem definida, pois sejam $q \in B^\perp(p, \varepsilon(p))$ e $t \in [0, 1]$. Temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(q, t) - p\| &= \|(1 - t)q + t\pi(q) - p\| = \|(1 - t)q + tp - p\| \\ &= \|(1 - t)q - (1 - t)p\| = \|(1 - t)(q - p)\| \\ &= |1 - t|\|q - p\| \leq \|q - p\| < \varepsilon(p), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{H}(q, t) \in B^\perp(p, \varepsilon(p)) \subset V_\varepsilon(M)$, o que faz com que $\mathcal{H}(V_\varepsilon(M) \times [0, 1]) \subset V_\varepsilon(M)$. Segue que $\mathcal{H}(p, 0) = p = I_{V_\varepsilon}(p)$, identidade de $V_\varepsilon(M)$ e $\mathcal{H}(p, 1) = \pi(p) = i \circ \pi(p)$, ou seja, $\mathcal{H}$ é uma homotopia entre $i \circ \pi$ e $I_{V_\varepsilon(M)}$, concluindo, assim, o que queríamos mostrar. $\square$

Lema 3.2.3 ([17], Teorema 2(*), Seção 3.2, pp. 62-64). *Se $F, G : U \longrightarrow N$ são aplicações homotópicas, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e N uma variedade diferenciável, então F^* e G^* são algebricamente homotópicas.*

Demonstração. Como F e G são aplicações homotópicas, existe uma aplicação diferenciável $\mathcal{H} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tal que $\mathcal{H}(x, 0) = G(x)$ e $\mathcal{H}(x, 1) = F(x)$. Tomemos, inicialmente, para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i_t : U &\longrightarrow U \times \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x, t). \end{aligned}$$

Agora, note que $\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ pode ser escrita de maneira única como $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$, onde $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ é uma $(k - 1)$ -forma em $U \times \mathbb{R}$ e $\beta = \sum_J b_J dx_J$ uma k -forma em $U \times \mathbb{R}$, pois $\omega = \sum_L c_L dx_L = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n+1} c_{l_1 \dots l_k} dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_k}$, com $x_{n+1} = t$. Definamos então a aplicação $K : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{k-1}(U)$ onde $K\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ é definida como

$$(\mathcal{K}\omega)(x) = \int_0^1 \alpha(x, t) dt = \sum_I \left(\int_0^1 a_I(x, t) dt \right) dx_I. \quad (3.2.1)$$

Vamos mostrar que

$$\mathcal{K}d\omega + d\mathcal{K}\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ora, temos que

$$d\omega = d(dt \wedge \alpha + \beta) = d(dt \wedge \alpha) + d\beta = d(dt) \wedge \alpha - dt \wedge d\alpha + d\beta = d\beta - dt \wedge d\alpha,$$

pois $d(dt) = 0$. Como

$$d\alpha = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I + \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial t} dt \wedge dx_I$$

e

$$d\beta = \sum_J \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_J + \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dt \wedge dx_J,$$

então

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_J \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_J + \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dt \wedge dx_J - dt \wedge \sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I \\ &= dt \wedge \left(\sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dx_J - \sum_{I,i} \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) + \sum_{J,j} \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}d\omega(x) &= \int_0^1 \left(\sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t}(x, t) dx_J - \sum_{I,i} \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x, t) dx_i \wedge dx_I \right) dt \\ &= \sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t}(x, t) dt \right) dx_J - \sum_{I,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x, t) dt \right) dx_i \wedge dx_I. \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Ademais, pela Equação (3.2.1), tem-se que

$$\begin{aligned} d\mathcal{K}\omega(x) &= d \left(\sum_I \left(\int_0^1 a_I(x, t) dt \right) dx_I \right) = \sum_I d \left(\int_0^1 a_I(x, t) dt \right) \wedge dx_I \\ &= \sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \int_0^1 a_I(x, t) dt}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I = \sum_{I,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial a_I(x, t)}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_I. \quad (3.2.3) \end{aligned}$$

A quarta igualdade vale pois, dado $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \in U$ fixo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int_0^1 a_I(x_0, t) dt}{\partial x_i} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 a_I(x_{1,0}, \dots, x_{i,0} + sx_i, \dots, x_{n,0}, t) dt - \int_0^1 a_I(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, t) dt}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{a_I(x_{1,0}, \dots, x_{i,0} + sx_i, \dots, x_{n,0}, t) - a_I(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, t)}{s} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial a_I(x_0, t)}{\partial x_i} dt. \end{aligned}$$

Somando as Equações (3.2.2) e (3.2.3), segue que

$$\mathcal{K}d\omega(x) + d\mathcal{K}\omega(x) = \sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t}(x, t) dt \right) dx_J = \sum_J (b_J(x, 1) - b_J(x, 0)) dx_J,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Observe que o pullback da aplicação inclusão i_1 é dado por

$$\begin{aligned} i_1^* \omega(x) &= (i_1^* dt \wedge i_1^* \alpha + i_1^* \beta)(x) = (d(i_1^* t) \wedge i_1^* \alpha + i_1^* \beta)(x) = (d(t \circ i_1) \wedge i_1^* \alpha + i_1^* \beta)(x) \\ &= (d(1) \wedge i_1^* \alpha + i_1^* \beta)(x) = (0 \wedge i_1^* \alpha + i_1^* \beta)(x) = i_1^* \beta(x) \\ &= \sum_J b_J((i_1)_1(x), \dots, (i_1)_n(x), (i_1)_{n+1}(x)) d(i_1)_J = \sum_J b_J(x, 1) dx_J. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

A argumentação para as igualdades da Equação 3.2.4 pode ser vista no APÊNDICE D.

De maneira análoga, temos que

$$i_0^* \omega(x) = \sum_J b_J(x, 1) dx_J. \quad (3.2.5)$$

Realizando (3.2.4) – (3.2.5), tem-se que

$$i_1 \omega(x) - i_0^* \omega(x) = \sum_J (b_J(x, 1) - b_J(x, 0)) dx_J.$$

Então,

$$\mathcal{K}d\omega + d\mathcal{K}\omega = i_1 \omega - i_0^* \omega. \quad (3.2.6)$$

Agora, definamos a aplicação linear $\mathcal{D} : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^{k-1}(U)$ como $\mathcal{D} = \mathcal{K} \circ \mathcal{H}^*$. Portanto, para $\omega \in \Omega^k(N)$, pela Equação (3.2.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(d\omega) + d(\mathcal{D}\omega) &= \mathcal{K}(\mathcal{H}^* d\omega) + d(\mathcal{K}\mathcal{H}^* \omega) = \mathcal{K}(d\mathcal{H}^* \omega) + d(\mathcal{K}\mathcal{H}^* \omega) = i_1^*(\mathcal{H}^* \omega) - i_0^*(\mathcal{H}^* \omega) \\ &= (\mathcal{H} \circ i_1)^* \omega + (\mathcal{H} \circ i_0)^* \omega = F^* \omega - G^* \omega. \end{aligned}$$

□

Demonstração da Proposição 3.2.3. Considere $U = V_\varepsilon(M)$ uma vizinhança tubular de M , $\pi : U \longrightarrow M$ a projeção de U em M e $i : M \longrightarrow U$ a aplicação inclusão. Além disso, tome $\mathcal{H} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ a homotopia entre F e G . Afirmamos que $\overline{\mathcal{H}} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow N$, definida como $\overline{\mathcal{H}}(x, t) = \mathcal{H}(\pi(x), t)$ é uma homotopia entre as aplicações $\overline{F}, \overline{G} : U \longrightarrow N$, definidas respectivamente por $\overline{F} = F \circ \pi$ e $\overline{G} = G \circ \pi$. Com efeito, $\overline{\mathcal{H}}(x, 0) = \mathcal{H}(\pi(x), 0) = G(\pi(x)) = \overline{G}(x)$ e $\overline{\mathcal{H}}(x, 1) = \mathcal{H}(\pi(x), 1) = F(\pi(x)) = \overline{F}(x)$. Pelo Lema 3.2.3, $\overline{F}^*$ e $\overline{G}^*$ são algebricamente homotópicas, isto é, existe uma aplicação $\overline{\mathcal{D}} : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^{k-1}(U)$ tal que

$$\overline{\mathcal{D}}d\omega + d\overline{\mathcal{D}}\omega = \overline{F}^* \omega - \overline{G}^* \omega.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} F^* \omega - G^* \omega &= (\overline{F} \circ i)^* \omega - (\overline{G} \circ i)^* \omega = i^* \overline{F}^* \omega - i^* \overline{G}^* \omega = i^*(\overline{F}^* \omega - \overline{G}^* \omega) \\ &= i^*(\overline{\mathcal{D}}d\omega + d\overline{\mathcal{D}}\omega) = (i^* \overline{\mathcal{D}})d\omega + i^* d\overline{\mathcal{D}}\omega = (i^* \overline{\mathcal{D}})d\omega + d(i^* \overline{\mathcal{D}})\omega \\ &= \mathcal{D}d\omega + d\mathcal{D}\omega, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D} = i^* \overline{\mathcal{D}} : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$ é a homotopia algébrica entre F^* e G^* .

□

Corolário 3.2.1 (Corolário da Proposição 3.2.2). *Se $F : M \longrightarrow N$ possui uma homotopia inversa, então*

$$F^* : H_{dR}^k(N) \longrightarrow H_{dR}^k(M)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $G : N \longrightarrow M$ a homotopia inversa de F . Então

$$G \circ F \sim I_M \text{ e } F \circ G \sim I_N.$$

Pela Proposição 3.2.3,

$$F^* \circ G^* = (G \circ F)^* = (I_M)^* = I_{H_{dR}^k(M)} \text{ e } G^* \circ F^* = (F \circ G)^* = (I_N)^* = I_{H_{dR}^k(N)}.$$

Portanto, $H_{dR}^k(M)$ e $H_{dR}^k(N)$ são isomorfos.

□

Agora, seguem aplicações do Corolário 3.2.1.

Exemplo 3.2.1 ([26], pp. 297 - 298). Sejam S^n a esfera de dimensão $n \geq 1$, $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a inclusão de S^n em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^n$ a aplicação definida como $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Como $(r \circ i)(x) = r(x) = \frac{x}{\|x\|} = x$, pois $\|x\| = 1$, para todo $x \in S^n$, então $r \circ i = I_{S^n}$ é a aplicação identidade de S^n . Logo, $r \circ i \sim I_{S^n}$. Agora, vamos mostrar que $i \circ r \sim I_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$. Com efeito, seja a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)^2 x + t^2 \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, pois $\mathcal{H}(x, t) = 0$ se, e somente se, $(1-t)^2 = 0$ e $\frac{t^2}{\|x\|} = 0$, o que é equivalente a dizer que $t = 1$ e $t = 0$, uma contradição. Além disso, $\mathcal{H}(x, 0) = x$ e $\mathcal{H}(x, 1) = \frac{x}{\|x\|}$.

Este Exemplo mostra que podemos escolher ou S^n ou $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ para calcular os grupos de cohomologia de de Rham de ambas as variedades. ◇

Definição 3.2.4 (Variedade contrátil). Quando uma variedade M possuir o mesmo tipo de homotopia de um ponto, dizemos que M é *contrátil*.

Exemplo 3.2.2 (Espaço euclidiano, [26], Exemplo 27.6, p. 298). O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é contrátil. Ora, seja $p \in \mathbb{R}^n$. Consideremos a inclusão $i : \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e a aplicação constante $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{p\}$. Note que, $r \circ i = I_{\{p\}}$, isto é, a identidade de $\{p\}$, pois $r(i(p)) = r(p) = p$.

Vamos mostrar que $i \circ r \sim I_{\mathbb{R}^n}$, aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$. Com efeito, tomemos a aplicação $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\mathcal{H}(q, t) = (1 - t)I_{\mathbb{R}^n}(q) + ti(r(q)) = (1 - t)q + tp.$$

$\mathcal{H}$ é uma homotopia de $i \circ r$ para $I_{\mathbb{R}^n}$, pois $\mathcal{H}(q, 0) = q$ e $\mathcal{H}(q, 1) = p$. Logo, $\mathbb{R}^n$ e $\{p\}$ possuem o mesmo tipo de homotopia. Sendo assim,

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

pois $\{p\}$ tem dimensão nula.

Com argumento análogo, podemos concluir que, se M é uma variedade contrátil, então

$$H_{dR}^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

◇

O Exemplo 3.2.2 demonstra o Lema de Poincaré.

Teorema 3.2.1 (Lema de Poincaré). *Sejam M uma variedade diferenciável contrátil e ω uma k -forma diferencial fechada em M , para k inteiro maior ou igual a 1. Então, ω é exata, isto é, existe uma $(k - 1)$ -forma diferencial α em M tal que $d\alpha = \omega$.*

3.2.3 Retrato por deformação

Uma última maneira de obter uma invariância entre duas variedades é deformando de maneira diferenciável uma delas para obter a outra. Na verdade, esta maneira é um exemplo particular de invariância homotópica, o que será demonstrada mais a seguir.

No que se segue, sejam M uma variedade diferenciável e S uma subvariedade de M (veja Definição C.4.1).

Definição 3.2.5 (Retração). Uma aplicação $r : M \longrightarrow S$ tal que

$$r(s) = s, \quad \forall s \in S$$

é dita uma *retração* de M para S . Quando existe tal retração de M para S , dizemos que S é uma *retração* de M .

Definição 3.2.6 (Retrato por deformação). Seja uma aplicação diferenciável $\mathcal{H} : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que, para todo $p \in M$, valem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{H}(p, 0) = p$;

2. existe uma retração $r : M \longrightarrow S$ tal que $\mathcal{H}(p, 1) = r(p)$;
3. $\mathcal{H}(s, t) = s$, $\forall s \in S$ e $t \in \mathbb{R}$.

Chamamos $\mathcal{H}$ de *retrato por deformação* de M para S . Se tal aplicação $\mathcal{H}$ existe, dizemos que S é um *retrato por deformação* de M .

Proposição 3.2.6. *Se S é um retrato por deformação de M , então S e M possuem o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Sejam $r : M \longrightarrow S$ a retração de M para S e $i : S \longrightarrow M$ a aplicação inclusão de S em M . Note que $r \circ i = I_S$, onde I_S é a aplicação identidade de S . Resta mostrar que $i \circ r \sim I_M$, no qual I_M é a aplicação identidade de M . Com efeito, existe uma aplicação diferenciável $\mathcal{H} : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\mathcal{H}(x, 0) = x = I_M(x)$ e $\mathcal{H}(x, 1) = r(x) = i \circ r(x)$. Portanto, S e M possuem o mesmo tipo de homotopia. $\square$

Sendo assim, S e M possuem os mesmos grupos de cohomologia de de Rham. O Exemplo 3.2.2 é um exemplo de retrato por deformação.

3.3 APLICAÇÕES DA INVARIÂNCIA PARA O CÁLCULO DE GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE DE RHAM

O objetivo desta Seção é apresentar exemplos de grupos de cohomologia de de Rham de algumas variedades, utilizando de ferramentas, como a invariância entre variedades por exemplo, para facilitar as operações.

3.3.1 Sequência de Mayer-Vietoris na cohomologia de de Rham

Uma outra ferramenta essencial para teoria da cohomologia é a sequência de Mayer-Vietoris.

Seja M uma variedade diferenciável, com cobertura aberta $\{U, V\}$, e $i_U : U \longrightarrow M$ e $i_V : V \longrightarrow M$ as inclusões de U e V , respectivamente, em M . Temos que o pullback de i_U

$$i_U^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(U)$$

é a restrição de uma k -forma definida em M em U , isto é, $i_U^* \omega = \omega|_U$. O mesmo ocorre para i_V^* . Ademais, sejam $j_U : U \cap V \longrightarrow U$ e $j_V : U \cap V \longrightarrow V$ as inclusões de $U \cap V$ em U e V , respectivamente. Análogo ao que foi afirmado anteriormente, segue que $j_U^* \omega = \omega|_{U \cap V}$ e $j_V^* \bar{\omega} = \bar{\omega}|_{U \cap V}$.

Neste sentido, consideremos os seguintes homomorfismos:

$$\begin{aligned} i : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \\ \omega &\longmapsto (i_U^* \omega, i_V^* \omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) &\longrightarrow \Omega^k(U \cap V) \\ (\omega, \bar{\omega}) &\longmapsto j_V^* \bar{\omega} - j_U^* \omega = \bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.1 ([26], Proposição 26.2, pp. 289-290). *A sequência*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

é exata, para cada inteiro $k \geq 0$.

Pelo Teorema 2.4.3, a sequência $0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$ induz a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(M) \xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j^*} H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H_{dR}^{k+1}(M) \xrightarrow{i^*} \\ \longrightarrow H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

onde

$$i^*[\omega] = [i\omega] = ([\omega|_U], [\omega|_V]) \quad (3.3.2)$$

e

$$j^*([\omega], [\bar{\omega}]) = [j(\omega, \bar{\omega})] = [\bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}]. \quad (3.3.3)$$

O homomorfismo Δ , dito o *homomorfismo de conexão*, é obtido de uma maneira mais complexa. Dado $[\omega''] \in H_{dR}^k(U \cap V)$, como j é sobrejetor, existe $(\eta, \tau) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tal que $j(\eta, \tau) = \omega''$. Como $j(d\eta, d\tau) = dj(\eta, \tau) = d\omega'' = 0$, pois $\omega'' \in Z^k(U \cap V)$, segue-se que existe $\omega' \in \Omega^{k+1}(M)$ tal que $i\omega' = (d\eta, d\tau) \in \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V)$. Temos que $\omega' \in Z^{k+1}(M)$. Ora, $i(d\omega') = di\omega' = d(d\eta, d\tau) = 0$. Como i é injetivo, $d\omega' = 0$. Definamos então $\Delta[\omega''] = [\omega']$.

Além disso, dizemos que a sequência (3.3.1) é a *sequência de Mayer-Vietoris* em cohomologia de de Rham da cobertura $\{U, V\}$ de M .

3.3.2 Exemplos de cohomologia de de Rham

A seguir serão apresentados uma série de exemplos nos quais, com o auxílio de ferramentas introduzidas anteriormente, serão feitos os cálculos dos grupos de cohomologia de de Rham de variedades conhecidas.

Proposição 3.3.2. *Seja*

$$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \longrightarrow A_m \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de espaços vetoriais de dimensões finitas. Então

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \dim A_k = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Núcleo-Imagem, temos que

$$\dim A_k = \dim \ker d_k + \dim \operatorname{Im} d_k,$$

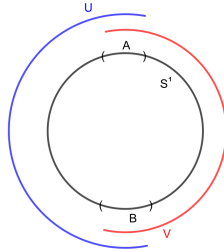
para cada $0 \leq k \leq m$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim A_k &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim \ker d_k + \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim \operatorname{Im} d_k \\ &\stackrel{\operatorname{Im} d_k = \ker d_{k+1}}{=} \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim \ker d_k + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \dim \ker d_{k+1} \\ &\quad + (-1)^m \dim \operatorname{Im} d_m \\ &= \dim \ker d_0 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \dim \ker d_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \dim \ker d_k + (-1)^m \dim \operatorname{Im} d_m \\ &= \dim \ker d_0 + (-1)^m \dim \operatorname{Im} d_m = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3.1 (Cohomologia de de Rham de S^1 , [26], Seção 26.2). Primeiramente, como S^1 é conexa, pela Proposição 3.1.1, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Além disso, sendo S^1 uma superfície de dimensão 1, temos que $H^k(S^1) = 0$, para todo $k \geq 2$. A dificuldade fica em calcular $H^1(S^1)$. Para isso, utilizaremos Mayer-Vietoris. Uma cobertura para S^1 é a união de dois arcos abertos que se intersectam como na Figura 5. Note que $U \cap V = A \cup B$, ou seja,

Figura 5 – Cobertura para o círculo unitário



Fonte: Elaboradada pelo autor (2025).

a união de dois arcos abertos em S^1 . Com isso, temos que a sequência de cohomologia determinada por

$$0 \longrightarrow \Omega^k(S^1) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

é a sequência

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(S^1) &\xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j^*} H_{dR}^k(A) \oplus H_{dR}^k(B) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{k+1}(S^1) \xrightarrow{i^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Podemos identificar qualquer arco aberto em S^1 como um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ por meio de um difeomorfismo. Nesse caso, os grupos de cohomologia de arcos abertos em S^1 são isomorfos aos grupos de cohomologia de $\mathbb{R}$. Logo,

$$H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

e

$$H_{dR}^k(U \cap V) = H_{dR}^k(A) \oplus H_{dR}^k(B) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \geq 1, \end{cases}$$

Nesse caso, a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{dR}^0(S^1) &\xrightarrow{i^*} H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \xrightarrow{j^*} H_{dR}^0(A) \oplus H_{dR}^0(B) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(S^1) \xrightarrow{i^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \end{aligned}$$

pode ser reduzida à sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 3.3.2, tem-se que

$$-\dim \mathbb{R} + \dim (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) - \dim (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) + \dim H_{dR}^1(S^1) = 0.$$

e, então,

$$\dim H_{dR}^1(S^1) = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Daí, concluímos que

$$H_{dR}^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

◇

Observação 3.3.1. Pelo Corolário 3.2.1 e pelo Exemplo 3.2.1, temos que os grupos de cohomologia do plano perfurado são dados por

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 3.3.2 (Cohomologia de um cilindro). Os grupos de cohomologia do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ são os mesmos que os grupos do círculo S^1 . Para concluir isto, vamos mostrar

que $S^1 \times \mathbb{R}$ possui o mesmo tipo de homotopia de S^1 . Ora, consideremos a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} f : S^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ (p, t) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Basta mostrar que f é uma equivalência homotópica. Tomemos a aplicação $i : S^1 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, definida como $i(p) = (p, 0)$. Note que, $(f \circ i)(p) = f(i(p)) = f(p, 0) = p$, ou seja, $f \circ i$ é a aplicação identidade de S^1 . Ademais, $(i \circ f)(p, t) = i(f(p, t)) = i(p) = (p, 0)$. Definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ (p, t, s) &\longmapsto (1 - s)(p, t) + s(p, 0). \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{H}(p, t, 0) = (p, t)$$

e

$$\mathcal{H}(p, t, 1) = (p, 0).$$

Concluimos, então, que a aplicação $i \circ f$ é homotópica à aplicação identidade de $S^1 \times \mathbb{R}$. Portanto,

$$H_{dR}^k(S^1 \times \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

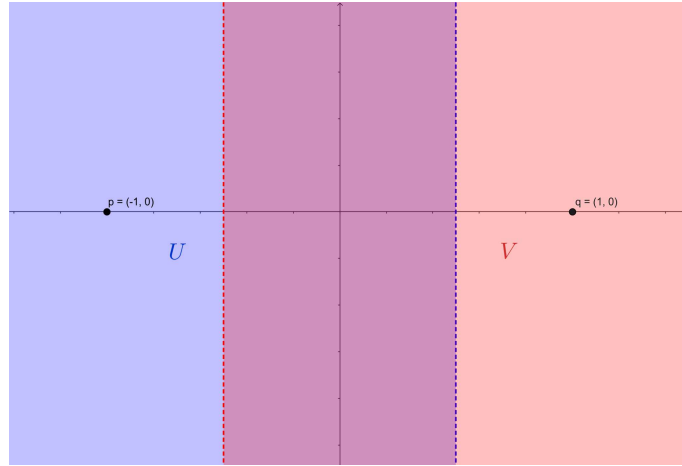
◇

Exemplo 3.3.3 (Cohomologia do plano perfurado em dois pontos, [15], Exemplo 4, pp. 30-31). Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ distintos e $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$. Segue que

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

O cálculo de $H_{dR}^0(\mathbb{R}^2 - \{p, q\})$ segue direto da Proposição 3.1.1, pois $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ é conexa. Além disso, sendo $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ bidimensional, temos que $H^k(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) = 0$, para todo $k > 2$. Resta encontrar $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 - \{p, q\})$ e $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2 - \{p, q\})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = (-1, 0)$ e $q = (1, 0)$. Uma cobertura aberta para $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ é dada pelos abertos $U = \{(x, y) \in M; x < 1/2\}$ e $V = \{(x, y) \in M; x > -1/2\}$, o que

Figura 6 – Plano perfurado em dois pontos



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

pode ser visto na Figura 6. Os abertos U e V são difeomorfos a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ou seja, os grupos de cohomologia são isomorfos e, portanto,

$$H_{dR}^k(U), H_{dR}^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

Ademais, como $U \cap V = \{(x, y) \in M; -1/2 < x < 1/2\}$ é contrátil, segue que

$$H_{dR}^k(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

A sequência de Mayer-Vietoris,

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) &\xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j^*} H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{k+1}(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \\ &\xrightarrow{i^*} H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

associada à decomposição $\mathbb{R}^2 - \{p, q\} = U \cup V$ pode ser identificada pela sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{R} &\xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{dR}^2(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Olhando para o trecho $0 \longrightarrow H_{dR}^2(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \longrightarrow 0$, sendo a sequência exata, temos que $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) = 0$. Agora, tomemos o trecho

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Temos que a aplicação $j^*([\omega], [\bar{\omega}]) = [j(\omega, \bar{\omega})] = [\bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}]$ pode ser identificada pela aplicação $j^*(x, y) = x - y$, a qual não é identicamente nula, ou seja, concluímos que

é sobrejetiva pelo Teorema do Núcleo-Imagem. Note que $\ker d^* = \text{Im } j^* = \mathbb{R}$, isto é, d^* é identicamente nulo. Logo, $\ker i^* = \text{Im } d^* = 0$, o que nos faz concluir que i^* é injetiva. Ademais, i^* é sobrejetiva, pois $\text{Im } i^*$ é igual ao núcleo da aplicação $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow 0$, isto é, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Sendo assim, $i^* : H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é um isomorfismo. $\diamond$

A seguir, calcularemos a cohomologia de uma esfera n -dimensional S^n , para $n \geq 2$ inteiro. Para isso, é necessário definir conceitos e enunciar alguns resultados importantes.

Definição 3.3.1 (Caminhos livremente homotópicos). Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ caminhos fechados, não necessariamente com pontos de extremos fixos, isto é, $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Se existe uma aplicação diferenciável $\mathcal{H} : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ tal que $\mathcal{H}(a, t) = \mathcal{H}(b, t)$, $\mathcal{H}(s, 0) = \gamma_0(s)$ e $\mathcal{H}(s, 1) = \gamma_1(s)$, dizemos que γ_0 e γ_1 são *livremente homotópicos*. Além disso, a aplicação $\mathcal{H}$ é dita uma *homotopia livre* entre γ_0 e γ_1 .

Por conveniência, escrevamos $\gamma_0 \sim \gamma_1$ quando os caminhos γ_0 e γ_1 forem livremente homotópicos. É fácil mostrar que a relação $\sim$ é de equivalência.

Definição 3.3.2 (Conjunto simplesmente conexo). Seja subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos. Quando qualquer caminho fechado $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ é livremente homotópico a um caminho constante, X é dito *simplesmente conexo*.

Como já visto, uma variedade arbitrária pode ser mergulhada em um espaço euclidiano, ou seja, podemos enunciar a proposição a seguir.

Proposição 3.3.3. *Sejam M e N variedades diferenciáveis mergulhadas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, com o mesmo tipo de homotopia. Se M é simplesmente conexa, então N é simplesmente conexa.*

Demonstração. Como M e N possuem o mesmo tipo de homotopia, existe uma equivalência homotópica $F : M \longrightarrow N$. Suponhamos que M é simplesmente conexa. Afirmamos que N é simplesmente conexa. Com efeito, sendo F uma aplicação diferenciável, F induz a conexidade por caminhos de M para N . Resta mostrar, então, que todo caminho fechado em N é livremente homotópico a um caminho constante. Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow N$ um caminho fechado em N e $G : N \longrightarrow M$ a homotopia inversa de F . Temos que $G \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow M$ é um caminho fechado em M . Como M é simplesmente conexa, $G \circ \gamma$ é livremente homotópico a $p \in M$. Com isso, segue que

$$F(p) \sim F \circ G \circ \gamma \sim I_N \circ \gamma = \gamma,$$

ou seja, γ é livremente homotópico a $F(p)$. Portanto, N é simplesmente conexa. $\square$

Lema 3.3.1 ([17], Teorema 6, Seção 1.3). *Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, ω uma 1-forma diferencial em U e $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow U$ caminhos fechados livremente homotópicos. Então, $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$.*

Lema 3.3.2 ([17], Teorema 4, Seção 1.2). *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então $\omega \in \Omega^1(U)$ é exata se, e somente se, $\int_\gamma \omega = 0$ para todo caminho fechado contido em U .*

Proposição 3.3.4. *Sejam um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, simplesmente conexo, e ω uma 1-forma fechada em U . Então, ω é exata.*

Demonstração. Como U é simplesmente conexo, todo caminho fechado em U é livremente homotópico a um caminho constante. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ um caminho fechado em U , o qual é livremente homotópico a um caminho constante igual a $p \in U$, denotado por $\{p\}$. Pelo Lema 3.3.1,

$$\int_\gamma \omega = \int_{\{p\}} \omega = 0.$$

Logo, pelo Lema 3.3.2, ω é exata. □

Proposição 3.3.5. *Seja M uma variedade diferenciável simplesmente conexa. Então,*

$$H_{dR}^1(M) = 0.$$

Demonstração. Seja $V \supset M$ uma vizinhança tubular no espaço euclidiano no qual M está mergulhada. Pelo Lema 3.2.2, a projeção $\pi : V_\varepsilon(M) \rightarrow M$ é uma equivalência homotópica, ou seja, $V_\varepsilon(M)$ e M possuem o mesmo tipo de homotopia. Nesse caso, como M é simplesmente conexa, pela Proposição 3.3.3, $V_\varepsilon(M)$ é simplesmente conexa. Seja ω uma 1-forma diferencial fechada em M , o pullback $\pi^*\omega \in \Omega^1(V_\varepsilon(M))$ é fechada, pois $d(\pi^*\omega) = \pi^*(d\omega) = 0$. Sendo $V_\varepsilon(M)$ aberto, pela Proposição 3.2.5, $\pi^*\omega$ é exata pela Proposição 3.3.4. Então, existe uma função diferenciável $f : V_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = \pi^*\omega$. Como $\pi|_M = I_M$, isto é, aplicação identidade de M , temos que $\omega = (I_M)^*\omega = (\pi|_M)^*\omega = d(f|_M)$. Concluimos que ω é exata. Portanto, $Z^1(M) = B^1(M)$, ou seja, $H_{dR}^1(M) = 0$.

A igualdade $(\pi|_M)^*\omega = d(f|_M)$ vale pois, se $p \in M$ e $v \in T_p M \subset T_p V$, temos que

$$\begin{aligned} (\pi|_M)^*\omega(p)(v) &= \omega(\pi|_M(p))(d(\pi|_M)_p(v)) = \omega(\pi(p))(d\pi_p(v)) = \pi^*\omega(p)(v) = df(p)(v) \\ &= d(f|_M)(p)(v). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3.4 (Cohomologia da esfera n -dimensional S^n , [15], Exemplo 6, p. 32). Vamos mostrar que os grupos de cohomologia de S^n são

$$H_{dR}^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O caso em que $n = 1$ já foi calculado no Exemplo 3.3.1. Agora, temos o interesse em calcular os grupos de cohomologia de esferas de dimensões maiores ou iguais a 2. A esfera n -dimensional S^n é uma superfície simplesmente conexa mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ (conferir Exemplo 8, Capítulo 1 de [17]), ou seja, pela Proposição 3.3.5,

$$H_{dR}^1(S^n) = 0. \quad (3.3.5)$$

Para $k > n$, é claro que $H_{dR}^k(S^n) = 0$. Além disso, como S^n é conexa, pela Proposição 3.1.1, $H_{dR}^0(S^n) = \mathbb{R}$. Resta calcular os grupos de cohomologia nos casos em que $0 < k \leq n$. Para isso, utilizaremos Mayer-Vietoris. Consideremos a cobertura aberta $\{U, V\}$ de S^n , onde $U = S^n - \{N\}$ e $V = S^n - \{S\}$, onde $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$. Temos que a projeção estereográfica (confira o Exemplo C.1.3 da Seção 1 do APÊNDICE C) nos dá um difeomorfismo entre U (respectivamente V) e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, ou seja, $H_{dR}^k(U)$ e $H_{dR}^k(V)$ são isomorfos aos grupos de cohomologia de $\mathbb{R}^n$. Pelo Exemplo 3.2.2,

$$H_{dR}^k(U), H_{dR}^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Consideremos, então, a sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(S^n) &\xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j^*} H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{k+1}(S^n) \xrightarrow{i^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

associada à decomposição $\{U, V\}$. Por (3.3.6), para qualquer inteiro $k > 1$, temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow 0,$$

ou seja, $H_{dR}^{k-1}(U \cap V)$ é isomorfo ao grupo $H_{dR}^k(S^n)$. Note que, $U \cap V = S^n - \{N, S\}$, ou seja, $U \cap V$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$, o qual possui o mesmo tipo de homotopia da esfera S^{n-1} pelo Exemplo 3.2.1. Logo, $H_{dR}^k(S^n)$ é isomorfo a $H^{k-1}(S^{n-1})$ para todo inteiro $k > 1$ e $n > 1$. Daí,

$$H_{dR}^n(S^n) = H_{dR}^{n-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_{dR}^1(S^1) = \mathbb{R}$$

e

$$H_{dR}^k(S^n) = H_{dR}^{k-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_{dR}^1(S^{n-k+1}) = 0,$$

pela Equação (3.3.5), pois $n - k + 1 > 1$. ◇

Observação 3.3.2. Como no Exemplo 3.3.1, os grupos de cohomologia do espaço euclidiano perfurado são

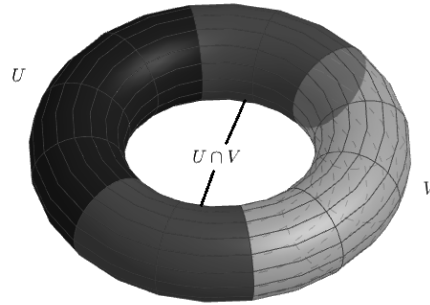
$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 3.3.5 (Grupos de cohomologia do toro, [26], Seção 28.1). Considere o toro bidimensional denotado por T . Afirmamos que

$$H_{dR}^k(T) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = 2, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, como T possui dimensão 2, $H_{dR}^k(T) = 0$, para todo $k > 2$. Ademais, sendo T uma superfície conexa, pela Proposição 3.1.1, $H_{dR}^0(T) = \mathbb{R}$. Resta calcular então $H_{dR}^1(T)$ e $H_{dR}^2(T)$. Tomemos uma cobertura aberta $\{U, V\}$ de T como na Figura 7.

Figura 7 – Decomposição $\{U, V\}$ do toro bidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Seja a sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(T) &\xrightarrow{i_k^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j_k^*} H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{d_k^*} H_{dR}^{k+1}(T) \xrightarrow{i_{k+1}^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

associada à decomposição $\{U, V\}$. Consideremos uma parte da sequência anterior como a seguir:

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) &\xrightarrow{j_0^*} H_{dR}^0(U \cap V) \xrightarrow{d_0^*} H_{dR}^1(T) \xrightarrow{i_1^*} H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \xrightarrow{j_1^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^1(U \cap V). \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Recapitulando, pelas Equações (3.3.2) e (3.3.3), temos que

$$i_k^*[\omega] = ([\omega|_U], [\omega|_V]) \text{ e } j_k^*([\omega], [\bar{\omega}]) = [\bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}].$$

Os conjuntos U e V são difeomorfos ao cilindro e $U \cap V$ possui duas componentes conexas, as quais denotaremos por A e B , difeomorfas ao cilindro. Pelo Exemplo 3.3.2, os grupos de cohomologia são $H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ e $H_{dR}^k(U \cap V) = H_{dR}^k(A \oplus B) = H_{dR}^k(A) \oplus H_{dR}^k(B) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, para $k = 0, 1$ e nulos caso contrário. Sendo assim, a sequência (3.3.7) pode ser representada por

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{j_0^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d_0^*} H_{dR}^1(T) \xrightarrow{i_1^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j_1^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}. \quad (3.3.8)$$

Nesse caso, as aplicações j_0^* e j_1^* podem ser escritas como

$$j_0^*(a, b) = (b, b) - (a, a) \text{ e } j_1^*(\omega, \bar{\omega}) = (\bar{\omega}, \bar{\omega}) - (\omega, \omega).$$

Observe que $[\bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}]$ foi escrito como $(b, b) - (a, a)$ e $(\bar{\omega}, \bar{\omega}) - (\omega, \omega)$. Isso ocorre, pois, como comentado anteriormente, $U \cap V = A \oplus B$.

Note que $\ker j_1^* = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; (b, b) - (a, a) = 0\} = \{(a, a); a \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $\dim \ker j_1^* = 1$. Raciocínio análogo pode ser feito para j_0^* . Pela exatidão da sequência (3.3.8), $\dim \operatorname{Im} i_1^* = \dim \ker j_1^* = 1$. Ademais, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, $\dim \ker i_1^* = \dim \operatorname{Im} d_0^* = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker d_0^* = 2 - \dim \operatorname{Im} j_0^*$. Novamente, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, $\dim \operatorname{Im} j_0^* = 2 - 1 = 1$. Então,

$$\dim \ker i_1^* = 2 - 1 = 1.$$

Logo,

$$\dim H_{dR}^1(T) = \dim \ker i_1^* + \dim \operatorname{Im} i_1^* = 1 + 1 = 2$$

e, portanto, $H_{dR}^1(T) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Agora, tomemos a sequência exata

$$H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \xrightarrow{j_1^*} H_{dR}^1(U \cap V) \xrightarrow{d_1^*} H_{dR}^2(T) \xrightarrow{i_2^*} H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V),$$

a qual pode ser representada por

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j_1^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d_1^*} H_{dR}^2(T) \xrightarrow{i_2^*} 0.$$

Pela exatidão da sequência

$$\dim \ker d_1^* = \dim \operatorname{Im} j_1^* = 1.$$

Pelo comentário feito na Observação 2.4.2, d_1^* é sobrejetiva. Com isso, pelo Teorema do Núcleo-Imagem e pela sobrejetividade de d_1^* , segue que

$$\dim H_{dR}^2(T) = \dim \operatorname{Im} d_1^* = \dim \mathbb{R}^2 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

ou seja, $H_{dR}^2(T) = \mathbb{R}$. ◇

A seguir temos o interesse em calcular os grupos de cohomologia de variedades de gênero g maior que 1, as quais denotaremos por Σ_g , mais especificamente, o toro de gênero $g > 1$.

Lema 3.3.3. *A função $\varphi : H_{dR}^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como*

$$\varphi[\omega] = \int_{S^1} \omega,$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Como visto no Exemplo 3.3.1, $H_{dR}^1(S^1) = \mathbb{R}$. Pelo Teorema do Núcleo-Imagem, uma transformação linear entre espaços vetoriais unidimensional ou é um isomorfismo ou é identicamente nula. Afirmamos que φ está bem definida. De fato, sejam $\omega, \bar{\omega} \in Z^1(S^1)$ tais que $[\omega] = [\bar{\omega}]$. Então, $\bar{\omega} = \omega + df$, onde $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma 0-forma diferencial. Temos que

$$\int_{S^1} \bar{\omega} = \int_{S^1} \omega + df = \int_{S^1} \omega + \int_{S^1} df = \int_{S^1} \omega,$$

pois $\int_{S^1} df = 0$ (conferir em [19], Seção 7.8, Corolário do Teorema 16, p. 383).

Além disso, temos que φ é não-nula. Ora, seja $\nu = i^*\tau$ a 1-forma, onde $i : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é inclusão de S^1 em $\mathbb{R}^2$ e τ é a 1-forma em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\tau = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2.$$

Como

$$\begin{aligned} d\nu &= d(j^*\tau) \stackrel{\text{Proposição D.5.1(3)}}{=} j^*(d\tau) \\ &= j^*(2dx_1 \wedge dx_2), \end{aligned}$$

então pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{S^1} \nu = \int_{S^1} j^*\tau = \int_B d\tau = 2 \int_B dx_1 \wedge dx_2 \quad (3.3.9)$$

onde B é a bola em $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é S^1 . Confira o Exemplo 15, p. 330, de [19], sobre a forma $dx_1 \wedge dx_2$. Além disso, novamente em [19], confira na Seção 7.6, pp. 357-358, que

$$\int_B dx_1 \wedge dx_2 = \text{vol } B, \quad (3.3.10)$$

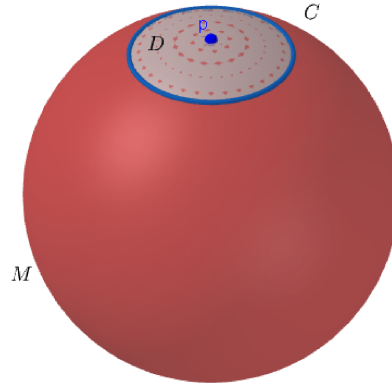
isto é, o volume do conjunto B (sobre isto, confira em [19], p. 287). Portanto, como $\text{vol } B > 0$, pelas Equações (3.3.9) e (3.3.10), temos que $\int_{S^1} \nu > 0$, o que demonstra que φ é não-nula.

Sendo assim, φ é um isomorfismo. $\square$

Proposição 3.3.6 ([26], Lema 28.3, Seção 28.3). *Sejam M uma superfície regular bidimensional compacta sem bordo, $p \in M$ e $i : C \longrightarrow M - \{p\}$ a inclusão de um “pequeno círculo” ao redor de p em $M - \{p\}$. Então, a aplicação $i^* : H_{dR}^1(M - \{p\}) \longrightarrow H_{dR}^1(C)$, induzida por i , é nula.*

Observação 3.3.3. Antes de demonstrar a Proposição anterior, vamos mostrar que é possível tomar um conjunto difeomorfo a um “pequeno círculo” ao redor de p . Com efeito, seja $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável de M . Existe α qualquer tal que $p \in U_\alpha$, ou seja, $f_\alpha(p) \in V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$. Como V_α é um aberto de $\mathbb{R}^2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f_\alpha(p) \in B(f_\alpha(p), \varepsilon) \subset V_\alpha$. Note que, em particular, $\partial(B(f_\alpha(p), \varepsilon/2)) \subset \overline{B(f_\alpha(p), \varepsilon/2)} \subset B(f_\alpha(p), \varepsilon)$. Como $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow f_\alpha(U_\alpha)$ é um difeomorfismo, temos que $f_\alpha^{-1}(\partial(B(f_\alpha(p), \varepsilon/2))) = \partial(f_\alpha^{-1}(B(f_\alpha(p), \varepsilon/2)))$ é difeomorfo a $\partial(B(f_\alpha(p), \varepsilon/2))$.

Figura 8 – Disco delimitado por C .



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Demonstração da Proposição 3.3.6. Pela Observação 3.3.3, podemos concluir que $H_{dR}^1(C) = H_{dR}^1(S^1)$. Lembrando que pelo Exemplo 3.3.1, $H_{dR}^1(S^1) = \mathbb{R}$. Seja $[\omega] \in H_{dR}^1(M - \{p\})$, onde ω é uma 1-forma fechada em $M - \{p\}$. Note que C é a fronteira da superfície $M - D$, onde D é o aberto em M delimitado por C . Então, pelo Teorema de Stokes, temos que

$$\int_C i^* \omega = \int_{\partial(M-D)} i^* \omega = \int_{M-D} d\omega = 0,$$

pois ω é fechada, ou seja, $d\omega = 0$. Pelo Lema 3.3.3, a integração, restrita às formas fechadas, é um isomorfismo, ou seja, $i^* \omega = 0$. Sendo $i^*[\omega] = [i^* \omega]$, concluímos que $i^*[\omega] = 0$, o que demonstra o resultado. $\square$

Observação 3.3.4. Considere a variedade M e um círculo C como na Proposição 3.3.6. Com argumento análogo, este Lema pode ser generalizado da seguinte forma: Sejam M

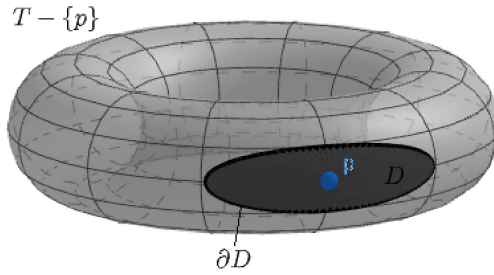
uma n -variedade diferenciável compacta sem bordo, $p \in M$ e $i : C \longrightarrow M - \{p\}$ a inclusão de um espaço ao redor de p em $M - \{p\}$, homotópico a um “pequeno círculo”. Então, a aplicação $i^* : H_{dR}^1(M - \{p\}) \longrightarrow H_{dR}^1(C)$, induzida por i , é nula.

Exemplo 3.3.6 (Cohomologia do toro perfurado). Seja $p \in T$ um ponto qualquer do toro. Vamos calcular os grupos de cohomologia de $T - \{p\}$. Sendo $T - \{p\}$ 2-dimensional, $H_{dR}^k(T - \{p\}) = 0$, para $k > 2$. Além disso, $T - \{p\}$ é conexo e, então, pela Proposição 3.1.1, $H_{dR}^0(T - \{p\}) = \mathbb{R}$. Resta calcular então $H_{dR}^k(T - \{p\})$, para $k = 1, 2$. Tomemos a decomposição $T = D \cup (T - \{p\})$, onde D é um disco aberto ao redor de p (confira Figura 9) e consideremos a sequência de Mayer-Vietores

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(T) &\xrightarrow{i_k^*} H_{dR}^k(D) \oplus H_{dR}^k(T - \{p\}) \xrightarrow{j_k^*} H_{dR}^k(D - \{p\}) \xrightarrow{d_k^*} H_{dR}^{k+1}(T) \xrightarrow{i_{k+1}^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(D) \oplus H_{dR}^{k+1}(T - \{p\}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

associada à decomposição $\{D, T - \{p\}\}$.

Figura 9 – Decomposição $T = D \cup (T - \{p\})$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Note que $D \cap (T - \{p\}) = D - \{p\}$. A parte da sequência (3.3.11) dada por

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(D) \oplus H_{dR}^0(T - \{p\}) &\xrightarrow{j_0^*} H_{dR}^0(D - \{p\}) \xrightarrow{d_0^*} H_{dR}^1(T) \xrightarrow{i_1^*} H_{dR}^1(D) \oplus H_{dR}^1(T - \{p\}) \xrightarrow{j_1^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^1(D - \{p\}) \xrightarrow{d_1^*} H_{dR}^2(T) \xrightarrow{i_2^*} H_{dR}^2(D) \oplus H_{dR}^2(T - \{p\}) \xrightarrow{j_2^*} H_{dR}^2(D - \{p\}) \end{aligned}$$

pode ser representada por

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j_0^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d_0^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{i_1^*} H_{dR}^1(T - \{p\}) \xrightarrow{j_1^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d_1^*} \mathbb{R} \xrightarrow{i_2^*} H_{dR}^2(T - \{p\}) \xrightarrow{j_2^*} \quad (3.3.12)$$

Observe que $H_{dR}^1(T)$ e $H_{dR}^2(T)$ foram calculados no Exemplo 3.3.5 e $D - \{p\}$ possui o mesmo tipo de homotopia de S^1 (argumento análogo ao feito para o plano perfurado), ou seja, $H_{dR}^1(D - \{p\}) = H_{dR}^1(S^1) = \mathbb{R}$ e $H_{dR}^2(D - \{p\}) = H_{dR}^2(S^1) = 0$. Ademais, D é contrátil, o que é demonstrado de maneira similar ao que foi feito para o espaço euclidiano.

Sendo assim,

$$H_{dR}^k(D) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por construção, $j_1^*([\omega], [\bar{\omega}]) = [\bar{\omega}|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}]$, ou seja, pelo comentário anterior, $\omega = 0$. Sendo assim, $j_1^*([\omega], [\bar{\omega}]) = i^*([\bar{\omega}])$, na qual i é a aplicação inclusão. Como $\mathbb{R} = H_{dR}^1(S^1) = H_{dR}^1(\partial D)$, pela Proposição 3.3.6, j_1^* é nula, ou seja, $\ker j_1^* = H_{dR}^1(T - \{p\})$. Logo, pela exatidão da sequência (3.3.12) e pelo Teorema do Núcleo-Imagem,

$$\dim H_{dR}^1(T - \{p\}) = \dim \ker j_1^* = \dim \operatorname{Im} i_1^* = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker i_1^* \quad (3.3.13)$$

$$= 2 - \dim \operatorname{Im} d_0^*. \quad (3.3.14)$$

Por argumentos similares feitos na Equação (3.3.13), segue que

$$\dim \operatorname{Im} d_0^* = \dim \mathbb{R} - \dim \ker d_0^* = 1 - \dim \operatorname{Im} j_0^*. \quad (3.3.15)$$

Note que $j_0^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como $j_0^*(u, v) = u - v$. Logo, $\dim \operatorname{Im} j_0^* = 1$. Substituindo na Equação (3.3.15), tem-se que $\dim \operatorname{Im} d_0^* = 0$. Concluimos, pela Equação (3.3.13), que $H_{dR}^1(T - \{p\}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Utilizando argumentos análogos aos feitos anteriormente, é possível concluir que $H_{dR}^2(T - \{p\}) = 0$.

Portanto,

$$H_{dR}^k(T - \{p\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

◇

Exemplo 3.3.7 (Cohomologia do toro perfurado por dois pontos). Considere o toro T perfurado por dois pontos distintos $p, q \in T$. Considere a cobertura aberta $\{D, (T - \{p, q\})\}$ de $T - \{p\}$, onde D é um aberto de T ao redor de q não contendo p . Similarmente ao que foi feito no Exemplo 3.3.6, concluimos que

$$H_{dR}^k(T - \{p, q\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ \mathbb{R}^3, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com efeito, tomemos a sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(T) &\xrightarrow{i_k^*} H_{dR}^k(D) \oplus H_{dR}^k(T - \{p\}) \xrightarrow{j_k^*} H_{dR}^k(D - \{p\}) \xrightarrow{d_k^*} H_{dR}^{k+1}(T) \xrightarrow{i_{k+1}^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(D) \oplus H_{dR}^{k+1}(T - \{p\}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

associada à decomposição $\{D, T - \{p, q\}\}$. Agora, considere a parte da sequência anterior dada por

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(D) \oplus H_{dR}^0(T - \{p, q\}) &\xrightarrow{j_0^*} H_{dR}^0(D - \{q\}) \xrightarrow{d_0^*} H_{dR}^1(T - \{p\}) \xrightarrow{i_1^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^1(D) \oplus H_{dR}^1(T - \{p, q\}) \xrightarrow{j_1^*} H_{dR}^1(D - \{q\}) \xrightarrow{d_1^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^2(T - \{p\}) \xrightarrow{i_2^*} H_{dR}^2(D) \oplus H_{dR}^2(T - \{p, q\}) \xrightarrow{j_2^*} H_{dR}^2(D - \{q\}) \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 3.3.6, por D ser contrátil, por $T - \{p, q\}$, D e $D - \{q\}$ serem conexos e por $D - \{q\}$ possuir o mesmo tipo de homotopia de S^1 , podemos representar a parte da sequência por

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} &\xrightarrow{j_0^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d_0^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{i_1^*} H_{dR}^1(T - \{p, q\}) \xrightarrow{j_1^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d_1^*} 0 \xrightarrow{i_2^*} H_{dR}^2(T - \{p, q\}) \\ &\xrightarrow{j_2^*} 0. \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Pela exatidão da sequência, $H_{dR}^2(T - \{p, q\}) = 0$. Além disso, pelo Teorema do Núcleo-Imagem e pela exatidão da sequência, temos que $\dim H_{dR}^1(T - \{p, q\}) = \dim \operatorname{Im} j_1^* + \dim \ker j_1^* = 1 + \dim \operatorname{Im} i_1^* = 1 + 2 - \dim \ker i_1^* = 1 + 2 - \dim \operatorname{Im} d_0^* = 1 + 2 - 1 + \dim \ker d_0^* = 1 + 2 - 1 + \dim \operatorname{Im} j_0^* = 2 + 1 = 3$. Portanto, $H_{dR}^1(T - \{p, q\}) = \mathbb{R}^3$. $\diamond$

Com o auxílio do Exemplo 3.3.7 calcularemos a seguir os grupos de cohomologia de uma superfície de gênero 2, Σ_2 , em particular, o bitoro. No restante do trabalho, II representa a união disjunta, apresentada na Seção 4 do APÊNDICE B.

Proposição 3.3.7. *Sejam M uma superfície regular bidimensional compacta e sem bordo e C_p e C_q dois “pequenos círculos” ao redor de $p, q \in M$, respectivamente, em $M - \{p, q\}$, tais que $C_p \cap C_q = \emptyset$. Então, a aplicação*

$$i^* : H_{dR}^1(M - \{p, q\}) \longrightarrow H_{dR}^1(C_p) \oplus H_{dR}^1(C_q),$$

induzida pela inclusão $i : C_p \amalg C_q \longrightarrow M - \{p, q\}$, é nula.

Demonstração. A aplicação induzida

$$i^* : H_{dR}^1(M - \{p, q\}) \longrightarrow H_{dR}^1(C_p) \oplus H_{dR}^1(C_q),$$

é definida como

$$i^*[\omega] = ([i_{C_p}^* \omega], [i_{C_q}^* \omega]),$$

onde i_{C_p} e i_{C_q} são as inclusões de C_p e C_q em $M - \{p, q\}$, respectivamente. Pela Proposição 3.3.6, $i_{C_p}^*$ e $i_{C_q}^*$ são nulas. $\square$

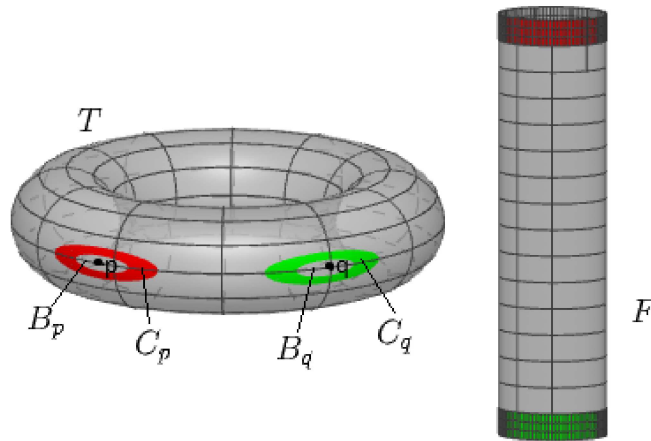
Observação 3.3.5. Como comentado na Observação 3.3.4, podemos estender a Proposição 3.3.7, para espaços homotópicos aos “pequenos círculos”.

Exemplo 3.3.8 (Cohomologia de Σ_2). Vamos provar que a cohomologia de de Rham de Σ_2 é dada por

$$H_{dR}^k(\Sigma_2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 2, \\ \mathbb{R}^4, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma superfície de gênero 2 pode ser construída anexando uma “alça” F (a qual possui o mesmo tipo de homotopia de um cilindro $S_1 \times (0, 1)$) a um toro T perfurado em dois pontos como na Figura 10. Sobre isso confira [10], Definição 4.8, p. 69.

Figura 10 – Toro com alça.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Sejam $p, q \in T$ pontos distintos e discos abertos B_p, B_q, C_p e C_q , tais que $\overline{B_p} \subset C_p$ e $\overline{B_q} \subset C_q$, ao redor de p e q , respectivamente, tais que $C_p \cap C_q = \emptyset$. Seja $U = T - (\overline{B_p} \amalg \overline{B_q})$ e consideremos F anexado a U de tal modo que $U \cap F = (C_p - \overline{B_p}) \amalg (C_q - \overline{B_q})$. Note que $\{U, F\}$ é uma cobertura aberta de Σ_2 . Seja a sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^k(\Sigma_2) &\xrightarrow{i_k^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(F) \xrightarrow{j_k^*} H_{dR}^k(C_p - \overline{B_p}) \oplus H_{dR}^k(C_q - \overline{B_q}) \xrightarrow{d_k^*} \\ &\longrightarrow H_{dR}^{k+1}(\Sigma_2) \xrightarrow{i_{k+1}^*} H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(F) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

associada à decomposição $\{U, F\}$.

Como Σ_2 é uma superfície conexa, temos que $H_{dR}^0(\Sigma_2) = \mathbb{R}$.

Ademais, sendo $\overline{B}_p$ e $\overline{B}_q$ contráteis, U possui o mesmo tipo de homotopia de $T - \{p, q\}$. Então, como calculado no Exemplo 3.3.7, temos que

$$H_{dR}^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ \mathbb{R}^3, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Exemplo 3.3.2,

$$H_{dR}^k(F) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

Além disso, de maneira análoga ao feito para $\mathbb{R}^n - \{0\}$, podemos concluir que $C_p - \overline{B}_p$ e $C_q - \overline{B}_q$ possuem o mesmo tipo de homotopia do círculo, ou seja,

$$H_{dR}^k(C_p - \overline{B}_p), H_{dR}^k(C_q - \overline{B}_q) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 1, \\ 0, & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

Com isso, podemos representar parte da sequência (3.3.17), onde $k = 0, 1, 2$, por

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i_0^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j_0^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d_0^*} H_{dR}^1(\Sigma_2) \xrightarrow{i_1^*} \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j_1^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d_1^*} H_{dR}^2(\Sigma_2) \longrightarrow 0$$

Pela exatidão da sequência e pelo Teorema do Núcleo-Imagem, segue que

$$\dim H_{dR}^2(\Sigma_2) = \dim \text{Im } d_1^* = 2 - \dim \ker d_1^* = 2 - \dim \text{Im } j_1^*, \quad (3.3.18)$$

pois d_1^* é sobrejetora e $\ker d_1^* = \text{Im } j_1^*$.

Além disso, i_0^* é injetora, o que faz com que $\dim \ker i_0^* = 0$. Sendo assim, novamente pelo Teorema do Núcleo-Imagem, $\dim \text{Im } i_0^* = 1$. Seguindo utilizando a exatidão da sequência e o Teorema do Núcleo-Imagem, podemos concluir que

$$\dim H_{dR}^1(\Sigma_2) = 1 + \dim \ker j_1^*. \quad (3.3.19)$$

Note que, para calcular $H_{dR}^1(\Sigma_2)$ e $H_{dR}^2(\Sigma_2)$, basta analisar a aplicação j_1^* , a qual é dada por $j_1^* : H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(F) \longrightarrow H_{dR}^1(C_p - \overline{B}_p) \oplus H_{dR}^1(C_q - \overline{B}_q)$ definida como

$$j_1^*([\omega], [\overline{\omega}]) = [j_F^* \overline{\omega} - j_U^* \omega] = [\overline{\omega}|U \cap F - \omega|U \cap F],$$

onde $j_U : (C_p - \overline{B}_p) \amalg (C_q - \overline{B}_q) \longrightarrow U$ e $j_F : (C_p - \overline{B}_p) \amalg (C_q - \overline{B}_q) \longrightarrow F$ são as inclusões de $(C_p - \overline{B}_p) \amalg (C_q - \overline{B}_q)$ em U e em F , respectivamente. Pela Proposição 3.3.7, j_U^* é nula e, então, podemos escrever

$$j_1^*([\omega], [\overline{\omega}]) = [j_F^* \overline{\omega}] = [\overline{\omega}|U \cap F]. \quad (3.3.20)$$

Como $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(F) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$ e $H_{dR}^1(C_p - \overline{B}_p) \oplus H_{dR}^1(C_q - \overline{B}_q) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, podemos representar (3.3.20) como

$$j_1^*(a, b) = (b, b),$$

com $a \in \mathbb{R}^3$ e $b \in \mathbb{R}$. Com isso, $\dim \operatorname{Im} j_1^* = 1$ e $\dim \ker j_1^* = 3$ e, portanto, substituindo os valores em (3.3.18) e em (3.3.19), concluímos que $\dim H_{dR}^2(\Sigma_2) = 1$ e $\dim H_{dR}^1(\Sigma_2) = 4$. $\diamond$

Prosseguindo de maneira indutiva, é possível mostrar que a cohomologia de de Rham de uma superfície de gênero g , sendo g um inteiro qualquer maior ou igual a 1, é dada por

$$H_{dR}^k(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 2, \\ \mathbb{R}^{2g}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir, temos o objetivo de calcular os grupos de cohomologia de de Rham do espaço projetivo real n -dimensional $\mathbb{RP}^n = S^n/(x \sim -x)$, o qual tem sua construção feita no Exemplo C.1.4.

Lema 3.3.4. *Para todo inteiro $n \geq 1$, seja $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão da esfera n -dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, a classe de cohomologia de de Rham da n -forma diferencial $\nu = j^*\tau$, onde*

$$\tau = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1},$$

gera $H_{dR}^n(S^n)$.

Demonstração. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} d\nu &= d(j^*\tau) \stackrel{\text{Proposição D.5.1(3)}}{=} j^*(d\tau) \\ &= j^* \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} \\ &= (n+1)j^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}) \\ &= (n+1)(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})|_{S^n} \stackrel{\text{Observação D.1.1}}{=} 0, \end{aligned}$$

pois S^n possui dimensão menor que $\mathbb{R}^{n+1}$ (sobre isto conferir Seção 1 do APÊNDICE D). Logo, ν é uma forma fechada.

Agora, vamos mostrar que ν não é exata. Com efeito, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{S^n} \nu = \int_{S^n} j^*\tau = \int_B d\tau = (n+1) \int_B dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} \quad (3.3.21)$$

onde B é a bola em $\mathbb{R}^{n+1}$ cujo bordo é a esfera S^n . Suponhamos, por absurdo, que ν é exata. Nesse caso, existe $\alpha \in \Omega^{n-1}(S^n)$ tal que $\nu = d\alpha$. Novamente, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{\partial S^n} \alpha = \int_{S^n} d\alpha = \int_{S^n} \nu.$$

Porém, $\partial S^n = \emptyset$, o que faz com que $\int_{\partial S^n} \alpha = 0$ e, então, $\int_{S^n} \nu = 0$, o que pela Equação (3.3.21), concluímos que

$$\int_B dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} = 0. \quad (3.3.22)$$

De maneira análoga à demonstração do Lema 3.3.3, segue que

$$\int_B dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} = \text{vol } B > 0, \quad (3.3.23)$$

Porém, as Equações (3.3.22) e (3.3.23) nos dão uma contradição. Sendo assim, ν não é uma forma exata e, portanto, $[\nu] \neq 0$.

Como o módulo $H_{dR}^n(S^n)$ possui dimensão igual a 1, podemos concluir que $[\nu]$ gera o mesmo. $\square$

Lema 3.3.5. *A projeção $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, definida como $\pi(x) = [x]$, é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Consideremos, para cada $i = 1, \dots, n+1$, os abertos $\tilde{U}_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n ; x_i > 0\}$ de S^n e $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n ; x_i \neq 0\}$. Afirmamos que a restrição $\pi|_{\tilde{U}_i^+} : \tilde{U}_i^+ \longrightarrow U_i$ de π é um difeomorfismo. Com efeito, primeiro observe que a inversa de $\pi|_{\tilde{U}_i^+}$ é dada pela aplicação

$$\begin{aligned} (\pi|_{\tilde{U}_i^+})^{-1} : \quad U_i &\longrightarrow \tilde{U}_i^+ \\ [x_1, \dots, x_{n+1}] &\longmapsto \frac{\text{sgn}(x_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2}} (x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

onde $\text{sgn}(x_i) = 1$ se $x_i > 0$ e $\text{sgn}(x_i) = -1$ caso $x_i < 0$. O termo $\text{sgn}(x_i)$ garante a boa definição de $(\pi|_{\tilde{U}_i^+})^{-1}$ e $\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2}$ que a imagem esteja realmente em S^n .

Agora, seja $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \tilde{U}_i^+$, para $i = 1, \dots, n+1$. Note que $S = (0, \dots, 0, -1) \notin \tilde{U}_i^+$, ou seja, $\tilde{U}_i^+ \cap (S^n - \{S\}) = \tilde{U}_i^+$. Logo, $(\tilde{U}_i^+, \phi_S)$ é uma carta local para $(x_1, \dots, x_{n+1})$, onde ϕ_S é dada como no Exemplo C.1.3. Ademais, consideremos a carta local (U_i, f_i) para $\pi|_{\tilde{U}_i^+}(x_1, \dots, x_{n+1})$, onde f_i é dada como no Exemplo C.1.4. Vamos mostrar que

$$f_i \circ \pi|_{\tilde{U}_i^+} \circ \phi_S^{-1} : \phi_S(\tilde{U}_i^+) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$$

é um difeomorfismo. Para isso, seja $(x_1, \dots, x_n) \in \phi_S(\tilde{U}_i^+)$. Então,

$$\begin{aligned}
 (f_i \circ \pi|_{\tilde{U}_i^+} \circ \phi_S^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= (f_i \circ \pi|_{\tilde{U}_i^+}) \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \\
 &= f_i \left(\left[\frac{2x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \right] \right) \\
 &= f_i([x_1, \dots, x_n, (1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2))/2]) \\
 &= \begin{cases} \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \frac{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2x_i} \right), & \text{se } 1 \leq i \leq n; \\ \left(\frac{2x_1}{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}, \dots, \frac{2x_n}{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \right), & \text{se } i = n + 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

ou seja, uma aplicação polinomial, a qual é de classe C^∞ . Ademais, dado $(x_1, \dots, x_n) \in f_i(U_i)$, segue que

$$\begin{aligned}
 (\phi_S \circ (\pi|_{\tilde{U}_i^+}) \circ f_i^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= (\phi_S \circ (\pi|_{\tilde{U}_i^+}))([x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n]) \\
 &= \phi_S \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n x_j^2}} (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{x_n + \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n x_j^2}} (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}), & \text{se } 1 \leq i \leq n - 1; \\ \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n x_j^2}} (x_1, \dots, x_{n-1}, 1), & \text{se } i = n, \end{cases}
 \end{aligned}$$

a qual também é uma aplicação polinomial, ou seja, de classe C^∞ .

Observe que, até o momento, demonstramos que π é um difeomorfismo local em todo ponto de $\bigcup_{i=1}^{n+1} \tilde{U}_i^+ \subset S^n$. Porém, ainda resta mostrar para os pontos de $S^n - \bigcup_{i=1}^{n+1} \tilde{U}_i^+$.

Uma cobertura aberta para $S^n - \bigcup_{i=1}^{n+1} \tilde{U}_i^+$ é dada pela coleção de abertos $\{\tilde{U}_i^-\}_{i=1}^{n+1}$, onde para cada $i = 1, \dots, n + 1$,

$$\tilde{U}_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n ; x_i < 0\}.$$

De maneira análoga à feita para mostrar que $\pi|_{\tilde{U}_i^+} : \tilde{U}_i^+ \rightarrow U_i$ é um difeomorfismo, é possível mostrar que $\pi|_{\tilde{U}_i^-} : \tilde{U}_i^- \rightarrow U_i$ é um difeomorfismo, para cada $i = 1, \dots, n + 1$.

Portanto, concluímos que $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é um difeomorfismo local. $\square$

Exemplo 3.3.9 (Cohomologia de de Rham do espaço projetivo real, [1], Teorema 2.2.1, pp. 6-7). Vamos mostrar neste exemplo que a cohomologia de de Rham do espaço projetivo

real $\mathbb{RP}^n = \frac{S^n}{x \sim -x}$ é

$$H_{dR}^k(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } 0 < k < n, \\ \mathbb{R}, & \text{se } k = n \text{ ímpar}, \\ 0, & \text{se } k = n \text{ par}, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases} \quad (3.3.24)$$

Primeiro, sendo $\mathbb{RP}^n$ um espaço conexo, temos que $H^0(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{R}$.

Agora, consideremos, para cada inteiro $k > 0$, $\varphi^* : \Omega^k(S^n) \longrightarrow \Omega^k(S^n)$ o pullback da aplicação antípoda

$$\begin{aligned} \varphi : S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (-x_1, \dots, -x_{n+1}) \end{aligned}$$

e o conjunto

$$\Omega^k(S^n)^I = \{\omega \in \Omega^k(S^n) ; \varphi^*\omega = \omega\}$$

das chamadas formas *invariantes*. Observe que a derivada exterior $d : \Omega^k(S^n) \longrightarrow \Omega^{k+1}(S^n)$ respeita a invariância no seguinte sentido: caso $\omega \in \Omega^k(S^n)^I$, $d\omega \in \Omega^{k+1}(S^n)$, pois

$$\varphi^*d\omega = d\varphi^*\omega = d\omega.$$

Com isso, concluímos que

$$\Omega^*(S^n)^I : \Omega^0(S^n)^I \xrightarrow{d} \Omega^1(S^n)^I \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^k(S^n)^I \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(S^n)^I \xrightarrow{d} \dots$$

é um subcomplexo de de Rham de $\Omega^*(S^n)$. Além disso, dados $\omega \in \Omega^k(S^n)$, $p \in S^n$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p S^n$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi^*(\varphi^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) &= \varphi^*\omega(\varphi(p))(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k)) = \varphi^*\omega(-p)(-v_1, \dots, -v_k) \\ &= \omega(\varphi(-p))(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k)) = \omega(p)(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

o que nos faz concluir que

$$(\varphi^*)^2 = Id_{\Omega^k(S^n)}, \quad (3.3.25)$$

onde $Id_{\Omega^k(S^n)}$ é a identidade de $\Omega^k(S^n)$.

Para mostrar (3.3.24), primeiro vamos provar que

$$H_{dR}^k(S^n)^I = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < k < n, \\ \mathbb{R}, & \text{se } k = n \text{ ímpar}, \\ 0, & \text{se } k = n \text{ par}, \end{cases} \quad (3.3.26)$$

onde $H_{dR}^k(S^n)^I$ são os grupos de cohomologia de de Rham do subcomplexo $\Omega^*(S^n)^I$.

Afirmamos que a aplicação $i^* : H_{dR}^k(S^n)^I \longrightarrow H_{dR}^k(S^n)$, induzida pela inclusão $i^* : \Omega^k(S^n)^I \longrightarrow \Omega^k(S^n)$, é um homomorfismo injetivo.

De fato, seja $[\omega] \in H^k(S^n)^I$ tal que $[\omega] = i^*[\omega] = 0$ em $H^k(S^n)$, isto é, $\omega = d\tau$, para $\tau \in \Omega^{k-1}(S^n)$. Para provar a injetividade de i^* , devemos demonstrar que $[\omega] = 0$ em $H_{dR}^k(S^n)^I$, ou seja, $\omega = d\eta$, para $\eta \in \Omega^{k-1}(S^n)^I$.

Seja

$$\eta = \frac{\tau + \varphi^*\tau}{2}.$$

Note que

$$\varphi^*\eta = \frac{\varphi^*\tau + (\varphi^*)^2\tau}{2} \stackrel{(3.3.25)}{=} \frac{\varphi^*\tau + \tau}{2} = \eta,$$

ou seja, $\eta \in \Omega^k(S^n)^I$, e

$$\begin{aligned} d\eta &= d\left(\frac{\tau + \varphi^*\tau}{2}\right) = \frac{d\tau + d\varphi^*\tau}{2} = \frac{d\tau + \varphi^*d\tau}{2} \\ &= \frac{\omega + \varphi^*\omega}{2} = \frac{\omega + \omega}{2} = \omega. \end{aligned}$$

Portanto, $[\omega] = 0$ em $H_{dR}^k(S^n)^I$.

Sendo φ^* injetivo e $H_{dR}^k(S^n) = 0$, para $0 < k < n$, temos que $H_{dR}^k(S^n)^I = 0$, para $0 < k < n$.

Agora, vamos analisar o caso em que $k = n$. Ora, sejam $j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão de S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ e ν a n -forma dada como no Lema 3.3.4. Tomemos $\bar{\varphi}$ a extensão natural de φ em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\bar{\varphi}(x) = -x$, para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que, para $x \in S^n$, tem-se que

$$(j \circ \varphi)(x) = j(-x) = -x = -j(x) = (\bar{\varphi} \circ j)(x). \quad (3.3.27)$$

Então,

$$\begin{aligned} \varphi^*\nu &= \varphi^*j^*\tau = (j \circ \varphi)^*\tau \stackrel{(3.3.27)}{=} (\bar{\varphi} \circ j)^*\tau = j^*\bar{\varphi}^*\tau \\ &\stackrel{(D.3.2)}{=} j^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (x_i \circ \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\varphi}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{\varphi}_{n+1}\right) \\ &= -j^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (x_i \circ \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\varphi}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{\varphi}_{n+1}\right) \\ &\stackrel{(x_i \circ \bar{\varphi}) = -x_i}{=} j^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i d\bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\varphi}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{\varphi}_{n+1}\right) \\ &\stackrel{dx_i = -d\bar{\varphi}_i}{=} j^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} j^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} j^*\tau \\ &= (-1)^{n+1} \nu. \end{aligned}$$

Logo, $\nu \in \Omega^n(S^n)^I$ se n é ímpar e $\nu \notin \Omega^n(S^n)^I$ se n é par.

Como $\varphi^* : H_{dR}^n(S^n)^I \longrightarrow H_{dR}^n(S^n) = \mathbb{R}$ é injetiva, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, $H_{dR}^n(S^n)^I = 0$ ou $H_{dR}^n(S^n)^I = \mathbb{R}$, pois

$$\dim H_{dR}^n(S^n)^I = \dim \ker \varphi^* + \dim \operatorname{Im} \varphi^* = 0 + \dim \operatorname{Im} \varphi^* = \dim \operatorname{Im} \varphi^*.$$

Note que ν não é exata, pois caso contrário $\nu = d\alpha$, para $\alpha \in \Omega^{n-1}(S^n)$ e, então,

$$\int_{S^n} \nu = \int_{S^n} d\alpha \stackrel{\text{Teorema de Stokes}}{=} \int_{\partial S^n} \alpha.$$

Como $\partial S^n \neq \emptyset$, $\int_{\partial S^n} \alpha = 0$, uma contradição, pois $\int_{S^n} \nu > 0$ (sobre isto, veja a demonstração do Lema 3.3.4). Ou seja, $[\nu] \neq 0$.

Sendo assim, caso n seja ímpar, o que faz com que $\nu \in \Omega^n(S^n)^I$, temos que

$$\varphi^*[\nu] = [\nu] \neq 0$$

e, portanto, φ^* é não-nula, ou seja, $H_{dR}^n(S^n)^I = \mathbb{R}$.

Caso n seja par, como já visto, $\nu \notin \Omega^n(S^n)^I$. Com isso, como qualquer n -forma diferencial em S^n é gerada por ν , concluímos que não existe uma n -forma invariante em S^n . Portanto, $H_{dR}^n(S^n)^I = 0$, o que termina a demonstração de (3.3.26).

Agora, para provar (3.3.24), basta demonstrar que $H_{dR}^k(\mathbb{RP}^n)$ é isomorfo a $H_{dR}^k(S^n)^I$, para todo inteiro $k \geq 1$. Para isso, provaremos que $\Omega^k(S^n)^I$ é isomorfo a $\Omega^k(\mathbb{RP}^n)$.

Considere a aplicação projeção $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ e seu pullback $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow \Omega^k(S^n)$. Como $[x] = [-x]$, para $x \in S^n$, então $\pi \circ \varphi = \pi$, ou seja

$$\varphi^* \circ \pi^* = (\pi \circ \varphi)^* = \pi^*.$$

Sendo assim,

$$\pi^*(\Omega^k(\mathbb{RP}^n)) \subset \Omega^k(S^n)^I \tag{3.3.28}$$

e, portanto, podemos considerar a aplicação $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow \Omega^k(S^n)^I$, a qual mostraremos ser um isomorfismo.

Note que, dados $\eta \in \Omega^k(S^n)^I$ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{RP}^n)$, temos que para $\pi^*\omega = \eta$, é suficiente e necessário que $\omega(q)(w_1, \dots, w_k) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k)$, para $p \in S^n$ tal que $\pi(p) = q$ e para todos $v_1, \dots, v_k \in T_p S^n$ tais que $d\pi_p(v_1) = w_1, \dots, d\pi_p(v_k) = w_k$. Suponhamos que $\pi^*\omega = \eta$. Ora, note que $\omega(q)(w_1, \dots, w_k) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k)$ se, e somente se,

$$\omega(\pi(p))(d\pi_p(v_1), \dots, d\pi_p(v_k)) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k),$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\pi^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k).$$

Isso faz com que a injetividade de $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow \Omega^k(S^n)^I$ seja clara, pois caso $\pi^*\omega = \eta = \pi^*\bar{\omega}$, para $\omega, \bar{\omega} \in \Omega^k(\mathbb{RP}^n)$, teremos que

$$\omega(q)(w_1, \dots, w_k) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k) = \bar{\omega}(q)(w_1, \dots, w_k).$$

Com isso, $\omega = \bar{\omega}$. Em relação à sobrejetividade de π^* sobre $\Omega^k(S^n)^I$, por (3.3.28), basta mostrar que $\Omega^k(S)^I \subset \pi^*(\Omega^k(\mathbb{RP}^n))$. Ora, dada $\eta \in \Omega^k(S)^I$, devemos encontrar uma k -forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{RP}^n)$ tal que $\pi^*\omega = \eta$. Como π é sobrejetora e, pelo Lema 3.3.5, um difeomorfismo local, ou seja, pela Proposição C.3.1, $d\pi_p : T_p S^n \longrightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{RP}^n$ é um isomorfismo para todo $p \in S^n$, faz sentido definir ω como

$$\omega(q)(w_1, \dots, w_k) = \eta(p)(v_1, \dots, v_k),$$

sendo $q = \pi(p)$ e $w_1 = d\pi_p(v_1), \dots, w_k = d\pi_p(v_k)$, para $p \in S^n$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p S^n$. Pela construção feita anteriormente, temos que $\pi^*\omega = \eta$. Porém, note que $\pi(-p) = q$ e $d\pi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v_i)) = d(\pi \circ \varphi)_p(v_i) \stackrel{\pi \circ \varphi = \pi}{=} d\pi_p(v_k) = w_i$, para cada $i = 1 \dots, k$, o que faz com que

$$\omega(q)(w_1, \dots, w_k) = \eta(\varphi(p))(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k)).$$

A boa definição de ω vale justamente pelo fato de η ser invariante, pois observe que

$$\eta(p)(v_1, \dots, v_k) = \varphi^*\eta(p)(v_1, \dots, v_k) = \eta(\varphi(p))(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k)).$$

Com isso, concluímos que $\pi^*(\Omega^k(\mathbb{RP}^n)) = \Omega^k(S^n)^I$.

Portanto, $\Omega^k(S^n)^I$ e $\Omega^k(\mathbb{RP}^n)$ são isomorfos, o que induz o isomorfismo entre $H^k(S^n)^I$ e $H^k(\mathbb{RP}^n)$, concluindo assim o que queríamos demonstrar. $\diamond$

4 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA SINGULARES

Uma maneira inteligente para representar superfícies é o que chamamos de representação por poliedros, utilizando-se da malha poligonal, ferramenta a qual descreve as superfícies através de uma coleção de polígonos. Essa técnica tem uma aplicação importante, por exemplo, em modelos computacionais (sobre isso veja [6]). No Capítulo 12 de [20], essa técnica é apresentada matematicamente.

Generalizando esse conceito, são introduzidas as cadeias singulares, a partir das quais podemos construir um outro exemplo particular da teoria algébrica apresentada no Capítulo 2, a cohomologia singular. Enquanto a cohomologia de de Rham extrai informações topológicas através de propriedades analíticas, a cohomologia singular, a qual surge naturalmente como o dual algébrico da homologia singular, captura a mesma essência estrutural. Essa convergência de perspectivas — uma analítica e outra puramente topológica — encontra sua expressão máxima no Teorema de de Rham, que será discutido no próximo Capítulo, estabelecendo o isomorfismo entre ambas as teorias para variedades diferenciáveis.

A escrita deste Capítulo tem como referências principais [8], [13], [12], [15] e [25]

4.1 HOMOLOGIA SINGULAR

A homologia singular tem como base o estudo de aplicações contínuas de um simplexo em espaços topológicos arbitrários, transportando assim as propriedades geométricas de simplexos para o espaço de interesse.

4.1.1 Simplexos

No decorrer da Seção, consideremos pontos $v_0, v_1, \dots, v_k$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.1.1 (Pontos independentes). Caso os vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ sejam linearmente independentes, $v_0, v_1, \dots, v_n$ são ditos *pontos independentes*.

Definição 4.1.2 (Combinação afim). Uma combinação do tipo $p = c_0 v_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$, para $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tais que $c_0 + c_1 + \dots + c_k = 1$, é dita uma *combinação afim*. Além disso, caso $c_0, c_1, \dots, c_k \geq 0$, chamaremos p de uma *combinação convexa*.

Proposição 4.1.1. *Dados pontos $v_0, v_1, \dots, v_k$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes se, e somente se, uma combinação afim de $v_0, v_1, \dots, v_k$ é escrita de maneira única, isto é, se*

$$\sum_{i=0}^r c_i v_i = p = \sum_{i=0}^r d_i v_i,$$

com $c_0 + c_1 + \dots + c_k = 1$ e $d_0 + d_1 + \dots + d_k = 1$, então $c_i = d_i$, para $i = 0, \dots, r$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Consideremos duas combinações afins iguais, ou seja,

$$\sum_{i=0}^r c_i v_i = p = \sum_{i=0}^r d_i v_i, \quad (4.1.1)$$

com $c_0 + c_1 + \dots + c_k = 1$ e $d_0 + d_1 + \dots + d_k = 1$. Agora, suponhamos que $v_0, v_1, \dots, v_k$ sejam pontos linearmente independentes. Como

$$c_0 = 1 - (c_1 + \dots + c_k) \quad (4.1.2)$$

e

$$d_0 = 1 - (d_1 + \dots + d_k), \quad (4.1.3)$$

então

$$\begin{aligned} v_0 + \sum_{i=1}^r c_i (v_i - v_0) &= v_0 - (c_1 v_0 + \dots + c_k v_0) + \sum_{i=1}^r c_i v_i \\ &= [1 - (c_1 + \dots + c_k)] v_0 + \sum_{i=1}^r c_i v_i \\ &\stackrel{(4.1.2)}{=} c_0 v_0 + \sum_{i=1}^r c_i v_i = \sum_{i=0}^r c_i v_i. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Análogo à Equação (4.1.4), segue que

$$v_0 + \sum_{i=1}^r d_i (v_i - v_0) = \sum_{i=0}^r d_i v_i. \quad (4.1.5)$$

Por (4.1.1), temos que (4.1.4) = (4.1.5), ou seja,

$$v_0 + \sum_{i=1}^r c_i (v_i - v_0) = v_0 + \sum_{i=1}^r d_i (v_i - v_0),$$

e, então

$$\sum_{i=1}^r c_i (v_i - v_0) = \sum_{i=1}^r d_i (v_i - v_0).$$

Como os vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes, $c_i = d_i$, para $i = 1, \dots, r$. Sendo assim, $c_1 + \dots + c_k = d_1 + \dots + d_k$, logo, (4.1.2) = (4.1.3), concluindo assim que $c_0 = d_0$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que uma combinação afim é escrita de maneira única. Vamos supor, por absurdo, que o conjunto de vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ não seja linearmente independente, ou seja, pelo menos um dos vetores $v_i - v_0$ pode ser escrito com combinação linear dos demais vetores. Suponhamos, sem perda de generalização, que

$$v_1 - v_0 = c_2 (v_2 - v_0) + \dots + c_k (v_k - v_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 - c_2 v_0 - \cdots - c_k v_k + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \\ &= (1 - c_2 - \cdots - c_k) v_0 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k. \end{aligned}$$

Porém, observemos que as combinações v_1 e $(1 - c_2 - \cdots - c_k) v_0 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$ possuem coeficientes diferentes, contradizendo a hipótese. Portanto, concluímos que $v_0, v_1, \dots, v_k$ são independentes. $\square$

Definição 4.1.3 (Simplexo k -dimensional). Quando $v_0, v_1, \dots, v_k$ forem pontos independentes, chamaremos de *simplexo k -dimensional* com vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$ o conjunto de todas as combinações convexas dos pontos independentes $v_0, v_1, \dots, v_k$, denotado por $s = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$.

Definição 4.1.4 (Face de um simplexo). Seja $s = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ um simplexo k -dimensional. Chamaremos o simplexo $\langle v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \rangle$, se fixados $\{i_0, i_1, \dots, i_r\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$, de uma *face* de s .

Agora, seja $s = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ um k -simplexo. Observe que existem $(k + 1)!$ maneiras de ordenar a sequência $(v_0, v_1, \dots, v_k)$. Em relação a isto, diremos que duas ordenações de $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ são equivalentes se cada uma pode ser obtida da outra através de uma permutação par dos $k + 1$ vértices. Por exemplo, dado o 4-simplexo $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$, dizemos que (v_0, v_1, v_2, v_3) é equivalente à ordenação (v_1, v_2, v_0, v_3) , mas não é equivalente à ordenação (v_1, v_0, v_2, v_3) . Esta relação de equivalência nos dá duas classes de equivalência das ordenações de um k -simplexo, as quais chamaremos de *orientações* do simplexo.

Dado um k -simplexo $s = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$, indicaremos por $\mathbf{s} = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ a classe de equivalência da ordenação de s dada por $(v_0, v_1, \dots, v_k)$. Temos, por exemplo, que

$$[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_0, v_3].$$

Escrevamos $-\mathbf{s}$ para indicar $\mathbf{s}$ munido de outra orientação. Por exemplo,

$$[v_0, v_1, v_2, v_3] = -[v_1, v_0, v_2, v_3].$$

Dado $\mathbf{s} = [v_0, v_1, \dots, v_k]$, temos que $[v_i, v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k] = (-1)^i \mathbf{s}$. Além disso, a i -ésima face $s_i = \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k \rangle$ possui orientação induzida por $\mathbf{s}$ dada por

$$\mathbf{s}_i = (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k].$$

4.1.2 Complexo singular

Seja $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{k+1}$, isto é, para cada $i = 0, 1, \dots, k$, e_i é o elemento cuja $(i + 1)$ -ésima coordenada é igual a 1 e nulo nas demais coordenadas.

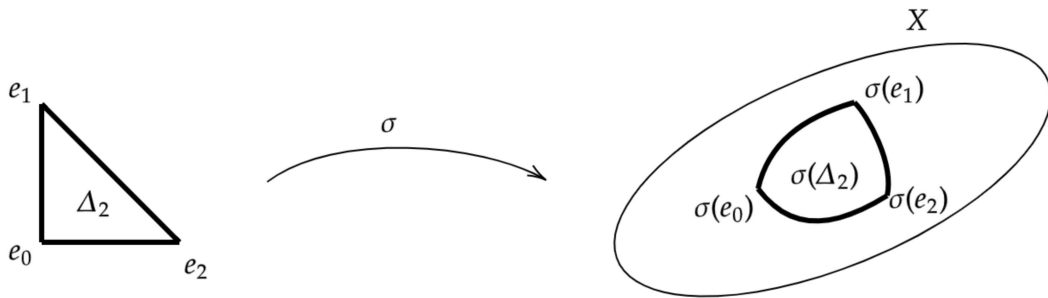
Denotemos por Δ_k o simplexo com vértices $e_0, e_1, \dots, e_k$, ou seja,

$$\Delta_k = [e_0, e_1, \dots, e_k] = \{(t_0, t_1, \dots, t_k); \sum_{i=0}^k t_i = 1 \text{ e } t_j \geq 0, j = 0, \dots, k\}.$$

Definição 4.1.5 (Simplexo singular). Dado um espaço topológico X , uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_k \longrightarrow X$ é dita um *k-simplexo singular* em X .

Um 2-simplexo singular pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – 2-simplexo singular.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Definição 4.1.6 (Cadeias singulares). Seja A um anel qualquer. Os elementos gerados pelos k -simplexos singulares de X sobre o anel A , isto é, elementos da forma

$$\sigma = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i,$$

onde $r \in \mathbb{N}$ qualquer, $n_i \in A$ e cada σ_i é um k -simplexo singular em X , são ditos as *k-cadeias singulares* de X .

Denotemos o conjunto das k -cadeias singulares de X , o qual é um A -módulo livre, por $S_k(X; A)$. Para facilitar a escrita, consideremos no decorrer do Capítulo, salvo menção, $S_k(X)$ como um módulo sobre o anel A .

Observação 4.1.1. O elemento nulo de $S^k(X)$, para cada inteiro $k \geq 0$, é a cadeia singular vazia, a qual representaremos por $\mathbf{0}$.

Observação 4.1.2. Note que uma base para $S^k(X)$, para cada $k \geq 0$, é o conjunto dos k -simplexos singulares, pois, além de gerar $S^k(X)$, é linearmente independente. De fato, seja uma combinação linear finita

$$n_0 \sigma_0 + n_1 \sigma_1 + \dots + n_r \sigma_r = \mathbf{0},$$

sendo $n_i \in A$ e σ_i um k -simplexo singular, para $i = 0, \dots, r$. Porém, não existe combinação linear de simplexos singulares que anule tais simplexos. Logo, $n_0, n_1, \dots, n_r = 0$.

Definição 4.1.7 (Simplexo singular afim). Sejam K um subespaço convexo de $\mathbb{R}^n$ e

$$\alpha(v_0, v_1, \dots, v_k) : \Delta_k \longrightarrow K$$

uma aplicação afim tal que e_i é associado ao ponto $v_i \in K$, para cada $i = 0, \dots, k$. Dizemos que a aplicação $\alpha(v_0, v_1, \dots, v_k)$ é um k -simplexo singular afim.

Definição 4.1.8 (Operador face). Os simplexos singulares afins $\mathcal{F}_{i,k} = \alpha(e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta_k$, para $i = 0, \dots, k$, são chamados os *operadores face* de Δ_k .

Definição 4.1.9 (Operador bordo). Definamos o *operador bordo* k -dimensional $\partial_k : S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$ como

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}.$$

Observe que $\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k} = \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k]$ é a restrição de σ ao $(k-1)$ -simplexo $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k]$. Ademais, note que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Ora, dado $\sigma \in S_k(X)$, segue que

$$\begin{aligned} \partial_{k-1}(\partial_k \sigma) &= \partial_{k-1} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] \right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1}(\sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k]) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k] \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^i (-1)^j (\sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] - \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos o seguinte complexo de cadeias

$$\mathcal{S}(X) : \dots \longrightarrow S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X),$$

dito o *complexo singular* do espaço X .

Definição 4.1.10 (Grupos de homologia singular). O grupo quociente $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$, onde $Z_k(X) = \ker \partial_k$ e $B_k(X) = \text{Im } \partial_{k+1}$, é o *grupo de homologia singular* k -dimensional de X . As classes de equivalências de $H_k(M; A)$ são ditas as *classes de homologia singular* de M k -dimensionais sobre o anel A .

Agora, seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos. Temos que F induz um homomorfismo $F_{\#} : S_k(X) \longrightarrow S_k(Y)$, para cada $k \geq 0$, definido como

$$F_{\#}(\sigma) = F \circ \sigma : \Delta_k \longrightarrow Y. \quad (4.1.6)$$

Afirmamos que

$$F_{\#}\partial_k = \partial_k F_{\#}. \quad (4.1.7)$$

De fato, dado $\sigma \in S_k(X)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \partial_k F_{\#}(\sigma) &= \partial_k(F \circ \sigma) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (F \circ \sigma)[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i F_{\#}(\sigma)[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] \\ &= F_{\#} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] \right) \\ &= F_{\#}(\partial_k \sigma). \end{aligned}$$

Com isso, fica definido um morfismo induzido por F , denotado por $F_* : H_k(X) \longrightarrow H_k(Y)$.

4.2 INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA EM GRUPOS DE HOMOLOGIA SINGULAR

O objetivo desta seção é mostrar que a invariância homotópica entre duas aplicações induz uma homotopia algébrica entre os homomorfismos induzidos. No que se segue, tomemos o intervalo $I = [0, 1]$. Sejam $F, G : X \longrightarrow Y$ aplicações homotópicas, isto é, existe uma aplicação contínua $\mathcal{H} : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

$$\mathcal{H}(x, 0) = F(x) \text{ e } \mathcal{H}(x, 1) = G(x).$$

Sejam $\Delta_k \times \{0\} = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ e $\Delta_k \times \{1\} = [w_0, w_1, \dots, w_k]$. Observe que $\Delta_k \times I$ é a união dos $(k+1)$ -simplexos $[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]$, para $i = 0, \dots, k$, isto é,

$$\Delta_k \times I = \bigcup_{i=0}^k [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k].$$

Agora, definamos um homomorfismo $\mathcal{D}_k : S_k(X) \longrightarrow S_{k+1}(Y)$ como

$$\mathcal{D}_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id)[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k], \quad (4.2.1)$$

onde $\sigma \times Id : \Delta_k \times I \longrightarrow X \times I$ é a aplicação definida como

$$(\sigma \times Id)(p, t) = (\sigma(p), t).$$

Afirmamos que a sequência de homomorfismos D_k é uma homotopia algébrica entre $F_\#$ e $G_\#$. De fato, primeiro temos que

$$\begin{aligned}
\partial_{k+1}\mathcal{D}_k\sigma &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k+1}(\mathcal{H} \circ (\sigma \times Id)) [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&= \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^i (-1)^i (-1)^j \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i}^k (-1)^i (-1)^{j+1} \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k] \right) \\
&= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^i (-1)^j \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&\quad + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^i (-1)^{j+1} \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k].
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{k-1}\partial_k\sigma &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \mathcal{D}_{k-1}\sigma [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=j+1}^k (-1)^j (-1)^{i-1} \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^j (-1)^i \mathcal{D}\mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k] \right) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^j (-1)^{i-1} \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^j (-1)^i \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k].
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Somando as Equações (4.2.2) e (4.2.3), segue que

$$\begin{aligned}
\partial_{k+1}\mathcal{D}_k\sigma + \mathcal{D}_{k-1}\partial_k\sigma &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^i (-1)^j \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&- \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^i (-1)^j \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k] \\
&- \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^j (-1)^i \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^j (-1)^i \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_k] \\
&= \sum_{0 \leq i=j \leq k} \left((-1)^i (-1)^j \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, w_i, \dots, w_k] \right. \\
&+ \left. (-1)^i (-1)^{j+1} \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, \widehat{w_i}, \dots, w_k] \right) \\
&= \sum_{i=0}^k (\mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, w_i, \dots, w_k] \\
&+ \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, \widehat{w_i}, \dots, w_k]) \\
&= \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [w_0, \dots, w_k] - \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, \dots, v_k] \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, \widehat{v_{i+1}}, w_i, \dots, w_k] \\
&+ \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, v_1, \dots, v_i, \widehat{w_i}, \dots, w_k]) \\
&= \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [w_0, \dots, w_k] - \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | [v_0, \dots, v_k] \\
&= \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | \Delta_k \times \{1\} - \mathcal{H} \circ (\sigma \times Id) | \Delta_k \times \{0\} \\
&= G \circ \sigma - F \circ \sigma = G_{\#}(\sigma) - F_{\#}(\sigma).
\end{aligned}$$

Portanto, se $F, G : X \longrightarrow Y$ são homotópicas, podemos concluir que $F_* = G_* : H_k(X) \longrightarrow H_k(Y)$, para cada inteiro $k \geq 0$.

4.3 SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS NA HOMOLOGIA SINGULAR

Como no caso de de Rham, uma ferramenta de auxílio para o cálculo de cohomologias desconhecidas é a sequência de Mayer-Vietoris, a qual será apresentada nessa Seção para o caso singular.

Sejam X um espaço topológico qualquer e $\{U, V\}$ uma cobertura aberta de X . Consideremos então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& U & \\
i_U \nearrow & & \searrow j_U \\
U \cap V & & X, \\
i_V \searrow & & \nearrow j_V \\
& V &
\end{array} \tag{4.3.1}$$

onde i_U e i_V são as inclusões de $U \cap V$ em U e V , respectivamente, e j_U e j_V as inclusões de U e V , respectivamente, em X . Temos o resultado a seguir.

Teorema 4.3.1 (Mayer-Vietoris, [13], p. 356). *Dada uma cobertura aberta $\{U, V\}$ de um espaço topológico X , para cada inteiro $k \geq 0$, existe um homomorfismo $\partial_* : H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V)$, dito homomorfismo de conexão, tal que a sequência*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{j_*} H_k(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots, \quad (4.3.2)$$

com $i_*[\sigma] = ((i_U)_*[\sigma], (i_V)_*[\sigma])$ e $j_*([\sigma], [\tilde{\sigma}]) = (j_U)_*[\sigma] - (j_V)_*[\tilde{\sigma}]$, é exata.

Note que, pelo Corolário 2.4.1, para demonstrar o Teorema 4.3.1, precisaríamos simplesmente mostrar que a sequência

$$0 \rightarrow S_k(U \cap V) \xrightarrow{i_\#} S_k(U) \oplus S_k(V) \xrightarrow{j_\#} S_k(X) \rightarrow 0, \quad (4.3.3)$$

onde $i_\#(\sigma) = (i_U \circ \sigma, i_V \circ \sigma)$ e $j_\#(\sigma, \tilde{\sigma}) = j_U \circ \sigma - j_V \circ \tilde{\sigma}$, é exata para cada inteiro $k \geq 0$, ou seja, mostrar que $i_\#$ é injetiva, $j_\#$ é sobrejetiva e $\ker j_\# = \text{Im } i_\#$. Porém, $j_\#$ não é sobrejetiva, pois, por exemplo, consideremos um k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ cuja imagem não está contida em U ou em V . Mas, observe que qualquer k -cadeia singular contida na imagem de $j_\#$ pode ser escrita como a soma de uma k -cadeia singular contida em U e uma k -cadeia singular contida em V . Porém, como $\sigma(\Delta_k)$ não está contida nem em U nem em V e, além disso, como σ não pode ser escrita como a soma de outras k -cadeias distintas, concluímos que σ não pertence à imagem de $j_\#$.

Para contornar este problema, vamos restringir os espaços da sequência (4.3.3) em subespaços que a tornem uma sequência exata.

Definição 4.3.1 (Cobertura $\mathcal{U}$ -pequeno). Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço topológico X . Dizemos que $\sigma \in S_k(X)$ é $\mathcal{U}$ -pequeno quando qualquer simplexo singular em σ possui imagem em U , para algum $U \in \mathcal{U}$. Escrevamos $S_k^{\mathcal{U}}(X) \subset S_k(X)$ o grupo das k -cadeias singulares $\mathcal{U}$ -pequenas.

Seja σ uma k -cadeia singular $\mathcal{U}$ -pequena. Observe que

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}$$

é $\mathcal{U}$ -pequeno, pois em particular, para cada $i = 0, \dots, k$, $\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}$ está em σ e, portanto, podemos considerar o subcomplexo

$$\mathcal{S}^{\mathcal{U}}(X) : \cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0.$$

Escrevamos $H_k^{\mathcal{U}}(X)$ o grupo de homologia k -dimensional referente a $\mathcal{S}^{\mathcal{U}}(X)$. No restante da Seção, mostraremos que $H_k^{\mathcal{U}}(X)$ é isomorfo a $H_k(X)$, para cada inteiro $k \geq 0$, e que a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k^{\mathcal{U}}(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_k^{\mathcal{U}}(U) \oplus H_k^{\mathcal{U}}(V) \xrightarrow{j_*} H_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}^{\mathcal{U}}(U \cap V) \rightarrow \cdots \quad (4.3.4)$$

é exata, provando assim a exatidão da sequência (4.3.2). Para isso, apresentemos conceitos importantes.

Definição 4.3.2 (Operador cone). Sejam $v_0, v_1, \dots, v_k$ elementos em um subespaço convexo K de $\mathbb{R}^n$. Dada um k -simplexo singular afim

$$\alpha = \alpha(v_0, \dots, v_k) : \Delta_k \longrightarrow K,$$

definamos o *operador cone* em α de um ponto qualquer w de K como o $(k+1)$ -simplexo dado por

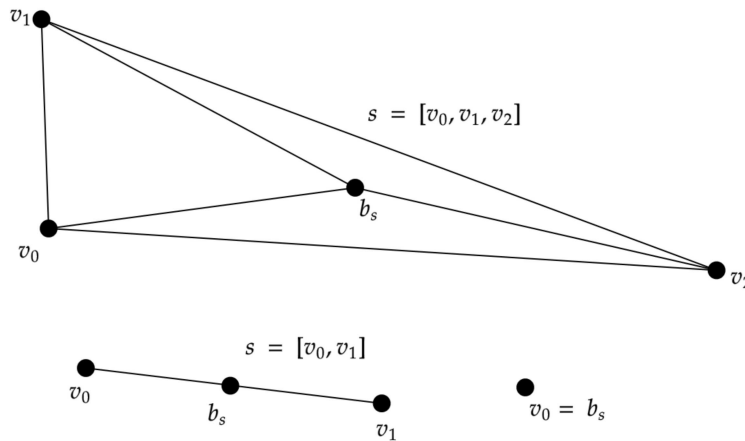
$$w * \alpha = \alpha(w, v_0, v_1, \dots, v_k) : \Delta_{k+1} \longrightarrow K.$$

Definição 4.3.3 (Baricentro de um simplexo). Seja $s = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ um k -simplexo em $\mathbb{R}^n$. O *baricentro* de s é o ponto

$$b_s = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} v_i.$$

Veja a Figura 12.

Figura 12 – Baricentro do simplexos $s = v_0$, $s = [v_0, v_1]$ e $s = [v_0, v_1, v_2]$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Utilizando do conceito de baricentro, construiremos, a partir de uma k -cadeia singular, uma k -cadeia singular $\mathcal{U}$ -pequena. Para isso, dividiremos a k -cadeia em k -cadeias menores de maneira conveniente. Esta divisão será feita por um operador o qual definiremos a seguir.

Primeiro, vamos definir este operador para simplexo singulares afins. O *operador subdivisão singular afim 0-dimensional* é a operação identidade $\mathcal{K}_0 = Id$ do espaço dos 0-simplexos singulares afins. Indutivamente, dado um inteiro $k > 0$, para qualquer k -simplexo singular afim $\alpha : \Delta_k \longrightarrow K$ em um espaço convexo K de $\mathbb{R}^n$, definamos o

operador subdivisão singular afim k -dimensional de α como

$$\mathcal{K}_k \alpha = \alpha(b_k) * \mathcal{K}_{k-1} \partial_k \alpha,$$

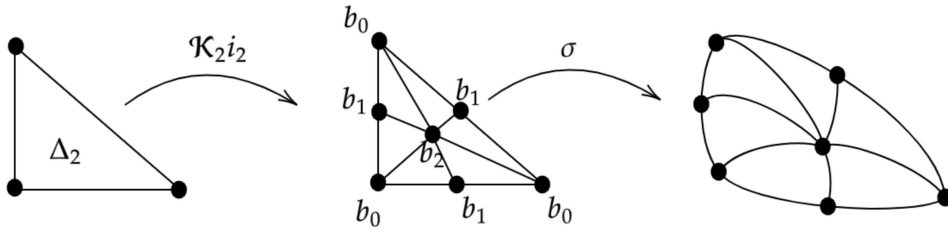
onde b_k é o baricentro de Δ_k . Agora, estenderemos o operador definido acima para simplexos singulares quaisquer.

Definição 4.3.4 (Subdivisão singular). Para cada inteiro $k \geq 0$, definamos o *operador subdivisão singular k -dimensional* como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k : S_k(X) &\longrightarrow S_k(X) \\ \sigma &\longmapsto \mathcal{K}_k \sigma = \sum_{i=0}^r n_i (\sigma_i)_\# (\mathcal{K}_k i_k), \end{aligned}$$

sendo $\sigma = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i$ uma combinação linear finita de k -simplexos singulares e $i_k : \Delta_k \longrightarrow \Delta_k$ a aplicação identidade de Δ_k . Veja Figura 13.

Figura 13 – Subdivisão singular de um 2-simplexo singular.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Lema 4.3.1 ([13], Lema 13.20, p. 360). *Seja α uma k -cadeia singular afim em um espaço convexo K de $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $w \in K$, temos que*

$$\partial_{k+1}(w * \alpha) + w * \partial_k \alpha = \alpha.$$

Lema 4.3.2 ([13], Lema 13.22, pp. 362-363). *Seja X um espaço topológico qualquer. O operador subdivisão singular $\mathcal{K}_k : S_k(X) \longrightarrow S_k(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{K}_k \circ f_\# = f_\# \circ \mathcal{K}_k$, para cada aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$;
2. $\partial_k \circ \mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k-1} \circ \partial_k$;
3. Dadas uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e σ uma k -cadeia singular em X qualquer, existe um inteiro m tal que $\mathcal{K}_k^m \sigma \in \mathcal{U}_k^{\mathcal{U}}(X)$, isto é, $\mathcal{K}_k^m \sigma$ é uma k -cadeia singular $\mathcal{U}$ -pequena em X .

Proposição 4.3.1. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço topológico qualquer X . Então, para cada inteiro $k \geq 0$, o homomorfismo $(i_k)_* : H_k^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_k(X)$, induzido pela inclusão $i_k : S_k^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_k(X)$, é um isomorfismo.*

Demonstração. Primeiro, afirmamos que $(i_k)_*$ é sobrejetivo. Com efeito, seja $[\sigma] \in H_k(X)$. Pelo item (c) do Lema 4.3.2, existe um inteiro m tal que $\mathcal{K}_k^m \sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$. Note que

$$(i_k)_*[\mathcal{K}_k^m \sigma] = [i_k(\mathcal{K}_k^m \sigma)] = [\mathcal{K}_k^m \sigma] \stackrel{(I)}{=} [\sigma]. \quad (4.3.5)$$

Para mostrar a igualdade (I) da Equação (4.3.5), demonstraremos que as aplicações $Id_{S_k(X)}$ e $\mathcal{K}_k^m$, onde $Id_{S_k(X)}$ é a aplicação identidade de $S_k(X)$, são algebricamente homotópicas. Antes disso, vamos construir uma homotopia algébrica entre $Id_{S_k(X)}$ e $\mathcal{K}_k$.

Para $k = 0$, definamos $D_0 : S_0(X) \longrightarrow S_1(X)$ como a aplicação nula. Indutivamente, definamos a aplicação

$$\begin{aligned} D_k : S_k(X) &\longrightarrow S_{k+1}(X) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=0}^r n_i(\sigma_i)_{\#}(b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)), \end{aligned}$$

onde $\sigma = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i$ é uma combinação linear finita de k -simplexos singulares. Na definição de D_k consideramos, para cada $i = 0, \dots, r$, a aplicação $(\sigma_i)_{\#} : S_{k+1}(\Delta_k) \longrightarrow S_{k+1}(X)$, definida como em (4.1.6). Observe que, $b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) : \Delta_{k+1} \longrightarrow \Delta_k$ é o operador cone em $i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k : \Delta_k \longrightarrow \Delta_k$ de b_k .

Vamos demonstrar por indução que, para cada inteiro $k \geq 0$, vale

$$\partial_{k+1} D_k \sigma + D_{k-1} \partial_k \sigma = \sigma - \mathcal{K}_k \sigma, \quad (4.3.6)$$

para todo k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \longrightarrow X$, sendo assim, por linearidade, vale o mesmo para toda k -cadeia singular. Note que, se $k = 0$, então $D_0 = 0 = \partial_0$ e $\mathcal{K}_0 = Id_{S_0(X)}$. Logo, vale (4.3.6). Agora, suponha válida a Equação (4.3.6) para $r = k - 1$. Então, se σ é um

k -simplexo singular, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_{k+1} D_k \sigma &= \partial_{k+1} \sigma_{\#} (b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&\stackrel{(4.1.7)}{=} \sigma_{\#} \partial_{k+1} (b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&\stackrel{\text{Lema 4.3.1}}{=} \sigma_{\#} ((i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&\quad - b_k * (\partial_k i_k - \partial_k \mathcal{K}_k i_k - \partial_k D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&= \sigma_{\#} (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&\quad - \sigma_{\#} (b_k * (\partial_k i_k - \partial_k \mathcal{K}_k i_k - \partial_k D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&\stackrel{\text{Lema 4.3.2(b)}}{=} \sigma_{\#} (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&\quad - \sigma_{\#} (b_k * (\partial_k i_k - \mathcal{K}_{k-1} \partial_k i_k - \partial_k D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&\stackrel{\text{Indução.}}{=} \sigma_{\#} (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&\quad - \sigma_{\#} (b_k * (\partial_k i_k - \mathcal{K}_{k-1} \partial_k i_k - (Id - \mathcal{K}_{k-1}) \partial_k i_k + D_{k-2} \partial_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&\stackrel{\partial \partial = 0}{=} \sigma_{\#} (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&\quad - \sigma_{\#} (b_k * (\partial_k i_k - \mathcal{K}_{k-1} \partial_k i_k - \partial_k i_k + \mathcal{K}_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&= \sigma_{\#} (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k) \\
&= \sigma_{\#} i_k - \sigma_{\#} \mathcal{K}_k i_k - \sigma_{\#} D_{k-1} \partial_k i_k \\
&\stackrel{\sigma_{\#} i_k = \sigma \circ i_k = \sigma}{=} \sigma - \sigma_{\#} \mathcal{K}_k i_k - \sigma_{\#} D_{k-1} \partial_k i_k \\
&\stackrel{\text{Lema 4.3.2(a)}}{=} \sigma - \mathcal{K}_k \sigma_{\#} i_k - \sigma_{\#} D_{k-1} \partial_k i_k \\
&\stackrel{(II)}{=} \sigma - \mathcal{K}_k \sigma - D_{k-1} \partial_k \sigma_{\#} i_k \\
&= \sigma - \mathcal{K}_k \sigma - D_{k-1} \partial_k \sigma,
\end{aligned}$$

o que demonstra a Equação (4.3.6). A igualdade (II) é válida pois dada $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua, temos que $D_k f_{\#} = f_{\#} D_k$. Ora, dado σ um k -simplexo singular, segue que

$$\begin{aligned}
D_k f_{\#} \sigma &= D_k (f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_{\#} (b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)) \\
&= f_{\#} \sigma_{\#} (b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)) = f_{\#} D_k \sigma.
\end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência de homomorfismos D_k é uma homotopia algébrica para $\mathcal{K}_k$ e $Id_{S_k(X)}$.

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
Id_{S_k(X)} - \mathcal{K}_k^m &= (Id_{S_k(X)} - \mathcal{K}_k) \cdot (Id_{S_k(X)} + \mathcal{K} + \mathcal{K}^2 + \cdots + \mathcal{K}^{m-1}) \\
&\stackrel{(4.3.6)}{=} (\partial_{k+1} D_k + D_{k-1} \partial_k) \mathcal{L}_m = \partial_{k+1} D_k \mathcal{L}_m + D_{k-1} \partial_k \mathcal{L}_m \\
&\stackrel{\text{Lema 4.3.2(b)}}{=} \partial_{k+1} D_k \mathcal{L}_m + D_{k-1} \mathcal{L}_m \partial_k,
\end{aligned}$$

sendo $\mathcal{L}_m = Id_{S_k(X)} + \mathcal{K} + \mathcal{K}^2 + \cdots + \mathcal{K}^{m-1}$ e, portanto, a sequência de homomorfismos $D_k \cdot \mathcal{L}_m : S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X)$ é uma homotopia algébrica entre $Id_{S_k(X)}$ e $\mathcal{K}^m$, o que demonstra a igualdade (I). Com isso, $(i_k)_*$ é sobrejetivo.

Resta mostrar que $(i_k)_*$ é injetiva. Ora, seja $[\sigma] \in H_k^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $(i_k)_*[\sigma] = 0$, isto é, existe $\beta \in S_{k+1}(X)$ tal que $\sigma = i_k \sigma = \partial_{k+1} \beta$. Pelo Lema 4.3.2(c), existe um inteiro m tal que $\mathcal{K}_{k+1}^m \beta \in S_{k+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Como

$$\partial_{k+1} \mathcal{K}_{k+1}^m \beta \stackrel{\text{Lema 4.3.2(b)}}{=} \mathcal{K}_k^m \partial_{k+1} \beta = \mathcal{K}_k^m \sigma,$$

então

$$[\sigma] \stackrel{\text{(III)}}{=} [\mathcal{K}_k^m \sigma] = 0. \quad (4.3.7)$$

Observe que é claro que $\mathcal{K}_k^m \sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$. Porém, para que a igualdade (III) seja válida para cadeias $\mathcal{U}$ -pequenas, devemos mostrar que

$$D_k(S_k^{\mathcal{U}}(X)) \subset S_{k+1}^{\mathcal{U}}(X).$$

Com efeito, dado γ um k -simplexo singular $\mathcal{U}$ -pequeno, temos que

$$D_k \gamma = \gamma_{\#}(b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)) = \gamma \circ (b_k * (i_k - \mathcal{K}_k i_k - D_{k-1} \partial_k i_k)),$$

ou seja, $D_k \gamma \in S_{k+1}(X)$. Sendo assim, é válida a igualdade (4.3.7), o que conclui que $[\sigma] = 0$, ou seja, $(i_k)_*$ é injetiva.

Portanto, concluímos assim que $(i_k)_*$ é um isomorfismo. $\square$

Observação 4.3.1. Uma outra forma de demonstrar a Proposição 4.3.1 seria encontrando uma inversa homotópica, $\varphi : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{U}}(X)$, para a inclusão $i : \mathcal{S}^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$. Tal inversa homotópica pode ser encontrada na demonstração do Teorema 2, pp. 159-162, de [15]. Sendo assim, i induz um isomorfismo $i_* : H_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_*(X)$.

Dada a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U, V\}$, para mostrar a exatidão da sequência (4.3.4), vamos provar que a sequência

$$0 \rightarrow S_k^{\mathcal{U}}(U \cap V) \xrightarrow{i_{\#}} S_k^{\mathcal{U}}(U) \oplus S_k^{\mathcal{U}}(V) \xrightarrow{j_{\#}} S_k^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0, \quad (4.3.8)$$

com $i_{\#}(\sigma) = (i_U \circ \sigma, i_V \circ \sigma)$ e $j_{\#}(\sigma, \tilde{\sigma}) = j_U \circ \sigma - j_V \circ \tilde{\sigma}$, é exata, para cada inteiro $k \geq 0$, utilizando assim o Corolário 2.4.1 como argumento.

Em primeiro lugar, observe que dado $\sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(U \cap V)$ tal que $i_{\#}(\sigma) = (i_U \circ \sigma, i_V \circ \sigma) = (0, 0)$. É claro que $\sigma = 0$, provando assim a injetividade de $i_{\#}$.

Agora, seja $\sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(U \cap V)$. Tem-se que

$$j_{\#}(i_{\#} \sigma) = j_{\#}(i_U \circ \sigma, i_V \circ \sigma) = j_U \circ i_U \circ \sigma - j_V \circ i_V \circ \sigma = \sigma - \sigma = 0,$$

ou seja, $\text{Im } i_{\#} \subset \ker j_{\#}$. Além disso, tomemos $(\sigma, \tilde{\sigma}) \in \ker j_{\#}$, isto é, $j_{\#}(\sigma, \tilde{\sigma}) = 0$. Então, $j_U \sigma = j_V \tilde{\sigma}$. Sendo j_U e j_V as inclusões de U e V em X , respectivamente, temos que $\sigma = \tilde{\sigma}$ e, portanto, temos que $\sigma, \tilde{\sigma} \in S_k^{\mathcal{U}}(U \cap V)$. Logo,

$$i_{\#}(\sigma) = (\sigma, \tilde{\sigma}),$$

ou seja, $\ker j_{\#} \subset \operatorname{Im} i_{\#}$. Então, $\operatorname{Im} i_{\#} = \ker j_{\#}$.

Para terminar, resta-nos mostrar a sobrejetividade de $j_{\#}$. Certamente, dado $\sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$ temos, por definição, que qualquer simplexo de σ ou está contido em U ou está todo contido em V . Vamos supor, sem perda de generalidade, que σ é um k -simplexo singular $\mathcal{U}$ -pequeno em X e está contido em U . Então, $j_{\#}(\sigma, 0) = j_U \sigma = \sigma$. Por linearidade, podemos concluir que se $\sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$, existe $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tilde{\sigma}}) \in S_k^{\mathcal{U}}(U) \oplus S_k^{\mathcal{U}}(V)$ tal que $\sigma = j_{\#}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tilde{\sigma}})$, concluindo assim que $j_{\#}$ é sobrejetiva.

Portanto, temos que a sequência (4.3.8) é exata, para cada inteiro $k \geq 0$, e, então, pelo Corolário 2.4.1, a sequência de Mayer-Vietoris (4.3.4) é exata. Pela Proposição 4.3.1, a sequência (4.3.2) é igual à sequência (4.3.4) e, então, é exata, o que conclui o Teorema 4.3.1.

4.4 COHOMOLOGIA SINGULAR

Para o caso singular, a cohomologia será definida como o dual algébrico da homologia singular.

Definição 4.4.1 (Cocadeias singulares). Seja X um espaço topológico. As k -cocadeias singulares em X são os homomorfismos $S_k(X) \rightarrow A$, isto é, os elementos do conjunto $\operatorname{Hom}_A(S_k(X), A)$, o qual denotaremos por $S^k(X; A)$.

Lembrando que o operador cobordo k -dimensional $\delta_p : S^k(X; A) \rightarrow S^{k+1}(X; A)$, definido na Subseção 2.2.2, é o adjunto do operador bordo $\partial_{k+1} : S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X)$, isto é, $\delta_k = \partial_{k+1}^{\top}$, o qual é definido como $(\partial_{k+1}^{\top} u) \cdot \sigma = u(\partial_{k+1} \sigma)$, para $u \in S^k(X; A)$ e $\sigma \in S_{k+1}(X)$.

Consideremos então o complexo de cocadeias

$$\mathcal{S}(X; A) : 0 \rightarrow S^0(X; A) \xrightarrow{\delta_0} S^1(X; A) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \rightarrow S^k(X; A) \xrightarrow{\delta_k} S^{k+1}(X; A) \rightarrow \cdots$$

Definição 4.4.2 (Grupos de cohomologia singular). O grupo quociente $H^k(X; A) = Z^k(X; A)/B^k(X; A)$, onde $Z^k(X; A) = \ker \delta_k$ e $B^k(X; A) = \operatorname{Im} \delta_{k-1}$, é o grupo de cohomologia singular k -dimensional de X sobre o anel A . As classes de equivalência de $H^k(X; A)$ são ditas as classes de cohomologia singular de M k -dimensionis sobre o anel A .

Sejam $F : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos quaisquer e $F_{\#} : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ definida como em (4.1.6). Tomemos a aplicação adjunta de $F_{\#}$ dada por $F_{\#}^{\top} : S^k(Y; A) \rightarrow S^k(X; A)$ definida, para $u \in S^k(Y; A)$ e $\sigma \in S_k(Y)$, como

$$(F_{\#}^{\top} u) \cdot \sigma = u(F_{\#} \sigma).$$

Note que, para $u \in S^k(Y; A)$ e $\sigma \in S_{k+1}(X)$

$$\begin{aligned}\delta_k F_{\#}^{\top} u(\sigma) &= F_{\#}^{\top} u \partial_{k+1}(\sigma) = u F_{\#} \partial_{k+1}(\sigma) \stackrel{F_{\#} \partial = \partial F_{\#}}{=} u \partial_{k+1} F_{\#}(\sigma) \\ &= \delta_k u F_{\#}(\sigma) = F_{\#}^{\top} \delta_k u(\sigma)\end{aligned}$$

e, portanto, $\delta_k F_{\#}^{\top} = F_{\#}^{\top} \delta_k$. Com isso, fica induzido um morfismo, induzido por $F_{\#}^{\top}$, denotado por $F^* : H^k(Y; A) \longrightarrow H^k(X; A)$ definido como

$$F^*[u] = [F_{\#}^{\top} u] ; [u] \in H^k(X; A).$$

Observação 4.4.1. Análogo ao que foi feito na homologia singular, vamos mostrar que se duas aplicações contínuas entre espaço topológicos $F, G : X \longrightarrow Y$ forem homotópicas, então $F_{\#}^{\top}, G_{\#}^{\top} : \mathcal{S}(Y; A) \longrightarrow \mathcal{S}(X; A)$ são algebricamente homotópicas. Com efeito, como demonstrado na Seção 4.2, $F_{\#}$ e $G_{\#}$ são algebricamente homotópicas, isto é, existe uma sequência de homomorfismo $\mathcal{D}_k : S_k(X) \longrightarrow S_{k+1}(Y)$, para $k \geq 0$ inteiro, tal que

$$\partial_{k+1} \mathcal{D}_k - \mathcal{D}_{k-1} \partial_k = F_{\#} - G_{\#} : S_k(X) \longrightarrow S_k(Y). \quad (4.4.1)$$

Pela Observação 2.3.1 temos que o operador adjunto de $\mathcal{D}$, definido em (4.2.1), será uma homotopia algébrica entre $F_{\#}^{\top}$ e $G_{\#}^{\top}$ e, portanto, $F^* = G^* : H^*(Y; A) \longrightarrow H^*(X; A)$.

O objetivo a seguir é mostrar que, a partir de uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U, V\}$, conseguimos obter uma sequência de Mayer-Vietoris, em cohomologia singular, dada por

$$\cdots \rightarrow H^k(X; A) \xrightarrow{j^*} H^k(U; A) \oplus H^k(V; A) \xrightarrow{i^*} H^k(U \cap V; A) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(X; A) \rightarrow \cdots \quad (4.4.2)$$

onde as aplicações i e j são representadas no diagrama (4.3.1) e ∂^* é o adjunto do homomorfismo de conexão ∂_* .

Para cada inteiro $k \geq 0$, consideremos a sequência dual da sequência dada como em (4.3.8), isto é,

$$0 \rightarrow S_{\mathcal{U}}^k(X; A) \xrightarrow{j_{\#}^{\top}} S_{\mathcal{U}}^k(U; A) \oplus S_{\mathcal{U}}^k(V; A) \xrightarrow{i_{\#}^{\top}} S_{\mathcal{U}}^k(U \cap V; A) \rightarrow 0, \quad (4.4.3)$$

com $S_{\mathcal{U}}^k(X; A) = \text{Hom}_A(S_k^{\mathcal{U}}(X), A) \subset S^k(X; A)$, $S_{\mathcal{U}}^k(U; A) = \text{Hom}_A(S_k^{\mathcal{U}}(U), A) \subset S^k(U; A)$, $S_{\mathcal{U}}^k(V; A) = \text{Hom}_A(S_k^{\mathcal{U}}(V), A) \subset S^k(V; A)$ e $S_{\mathcal{U}}^k(U \cap V; A) = \text{Hom}_A(S_k^{\mathcal{U}}(U \cap V), A) \subset S^k(U \cap V; A)$. Além disso, lembremos que as aplicações $i_{\#}^{\top}$ e $j_{\#}^{\top}$ são os adjuntos de $i_{\#}$ e $j_{\#}$, respectivamente.

Dado um espaço topológico qualquer, denotemos por $H_{\mathcal{U}}^k(Y; A)$ o chamado *grupo de cohomologia singular $\mathcal{U}$ -pequeno k -dimensional*, obtido, como na Definição 4.4.2, através do complexo

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(Y; A) : 0 \rightarrow S_{\mathcal{U}}^0(Y; A) \xrightarrow{\delta_0 = \partial_0^{\top}} S_{\mathcal{U}}^1(Y; A) \xrightarrow{\delta_1 = \partial_1^{\top}} \cdots \rightarrow S_{\mathcal{U}}^k(Y; A) \xrightarrow{\delta_k = \partial_k^{\top}} S_{\mathcal{U}}^{k+1}(Y; A) \rightarrow \cdots,$$

onde $S_{\mathcal{U}}^k(Y; A) = \text{Hom}_A(S_{\mathcal{U}}^k(Y), A) \subset S^k(Y; A)$.

Pela Observação 4.1.2, $S_k(X)$ é um módulo livre, para cada inteiro $k \geq 0$, ou seja, pelo Lema 2.4.1, a sequência (4.4.3) é exata, a qual, então, induz a sequência exata de Mayer-Vietoris de cohomologia singular

$$\cdots \rightarrow H_{\mathcal{U}}^k(X; A) \xrightarrow{j^*} H_{\mathcal{U}}^k(U; A) \oplus H_{\mathcal{U}}^k(V; A) \xrightarrow{i^*} H_{\mathcal{U}}^k(U \cap V; A) \xrightarrow{\partial^*} H_{\mathcal{U}}^{k+1}(X) \rightarrow \cdots \quad (4.4.4)$$

Como no caso da homologia singular, podemos concluir que $H_{\mathcal{U}}^k(Y; A) \cong H^k(Y; A)$, para cada inteiro $k \geq 0$ e Y espaço topológico qualquer. Com efeito, pela Observação 4.3.1, temos que o homomorfismo $i : \mathcal{S}_{\mathcal{U}}(Y) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ possui um inverso homotópico $\varphi : \mathcal{S}(Y) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{U}}(Y)$. Seja $D_k : S_k(Y) \rightarrow S_{k+1}(Y)$ a sequência representando a homotopia algébrica de $\varphi \circ i$ e $\text{Id}_{S_k(Y)}$, identidade de $S_k(Y)$. Como visto na Equação (2.3.2), a sequência de aplicações adjuntas $(D_k)^\top : S^k(Y; A) \rightarrow S^{k-1}(Y; A)$ é uma homotopia algébrica entre $(\varphi \circ i)^\top = \varphi^\top \circ i^\top$ e $(\text{Id}_{S_k(Y)})^\top = \text{Id}_{S^k(Y; A)}$, identidade de $S^k(Y; A)$. Logo, $\varphi^\top$ e $i^\top$ são homomorfismos inversamente homotópicos, ou seja, $i^\top : \mathcal{S}(Y; A) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{U}}(Y; A)$ induz um isomorfismo $(i_k)^* : H^k(Y; A) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^k(Y; A)$, para cada inteiro $k \geq 0$. Portanto, a sequência

$$\cdots \rightarrow H^k(X; A) \xrightarrow{j^*} H^k(U; A) \oplus H^k(V; A) \xrightarrow{i^*} H^k(U \cap V; A) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(X) \rightarrow \cdots$$

é exata, pois a mesma é igual à sequência (4.4.4), a qual já concluímos a exatidão.

4.5 COMPLEXOS SINGULARES DIFERENCIÁVEIS

Até o momento, todo conteúdo apresentado em relação à homologia e cohomologia singulares foi feito para espaços topológicos quaisquer. A ideia a partir de agora é aplicar esta teoria para variedades diferenciáveis, com coeficientes no corpo dos reais. Consideremos no restante do trabalho, M uma variedade diferenciável.

Definição 4.5.1 (Simplexo singular diferenciável). Seja $\sigma : U \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável definida em um aberto U de $\mathbb{R}^{k+1}$ contendo o simplexo Δ_k . Dizemos que a restrição $\sigma|_{\Delta_k} : \Delta_k \rightarrow M$ é um *simplexo singular diferenciável*.

Definição 4.5.2 (Cadeias singulares diferenciáveis). Os elementos gerados pelos k -simplexos singulares diferenciáveis de M sobre $\mathbb{R}$, isto é, elementos da forma

$$\sigma = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i,$$

onde $r \in \mathbb{N}$ qualquer, $n_i \in \mathbb{R}$ e cada σ_i é um k -simplexo singular singular em M , são ditos as *k-cadeias singulares diferenciáveis* de M .

Para cada $k \geq 0$, denotemos por $S_k^\infty(M) \subset S_k(M)$ o submódulo de dimensão k das k -cadeias singulares diferenciáveis em M . Ademais, sejam $\mathcal{S}^\infty(M) \subset \mathcal{S}(M)$ o subcomplexo

das cadeias singulares diferenciáveis e $H_k^\infty(M)$, os chamados *grupos de homologia singular diferenciável* k -dimensionais de $\mathcal{S}^\infty(M)$, cujos elementos são

$$[\sigma] = \{\sigma + \partial_k \alpha ; \alpha \in S_{k+1}^\infty(M)\},$$

com $\sigma \in S_k^\infty(M)$ tal que $\partial_k \sigma = 0$, ditas *classes de homologia singular diferenciável*.

Demonstraremos a seguir que toda classe de homologia singular é uma classe de homologia singular diferenciável, isto é, $H_k(M) = H_k^\infty(M)$.

Lema 4.5.1 ([12], Lema 18.8, pp. 474-478). *Seja o intervalo $I = [0, 1]$. Para cada k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \longrightarrow M$, existe uma aplicação contínua $\mathcal{H}_\sigma : \Delta_k \times I \longrightarrow M$ tal que:*

1. $\mathcal{H}_\sigma$ é uma homotopia entre $\sigma(x) = \mathcal{H}_\sigma(x, 0)$ e o simplexo singular diferenciável $\tilde{\sigma}(x) = \mathcal{H}_\sigma(x, 1)$;
2. Para cada aplicação face $\mathcal{F}_{i,k} : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta_k$, $\mathcal{H}_{\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}} = \mathcal{H}_\sigma \circ (\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I)$, onde $\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I : \Delta_{k-1} \times I \longrightarrow \Delta_k \times I$ definida como

$$(\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I)(x, t) = (\mathcal{F}_{i,k}(x), t);$$

3. $\mathcal{H}_\sigma$ é uma homotopia constante $\mathcal{H}_\sigma(x, t) = \sigma(x)$, para qualquer k -simplexo singular diferenciável σ .

Proposição 4.5.1. *A aplicação $\iota_* : H_k^\infty(M) \longrightarrow H_k(M)$, induzida pela inclusão $\iota : S_k^\infty(M) \longrightarrow S_k(M)$, é um isomorfismo.*

Demonstração. Para demonstrar o isomorfismo entre $H_k^\infty(M)$ e $H_k(M)$ construiremos, para cada inteiro $k \geq 0$, um homomorfismo $\mu : S_k(M) \longrightarrow S_k^\infty(M)$ o qual induz a aplicação inversa $\mu_* : H_k(M) \longrightarrow H_k^\infty(M)$ de ι_* .

Para isso, definamos μ como

$$\mu(\sigma) = \mathcal{H}_\sigma \circ i_1,$$

onde $\mathcal{H}_\sigma$ é a homotopia cuja existência é dada no Lema 4.5.1 e $i_1 : \Delta_k \longrightarrow \Delta_k \times I$ é o mergulho diferenciável dado por $i_1(x) = (x, 1)$. Note que, dado $\sigma \in S_k(M)$, temos que

$$\begin{aligned} \mu \partial \sigma &= \mu \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \mathcal{F}_{i,k} \right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \mu(\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}) \stackrel{\text{Definição de } \mu}{=} \sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{H}_{\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}} \circ i_1 \\ &\stackrel{\text{Lema 4.5.1}}{=} \sum_{i=0}^k \mathcal{H}_\sigma \circ (\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I) \circ i_1 = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\mathcal{H}_\sigma \circ i_1) \circ \mathcal{F}_{i,k} = \partial(\mathcal{H}_\sigma \circ i_1) = \partial \mu \sigma. \end{aligned}$$

A quinta igualdade vale, pois dado $x \in \Delta_k$, segue que

$$(\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I)(i_1(x)) = (\mathcal{F}_{i,k} \times Id_I)(x, 1) = (\mathcal{F}_{i,k}(x), 1) = i_1(\mathcal{F}_{i,k}(x)).$$

Concluimos então que $\mu\partial = \partial\mu$, ou seja, fica bem definido um morfismo $\mu : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{S}^\infty(M)$, induzindo, desta maneira, um homomorfismo $\mu_* : H_k(M) \longrightarrow H_k^\infty(M)$, para cada $k \geq 0$, o qual afirmamos ser inverso a $\iota_* : H_k^\infty(M) \longrightarrow H_k(M)$.

Com efeito, observe que, para $x \in \Delta_k$,

$$(\mu \circ \iota)(\sigma(x)) = \mu(\sigma(x)) = (\mathcal{H}_\sigma \circ i_1)(x) = \mathcal{H}_\sigma(x, 1) \stackrel{\text{Lema 4.5.1}}{=} \sigma(x),$$

ou seja, $\mu \circ \iota$ é a identidade de $\mathcal{S}_k^\infty(M)$. Sendo assim, $\mu_* \circ \iota_* = (s \circ \iota)_*$ é a identidade de $H_k^\infty(M)$.

Resta-nos mostrar que $\iota_* \circ \mu_*$ é a identidade de $H_k(M)$. Para isso, mostraremos que $\iota \circ s$ e $Id_{\mathcal{S}_k(M)}$ são homomorfismo algebricamente homotópicos. Primeiro, sejam $E_i^0 = (e_i, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ e $E_i^1 = (e_i, 1) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, com $i = 0, \dots, k$. Observe que

$$\Delta_k \times \{0\} = [E_0^0, \dots, E_k^0]$$

e

$$\Delta_k \times \{1\} = [E_0^1, \dots, E_k^1].$$

Seja a aplicação $\mathcal{G}_k : \mathcal{S}_k(M) \longrightarrow \mathcal{S}_{k+1}(M)$ definida como $\mathcal{G}_k\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{H}_\sigma \circ K_{i,k}$, onde, para cada $i = 0, \dots, k$, $K_{i,k} : \Delta_{k+1} \longrightarrow \Delta_k \times I$ é o $(k+1)$ -simplexo singular afim $K_{i,k} = \alpha(E_0^0, \dots, E_i^0, E_i^1, \dots, E_k^1)$. Vamos mostrar que $\mathcal{G}$ é uma homotopia algébrica entre $\iota \circ \mu$ e $Id_{\mathcal{S}_k(M)}$ isto é,

$$\partial\mathcal{G}_k + \mathcal{G}_{k-1}\partial = \iota \circ \mu - I_{\mathcal{S}_k(M)}.$$

Ora, dado $j = 0, \dots, k$, tem-se que

$$\begin{aligned} K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} &= K_{j,k}[[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{k+1}]] = \alpha(E_0^0, \dots, \widehat{E_j^0}, E_j^1, \dots, E_k^1) \\ &= \alpha(E_0^0, \dots, E_{j-1}^0, E_j^1, \dots, E_k^1). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} &= K_{j-1,k}[[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{k+1}]] = \alpha(E_0^0, \dots, E_{j-1}^0, \widehat{E_{j-1}^0}, \dots, E_k^1) \\ &= \alpha(E_0^0, \dots, E_{j-1}^0, E_j^1, \dots, E_k^1) \end{aligned}$$

e, então,

$$K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} = \alpha(E_0^0, \dots, E_{j-1}^0, E_j^1, \dots, E_k^1) = K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1}. \quad (4.5.1)$$

Com isso, em particular,

$$K_{k,k} \circ \mathcal{F}_{k+1,k+1} = \alpha(E_0^0, \dots, E_k^0) = i_0 \quad (4.5.2)$$

e

$$K_{0,k} \circ \mathcal{F}_{0,k+1} = \alpha(E_0^1, \dots, E_k^1) = i_1, \quad (4.5.3)$$

onde $i_0 : \Delta_k \longrightarrow \Delta_k \times I$ é dado por $i_0(x) = (x, 0)$.

Ademais, para $0 \leq j \leq i \leq k-1$, temos que

$$\begin{aligned} K_{i+1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} &= K_{i+1,k}|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{k+1}]} = \alpha(E_0^0, \dots, E_j^0, \dots, E_{i+1}^0, E_{i+1}^1, \dots, E_k^1) \\ &= (\mathcal{F}_{j,k} \times Id_I) \circ K_{i,k-1}. \end{aligned}$$

Para $0 \leq i < j \leq k$, segue que

$$\begin{aligned} K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j+1,k+1} &= K_{i,k}|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{j+1}}, \dots, e_{k+1}]} = \alpha(E_0^0, \dots, E_i^0, E_i^1, \dots, \widehat{E_j^1}, \dots, E_k^1) \\ &= (\mathcal{F}_{j,k} \times Id_I) \circ K_{i,k-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathcal{F}_{j,k} \times Id_I) \circ K_{i,k-1} = \begin{cases} K_{i+1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1}, & i \geq j \\ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j+1,k+1}, & i < j. \end{cases} \quad (4.5.4)$$

Seja $\sigma \in S_k(M)$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{k-1}(\partial\sigma) &= \mathcal{G}_{k-1} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma \circ \mathcal{F}_{j,k} \right) \stackrel{\text{Linearidade}}{=} \sum_{j=0}^k (-1)^j \mathcal{G}_{k-1}(\sigma \circ \mathcal{F}_{j,k}) \\ &= \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \mathcal{H}_{\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}} \circ K_{i,k-1} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma \circ \mathcal{F}_{j,k}} \circ K_{i,k-1} \\ &\stackrel{\text{Lema 4.5.1}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ (\mathcal{F}_{j,k} \times Id_I) \circ K_{i,k-1} \\ &\stackrel{(4.5.4)}{=} \sum_{0 \leq j \leq i \leq k-1} (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i+1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j+1,k+1}. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{G}_k\sigma) &= \partial \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k} \right) \stackrel{\text{Linearidade}}{=} \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial(\mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1}. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Separando os termos do somatório (4.5.6) para os quais $i < j-1$, $i = j-1$, $i = j$ e $i > j$, tem-se que

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{G}_k\sigma) &= \sum_{0 \leq i < j-1 \leq k} (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} + \sum_{1 \leq j \leq k+1} (-1)^{2j-1} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^{2j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \mathcal{H}_{\sigma} \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1}. \end{aligned}$$

Substituindo $j = j' + 1$ no primeiro somatório e $i = i' + 1$ no quarto e observando que $(-1)^{2j-1} = -1$ e $(-1)^{2j} = 1$, teremos que

$$\begin{aligned}
\partial(\mathcal{G}_k\sigma) &= \sum_{0 \leq i < j' \leq k} (-1)^{i+j'+1} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j'+1,k+1} - \sum_{1 \leq j \leq k+1} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq j \leq k} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} + \sum_{0 \leq j \leq i' \leq k-1} (-1)^{i'+1+j} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{i'+1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\
&= - \sum_{0 \leq i < j' \leq k} (-1)^{i+j'} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{i,k} \circ \mathcal{F}_{j'+1,k+1} - \sum_{1 \leq j \leq k+1} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq j \leq k} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\
&\quad - \sum_{0 \leq j \leq i' \leq k-1} (-1)^{i'+j} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{i'+1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1}. \tag{4.5.7}
\end{aligned}$$

Logo, somando as Equações (4.5.5) e (4.5.7), segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{k-1}(\partial\sigma) + \partial(\mathcal{G}_k\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq k} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} - \sum_{1 \leq j \leq k+1} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{j-1,k} \circ \mathcal{F}_{j,k+1} \\
&\stackrel{(4.5.1)}{=} \mathcal{H}_\sigma \circ K_{0,k} \circ \mathcal{F}_{0,k+1} - \mathcal{H}_\sigma \circ K_{k,k} \circ \mathcal{F}_{k+1,k+1} \\
&\stackrel{(4.5.2) \text{ e } (4.5.3)}{=} \mathcal{H}_\sigma \circ i_1 - \mathcal{H}_\sigma \circ i_0 = s(\sigma) - \sigma,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{G}_{k-1}\partial + \partial\mathcal{G}_k = \mu \circ \iota - Id_{S_k(M)}$.

Portanto, $\mu_* \circ \iota_*$ é a aplicação identidade de $H_k(M)$, ou seja, μ_* é o homomorfismo inverso de ι_* e, assim, concluímos que $H_k(M)$ é isomorfo a $H_k^\infty(M)$. $\square$

5 COHOMOLOGIA DE DE RHAM vs COHOMOLOGIA SINGULAR

Construir os conceitos teóricos da cohomologia singular é uma tarefa relativamente simples, porém, calcular grupos de cohomologia singular de certas variedades, de maneira direta, não apresenta a mesma simplicidade. Para contornar esta dificuldade, existe um resultado que relaciona as cohomologias de de Rham e singular, o chamado Teorema de de Rham.

A escrita deste Capítulo é baseada em [12], Seção O Teorema de de Rham, pp. 480-486.

5.1 HOMOMORFISMO DE DE RHAM

Definição 5.1.1 (Integral de uma forma sobre um simplexo singular diferenciável). Sejam ω uma k -forma diferencial definida em M e $\sigma : \Delta_k \longrightarrow M$ um k -simplexo singular diferenciável. Definamos a *integral de ω sobre σ* como

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega. \quad (5.1.1)$$

Agora, caso $\sigma = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i \in S_k^{\infty}(M)$, onde cada $n_i \in \mathbb{R}$ e σ_i um k -simplexo singular diferenciável, a *integral de ω sobre σ* é dada por

$$\int_{\sigma} \omega = \sum_{i=0}^r n_i \int_{\sigma_i} \omega. \quad (5.1.2)$$

Um fato importante é que, para todo inteiro $k \geq 0$, $H^k(M; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_k(M); \mathbb{R})$. Sobre isto, confira a Proposição 2.2.1. Sendo assim, pela Proposição 4.5.1, faz sentido definir, o que chamaremos de *homomorfismo de de Rham* de M , a aplicação linear

$$\begin{aligned} \xi_M : H_{dR}^k(M) &\longrightarrow H^k(M; \mathbb{R}) \\ [\omega] &\longmapsto \xi_M[\omega], \end{aligned}$$

onde

$$\xi_M[\omega][\sigma] = \int_{\tilde{\sigma}} \omega,$$

com $[\sigma] \in H_k(M) \cong H_k^{\infty}(M)$ e $\tilde{\sigma}$ uma k -cadeia singular diferenciável, tal que $\partial_k \tilde{\sigma} = 0$, representando a classe $[\sigma]$.

Para provar a boa definição do homomorfismo de de Rham, consideremos o Teorema a seguir.

Teorema 5.1.1 (Teorema de Stokes Simplicial). *Sejam M uma variedade diferenciável k -dimensional, $\sigma \in S_k^{\infty}(M)$ e $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Então*

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega.$$

Demonstração. Primeiro demonstraremos o Teorema para o caso em que σ é um k -simplexo singular diferenciável. Nesse caso, como Δ_k é uma variedade k -dimensional, pelo Teorema de Stokes (Versão Clássica),

$$\int_{\sigma} d\omega \stackrel{(5.1.1)}{=} \int_{\Delta_k} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_k} d\sigma^* \omega \stackrel{\text{Observação D.6.1}}{=} \int_{\partial\Delta_k} \sigma^* \omega.$$

Afirmamos que

$$\int_{\partial\Delta_k} \sigma^* \omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Com efeito, como $\partial\Delta_k = \bigcup_{i=0}^k \partial_i \Delta_k$, temos, por definição, que

$$\int_{\partial\Delta_k} \sigma^* \omega = \sum_{i=0}^k \int_{\partial_i \Delta_k} \sigma^* \omega. \quad (5.1.3)$$

Pelo método da Mudança de Variáveis, sendo as aplicações face $\mathcal{F}_{i,k} : \Delta_{k-1} \rightarrow \partial_i \Delta_k$, para $i = 0, \dots, k$, difeomorfismos, segue que

$$\int_{\partial_i \Delta_k} \sigma^* \omega = \pm \int_{\Delta_{k-1}} \mathcal{F}_{i,k}^* \sigma^* \omega. \quad (5.1.4)$$

O sinal da integral $\int_{\Delta_{k-1}} \mathcal{F}_{i,k}^* \sigma^* \omega$ está relacionado com o comportamento da orientação de $\partial_i \Delta_k$ de acordo com $\mathcal{F}_{i,k}$. Note que $\mathcal{F}_{i,k}$ leva $[e_0, e_1, \dots, e_{k-1}]$ em $\langle e_0, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k \rangle$, com orientação induzida por $[e_0, e_1, \dots, e_k]$, ou seja,

$$(-1)^i [e_0, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k].$$

Logo, $\mathcal{F}_{i,k}$ preserva a orientação se, e somente se, i é par. Com isso, por (5.1.3) e (5.1.4), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_k} \sigma^* \omega &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} \mathcal{F}_{i,k}^* \sigma^* \omega = \sum_{i=0}^k \int_{\Delta_{k-1}} (\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k})^* \omega \stackrel{(5.1.1)}{=} \sum_{i=0}^k \int_{\sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}} \omega \\ &= \int_{\partial\sigma} \omega, \end{aligned}$$

pois $\partial\sigma = \bigcup_{i=0}^k \sigma \circ \mathcal{F}_{i,k}$. □

Agora, sejam ω uma $(k-1)$ -forma diferencial fechada e $\sigma, \tilde{\sigma}$ duas k -cadeias singulares diferenciáveis representando a mesma classe de homologia. Então, temos que $\sigma - \tilde{\sigma} = \partial_{k+1} \gamma$, para $\gamma \in S_{k+1}^\infty(M)$. Temos que,

$$\xi_M[\omega][\sigma] - \xi_M[\omega][\tilde{\sigma}] = \int_{\sigma} \omega - \int_{\tilde{\sigma}} \omega \stackrel{(5.1.2)}{=} \int_{\partial\gamma} \omega \stackrel{\text{Stokes Simplicial}}{=} \int_{\gamma} d\omega = 0,$$

pois ω é uma forma diferencial fechada, ou seja, $\xi_M[\omega][\sigma] = \xi_M[\omega][\tilde{\sigma}]$

Ademais, sejam ω e $\tilde{\omega}$ $(k-1)$ -formas diferenciais fechadas representando a mesma classe de cohomologia de de Rham e σ uma k -cadeia singular diferenciável representando uma classe de homologia. Note que, $\omega - \tilde{\omega} = d_{k-2}\eta$, com $\eta \in \Omega^{k-2}(M)$. Então,

$$\xi_M[\omega][\sigma] - \xi_M[\tilde{\omega}][\sigma] = \int_{\sigma} \omega - \int_{\sigma} \tilde{\omega} = \int_{\sigma} \omega - \tilde{\omega} = \int_{\sigma} d\eta \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\sigma} \eta = 0,$$

pois $\partial_k \sigma = \mathbf{0}$, ou seja, $(k-1)$ -simplexo singular vazio. Sendo assim, $\xi_M[\omega] = \xi_M[\tilde{\omega}]$.

Com as duas afirmações demonstradas acima, concluímos que o homomorfismo de de Rham ξ está bem definido.

5.2 TEOREMA DE DE RHAM

Nesta Seção, enunciaremos e demonstraremos o clássico Teorema de de Rham, o qual relaciona a cohomologia de de Rham com a cohomologia singular de uma variedade qualquer sobre o corpo dos reais. Antes de enunciar o Teorema, serão apresentados uma série de resultados que sistematicamente auxiliarão na prova do mesmo.

Lema 5.2.1 ([12], Proposição 18.13, pp. 482-484). *Sejam M e N variedades diferenciáveis arbitrárias. Para cada inteiro $k \geq 0$, temos as seguintes propriedades.*

1. *Se $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, então $\xi_M F^* = F^* \xi_N$, isto é, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^k(N) & \xrightarrow{F^*} & H_{dR}^k(M) \\ \xi_N \downarrow & & \downarrow \xi_M \\ H^k(N; \mathbb{R}) & \xrightarrow{F^*} & H^k(M; \mathbb{R}) \end{array}$$

é comutativo.

2. *Caso $\{U, V\}$ seja uma cobertura de M , então, $\xi_M \Delta = \tilde{\Delta} \xi_{U \cap V}$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H_{dR}^k(M) \\ \xi_{U \cap V} \downarrow & & \downarrow \xi_M \\ H^{k-1}(U \cap V; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & H^k(M; \mathbb{R}) \end{array}$$

onde Δ e $\tilde{\Delta}$ são os homomorfismos de conexão das sequências de Mayer-Vietoris da cobertura $\{U, V\}$ referentes à cohomologia de de Rham e singular, respectivamente.

Definição 5.2.1 (Variedades de de Rham). Chamaremos uma variedade diferenciável M de *variedade de de Rham* quando o homomorfismo de de Rham de M for um isomorfismo.

A definição anterior carece de utilidade taxonômica, uma vez que o Teorema de de Rham a reduz a um pleonasmo: no domínio das variedades diferenciáveis, toda estrutura é,

por herança, de de Rham. Isso explica que a definição foi introduzida apenas para facilitar a escrita.

Lema 5.2.2. *Seja $M = \coprod_j M_j$ a união disjunta uma família enumerável de n -variedades diferenciáveis $\{M_j\}$. Então, $H_{dR}^k(M)$ e $\prod_j H_{dR}^k(M_j)$, para cada inteiro $k \geq 0$, são isomorfos.*

Demonstração. Sejam a inclusão $i_j : M_j \longrightarrow M$ de M_j em M e a aplicação

$$\begin{aligned} i^* : H_{dR}^k(M) &\longrightarrow \prod_j H_{dR}^k(M_j) \\ [\omega] &\longmapsto (i_j^*[\omega]) = ([\omega|_{M_j}]). \end{aligned}$$

Primeiro, vamos mostrar que i^* está bem definida. Ora, tomemos $\omega, \omega' \in \Omega^k(M)$ formas fechadas tais que $[\omega] = [\omega']$, isto é, existe uma $(k-1)$ -forma diferencial α em M tal que $\omega - \omega' = d\alpha$. Temos que

$$i^*[\omega] = ([\omega|_{M_j}]) = ([\omega'|_{M_j}]) = i^*[\omega].$$

A segunda igualdade vale, pois $\omega|_{M_j} - \omega'|_{M_j} = (\omega - \omega')|_{M_j} = (d\alpha)|_{M_j} = d\alpha|_{M_j}$.

Agora, afirmamos que i^* é um isomorfismo, sendo i_j^* a aplicação induzida por i_j . De fato, seja $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$ tal que $i^*[\omega] = 0$, isto é, $[\omega|_{M_j}] = 0$, para todo j . Com isso, para cada j , existe $\alpha_j \in \Omega^{k-1}(M_j)$ tal que $\omega|_{M_j} = d\alpha_j$. Consideremos a $(k-1)$ -forma diferencial α definida em M onde $\alpha|_{M_j} = \alpha_j$. Observe que α é uma forma diferencial de classe C^∞ , pois por construção as componentes M_j são abertas e disjuntas em M . Como $(d\alpha)|_{M_j} = d(\alpha|_{M_j}) = d\alpha_j = \omega|_{M_j}$, concluímos que $\omega = d\alpha$, o que demonstra que $[\omega] = 0$, ou seja, i^* é injetiva. Em relação à sobrejetividade de i^* , seja $([\omega_j]) \in \prod_j H_{dR}^k(M_j)$. Definamos $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\omega|_{M_j} = \omega_j$. Pelo mesmo argumento anterior, ω é uma forma diferencial de classe C^∞ . Logo,

$$i^*[\omega] = ([\omega|_{M_j}]) = ([\omega_j]),$$

o que prova que i^* é sobrejetora, concluindo-se assim que i^* é um isomorfismo. $\square$

Lema 5.2.3. *Seja $M = \coprod_j M_j$ a união disjunta uma família enumerável de n -variedades diferenciáveis $\{M_j\}$. Então, $H^k(M; \mathbb{R})$ e $\prod_j H^k(M_j; \mathbb{R})$, para cada inteiro $k \geq 0$, são isomorfos.*

Demonstração. Como na Proposição 5.2.2, consideremos a inclusão $i_j : M_j \longrightarrow M$ de M_j em M . Seja a aplicação

$$\begin{aligned} (i_j)_\# : S_k(M_j; \mathbb{R}) &\longrightarrow S_k(M; \mathbb{R}) \\ \sigma_j &\longmapsto i_j \circ \sigma_j \end{aligned}$$

induzida por i_j . Note que, como $M_j \subset M$, temos em particular que $\sigma_j \in S_k(M; \mathbb{R})$. Abusando da notação, podemos escrever $i_j \circ \sigma_j = \sigma_j$. Agora, tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} i_j^* : H^k(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow H^k(M_j; \mathbb{R}) \\ [u] &\longmapsto i_j^*[u] = [(i_j)_\#^\top u]. \end{aligned}$$

Por definição, observe que $((i_j)_\#^\top u)\sigma_j = u((i_j)_\# \sigma_j) = u(\sigma_j)$, para todo $\sigma_j \in S_k(M_j; \mathbb{R})$, e, então, $(i_j)_\#^\top u = u_j$, onde $u_j = u|_{S_k(M_j; \mathbb{R})}$ é a restrição de $u : S_k(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ a $S_k(M_j; \mathbb{R})$. Logo, $i_j^*[u] = [u_j]$. Portanto, de maneira análoga à demonstração da Proposição 5.2.2, é possível provar que

$$\begin{aligned} i^* : H^k(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow \prod_j H^k(M_j; \mathbb{R}) \\ [u] &\longmapsto (i^*[u]) = ([u_j]) \end{aligned}$$

está bem definida e é um isomorfismo. $\square$

Lema 5.2.4. *Seja $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de variedades de de Rham. A união disjunta $M = \coprod_{i \in \mathbb{N}} M_i$ é uma variedade de de Rham.*

Demonstração. Pelo Lema 5.2.1, para cada inteiro $k \geq 0$ e $j \in \mathbb{N}$, os homomorfismos

$$i_j^* : H_{dR}^k(M) \longrightarrow H_{dR}^k(M_j)$$

e

$$i_j^* : H^k(M; \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(M_j; \mathbb{R}),$$

induzidas pela inclusão $i_j : M_j \longrightarrow M$ de M_j em M , tornam comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^k(M) & \xrightarrow{i_j^*} & H_{dR}^k(M_j) \\ \xi_M \downarrow & & \downarrow \xi_{M_j} \\ H^k(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_j^*} & H^k(M_j; \mathbb{R}) \end{array}$$

ou seja,

$$\xi_{M_j} i_j^* = i_j^* \xi_M. \quad (5.2.1)$$

Agora, note que o homomorfismo

$$\begin{aligned} \prod_j \xi_{M_j} : \prod_j H_{dR}^k(M_j) &\longrightarrow \prod_j H^k(M_j; \mathbb{R}) \\ ([\omega_j]) &\longmapsto (\xi_{M_j}[\omega_j]) \end{aligned}$$

é naturalmente um isomorfismo. Afirmamos que

$$\prod_j \xi_{M_j} i^* = i^* \xi_M, \quad (5.2.2)$$

onde i^* são os isomorfismos definidos nas demonstrações dos Lemas 5.2.2 e 5.2.3. Com efeito, seja $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$. Então,

$$\begin{aligned} \prod_j \xi_{M_j} i^* [\omega] &= \prod_j \xi_{M_j} ([\omega|_{M_j}]) = (\xi_{M_j} [\omega|_{M_j}]) = (\xi_{M_j} i_j^* [\omega]) \stackrel{(5.2.1)}{=} (i_j^* \xi_M [\omega]) \\ &= i^* \xi_M [\omega], \end{aligned}$$

o que demonstra (5.2.2). Portanto, $\xi_M = (i^*)^{-1} \prod_j \xi_{M_j} i^*$ é um isomorfismo, pois $(i^*)^{-1}$, $\prod_j \xi_{M_j}$ e i^* são isomorfismos, ou seja, M é de de Rham. $\square$

Lema 5.2.5. *Toda subconjunto aberto convexo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade de de Rham.*

Demonstração. Como todo aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ é contrátil, pelo Lema de Poincaré (Teorema 3.2.1), $H_{dR}^k(U) = 0$, para cada inteiro $k > 0$. Além disso, pelo mesmo argumento anterior, concluímos, pela Proposição 18.5(a) de [12], p. 472, que $H^k(U; \mathbb{R}) = 0$, para cada inteiro $k > 0$. Logo, para cada inteiro $k > 0$, $\xi_U : H_{dR}^k(U) \longrightarrow H^k(U; \mathbb{R})$ é um isomorfismo trivial. Agora, novamente pelo Lema de Poincaré, $H_{dR}^0(U) = \mathbb{R}$, ou seja, $\dim H_{dR}^0(U) = 1$. Ademais, pela Proposição 18.3(a) de [12], pp. 470-471, para qualquer $p \in U$, o grupo de homologia $H_0(\{p\})$ é gerado pela classe de homologia do 0-simplexo singular $\sigma : \Delta_0 \longrightarrow \{p\}$, ou seja, $\dim H_0(U) = 1$. Logo, sendo $H^0(U; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_0(U); \mathbb{R})$, pela Proposição 2.2.1, temos que $\dim H^0(U; \mathbb{R}) = 1$, por ser o dual do espaço vetorial $H_0(U)$. Nesse caso, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, ou $\xi_U : H_{dR}^0(U) \longrightarrow H^0(U; \mathbb{R})$ é uma aplicação nula ou é um isomorfismo. Observe que, dados um 0-simplexo singular $\sigma : \Delta_0 \longrightarrow U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma constante igual a 1 em todo U . Observe que f é fechada. Segue então que

$$\xi_U[f][\sigma] = \int_{\sigma} f = \int_{\Delta_0} \sigma^* f = \int_{\Delta_0} f \circ \sigma = (f \circ \sigma)(e_0) = 1.$$

$\square$

Definição 5.2.2 (Cobertura de de Rham). Dizemos que uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}$ de uma variedade diferenciável é de de Rham caso cada aberto U_λ é uma variedade de de Rham e toda interseção finita $U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_r}$ é uma variedade de de Rham.

Lema 5.2.6. *Toda variedade M que possua uma cobertura de de Rham finita é uma variedade de de Rham.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}_{i=1}^r$ uma cobertura de de Rham finita de uma variedade M . Vamos provar, por indução em r , que M é de de Rham. Caso $r = 1$, $M = U_1$, ou seja,

sendo U_1 de de Rham, M é de de Rham. Agora, para $r = 2$, escrevamos $U_1 = U$ e $U_2 = V$. Considerando as sequências de Mayer-Vietoris de de Rham e singular em relação à cobertura $\{U, V\}$, obtemos o seguinte diagrama, o qual é comutativo pelo Lema 5.2.1.

$$\begin{array}{ccc}
H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) & \xrightarrow{\xi_{U \amalg V}} & H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{dR}^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\xi_{U \cap V}} & H^{k-1}(U \cap V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{dR}^k(M) & \xrightarrow{\xi_M} & H^k(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) & \xrightarrow{\xi_{U \amalg V}} & H^k(U) \oplus H^k(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{dR}^k(U \cap V) & \xrightarrow{\xi_{U \cap V}} & H^k(U \cap V).
\end{array}$$

Pelos Lemas 5.2.2 e 5.2.3, $H_{dR}^k(U \amalg V)$ é isomorfo a $H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V)$ e $H^k(U \amalg V; \mathbb{R})$ é isomorfo a $H^k(U; \mathbb{R}) \oplus H^k(V; \mathbb{R})$. Com isso, pelo Lema 5.2.4, $\xi_{U \amalg V} : H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V)$ e $\xi_{U \amalg V} : H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V)$ são isomorfismos, além disso, por hipótese, $\xi_{U \cap V} : H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^{k-1}(U \cap V)$ e $\xi_{U \cap V} : H_{dR}^k(U \cap V) \rightarrow H^k(U \cap V)$ também são isomorfismos. Com isso, pelo Lema dos Cinco (Proposição 2.4.1), $\xi_M : H_{dR}^k(M) \rightarrow H^k(M)$ é um isomorfismo e, então, M é uma variedade de de Rham. Por hipótese de indução, vamos supor que o resultado é válido para $3 \leq i \leq r$. Afirmamos que se $\{U_i\}_{i=1}^{r+1}$ é uma cobertura de de Rham para a variedade M , então M é uma variedade de de Rham. De fato, escrevamos $U = U_1 \cup \dots \cup U_r$ e $V = U_{r+1}$. Note que U , por hipótese de indução, e V são de de Rham e, como $U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^r U_i\right) \cap U_{r+1} = (U_1 \cap U_{r+1}) \cup \dots \cup (U_r \cap U_{r+1})$ é de de Rham, novamente por hipótese de indução, pois $\{U_i \cap U_{r+1}\}_{i=1}^r$ é uma cobertura composta por r abertos, concluímos que $M = U \cup V$ é uma variedade de de Rham. $\square$

Definição 5.2.3 (Base de de Rham). Dizemos que uma cobertura de de Rham é uma *base de de Rham* para uma variedade M caso seja uma base para a topologia de M .

Definição 5.2.4 (Função de exaustão). Seja X um espaço topológico qualquer. Uma *função de exaustão* é uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}((-\infty, c])$, para cada $c \in \mathbb{R}$, é um subconjunto compacto e $\bigcup_{c \in \mathbb{R}} f^{-1}((-\infty, c]) = X$.

Lema 5.2.7. Toda variedade que possua uma base de de Rham é uma variedade de de Rham.

Demonstração. Sejam M uma variedade com uma base de de Rham dada por $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de exaustão para M . Para cada inteiro positivo m , definamos os

subconjuntos

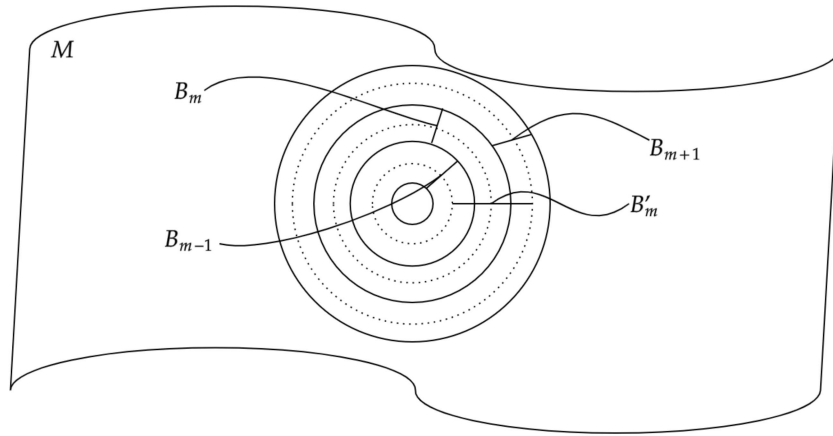
$$B_m = f^{-1}([m, m+1])$$

e

$$B'_m = f^{-1}((m-1/2, m+3/2))$$

de M . Observe na Figura 14 que $B_m \subset B'_m$.

Figura 14 – Esboço dos subconjuntos B_m e B'_m de M .



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Além disso, pela continuidade de f , o subconjunto B'_m é um aberto de M . Logo, para cada $p \in B_m$, existe um aberto base U_m^p de $\{U_\lambda\}$ tal que

$$p \in U_m^p \subset B'_m.$$

Temos então uma cobertura aberta $\{U_m^p\}_{p \in B_m}$ para B_m . Ademais, como $B_m \subset f^{-1}((-\infty, m+1])$, o qual já vimos ser compacto por definição, B_m é compacto, pois pela continuidade de f , B_m é fechado. Então, a cobertura $\{U_m^p\}$ possui uma subcobertura finita $\{U_m^{p_i}\}_{i=1}^{r_m}$. Denotemos, para cada inteiro positivo m , o conjunto

$$C_m = \bigcup_{i=1}^{r_m} U_m^{p_i}.$$

Pelo Lema 5.2.6, C_m é de de Rham. Sendo cada U_m^p um aberto contido em B'_m , temos que $C_m \subset B'_m$, ou seja, C_m intersecta $C_{\tilde{m}}$ somente quando $\tilde{m} = m-1$, $\tilde{m} = m$ ou $\tilde{m} = m+1$. Com isso, podemos concluir que se m é ímpar, ou $\tilde{m}$ é par, igual a $m-1$ ou igual a $m+1$, ou $\tilde{m}$ é ímpar, igual a m . Sendo assim, podemos tomar as uniões disjuntas

$$U = \bigcup_{m \text{ ímpar}} C_m$$

e

$$V = \bigcup_{m \text{ par}} C_m.$$

Pelo Lema 5.2.4, U e V são de de Rham. Além disso, pelo comentário feito anteriormente

$$U \cap V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (C_m \cap C_{m+1}),$$

a qual é uma união disjunta. Observe que

$$C_m \cap C_{m+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{r_m} U_m^{p_i} \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{r_{m+1}} U_{m+1}^{p'_j} \right),$$

o que podemos escrever como uma união finita de interseções do tipo $U_m^{p_i} \cap U_{m+1}^{p'_j}$, a qual é de de Rham, por definição. Com isso, pelo Lema 5.2.6, $C_m \cap C_{m+1}$ é de de Rham para todo inteiro positivo m e, então, novamente pelo Lema 5.2.4, $U \cap V$ é de de Rham. Portanto, pelo Lema 5.2.6, $M = U \cup V$ é de de Rham, pois $\{U, V\}$ é uma cobertura finita de de Rham para M . $\square$

Com os resultados mostrados acima, a prova do Teorema de de Rham fica relativamente simples.

Teorema 5.2.1 (Teorema de de Rham). *Toda variedade diferenciável é de de Rham.*

Demonstração. Seja M uma n -variedade diferenciável qualquer. Note que, pela Proposição C.1.1, M possui uma base β onde cada um de seus elementos é homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, a qual é uma base de de Rham; pois pelo Lema 5.2.5, cada bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é de de Rham, ou seja, cada elemento de β é de de Rham. Portanto, pelo Lema 5.2.7, temos que M é uma variedade de de Rham. $\square$

6 CONCLUSÃO

Realizamos, neste trabalho, um estudo rigoroso das cohomologias de de Rham e singular. A abordagem algébrica feita no Capítulo 2, uma fundamentação comum da teoria dos complexos de cadeias e cocadeias, garantiu uma base sólida para a compreensão dos casos particulares vistos nos capítulos 3 e 4.

Os cálculos dos grupos de de Rham de casos particulares nos fez assimilar técnicas utilizadas na Topologia Algébrica, como a sequência de Mayer-Vietoris por exemplo, mostrando a praticidade de tais ferramentas. No capítulo sobre a cohomologia singular, observa-se que não são apresentados exemplos, o que seria considerado um trabalho redundante no contexto das variedades sobre o corpo dos reais pois os cálculos são basicamente os mesmos em relação à cohomologia de de Rham. O ponto culminante desta dissertação foi a demonstração do Teorema de de Rham, consolidando um isomorfismo natural, o chamado homomorfismo de de Rham, entre as duas teorias quando calculadas em variedades e sobre o corpo dos reais.

A análise comparativa demonstrou que, embora a cohomologia singular possua uma construção teórica mais robusta para espaços topológicos gerais, a cohomologia de de Rham oferece um método de cálculo mais direto e intuitivo no contexto das variedades diferenciáveis. Assim, este trabalho não apenas apresentou a prova de um dos teoremas fundamentais da topologia diferencial, mas também reforçou a profunda conexão entre a análise de funções diferenciáveis e a topologia geométrica de um espaço.

REFERÊNCIAS

- 1 ANGHAMMAR, Oscar. **Singular and de Rham cohomology for the Grassmannian**. 2015. Master's thesis - Department of Mathematical Sciences, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden, 2015.
- 2 BOOTHBY, William M. **An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**. 1. ed. New York : Academic Press, 1975.
- 3 CARTAN, Élie. **Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff**. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3, Volume 16 (1899), pp. 239-332. doi: 10.24033/asens.467
- 4 CARTAN, Élie. **Sur la structure des groupes de transformations finis et continus**. 1894. 156 f. Thèse (Doctorat ès sciences mathématiques) – Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1894.
- 5 CARTAN, Élie. **Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos**. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, v. 187, p. 196-198, 1928.
- 6 CRANE, Keenan; GOES, Fernando de; DESBRU, Mathieu; SCHRÖDER, Peter. **Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus**. Anaheim, California : ACM, 2013. Disponível em: <https://www.cs.cmu.edu/~kmc Crane/Projects/DDG/>. Acesso em: 28 de janeiro de 2026.
- 7 CARMO, Manfredo P. do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Revisado por: Manfredo P. do Carmo e Leny A. Cavalcante. Rio de Janeiro : SBM, 2005.
- 8 HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2002.
- 9 HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra**. 1.ed. New York, NY : Springer, 1974.
- 10 KINSEY, L. Christine. **Topology os Surfaces**. 1.ed. New York : Springer, 1993.
- 11 LANGE, Serge. **Algebra**. Rev. 3.ed. New York, NY : Springer, 2002.
- 12 LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**. 2.ed. New York, NY : Springer, 2012.
- 13 LEE, John M. **Introduction to topological manifolds**. 2.ed. New York, NY : Springer, 2010.
- 14 EILENBERG, Samuel. Singular Homology Theory **Annals of Mathematics**, v. 45, n. 3, p. 407-447, 1944. Supl. 3.
- 15 LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. 2.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2012.
- 16 LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 1.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.
- 17 LIMA, Elon Lages. **Análise real**, v. 3, 1.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.

- 18 LIMA, Elon Lages. **Fundamental groups and covering spaces**. Translated by Jonas Gomes. 1.ed. Natick, Massachusetts : A K Peters, 2019.
- 19 LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, v. 2, 12.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2020.
- 20 MUNKRES, James R. **Topology**. 2.ed. Hoboken, New Jersey : Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- 21 NOGUEIRA, Pablo Augusto Santos. **Teorema de Stokes via formas diferenciais**. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil, 2025. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/matematica/curso/bacharelado-em-matematica/tcc-trabalho-de-conclusao-de-curso/>. Acesso em: 07 de janeiro de 2026.
- 22 POINCARÉ, Henri. Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique, Paris, v. 1, p. 1-121, 1895.
- 23 RASUL, Parvez. **De Rham Cohomology of some spaces**. pp. 2-10. Maharashtra, Índia : IITB Math, 2020. Disponível em: <https://www.math.iitb.ac.in/~ronnie/Fall2020/Cohomology-computations.pdf>. Acesso em: 19 de setembro de 2025.
- 24 RHAM, Georges de. **Sur l'Analysis Situs des variétés à n dimensions**. 1931. 86 f. Thèse (Doctorat ès sciences mathématiques) – Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1931.
- 25 SPANIER, Edwin H. **Algebraic Topology**. 1.ed. New York, NY : Springer, 1994.
- 26 TU, Loring W. **An introduction to manifolds**. 2.ed. New York, NY : Springer, 2010.

APÊNDICE A – Álgebra Abstrata

Neste apêndice serão enunciados conceitos algébricos básicos necessários para o entendimento do texto. O mesmo é baseado em [9] e [11].

A.1 MÓDULOS

No que se segue, iremos expor as definições básicas da teoria algébrica de módulos, pré-requisito para a linguagem da álgebra homológica.

Consideremos A um anel qualquer para o restante da seção.

Definição A.1.1 (Módulos). Um A -módulo é um grupo aditivo abeliano G junto com uma função

$$\begin{aligned} A \times G &\longrightarrow G \\ (a, g) &\longmapsto ag, \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

denotada por ag , tal que para todo $a_1, a_2 \in A$ e $g_1, g_2 \in G$:

1. $a_1(g_1 + g_2) = a_1g_1 + a_1g_2$;
2. $(a_1 + a_2)g_1 = a_1g_1 + a_2g_1$;
3. $a_1(a_2g_1) = (a_1a_2)g_1$.

Se A é um anel com unidade 1_A e

4. $1_A \cdot g = g, \forall g \in G$, G é dito um A -módulo unitário.

Para o restante do trabalho, seja Λ um conjunto de índices arbitrário.

Definição A.1.2 (Base de um módulo). Sejam G um A -módulo e $\beta = (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ um subconjunto de G satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Todo $g \in G$ é combinação linear finita de elementos de β , isto é,

$$g = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n,$$

onde $a_i \in A$ e $g_i \in G$, para $i = 1, \dots, n$. Dizemos nesse caso que β gera G ;

2. β é linearmente independente, ou seja, se

$$a_1g_1 + \cdots + a_ng_n = 0$$

onde $a_i \in A$ e $g_i \in G$, para $i = 1, \dots, n$, então cada $a_i = 0$.

Dizemos, nesse caso, que β é uma *base* para G sobre A .

Definição A.1.3 (Módulo livre). Suponhamos que A seja um anel com unidade e G um A -módulo unitário. Dizemos que G é um A -módulo *livre* caso G possua uma base não-vazia.

Se G é um módulo com elemento identidade da aditividade 0_G sobre A com identidade da aditividade 0_A , então para cada $a \in A$ e $g \in G$ temos que

$$a0_G = 0_G \text{ e } 0_Ag = 0_G.$$

De fato, note que $a0_G = a(0_G + 0_G) = a0_G + a0_G$ e $0_Ag = (0_A + 0_A)g = 0_Ag + 0_Ag$.

Definição A.1.4 (Homomorfismo). Sejam G_1 e G_2 módulos sobre o anel A . Uma função $f : G_1 \rightarrow G_2$ é um *homomorfismo* de A -módulos se para todo $g_1, g_2 \in G_1$ e $a \in A$:

$$f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2)$$

e

$$f(ag_1) = af(g_1).$$

Se f é uma bijeção, f é dito um *isomorfismo*.

Definição A.1.5 (Submódulo). Sejam A um anel, G um A -módulo e H um subconjunto não-vazio de G . H é chamado um *submódulo* de G se H é um subgrupo aditivo de G e $ah \in H$, para todo $a \in A$ e todo $h \in H$.

Considerando o grupo quociente G/H de um A -módulo G sobre um submódulo H , é possível afirmar que o mesmo é um A -módulo. Este fato é fundamental para o que chamamos de grupos de homologia e cohomologia.

Proposição A.1.1. *Seja H um submódulo de um A -módulo G . Então, o grupo quociente $\frac{G}{H}$ é um A -módulo com a aplicação, como em (A.1.1), de A em $\frac{G}{H}$ dada por:*

$$a(g + H) = ag + H, \forall a \in A \text{ e } \forall g \in G.$$

Proposição A.1.2. *Sejam A um anel, $f : G_1 \rightarrow G_2$ um homomorfismo de A -módulos e H um submódulo de $\ker f$, então existe um único homomorfismo de A -módulos $\bar{f} : \frac{G_1}{H} \rightarrow G_2$ tal que $\bar{f}(g + H) = f(g), \forall g \in G_1$; $\text{Im } \bar{f} = \text{Im } f$ e $\ker \bar{f} = \frac{\ker f}{H}$. Além disso, $\bar{f}$ é um isomorfismo se, e somente se, f é um homomorfismo sobrejetor e $H = \ker f$.*

Corolário A.1.1. *Sejam A um anel e H_1 e H_2 submódulos dos A -módulos G_1 e G_2 respectivamente. Se $f : G_1 \rightarrow G_2$ é um homomorfismo de A -módulos tal que $f(H_1) \subset H_2$, então existe um único homomorfismo de A -módulos $\bar{f} : \frac{G_1}{H_1} \rightarrow \frac{G_2}{H_2}$ dado por $g + H_1 \mapsto f(g) + H_2$.*

A demonstração para os resultados anteriores pode ser vista na Seção IV.1 de [9].

Note que, toda a teoria introduzida sobre módulos é uma generalização do conceito de espaços vetoriais, os quais são definidos a partir de operações sobre corpos, exemplos particulares de anéis.

A.2 PRODUTO E SOMA DIRETA DE MÓDULOS

Sejam G_1 e G_2 dois grupos aditivos abelianos. O *produto direto* entre G_1 e G_2 é, essencialmente, o produto cartesiano $G_1 \times G_2$ dos conjuntos, onde seus elementos são pares ordenados (g_1, g_2) , com $g_1 \in G_1$ e $g_2 \in G_2$ e a operação de adição

$$(g_1^1, g_2^1) + (g_1^2, g_2^2) = (g_1^1 + g_1^2, g_2^1 + g_2^2)$$

torna $G_1 \times G_2$ um grupo aditivo abeliano.

Em relação à soma direta entre dois grupos aditivos abelianos, podemos vê-la sob duas perspectivas: externa e interna. Porém, para os objetivos do trabalho, vamos estudar a perspectiva externa. Temos que a *soma direta externa* entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \oplus G_2$, é simplesmente o produto direto entre G_1 e G_2 .

As definições do produto e soma direta de uma família finita de grupos aditivos abelianos são feitas de maneira análoga.

A distinção crucial entre produto e soma direta surge quando lidamos com uma família arbitrária de grupos aditivos abelianos.

Definição A.2.1 (Produto direto). Seja $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de grupos aditivos abelianos. O grupo aditivo abeliano $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, cujos elementos são as Λ -uplas $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, isto é, funções definidas como

$$\begin{aligned} g : \Lambda &\longrightarrow G \\ \lambda &\longmapsto g(\lambda) = g_\lambda, \end{aligned}$$

com a operação de adição definida como

$$(g_\lambda^1) + (g_\lambda^2) = (g_\lambda^1 + g_\lambda^2),$$

é dito o *produto direto* da família $\{G_\lambda\}$.

Definição A.2.2 (Soma direta). A *soma direta* de uma família $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, denotado por

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

é o subgrupo de $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ das Λ -uplas $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $g_\lambda = 0$, exceto para um número finito de índices em Λ .

Agora, consideremos A um anel. Caso cada G_λ for um A -módulo, o produto direto $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, com a função

$$\begin{aligned} A \times G &\longrightarrow G \\ (a, (g_\lambda)) &\longmapsto (ag_\lambda) \end{aligned}$$

é um A -módulo e dizemos ser um *produto direto de A -módulos*. Nesse caso, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ é um submódulo de G e é dito uma *soma direta de A -módulos*.

Proposição A.2.1. *Sejam A um anel e $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ famílias de A -módulos tais que H_λ é um submódulo de G_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$. Então, o produto direto $\prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é um submódulo de $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ e*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda / \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda / H_\lambda).$$

Demonstração. Conferir Corolário 8.11 de [9], pp. 62-63, no qual Hungerford demonstra para grupos algébricos. $\square$

A.3 MÓDULO DUAL

Tomemos A -módulos G_1 e G_2 quaisquer e denotemos por $\text{Hom}_A(G_1, G_2)$ o conjunto dos homomorfismos $f : G_1 \longrightarrow G_2$. Considerando as operações

$$\begin{aligned} f + g : G_1 &\longrightarrow G_2 \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} af : G_1 &\longrightarrow G_2 \\ x &\longmapsto af(x), \end{aligned}$$

para $f, g \in \text{Hom}_A(G_1, G_2)$ e $a \in A$, é fácil concluir que $\text{Hom}_A(G_1, G_2)$ é um A -módulo.

Proposição A.3.1. *Seja $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de A -módulos. Então, os módulos $\text{Hom}_A\left(\bigoplus_{\lambda} G_\lambda, A\right)$ e $\prod_{\lambda} \text{Hom}_A(G_\lambda, A)$ são isomorfos.*

Demonstração. Conferir Teorema 4.7 de [9], p. 202. $\square$

Proposição A.3.2. *Sejam A -módulos G_1 e G_2 e $f : G_1 \longrightarrow G_2$ um homomorfismo. A aplicação*

$$\begin{aligned} f^\top : \text{Hom}_A(G_2, A) &\longrightarrow \text{Hom}_A(G_1, A) \\ g &\longmapsto f^\top g = gf, \end{aligned}$$

sendo $gf = g \circ f$, é um homomorfismo de A -módulos.

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \in \text{Hom}_A(G_2, A)$ e $a \in A$. Então,

$$f^\top(ag_1 + g_2) = (ag_1 + g_2)f = ag_1f + g_2f = af^\top g_1 + f^\top g_2,$$

o que demonstra que $f^\top$ é um homomorfismo. $\square$

Definição A.3.1 (Operador adjunto). Dados A -módulos G_1 e G_2 , o operador $f^\top : \text{Hom}_A(G_2, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(G_1, A)$, definido na Proposição A.3.2, é chamado o *operador adjunto*.

APÊNDICE B – Topologia

Este apêndice é um pequeno resumo sobre os conceitos teóricos de espaços topológicos, o qual tem sua escrita baseada principalmente em [20]. Para mais informações teóricas e demonstrações dos resultados, conferir a mesma referência.

B.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

No que se segue, suponhamos que X seja um conjunto arbitrário.

Definição B.1.1 (Topologia). Seja $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos de X tal que:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
2. Dada uma coleção qualquer $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$;
3. Dada uma coleção finita $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, temos que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Dizemos que τ é uma *topologia* sobre X . Além disso, os elementos de τ são ditos *abertos* da topologia τ e o par (X, τ) é um *espaço topológico*.

Definição B.1.2 (Base de uma topologia). Seja β uma coleção de subconjuntos de X tal que:

1. $\bigcup_{B \in \beta} B = X$;
2. Para quaisquer $B_1, B_2 \in \beta$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Nesse caso, β é chamada uma *base* para uma topologia de X . Ademais, a coleção

$$\tau = \{U \subset X ; \forall x \in U, \exists B \in \beta \text{ onde } x \in B \subset U\}$$

é a *topologia sobre X gerada por β* .

O resultado a seguir apresenta uma forma de encontrar uma base para certa topologia.

Proposição B.1.1. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma subcoleção de τ tal que para cada $U \in \tau$ e $x \in U$, existe $C \in \mathcal{C}$ com $x \in C \subset U$. Então, $\mathcal{C}$ é uma base para τ .*

Demonstração. Vide [20], Lema 13.1, p. 80. □

No que se segue, caso não seja necessário diferenciar duas topologias para um mesmo conjunto X , diremos que uma base para a topologia de X é uma *base de X* .

Definição B.1.3 (Vizinhança). Dado (X, τ) um espaço topológico, uma *vizinhança* para um ponto x em X é um elemento $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Consideremos, agora, Y um subconjunto de X .

Definição B.1.4 (Subespaço). Seja τ uma topologia sobre X . A coleção $\tau_Y = \{U \cap Y ; U \in \tau\}$ é dita a *topologia do subespaço* (ou a *topologia induzida*) de (X, τ) sobre Y .

É fácil concluir que τ_Y é uma topologia sobre Y .

Proposição B.1.2. Dada β uma base para a topologia τ de X , então

$$\beta_Y = \{B \cap Y ; B \in \beta\}$$

é uma base para τ_Y .

Demonstração. Vide [20], Lema 16.1, p. 89. □

Uma maneira complementar de definir a topologia de um conjunto é utilizando conjuntos fechados.

Definição B.1.5 (Fechados). Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um *fechado* de (X, τ) caso $X - F \in \tau$.

Proposição B.1.3. X é um espaço topológico se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

1. $\emptyset$ e X são fechados;
2. Interseção qualquer de fechados de X é um fechado de X ;
3. União finita de fechados de X é um fechado de X .

Demonstração. Vide [20], Lema 17.1, p. 94. □

Definição B.1.6 (Interior e fecho de um conjunto). Sejam (X, τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X . Dizemos que o *interior* de A , denotado por $\text{int } A$, é a união de todos os abertos de X contidos em A , isto é,

$$\text{int } A = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \in \tau}} U.$$

Além disso, o *fecho* de A , denotado por $\overline{A}$, é a interseção de todos os fechados que contém A , isto é,

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ X - F \in \tau}} F.$$

Definição B.1.7 (Espaços de Hausdorff). Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é um *espaço de Hausdorff* quando dado $x_1, x_2 \in X$ distintos, existem $U_1, U_2 \in \tau$ disjuntos tais que $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$.

Definição B.1.8 (Espaço segundo enumerável). O espaço X é dito *segundo enumerável* se possui uma base enumerável.

B.2 CONEXOS E COMPACTOS

Consideremos, no decorrer desta seção, (X, τ) um espaço topológico.

Definição B.2.1 (Cisão). Sejam $A, B \in \tau$ conjuntos não-vazios e disjuntos. A união $X = A \cup B$ é dita uma *cisão* de X .

Definição B.2.2 (Espaço conexo). Dizemos que o espaço X é *conexo* se não existe uma cisão de X . Caso contrário, X é dito um espaço *desconexo*.

Proposição B.2.1. X é conexo se, e somente se, os únicos abertos e fechados de X são $\emptyset$ e X .

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Suponhamos que X seja conexo, isto é, não existe cisão de X . Suponhamos, por absurdo, que exista um subespaço Y de X aberto e fechado. Então, $Y \cup (X - Y) = X$ é uma cisão, uma contradição.

$(\Rightarrow)$ Reciprocamente, suponhamos que os únicos subespaços abertos e fechados de X são $\emptyset$ e ele próprio. Então, não existe cisão de X , pois caso contrário, $X = Y \cup W$, sendo Y e W abertos disjuntos de X não-vazios. Mas nesse caso, $W = X - Y$, ou seja, Y é aberto e fechado, uma contradição. Portanto, X é conexo. $\square$

Quando a conexidade de um espaço topológico é rompida, surge a necessidade de identificar suas partes fundamentais. Nesse sentido, a noção de conexidade ganha uma perspectiva local e estrutural através da definição de componentes conexas.

Definamos uma relação de equivalência $\sim$ em X da seguinte maneira:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe um subespaço conexo } C \subset X \text{ tal que } x, y \in C,$$

para $x, y \in X$.

Definição B.2.3 (Componentes conexas). Dizemos que as classes de equivalência $[x] = \{y \in X ; y \sim x\}$, as quais particionam X , são as *componentes conexas* de X .

Proposição B.2.2. As componentes conexas de X são subespaços conexos de X .

Demonstração. Vide [20], Teorema 25.1, pp. 159-160. $\square$

A compacidade é, talvez, a noção mais poderosa da topologia moderna, servindo como a ponte que permite transportar propriedades de conjuntos finitos para conjuntos infinitos. Em essência, um espaço compacto é aquele onde qualquer tentativa de cercá-lo por uma infinidade de “pedaços” abertos pode ser reduzida a uma lista finita.

Definição B.2.4 (Cobertura aberta). Sejam $\mathcal{A}$ uma coleção de abertos de X e Y um subespaço de X . Se $Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\mathcal{A}$ é dita uma cobertura aberta de Y . Dizemos que uma subcoleção $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ é uma *subcobertura* de $\mathcal{A}$ quando $Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A$.

Definição B.2.5 (Espaço compacto). Um subespaço $K \subset X$ é *compacto* se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.

Proposição B.2.3. *Se um subespaço de um espaço compacto é fechado, então o mesmo é compacto.*

Demonstração. Vide [20], Teorema 26.2, p. 165. □

Proposição B.2.4. *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração. Vide [20], Teorema 26.3, p. 165. □

B.3 CONTINUIDADE

No que se segue, sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função arbitrária.

Definição B.3.1 (Função contínua). Dizemos que f é *contínua* se para todo aberto V de Y , $f^{-1}(V)$ é um aberto de X .

Proposição B.3.1. *Seja β uma base para a topologia de Y . Então, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(B)$ é um aberto de X para todo $B \in \beta$.*

Demonstração. Confira [20], pp. 102-103. □

Proposição B.3.2. *Em relação a f são equivalentes as seguintes propriedades:*

1. f é contínua;
2. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo subconjunto A de X ;
3. Se F é um subespaço fechado de Y , $f^{-1}(F)$ é um fechado de X ;
4. Para cada $x \in X$ e toda vizinhança V de $f(x)$ em Y , existe uma vizinhança U de x em X tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. Vide [20], Teorema 18.1, pp. 104-105. □

Definição B.3.2 (Homeomorfismo). Suponhamos que f seja um bijeção contínua. Dizemos que f é um *homeomorfismo* de X em Y quando sua inversa também é contínua.

Definição B.3.3 (Mergulho topológico). Se ao restringirmos o contradomínio de f ao conjunto imagem $f(X)$, obtivermos um homeomorfismo $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ de X em $f(X)$, chamamos f de *mergulho topológico*.

Proposição B.3.3. *Além dos espaços X e Y , consideremos Z um espaço topológico. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Toda função constante é contínua;*
2. *A função inclusão*

$$\begin{aligned} i : A \subset X &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

é contínua.

3. *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ é contínua, a composta $g \circ f$ é contínua;*
4. *Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $A \subset X$, a restrição $f|_A : A \rightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. Vide [20], Teorema 18.2, pp. 107-108. □

Proposição B.3.4 (Lema da colagem). *Sejam X e Y espaços topológicos e A e B fechados de X tais que $X = A \cup B$. Se $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ são funções contínuas tais que $f \equiv g$ em $A \cap B$, então*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é uma função contínua.

Demonstração. Vide [20], Teorema 18.3, pp. 108-109. □

Confira em [20], Teorema 23.5, p. 150, e Teorema 26.5, p. 166, que a continuidade preserva conexidade e compacidade.

B.4 UNIÃO DISJUNTA

A construção da união disjunta desempenha um papel fundamental na organização de famílias de objetos matemáticos. Diferente da união usual, que funde elementos idênticos pertencentes a conjuntos distintos, a união disjunta preserva a individualidade e a procedência de cada elemento através de um mecanismo de indexação.

Geometricamente, permite agrupar variedades independentes em um único espaço topológico, preservando as propriedades locais e a dimensão de cada componente.

Definição B.4.1 (União disjunta). Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família arbitrária de espaços topológicos. Chamamos o conjunto

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(x, \lambda) ; \lambda \in \Lambda, x \in X_\lambda\}$$

de *união disjunta*.

Definamos em $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ uma topologia onde um subconjunto de X é aberto se, e somente se, sua interseção com cada X_λ é aberta em X_λ . Chamamos tal topologia de *topologia da união disjunta*.

Proposição B.4.1. *A união disjunta de espaços de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Seja $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ a união disjunta de uma família arbitrária $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços de Hausdorff. Consideremos $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2) \in X$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ temos que os conjuntos $X_{\lambda_1} \times \{\lambda_1\}$ e $X_{\lambda_2} \times \{\lambda_2\}$ são vizinhanças disjuntas para (x_1, λ_1) e (x_2, λ_2) , respectivamente. Agora, caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, como X_λ é Hausdorff, existem U_1, U_2 vizinhanças disjuntas de x_1 e x_2 em X_λ , respectivamente. Então, $(x_1, \lambda_1) \in U_1 \times \{\lambda\}$, $(x_2, \lambda_2) \in U_2 \times \{\lambda\}$ e $(U_1 \times \{\lambda\}) \cap (U_2 \times \{\lambda\}) = \emptyset$, o que mostra que X é Hausdorff. $\square$

Proposição B.4.2. *A união disjunta de uma família enumerável de espaços segundo enumeráveis é segundo enumerável.*

Demonstração. Seja $X = \coprod_{i \in I} X_i$ a união disjunta de uma família enumerável $\{X_i\}_{i \in I}$ de espaços segundo enumeráveis. Para cada $i \in I$, seja uma base enumerável $\beta_i = \{B_i^j\}_{j \in J}$ para X_i . Afirmamos que $\beta = \{B_i^j \times \{i\} ; i \in I, j \in J\}$ é uma base enumerável para a topologia da união disjunta X . De fato, é fácil ver que

$$X = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} B_i^j \times \{i\}.$$

Agora, sejam $B_1 = B_{i_1}^{j_1} \times \{i_1\}$ e $B_2 = B_{i_2}^{j_2} \times \{i_2\}$ em β tais que $B = B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Nesse caso, $i_1 = i_2 = i$ e $B_i^{j_1} \cap B_i^{j_2} \neq \emptyset$. Como β_i é uma base para X_i , existe $B_i^j \in \beta_i$ tal que $x \in B_i^j \subset B_i^{j_1} \cap B_i^{j_2}$ e, então, $(x, i) \in B_i^j \times \{i\} \subset B$, o que conclui que β é uma base enumerável para X . Portanto, X é segundo enumerável. $\square$

B.5 TOPOLOGIA QUOCIENTE

A topologia quociente oferece o mecanismo oposto à união disjunta: gera novos espaços através da identificação de pontos.

Definição B.5.1 (Aplicação quociente). Seja uma $p : X \longrightarrow Y$ aplicação entre espaços topológicos. Dizemos que p é uma *aplicação quociente* se é sobrejetiva e cada subconjunto $V \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(V)$ é aberto em X . Nesse caso, Y é dito o *espaço quociente* e p é a *projeção* de X em Y .

Definição B.5.2 (Topologia quociente). Sejam $p : X \longrightarrow A$ uma aplicação sobrejetiva entre um espaço topológico X e um conjunto qualquer A . Definamos uma topologia

$$\tau = \{V \subset A ; p^{-1}(V) \subset X \text{ é aberto}\}$$

sobre A , a qual é chamada de *topologia quociente* induzida por p .

É claro que em τ , a aplicação $p : X \longrightarrow A$ dada na Definição B.5.2 é uma aplicação quociente.

Proposição B.5.1. *Seja β uma base para a topologia de um espaço X . Então,*

$$\beta' = \{p(B) ; B \in \beta\}$$

é uma base da topologia quociente de A induzida por uma aplicação sobrejetiva $p : X \longrightarrow A$.

Demonstração. Sejam $y \in A$ e V uma vizinhança de y em A . Daí, $p^{-1}(y) \in p^{-1}(V)$ e, como p é contínua, $p^{-1}(V)$ é um aberto de X , ou seja, existe $B \in \beta$ tal que $p^{-1}(y) \in B \subset p^{-1}(V)$. Logo, concluímos que $y \in p(B) \subset V$. Pela Proposição B.1.1, β' é uma base para a topologia quociente de A induzida por p . $\square$

Consideremos $X^* = \{X_\lambda ; X_\lambda \subset X\}$ uma partição de X , isto é, todos elementos de X^* são disjuntos e cobrem X , e

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X^* \\ x &\longmapsto p(x), \end{aligned}$$

onde $p(x) = X_\lambda$ para todo $x \in X_\lambda$. A topologia quociente induzida por p em X^* faz de X^* um espaço quociente de X por p . Em particular, caso $\sim$ for uma relação de equivalência em X , então o conjunto de classes $X^* = \{[x] ; x \in X\}$ forma uma partição para X . O espaço $X^* = X/\sim$ é o espaço quociente de X por $\sim$.

APÊNDICE C – Variedades diferenciáveis

Uma variedade é um espaço abstrato localmente homeomorfo a espaços euclidianos. Para formalizar esse conceito, apresentaremos a seguir uma série de definições importantes. As referências principais para a escrita deste apêndice é [12] e [26].

C.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Definição C.1.1 (Espaço localmente euclidiano). Seja M um espaço topológico. Se para cada $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M e um homeomorfismo $f : U \rightarrow V$, sendo V um aberto de $\mathbb{R}^n$, M é chamado de espaço *localmente euclidiano de dimensão n* (ou *n -dimensional*). Ademais, dizemos que o par (U, f) é uma *carta local* de M em p , U uma *vizinhança coordenada* e f uma *aplicação coordenada* em U .

Definição C.1.2 (Variedade topológica). Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma *variedade topológica de dimensão n* ou uma *n -variedade topológica* caso for um espaço de Hausdorff, segundo enumerável e localmente euclidiano de dimensão n .

Definição C.1.3 (Cartas compatíveis). Sejam (U_α, f_α) e (U_β, f_β) duas cartas quaisquer de uma n -variedade topológica M tais que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Se as aplicações

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow f_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

e

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow f_\beta(U_{\alpha\beta}),$$

ditas *funções de transição*, são de classe C^∞ , chamamos (U_α, f_α) e (U_β, f_β) de *cartas C^∞ -compatíveis*.

Definição C.1.4 (Atlas). Uma coleção $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de cartas C^∞ -compatíveis de uma variedade topológica M é dita um *atlas* de M se $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Dizemos que um atlas é *maximal* se o mesmo não está contido, estritamente, em um outro atlas.

Definição C.1.5 (Variedade diferenciável). Uma n -variedade topológica M é dita uma *variedade diferenciável de dimensão n* ou uma *n -variedade diferenciável* se possui um atlas maximal, o qual dizemos ser uma *estrutura diferenciável* em M .

Confira em [26], Proposição 5.10, p 53, que qualquer variedade topológica é na verdade uma variedade diferenciável. A proposição citada afirma que, para concluir a existência de um atlas maximal, precisamos apenas encontrar um atlas qualquer, garantindo assim a diferenciabilidade da variedade.

Exemplo C.1.1. Superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ são exemplos clássicos de 2-variedades diferenciáveis. $\diamond$

Exemplo C.1.2. Qualquer subconjunto aberto U de uma n -variedade diferenciável M é uma n -variedade diferenciável. Com efeito, seja $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}$ uma estrutura diferenciável para M . Tomando o conjunto aberto $W_\lambda = U_\lambda \cap U$ de M , temos que $\{(W_\lambda, f_\lambda|_{W_\lambda})\}$ é uma estrutura diferenciável para U , onde $f_\lambda|_{W_\lambda} : W_\lambda \rightarrow U$ denota a restrição de f_λ a W_λ . $\diamond$

Exemplo C.1.3 (Esfera n -dimensional). Considere a esfera n -dimensional S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Afirmamos que $\{(S^n - \{N\}, \phi_N), (S^n - \{S\}, \phi_S)\}$, onde $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = (0, \dots, 0, -1)$, $\phi_N : S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_S : S^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são as projeções estereográficas, isto é,

$$\phi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

e

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right),$$

é um atlas para S^n . De fato, primeiro tomemos as aplicações inversas das projeções estereográficas, as quais são dadas por

$$\phi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

e

$$\phi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{1 - (y_1^2 + \dots + y_n^2)}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \right).$$

Note que, $\emptyset \neq (S^n - \{N\}) \cap (S^n - \{S\}) = S^n - \{N, S\}$, o que nos dá uma aplicação $\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \phi_S(S^n - \{N, S\}) \rightarrow \phi_N(S^n - \{N, S\})$ é de classe C^∞ . Ora, temos que

$$\begin{aligned} \phi_N \circ \phi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \phi_N \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{1 - (y_1^2 + \dots + y_n^2)}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{1 - \frac{1 - (y_1^2 + \dots + y_n^2)}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}}, \dots, \frac{\frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{1 - \frac{1 - (y_1^2 + \dots + y_n^2)}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}} \right) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right). \end{aligned}$$

De maneira análoga, é possível mostrar que $\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(S^n - \{N, S\}) \rightarrow \phi_S(S^n - \{N, S\})$ de classe C^∞ e, portanto, $\{(S^n - \{N\}, \phi_N), (S^n - \{S\}, \phi_S)\}$ é uma coleção de cartas C^∞ -compatíveis. Como $S^n = (S^n - \{N\}) \cup (S^n - \{S\})$, concluímos o que queríamos mostrar.

$\diamond$

Exemplo C.1.4 (Espaço projetivo real). O *Espaço Projetivo Real* n -dimensional, denotado por $\mathbb{RP}^n$, é o espaço cujos elementos são as retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, o espaço quociente

$$\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{(v \sim \lambda v)},$$

tal que $v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Uma maneira equivalente de escrever $\mathbb{RP}^n$ é restringindo os vetores de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a vetores de norma 1, sendo assim,

$$\mathbb{RP}^n = \frac{S^n}{(v \sim -v)},$$

isto é, cada $v \in S^n$ é equivalente à sua antípoda. Denotaremos os elementos de $\mathbb{RP}^n$ por $[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

Veja em [26], Corolário 7.15 e Proposição 7.16, p. 79, que $\mathbb{RP}^n$ é segundo enumerável e Hausdorff.

Vamos mostrar que $\mathbb{RP}^n$ é uma n -variedade diferenciável, construindo um atlas para $\mathbb{RP}^n$. Consideremos os subespaços de $\mathbb{RP}^n$ dados por

$$U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] ; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Note que $\pi^{-1}(U_i) = \tilde{U}_i$, onde

$$\tilde{U}_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n ; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

e $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é a aplicação quociente. Como $\tilde{U}_i$ é um aberto de S^n , concluímos que cada U_i é um aberto de $\mathbb{RP}^n$ (veja Seção 5 do APÊNDICE B). Além disso, observe que $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Definamos, para cada $i = 1, \dots, n+1$, as aplicações

$$\begin{aligned} f_i : \quad \mathbb{RP}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_1, \dots, x_{n+1}] &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Note que, para cada $i = 1, \dots, n+1$, a aplicação inversa de f_i é dada por

$$f_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n].$$

Ora,

$$f_i(f_i^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = f_i[x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n] = \left(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_n}{1} \right) = (x_1, \dots, x_n)$$

e

$$\begin{aligned} f_i^{-1}(f_i[x_1, \dots, x_{n+1}]) &= f_i^{-1} \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \\ &= \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right] \\ &= [x_1, \dots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Agora, observe que f_i é contínua, pois dado um aberto U qualquer de $\mathbb{R}^n$, sendo a aplicação

$$(f_i \circ \pi)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

contínua, temos que

$$\pi^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ \pi)^{-1}(U)$$

é um aberto de S^n . Logo, pela caracterização de abertos de um espaço quociente, concluímos que $f_i^{-1}(U)$ é um aberto de $\mathbb{RP}^n$ (confira Seção 5 do APÊNDICE B). Ademais, para provar o homeomorfismo de f_i , para cada $i = 1, \dots, n+1$, resta mostrar que a inversa f_i^{-1} é contínua. Ora, observe que $f_i^{-1} = \pi \circ \varphi_i$, onde

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua, ou seja, f_i^{-1} é contínua por ser a composta de funções contínuas.

Sendo assim, $\mathbb{RP}^n$ é localmente euclidiano de dimensão n . Afirmamos que a coleção $\{(U_i, f_i)\}_{i=1}^{n+1}$ é um atlas de $\mathbb{RP}^n$. Com efeito, sejam $i, j = 1, \dots, n+1$ tais que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Observe que os pontos de $f_j(U_{ij})$ são da forma $(y_1, \dots, y_n)$, onde $y_1 = \frac{x_1}{x_j}, \dots, y_{j-1} = \frac{x_{j-1}}{x_j}, y_j = \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_j}$, com $x_i, x_j \neq 0$. Então, supondo que $i < j$, temos que

$$\begin{aligned} (f_i \circ f_j^{-1})(y_1, \dots, y_n) &= f_i([y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_j, \dots, y_n]) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{\widehat{y_i}}{y_i}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_j}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i} \right). \end{aligned}$$

Caso $j < i$, segue que

$$(f_i \circ f_j^{-1})(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_j}{y_i}, \dots, \frac{\widehat{y_i}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i} \right).$$

Em ambos os casos, $f_i \circ f_j^{-1}$ é de classe C^∞ , o que ocorre analogamente com $f_j \circ f_i$. Concluímos então que as cartas (U_i, f_i) e (U_j, f_j) são C^∞ -compatíveis, o que queríamos mostrar. $\diamond$

Exemplo C.1.5 (União disjunta enumerável de variedade). Seja $M = \coprod_{i \in I} M_i$ a união disjunta uma família enumerável $\{M_i\}_{i \in I}$ de n -variedades diferenciáveis, sendo $\{(U_{\lambda,i}, f_{\lambda,i})\}_{\lambda \in \Lambda_i}$ uma estrutura diferenciável de M_i , para cada $i \in I$ e Λ_i um conjunto de índices. Porém, sem perda de generalidade, podemos supor que os conjuntos de índices são iguais, adicionando pares $(U_{\lambda,i}, f_{\lambda,i})$ tais que $U_{\lambda,i} = \emptyset$ se necessário. Seja então $\Lambda_i = \Lambda$. Para mostrar que M é uma variedade diferenciável, primeiro note que, pelas Proposições B.4.1 e B.4.2, M é Hausdorff e segundo enumerável. Resta-nos encontrar então uma estrutura diferenciável para M .

Afirmamos que $\left\{ \left(\tilde{U}_{\lambda,i}, \mathcal{F}_{\lambda,i} \right) \right\}_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}}$, onde $\tilde{U}_{\lambda,i} = U_{\lambda,i} \times \{i\}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda,i} : \tilde{U}_{\lambda,i} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, i) &\longmapsto F_{\lambda}(p, i) = f_{\lambda,i}(p) \end{aligned}$$

é uma estrutura diferenciável para M . Com efeito, é fácil verificar que

$$M = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}} \left(\tilde{U}_{\lambda,i} \right).$$

Ademais, observe que a aplicação $\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1} : \mathcal{F}_{\lambda,i}(\tilde{U}_{\lambda,i}) \longrightarrow \tilde{U}_{\lambda,i}$, definida como $\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}(x) = (f_{\lambda,i}^{-1}(x), i)$ é inversa à aplicação $\mathcal{F}_{\lambda,i}$. Ora,

$$\mathcal{F}_{\lambda,i}(\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}(x)) = \mathcal{F}_{\lambda,i}(f_{\lambda,i}^{-1}(x), i) = f_{\lambda,i}(f_{\lambda,i}^{-1}(x)) = x$$

e

$$\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}(\mathcal{F}_{\lambda,i}(p, i)) = \mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}(f_{\lambda,i}(p)) = (f_{\lambda,i}^{-1}(f_{\lambda,i}(p)), i) = (p, i).$$

Dado um aberto V de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$F_{\lambda}^{-1}(V) = f_{\lambda,i}^{-1}(V) \times \{i\}.$$

Como $f_{\lambda,i}$ é um homeomorfismo, $f_{\lambda,i}^{-1}(V)$ é um aberto de $U_{\lambda,i}$, ou seja, $f_{\lambda,i}^{-1}(V) \times \{i\}$ é um aberto de $\tilde{U}_{\lambda,i}$, o que conclui a continuidade de F_{λ} . Em relação à continuidade de $\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}$, note que um aberto de $\tilde{U}_{\lambda,i}$ é da forma $U \times \{i\}$, onde U é um subconjunto aberto de $U_{\lambda,i}$. Dado tal aberto $U \times \{i\}$, segue que

$$\mathcal{F}_{\lambda,i}(U \times \{i\}) = f_{\lambda,i}(U).$$

Novamente, sendo $f_{\lambda,i}$ um homeomorfismo, $f_{\lambda,i}(U)$ é um aberto, ou seja, $\mathcal{F}_{\lambda,i}^{-1}$ é contínua. Agora, sejam $(\tilde{U}_{\alpha,i}, \mathcal{F}_{\alpha,i})$ e $(\tilde{U}_{\beta,j}, \mathcal{F}_{\beta,j})$ cartas locais de M . Se $i \neq j$, $\tilde{U}_{\alpha,i} \cap \tilde{U}_{\beta,j} = \emptyset$, o que faz com que a condição de compatibilidade seja trivialmente satisfeita. Vamos supor então que $i = j$ e $U_{\alpha\beta} = U_{\lambda_1,i} \cap U_{\lambda_2,j} \neq \emptyset$, o que faz com que $\tilde{U}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\lambda_1,i} \cap \tilde{U}_{\lambda_2,j} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}_{\alpha,i}(\tilde{U}_{\alpha\beta}) = f_{\alpha,i}(U_{\alpha\beta})$ e $\mathcal{F}_{\beta,j}(\tilde{U}_{\alpha\beta}) = f_{\beta,j}(U_{\alpha\beta})$, teremos que $\mathcal{F}_{\alpha,i} \circ F_{\beta,j}^{-1} = f_{\alpha,i} \circ f_{\beta,j}^{-1}$ e $\mathcal{F}_{\beta,j} \circ F_{\alpha,i}^{-1} = f_{\beta,j} \circ f_{\alpha,i}^{-1}$, o que conclui que $\left\{ \left(\tilde{U}_{\lambda,i}, \mathcal{F}_{\lambda,i} \right) \right\}_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}}$ é uma coleção de cartas C^∞ -compatíveis, demonstrando assim que a mesma coleção é um atlas para M . $\diamond$

Podemos nos perguntar sobre a existência de alguma base para a topologia de uma n -variedade diferenciável M tal que cada um de seus elementos é homeomorfo à uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, as quais formam uma base para a topologia padrão de $\mathbb{R}^n$. Sobre isso, temos o resultado a seguir.

Proposição C.1.1. *Toda n -variedade diferenciável possui uma base com elementos homeomorfos a bolas abertas em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja M uma n -variedade diferenciável com estrutura diferenciável $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Para cada λ , $V_\lambda = f_\lambda(U_\lambda)$ possui uma base β'_λ composta por bolas abertas de $\mathbb{R}^n$. Afirmamos que $\beta_\lambda = \{f_\lambda^{-1}(B) ; B \in \beta'_\lambda\}$ é uma base para U_λ . De fato, sejam $x \in U_\lambda$ e U uma vizinhança de x em U_λ . Temos que U é homeomorfo a um aberto V de V_λ . Sendo β'_λ uma base para V_λ , existe $B \in \beta'_\lambda$ tal que $f_\lambda(x) \in B \subset V$, ou seja, $x \in f_\lambda^{-1}(B) \subset U$. Pela Proposição B.1.1, β é uma base de U_λ .

Agora, vamos mostrar que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda = \{f_\lambda^{-1}(B) ; \lambda \in \Lambda, B \in \beta'_\lambda\}$ é uma base para M . Ora, seja $x \in M$ e U um aberto qualquer de M . Se $U \subset U_\lambda$, para algum λ , ou seja, pelo argumento do parágrafo anterior, existe $B \in \beta'_\lambda$ tal que $x \in f_\lambda^{-1}(B) \subset U$. Suponhamos então que U não está contido em qualquer U_λ . Como $\{U_\lambda\}$ é uma cobertura para M , U intersecta com pelo menos dois abertos em $\{U_\lambda\}$. Seja $\{U_\alpha\}$ uma subcoleção de $\{U_\lambda\}$ tal que U intersecta cada U_α de $\{U_\alpha\}$, a qual em particular é uma cobertura de U . Suponhamos que x pertença a U_α de $\{U_\alpha\}$. Pelo argumento anterior, existe $B \in \beta'_\alpha$ tal que $x \in f_\alpha^{-1}(B) \subset U \cap U_\alpha \subset U$. Novamente, pela Proposição B.1.1, concluímos que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda$ é uma base para M . $\square$

C.2 APLICAÇÕES ENTRE VARIEDADES

Mais do que ser localmente homeomorfa a um espaço euclidiano, uma variedade é localmente difeomorfa a este mesmo espaço. A seguir demonstraremos esta propriedade.

Definição C.2.1 (Diferenciabilidade entre variedades). Uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ entre m -variedade diferenciável M e n -variedade diferenciável N é dita *diferenciável em* p de M se existem cartas (V, g) em N e (U, f) em M , com $F(p) \in V$ e $p \in U$, tais que $F(U) \subset V$ e

$$g \circ F \circ f^{-1} : f(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow g(U) \subset \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $f(p)$. Caso F seja diferenciável em cada ponto de M , dizemos que F é *diferenciável em* M .

Definição C.2.2 (Difeomorfismo entre variedades). Uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ entre duas variedades de mesma dimensão, que possua inversa, é dita um *difeomorfismo* quando F é diferenciável em M e sua inversa, F^{-1} , é diferenciável em N .

Definição C.2.3. Sejam $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação entre duas variedades de mesma dimensão e $p \in M$. Se existem vizinhanças U e V de p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo, F é dita um *difeomorfismo local em* p . Caso F seja um difeomorfismo local em toda variedade M , dizemos que F é um *difeomorfismo local*.

Proposição C.2.1. *Seja M uma n -variedade diferenciável com estrutura diferenciável $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. Já sabemos que cada f_λ é um homeomorfismo sobre sua imagem $V_\lambda = f_\lambda(U_\lambda)$. Resta então mostrar que $f_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ e $f_\lambda^{-1} : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$ são diferenciáveis. De fato, sejam $p \in U_\lambda$ qualquer e $I_{V_\lambda} : V_\lambda \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade em V_λ . Daí,

$$I_{V_\lambda} \circ f_\lambda \circ f_\lambda^{-1} = I_{V_\lambda} : V_\lambda \rightarrow V_\lambda,$$

a qual é diferenciável em $f_\lambda(p)$. Sendo p arbitrário, então f_λ é diferenciável em U_λ . Agora, seja $\bar{p} \in V_\lambda$ um ponto qualquer. Note que,

$$f_\lambda \circ f_\lambda^{-1} \circ I_{V_\lambda} = I_{V_\lambda} : V_\lambda \rightarrow V_\lambda,$$

a qual é uma aplicação diferenciável em $\bar{p}$. Como $\bar{p}$ é arbitrário, f_λ^{-1} é diferenciável em V_λ . $\square$

C.3 ESPAÇO TANGENTE DE UMA VARIEDADE

Enquanto o espaço tangente $T_p S$ de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ pode ser visualizado como o plano formado pelos vetores velocidade de curvas em S , a transição para variedades diferenciáveis M exige uma abordagem mais axiomática. Isso ocorre porque, em geral, tais variedades não estão imersas em um espaço euclidiano ambiente, o que nos impede de tratar vetores tangentes simplesmente como elementos do $\mathbb{R}^n$.

Sejam M uma n -variedade diferenciável e $D_p(M)$ o conjunto das funções reais diferenciáveis no ponto p . Podemos caracterizar um vetor tangente através da noção de derivação em um ponto.

Definição C.3.1 (Derivação em um ponto). Uma *derivação* em $p \in M$ é um operador linear $D : D_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a Regra de Leibniz:

$$D(FG) = D(F)G(p) + F(p)D(G)$$

para quaisquer $F, G \in D_p(M)$.

Para formalizar o vetor tangente sob essa ótica, consideramos uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, a qual chamamos de *curva* em M , tal que $\gamma(0) = p$.

Definição C.3.2 (Vetor tangente em uma variedade). O *vetor tangente em p* à curva γ em $t = 0$, denotado por X_p ou $\gamma'(0)$, atua sobre uma função $F \in D_p(M)$ como:

$$X_p F = \left. \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \quad (\text{C.3.1})$$

Essa operação cumpre naturalmente as condições de linearidade e a regra do produto, confirmando que cada vetor tangente se comporta como uma derivação.

Definição C.3.3 (Espaço tangente de uma variedade). O conjunto de todos os vetores tangentes a um ponto p de M é o *espaço tangente de M em p* , denotado por $T_p M$, que adquire estrutura de espaço vetorial real.

Dada uma carta (U, f) em torno de p , podemos induzir uma base para $T_p M$. Considerando as funções coordenadas $x_i = r_i \circ f$, para cada $i = 1, \dots, n$, definamos as funções $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : D_p(M) \longrightarrow M$ como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p F = \frac{\partial(F \circ f^{-1})}{\partial r_i}(f(p)).$$

Temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ constitui uma base para $T_p M$.

Uma vez estabelecida a estrutura do espaço tangente, torna-se possível estender o conceito de derivada para transformações entre variedades. Essa extensão é denominada diferencial e descreve como uma aplicação diferenciável transporta vetores tangentes do domínio para o contradomínio.

Definição C.3.4 (Diferencial de uma Aplicação Suave). Consideremos uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ entre duas variedades. Para cada $p \in M$, define-se a *diferencial de F no ponto p* como a aplicação linear

$$dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

que opera da seguinte forma: dado um vetor tangente $X_p \in T_p M$ associado a uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, a imagem $dF_p(X_p)$ é o vetor em $T_{F(p)} N$ cuja ação sobre uma função $G \in D_{F(p)}(N)$ é dada por

$$(dF_p(X_p))G = X_p(G \circ F) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0}.$$

Essa definição estabelece que a diferencial avalia a taxa de variação da composição de G com F ao longo da curva γ , traduzindo a geometria local de M para a de N .

Proposição C.3.1. *Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis. Caso F seja um difeomorfismo local, então $dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ é um isomorfismo para todo $p \in M$.*

Demonstração. Vide [12], Capítulo 4, Proposição 4.8, p. 80. □

C.4 SUBVARIEDADES

Definição C.4.1 (Subvariedades). Sejam M uma n -variedade diferenciável e S um subespaço topológico de M . Se para cada $p \in S$ existe uma carta local (U, f) de M em p

tal que, em $U \cap S$, $n - m$ das funções coordenadas de f se anulam, dizemos que S é uma *subvariedade (regular) de dimensão m* de M . Além disso, $n - m$ é a *codimensão* de S em M .

A Proposição a seguir prova que toda subvariedade de dimensão m é uma m -variedade diferenciável.

Proposição C.4.1. *Seja M uma variedade diferenciável com estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$. Então, dada uma subvariedade S de M , temos que a coleção $\{(U_\alpha \cap S, f_\alpha)\}$ é um atlas para S .*

Demonstração. Conferir em [26], Proposição 9.4, p.102. □

Uma questão importante sobre variedades refere-se à orientação das mesmas, o que pode ser estudado no Capítulo 21 de [26]. Porém, uma caracterização que pode definir de maneira resumida essa questão envolve as funções de transição de um atlas.

Definição C.4.2 (Orientação de variedades). Uma variedade diferenciável é dita *orientável* quando possui um atlas cujas as matrizes jacobianas de suas funções de transição possuem determinante positivo.

C.5 VARIEDADES COM BORDO E COM CANTOS

Observe que a definição de variedade diferenciável M feita anteriormente não inclui, por exemplo, as bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$. Para contornar esse problema, estenderemos a noção de variedade para incluir conjuntos com fronteira. As definições são as mesmas, porém, substituiremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ pelo semi-espaço

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \leq 0\}.$$

Nesse caso, M será dita uma *variedade diferenciável com bordo n -dimensional* ou uma n -variedade diferenciável com bordo. Denotaremos o bordo de M por ∂M e o interior por $\text{int}M$. Observe que se $\partial M = \emptyset$, a definição coincide com a Definição C.1.5.

Porém, triângulos, quadrados, cubos e outros poliedros ainda não são incluídos na definição. Generalizamos um pouco mais a noção de variedades substituindo H^n pelo subespaço

$$\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \leq 0, \dots, x_n \leq 0\}$$

de $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, M será dita uma *variedade diferenciável com cantos n -dimensional* ou uma n -variedade diferenciável com cantos.

APÊNDICE D – Formas diferenciais

A teoria das formas diferenciais é uma ferramenta matemática fundamental para o cálculo multivariável, sendo aplicada em geometria diferencial e física teórica. A escrita deste apêndice é baseada em [12], [16], [19], [21] e [26].

D.1 FORMAS ALTERNADAS

Consideremos nesta seção, E um espaço vetorial n -dimensional arbitrário e $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para E .

Definição D.1.1 (Forma linear). Dizemos que $\varphi : E^k = E \times \dots \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *forma k -linear no espaço E* caso seja uma aplicação linear em cada uma de suas variáveis.

Proposição D.1.1. *Sejam $\varphi, \psi : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ formas k -lineares. Se $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, para $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ uma k -upla de $\{1, \dots, n\}$, isto é, um subconjunto de k elementos, então $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Conferir [19], Seção 7.1, Teorema 1, p. 312. □

Definição D.1.2 (Formas alternadas). Dizemos que uma forma k -linear $\varphi : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é *alternada* em E se dada qualquer k -upla $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$, tal que $e_{i_j} = e_{i_l}$, para algum j e l distintos entre 1 e k , $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$.

Denotemos o conjunto das formas k -lineares alternadas em E por $\Lambda_k(E)^*$. Uma caracterização para a definição de formas alternadas é a proposição a seguir.

Proposição D.1.2. *Uma forma k -linear $\varphi : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é alternada se, e somente se, para qualquer k -upla $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, temos que*

$$\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_k}) = -\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_k}),$$

para j e l distintos entre 1 e k .

Demonstração. Conferir em [16], Seção 19, Teorema 19.2, p. 247. □

Definição D.1.3 (Produto exterior). Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E^*$ funcionais lineares em E , isto é, formas 1-lineares em E . Dizemos que a forma k -linear alternada $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)),$$

onde $(\varphi_i(v_j))$ é a matriz $k \times k$ tal que o elemento na linha i e coluna j é dado por $\varphi_i(v_j)$, é o *produto exterior* entre $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Observação D.1.1. Seja $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ o produto exterior entre $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Então, dado $v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k \in E$, temos que

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_k) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_2(v_k) \\ \varphi_3(v_1) & \varphi_3(v_2) & \ddots & 0 & \cdots & \varphi_3(v_k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \varphi_k(v_2) & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A nulidade de uma das colunas da matriz faz com que seu determinante seja nulo (sobre isso, veja Seção 19 de [16]). Com isso, concluímos que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$, restrita a um subespaço com dimensão menor que E^k , é nula.

D.2 FORMAS DIFERENCIAIS

Definição D.2.1 (Formas diferenciais de grau 1 em $\mathbb{R}^n$). Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma aplicação $\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R})^*$ que associa um ponto $p \in U$ a um funcional linear $\omega(p)$ em $\mathbb{R}^n$ é dita uma *forma diferencial de grau 1* ou uma *1-forma diferencial* em U .

Veja em [21], Seção 2.1, que $(\mathbb{R})^*$ possui uma base canônica $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, formada por funcionais dados da seguinte forma:

$$\begin{cases} dx_i \cdot e_j = 1, & \text{se } i = j, \\ dx_i \cdot e_j = 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{D.2.1})$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $\omega(p)$ é uma combinação linear de $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, isto é,

$$\omega(p) = a_1(p)dx_1 + \cdots + a_n(p)dx_n,$$

sendo $a_1, \dots, a_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas em U . Podemos então escrever a 1-forma diferencial ω como

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n.$$

Caso, para cada $i = 1, \dots, n$, as funções a_i forem de classe C^∞ , diremos que ω é uma *1-forma diferencial de classe C^∞* .

Agora, vamos estender a definição feita para formas diferenciais a um grau k inteiro maior que 1.

Definição D.2.2 (Formas diferenciais de grau k em $\mathbb{R}^n$). Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $k > 1$ um inteiro. Uma aplicação $\omega : U \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$ que faz corresponder cada ponto $p \in U$ a uma forma k -linear alternada $\omega(p)$ em $\mathbb{R}^n$ é dita uma *forma diferencial de grau k* ou uma *k -forma diferencial* em U .

Novamente, confira em [21], Seção 2.2, onde pode ser visto que uma base para o conjunto $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$ é a coleção finita de formas k -lineares alternadas ($dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$), onde cada $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ é uma combinação de k índices escolhidos entre 1 e n e cada dx_{i_j} é dado como em (D.2.1). Sendo assim, forma k -linear alternada $\omega(p)$, dada em (D.2.2), pode ser escrita com uma combinação linear da coleção finita (dx_I), isto é,

$$\omega(p) = \sum_I a_I(p) dx_I,$$

onde cada $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em U . Podemos escrever ω então como

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Observação D.2.1. Em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, o grau máximo de uma forma diferencial ω não-nula é exatamente n . Para compreender essa limitação, considere que cada termo da forma depende de um multi-índice $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ que satisfaz a ordenação estrita $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Se tivéssemos $k > n$, o Princípio da Casa dos Pombos implicaria a repetição de pelo menos um índice ($i_l = i_m$). Devido à natureza antissimétrica do produto exterior, qualquer repetição anula o termo ($dx_{i_l} \wedge dx_{i_m} = 0$), resultando em $dx_I = 0$. No caso particular de uma n -forma, existe apenas uma combinação possível para os índices: a sequência completa $\{1, 2, \dots, n\}$. Dessa forma, toda n -forma em $\mathbb{R}^n$ pode ser expressa de maneira simplificada como $\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, onde $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar.

Se cada a_I for de classe C^∞ , diremos que ω é uma *k -forma diferencial de classe C^∞* .

Para construir uma álgebra das formas diferenciais, definiremos a seguir operações entre as mesmas.

Definição D.2.3 (Soma e produto por escalar). Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\bar{\omega} = \sum_I b_I dx_I$ k -formas diferenciais definidas em um aberto U de $\mathbb{R}^n$ e c uma constante real. Definamos a *soma* de ω e $\bar{\omega}$ como

$$\omega + \bar{\omega} = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

e o *produto* de c por ω como

$$c \cdot \omega = \sum_I c a_I dx_I.$$

Definição D.2.4 (Formas diferenciais em uma variedade). Sejam M uma n -variedade diferenciável e k um inteiro maior ou igual a 1. Uma aplicação $\omega : M \longrightarrow \Lambda_k(T_p M)$ que associa um ponto $p \in M$ a uma forma k -linear alternada $\omega(p)$ no espaço vetorial $T_p M$ é dita uma *forma diferencial de grau k* ou uma *k -forma diferencial* em M .

Além disso, convencionaremos que uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade M será dita uma *0-forma diferencial*.

D.3 PULLBACK

Esta subseção tem como objetivo apresentar uma maneira de representar uma forma diferencial, definida em uma variedade, em outra variedade por meio de uma aplicação diferenciável entre essas duas variedades.

Definição D.3.1 (Pullback). Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre uma m -variedade diferenciável M e uma n -variedade diferenciável N . Para cada inteiro k maior ou igual a 1, dizemos que a aplicação $\omega \longmapsto F^*\omega$, induzida por F , que leva k -formas diferenciais em N em k -formas diferenciais em M , definida como

$$(F^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(F(p))(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)),$$

onde $p \in M$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p M$, é o *pullback* por F .

Dessa forma, podemos representar, localmente, em $\mathbb{R}^n$ uma k -forma diferencial ω definida em uma n -variedade diferenciável M , com estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, utilizando de suas cartas locais. A *representação local* de ω em $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ é o pullback $\omega_\alpha = (f_\alpha^{-1})^*\omega$ em V_α . Caso ω seja uma forma diferencial de classe C^∞ , para todo α , dizemos que ω é uma *k -forma diferencial de classe C^∞* .

Observação D.3.1. O comentário anterior, em conjunto com a Observação D.2.1, revela que o maior grau para uma forma diferencial não-nula em uma n -variedade diferenciável é n .

Observação D.3.2. Dada uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ entre duas variedades e $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma diferencial em N , vamos convencionar que

$$F^*g = g \circ F.$$

Ademais, se ω e $\bar{\omega}$ são k -formas diferenciais em M como acima e c uma constante real, definamos a representação, em cada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$, de $\omega + \bar{\omega}$, dita a *soma de ω e $\bar{\omega}$* , como

$$(\omega + \bar{\omega})_\alpha = \omega_\alpha + \bar{\omega}_\alpha = f_\alpha^*\omega + f_\alpha^*\bar{\omega}$$

e a representação, em cada V_α , de $c \cdot \omega$, chamado o *produto de c por ω* , como

$$(c \cdot \omega)_\alpha = c \cdot \omega_\alpha = c \cdot f_\alpha^* \omega.$$

Proposição D.3.1. *Sejam $F : M \longrightarrow N$ e $G : N \longrightarrow Z$ aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis e ω uma k -forma diferencial em Z . Então,*

$$(G \circ F)^* \omega = F^*(G^* \omega).$$

Um outro resultado importante é sobre a representação de um pullback de uma forma diferencial definida em um espaço euclidiano.

Proposição D.3.2. *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável entre abertos e $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma diferencial definida em V , com $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$. Então,*

$$F^* \omega = \sum_I (a_I \circ F) dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k},$$

onde $F_1, \dots, F_m$ são as funções coordenadas de F .

Em relação às provas das proposições anteriores, conferir em [21].

Para cada inteiro k maior ou igual a 0, dada M uma variedade diferenciável, denotemos por $\Omega^k(M)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das k -formas diferenciáveis de classe C^∞ definidas em M . Como no restante do trabalho só trabalharemos com formas de classe C^∞ , para facilitar a escrita, chamaremos as formas diferenciais de classe C^∞ simplesmente de formas diferenciais.

D.4 INTEGRAÇÃO DE FORMAS

Nesta Seção, temos o objetivo de introduzir a integração de uma n -forma sobre uma n -variedade diferenciável. Antes disso, definamos a integração sobre o espaço euclidiano de mesma dimensão.

Definição D.4.1 (Suporte de uma forma diferencial). Sejam ω uma k -forma diferencial, para $k \geq 0$ um inteiro, definida em uma variedade M e um subconjunto $A = \{p \in M ; \omega(p) \neq 0\}$. O fecho do conjunto A ,

$$\text{supp } \omega = \overline{A},$$

é dito o *suporte de ω* .

Definição D.4.2 (Integral de uma forma em um espaço euclidiano). Seja $\omega = adx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ uma n -forma diferencial definida em um aberto U de $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto.

Definamos a *integral* de ω sobre U como a integral de Riemann da 0-forma diferencial $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ sobre $\text{supp } a$, isto é,

$$\int_U \omega = \int_{\text{supp } a} a(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Com essa definição, podemos avançar para definir a integral de uma forma sobre uma variedade qualquer. Porém, há um problema envolvendo o suporte de tal forma.

Definição D.4.3 (Integral de uma forma sobre uma carta local). Sejam ω uma n -forma diferencial definida em uma n -variedade diferenciável M com suporte compacto e $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma estrutura diferenciável para M . Se $\text{supp } \omega \subset U_\lambda$, para algum λ , definamos a *integral de ω sobre U_λ* como a integral de sua representação em $V_\lambda = f_\lambda(U_\lambda)$ sobre V_λ , ou seja,

$$\int_{U_\lambda} \omega = \int_{V_\lambda} (f_\lambda^{-1})^* \omega.$$

Suponhamos, agora, que o suporte da forma em questão não esteja contido em qualquer vizinhança coordenada. Para resolver esse problema utilizamos o conceito de partição da unidade.

Definição D.4.4 (Partição da unidade). Seja M uma variedade diferenciável com estrutura diferenciável $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Uma família $\{\rho_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$ de funções de classe C^∞ é dita uma *partição da unidade em M subordinada à cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$* se:

1. $\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) = 1, \forall p \in M$;
2. A coleção $\{\text{supp } \rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é localmente finita, isto é, cada ponto p de M pertence a apenas um número finito de elementos de $\{\text{supp } \rho_\lambda\}$;
3. $\text{supp } \rho_\lambda \subset U_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Confira em [26], Teorema 13.7, pp. 347-348, que toda variedade possui uma partição da unidade subordinada à uma cobertura de vizinhanças coordenadas. Com isso, seja uma n -forma diferencial ω qualquer em um variedade M , com estrutura diferenciável $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, e $\{\rho_\lambda\}$ uma partição da unidade de M subordinada à cobertura $\{U_\lambda\}$. Note que, por definição, podemos escrever ω como

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda \omega.$$

Novamente, por definição, temos que $\text{supp } \rho_\lambda \omega \subset U_\lambda$. Então, é possível introduzir a definição a seguir.

Definição D.4.5 (Integral de forma sobre uma variedade). Sejam ω uma n -forma diferencial definida em uma n -variedade diferenciável M com suporte compacto, $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma estrutura diferenciável para M e $\{\rho_\lambda\}$ uma partição da unidade de M subordinada a $\{U_\lambda\}$. Definamos a *integral de ω sobre M* como o somatório das integrais de cada $\rho_\lambda \omega$ sobre U_λ , ou seja,

$$\int_M \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{U_\lambda} \rho_\lambda \omega.$$

Proposição D.4.1. *Sejam M uma n -variedade diferenciável, $\omega, \bar{\omega} \in \Omega^n(M)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\int_M (c\omega + \bar{\omega}) = c \cdot \int_M \omega + \int_M \bar{\omega}.$$

Demonstração. Confira em [19], Teorema 12, p. 355. □

As definições e resultados para variedades com bordo ou para variedades com cantos são análogas.

D.5 DERIVADA EXTERIOR

Como feito anteriormente, definiremos a derivada exterior de uma forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ e depois estender a ideia para uma variedade qualquer.

Definição D.5.1 (Diferencial de uma função). Sejam um aberto U de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma diferencial em U . Chamaremos a 1-forma diferencial

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

de *diferencial de f* .

Observe que, nesse caso, temos um operador $d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ que leva 0-formas diferenciais em U em 1-formas diferenciais em U .

Definição D.5.2 (Derivada exterior). Sejam um aberto U de $\mathbb{R}^n$ e $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma diferencial em U , para qualquer inteiro k maior ou igual a 1 e $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Chamaremos a $(k+1)$ -forma diferencial

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

de *derivada exterior de ω* , sendo $da_I \wedge dx_I = da_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Novamente, por convenção, dadas uma variedade diferenciável qualquer M , com estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, e ω uma k -forma diferencial em M , definamos a representação local da $(k+1)$ -forma diferencial $d\omega$, chamada de *derivada exterior de ω* , em $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ como

$$(d\omega)_\alpha = d\omega_\alpha = d(f_\alpha^*\omega).$$

Teremos então, para cada inteiro k maior ou igual a 0, um operador $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ que leva k -formas diferenciais em M em $(k+1)$ -formas diferenciais em M , o qual chamaremos de *derivada exterior (de grau k) de M* .

Veja em [21] que vale a seguinte Proposição.

Proposição D.5.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, ω e $\bar{\omega}$ k -formas diferenciais em N e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Valem as seguintes propriedades:*

1. $d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega}$;
2. $d(d\omega) = 0$;
3. $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.

Observação D.5.1. Pela Observação D.3.1, se ω é uma n -forma definida em uma n -variedade diferenciável, $d\omega = 0$.

Definição D.5.3 (Formas fechadas e formas exatas). Seja ω uma k -forma diferencial definida em uma variedade diferenciável M . Caso $d\omega = 0$, dizemos que ω é uma *forma fechada*. Se $\omega = d\varphi$, onde φ é uma $(k-1)$ -forma diferencial em M , ω é dita uma *forma exata*.

D.6 TEOREMA DE STOKES

Um importante resultado envolvendo integração de formas sobre variedades é o Teorema de Stokes.

Teorema D.6.1 (Teorema de Stokes). *Seja M uma n -variedade diferenciável com bordo orientável e ω uma $(n-1)$ -forma diferencial definida em M com suporte compacto. Então,*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Demonstração. Conferir [21], pp. 65-69. □

Observação D.6.1. Veja em [12], Teorema 16.25, p. 419, que o mesmo resultado vale para variedade com cantos.