

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gustavo Dutra Sousa

O Bilhar no Limão Assimétrico: uma nova percepção sobre hiperbolicidade

Juiz de Fora

2026

Gustavo Dutra Sousa

O Bilhar no Limão Assimétrico: uma nova percepção sobre hiperbolicidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Coorientador: Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sousa, Gustavo Dutra.

O Bilhar no Limão Assimétrico : uma nova percepção sobre hiperbolicidade / Gustavo Dutra Sousa. – 2026.

164 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes

Coorientador: Regis Castijos Alves Soares Junior

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2026.

1. Bilhares. 2. Limão Assimétrico. 3. Hiperbolicidade. I. Gomes, José Barbosa, orient. II. Junior, Regis Castijos Alves Soares, coorient. III. Título.

Gustavo Dutra Sousa

O Bilhar no Limão Assimétrico: uma nova percepção sobre hiperbolicidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 28 de abril de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Reginaldo Braz Batista
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Sônia Pinto de Carvalho
Universidade Federal de Minas Gerais

Juiz de Fora, 29/04/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Jose Barbosa Gomes, Professor(a)**, em 30/04/2026, às 08:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Reginaldo Braz Batista, Professor(a)**, em 30/04/2026, às 13:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Regis Castijos Alves Soares Junior, Professor(a)**, em 30/04/2026, às 13:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sonia Pinto de Carvalho, Usuário Externo**, em 07/05/2026, às 18:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2966420** e o código CRC **685D37B1**.

Dedico este trabalho ao meu falecido avô, Manoel Fernando Gonçalves de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Raquel Dutra Oliveira; ao meu padrasto, Alexsander Pinto da Silva; ao meu irmão, João Gabriel Dutra Pinto; e aos meus amados cachorros, Duda e Zeus, pelo apoio prestado desde sempre, cada um a sua própria maneira, para que eu sempre pudesse prosseguir.

Agradeço à minha avó, Edith de Souza Pacheco, pelo lar providenciado desde o início da minha graduação, em 2019, e por todos os benefícios inerentes a este ato, especialmente pela companhia, pelo cuidado, pelo carinho e por todos os momentos cotidianos compartilhados.

Agradeço ao meu falecido avô, Manoel Fernando Gonçalves de Oliveira, por sempre acreditar em mim e me apoiar na minha trajetória acadêmica.

Agradeço aos familiares que não citei por nome, mas que também acompanharam o percurso.

Agradeço a todos os meus amigos que participaram dessa jornada de diferentes formas. Em particular, agradeço aos amigos Pedro Henrique Meirelles de Azevedo e Lorrان Tesch da Silva.

Agradeço ao meu orientador, José Barbosa Gomes, por ter aceitado a orientação e todos os trâmites envolvidos. Da mesma forma, agradeço ao meu coorientador, Regis Castijos Alves Soares Junior, por todas as reuniões, conselhos e disponibilidade. De modo geral, agradeço aos professores que participaram da minha formação. Em especial, agradeço às professoras Ana Tércia Monteiro Oliveira e Sofia Carolina da Costa Melo.

Agradeço ao professor Reginaldo Braz Batista e à professora Sônia Pinto de Carvalho por terem aceito participar da banca e, por consequência, desta etapa decisiva em minha trajetória.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora pelo ensino público e de qualidade e a todos os profissionais que aqui atuam pelo excelente serviço prestado.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido durante o mestrado.

Por fim, agradeço por ter tanto pelo que agradecer.

“Se melhorar, estraga.”

RESUMO

Bilhares constituem sistemas dinâmicos que descrevem o deslocamento de uma partícula ao colidir contra as bordas de uma região, respeitando a lei de reflexão. O estudo do comportamento caótico desses sistemas remonta à década de 1970, através do artigo seminal de Yakov Sinai. Devido à sua natureza geométrica, tais sistemas facilitam o exame das alternâncias entre regimes de regularidade e caos, especialmente o estudo da hiperbolicidade. Dentre os exemplos tradicionais, destaca-se a classe das Flores de Bunimovich, bilhares focalizadores cujas componentes satisfazem o Mecanismo de Defocalização proposto por Leonid Bunimovich, ou seja, suas componentes focalizadoras são suficientemente distantes uma das outras, acarretando na hiperbolicidade do sistema. Neste trabalho, demonstraremos a hiperbolicidade do Bilhar no Limão Assimétrico, formado pela intersecção de dois discos de raios distintos (um de raio 1 e outro de raio $r > 1$). Apesar deste sistema não satisfazer as condições geométricas suficientes para o Mecanismo de Defocalização, verificou-se que o mesmo exibe hiperbolicidade sob contextos específicos. Tal resultado desafia as expectativas geométricas convencionais, oferecendo uma perspectiva inédita sobre as origens do caos e da hiperbolicidade.

Palavras-chave: bilhares; limão assimétrico; hiperbolicidade.

ABSTRACT

Billiards are dynamical systems that model the motion of a particle reflecting off the boundaries of a region, obeying the law of reflection. The study of the chaotic behavior of these systems dates back to the 1970s, through the seminal article of Yakov Sinai. The geometric character of these systems favors the analysis of transitions between regular and chaotic behaviors, with emphasis on the study of hyperbolicity. Among the classic examples, the class of Bunimovich Flowers stands out, focusing billiards whose components satisfy the Defocusing Mechanism proposed by Leonid Bunimovich, that is, their components are sufficiently distant from each other, resulting in the hyperbolicity of the system. In this work, we will demonstrate the hyperbolicity of the Asymmetric Lemon Billiard, formed by the intersection of two disks of different radii (one with radius 1 and the other with radius $r > 1$). Although this system does not satisfy the Defocusing Mechanism, it still exhibits hyperbolicity under certain conditions, contradicting traditional geometric intuition and bringing a new perspective on the concept of hyperbolicity and chaos.

Keywords: billiards; asymmetric lemon; hyperbolicity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Mesa de bilhar com dois arcos maiores simétricos.	15
Figura 1.2 – Mesa de bilhar equivalente a da Figura 1.1.	15
Figura 1.3 – Mesa de bilhar adaptada a partir da Figura 1.1.	15
Figura 2.1 – Vetores tangentes e normais de uma curva plana.	18
Figura 2.2 – Fluxo Suspensão.	35
Figura 3.1 – Tipos de componentes.	46
Figura 3.2 – Tipos de vértices.	47
Figura 3.3 – Ângulo interno dos vértice x_1	48
Figura 3.4 – Mesa de Bilhar que não satisfaz a Condição 2.	49
Figura 3.5 – Tipos de Componentes de acordo com a curvatura.	50
Figura 3.6 – Colisão regular em $\tilde{\Gamma}$	52
Figura 3.7 – Espaço de fase do bilhar.	55
Figura 3.8 – Determinação da medida do ângulo φ	57
Figura 3.9 – O espaço de colisão $\mathcal{M}$	57
Figura 3.10–Frente de ondas pós-colisional.	63
Figura 3.11–Seção ortogonal ζ^+	64
Figura 3.12–Tipos de frente de ondas.	66
Figura 3.13–Bilhar no disco D de raio r	70
Figura 3.14–Representação da dinâmica descrita.	72
Figura 4.1 – Mesa do Bilhar no Limão.	73
Figura 4.2 – Mesa do Bilhar no Limão - Patologias.	74
Figura 4.3 – Mesa do Bilhar no Limão Assimétrico.	75
Figura 4.4 – Mesa do Bilhar no Limão Assimétrico - Patologias.	76
Figura 5.1 – Representação da órbita $\mathcal{O}_2$	92
Figura 5.2 – Figura auxiliar do Lema 5.2.1.	97
Figura 5.3 – Figura auxiliar do Lema 5.2.2.	99
Figura 5.4 – Sub-casos referentes aos possíveis valores de τ_0	108
Figura 5.5 – Representação visual de y_1 e y_2	124
Figura 5.6 – Divisão da mesa $\mathcal{Q}(b, r)$	125
Figura 5.7 – Representação da situação descrita.	127
Figura 5.8 – Zoom no Ponto P_1 , a partir da Figura 5.7.	127
Figura 5.9 – Triângulo O_rMP_1 , obtido a partir da Figura 5.7.	128
Figura 5.10–Representação da situação descrita.	129
Figura 5.11–Zoom no Ponto P_1 , a partir da Figura 5.10.	129
Figura 5.12–Representação da situação descrita.	131
Figura A.1 – Interface da simulação do bilhar no círculo unitário.	149
Figura A.2 – Interface da simulação do bilhar no limão assimétrico.	161

LISTA DE SÍMBOLOS

A

$\mathcal{F}$	Aplicação de colisão do bilhar.
$\mathcal{I}$	Aplicação de involução.
$\widehat{F}$	Aplicação de primeiro retorno em $\widehat{\mathcal{M}}$, definida na página 80.
F	Aplicação de primeiro retorno em M , definida na página 85.

B

$\partial\mathcal{Q}, \Gamma$	Bordo da mesa do bilhar.
-------------------------------	--------------------------

C

Γ_σ	Componente da mesa do bilhar no limão assimétrico referente ao disco D_σ , em que $\sigma \in \{1, r\}$.
Γ_i	Componente (parede) da mesa do bilhar.
$\tau(x)$	Comprimento da trajetória entre x e $\mathcal{F}(x)$.
Γ_+	Conjunto das componentes dispersoras.
Γ_0	Conjunto das componentes flat.
Γ_-	Conjunto das componentes focalizadoras.
$\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_\infty$	Conjunto das singularidades do bilhar, para $n \in \mathbb{Z}$.
N	Conjunto definido na página 79.
$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$	Conjunto definido na página 79, com $\sigma \in \{1, r\}$.
M_n	Conjunto definido na página 80, para cada $n \in \mathbb{N}$.
M	Conjunto definido na página 85.
X_k	Conjunto definido na página 96, para $k \in \{0, 1, 2\}$.
$\tilde{\Gamma}$	Conjunto dos pontos regulares.
Γ_*	Conjunto dos vértices.
κ	Curvatura.
$\mathcal{B}^+(u)$	Curvatura pós-colisional da frente de ondas gerada pelo vetor u .
$\mathcal{B}^-(u)$	Curvatura pré-colisional da frente de ondas gerada pelo vetor u .

D

$D_x f$	Derivada de f no ponto x .
D_r	Disco de raio r .

E

$\mathcal{M}$	Espaço de colisão.
$\mathcal{M}_\sigma$	Espaço de colisão do bilhar no limão assimétrico referente a componente Γ_σ , em que $\sigma \in \{1, r\}$.
Ω	Espaço de fase.
E_x^s	Espaço estável no ponto x .
E_x^u	Espaço instável no ponto x .
$T_x X$	Espaço tangente a X no ponto x .
$\chi(f, x, v)$	Expoente de Lyapunov da aplicação f em x com direção v .

F

Φ^t	Fluxo.
$[a_1, \dots, a_n]$	Fração contínua.
$\{\Psi^t(\theta)\}_t$	Frente de ondas pós-colisional.
$\{\Xi^t(\theta)\}_t$	Frente de ondas pré-colisional.
$\lfloor \cdot \rfloor$	Função piso.
sgn	Função sinal.
$\lceil \cdot \rceil$	Função teto.

I

Id	Identidade.
-------------	-------------

M

$\ll$	Medida absolutamente contínua.
λ	Medida de Lebesgue.
μ	Medida do bilhar.
$\mathcal{Q}$	Mesa do bilhar.
$\mathcal{Q}(b, r)$	Mesa do bilhar no limão assimétrico cuja distância entre os centros dos discos D_1 e D_r é igual a b .
$\mathcal{Q}(b)$	Mesa do bilhar no limão cuja distância entre os centros de dois discos D_1 é igual a b .

N

j_k	Número de colisões sofridas por x_i , em relação a $\widehat{F}$, para $k \in \{0, 1\}$.
i_k	Número de colisões sofridas por x_i , em relação a F , para $k \in \{0, 1, 2\}$.

P

$\mathcal{R}(x)$	Parâmetro de reflexão no ponto x .
x_0, x_1, x_2	Pontos definidos nas páginas 80 e 85 .

S

$\zeta^\pm$	Seção ortogonal.
-------------	------------------

T

η	Tempo de primeira saída.
$\tau_X(x)$	Tempo de retorno de x ao conjunto X , para relacionar fluxos com transformações.
$\xi_X(x)$	Tempo de retorno de x ao conjunto X , para relacionar transformações com transformações.

V

τ_0	Valor definido na página 81 e 86 .
τ_1	Valor definido na página 81 e 86 .
$\hat{\tau}_k$	Valor definido na página 81 e 86 .
$\bar{\tau}_k$	Valor definido na página 86 .
d_k	Valor definido na página 81 e 86 .
$\widehat{d}_k$	Valor definido na página 81 e 86 .
$\mathcal{R}_k$	Valor definido na página 81 e 86 .
p, q	Valores definidos na página 96 .
$N(t)$	Vetor normal.
v^+	Vetor pós-colisional.
v^-	Vetor pré-colisional.
v_x^d, v_x^p	Vetores definidos na página 100 .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	17
2.1	GEOMETRIA DIFERENCIAL	17
2.2	FRAÇÕES CONTÍNUAS	20
2.3	VARIEDADES	32
2.4	SISTEMAS DINÂMICOS	33
2.5	TEORIA DA MEDIDA	37
2.6	TEORIA ERGÓDICA	40
3	UMA INTRODUÇÃO AOS BILHARES	45
3.1	CONCEITOS INICIAIS E CONDIÇÕES DE MESA	45
3.2	APLICAÇÃO DE COLISÃO E CARACTERÍSTICAS	54
3.2.1	Aplicação de Colisão	55
3.2.2	Coordenadas do Espaço de Colisão	56
3.2.3	Singularidades	57
3.2.4	Derivada e Medida Invariante de $\mathcal{F}$	59
3.2.5	Involução	61
3.3	HIPERBOLICIDADE E CURVATURAS DE FRENTES DE ONDAS	62
3.3.1	Hiperbolicidade nos Bilhares	62
3.3.2	Frentes de Ondas e Curvaturas	63
3.3.3	Hiperbolicidade e Curvaturas de Frentes de Ondas	68
3.4	O BILHAR NO CÍRCULO	69
4	OS BILHARES NO LIMÃO	73
4.1	O BILHAR NO LIMÃO	73
4.2	O BILHAR NO LIMÃO ASSIMÉTRICO	75
4.3	CURVATURAS DE FRENTES DE ONDAS NO LIMÃO ASSIMÉTRICO	78
4.3.1	A Aplicação Induzida $\hat{F}$	78
4.3.2	A Aplicação Induzida F	85
5	A HIPERBOLICIDADE NO LIMÃO ASSIMÉTRICO	91
5.1	HIPÓTESES	91
5.2	RESULTADOS AUXILIARES	96
5.3	RESULTADOS PRINCIPAIS	119
6	CONCLUSÃO	140
	REFERÊNCIAS	141
	APÊNDICE A – SIMULAÇÕES DO BILHAR	143
A.1	CÓDIGO DO BILHAR NO CÍRCULO UNITÁRIO	143
A.2	CÓDIGO DO BILHAR NO LIMÃO ASSIMÉTRICO	149
ÍNDICE		163

1 INTRODUÇÃO

Sistemas Dinâmicos são uma grande área da Matemática cujo desenvolvimento está fortemente conectado com outros campos independentes, como Geometria, Topologia e Equações Diferenciais. Em linhas gerais, essa teoria busca compreender a evolução temporal de estruturas matemáticas, estabelecendo a relação entre o estado presente de um sistema e seus estados futuros.

Historicamente, o ponto de partida dessa teoria remonta à Mecânica Clássica, formulada por Isaac Newton no século XVII. Em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (NEWTON, 1846), Newton estabeleceu as leis fundamentais do movimento e da gravitação universal, descrevendo o comportamento de corpos sujeitos a forças por meio de equações diferenciais. Essa formulação introduziu uma nova forma de conceber o mundo físico: conhecidas as condições iniciais e as leis que regem um sistema, torna-se possível, ao menos em princípio, determinar sua evolução temporal. Assim, consolidou-se a base matemática do pensamento determinista.

Essa visão foi posteriormente ampliada por Pierre-Simon Laplace, que levou o determinismo newtoniano ao extremo ao conceber o célebre demônio de Laplace, um intelecto capaz de conhecer todas as forças da natureza e as posições de todos os corpos em um dado instante, sendo assim capaz de prever o futuro e reconstituir o passado com precisão absoluta. Essa concepção representava o ideal de previsibilidade total, reforçando a imagem de um universo perfeitamente ordenado, em que nada escaparia ao cálculo.

Contudo, no final do século XIX, Henri Poincaré, ao investigar o problema dos três corpos, revelou limitações profundas dessa visão determinista. Ao perceber que pequenas variações nas condições iniciais podiam gerar trajetórias radicalmente distintas, Poincaré inaugurou uma nova abordagem para o estudo de sistemas complexos: a análise qualitativa do comportamento das soluções. Sua obra introduziu conceitos fundamentais, como órbitas periódicas, estabilidade e seções de Poincaré, que viriam a constituir os alicerces da Teoria Moderna dos Sistemas Dinâmicos. Essa descoberta inaugurou a noção do que mais tarde seria conhecido como caos determinístico, fenômeno em que sistemas regidos por leis exatas exibem comportamentos intrinsecamente imprevisíveis a longo prazo. Com isso, o ideal de previsibilidade absoluta era rompido, pavimentando o caminho para o desenvolvimento da Teoria Contemporânea dos Sistemas Dinâmicos.

Após os avanços de Poincaré, o matemático George D. Birkhoff, em seu livro *Dynamical Systems* (BIRKHOFF, 1927), desenvolveu uma formulação sistemática dos fluxos Hamiltonianos, formalizando noções como seções transversais, mapas de retorno e métodos variacionais aplicados à dinâmica. É nesse contexto que os bilhares surgem de modo rigoroso, sistemas dinâmicos nos quais uma partícula move-se livremente dentro de uma região limitada, interagindo com a fronteira por meio de colisões elásticas.

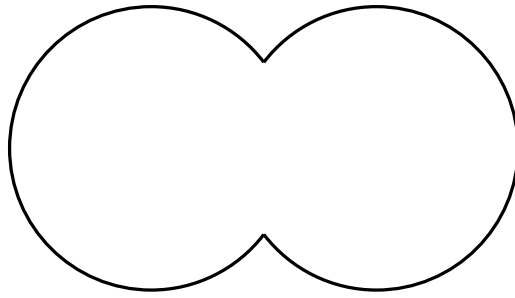
Nos trabalhos de Birkhoff, o foco recaiu sobre bilhares convexos, cujas componentes de fronteira são todas focalizadoras (convexas). Esse tipo de geometria tende a produzir comportamentos dinâmicos predominantemente regulares. Posteriormente, Vladimir Lazutkin, em seu artigo (LAZUTKIN, 1972), demonstrou que bilhares planos, convexos e suficientemente suaves sempre admitem uma família de cáusticas, isto é, curvas invariantes que confinam as órbitas a uma vizinhança da fronteira. Essas curvas atuam como barreiras no espaço de fase, impedindo que órbitas se disseminem por toda a região disponível, o que inviabiliza a presença do comportamento caótico.

Em contrapartida, em 1970, Yakov Sinai, em seu artigo seminal (SINAI, 1970), demonstrou que bilhares dispersores, cujas componentes de fronteira são todas dispersoras (côncavas), são hiperbólicos, uma característica essencial para o comportamento caótico, dando origem à classe dos denominados bilhares caóticos. A partir disso, podemos associar o desenvolvimento da Teoria de Bilhares como uma consequência natural de suas características. Devido à sua formulação simples, ela permite observar de forma mais direta a evolução temporal de um sistema e, assim, examinar o surgimento do caos sob uma perspectiva mais concreta e geométrica. Outro aspecto fundamental para o avanço dessa teoria é o fato de que todas as suas propriedades dinâmicas e estatísticas são determinadas inteiramente pela geometria da região considerada.

Prosseguindo com a teoria, ainda na década de 1970, Leonid Bunimovich, no artigo (BUNIMOVICH, 1974a), apresentou os primeiros exemplos de bilhares hiperbólicos compostos tanto de componentes focalizadoras quanto componentes dispersoras. Posteriormente, em (BUNIMOVICH, 1974b) e (BUNIMOVICH, 1979), o autor formalizou o chamado mecanismo de defocalização, mostrando que a hiperbolicidade em bilhares pode surgir mesmo na ausência de componentes dispersoras. Em linhas gerais, a essência do mecanismo proposto reside em uma distância suficientemente grande entre as componentes focalizadoras do bilhar, de modo que trajetórias inicialmente convergentes tenham espaço para se defocalizarem após múltiplas colisões. Os exemplos mais emblemáticos dessa classe são as chamadas flores de Bunimovich, bilhares cujas componentes são arcos de elipses.

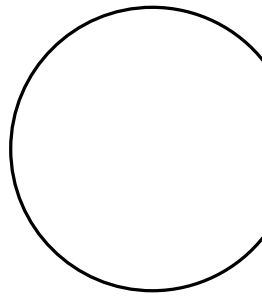
Em especial, bilhares cujas componentes são todas arcos de círculos também são flores de Bunimovich. Neste caso, o mecanismo de defocalização admite uma caracterização puramente geométrica, bastando verificar se todos os círculos obtidos pelo completamento das componentes do bilhar estão todos contidos no interior da mesa. À luz desse critério, o bilhar composto por dois arcos maiores de círculo, simétricos em relação à corda que os une, ilustrado na Figura 1.1, é hiperbólico. Em particular, devido à simetria do bilhar supracitado, sua dinâmica é equivalente ao bilhar obtido tomando apenas um dos arcos e a corda que une seus extremos, representado na Figura 1.2. Consequentemente, tal bilhar também é hiperbólico.

Figura 1.1 – Mesa de bilhar com dois arcos maiores simétricos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

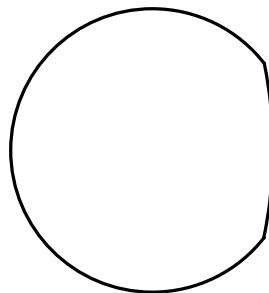
Figura 1.2 – Mesa de bilhar equivalente a da Figura 1.1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Partindo do bilhar referente à Figura 1.2, é provado numericamente no artigo (CHEN et al., 2013) que, ao substituímos a corda desta mesa por um arco de circunferência com curvatura suficientemente pequena, ou seja, com raio suficientemente grande, obtemos um bilhar convexo, como representado na Figura 1.3, que permanece hiperbólico. Tal resultado é surpreendente, pois, apesar desse bilhar não se enquadrar no mecanismo de Bunimovich, já que seus arcos completados não permanecem contidos na mesa (pelo contrário, eles a contêm), o comportamento caótico persiste. A esta surpreendente classe de bilhares, foi dado o nome bilhares no limão assimétrico, o foco central do presente texto.

Figura 1.3 – Mesa de bilhar adaptada a partir da Figura 1.1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

O objetivo deste trabalho é replicar os resultados provados no artigo (BUNIMOVICH; ZHANG; ZHANG, 2016), detalhando as demonstrações de seus resultados principais e fornecendo as preliminares matemáticas necessárias para um bom entendimento dos mesmos. Assim, ao final do trabalho, apresentaremos uma prova rigorosa da hiperbolicidade dos bilhares no limão assimétrico quando determinadas condições são satisfeitas. Além disso, estabeleceremos condições geométricas explícitas e verificáveis que garantem a hiperbolicidade de uma família de bilhares no limão assimétrico, fornecendo assim um critério construtivo para sua obtenção.

Por fim, apresentamos uma breve descrição sobre cada um dos capítulos que compõe o presente trabalho.

- No Capítulo 2 apresentaremos conteúdos básicos de diversas áreas da matemática, a saber, Geometria Diferencial, Frações Contínuas, Variedades, Sistemas Dinâmicos, Teoria da Medida e Teoria Ergódica. Tais assuntos são fundamentais para um entendimento total do corpo central do trabalho.
- No Capítulo 3 estudaremos a Teoria de Bilhares de modo geral, passando por conceitos básicos da área, características da dinâmica e também aspectos relacionados à hiperbolicidade do bilhar. Ao final deste capítulo, também exploraremos o bilhar no círculo, cujos resultados auxiliarão no entendimento do bilhar que almejamos estudar com mais ênfase.
- No Capítulo 4 introduziremos o bilhar no limão e o bilhar no limão assimétrico, em que o último é o nosso foco principal. Ainda neste capítulo, exploraremos aplicações induzidas deste bilhar, caracterizando as curvaturas das frentes de onda associadas a estas aplicações. Tal caracterização será essencial para o capítulo seguinte.
- No Capítulo 5 iremos impor as hipóteses necessárias para garantirmos a hiperbolicidade do bilhar no limão assimétrico. Também neste capítulo, demonstraremos resultados que auxiliarão na prova dos nossos teoremas principais. Por fim, enunciaremos e demonstraremos nossos resultados principais.
- No Apêndice , apresentaremos dois códigos em Python que simulam a dinâmica do bilhar no círculo unitário e do bilhar no limão assimétrico, respectivamente.

2 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo iremos apresentar alguns conceitos e resultados que serão necessários para um total entendimento da parte central do trabalho. Assim, cada seção estará atrelada a uma área de conhecimento específica e suas respectivas referências.

2.1 GEOMETRIA DIFERENCIAL

No estudo dos bilhares, a geometria desempenha um papel fundamental, tanto a plana quanto a diferencial. Partindo do pressuposto que os conhecimentos de Geometria Plana já são de conhecimento comum, ressaltaremos apenas as relacionadas à Geometria Diferencial, em que nossas referências principais são os livros (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), (BLOCH, 1956), (CARMO, 2005) e (PRESSLEY, 2010).

Uma parte essencial do nosso trabalho se dará na análise das componentes da mesa do bilhar. Tais componentes não são nada além de curvas planas, cuja definição se dá abaixo.

Definição 2.1.1. *Uma **curva** suave em $\mathbb{R}^2$ (ou **curva plana**) é uma função suave $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Em particular,*

- *Uma curva é **unitária** quando $\|f'(t)\| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.*
- *Uma curva é **regular** quando $\|f'(t)\| \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$.*

A fim de facilitar cálculos e obter bons resultados, é interessante que nossas curvas sejam unitárias. As definições e resultados abaixo nos mostram que, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir tal condição.

Definição 2.1.2. *Sejam $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : (d, e) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas suaves. Dizemos que g é uma **curva reparametrizada** (ou **reparametrização**) de f se existir um difeomorfismo $h : (d, e) \rightarrow (a, b)$ tal que $g = f \circ h$.*

Notemos que uma curva e sua reparametrização possuem a mesma imagem. Prosseguindo com os conceitos, temos

Definição 2.1.3. *Sejam $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e $t_0 \in (a, b)$. Dizemos que $L : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, em que*

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du ,$$

*é a **função comprimento de arco** a partir de t_0 da curva f .*

Proposição 2.1.4. *Toda curva suave e regular $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser reparametrizada pelo seu comprimento de arco.*

Demonstração: Ver (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), página 35. ■

Proposição 2.1.5. *Uma curva $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo seu comprimento de arco se, e somente se, f é uma curva unitária, isto é, se $\|f'(t)\| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.*

Demonstração: Ver (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), página 33. ■

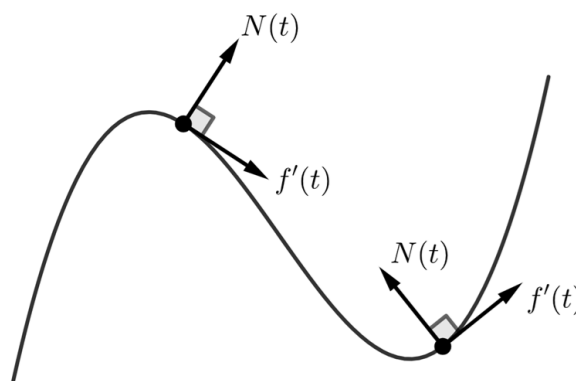
Agora, relembremos outras definições associadas a curvas que serão úteis para o nosso objetivo.

Definição 2.1.6. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Definimos $f'(t)$ como o **vetor tangente** de f em t .*

Definição 2.1.7. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Para cada $t \in (a, b)$, dizemos que o vetor $N(t)$, obtido pela rotação de $f'(t)$ em 90° no sentido anti-horário, é o **vetor normal** de f em t .*

Abaixo, na Figura 2.1, representamos os pares de vetores tangentes e normais à curva em dois de seus pontos.

Figura 2.1 – Vetores tangentes e normais de uma curva plana.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observação 2.1.8. *Reparemos que, como estaremos trabalhando apenas com curvas unitárias, todos nossos vetores tangentes serão unitários. Consequentemente, pela definição acima, todos os vetores normais também serão unitários, isto é, $\|N(t)\| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.*

Agora nos encaminharemos para definir a curvatura de uma curva, conceito essencial para o trabalho em questão, para tanto, precisamos do resultado abaixo.

Proposição 2.1.9. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e unitária. Então, $f''(t)$ é o vetor nulo ou $f'(t) \perp f''(t)$, para todo $t \in (a, b)$.*

Demonstração: Ver (PRESSLEY, 2010), página 11. ■

Agora, seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e unitária. Notemos que, pela definição de vetor normal, temos $f'(t) \perp N(t)$, para todo $t \in (a, b)$. Equivalentemente,

$$\langle f'(t), N(t) \rangle = 0, \quad (2.1)$$

para todo $t \in (a, b)$. De modo similar, pela proposição acima, temos

$$\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0, \quad (2.2)$$

para todo $t \in (a, b)$.

Dessa forma, pelas equações (2.1) e (2.2), concluimos que

$$f''(t) = -\kappa(t) \cdot N(t), \quad (2.3)$$

para todo $t \in (a, b)$. Desta argumentação, estabelecemos a definição de curvatura.

Definição 2.1.10. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ um curva suave e unitária. Dizemos que a **curvatura** de f em t é o valor $\kappa(t)$ que satisfaz a equação 2.3.*

Observação 2.1.11. *A definição acima distingue-se da convenção adotada em livros de geometria. Esta escolha foi adotado para compactuar com a definição utilizada nas referências (BUNIMOVICH; ZHANG; ZHANG, 2016) e (CHERNOV; MARKARIAN, 2006) que, por sua vez, seguem a tradição estabelecida por Sinai e sua escola.*

Observação 2.1.12. *Observemos que, pela definição acima, a curvatura pode ser vista como uma função suave $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Mais que isso, usando a Observação 2.1.8, segue que*

$$\begin{aligned} \|f''(t)\| &= \|-\kappa(t) \cdot N(t)\| = \|\kappa(t)\| \cdot \|N(t)\| = \|\kappa(t)\| \\ \therefore \kappa(t) &= \pm \|f''(t)\|, \end{aligned} \quad (2.4)$$

para todo $t \in (a, b)$.

Observação 2.1.13. *A definição de curvatura acima é válida apenas para curvas planas. Deste modo, algumas referências a chamam de curvatura com sinal, enquanto que a terminologia curvatura é utilizada apenas para o caso mais geral. Como não trataremos destes casos, não utilizaremos tal distinção.*

A fim de finalizarmos esta seção, apresentaremos um exemplo do cálculo de curvatura com sinal que será utilizado futuramente.

Exemplo 2.1.14. *Seja C um arco de circunferência de raio r . Então, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$f(t) = \left(r \cdot \cos\left(\frac{t}{r}\right), r \cdot \sin\left(\frac{t}{r}\right) \right)$$

é uma parametrização unitária de C , no sentido anti-horário. Além disso,

$$f'(t) = \left(-\sin\left(\frac{t}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right) \right) \quad e \quad f''(t) = \left(-\frac{1}{r} \cdot \cos\left(\frac{t}{r}\right), -\frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{t}{r}\right) \right) .$$

Determinado o valor de $f'(t)$, podemos calcular $N(t)$, obtendo

$$N(t) = \left(-\cos\left(\frac{t}{r}\right), -\sin\left(\frac{t}{r}\right) \right) .$$

Logo, das Equações (2.4) e (2.3), temos

$$\kappa(t) = -\frac{1}{r} = -\|f''\| ,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS

No que segue, introduziremos e enunciaremos algumas propriedades relacionadas a frações contínuas, um tema fundamental para o nosso trabalho, já que está intrinsecamente relacionado com as curvaturas que analisaremos. Para esta seção, nos basearemos nas referências (BORWEIN et al., 2014) e (KINCHIN, 1964).

Definição 2.2.1. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real. Dizemos que a expressão*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

*é uma **fração contínua finita**. Analogamente, dizemos que a expressão*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

*é uma **fração contínua infinita**.*

Observação 2.2.2. *Naturalmente, toda fração contínua finita converge, isto é, representa um número real. Em contrapartida, para uma fração contínua infinita isto nem sempre é verdade, ou seja, devemos verificar sua convergência.*

Além da notação acima, quando tivermos um termo inicial $a_0 \in \mathbb{R}$, usaremos

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_n] .$$

Intuitivamente, percebe-se que trabalhar com frações contínuas no formato acima pode ser um tanto quanto exaustivo. Por este motivo, no que segue, apresentaremos um modo alternativo de trabalhar com as mesmas, fortemente inspirado na referência (BORWEIN et al., 2014). Contudo, como no livro mencionado os coeficientes das frações contínuas são apenas números naturais, enquanto nós trabalharemos com números reais, devemos ajustar levemente algumas de suas passagens. Apesar disso, a maior parte das provas é idêntica às que constam na referência.

Definição 2.2.3. *Seja $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ uma fração contínua finita. Dado um natural $k \in \{0, \dots, n\}$, dizemos que*

$$s_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

*é um **segmento** de x .*

Como um segmento é uma fração contínua finita, é claro que ele converge para um número real α_k , isto é, $s_k = \alpha_k$. Em particular, existem $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, com $q_k \neq 0$, tais que $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$, ou seja, tais que

$$s_k = \frac{p_k}{q_k} .$$

Realmente, sem perda de generalidade, podemos sempre assumir $p_k = \alpha_k = s_k$ e $q_k = 1$, visto que a ideia é forçar uma representação no formato de fração. De qualquer forma, ressaltamos que

$$x = s_n = \frac{p_n}{q_n} .$$

Observação 2.2.4. *O raciocínio acima também é válido para uma fração contínua infinita $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Contudo, neste caso teremos infinitos segmentos. Além disso,*

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} ,$$

quando o limite existir.

Similarmente, com as devidas adaptações, os resultados abaixo, que serão enunciados para frações contínuas finitas, também serão válidos para frações contínuas infinitas.

Claramente, os segmentos de uma fração contínua, e por conseguinte, seus quocientes, relacionam-se entre si e dependem exclusivamente dos termos da fração contínua em questão. No teorema abaixo, esta questão é esclarecida.

Teorema 2.2.5. *Seja $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ uma fração contínua finita. Então, dado um natural $k \in \{1, \dots, n\}$, temos*

$$\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^k \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Ver (BORWEIN et al., 2014), página 28. ■

O teorema acima, além de nos fornecer um método eficaz para trabalharmos com frações contínuas, também permite que identifiquemos frações contínuas equivalentes, como mostra o corolário a seguir.

Corolário 2.2.6. *Sejam $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ e $y = [b_0; b_1, \dots, b_m]$ frações contínuas, associadas aos produtórios*

$$\prod_{i=0}^n \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \prod_{j=0}^m \begin{bmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Se as primeiras colunas dos produtórios são linearmente dependentes entre si, então as frações contínuas em questão coincidem, isto é, $x = y$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.5, sabemos que as primeiras colunas dos produtórios mencionados acima são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} p_n^x \\ q_n^x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} p_m^y \\ q_m^y \end{bmatrix},$$

em que os índices superiores servem para representar as frações contínuas cujos termos em questão estão atrelados. Além disso, pela forma que definimos os escalares q_n^x e q_n^y , sabemos que eles são não nulos. Consequentemente, os vetores colunas acima também

são não nulos. Daí, por hipótese, deve existir $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\begin{bmatrix} p_n^x \\ q_n^x \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} p_m^y \\ q_m^y \end{bmatrix}$$

Consequentemente,

$$\frac{p_n^x}{q_n^x} = \frac{\alpha \cdot p_m^y}{\alpha \cdot q_m^y} \Rightarrow \frac{p_n^x}{q_n^x} = \frac{p_m^y}{q_m^y} \Rightarrow s_n^x = s_m^y \Rightarrow x = y ,$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2.7. *Reforçamos que, no desenvolvimento acima, levamos em consideração o termo inicial $a_0 \in \mathbb{R}$. Contudo, ao longo do nosso texto, trabalharemos, majoritariamente, com frações contínuas puras, como apresentadas na Definição 2.2.1. Nestes casos, sempre devemos nos lembrar de considerarmos $a_0 = 0$.*

Após estudarmos o tratamento de frações contínuas, estudaremos algumas propriedades das mesmas que serão mais específicas para o nosso objetivo. Começemos pela proposição abaixo, que apresenta algumas igualdades válidas para frações contínuas finitas.

Proposição 2.2.8. *Sejam $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e $y = [b_1, \dots, b_m]$, em que, sem perda de generalidade, $m \leq n$. Então,*

- a. $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]}.$
- b. $[a_1, \dots, a_n + y] = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m].$
- c. $[a_1, \dots, a_n, y] = [a_1, \dots, a_n + b_1, \dots, b_m].$
- d. $[a_1, \dots, a_n, 0, b_1, \dots, b_m] = [a_1, \dots, a_n + b_1, \dots, b_m].$
- e. $[\dots, b_{m-1}, b_m, b_{m+1}, 0] = [\dots, b_{m-1}, b_m].$

Demonstração: Nos itens abaixo seguem as demonstrações de cada uma das propriedades listadas.

a. De fato,

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]} .$$

b. Realmente,

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_n + y] &= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + y}}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_m}}}}}} \\ &= [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m] , \end{aligned}$$

em que usamos

$$y = [b_1, \dots, b_m] = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_m}}} .$$

c. Com efeito,

$$[a_1, \dots, a_n, y] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{y}}}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{[b_1, \dots, b_m]}}}} . \quad (2.5)$$

Observemos que, usando o primeiro item da proposição, obtemos

$$\frac{1}{[b_1, \dots, b_m]} = \frac{1}{b_1 + [b_2, \dots, b_m]} = b_1 + [b_2, \dots, b_m] . \quad (2.6)$$

Daí, substituindo (2.6) em (2.5), temos

$$[a_1, \dots, a_n, y] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + b_1 + [b_2, \dots, b_m]}}} = [a_1, \dots, a_n + b_1, \dots, b_m] .$$

- d. De fato, pelo Teorema 2.2.5, associada à fração contínua do lado esquerdo da desigualdade, temos o produtório

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Porém, como

$$\begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n + b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

segue que o produtório anterior pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n + b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é justamente o produtório associada à fração contínua do lado direito da igualdade.

Portanto,

$$[a_1, \dots, a_n, 0, b_1, \dots, b_m] = [a_1, \dots, a_n, x] = [a_1, \dots, a_n + b_1, \dots, b_m] \quad .$$

- e. Com efeito, pelo Teorema 2.2.5, segue que, associada à fração contínua do lado esquerdo da igualdade, temos o produtório

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{m+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} b_m & b_m \cdot b_{m+1} + 1 \\ 1 & b_{m+1} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

em que

$$A = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pelo mesmo teorema citado, associada à fração contínua da direita da igualdade, temos o produtório

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Observemos que o primeiro fator dos produtos (2.7) e (2.8) coincidem, tais quais as primeiras colunas dos segundos fatores. Consequentemente, pela regra da multiplicação de duas matrizes, as primeiras colunas desses produtos serão iguais.

Portanto, pelo Corolário 2.2.6, as frações contínuas relacionadas a estes produtórios são equivalentes, isto é,

$$[\dots, b_{m-1}, b_m, b_{m+1}, 0] = [\dots, b_{m-1}, b_m] .$$

■

Observação 2.2.9. Apesar da proposição acima estar enunciada apenas para a parte fracionária de uma fração contínua, através de demonstrações análogas, somos capazes de comprovar que todos os itens, com exceção do item a, também são válidos quando há um termo inicial $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

Agora, veremos um resultado que trata da simplificação de frações contínuas que possuem termos repetidos.

Proposição 2.2.10. Sejam $a, x, y \in \mathbb{R}$. Então,

$$\left[x, \underbrace{-\frac{2}{a}, 2a, \dots, -\frac{2}{a}, 2a}_{m \text{ vezes}}, -\frac{2}{a}, y \right] = \left[x, -\frac{1}{a}, -m \cdot (2a), -\frac{1}{a}, y \right] , \quad (2.9)$$

em que o par $-\frac{2}{a}$ e $2a$ se repetem m vezes, para $m \geq 0$.

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.6, a fim de provarmos a igualdade acima, é suficiente mostrarmos que as primeiras colunas dos produtórios de matrizes associadas às respectivas frações contínuas são linearmente dependentes. Deste modo, associada à primeira fração contínua da Equação (2.9), temos o produtório

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{m \text{ vezes}} \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Equivalentemente, tomando

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

a expressão anterior se reduz a

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A^m \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Analogamente, associada à segunda fração da Equação (2.9), temos o produtório

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2am & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Naturalmente, como os produtórios acima distinguem-se apenas entre as matrizes associadas aos escalares x e y , a fim de analisarmos a similaridade entre os mesmos, basta que estudemos o produto das matrizes entre os termos supracitados.

Primeiramente, observemos que

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2am & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2(m+1)}{a} & 2m+1 \\ 2m+1 & -2am \end{bmatrix}.$$

Com isso, afirmamos que, para todo $m \geq 0$, vale

$$A^m \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^m \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2(m+1)}{a} & 2m+1 \\ 2m+1 & -2am \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Provaremos a afirmação acima através do Princípio de Indução Matemática. Dessa forma, percebamos que, se

a. $m = 0$: Neste caso, o lado esquerdo da Equação (2.12), se resume a

$$A^0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, substituindo $m = 0$ no lado direito da Equação (2.12), obtemos

$$(-1)^0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2(0+1)}{a} & 2 \cdot 0 + 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 & -2a \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a afirmativa é válida para $m = 0$.

b. $m = 1$: Assim, o lado esquerdo da Equação (2.12) é dado por

$$A^1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{a} & -3 \\ -3 & 2a \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, substituindo $m = 1$ no lado direito da Equação (2.12), obtemos

$$(-1)^1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2(1+1)}{a} & 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 & -2a \cdot 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{a} & 3 \\ 3 & -2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{a} & -3 \\ -3 & 2a \end{bmatrix}.$$

Portanto, a afirmativa é válida para $m = 1$.

c. $m = k$: Suponhamos que nossa afirmativa é válida para $m = k$, isto é,

$$A^k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2(k+1)}{a} & 2k+1 \\ 2k+1 & -2ak \end{bmatrix}.$$

Então, provaremos que a afirmativa também é válida para $k+1$.

Daí,

$$\begin{aligned} A^{k+1} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= A \cdot A^k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2(k+1)}{a} & 2k+1 \\ 2k+1 & -2ak \end{bmatrix}, \text{ pela hipótese de indução} \\ &= (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2(k+1)}{a} & 2k+1 \\ 2k+1 & -2ak \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} \frac{2k+4}{a} & -2k-3 \\ -2k-3 & 2ak+2a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} \frac{2((k+1)+1)}{a} & -2(k+1)-1 \\ -2(k+1)-1 & 2a(k+1) \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{k+1} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2((k+1)+1)}{a} & 2(k+1)+1 \\ 2(k+1)+1 & -2a(k+1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Deste modo, substituindo $m = k+1$ no lado direito da Equação (2.12), constatamos a validade da afirmativa para este caso.

Com isso, através do Princípio de Indução Matemática, validamos a Equação (2.12), para todo $m \geq 0$.

Como consequência direta da afirmativa provada acima, segue que os produtórios das Equações (2.10) e (2.11), distinguem-se apenas por um fator $(-1)^m$. Em particular, as primeiras colunas destes produtórios são linearmente dependentes.

Destarte, pelo argumento inicial, a Equação (2.9) é válida, como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2.11. *A fim de minimizar o espaço da prova do resultado acima, consideramos frações contínuas finitas que começam no termo x e terminam no termo y . Contudo, adaptando levemente a demonstração acima, constatamos que o teorema também é válido quando temos mais termos à esquerda ou à direita, isto é, vale a equação*

$$\left[\dots, x, \underbrace{-\frac{2}{a}, 2a, \dots, -\frac{2}{a}, 2a}_{m \text{ vezes}}, -\frac{2}{a}, y, \dots \right] = \left[\dots, x, -\frac{1}{a}, -m \cdot (2a), -\frac{1}{a}, y, \dots \right].$$

Seguindo com as propriedades de frações contínuas, o teorema abaixo nos fornece um método para construir frações contínuas equivalentes.

Teorema 2.2.12. *Sejam $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $B = a + c + abc \neq 0$. Então, a equação*

$$[\dots, x, a, b, c, y, \dots] = [\dots, x + A, B, C + y, \dots],$$

em que $A = \frac{bc}{B}$ e $C = \frac{ab}{B}$, é válida, tanto para frações contínuas finitas quanto para frações contínuas infinitas.

Demonstração: Equivalentemente, pela Proposição 2.2.8, item d, queremos provar que

$$[\dots, x, a, b, c, y, \dots] = [\dots, x, 0, A, B, C, 0, y, \dots]. \quad (2.13)$$

Pelo Corolário 2.2.6, a fim de provarmos tal igualdade, basta mostrarmos que as primeiras colunas dos produtórios de matrizes associados às respectivas frações contínuas são linearmente dependentes. Naturalmente, caso estes produtórios sejam iguais, a igualdade também será válida. Deste modo, associado à primeira fração contínua da Equação (2.13), temos o produtório

$$\cdots \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

Analogamente, associado à segunda fração contínua da Equação (2.13), temos o produtório

$$\cdots \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

Deste modo, como os produtos de matrizes acima distinguem-se apenas entre as matrizes associadas aos escalares x e y , a fim de que eles coincidam, basta que o produto das matrizes entre estes termos sejam iguais, isto é, basta que

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Facilmente, podemos calcular e obter

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c + abc & ab + 1 \\ bc + 1 & b \end{bmatrix}.$$

Semelhantemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & BC + 1 \\ AB + 1 & A + C + ABC \end{bmatrix}.$$

No que segue, verificaremos que cada uma das entradas correspondentes das matrizes acima são iguais.

- Por hipótese,

$$B = a + c + abc.$$

- Novamente, por hipótese,

$$BC + 1 = B \cdot \frac{ab}{B} + 1 = ab + 1 .$$

- Similarmente ao item anterior,

$$AB + 1 = \frac{bc}{B} \cdot B + 1 = bc + 1 .$$

- Pelas hipóteses,

$$A+C+ABC = \frac{bc}{B} + \frac{ab}{B} + \frac{bc}{B} \cdot B \cdot \frac{ab}{B} = \frac{bc + ab + ab^2c}{B} = \frac{b \cdot (c + a + abc)}{B} = \frac{b \cdot B}{B} = b .$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} a + c + abc & ab + 1 \\ bc + 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & BC + 1 \\ AB + 1 & A + C + ABC \end{bmatrix} .$$

Portanto, pelo argumento apresentado anteriormente, o resultado vale. ■

Por fim, abaixo apresentamos dois teoremas clássicos que dizem respeito à convergência de frações contínuas infinitas.

Teorema 2.2.13 (Teorema de Seidel-Stern). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $\text{sgn}(a_n) = -1$ ou $\text{sgn}(a_n) = 1$. Então, a fração contínua infinita $[a_1, a_2, \dots]$ converge se, e somente se, a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge.*

Demonstração: Ver (KINCHIN, 1964), página 10. ■

Observação 2.2.14. *No teorema acima não é necessário avaliar o caso em que $\text{sgn}(a_n) = 0$ pois, pela Proposição 2.2.8, item [d](#) e item [e](#), sempre conseguimos obter frações contínuas equivalentes cujos termos são todos não nulos.*

Teorema 2.2.15. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real tal que $a_{2n+1} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{i=1}^{\infty} a_{2i+1}$ diverge. Além disso, suponhamos que, para quaisquer dois elementos negativos, digamos a_{2n_1} e a_{2n_2} , com $n_1 < n_2$, existam $\delta_{n_1}, \delta_{n_2} \geq -1$, de modo que*

$$a_{2n_1+1} \geq |a_{2n_1}|^{-1} \cdot (2 + \delta_{n_1}) + |a_{2n_2}|^{-1} \cdot \left(2 - \frac{\delta_{n_2}}{1 + \delta_{n_2}} \right) .$$

Sob essas condições, a fração contínua infinita $[a_1, a_2, \dots]$ converge.

Demonstração: Ver (BUNIMOVICH, 1992), página 80. ■

2.3 VARIEDADES

Aqui definiremos o que é uma variedade e também alguns conceitos adjacentes a esta estrutura. Apesar de trabalharmos com espaços relativamente simples na parte central do trabalho, alguns conceitos se apresentam em formulações mais gerais, levando à necessidade das definições a seguir. Nesta seção, as referências utilizadas foram (BARREIRA; VALLS, 2012) e (GUILLEMIN; POLLACK, 2010).

De início, definiremos o que é uma variedade, uma subvariedade e sua codimensão. Intuitivamente, uma variedade é uma estrutura que, localmente, pode ser visualizada como pequenos pedaços de um espaço euclidiano. Formalmente,

Definição 2.3.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$, em que N é suficientemente grande. Dizemos que X é uma **variedade k -dimensional** se for localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^k$, isto é, se para cada ponto $x \in X$ existe um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, em que $V \subset X$ é uma vizinhança de x e $U \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto aberto. Em particular, dizemos que ϕ é uma **parametrização local** ao redor de x .*

Definição 2.3.2. *Sejam X e Y variedades em $\mathbb{R}^N$, com $Y \subset X$. Então, dizemos que Y é uma **subvariedade** de X . Em particular, a **codimensão** de Y em X é dada por $\text{codim}(Y) = \dim(X) - \dim(Y)$.*

Observação 2.3.3. *Existem definições ainda mais gerais de variedades, em que não é considerada a hipótese $X \subset \mathbb{R}^N$. Contudo, a referência utilizada, desde o início leva em consideração o famoso Teorema de Whitney, que afirma que toda variedade k -dimensional pode ser imersa em um espaço euclidiano de dimensão $N = 2k+1$. Para mais informações a respeito deste resultado, recomendamos a leitura de (GUILLEMIN; POLLACK, 2010), página 53.*

No que segue, definimos o que é o espaço tangente de uma variedade num ponto e também o que significa a transversalidade entre uma aplicação e uma variedade e também entre duas variedades.

Definição 2.3.4. *Seja X uma variedade k -dimensional. Dado um ponto $x \in X$ e $\phi : U \rightarrow X$ uma parametrização local ao redor de x , com $\phi(0) = x$, dizemos que o **espaço tangente** de X em x , denotado por $T_x X$, é a imagem da aplicação $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Definição 2.3.5. *Sejam X e Y duas variedades e $Z \subset Y$ uma subvariedade de Y . Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **transversal** à Z , e escrevemos $f \pitchfork Z$, se, para todo $x \in f^{-1}(Z)$, com $y = f(x)$, temos*

$$\text{Im}(df_x) + T_y Z = T_y Y .$$

Definição 2.3.6. *Sejam X e Z subvariedades de Y . Dizemos que X e Z são **transversais**, e escrevemos $X \pitchfork Z$, se, para todo $x \in X \cap Z$, temos*

$$T_x X + T_x Z = T_x Y .$$

Por fim, definiremos o que é uma variedade riemanniana.

Definição 2.3.7. *Seja X uma variedade. Dizemos que X é uma **variedade riemanniana** se, para cada $x \in X$, o espaço tangente $T_x X$ está equipado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ que varia diferenciavelmente com x . Em particular, tal produto interno induz a norma $\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v \rangle_x}$, para qualquer $v \in T_x X$.*

2.4 SISTEMAS DINÂMICOS

A seguir apresentaremos conceitos e resultados referentes à área de Sistemas Dinâmicos. Naturalmente, os conteúdos a seguir são de grande relevância, visto que os bilhares, tópico central deste trabalho, são uma classe de sistemas dinâmicos. Para esta seção, as referências utilizadas foram (BARREIRA; VALLS, 2012), (JR; MELO, 1982) e (ROBINSON, 1999).

Primeiramente, comecemos definindo o que são sistemas dinâmicos, tanto com tempo discreto quanto com tempo contínuo.

Definição 2.4.1. *Seja X um conjunto não vazio qualquer. Um **sistema dinâmico com tempo discreto** é uma transformação $f : X \rightarrow X$. Além disso, um **sistema dinâmico com tempo contínuo**, ou **fluxo**, é uma família de transformações $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, com $\Phi^t : X \rightarrow X$, satisfazendo $\Phi^0 = \text{Id}$ e $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$.*

Na definição acima não colocamos nenhuma estrutura no conjunto X , a fim de manter a definição o mais simples possível. Contudo, para atingirmos determinados objetivos ou resultados, podemos acrescentar hipóteses mais fortes sobre o conjunto e sobre as transformações. Ao longo desta seção, a menos que se diga o contrário, consideraremos X um conjunto não vazio qualquer.

Em relação à evolução temporal de um sistema dinâmico discreto ressaltamos que a mesma é dada através da composição da transformação, ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente

$$f^0 = \text{Id} \quad \text{e} \quad f^n = f \circ f^{n-1} .$$

Ademais, no caso de f ser invertível, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$f^{-n} = (f^{-1})^n .$$

Das equações acima, é claro que,

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n ,$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Em particular, se f for invertível, a igualdade é válida para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$.

Da discussão acima, percebemos que nem sempre a transformação de um sistema dinâmico discreto é invertível, devendo ser dada como hipótese ou sendo verificada. Por outro lado, no fluxo, sempre temos a garantia de que cada transformação Φ^t é invertível, com inversa Φ^{-t} , para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, pelas propriedades do fluxo, segue que

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t = \Phi^0 = \text{Id} .$$

Agora, continuemos com outras definições básicas da teoria.

Definição 2.4.2. Para uma transformação $f : X \rightarrow X$ e um fluxo $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, dado um ponto $x \in X$, dizemos que

$$\{f^n(x) ; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \quad e \quad \{\Phi^t(x) ; t \geq 0\}$$

são, respectivamente, a **semiórbita positiva** de x pela transformação e pelo fluxo. Quando f é invertível¹, dizemos ainda que

$$\{f^{-n}(x) ; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \quad e \quad \{\Phi^t(x) ; t \leq 0\}$$

são, respectivamente, a **semiórbita negativa** de x pela transformação e pelo fluxo. De modo geral,

$$\{f^n(x) ; n \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad \{\Phi^t(x) ; t \in \mathbb{R}\}$$

são, respectivamente, a **órbita** de x pela transformação e pelo fluxo.

Definição 2.4.3. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação e $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo. Dizemos que um ponto $x_0 \in X$ é um **ponto fixo** da transformação se $f(x_0) = x_0$. Analogamente, para fluxos, devemos ter $\Phi^t(x_0) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.4. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação e $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo. Dizemos que um ponto $x_0 \in X$ é um **ponto periódico de período k** da transformação se $f^k(x_0) = x_0$ e $f^l(x_0) \neq x_0$, para todo $0 < l < k$, em que $l \in \mathbb{N}$. Analogamente, para fluxos, devemos ter $\Phi^k(x_0) = x_0$ e $\Phi^l(x_0) \neq x_0$, para todo $0 < l < k$, em que $l \in \mathbb{R}$.

¹ Esta é uma hipótese necessária apenas para garantir a semiórbita negativa e a órbita do sistema dinâmico discreto.

Observação 2.4.5. Naturalmente, se $x_0 \in X$ é um ponto periódico de período 1, então x_0 é um ponto fixo. De todo modo, o período k de um ponto periódico é sempre positivo, tanto para a transformação quanto para o fluxo. A única distinção é que, no primeiro caso, $k \in \mathbb{N}$, enquanto que, no segundo caso, $k \in \mathbb{R}^+$.

Com as definições iniciais estabelecidas, vamos examinar como podemos relacionar sistemas dinâmicos discretos com sistemas dinâmicos contínuos, e vice-versa.

Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação invertível e $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função qualquer. Consideremos o conjunto

$$Z = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} ; 0 \leq t \leq \tau(x)\}$$

e a relação de equivalência $\sim$ definida em Z , dada por

$$(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow y = f(x) , t = \tau(x) \quad \text{e} \quad s = 0 ,$$

para quaisquer $(x, t), (y, s) \in Z$.

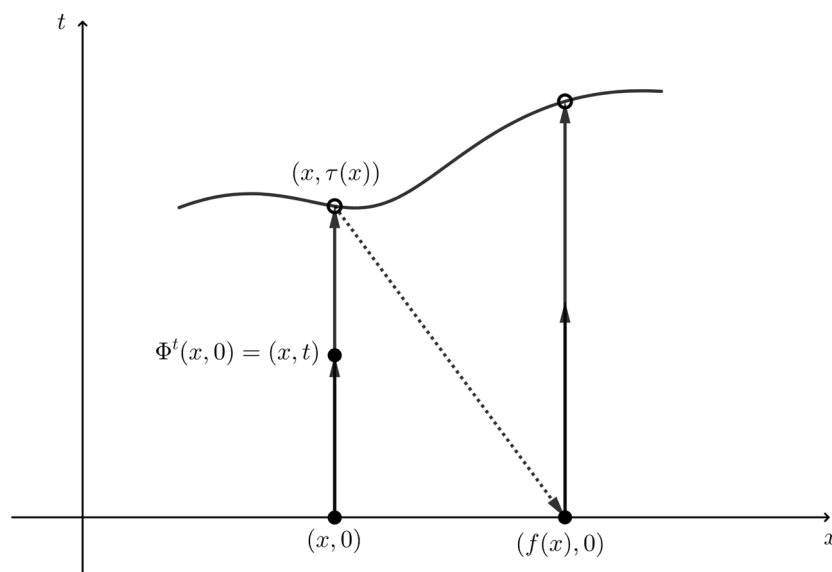
Dessa forma, tomamos $Y = Z / \sim$ e definimos

Definição 2.4.6. Chamamos por **fluxo suspensão**, ou apenas **suspensão**, de f com tempo de retorno τ a aplicação $\Phi^t : Y \rightarrow Y$, dada por

$$\Phi^t(x, s) = (x, s + t) , \quad \text{quando } s + t \in [0, \tau(x)] ,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Graficamente, temos a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Fluxo Suspensão.



Logo, a partir de uma transformação, obtemos um fluxo. Vejamos o processo contrário. Para tanto, consideremos o fluxo $\Phi^t : Y \rightarrow Y$. Reforçamos que apesar de manter a terminologia anterior, Φ e Y não são os elementos definidos acima. Com isso esclarecido, temos

Definição 2.4.7. *Seja $X \subset Y$. Dizemos que X é uma **seção de Poincaré** para Φ^t se a função*

$$\tau_X(x) = \inf\{t > 0 ; \Phi^t(x) \in X\}$$

*existe para cada $x \in X$. Em particular, dizemos que $\tau_X(x)$ é o **tempo de primeiro retorno** de x ao conjunto X .*

Da definição acima, introduzimos a noção seguinte.

Definição 2.4.8. *Seja $X \subset Y$ uma seção de Poincaré de Φ^t . Dizemos que a transformação $f : X \rightarrow X$, dada por*

$$f(x) = \Phi^{\tau_X(x)}(x) ,$$

*é a **transformação de Poincaré** associada a Φ^t .*

Portanto, a partir de um fluxo, construímos uma transformação associada ao mesmo. Contudo, dada uma seção de Poincaré X , apesar de estabelecermos uma recorrência de seus pontos, não somos capazes de garantir que, dado $y \in Y$, existe $t \geq 0$ tal que $\Phi^t(y) \in X$. Acrescentando esta hipótese, somos levados às generalizações dos conceitos vistos acima.

Definição 2.4.9. *Seja Y uma variedade e $\Phi^t : Y \rightarrow Y$ um fluxo de classe C^r . Dizemos que uma subvariedade compacta $X \subset Y$, de codimensão 1, é uma **seção de Poincaré global** para Φ^t se Φ^t é transversal a X e toda trajetória do fluxo intersecta X infinitas vezes. Consequentemente, o tempo de primeiro retorno $\tau_X(x)$ existe, para todo $x \in X$. Neste caso, pelo mesmo processo descrito anteriormente, definimos a transformação $f : X \rightarrow X$, que é um difeomorfismo, como a **transformação de Poincaré global**.*

Por fim, definiremos o que é um sistema dinâmico discreto hiperbólico. Informalmente, a hiperbolicidade garante a existência de direções em que os pontos do sistema afastam-se ou aproximam-se exponencialmente, fornecendo um entendimento sobre o comportamento caótico ao longo do tempo, visto que dois pontos próximos, separados por direções diferentes no espaço tangente, podem exibir órbitas completamente distintas. Formalmente,

Definição 2.4.10. *Sejam X uma variedade riemanniana e $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo. Dizemos que f é um **difeomorfismo hiperbólico** se,*

- a. *para cada ponto $x \in X$, vale a decomposição $T_x X = E_x^s \oplus E_x^u$;*

b. as famílias E^s e E^u são invariantes por Df , ou seja, para todo $x \in X$, temos

$$D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s \quad e \quad D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u ;$$

c. existem constantes $0 < \alpha < 1$ e $c \geq 1$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, valem

$$\|D_x f^n(v)\| \leq c \cdot \alpha^n \cdot \|v\| , \quad \forall v \in E_x^s .$$

$$\|D_x f^{-n}(v)\| \leq c \cdot \alpha^n \cdot \|v\| , \quad \forall v \in E_x^u .$$

Em particular, dizemos que E_x^s e E_x^u são, respectivamente, o **espaço estável** e **espaço instável** no ponto x .

A fim de completude, ressaltamos que, para compreendermos melhor como a decomposição do espaço tangente da forma estabelecida impacta no comportamento caótico local nas iterações da transformação f , basta recorrermos ao Teorema de Hartman-Grobman e o Teorema da Variedade Estável. Para mais informações, recomendamos a leitura de (ROBINSON, 1999), página 159 e 411, respectivamente.

2.5 TEORIA DA MEDIDA

Nesta seção exploraremos conceitos e resultados relacionados à área de Teoria da Medida. Este conteúdo aparecerá de modo sutil e constante ao longo do trabalho, sendo de extrema importância para o bom entendimento dos conteúdos da próxima seção. Para esta parte, as referências utilizadas foram (RUDIN, 1987) e (VIANA; OLIVEIRA, 2019).

Começaremos com as definições estruturais básicas da teoria.

Definição 2.5.1. *Seja X um conjunto. Uma σ -álgebra em X é uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que satisfaz*

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$;
- iii) Se $\{A_n\}$ é uma família enumerável em $\mathcal{A}$, então $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Definição 2.5.2. *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra em X . Então, a dupla $(X, \mathcal{A})$ é um **espaço mensurável**. Além disso, dizemos que os elementos de $\mathcal{A}$ são os **conjuntos mensuráveis** de X .*

Com as definições acima, construímos uma estrutura matemática que nos permite definir a medida de um conjunto mensurável.

Definição 2.5.3. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é uma **medida** em X se $\mu(\emptyset) = 0$ e*

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) ,$$

para toda família enumerável $\{A_n\}$ em $\mathcal{A}$, cujos elementos são disjuntos dois a dois. Em particular,

- a. se $\mu(X) < \infty$, então dizemos que μ é uma **medida finita**;*
- b. se $\mu(X) = 1$, então dizemos que μ é uma **medida de probabilidade**, ou apenas **probabilidade**.*

No que segue, a menos que se diga o contrário, sempre consideraremos medidas finitas. Em especial, ressaltamos que, dada uma medida finita μ , sempre somos capazes de obter uma probabilidade ν . Realmente, basta definirmos

$$\nu(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} ,$$

para cada conjunto mensurável $A \subset X$. Com isso, $\nu(X) = 1$, isto é, ν é uma probabilidade, ou **medida normalizada**, obtida a partir da medida finita μ .

Com as definições básicas estabelecidas, ressaltamos uma das σ -álgebras mais utilizadas, que é obtida a partir da topologia adotada.

Definição 2.5.4. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que a **σ -álgebra de Borel** de X é a menor σ -álgebra de X que contém todos os subconjuntos abertos de X . Neste caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de **borelianos** e uma medida definida sobre uma σ -álgebra de Borel é chamada **medida de Borel**.*

Na parte central deste texto, trabalharemos majoritariamente com medidas de probabilidade e com a medida de Lebesgue que, em linhas gerais, visa formalizar a noção de volume nos espaços $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$. No que segue, apresentaremos as definições e resultados que culminam na formalização desta medida.

Definição 2.5.5. *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que W é uma **n -célula** se, para quaisquer $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, temos*

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) ; a_i \leq x_i \leq b_i\} .$$

*Em particular, definimos o **volume** de W como*

$$\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Proposição 2.5.6. *Seja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Então, existe uma medida λ tal que*

- i) $\lambda(W) = \text{vol}(W)$, para toda n -célula W .*
- ii) $\mathcal{A}$ contém todos os borelianos em $\mathbb{R}^n$.*
- iii) λ é invariante por translação, ou seja, $\lambda(A+x) = \lambda(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.*
- iv) Se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$, invariante por translação, com $\mu(K) < \infty$, para todo conjunto compacto K , então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(A) = c \cdot \lambda(A)$, para todo boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$.*
- v) Para toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $\Delta(T) \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda(T(A)) = \Delta(T) \cdot \lambda(A)$, para todo $A \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração: Ver (RUDIN, 1987), página 51. ■

Definição 2.5.7. *Dizemos que os elementos da σ -álgebra $\mathcal{A}$ definida na proposição acima são os **conjuntos Lebesgue mensuráveis** em $\mathbb{R}^n$. Além disso, dizemos que λ é a **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}^n$.*

Vistos os conceitos de σ -álgebra e medida, tais como seus principais representantes para o presente trabalho, formalizamos a estrutura completa em que a teoria de medida é estudada e apresentamos algumas outras definições relacionadas com os conteúdos acima.

Definição 2.5.8. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra em X e μ uma medida em X . Dizemos que a tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de medida**. Em particular, se μ é uma probabilidade, dizemos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de probabilidade**.*

Definição 2.5.9. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Uma propriedade é dita verificada em μ -**quase todo ponto** se o conjunto de pontos $C \subset X$ na qual ela não é válida possui medida μ igual a zero, isto é, $\mu(C) = 0$.*

Observação 2.5.10. *Ressaltamos que, quando a medida na qual estamos trabalhando estiver clara pelo contexto, apenas escrevemos “quase todo ponto”, omitindo a medida em questão.*

Definição 2.5.11. *Sejam μ e ν duas medidas definidas num mesmo espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que ν é **absolutamente contínua** com respeito a μ se todo conjunto mensurável A que satisfaz $\mu(A) = 0$, também satisfaz $\nu(A) = 0$. Nesse caso, escrevemos $\nu \ll \mu$.*

Por fim, definiremos as aplicações mensuráveis, que, de modo geral, são funções que preservam a estrutura de um espaço de medida. Tais aplicações serão de extrema relevância para a próxima seção.

Definição 2.5.12. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{C})$ dois espaços mensuráveis. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma **aplicação mensurável** se $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, para todo $C \in \mathcal{C}$.*

2.6 TEORIA ERGÓDICA

Para finalizarmos o presente capítulo, apresentaremos um breve estudo a respeito da Teoria Ergódica, a área que estuda sistemas dinâmicos munidos de uma medida invariante. Este capítulo é de fundamental importância, já que estabelecerá muitos resultados que serão utilizados na parte final deste trabalho. Para esta seção, as referências utilizadas foram (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), (ROBINSON, 1999) e (VIANA; OLIVEIRA, 2019).

Primeiramente, definiremos o que é uma medida invariante, definição essencial para quaisquer outros conceitos atrelados a este campo. Intuitivamente, uma medida é dita invariante quando a probabilidade associada a um conjunto é igual à probabilidade associada ao conjunto de pontos que são mapeados nele (sua pré-imagem). Isto significa que a dinâmica em questão não altera a distribuição espacial de probabilidades ao longo do tempo.

Definição 2.6.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que μ é uma **medida invariante** por f , ou **medida f -invariante** se $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Com isso, somos capazes de enunciar um dos teoremas mais relevantes para o contexto de teoria ergódica.

Teorema 2.6.2 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita invariante por f . Consideremos $A \subset X$ um conjunto mensurável, com $\mu(A) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in A$, existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in A$.*

Demonstração: Ver (VIANA; OLIVEIRA, 2019), página 4. ■

A partir do resultado acima, segue que, sob as hipóteses acima, o tempo de primeiro retorno $\xi_A(x)$ existe para μ -quase todo ponto $x \in A$. Daí, definimos,

Definição 2.6.3. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, μ uma probabilidade invariante e $A \subset X$ um conjunto mensurável, com $\mu(A) > 0$. Então, dizemos que a **aplicação de primeiro retorno**, ou **aplicação induzida**, ao conjunto A é a aplicação $g : A \rightarrow A$, dada por*

$$g(x) = f^{\xi_A(x)}(x) .$$

*Em particular, passamos a considerar a **probabilidade induzida** pela aplicação g , definida por*

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)} ,$$

em que $B \subset A$ é um conjunto mensurável. Assim, (A, g, μ_A) é uma aplicação de primeiro retorno sobre (X, f, μ) .

Ao olharmos pela primeira vez a definição anterior, podemos nos lembrar da transformação de Poincaré, vista na Seção 2.4. Porém, a transformação de Poincaré é utilizada para relacionar um sistema dinâmico contínuo com um sistema dinâmico discreto. Por outro lado, a aplicação de primeiro retorno é uma relação entre dois sistemas dinâmicos discretos.

Também na Seção 2.4, vimos o conceito de suspensão, um fluxo construído a partir de uma transformação. Novamente, lá estávamos interessados na relação entre um sistema dinâmico discreto e um sistema dinâmico contínuo. Agora, definiremos uma suspensão discreta, em que dada uma transformação $g : A \rightarrow A$, munida da probabilidade g -invariante ν , construiremos uma transformação $f : X \rightarrow X$ e uma probabilidade f -invariante μ de modo que, $A \subset X$, g é a aplicação de primeiro retorno de f a A e $\mu_A = \nu$.

Definição 2.6.4. *Seja $g : A \rightarrow A$ uma transformação mensurável, ν uma probabilidade g -invariante e $\xi : A \rightarrow \mathbb{N}$ uma função mensurável. Então, dado*

$$X = \{(a, n) ; a \in A \text{ e } 0 \leq n \leq \xi(a)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{k-1} A_k \times \{n\} ,$$

em que $A_k = \{a \in A ; \xi(a) = k\}$, dizemos que a transformação mensurável $f : X \rightarrow X$, dada por

$$f(a, n) = \begin{cases} (a, n+1) & , \text{ se } n < \xi(a) - 1 \\ (g(a), 0) & , \text{ se } n = \xi(a) - 1 \end{cases} ,$$

*é a **suspensão discreta**, ou **torre**, de g com tempo ξ . Além disso, definimos a probabilidade f -invariante μ através da relação*

$$\mu|_{A_k \times \{n\}} = \nu|_{A_k} , \text{ para todo } 0 \leq n < k .$$

Assim, (X, f, μ) é uma suspensão discreta sobre (A, g, μ_A) , visto que $\mu_A = \nu$.

Observação 2.6.5. *A fim de distinguirmos as construções feitas acima das construções da Seção 2.4, reservaremos a notação τ para o tempo de primeiro retorno que relaciona sistemas dinâmicos contínuos com discretos, e vice-versa. Por outro lado, usaremos ξ para representar o tempo de primeiro retorno entre sistemas dinâmicos discretos.*

Não é difícil verificarmos que a construção definida acima satisfaz as propriedades mencionadas. Para tanto, basta observarmos que $A \times \{0\}$ se identifica naturalmente com A .

Prosseguindo com os teoremas ergódicos, apresentaremos o Lema de Kac, um corolário deste lema para medidas induzidas e também o Teorema de Birkhoff.

Lema 2.6.6 (Lema de Kac). *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, μ uma medida invariante e $A \subset X$ um conjunto de medida positiva, isto é, $\mu(A) > 0$. Então, a função tempo de primeiro retorno $\xi_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ é integrável em A e satisfaz*

$$\int_A \xi_A(x) d\mu = \mu(X) - \mu(A_0^*) ,$$

em que $A_0^* = \{x \in X ; f^n(x) \notin A, \forall n \geq 0\}$.

Demonstração: Ver (VIANA; OLIVEIRA, 2019), página 5. ■

Corolário 2.6.7. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, μ uma probabilidade invariante e $A \subset X$ um conjunto de medida positiva. Então,*

$$\int_A \xi_A(x) d\mu_A < \infty.$$

Demonstração: Realmente, como $\mu(A) > 0$, fica bem definido $d\mu_A = \frac{d\mu}{\mu(A)}$. Daí,

$$\int_A \xi_A(x) d\mu_A = \int_A \xi_A(x) \frac{d\mu}{\mu(A)} = \frac{1}{\mu(A)} \cdot \int_A \xi_A(x) d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \cdot (\mu(X) - \mu(A_0^*)) ,$$

em que usamos o Lema 2.6.6. Além disso, por hipótese, μ é uma probabilidade. Consequentemente, μ é uma medida finita, com $\mu(X) = 1$ e $\mu(A_0^*), \mu(A) < \infty$. Logo,

$$\int_A \xi_A(x) d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)} \cdot (\mu(X) - \mu(A_0^*)) = \frac{1}{\mu(A)} \cdot (1 - \mu(A_0^*)) < \infty ,$$

como queríamos mostrar. ■

Teorema 2.6.8 (Teorema de Birkhoff). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f . Dada qualquer função integrável $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x))$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$.

Demonstração: Ver (VIANA; OLIVEIRA, 2019), página 68. ■

Na parte final desta seção, buscaremos compreender a hiperbolicidade de um difeomorfismo, definida anteriormente, por outra perspectiva. Apresentaremos tal ótica através das definições e resultados a seguir.

Definição 2.6.9. *Sejam X uma variedade riemanniana, $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo e $\|\cdot\|$ a métrica induzida pelo produto interno riemanniano. Então, para cada $x \in X$ e $v \in T_x X$, dizemos que*

$$\chi(f, x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln \|D_x f^n(v)\|$$

*é o **expoente de Lyapunov** da aplicação f no ponto x com direção v , quando o limite existir.*

Teorema 2.6.10 (Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets). *Sejam X uma variedade riemanniana compacta, $Y \subset X$ um subconjunto aberto e denso e $f : Y \rightarrow f(Y) \subset X$ um difeomorfismo de classe C^r , com $r \geq 2$. Além disso, consideremos o conjunto*

$$\tilde{Y} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(Y) ,$$

em que todas as iterações de f estão bem definidas, e a probabilidade invariante μ , com $\mu(\tilde{Y}) = 1$. Suponhamos que

$$\int_X \ln^+ \|D_x f\| d\mu < \infty \quad e \quad \int_X \ln^+ \|D_x f^{-1}\| d\mu < \infty ,$$

em que $\ln^+(x) = \max\{\ln(x), 0\}$. Então, existe um conjunto $Z \subset \tilde{Y}$, com $f(Z) = Z$ e $\mu(Z) = 1$, tal que, para todo $x \in Z$, existem espaços invariantes por Df que decompõem $T_x X$, isto é, satisfazem

$$T_x X = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^{m(x)} .$$

Além disso, para todos vetores não nulos $v \in E_x^i$, temos

$$\chi^i(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln \|D_x f^n(v)\| < \infty .$$

A partir do teorema acima, constatamos uma forma de provar a existência dos expoentes de Lyapunov. Mais que isso, segue que, para quase todo ponto $x \in X$, existe uma quantidade finita de expoentes de Lyapunov, já que eles estão relacionados injetivamente aos espaços E_x^i que decompõe $T_x X$. Neste caso, dizemos que $\{\chi^i(f, x)\}$, em que $i \in \{1, \dots, m(x)\}$, são os **expoentes de Lyapunov** da aplicação f em x . Ademais, definimos $\dim E_x^i$ como a **multiplicidade** do expoente de Lyapunov $\chi^i(f, x)$.

Porém, a consequência fundamental do Teorema 2.6.10 é que ele evidencia uma relação entre a existência dos expoentes de Lyapunov e a hiperbolicidade de uma aplicação, da forma que definimos na Seção 2.4. Com isso em mente, mantendo as nomenclaturas anteriores, temos as definições abaixo.

Definição 2.6.11. *Seja $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto hiperbólico** se existem os expoentes de Lyapunov de f em x e eles são todos não nulos.*

Assim, com o intuito de obtermos a hiperbolicidade da Definição 2.4.10, dado um ponto hiperbólico $x \in X$, consideramos

$$E_x^u = \bigoplus_{\chi^i(f, x) > 0} E_x^i \quad \text{e} \quad E_x^s = \bigoplus_{\chi^i(f, x) < 0} E_x^i .$$

Daí, somos levados a uma definição de hiperbolicidade, semelhante à vista anteriormente, mas estabelecida através dos expoentes de Lyapunov.

Definição 2.6.12. *Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é uma **aplicação hiperbólica** se μ -quase todo ponto $x \in X$ é hiperbólico.*

3 UMA INTRODUÇÃO AOS BILHARES

Como mencionado no Capítulo 1, o objeto principal de estudo neste trabalho será o bilhar assimétrico no limão. Contudo, antes de nos debruçarmos no mesmo, precisamos nos familiarizar com a teoria geral de bilhares planares, que é justamente o nosso foco neste capítulo. Para tanto, nossa referência principal foi (CHERNOV; MARKARIAN, 2006).

3.1 CONCEITOS INICIAIS E CONDIÇÕES DE MESA

Antes de mais nada, vejamos a definição geral de um sistema de bilhar no plano.

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes. Um **sistema de bilhar** corresponde ao movimento livre de uma partícula pontual no interior de $\mathcal{Q}$, cujas colisões na fronteira $\partial\mathcal{Q}$ sofrem reflexões regulares, isto é, o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão são iguais.*

Reparemos que, pela definição acima, o estudo de um bilhar é fisicamente muito simples e intuitivo. Contudo, matematicamente, não é dito muito a respeito do domínio $\mathcal{Q}$ e da fronteira $\partial\mathcal{Q}$, que são justamente os fatores determinantes para o estudo de um bilhar. Dessa forma, para evitarmos patologias e nos direcionarmos para nosso objetivo central, iremos impor quatro condições sobre os elementos supracitados. Para cada condição, justificaremos brevemente o motivo pelo qual a estamos considerando, exibindo também os conceitos de bilhares necessários à sua compreensão.

- **Primeira Condição**

De imediato, já somos capazes de estabelecer a primeira condição que iremos exigir nos bilhares que trabalharemos. A saber,

Condição 1. *Seja $Q_0 \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, aberto e conexo. Consideraremos $\mathcal{Q} = \overline{Q_0}$ e que a fronteira $\partial\mathcal{Q}$ é uma união finita de curvas compactas e de classe C^k , com $k \geq 3$, isto é,*

$$\partial\mathcal{Q} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r ,$$

em que cada curva Γ_i é definida por uma aplicação $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $f_i \in C^k$, injetiva em $[a_i, b_i]$ e possuindo derivadas laterais até de ordem k em a_i e b_i , para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Como consequência direta de tal condição, temos a definição a seguir.

Definição 3.1.2. Dizemos que $\mathcal{Q}$ é a **mesa do bilhar** e que $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ são as **componentes** ou **paredes** de $\partial\mathcal{Q}$. Além disso, dizemos que k é a **classe de suavidade** da mesa de bilhar $\mathcal{Q}$.

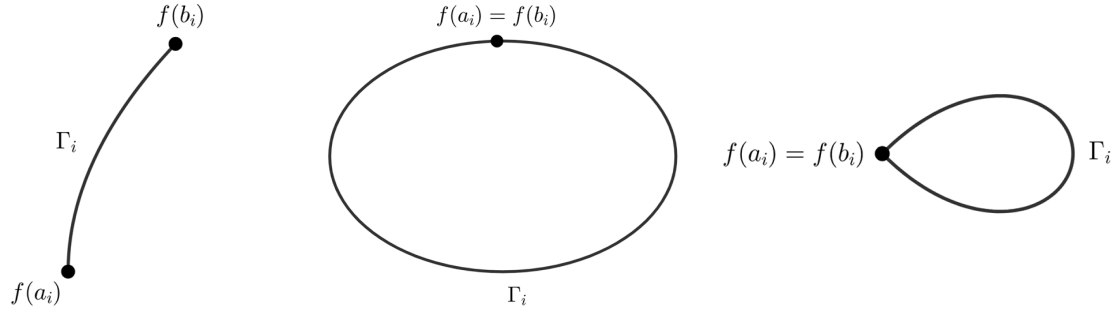
Uma importante característica das componentes da mesa do bilhar se dá em suas extremidades. Exploraremos esse aspecto na definição abaixo.

Definição 3.1.3. Seja Γ_i uma componente da mesa de bilhar $\mathcal{Q}$. Então,

- a. Dizemos que Γ_i é um **arco** se $f_i(a_i) \neq f_i(b_i)$. Neste caso, denotamos $\partial\Gamma_i = \{f_i(a_i), f_i(b_i)\}$.
- b. Dizemos que Γ_i é uma **curva fechada** se $f_i(a_i) = f_i(b_i)$. Observemos que, na Condição 1, não exigimos suavidade no ponto b_i . Daí, temos dois sub-casos.
 - I) $\Gamma_i \in C^k$: Então, $\partial\Gamma_i = \emptyset$.
 - II) $\Gamma_i \notin C^k$: Então, não temos diferenciabilidade no ponto $f_i(a_i) = f_i(b_i)$. Daí, $\partial\Gamma_i = \{f_i(a_i)\}$.

Todos os casos acima são devidamente representados na Figura 3.1 abaixo.

Figura 3.1 – Tipos de componentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observemos que, com a condição acima e as definições concomitantes à mesma, restringimos os formatos possíveis para nossa mesa de bilhar e sua respectiva fronteira. Um dos aspectos essenciais que ganhamos ao impor tal condição é a suavidade de $\partial\mathcal{Q}$, que é essencial para a obtenção de bons resultados. Ademais, ao requisitarmos que as componentes sejam compactas e de quantidade finita, evitamos que a fronteira de nossa mesa possua um comprimento infinito. A saber, denotamos o comprimento de $\mathcal{Q}$ por

$$|\Gamma| = \sum_i |\Gamma_i|,$$

em que $|\Gamma_i|$ representa o comprimento da componente Γ_i .

Apesar disso, um dos aspectos que ainda parece injustificado se dá pela exigência da classe de suavidade do bilhar ser especificamente maior ou igual a 3. Tal hipótese será justificada futuramente.

- **Segunda Condição**

A fim de continuarmos caracterizando nossa mesa e sua fronteira, introduzimos nossa próxima condição.

Condição 2. *As componentes de bordo Γ_i podem interseccionar umas com as outras apenas nos seus pontos de extremidade, ou seja, para quaisquer $i \neq j$, segue que*

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j .$$

Com a condição acima, somos capazes de caracterizar os pontos de $\partial\mathcal{Q}$ em duas classes de pontos, como definimos abaixo.

Definição 3.1.4. *Dada uma mesa de bilhar $\mathcal{Q}$ com suas componentes Γ_i , em que $i \in \{1, \dots, r\}$, definimos*

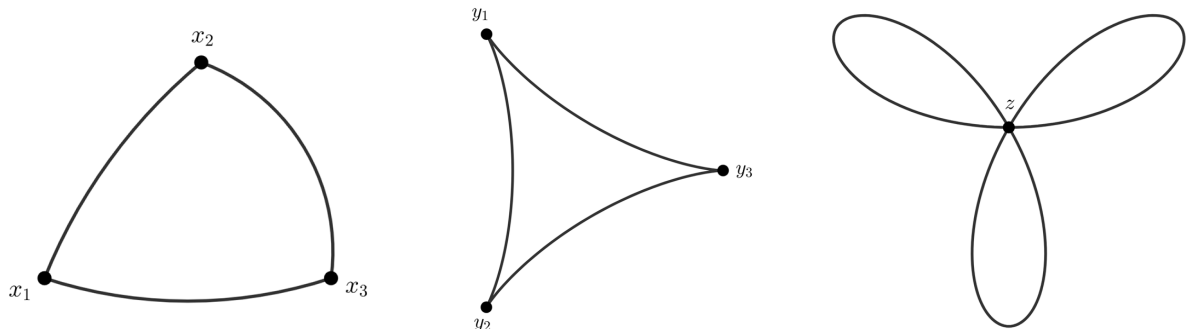
$$\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r \quad e \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_* .$$

Dizemos que Γ_ é o **conjunto dos vértices** de $\mathcal{Q}$. Por outro lado, $\tilde{\Gamma}$ é o **conjunto dos pontos regulares** de $\partial\mathcal{Q}$.*

O conjunto de vértices de uma fronteira será de grande relevância no estudo dos bilhares, visto que os mesmos atuarão como pontos de singularidade na dinâmica que estudaremos. Por esse motivo, é importante entendê-los minimamente bem.

São muitos os tipos de vértices que podem aparecer nos bilhares que se encaixam nas condições impostas até o momento. Vejamos alguns exemplos na Figura 3.2 abaixo.

Figura 3.2 – Tipos de vértices.



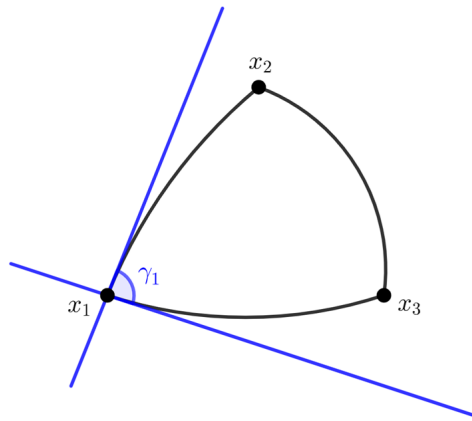
Intuitivamente, podemos perceber uma clara distinção entre os dois primeiros exemplos e o terceiro. Isso se dá pois, nos primeiros exemplos, o vértice é dado pela interseção de apenas duas componentes. Por outro lado, no terceiro exemplo, o vértice é resultado da interseção de 3 componentes. Denominamos as componentes que formam o vértice como os **lados** do vértice. Além disso, um vértice é dito um **vértice simples** se possui apenas dois lados. Ao longo deste trabalho, consideraremos apenas estes tipos de vértices.

Apesar da diferença acima, ainda podemos intuir uma diferença entre os vértices do primeiro e do segundo exemplo. A fim de distinguirmos tais vértices, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.5. *Seja x um ponto de vértice simples. Dizemos que o **ângulo interior** γ de x é o ângulo formado pelas retas tangentes aos lados deste vértice em x . Em particular, se $\gamma \neq 0$, dizemos que o vértice em questão é um **vértice regular**. Caso $\gamma = 0$, dizemos que o vértice em questão é uma **cúspide**.*

A fim de exemplificarmos a definição acima, a Figura 3.3 a seguir apresenta o ângulo interior do vértice x_1 .

Figura 3.3 – Ângulo interno dos vértice x_1 .

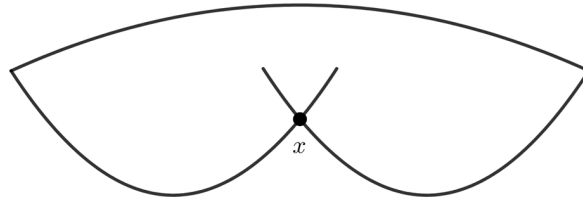


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Deste modo, concluímos que, na Figura 3.2, os vértices x_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, são vértices regulares. Por outro lado, os vértices y_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, são cúspides.

Exploradas as consequências da segunda condição imposta, podemos perceber que, tal como a primeira, ela restringe as possibilidades de mesa na qual iremos trabalhar. Por exemplo, a mesa da Figura 3.4 a seguir é descartada dos nossos estudos, visto que seu vértice não se encontra nas extremidades das componentes.

Figura 3.4 – Mesa de Bilhar que não satisfaz a Condição 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Além disso, combinando a primeira condição, que nos diz que as componentes de uma mesa de bilhar são finitas, com a segunda condição, que nos diz sobre a interseção das mesmas, concluímos que as mesas que trabalharemos possuirão apenas uma quantidade finita de vértices. Isso é importante devido ao fator que mencionamos anteriormente, dos vértices se comportarem como singularidades na dinâmica que trabalharemos no bilhar.

• Terceira Condição

Na terceira condição, exploraremos a suavidade das componentes, estabelecida na Condição 1. Para tanto, definiremos uma orientação para estas componentes. A saber, determinamos que a orientação de cada componente Γ_i é tal que $\mathcal{Q}$ recai à esquerda de Γ_i . Ludicamente, podemos pensar que, uma pessoa andando nesta orientação, sempre terá o braço esquerdo apontando para o interior da mesa $\mathcal{Q}$.

Ademais, como cada componente é uma curva diferenciável, estabeleceremos que tais curvas estão parametrizadas por seu comprimento de arco, procedimento que sempre podemos assumir sem perda de generalidade, como vimos na Seção 2.1. Consequentemente, pela Observação 2.1.8, seus vetores tangentes são unitários, ou seja, $\|f'_i\| = 1$.

Com as novas exigências acima em mente, somos capazes de instituir nossa terceira condição.

Condição 3. *Para cada componente Γ_i , ou f''_i é identicamente nula ou f''_i nunca se anula. Equivalentemente, pela Equação (2.4), a curvatura de Γ_i ou é nula ou possui sempre o mesmo sinal.*

As consequências desta condição são bem diretas, visto que, basicamente, ela nos garante uma forma de classificarmos as componentes da mesa de bilhar. Tal classificação ocorre da forma abaixo.

Definição 3.1.6. *Seja $\mathcal{Q}$ uma mesa de bilhar. Dizemos que uma componente Γ_i de $\mathcal{Q}$ é*

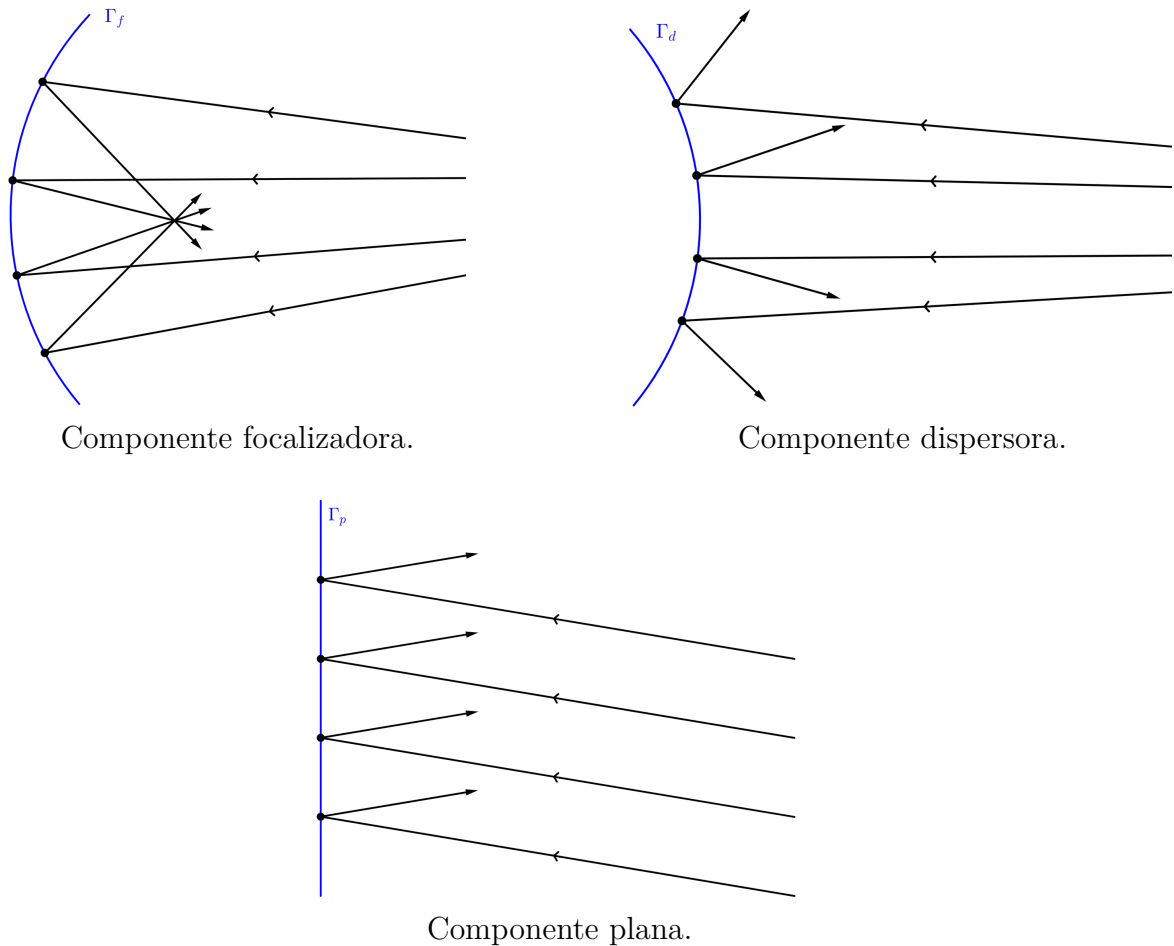
*a. **Focalizadora** ou **convexa**: se $\kappa = -\|f''\|$;*

b. **Dispersora** ou **côncava**: se $\kappa = \|f''\|$;

c. **Flat** ou **plana**: se $\kappa = 0$.

Todos os casos acima são devidamente representados na Figura 3.5 abaixo.

Figura 3.5 – Tipos de Componentes de acordo com a curvatura.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observação 3.1.7. Como curiosidade, devemos mencionar que a nomenclatura das classificações acima é derivada da teoria de espelhos na física. Assim, fazendo uma analogia com raios de luz, as componentes focalizadoras iriam focalizar feixes de raios paralelos. Por outro lado, componentes dispersoras iriam dispersar tais feixes. Ambas as situações podem ser verificadas nas imagens acima.

Observação 3.1.8. Naturalmente, mesmo quando pensamos nos espelhos mencionados acima, é importante sabermos de onde os raios estão vindo, visto que, de acordo com esta perspectiva, uma componente pode ser tanto focalizadora quanto dispersora. Justamente por este motivo se dá a necessidade de definirmos uma orientação para as componentes, como fizemos acima.

Vale ressaltarmos que, além da Condição 3 impossibilitar uma componente de transitar entre os tipos acima, ela também garante, junto da Condição 1, que as curvaturas não-nulas das componentes são bem comportadas, ou seja, que suas curvaturas não se aproximam indefinidamente de 0 ou $+\infty$. Realmente, pela Observação 2.1.12, κ é uma função suave, em particular, contínua. Ademais, pela Condição 1, as curvas que determinam as componentes estão definidas em um intervalo compacto. Logo, pelo Teorema de Weierstrass, κ é limitada inferiormente e superiormente, provando a afirmação anterior.

Da classificação acima, definimos

$$\Gamma_0 = \bigcup_{\kappa=0} \Gamma_i, \quad \Gamma_- = \bigcup_{\kappa<0} \Gamma_i, \quad \Gamma_+ = \bigcup_{\kappa>0} \Gamma_i,$$

ou seja, o conjunto das componentes flat, focalizadoras e dispersoras de um bilhar, respectivamente.

• Quarta Condição

Para a caracterização das componentes de $\mathcal{Q}$, feita na subseção anterior, utilizamos que tais elementos são, no mínimo, de classe C^2 , hipótese garantida pela Condição 1, em que exigimos que as componentes são de classe C^k , para $k \geq 3$. A justificativa desta hipótese repousa justamente no estudo de uma das características da dinâmica do bilhar, que exploraremos abaixo. Junto disso, surgirá a necessidade de decretarmos nossa quarta e última condição sobre $\mathcal{Q}$.

Dada uma mesa de bilhar $\mathcal{Q}$, a dinâmica que estudaremos é justamente a mencionada na Definição 3.1.1, isto é, se dará pelo movimento de uma partícula $q \in \mathcal{Q}$, munida de um **vetor velocidade** $v \in \mathbb{R}^2$, que sofre colisões regulares em Γ . É claro que, com o passar do tempo, esta partícula terá diferentes posições e direções, que serão representados pelas funções $q(t)$ e $v(t)$, respectivamente.

Observação 3.1.9. *Usualmente omitiremos a aplicação do tempo nas funções acima. Assim, muitas vezes denotaremos $q(t)$ simplesmente por q . Naturalmente, quando for necessário, reforçaremos a diferença entre ambas as notações.*

É essencial entendermos o papel do vetor velocidade v . Majoritariamente, este vetor é importante para descrever a direção do movimento da partícula q . Contudo, ele também ditará a velocidade desta partícula, bem como o nome sugere. Como a teoria está mais interessada no caminho percorrido e não na velocidade com que ele é percorrido, é adotado $\|v\| = 1$, o que simplifica aspectos futuros.

Percebamos que, pela forma que definimos, o movimento da partícula sofre alterações relevantes apenas nas colisões com Γ , ou seja, quando $q \in \Gamma$. De modo geral, quando não há colisões, o vetor velocidade v não se altera e a posição da partícula é determinada

por v . Assim, se $t \in I$, em que I é um intervalo de tempo sem colisões, temos

$$q(t) = v(t) \cdot t \quad \text{e} \quad v(t) = v .$$

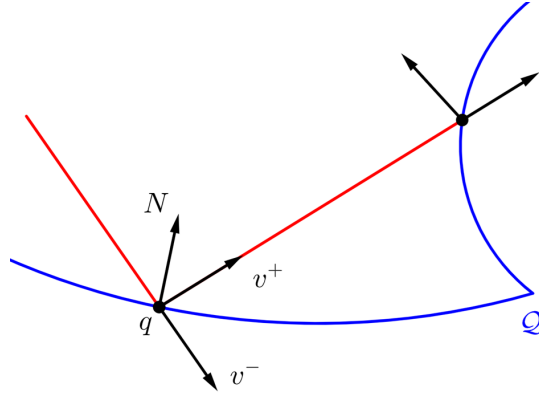
Por outro lado, quando $q \in \Gamma$, temos dois casos possíveis. São eles,

- $q \in \tilde{\Gamma}$: Neste caso, aplicamos a regra da colisão regular. Equivalentemente, o vetor v será refletido ao longo da reta tangente a Γ no ponto q . Analiticamente, temos

$$v^+ = v^- - 2 \cdot \langle v^-, N \rangle \cdot N , \quad (3.1)$$

em que v^- é o vetor pré-colisional, v^+ é o vetor pós-colisional e N é o vetor normal a Γ no ponto q , como mostra a Figura 3.6.

Figura 3.6 – Colisão regular em $\tilde{\Gamma}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

- $q \in \Gamma_*$: Então, q vai de encontro a um dos vértices de $\mathcal{Q}$. Claramente, o processo do item anterior não pode ser aplicado aqui, visto que a reta tangente ao vértice não está bem definida. Por este motivo, dizemos que o movimento cessa, isto é, ele não estará definido em momentos futuros. Logo, os vértices atuam como singularidades da dinâmica, como mencionamos anteriormente.

Reparemos que, mesmo quando $q \in \tilde{\Gamma}$, se v^- for tangente a Γ no ponto q , então $v^+ = v^-$, pois teríamos $\langle v^-, N \rangle = 0$. Este é um caso que foge do cenário descrito anteriormente, já que gostaríamos que o vetor velocidade se altere nas colisões. Mediante a isto, temos a definição abaixo.

Definição 3.1.10. *Sejam $\mathcal{Q}$ uma mesa de bilhar e $q \in \tilde{\Gamma}$. Então,*

- se v^- não é tangente a Γ em q , dizemos que esta é uma **colisão regular**;*
- se v^- é tangente a Γ em q , dizemos que esta é uma **colisão tangencial**.*

Como dito acima, as colisões tangenciais fogem do padrão que esperamos das colisões nos bilhares. Por esta razão, tais quais os vértices da mesa, elas também serão consideradas singularidades na dinâmica do bilhar.

Observação 3.1.11. *Apesar de vértices e colisões tangenciais serem singularidades, colisões tangenciais não ocorrem em qualquer bilhar, a saber, as mesmas só podem ocorrer em componentes dispersoras.*

Finalmente, para finalizarmos esta subseção e obtermos nossa quarta condição, verificaremos brevemente outra situação que também é caracterizada como um tipo de singularidade da dinâmica do bilhar, a acumulação de colisões.

Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de colisões bem definidas, ou seja, $q(t_n) \in \Gamma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em que desconsideramos colisões com os vértices e colisões tangenciais. Dessa forma, é esperado que as colisões continuem com o decorrer do tempo, isto é, que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não seja convergente. Contudo, existem situações extremamente particulares em que $t_n \rightarrow t_\infty$. Consequentemente, $q(t_n) \rightarrow q_\infty$. Daí, temos dois casos possíveis e excludentes, ou $q_\infty \in \Gamma_*$ ou $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$.

Independente do caso, não estamos interessados em como ou por qual motivo ele acontece, mas em como podemos evitá-lo. Em relação ao primeiro cenário, em que $q_\infty \in \Gamma_*$, ou seja, q_∞ pertence a um vértice da mesa, temos os resultados a seguir.

Lema 3.1.12. *Sejam $\mathcal{Q}$ uma mesa de bilhar, A um vértice de $\mathcal{Q}$ com ângulo interior $\gamma > 0$ e $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança de A . Se $q \in U$ é uma partícula de bilhar, colidindo em ambas as componentes que formam A , então q deixa a vizinhança U em, no máximo, $\left\lfloor \frac{\pi}{\gamma} \right\rfloor + 1$ colisões¹.*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 24. ■

Lema 3.1.13. *Sejam $\mathcal{Q}$ uma mesa de bilhar, A uma cúspide de $\mathcal{Q}$ e $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança de A . Se A é formada ou por duas componentes dispersoras ou por uma componente dispersora e uma plana, então qualquer partícula de bilhar tal que $q \in U$ deixa a vizinhança U após uma quantidade finita de colisões.*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 25. ■

¹ Ao longo deste trabalho, a notação $\lfloor \cdot \rfloor$ representará a função piso.

Do Lema 3.1.12, segue que o caso $q_\infty \in \Gamma_*$ não ocorre em vértices regulares. Consequentemente, tal caso pode ocorrer apenas em cúspides. Porém, pelo Lema 3.1.13, $q_\infty \in \Gamma_*$ não ocorre quando a cúspide é formada ou por duas componentes dispersoras ou por uma componente dispersora e uma plana. Desse modo, o caso estudado pode surgir apenas em cúspides formadas por uma componente dispersora e por uma componente focalizadora². A fim de evitar tal situação, surge nossa quarta e última condição.

Condição 4. *Qualquer mesa de bilhar $\mathcal{Q}$ não contém cúspides formadas por um componente dispersora e por uma componente focalizadora.*

Por fim, no que diz respeito ao caso $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$, devemos nos preocupar apenas com as componentes focalizadoras da mesa, visto que é impossível ocorrer acumulação de colisões em mesas planas e dispersoras. Assim, temos o teorema abaixo.

Teorema 3.1.14. *Seja $\mathcal{Q}$ uma mesa de bilhar e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de colisão. Então, $t_n \rightarrow t_\infty$ e $q(t_n) \rightarrow q_\infty \in \tilde{\Gamma}$ não ocorrem se as componentes focalizadoras de $\mathcal{Q}$ são de classe C^3 e possuem curvatura que não se anulam.*

Demonstração: Ver (HALPERN, 1977), página 302. ■

Observemos que, pela Condição 1, todas nossas componentes são de classe C^3 . Ademais, pela Condição 3, a condição acerca da curvatura também é válida. Desta forma, pelas condições impostas, colisões do tipo $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$ são impossíveis.

Portanto, do teorema acima somos capazes de entender a necessidade da classe C^3 especificada anteriormente e, além disso, constatamos que, sob as nossas restrições, nenhum tipo de acumulação de colisões pode ocorrer, como gostaríamos.

Por fim, vimos que, a cada condição que adicionávamos à mesa do bilhar, retirávamos determinadas patologias. Reforçamos que existem estudos voltados para bilhares com tais patologias, porém, eles não serão abordados. Ademais, mesmo com tais condições, ainda seremos capazes de estudar uma vasta e rica classe de bilhares, incluindo os caóticos.

3.2 APLICAÇÃO DE COLISÃO E CARACTERÍSTICAS

Na seção anterior estávamos focados em apresentar as definições essenciais do bilhar e também caracterizarmos suas mesas. Com o nosso objeto de estudo bem definido,

² A presença de cúspides surge apenas nos três cenários descritos neste parágrafo. Tal afirmação pode ser facilmente verificada através de argumentos geométricos.

focaremos na dinâmica do bilhar em si. Assim, na subseção abaixo definiremos a transformação do bilhar que estudaremos e, nas subseções seguintes, apresentaremos conceitos correlatos à mesma, a saber, seu domínio, suas singularidades, entre outros.

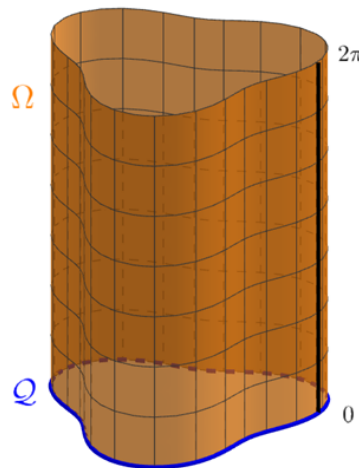
3.2.1 Aplicação de Colisão

Pela descrição física da dinâmica do bilhar, somos levados a pensar na mesma como um fluxo, ou seja, considerando toda a trajetória da partícula no interior da mesa, enquanto ela está bem definida. Neste caso, definimos o **fluxo do bilhar** $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$, em que

$$\Omega = \{(q, v) ; q \in \mathcal{Q} \text{ e } v \in S^1\} = \mathcal{Q} \times S^1 .$$

é denominado **espaço de fase**. Graficamente, podemos representar o espaço de fase como indica a Figura 3.7 abaixo.

Figura 3.7 – Espaço de fase do bilhar.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Notemos que o fluxo não está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, visto que não estamos desconsiderando colisões nos vértices da mesa, por exemplo. Daí, definimos $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ como o espaço cujos pontos possuem uma trajetória bem definida para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a aplicação $\Phi^t|_{\tilde{\Omega}}$ está bem definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Ademais, tal aplicação é contínua, já que, em cada colisão regular $q \in \tilde{\Gamma}$, identificamos os estados (q, v^-) e (q, v^+) , relacionados pela Equação (3.1).

Apesar da definição de fluxo, evidenciamos anteriormente que a parte principal da dinâmica do bilhar se dá apenas nas colisões com $\partial\mathcal{Q}$, onde ocorre a mudança na direção da partícula. Tendo isso em mente, construiremos uma transformação de Poincaré global

para este fluxo³. Para tanto, consideremos

$$\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i \subset \Gamma \times S^1 \subset \Omega ,$$

em que

$$\mathcal{M}_i = \{x = (q, v) \in \Omega ; q \in \Gamma_i \text{ e } \langle v, N \rangle \geq 0\} ,$$

no qual N é o vetor normal interno a Γ em x . Vale ressaltarmos que a caracterização acima é válida devido à identificação entre v^- e v^+ , estabelecida acima.

Prosseguindo, definimos $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$. Naturalmente, $\tilde{\mathcal{M}}$ é uma subvariedade de Ω , com codimensão 1. Além disso, $\tilde{\mathcal{M}}$ é compacta, devido à Condição 1, transversal a Φ^t e toda trajetória do fluxo intersecta este espaço, ambos pela natureza do fluxo do bilhar. Daí, a função tempo de primeiro retorno $\tau = \tau_{\tilde{\mathcal{M}}} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow [0, +\infty)$, dada por

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 ; \Phi^t(x) \in \tilde{\mathcal{M}}\} ,$$

está bem definida, uma vez que em $\tilde{\Omega}$ as colisões são definidas para todo tempo.

Portanto, pela Definição 2.4.9, a aplicação $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$, definida por

$$\mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)}(x) ,$$

é uma aplicação de Poincaré global para o fluxo do bilhar. Neste caso, dizemos que $\mathcal{F}$ é a **aplicação de colisão** do bilhar e $\mathcal{M}$ é o **espaço de colisão** do bilhar pela aplicação $\mathcal{F}$. Sem perda de generalidade, já consideraremos $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, pois veremos adiante que $\lambda(\mathcal{M} \setminus \tilde{\mathcal{M}}) = 0$, o que permite a obtenção de uma extensão contínua.

Notemos que, além do tempo de retorno $\tau(x)$ nos informar o tempo que um ponto $x \in \tilde{\mathcal{M}}$ demora para colidir com o bordo $\mathcal{Q}$, no ponto $\mathcal{F}(x)$, ele também representa a distância percorrida entre x e $\mathcal{F}(x)$, já que a velocidade do bilhar é unitária.

3.2.2 Coordenadas do Espaço de Colisão

Agora, introduziremos um sistema de coordenadas (s, φ) para o espaço $\mathcal{M}$, que indicarão a localização da colisão e a direção de seu vetor velocidade, respectivamente. Primeiramente, vejamos que, como cada componente Γ_i está parametrizada por seu comprimento de arco, podemos considerar $|\Gamma_i| = [a_i, b_i]$. Daí,

$$|\Gamma| = \bigcup_i [a_i, b_i] = [a, b] ,$$

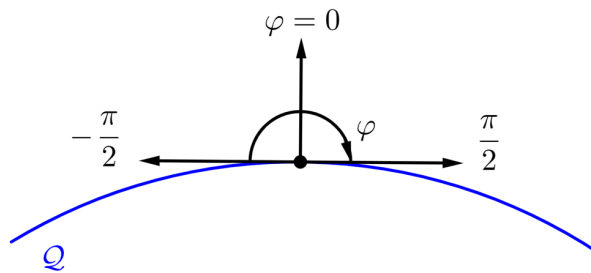
em que consideramos $b_i = a_{i+1}$, com (a_i, b_i) intervalos reais disjuntos. Além disso, a origem da parametrização é identificada ao valor $a = 0$. Com isso, dado $x \in \mathcal{M}$, ele está

³ Para mais informações sobre o fluxo do bilhar, recomendamos a leitura de (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), páginas 26 a 30.

associado a um valor s que, por sua vez, associa-se com um ponto $p \in \Gamma$, denominado por **ponto de reflexão**, ou **ponto de colisão**, de x , que identifica a posição de x em Γ .

Em relação à direção da trajetória associada a um ponto $x \in \mathcal{M}$, utilizamos a coordenada $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida como o ângulo entre o vetor velocidade v e o vetor normal interno a Γ no ponto x , denotado por N . A orientação da medida de φ é feita com sentido crescente na direção horária, como mostra a Figura 3.8 abaixo.

Figura 3.8 – Determinação da medida do ângulo φ .



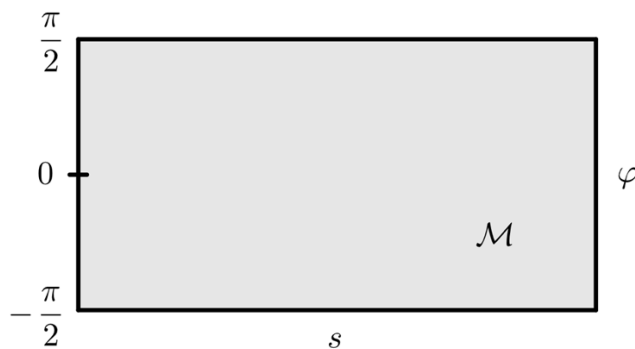
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Da parametrização acima, segue que $\mathcal{M}_i$ é um retângulo, a saber,

$$\mathcal{M}_i = [a_i, b_i] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Graficamente, pela aglutinação dos espaços $\mathcal{M}_i$, o espaço $\mathcal{M}$ também é um retângulo, cujos lados verticais estão identificados, representado pela Figura 3.9 abaixo.

Figura 3.9 – O espaço de colisão $\mathcal{M}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

3.2.3 Singularidades

Com a parametrização do espaço de colisão, somos capazes de caracterizar formalmente as singularidades do bilhar mencionadas anteriormente, isto é, as colisões tangenciais e as colisões com os vértices de $\mathcal{Q}$. Daí, definimos o **conjunto de singularidades**

do bilhar como

$$\mathcal{S}_0 = \partial\mathcal{M} = \left\{ |\varphi| = \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \bigcup_i (\{s = a_i\} \cup \{s = b_i\}) \right\}, \quad (3.2)$$

nos quais os conjuntos $\{s = a_i\}$ e $\{s = b_i\}$ são considerados apenas quando $a_i, b_i \in \partial\Gamma_i$, em que Γ_i não é uma curva fechada suave.

Portanto, as colisões bem definidas da dinâmica são aquelas associadas aos pontos que pertencem ao interior de $\mathcal{M}$. Esta ideia nos leva a considerar os **conjuntos de singularidades** das aplicações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$, definidos, respectivamente, por

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \{x \in \text{int}(\mathcal{M}) ; \mathcal{F}(x) \notin \text{int}(\mathcal{M})\}.$$

$$\mathcal{S}_{-1} = \mathcal{S}_0 \cup \{x \in \text{int}(\mathcal{M}) ; \mathcal{F}^{-1}(x) \notin \text{int}(\mathcal{M})\}.$$

Indutivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos os **conjuntos de singularidades** das aplicações $\mathcal{F}^n$ e $\mathcal{F}^{-n}$, dados, respectivamente, por

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{n-1} \cup \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_{n-1}) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_{-n} = \mathcal{S}_{-(n-1)} \cup \mathcal{F}(\mathcal{S}_{-(n-1)}).$$

Além disso, definimos o **conjunto das singularidades** de todas as aplicações $\mathcal{F}^n$, para $n \in \mathbb{Z}$, dado por

$$\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_n.$$

Por fim, a fim de caracterizarmos os conjunto de singularidades vistos acima, temos o resultado abaixo.

Teorema 3.2.1. *Seja $\mathcal{Q}$ um bilhar no plano que satisfaz as condições impostas anteriormente. Então, o conjunto $\mathcal{S}_1$ é dado pela união finita de curvas suaves e compactas que intersectam-se apenas em suas extremidades.*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 267. ■

Num primeiro olhar, o teorema acima parece insuficiente, visto que caracteriza apenas o conjunto $\mathcal{S}_1$, contudo, isso basta. Realmente, primeiramente, lembremos que o conjunto $\mathcal{S}_0$ já está devidamente caracterizado. Além disso, somos levados a considerar apenas os conjunto $\mathcal{S}_n$, para $n \geq 1$, já que, se $(s, \varphi) \in \mathcal{S}_n$, então $(s, -\varphi) \in \mathcal{S}_{-n}$. Porém, como $\mathcal{F}^n : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-n}$ é um homeomorfismo e $\mathcal{S}_n$ são definidos indutivamente, a caracterização de $\mathcal{S}_1$ se torna suficiente para caracterizarmos $\mathcal{S}_n$.

3.2.4 Derivada e Medida Invariante de $\mathcal{F}$

Prosseguindo com os fatores básicos da dinâmica do bilhar, caracterizaremos a derivada da aplicação de colisão $\mathcal{F}$, dada pelo teorema abaixo.

Teorema 3.2.2. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ a aplicação de colisão. Então, dado $x = (s, \varphi) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1$, com $\mathcal{F}(x) = (s_1, \varphi_1) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$, temos*

$$D_x \mathcal{F} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \cdot \begin{bmatrix} \tau \cdot \kappa + \cos \varphi & \tau \\ \tau \cdot \kappa \cdot \kappa_1 + \kappa \cdot \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cdot \cos \varphi & \tau \cdot \kappa_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que $\tau = \tau(x)$, sendo κ e κ_1 as curvaturas das componentes que contêm x e $\mathcal{F}(x)$, respectivamente.

Com isso, constatamos que, dada uma mesa $\mathcal{Q}$ com classe de suavidade⁴ k , a aplicação de colisão $\mathcal{F}$ é de classe C^{k-1} . Mais que isso, tomando como domínio o conjunto $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$, todas as iterações de $\mathcal{F}$ são definidas e de classe C^{k-1} .

Além da obtenção da classe de suavidade de uma aplicação, a derivada desta também está atrelada à classificação de pontos periódicos da dinâmica, avaliando a estabilidade dos mesmos, ou seja, como trajetórias vizinhas a um ponto periódico se comportam ao longo do tempo. A saber, como na referência (CORREIA; ZHANG, 2015), definimos

Definição 3.2.3. *Seja x um ponto periódico de período k , ou seja, $\mathcal{F}^k(x) = x$. Então, dizemos que a órbita de x é*

- **hiperbólica**, se $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^k)| > 2$;
- **parabólica**, se $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^k)| = 2$;
- **elíptica**, se $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^k)| < 2$.

Tão importante quanto à derivada da aplicação de colisão é a medida que consideramos como par da mesma. Ressaltamos que não utilizamos a medida de Lebesgue pois ela não é preservada por $\mathcal{F}$. Daí,

Proposição 3.2.4. *A aplicação $\mathcal{F}$ preserva a medida $d\nu = \cos \varphi \, ds \, d\varphi$ em $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 35. ■

⁴ Aqui reforçamos que utilizamos a letra k para referenciar a classe de diferenciabilidade do bilhar, enquanto a letra κ é utilizada para a curvatura das componentes. Apesar da similaridade na escrita, tais símbolos não devem ser confundidos.

Do lema acima, obtemos uma medida invariante por $\mathcal{F}$. A partir disso, definimos a **probabilidade invariante do bilhar**, denotada por μ e dada por,

$$d\mu = \frac{d\nu}{\nu(\mathcal{M})} = \frac{\cos \varphi \, ds \, d\varphi}{2|\Gamma|} = (2|\Gamma|)^{-1} \cdot \cos \varphi \, d\lambda ,$$

em que usamos

$$\nu(\mathcal{M}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{|\Gamma|} d\nu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{|\Gamma|} \cos \varphi \, ds \, d\varphi = 2|\Gamma| .$$

Para finalizarmos esta subseção, apresentamos a proposição abaixo e uma consequência imediata da mesma, que diz respeito ao conjunto de singularidades do bilhar.

Proposição 3.2.5. *A medida do bilhar μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue λ .*

Demonstração: Com efeito, seja $A \subset \mathcal{M}$ um conjunto mensurável, com $d\lambda(A) = 0$. Equivalentemente,

$$\lambda(A) = \int_A d\lambda = 0 .$$

Consequentemente, como $|\cos \varphi| \leq 1$, temos

$$|\mu(A)| = \left| \int_A \cos \varphi \, ds \, d\varphi \right| \leq \int_A |\cos \varphi| \, ds \, d\varphi \leq \int_A ds \, d\varphi = \int_A d\lambda = 0 \\ \therefore \mu(A) = 0 ,$$

Portanto, como A foi tomado arbitrariamente, segue que μ é absolutamente contínua com respeito a λ . ■

Proposição 3.2.6. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale $\mu(\mathcal{S}_n) = 0$. Em particular, $\mu(\mathcal{S}_\infty) = 0$.*

Demonstração: Primeiramente, utilizaremos o Princípio de Indução Matemática para provarmos que $\mu(\mathcal{S}_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daí,

- $n = 0$: Como $\mathcal{S}_0 = \partial\mathcal{M}$, temos $\lambda(\mathcal{S}_0) = 0$. Consequentemente, pela proposição anterior, $\mu(\mathcal{S}_0) = 0$.
- $n = 1$: Por definição, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_0)$. Assim, como μ é $\mathcal{F}$ invariante, segue que

$$\mu(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_0)) = \mu(\mathcal{S}_0) = 0 .$$

Logo, $\mathcal{S}_1$ é a união de dois conjuntos de medida nula. Consequentemente, $\mu(\mathcal{S}_1) = 0$.

- Suponhamos que a afirmação seja válida para $n = k$, ou seja, $\mu(\mathcal{S}_k) = 0$. Então, provaremos que $\mu(\mathcal{S}_{k+1}) = 0$.

Realmente, como μ é $\mathcal{F}$ invariante, segue que

$$\mu(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_k)) = \mu(\mathcal{S}_k) = 0 .$$

Logo, $\mathcal{S}_{k+1}$ é a união de dois conjuntos de medida nula, já que $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \cup \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_k)$. Consequentemente, $\mu(\mathcal{S}_{k+1}) = 0$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, segue que $\mu(\mathcal{S}_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

De modo análogo ao feito acima, somos capazes de provar o mesmo para os inteiros negativos. Destarte, $\mu(\mathcal{S}_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em especial, como $\mathcal{S}_\infty$ é a união enumerável de conjuntos de medida nula, segue que $\mu(\mathcal{S}_\infty) = 0$. ■

3.2.5 Involução

Para encerrarmos este capítulo, apresentamos a última das características básicas do bilhar, a involução. Assim,

Definição 3.2.7. *Seja $x \in \mathcal{M}$. Então, definimos a **aplicação de involução** $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, em que $\mathcal{I}(s, \varphi) = (s, -\varphi)$. Em particular, se $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_k$, segue que*

$$\mathcal{F}^{-k} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^k ,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

A involução, por mais simples que seja, desempenha um importante papel na teoria de bilhares, pois permite que rastreiemos a trajetória passada de um estado. Tal característica é formalmente denominada como a reversibilidade do tempo da dinâmica do bilhar.

Além da interpretação da aplicação acima, vejamos outras propriedades da involução. Primeiramente, vejamos que, por definição, $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$, visto que $\mathcal{I} \circ \mathcal{I} = \text{Id}$. Consequentemente, da propriedade mencionada, obtemos

$$\mathcal{F}^{-k} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^k \circ \mathcal{I} ,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por fim, caracterizaremos a derivada da aplicação de involução.

Proposição 3.2.8. *Seja $x \in \mathcal{M}$ e $(a, b) \in T_x \mathcal{M}$. Então,*

$$D\mathcal{I}_x(a, b) = (a, -b) .$$

Demonstração: Como $x \in \mathcal{M}$, então $x = (s, \varphi)$. Além disso, da definição de involução, sabemos que $\mathcal{I}_1 = s$ e $\mathcal{I}_2 = -\varphi$, em que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são as funções coordenadas de $\mathcal{I}$. Desse modo,

$$D\mathcal{I}_x(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{I}_2}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{I}_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} = (a, -b) ,$$

como queríamos demonstrar. ■

3.3 HIPERBOLICIDADE E CURVATURAS DE FRENTES DE ONDAS

Nesta seção, trataremos dos aspectos da dinâmica do bilhar atrelados à sua hiperbolicidade. Assim, daremos continuidade aos conceitos vistos nas Seções 2.4 e 2.6, apresentando resultados que são válidos exclusivamente para bilhares. Após isso, exploraremos características dos bilhares que são utilizadas na constatação de sua hiperbolicidade.

3.3.1 Hiperbolicidade nos Bilhares

Observando a hiperbolicidade sob a ótica ergódica, o Teorema 2.6.10 é fundamental, visto que fornece condições para assegurar a existência dos expoentes de Lyapunov de uma aplicação. Ao aplicarmos tal resultado na aplicação de colisão do bilhar, obtemos o resultado abaixo.

Teorema 3.3.1. *Seja $\mathcal{F}$ a aplicação de colisão. Então, para μ -quase todo ponto $x \in \mathcal{M}$, existem os expoentes de Lyapunov de $\mathcal{F}$ em x .*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 43. ■

Por fim, já que os expoentes de Lyapunov estão relacionados com a decomposição do espaço tangente, como vimos pelo Teorema 2.6.10, e $\dim \mathcal{M} = 2$, segue do teorema acima que, para μ -quase todo ponto $x \in \mathcal{M}$, ou existe um expoente de Lyapunov $\chi(\mathcal{F}, x)$ com multiplicidade dois ou existem dois expoentes de Lyapunov, $\chi^1(\mathcal{F}, x)$ e $\chi^2(\mathcal{F}, x)$, ambos com multiplicidade um. Independente do caso, o resultado a seguir vale.

Lema 3.3.2. Para μ -quase todo ponto, a soma dos expoentes de Lyapunov de $\mathcal{F}$ em x é nula, ou seja, ou $\chi(\mathcal{F}, x) = 0$ ou $\chi^1(\mathcal{F}, x) + \chi^2(\mathcal{F}, x) = 0$.

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), páginas 44 e 45. ■

3.3.2 Frentes de Ondas e Curvaturas

A fim de estudarmos a hiperbolicidade de um bilhar, muitas técnicas utilizam os conceitos de frentes de ondas e suas curvaturas. No que segue, definiremos e exploraremos esses conceitos.

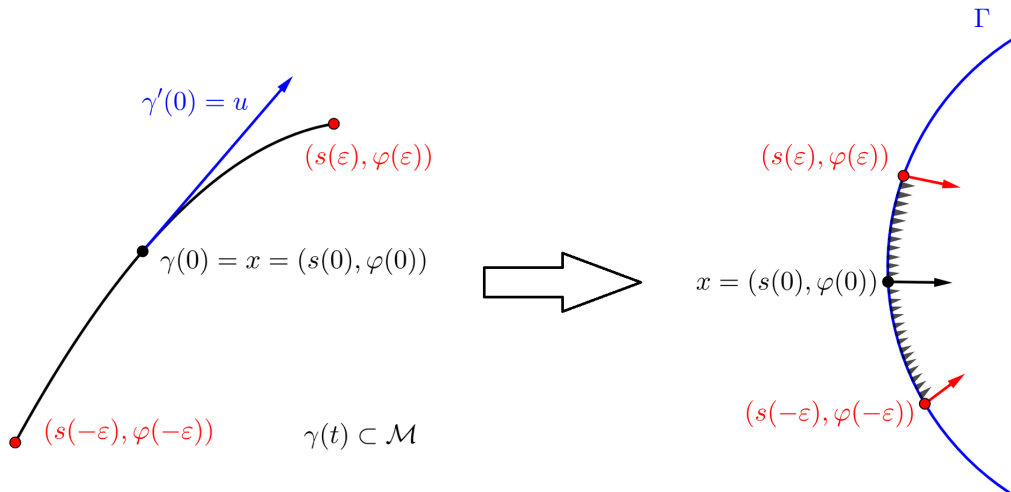
Sejam $x \in \mathcal{M}$ e $u \in T_x\mathcal{M}$. Assim, consideremos a curva suave e infinitesimal $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$, com $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = u$. Pela parametrização do espaço de colisão, temos $\gamma(t) = (s(t), \varphi(t)) \in \mathcal{M}$. A partir da curva γ , definimos a família de curvas $\{\Psi^t(\theta)\}_t$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, em que

$$\Psi^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \quad , \quad \text{com} \quad \Psi^t(\theta) = s(t) + \theta \cdot v(t) \quad ,$$

sendo $v(t)$ o vetor velocidade atrelado a $\varphi(t)$.

Dessa forma, a partir de uma curva em $\mathcal{M}$, obtemos uma família de curvas em $\mathcal{Q}$. Dizemos que a família $\{\Psi^t(\theta)\}_t$ é uma **frente de ondas pós-colisional** gerada pela curva γ . Na Figura 3.10 abaixo, representamos visualmente o processo acima.

Figura 3.10 – Frente de ondas pós-colisional.

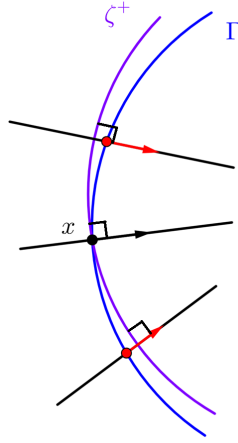


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Com a frente de ondas pós-colisional definida, consideremos ζ^+ a seção ortogonal à família $\{\Psi^t(\theta)\}_t$, tal que $s(0) \in \zeta^+$. Equivalentemente, ζ^+ é a curva em $\mathcal{Q}$ que passa pelo

ponto $s(0)$ e que corta perpendicularmente todos os pontos de $\{\Psi^t(\theta)\}_t$ que intersecta, como mostra a Figura 3.11 abaixo.

Figura 3.11 – Seção ortogonal ζ^+ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

É importante notarmos que, todo o processo acima, por ser infinitesimal, depende do vetor $u \in T_x\mathcal{M}$ escolhido inicialmente. Dessa forma, a seção ortogonal ζ^+ está atrelada a u , tal qual sua curvatura no ponto x , a qual denotaremos por $\mathcal{B}^+(u)$ e denominaremos por **curvatura pós-colisional**.

Analogamente, a partir da curva γ , também podemos construir a família de curvas $\{\Xi^t(\theta)\}_t$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, em que

$$\Xi^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \quad , \quad \text{com} \quad \Xi^t(\theta) = s(t) + \theta \cdot \tilde{v}(t) \quad ,$$

sendo $\tilde{v}(t)$ o vetor velocidade atrelado a $-\varphi(t)$.

Neste caso, dizemos que a família $\{\Xi^t(\theta)\}_t$ é uma **frente de ondas pré-colisional** gerada pela curva γ . Além disso, podemos obter uma seção ortogonal ζ^- , cuja curvatura é denotada por $\mathcal{B}^-(u)$ e denominada por **curvatura pré-colisional**.

É importante salientarmos que, pelo processo acima, existe uma relação biunívoca entre as curvaturas $\mathcal{B}^\pm(u)$ e o vetor u , isto a menos de um escalar, visto que o importante é a direção do vetor.

Outro parâmetro que podemos avaliar a partir das frentes de ondas construídas é o chamado **tempo de focalização**, denotado por $\mathcal{T}^\pm(u)$, em que os sinais de $+$ e $-$ estão atrelados às frentes de onda pós-colisional e pré-colisional, respectivamente. Como o nome sugere, $\mathcal{T}^\pm$ está relacionado ao ponto em que a frente de onda focaliza, isto é, onde suas retas intersectam-se. Assim,

- se $\mathcal{T}^\pm > 0$, a frente de ondas focalizará no futuro. Consequentemente, dizemos que a frente de ondas é **focalizadora**;

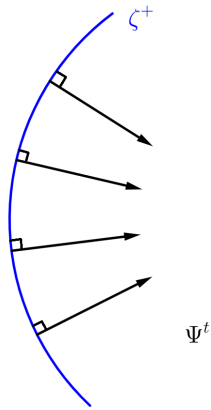
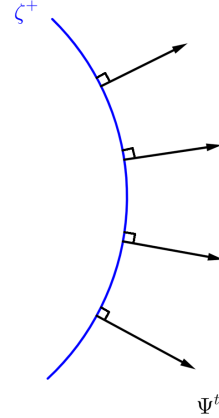
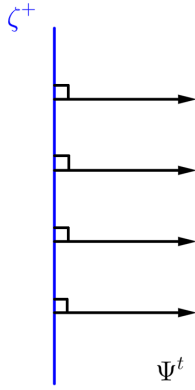
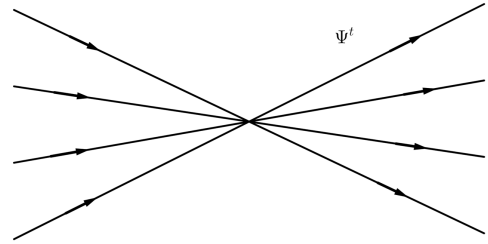
- se $\mathcal{T}^\pm < 0$, a frente de ondas focalizou no passado. Consequentemente, dizemos que a frente de ondas é *dispersora*;
- se $\mathcal{T}^\pm = \infty$, a frente de ondas não focalizara, seja no passado ou no futuro. Consequentemente, dizemos que a frente de ondas é *flat*.
- se $\mathcal{T}^\pm = 0$, a frente de ondas está focalizando justamente em $\partial\mathcal{Q}$. Consequentemente, dizemos que a frente de ondas é *degenerada*.

Como $\mathcal{B}^\pm$ e $\mathcal{T}^\pm$ são características de frentes de ondas, não é de se surpreender que exista uma relação entre estes valores. A saber,

$$\mathcal{B}^\pm(u) = -\frac{1}{\mathcal{T}^\pm(u)} .$$

Consequentemente, de modo equivalentemente a classificação acima, também podemos caracterizar uma frente de ondas de acordo com sua curvatura, como ilustra a Figura 3.12 abaixo.

Figura 3.12 – Tipos de frente de ondas.

Frente de ondas focalizadora, $\mathcal{B}^+ < 0$.Frente de ondas dispersora, $\mathcal{B}^+ > 0$.Frente de ondas flat, $\mathcal{B}^+ = 0$.Frente de ondas degenerada, $\mathcal{B}^+ = \infty$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Pela caracterização acima, fica claro que trabalhar com tempos de focalização e curvaturas são, em certo sentido, equivalentes. Neste trabalho daremos preferência para as curvaturas. Tomada esta escolha, apresentaremos resultados referentes a curvatura de uma frente de ondas, sendo o primeiro deles sobre a relação entre a curvatura pré e pós colisional.

Lema 3.3.3. *Sejam $x \in \mathcal{M}$ e $u \in T_x\mathcal{M}$. Então, as curvaturas pré e pós colisionais satisfazem a equação*

$$\mathcal{B}^+(u) - \mathcal{B}^-(u) = \mathcal{R}(x) \quad , \quad \text{com} \quad \mathcal{R}(x) = \frac{2 \cdot \kappa}{\cos \varphi} \quad , \quad (3.4)$$

em que κ é a curvatura da componente que contém x .

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 55.



Observação 3.3.4. Usualmente, a Equação (3.4) e o valor $\mathcal{R}(x)$ são denominados por **Equação do Espelho** e **parâmetro de reflexão**, respectivamente. Além disso, a fim de facilitarmos notações futuras, escreveremos

$$\mathcal{R}(x) = -\frac{2}{d(x)} \quad , \quad \text{com} \quad d(x) = -\frac{\cos \varphi}{\kappa} \quad . \quad (3.5)$$

Observemos que, o parâmetro de reflexão é justamente o fator que mostra como uma componente da mesa do bilhar afeta a frente de onda analisada, visto que ele depende da curvatura da mesma. Também ressaltamos que, quando o contexto estiver claro, omitiremos o argumento x nas equações acima.

No processo acima, obtemos as curvaturas das frentes de onda no momento imediato da pré e pós colisão. Porém, também estamos interessados em saber como tais curvaturas evoluem após este momento. Assim, tomemos $x, \mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}$. Pelo que vimos, o tempo entre tais colisões é o valor $\tau(x) = \tau$. Desse modo, a curvatura da frente de ondas em um tempo t , com $t \in (0, \tau)$, é dado por

$$\mathcal{B}_t = \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}_0^+}} \quad , \quad (3.6)$$

em que o subíndice 0 indica a relação com o ponto inicial x .

Estabelecida a notação acima, vejamos como a curvatura de x influencia na curvatura pré-colisional de $x_1 = \mathcal{F}(x)$. Primeiramente, observemos que, enquanto as curvaturas de x estão atreladas a um vetor $u \in T_x \mathcal{M}$, as curvaturas em x_1 estão atreladas ao vetor $u_1 = D_x \mathcal{F}(u) \in T_{\mathcal{F}(x)} \mathcal{M}$, pois tanto x quanto u devem ser iterados em suas respectivas aplicações. Daí, iniciamos com a relação do lema acima, ou seja,

$$\mathcal{B}_0^+ = \mathcal{R}_0 + \mathcal{B}_0^- \quad .$$

Por outro lado, pela Equação (3.6), temos

$$\mathcal{B}_1^- = \frac{1}{\tau + \frac{1}{\mathcal{B}_0^+}} = \frac{1}{\tau + \frac{1}{\mathcal{R}_0 + \mathcal{B}_0^-}} = \left[\tau, \mathcal{R}_0 + \mathcal{B}_0^- \right] \quad ,$$

em que usamos $t = \tau$ justamente por ser o momento imediatamente antes da colisão.

Indutivamente, constatamos que, dado $u_n = D_x \mathcal{F}^n(u) \in T_{\mathcal{F}^n(x)} \mathcal{M}$, vale

$$\mathcal{B}(u_n) = [\tau(x_{n-1}), \mathcal{R}(x_{n-1}), \tau(x_{n-2}), \mathcal{R}(x_{n-2}), \dots, \tau(x), \mathcal{R}(x) + \mathcal{B}(u)] \quad , \quad (3.7)$$

em que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^-$ e $x_k = \mathcal{F}^k(x)$, para $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Para finalizarmos nossos resultados, apresentamos o teorema a seguir, que nos diz que as curvaturas geradas por vetores aplicados em $D\mathcal{F}$ preservarão sua ordenação original, ou seja,

Teorema 3.3.5. *Sejam $u, v, w \in T_x\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$ tais que*

$$\mathcal{B}(u) < \mathcal{B}(v) < \mathcal{B}(w) .$$

Então, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, vale que

$$\mathcal{B}(D_x\mathcal{F}^n(u)) < \mathcal{B}(D_x\mathcal{F}^n(v)) < \mathcal{B}(D_x\mathcal{F}^n(w)) .$$

Demonstração: Ver (DONNAY, 1991), página 236.⁵

■

3.3.3 Hiperbolicidade e Curvaturas de Frentes de Ondas

Para finalizarmos este capítulo, apresentaremos brevemente e genericamente a relação entre os conceitos vistos nas subseções anteriores.

Na literatura de bilhares, um dos métodos mais utilizados para a prova da hiperbolicidade dos bilhares é a chamada Técnica dos Cones, estabelecida por Wotjtkowski, em seu artigo (WOJTKOWSKI, 1986). Apesar disso, não utilizaremos tal técnica no presente trabalho. Nosso método é atrelado principalmente ao trabalho seminal de Sinai (SINAI, 1970), onde a análise de curvaturas de frentes de ondas é fundamental. Tal construção também foi utilizada por Bunimovich em seu trabalho (BUNIMOVICH, 1974a). Apesar de existirem semelhanças entre o método de Wotjtkowski e o utilizado por Sinai/Bunimovich, não entraremos nesses detalhes.

No trabalho de Sinai, a menção a cones também aparece, a saber, dados $u, w \in T_{\mathcal{F}^{-n}(x)}\mathcal{M}$, definimos $u_n = D_{\mathcal{F}^{-n}(x)}\mathcal{F}^n(u)$ e $w_n = D_{\mathcal{F}^{-n}(x)}\mathcal{F}^n(w)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $u_n, w_n \in T_x\mathcal{M}$.

Daí, dizemos que o conjunto

$$C_n(x) = \{v \in T_x\mathcal{M} ; \mathcal{B}(u_n) \leq \mathcal{B}(v) \leq \mathcal{B}(w_n)\}$$

é um **campo de cones** de curvaturas admissíveis após n reflexões no ponto x , limitado pelas curvaturas dos vetores u e w .

Dessa forma, consideremos que os cones acima satisfazem

$$C_1(x) \supset C_2(x) \supset \dots \supset C_n(x) \supset \dots .$$

⁵ Na referência este resultado está em termos do tempo de focalização. Contudo, pelo desenvolvimento acima, obtemos a versão equivalente para curvaturas.

Além disso, suponhamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(w_n) = \mathcal{B}_x < \infty .$$

Como $\mathcal{B}_x$ é um valor de curvatura, existe $v_x \in T_x \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{B}(v_x) = \mathcal{B}_x$, já que existe uma relação “biunívoca” entre os valores de curvaturas e os vetores do espaço $T_x \mathcal{M}$. Daí, temos dois casos de interesse para analisarmos. São eles,

- $\mathcal{B}_x > 0$: Neste caso, o vetor $v_x = v_x^u$ gera uma frente de ondas dispersoras, ou seja, ao longo do tempo, a tendência é um espalhamento da dinâmica. Daí, utilizando a hipótese dos cones encaixados, prova-se que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n(x) = E_x^u = \langle v_x^u \rangle .$$

- $\mathcal{B}_x < 0$: Analogamente ao caso anterior, agora o vetor $v_x = v_x^s$ gera uma frente de ondas focalizadora, ou seja, ao longo do tempo, a tendência é uma estabilidade da dinâmica. Daí, utilizando a hipótese dos cones encaixados, prova-se que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n(x) = E_x^s = \langle v_x^s \rangle .$$

Do argumento acima, garantimos a existência de um dos espaços que realizam a decomposição de $T_x \mathcal{M}$, necessária para a condição de hiperbolicidade. Contudo, precisamos garantir a existência de ambos os espaços simultaneamente. Para tanto, basta usarmos a involução do bilhar, que transforma frentes de ondas focalizadoras em dispersoras, e vice-versa. Equivalentemente, ela também atua invertendo os sinais das curvaturas trabalhadas.

Com isso em mente, consideremos $\mathcal{B}_x > 0$. Então, $E_x^u = \langle v_x^u \rangle$. Daí, o espaço estável de x será gerado pelo vetor $v_x^s = D_{\mathcal{I}(x)} \mathcal{I}(v_{\mathcal{I}(x)}^u)$. Portanto, obtemos a decomposição do espaço $T_x \mathcal{M}$ de modo que a Definição 2.4.10 é atendida. De modo similar, constatamos o mesmo para o caso $\mathcal{B}_x < 0$.

Por fim, reforçamos que esta subseção não se concentra em apresentar uma prova dos argumentos, apenas um caminho. Para mais detalhes sobre esta construção e suas justificativas formais, recomendamos a leitura de (BUNIMOVICH, 1974a) e (SINAI, 1970).

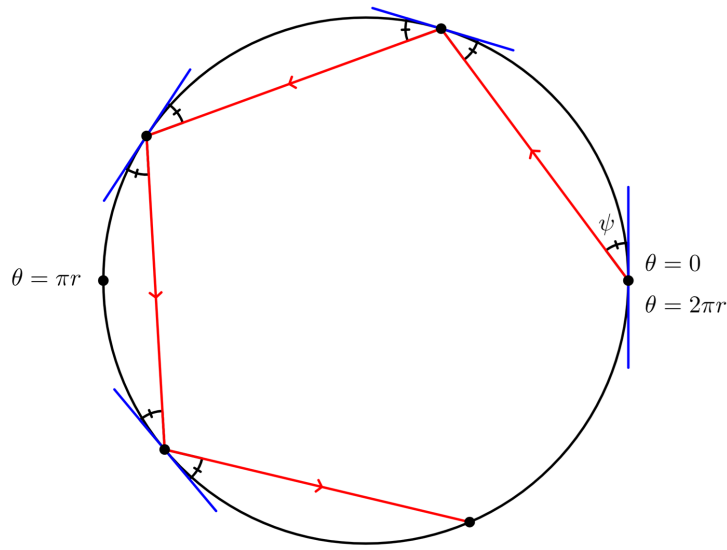
3.4 O BILHAR NO CÍRCULO

Para finalizarmos nosso capítulo sobre a teoria geral dos bilhares, estudaremos um exemplo clássico, o bilhar no círculo. Compreender as propriedades deste bilhar será de grande ajuda para o foco do presente trabalho, visto que os bilhares no limão assimétrico se dão através da interseção de dois discos.

A fim de obtermos a generalidade desejada, consideraremos a dinâmica no círculo de raio $r > 0$, isto é, em $D = D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$.

No caso do bilhar no círculo, dado $x \in \mathcal{M}$, ao invés de trabalharmos com a parametrização $x = (s, \varphi)$, usaremos a parametrização $x = (\theta, \psi)$, em que $\theta \in [0, 2\pi r]$ é o ângulo formado entre o ponto de reflexão de x e o eixo y , crescendo no sentido anti-horário e com $\theta = 0$ no ponto $(r, 0) \in D$, e $\psi \in [0, \pi]$ é o ângulo entre o vetor velocidade de v e a reta tangente a D no ponto x . Na Figura 3.13 a seguir, representamos estes elementos.

Figura 3.13 – Bilhar no disco D de raio r .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Estabelecida esta parametrização, os resultados abaixo dizem respeito à dinâmica de um ponto neste bilhar.

Proposição 3.4.1. *Sejam $x = (\theta_0, \psi_0) \in \mathcal{M}$ os parâmetros iniciais de uma órbita. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $\mathcal{F}^n(x) = (\theta_n, \psi_n)$, em que*

$$\theta_n = \theta_0 + 2n\psi_0 \pmod{2\pi r} \quad e \quad \psi_n = \psi_0 .$$

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 3. ■

Proposição 3.4.2. *Seja $\psi < \pi$ um múltiplo racional de π , isto é, vale $\frac{\psi}{\pi} = \frac{m}{n}$, para algum $m, n \in \mathbb{Z}$. Então, para todo $\theta \in [0, 2\pi r]$, temos $\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$.*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 3. ■

Proposição 3.4.3. *Seja $\psi < \pi$ um múltiplo irracional de π , isto é, vale $\frac{\psi}{\pi}$ é irracional. Então, para todo $\theta \in [0, 2\pi r]$, o conjunto dos pontos de reflexão da órbita de $x = (\theta, \psi)$ é denso em D .*

Demonstração: Ver (CHERNOV; MARKARIAN, 2006), página 3. ■

Agora, dado $\psi_0 \in [0, \pi]$, consideremos a reta horizontal $L_{\psi_0} \subset \mathcal{M}$, com altura ψ_0 , isto é,

$$L_{\psi_0} = \{(\theta, \psi_0) \in \mathcal{M} ; \theta \in [0, 2\pi r]\} .$$

Com a nomenclatura acima podemos perceber que, dos resultados vistos, dado $x = (\theta_0, \psi_0) \in \mathcal{M}$, segue que $\{\mathcal{F}^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\psi_0}$, ou seja, todos os pontos da órbita de x pertencem a L_{ψ_0} . Em particular, se $\psi < \pi$ é um múltiplo irracional de π , então $\overline{\{\mathcal{F}^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}} = L_{\psi_0}$.

Por fim, vejamos uma proposição que caracteriza a distância entre as colisões de uma órbita.

Proposição 3.4.4. *Seja $x = (\theta_0, \psi_0) \in \mathcal{M}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tau(\mathcal{F}^n(x)) = 2r \sin \psi_0 = 2r \cos \varphi_0$, em que φ_0 é o parâmetro canônico de x no espaço de colisão.*

Demonstração: Lembremos que $\tau(\mathcal{F}^n(x))$ não é nada mais que o comprimento da trajetória entre os pontos de reflexão associados aos valores $\mathcal{F}^n(x)$ e $\mathcal{F}^{n+1}(x)$. Além disso, pela Proposição 3.4.1, ambos os pontos $\mathcal{F}^n(x)$ e $\mathcal{F}^{n+1}(x)$ possuem a segunda coordenada igual a ψ_0 , para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Em particular, o parâmetro $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \psi_0$ também será conservado ao longo das colisões. Com isso em mente, a dinâmica discutida é representada pela Figura 3.14 a seguir.

4 OS BILHARES NO LIMÃO

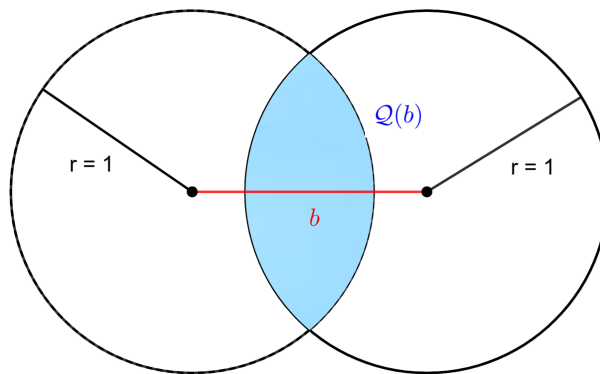
No Capítulo 3 exploramos as características gerais dos bilhares e, brevemente, estudamos o bilhar no círculo. Agora, familiarizados com as notações e propriedades expostas, nosso objetivo é apresentar rapidamente o bilhar no limão e, logo em seguida, formalizar o bilhar no limão assimétrico e suas características gerais. Ainda neste capítulo, trabalharemos para caracterizar as curvaturas das frentes de onda associadas ao bilhar no limão assimétrico, isto de acordo com aplicações induzidas que serão definidas. Para esta parte, nossa referência principal foi (BUNIMOVICH; ZHANG; ZHANG, 2016).

4.1 O BILHAR NO LIMÃO

De início, vejamos a definição do bilhar no limão e suas condições de existência.

Definição 4.1.1. *Seja $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário. Consideremos $\mathcal{Q}(b)$ a região dada pela interseção de dois discos D_1 quando a distância entre seus centros é b , como ilustrado na Figura 4.1. Definimos como **bilhar no limão** o sistema dinâmico que ocorre na região $\mathcal{Q}(b)$ através das colisões regulares em $\partial\mathcal{Q}(b)$.*

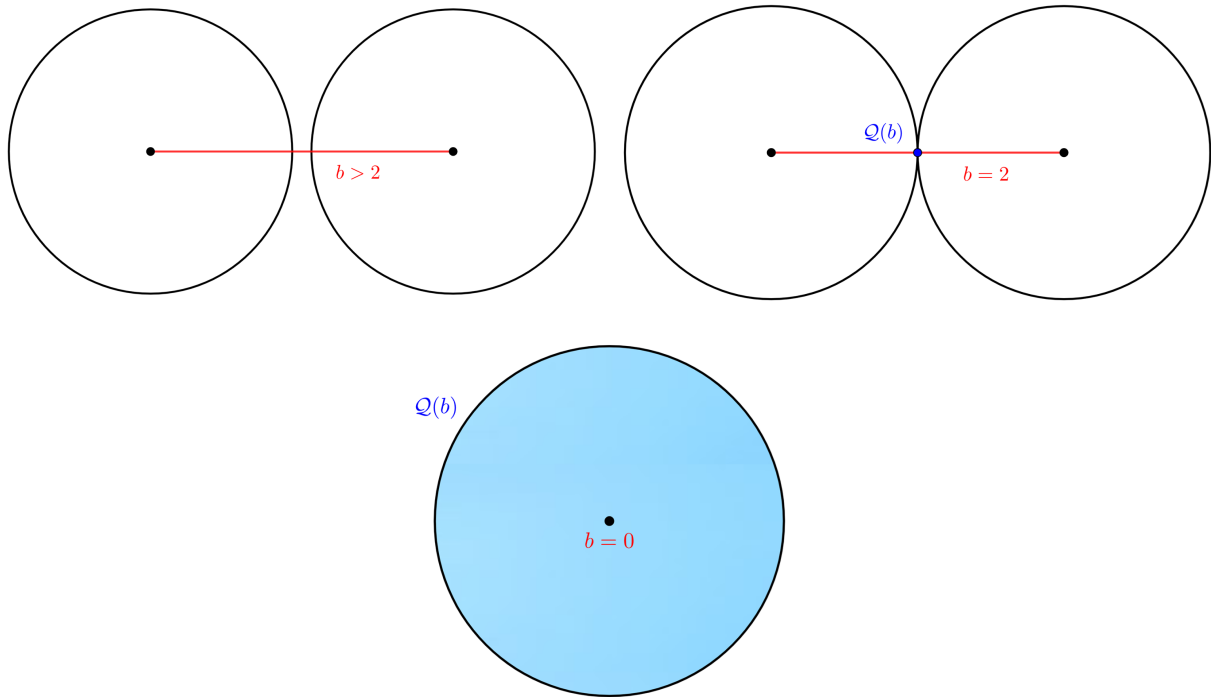
Figura 4.1 – Mesa do Bilhar no Limão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observação 4.1.2. *Naturalmente, a fim de que o bilhar acima esteja bem definido, isto é, para que $\mathcal{Q}(b) \neq \emptyset$, devemos ter $b \in [0, 2)$. Em particular, quando $b = 0$, temos a dinâmica em D_1 , o que viola o estereótipo. Por este motivo, sempre consideraremos $b \in (0, 2)$, como representada na Figura 4.1. Na Figura 4.2, ilustramos os outros casos possíveis de acordo com o valor de b .*

Figura 4.2 – Mesa do Bilhar no Limão - Patologias.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tendo em mente o formato do bilhar no limão, é interessante saber de suas origens visto que o bilhar no limão assimétrico pode ser visto como uma generalização da classe acima.

Diferente dos bilhares no limão assimétrico, que partiram de uma motivação matemática, como discutimos no Capítulo 1, os bilhares no limão foram introduzidos no artigo (HELLER; TOMSOVIC, 1993), com o intuito de estudar questões físicas relacionadas ao que o artigo denomina como caos clássico e caos quântico.

Dando seguimento ao tema, as referências (MAKINO; HARAYAMA; AIZAWA, 2001) e (REE; REICHL, 1999), também físicas, fizeram um vasto estudo numérico desta classe de bilhares, constatando que, quando $b \neq 1$, ocorre a presença de **ilhas elípticas** no espaço de colisão, isto é, há a presença de regiões, em torno de órbitas periódicas estáveis, em que a dinâmica é estável e permanece confinada em uma curva invariante. Consequentemente, como a presença de ilhas elípticas impede a ocorrência de uma dinâmica caótica, constatou-se que apenas o bilhar no limão com $b = 1$, quando os centros dos discos estão nas componentes dos mesmos, pode ser caótico.

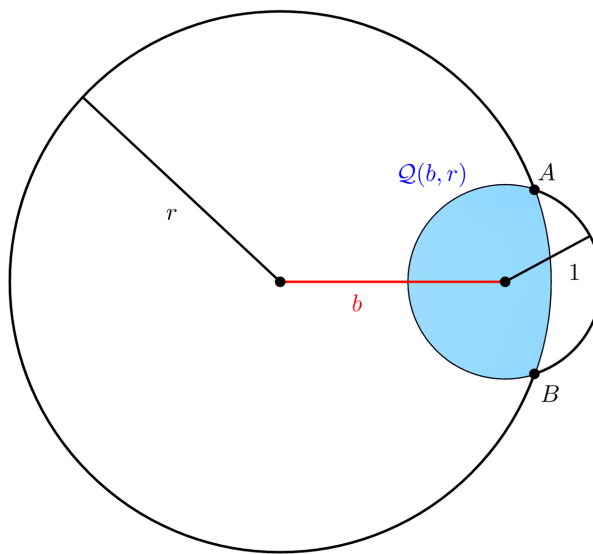
Por fim, mencionamos os artigos (LOPAC; MRKONJIC; RADIC, 1999) e (LOPAC; MRKONJIC; RADIC, 2001), que estudaram uma generalização do bilhar no limão em que os arcos circulares eram substituídos por arcos de parábolas, elipses e hipérboles, respectivamente.

4.2 O BILHAR NO LIMÃO ASSIMÉTRICO

Adaptando a mesa do bilhar no limão, vista na seção anterior, temos

Definição 4.2.1. *Sejam $D_1, D_r \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário e o disco de raio r , respectivamente, com $r > 1$. Consideremos $\mathcal{Q}(b, r)$ a região dada pela interseção de D_1 e D_r quando a distância entre seus centros é b , como ilustrado na Figura 4.3. Definimos como **bilhar no limão assimétrico** o sistema dinâmico que ocorre na região $\mathcal{Q}(b, r)$ através das colisões regulares em $\partial\mathcal{Q}(b, r)$.*

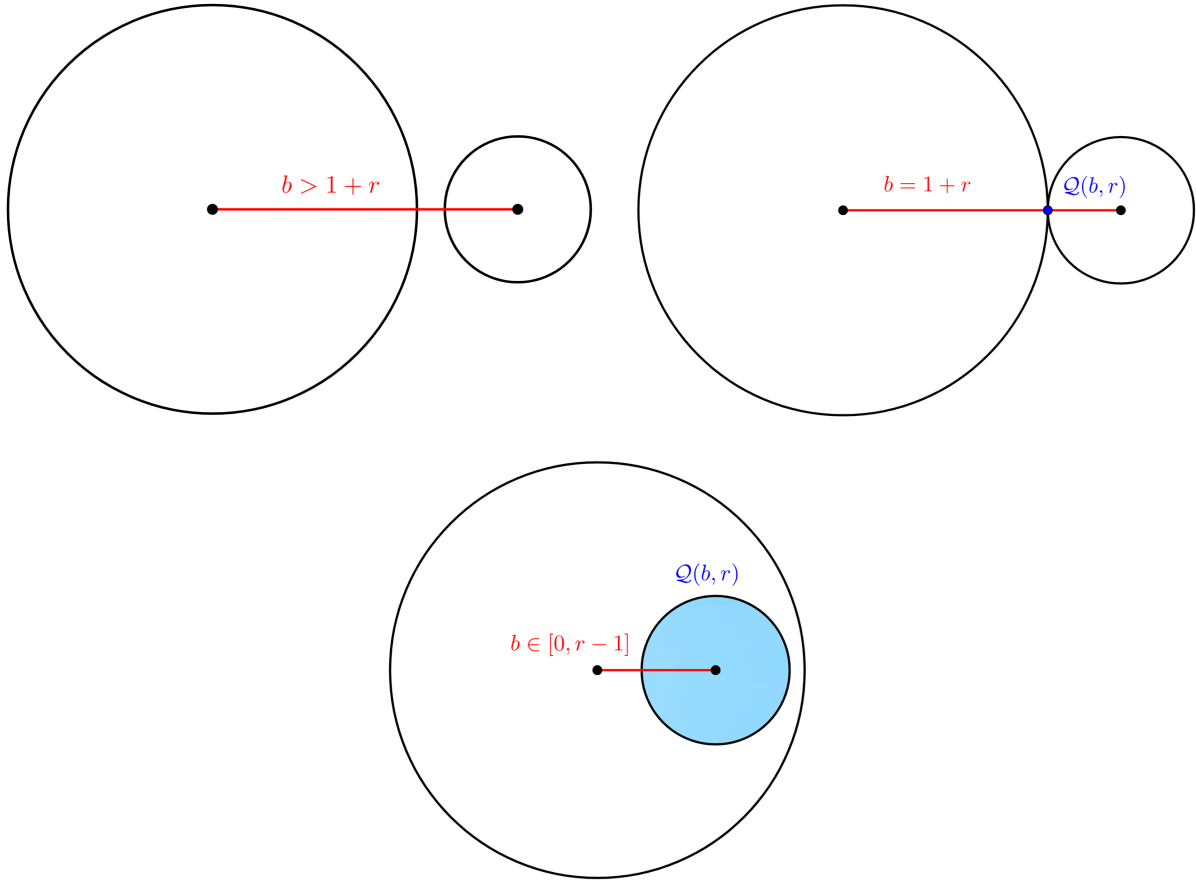
Figura 4.3 – Mesa do Bilhar no Limão Assimétrico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observação 4.2.2. *Novamente, é claro que, para que o bilhar esteja bem definido, isto é, para que $\mathcal{Q}(b, r) \neq \emptyset$, devemos ter $b \in [0, 1+r)$. Em particular, quando $b \in [0, r-1]$ temos a dinâmica em D_1 , o que viola o estereótipo. Por este motivo, sempre consideraremos $b \in (r-1, r+1)$ como representamos na Figura 4.3. Na Figura 4.4, ilustramos os outros casos possíveis de acordo com o valor de b .*

Figura 4.4 – Mesa do Bilhar no Limão Assimétrico - Patologias.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A fim de facilitarmos a linguagem dos resultados a seguir, denotaremos a mesa do bilhar por

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_r = \partial \mathcal{Q} = \partial \mathcal{Q}(b, r),$$

em que Γ_1 é a parte da mesa relativa ao disco D_1 e Γ_r é a parte da mesa relativa ao disco D_r . Além disso, deste momento em diante, reservaremos os símbolos A e B para representarmos os pontos de interseção entre Γ_1 e Γ_r , como apontado na Figura 4.3.

Vista a definição do bilhar no limão assimétrico, vejamos que o mesmo satisfaz as condições de mesa do bilhar, vistas na Seção 3.1.

- Condição 1: De fato, pois $\mathcal{Q}(b, r)$ possui apenas duas componentes, ambas sendo arcos de circunferência, isto é, são curvas compactas e de classe C^∞ .
- Condição 2: Com efeito, pois $\Gamma_1 \cap \Gamma_r = \{A, B\}$, que estão justamente nas extremidades das componentes mencionadas;
- Condição 3: Realmente, no Exemplo 2.1.14, calculamos a curvatura de um arco de

circunferência qualquer. Daí, a curvatura de Γ_σ é dada por

$$\kappa_\sigma = -\frac{1}{\sigma} , \quad (4.1)$$

em que $\sigma \in \{1, r\}$. Ainda por este exemplo, constatamos que nossas componentes são focalizadoras.

- **Condição 4:** De fato, segue diretamente da construção de $\mathcal{Q}(b, r)$.

Com as condições acima verificadas, todos os resultados vistos ao longo do Capítulo 3 são válidos, desde que todas suas hipóteses sejam satisfeitas. Em especial, a aplicação de colisão $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ do bilhar no limão assimétrico está bem definida, em que

$$\mathcal{M} = \Gamma \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] .$$

Em particular, da decomposição de Γ feita acima, segue que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_r ,$$

em que

$$\mathcal{M}_1 = \Gamma_1 \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_r = \Gamma_r \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] .$$

Em relação ao parâmetro s do espaço de colisão, associamos $s = 0$ com o vértice A . Consequentemente, como a orientação é no sentido anti-horário, o vértice B é associado a $s = |\Gamma_1|$. Assim,

$$\mathcal{M}_1 = \{(s, \varphi) \in \mathcal{M} ; 0 \leq s \leq |\Gamma_1|\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_r = \{(s, \varphi) \in \mathcal{M} ; |\Gamma_1| \leq s \leq |\Gamma|\} .$$

Com respeito ao conjunto de singularidade $\mathcal{S}_0$, pela Equação (3.2), temos

$$\mathcal{S}_0 = \{A, B\} ,$$

visto que, como estamos trabalhando em uma mesa cujas componentes são todas focalizadoras, colisões tangenciais são impossíveis de ocorrer.

Naturalmente, a derivada da aplicação $\mathcal{F}$ também está bem definida. Contudo, reservaremos sua análise para o futuro. Por outro lado, desde já, devemos nos atentar à determinação do parâmetro de reflexão, dado pela Equação (3.5), que é de grande importância para a caracterização das curvaturas das frentes de onda. Daí, dado $x = (s, \varphi) \in \Gamma_\sigma$, pela Equação (4.1), temos

$$\mathcal{R}(x) = -\frac{2}{\sigma \cos \varphi} , \quad \text{com} \quad d(x) = \sigma \cos \varphi . \quad (4.2)$$

Observação 4.2.3. *Notemos que, pela Proposição 3.4.4, dados $x, \mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}_\sigma$, com $\sigma \in \{1, r\}$, temos*

$$\tau(x) = 2\sigma \cos \varphi = 2d(x) ,$$

em que $\tau(x)$ é o comprimento da corda que conecta x e $\mathcal{F}(x)$ em Γ_σ . Além disso, como o ângulo φ permanece o mesmo tanto para x quanto para $\mathcal{F}(x)$, vale $d(x) = d(\mathcal{F}(x))$.

De modo geral, pela proposição supracitada, constatamos que, se $\mathcal{F}^i(x) \in \mathcal{M}_\sigma$, para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, então

$$\tau(\mathcal{F}^i(x)) = 2d(x) \quad , \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, m-1\} . \quad (4.3)$$

$$d(\mathcal{F}^i(x)) = d(x) \quad , \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, m\} , \quad (4.4)$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}^i(x)) = \mathcal{R}(x) = -\frac{2}{d(x)} \quad , \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, m\} , \quad (4.5)$$

Ao longo do trabalho, utilizaremos vastamente as relações acima.

Para a representação visual do bilhar no limão assimétrico, recomendamos a leitura do [Apêndice](#) , em que, além da simulação para o bilhar no círculo unitário, também elaboramos um código em Python que simula a dinâmica do bilhar no limão assimétrico.

4.3 CURVATURAS DE FRENTES DE ONDAS NO LIMÃO ASSIMÉTRICO

Como vimos na Seção [3.3](#), as curvaturas das frentes de onda de um bilhar desempenham um papel fundamental na verificação da hiperbolicidade de uma aplicação. Nesta seção, caracterizaremos tais curvaturas para o bilhar no limão assimétrico. Contudo, não analisaremos diretamente a aplicação de colisão $\mathcal{F}$, e sim duas aplicações induzidas pela mesma. Por esse motivo, cada subseção abaixo é designada para o tratamento de uma destas aplicações induzidas.

4.3.1 A Aplicação Induzida $\hat{F}$

Com o intuito de definirmos nossa primeira aplicação induzida, necessitamos da definição a seguir.

Definição 4.3.1. *Seja $x \in \mathcal{M}_\sigma \setminus \mathcal{S}_1$, em que $\sigma \in \{1, r\}$. Definimos a função $\eta : \mathcal{M}_\sigma \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{Z}_+$, em que*

$$\eta(x) = \sup\{n \geq 0 ; \mathcal{F}^k(x) \in \mathcal{M}_\sigma , \forall k = 0, \dots, n\} .$$

*Denominaremos η como a **tempo de primeira saída**.*

A denominação de η está diretamente relacionada com sua interpretação, visto que seu valor determina exatamente qual é a última iteração de $x \in \mathcal{M}_\sigma$ que ainda pertence a $\mathcal{M}_\sigma$, antes da mudança de componente. Equivalentemente, $\eta(x)$ também pode ser visto como o número de colisões sucessivas de x na componente Γ_σ . Alguns casos particulares são,

- Se $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}_r$, então $\eta(x) = 0$.
- Se $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}^k(x) \in \mathcal{M}_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\eta(x) = +\infty$.

O último caso acima nos leva a estudar o conjunto N dos pontos que não “saem” da componente Γ_1 , isto é, o conjunto

$$N = \{x \in \mathcal{M}_1 ; \eta(x) = +\infty\} , \quad (4.6)$$

Os resultados abaixo apresentam uma caracterização do conjunto N .

Proposição 4.3.2. *Seja $x \in N$. Então, x é um ponto periódico.*

Demonstração: Por hipótese, $x \in N$, ou seja, $\mathcal{F}^k(x) \in \mathcal{M}_1$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como estamos restritos à componente Γ_1 , a dinâmica coincide com a circular. Desse modo, a órbita de x é definida pela sua coordenada ψ_0 , como vimos na Seção 3.4. Assim, suponhamos que ψ_0 seja um múltiplo irracional de π . Então, pela Proposição 3.4.3, a órbita de x seria densa em D_1 . Consequentemente, quando analisamos esta órbita no limão assimétrico, a direção de sua trajetória fará com que ela, obrigatoriamente, saia da componente Γ_1 . Absurdo, pois contradiz a hipótese.

Portanto, ψ_0 deve ser um múltiplo racional de π . Consequentemente, pela Proposição 3.4.2, x é um ponto periódico na componente Γ_1 , como queríamos demonstrar. ■

Corolário 4.3.3. *O conjunto N possui medida nula, ou seja, $\mu(N) = 0$.*

Demonstração: Pela demonstração da proposição acima, o parâmetro $\psi_0 \in [0, \pi]$ deve ser um múltiplo racional de π . Consequentemente, o conjunto dos valores possíveis de ψ_0 é enumerável.

Ademais, na Seção 3.4, vimos que a órbita de todo ponto $x = (\theta_0, \psi_0) \in \mathcal{M}_1$ em uma componente circular está contida na reta horizontal $L_{\psi_0} \subset \mathcal{M}_1$, de altura ψ_0 . Em particular, munindo $\mathcal{M}$ da medida de Lebesgue, é direto que $\lambda(L_{\psi_0}) = 0$, para todo $\psi_0 \in [0, \pi]$.

Desse modo, $N \subset L$, em que L é o conjunto de todas as retas horizontais L_{ψ_0} , em que ψ_0 é um múltiplo racional de π . Além disso, $\lambda(L) = 0$, já que é a união enumerável de conjuntos de medida nula.

Portanto, $\lambda(N) = 0$, pois $N \subset L$. Em especial, pela Proposição 3.2.5, concluímos que $\mu(N) = 0$. ■

Agora, de modo similar ao tempo de primeira saída, definiremos dois conjuntos que serão relevantes para a construção da primeira aplicação induzida.

Definição 4.3.4. *Seja $x \in \mathcal{M} \setminus S_{-1}$. Então,*

- a. *Se $x \in \mathcal{M}_1$, definimos como $\widehat{\mathcal{M}}_1$ o conjunto dos pontos que acabaram de “entrar” em $\mathcal{M}_1$, ou seja,*

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \{x \in \mathcal{M}_1 ; \mathcal{F}^{-1}(x) \in \mathcal{M}_r\} .$$

- b. *Se $x \in \mathcal{M}_r$, definimos como $\widehat{\mathcal{M}}_r$ o conjunto dos pontos que acabaram de “entrar” em $\mathcal{M}_r$, ou seja,*

$$\widehat{\mathcal{M}}_r = \{x \in \mathcal{M}_r ; \mathcal{F}^{-1}(x) \in \mathcal{M}_1\} .$$

Observemos que, tanto a aplicação η quanto os conjuntos acima estão relacionados à transição de componentes de uma órbita. Daí, associando tais conceitos, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$M_n = \eta^{-1}(\{n\}) \cap \widehat{\mathcal{M}}_1 . \quad (4.7)$$

Equivalentemente,

$$M_n = \left\{ x \in \mathcal{M}_1 ; \mathcal{F}^{-1}(x) \in \mathcal{M}_r , \mathcal{F}^k(x) \in \mathcal{M}_1 \text{ e } \mathcal{F}^{n+1}(x) \in \mathcal{M}_r , \forall k \in \{0, \dots, n\} \right\} .$$

Ressaltamos que M_n é justamente o conjunto dos elementos da mesa do bilhar que possuem exatamente $(n + 1)$ colisões com a componente Γ_1 antes de atingirem Γ_r .

Das construções acima, segue de (4.6) e (4.7) que

$$\mathcal{M}_1 = N \cup \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{0 \leq k \leq n} \mathcal{F}^k(M_n) . \quad (4.8)$$

Observação 4.3.5. *Apesar do processo acima também ser aplicável em $\mathcal{M}_r$, focaremos apenas em $\mathcal{M}_1$, isto devido aos nossos objetivos.*

Finalmente, definiremos a primeira aplicação induzida de $\mathcal{F}$ em $\widehat{\mathcal{M}}_1$.

Definição 4.3.6. *Consideremos a função $\widehat{F} : \widehat{\mathcal{M}}_1 \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_1$, em que*

$$\widehat{F}(x) = \mathcal{F}^{j_0+j_1+2}(x) ,$$

*com $j_0 = \eta(x)$ e $j_1 = \eta(\mathcal{F}^{j_0+1}(x))$. Denominamos $\widehat{F}$ por **aplicação induzida de primeiro retorno em $\widehat{\mathcal{M}}_1$** .*

Antes de mais nada, verificaremos que $\widehat{F}$ está bem definida.

1. Seja $x_0 \in \widehat{\mathcal{M}}_1$.

2. Consideremos $\eta(x_0) = j_0$, ou seja, j_0 é o número de colisões sucessivas que x_0 sofrerá em Γ_1 antes de deixar tal componente.
3. Definamos $x_1 = \mathcal{F}^{j_0+1}(x_0)$. Observemos que, pelo passo anterior, $x_1 \in \widehat{\mathcal{M}}_r$.
4. Consideremos $\eta(x_1) = j_1$, ou seja, j_1 é o número de colisões sucessivas que x_1 sofrerá em Γ_r antes de deixar tal componente.
5. Dos passos acima, concluímos que $\mathcal{F}^{j_1+1}(x_1) \in \widehat{\mathcal{M}}_1$. Equivalentemente,

$$\mathcal{F}^{j_1+1}(x_1) = \mathcal{F}^{j_1+1}(\mathcal{F}^{j_0+1}(x_0)) = \mathcal{F}^{j_0+j_1+2}(x_0) = \widehat{F}(x_0) \in \widehat{\mathcal{M}}_1 .$$

Portanto, $\widehat{F}$ está bem definida. Assim, $(\widehat{\mathcal{M}}_1, \widehat{F}, \mu_{\widehat{\mathcal{M}}_1})$ é uma aplicação induzida sobre $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu)$, cujo tempo de primeiro retorno associado é $\xi_{\widehat{\mathcal{M}}_1}(x) = j_0 + j_1 + 2$.

Agora, nosso objetivo é caraterizar as curvaturas das frentes de ondas associadas com uma iteração de $\widehat{F}$. Para tanto, manteremos a simbologia de j_0 e j_1 vista acima. Além disso, usaremos as notações a seguir.

- $\tau_0 = \tau(\mathcal{F}^{j_0}(x_0))$: Comprimento da trajetória entre $\mathcal{F}^{j_0}(x_0)$ e $\mathcal{F}^{j_0+1}(x_0)$, ou seja, é o comprimento entre a última colisão em Γ_1 e a primeira colisão em Γ_r .
- $\tau_1 = \tau(\mathcal{F}^{j_1}(x_1))$: Comprimento da trajetória entre $\mathcal{F}^{j_1}(x_1)$ e $\mathcal{F}^{j_1+1}(x_1)$, ou seja, é o comprimento entre a última colisão em Γ_r e a primeira colisão em Γ_1 .
- $d_k = d(x_k)$: Fator relacionado ao parâmetro de reflexão no ponto x_k , para $k \in \{0, 1\}$, dado pela Equação (3.5).
- $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(x_k)$: Parâmetro de reflexão no ponto x_k , para $k \in \{0, 1\}$, dado pela Equação (3.5).
- $\widehat{d}_k = \frac{d_k}{j_k + 1}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1\}$.
- $\widehat{\mathcal{R}}_k = -\frac{2}{\widehat{d}_k}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1\}$.
- $\widehat{\tau}_k = \tau_k - j_k \cdot \widehat{d}_k - j_{k+1} \cdot \widehat{d}_{k+1}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k = 1$.

Observação 4.3.7. *Ressaltamos que todos as simbologias estabelecidas acima, que serão as relevantes para os cálculos futuros, estão atreladas justamente à transição de componentes da órbita. Isso é natural pois é justamente esta transição que difere o nosso bilhar de um bilhar circular, cuja dinâmica é estável. Outra forma de justificarmos a importância desses fatores se dá por eles serem os únicos que não possuem um comportamento bem estabelecido, já que, pela Observação 4.2.3, uma série de colisões numa mesma componente conserva os parâmetros acima.*

Pela definição da aplicação induzida, uma única iteração de $\widehat{F}$ é composta de j_0 colisões consecutivas em Γ_1 e de j_1 colisões consecutivas em Γ_r . Dessa forma, para calcularmos as curvaturas das frentes de ondas associadas a esta aplicação, devemos considerar todas estas colisões. Mais precisamente, dados $x \in \widehat{\mathcal{M}}_1$, $v \in T_x\mathcal{M}$ e $\widehat{v}_1 = D_x\widehat{F}(v)$, pela Equação (3.7), temos

$$\mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau(\mathcal{F}^{j_0+j_1+1}(x)), \mathcal{R}(\mathcal{F}^{j_0+j_1+1}(x)), \dots, \tau(\mathcal{F}^{j_0}(x)), \mathcal{R}(\mathcal{F}^{j_0}(x)), \dots, \tau(x), \mathcal{R}(x) + \mathcal{B}(v) \right].$$

Apesar dos diversos termos na fração contínua acima, pela Observação 4.2.3, os termos referentes a uma mesma série de colisão em uma componente são iguais. Desta forma, usando as simbologias acima junto das Equações (4.4), (4.5) e (4.3), obtemos

$$\mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau_1, -\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, -\frac{2}{d_0}, 2d_0, \dots, 2d_0, -\frac{2}{d_0} + \mathcal{B}(v) \right].$$

Por fim, pela Proposição 2.2.8, item d, segue que

$$\mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau_1, -\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, -\frac{2}{d_0}, 2d_0, \dots, 2d_0, -\frac{2}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right], \quad (4.9)$$

em que o par $\left(-\frac{2}{d_k}, 2d_k\right)$ se repete j_k vezes, para $k \in \{0, 1\}$.

A fim de prosseguirmos com a caracterização da curvatura $\mathcal{B}(\widehat{v}_1)$, apresentamos o lema abaixo.

Lema 4.3.8. *Sejam $x \in \widehat{\mathcal{M}}_1$, $v \in T_x\mathcal{M}$ e $\widehat{v}_1 = D_x\widehat{F}(v)$. Então,*

$$\mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau_1 - j_1 \cdot \widehat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -j_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right].$$

Demonstração: Pela Equação (4.9), sabemos que o par $\left(-\frac{2}{d_0}, 2d_0\right)$ se repete j_0 vezes. Daí, aplicando a Proposição 2.2.10, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widehat{v}_1) &= \left[\tau_1, -\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, \underbrace{-\frac{2}{d_0}, 2d_0, \dots, 2d_0}_{j_0 \text{ vezes}}, -\frac{2}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1, -\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, -\frac{1}{d_0}, -j_0 \cdot (2d_0), -\frac{1}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right]. \end{aligned}$$

Ainda assim, o par $\left(-\frac{2}{d_1}, 2d_1\right)$ se repete j_1 vezes. Com isso, aplicando a Proposição 2.2.10 novamente, constatamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widehat{v}_1) &= \left[\tau_1, \underbrace{-\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, 2d_1}_{j_1 \text{ vezes}}, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, -\frac{1}{d_0}, -j_0 \cdot (2d_0), -\frac{1}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1, -\frac{1}{d_1}, -j_1 \cdot (2d_1), -\frac{1}{d_1}, \tau_0, -\frac{1}{d_0}, -j_0 \cdot (2d_0), -\frac{1}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Com isso, usaremos o Teorema 2.2.12 na equação acima, em que

$$a_0 = -\frac{1}{d_0} \quad , \quad b_0 = -2 \cdot j_0 \cdot d_0 \quad \text{e} \quad c_0 = -\frac{1}{d_0} \quad .$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} B_0 &= a_0 + c_0 + a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 = -\frac{1}{d_0} + -\frac{1}{d_0} + -\frac{1}{d_0} \cdot (-2 \cdot j_0 \cdot d_0) \cdot -\frac{1}{d_0} \\ &= -\frac{1}{d_0} \cdot (2 + 2j_0) = -2 \cdot \frac{1 + j_0}{d_0} = -2 \cdot \frac{1}{\widehat{d_0}} = \widehat{\mathcal{R}_0} \quad . \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{b_0 \cdot c_0}{B_0} = \frac{(-2 \cdot j_0 \cdot d_0) \cdot \left(-\frac{1}{d_0}\right)}{-\frac{2}{\widehat{d_0}}} = -2 \cdot j_0 \cdot \frac{\widehat{d_0}}{2} = -j_0 \cdot \widehat{d_0} \quad .$$

$$C_0 = \frac{a_0 \cdot b_0}{B_0} = \frac{c_0 \cdot b_0}{B_0} = A_0 = -j_0 \cdot \widehat{d_0} \quad .$$

Em suma,

$$A_0 = -j_0 \cdot \widehat{d_0} \quad , \quad B_0 = \widehat{\mathcal{R}_0} \quad \text{e} \quad C_0 = -j_0 \cdot \widehat{d_0} \quad .$$

Finalmente, usando o Teorema 2.2.12 na Equação (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widehat{v_1}) &= \left[\tau_1, -\frac{1}{d_1}, -2 \cdot j_1 \cdot d_1, -\frac{1}{d_1}, \tau_0, -\frac{1}{d_0}, -2 \cdot j_0 \cdot d_0, -\frac{1}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1, -\frac{1}{d_1}, -2 \cdot j_1 \cdot d_1, -\frac{1}{d_1}, \tau_0 + A_0, B_0, C_0 + 0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1, -\frac{1}{d_1}, -2 \cdot j_1 \cdot d_1, -\frac{1}{d_1}, \tau_0 - j_0 \cdot \widehat{d_0}, \widehat{\mathcal{R}_0}, -j_0 \cdot \widehat{d_0}, \mathcal{B}(v) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Analogamente ao processo anterior, aplicaremos o Teorema 2.2.12 na equação acima, em que

$$a_1 = -\frac{1}{d_1} \quad , \quad b_1 = -2 \cdot j_1 \cdot d_1 \quad \text{e} \quad c_1 = -\frac{1}{d_1} \quad .$$

Consequentemente, obtemos

$$A_1 = -j_1 \cdot \widehat{d_1} \quad , \quad B_1 = \widehat{\mathcal{R}_1} \quad \text{e} \quad C_1 = -j_1 \cdot \widehat{d_1} \quad .$$

Daí, prosseguindo na Equação (4.11), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widehat{v_1}) &= \left[\tau_1, -\frac{1}{d_1}, -2 \cdot j_1 \cdot d_1, -\frac{1}{d_1}, \tau_0 - j_0 \cdot \widehat{d_0}, \widehat{\mathcal{R}_0}, -j_0 \cdot \widehat{d_0}, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1 + A_1, B_1, C_1 + \tau_0 - j_0 \cdot \widehat{d_0}, \widehat{\mathcal{R}_0}, -j_0 \cdot \widehat{d_0}, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1 - j_1 \cdot \widehat{d_1}, \widehat{\mathcal{R}_1}, -j_1 \cdot \widehat{d_1} + \tau_0 - j_0 \cdot \widehat{d_0}, \widehat{\mathcal{R}_0}, -j_0 \cdot \widehat{d_0}, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_1 - j_1 \cdot \widehat{d_1}, \widehat{\mathcal{R}_1}, \widehat{\tau_0}, \widehat{\mathcal{R}_0}, -j_0 \cdot \widehat{d_0}, \mathcal{B}(v) \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{B}(\hat{v}_1) = \left[\tau_1 - j_1 \cdot \hat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \hat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -j_0 \cdot \hat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right],$$

como queríamos mostrar. ■

Através do lema acima, somos capazes de obter um argumento recursivo. Por exemplo, associado à iteração de $\hat{F}(x)$, está atrelado o vetor $\hat{v}_2 = D_x \hat{F}^2(v)$, para algum vetor $v \in T_x \mathcal{M}$ fixado. Além disso, teríamos o fator $\tau_2 = \tau_0(\hat{F}(x))$ que representa o comprimento da trajetória que realiza a transição de $\mathcal{M}_1$ para $\mathcal{M}_r$. Observemos que, da forma que definimos, τ_0 não é uma função, a notação acima é utilizada apenas para simplificarmos a escrita. De modo análogo, temos o fator $\tau_3 = \tau_1(\hat{F}(x))$. De modo mais natural, definimos os outros parâmetros associados. Daí, pelo lema acima e pela Proposição 2.2.8, item c, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\hat{v}_2) &= \left[\tau_3 - j_3 \cdot \hat{d}_3, \widehat{\mathcal{R}}_3, \hat{\tau}_2, \widehat{\mathcal{R}}_2, -j_2 \cdot \hat{d}_2, \mathcal{B}(\hat{v}_1) \right] \\ &= \left[\tau_3 - j_3 \cdot \hat{d}_3, \widehat{\mathcal{R}}_3, \hat{\tau}_2, \widehat{\mathcal{R}}_2, -j_2 \cdot \hat{d}_2 + (\tau_1 - j_1 \cdot \hat{d}_1), \widehat{\mathcal{R}}_1, \hat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -j_0 \cdot \hat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[\tau_3 - j_3 \cdot \hat{d}_3, \widehat{\mathcal{R}}_3, \hat{\tau}_2, \widehat{\mathcal{R}}_2, \hat{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \hat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -j_0 \cdot \hat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{B}(\hat{v}_2) = \left[\tau_3 - j_3 \cdot \hat{d}_3, \widehat{\mathcal{R}}_3, \hat{\tau}_2, \widehat{\mathcal{R}}_2, \hat{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \hat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -j_0 \cdot \hat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right].$$

Observemos que estamos usando o lema para obter curvaturas associadas com iteração futuras, visto que as frações contínuas começam dos parâmetros associadas a $\hat{F}^n(x)$ e finalizam nos parâmetros de x . Nessa mesma perspectiva, podemos dar ênfase nas iterações passadas, ou seja, caracterizar a curvatura $\mathcal{B}(\hat{v}_{-n})$, que inicia com parâmetros atrelados ao ponto x e finaliza nos parâmetros de $\hat{F}^{-n}(x)$.

Pelo processo indutivo iniciado acima, para qualquer um dos casos acima, somos capazes de calcular $\mathcal{B}(\hat{v}_n)$, em que $\hat{v}_n = D_x \hat{F}^n(v)$ e $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, tomando $n \rightarrow -\infty$, obtemos

$$\left[\tau_0 - j_0 \cdot \hat{d}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, \hat{\tau}_{-1}, \widehat{\mathcal{R}}_{-1}, \hat{\tau}_{-2}, \widehat{\mathcal{R}}_{-2}, \dots, \widehat{\mathcal{R}}_{1-2n}, \hat{\tau}_{-2n}, \widehat{\mathcal{R}}_{-2n}, \hat{\tau}_{-2n-1}, \dots \right].$$

A convergência da curvatura acima está intrinsecamente relacionada com a hiperbolicidade do bilhar, como vimos na Seção 3.3. Contudo, averiguar tal convergência não é tão simples. Usualmente é utilizado ou o Teorema 2.2.13, principalmente em bilhares côncavos, ou o Teorema 2.2.15, principalmente em bilhares convexos. Porém, nenhum deles é aplicável para a situação acima, visto que não somos capazes de determinar o sinal dos termos $\hat{\tau}_k$.

4.3.2 A Aplicação Induzida F

Como não podemos afirmar a convergência da fração contínua associada às curvaturas da aplicação induzida $(\widehat{M}_1, \widehat{F}, \mu_{\widehat{M}_1})$, construiremos uma nova aplicação induzida por $\mathcal{F}$. Contudo, antes de construirmos a aplicação em si, precisamos construir o espaço na qual ela estará definida. Daí¹,

$$M = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(M_n) = M_0 \cup \mathcal{F}(M_1) \cup \mathcal{F}(M_2) \cup \mathcal{F}^2(M_3) \cup \dots \quad (4.12)$$

Agora, vamos entender o conjunto definido acima. Primeiramente, devemos nos lembrar da definição dos conjuntos M_n , dada pela Equação (4.7), e percebermos que

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq n ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{F}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(M_n) \subset \mathcal{M}_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$M \subset \mathcal{M}_1 .$$

Com isso, podemos interpretar M como o conjunto dos estados que já sofreram pelo menos metade das colisões necessárias para “saírem” de $\mathcal{M}_1$.

Com o espaço M estabelecido, definiremos a aplicação induzida de $\mathcal{F}$ em M .

Definição 4.3.9. *Consideremos a função $F : M \rightarrow M$, em que*

$$F(x) = \mathcal{F}^{i_0+i_1+i_2+2}(x),$$

com $i_0 = \eta(x)$, $i_1 = \eta(\mathcal{F}^{i_0+1}(x))$ e $i_2 = \left\lceil \frac{\eta(\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x))}{2} \right\rceil$. Denominamos F por **aplicação induzida de primeiro retorno em M** .

Novamente, antes de prosseguirmos, devemos verificar que F está bem definida.

1. Seja $x_0 \in M$.
2. Consideremos $\eta(x_0) = i_0$, ou seja, i_0 é o número de colisões sucessivas que x_0 sofrerá em Γ_1 antes de deixar tal componente.
3. Definamos $x_1 = \mathcal{F}^{i_0+1}(x_0)$. Observemos que, pelo passo anterior, $x_1 \in \widehat{\mathcal{M}}_r$.
4. Consideremos $\eta(x_1) = i_1$, ou seja, i_1 é o número de colisões sucessivas que x_1 sofrerá em Γ_r antes de deixar tal componente.
5. Definamos $x_2 = \mathcal{F}^{i_1+1}(x_1)$. Observemos que, pelo passo anterior, $x_2 \in \widehat{\mathcal{M}}_1$.

¹ Ao longo deste trabalho, a notação $\lceil \cdot \rceil$ representará a função teto.

6. Notemos que $x_2 \in M_{\eta(x_2)}$. Assim, tomemos $\left\lceil \frac{\eta(x_2)}{2} \right\rceil = i_2$. Desta forma,

$$\mathcal{F}^{i_2}(x_2) \in \mathcal{F}^{\left\lceil \frac{\eta(x_2)}{2} \right\rceil}(M_{\eta(x_2)}) .$$

De modo geral, $\mathcal{F}^{i_2}(x_2) \in M$. Equivalentemente,

$$\mathcal{F}^{i_2}(x_2) = \mathcal{F}^{i_2}(\mathcal{F}^{i_1+1}(x_1)) = \mathcal{F}^{i_2}(\mathcal{F}^{i_1+1}(\mathcal{F}^{i_0+1}(x_0))) = \mathcal{F}^{i_0+i_1+i_2+2}(x_0) = F(x_0) \in M .$$

Portanto, F está bem definida. Assim, (M, F, μ_M) é uma aplicação induzida sobre $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu)$, cujo tempo de primeiro retorno associado é $\xi_M(x) = i_0 + i_1 + i_2 + 2$.

Percebamos que o processo para validar a boa definição de F é análogo ao processo feito para a validação da boa definição da aplicação induzida $\widehat{F}$, trabalhada na subseção anterior. Além dessa similaridade, a notação atribuída também será mantida. A saber, além dos valores i_0, i_1 e i_2 definidos acima, também consideraremos as notações abaixo.

- $\tau_0 = \tau(\mathcal{F}^{i_0}(x_0))$: Comprimento da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x_0)$ e $\mathcal{F}^{i_0+1}(x_0)$, ou seja, é o comprimento entre a última colisão em Γ_1 e a primeira colisão em Γ_r .
- $\tau_1 = \tau(\mathcal{F}^{i_1}(x_1))$: Comprimento da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_1}(x_1)$ e $\mathcal{F}^{i_1+1}(x_1)$, ou seja, é o comprimento entre a última colisão em Γ_r e a primeira colisão em Γ_1 .
- $d_k = d(x_k)$: Fator relacionado ao parâmetro de reflexão no ponto x_k , para $k \in \{0, 1, 2\}$, dado pela Equação (3.5).
- $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(x_k)$: Parâmetro de reflexão no ponto x_k , para $k \in \{0, 1, 2\}$, dado pela Equação (3.5).
- $\widehat{d}_k = \frac{d_k}{i_k + 1}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1, 2\}$
- $\widehat{\mathcal{R}}_k = -\frac{2}{\widehat{d}_k}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1, 2\}$
- $\widehat{\tau}_k = \tau_k - i_k \cdot \widehat{d}_k - i_{k+1} \cdot \widehat{d}_{k+1}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1\}$
- $\overline{\tau}_k = \tau_k - i_k \cdot \widehat{d}_k - d_{k+1}$: Fator para simplificar os cálculos, para $k \in \{0, 1\}$

Observação 4.3.10. *Para posterioridade, registraremos o estudo dos sinais dos termos acima. Daí,*

- a. $\tau_k > 0$: De fato, segue pela interpretação geométrica de τ_k ;
- b. $d_k > 0$: Com efeito, pela Equação (4.2), temos

$$d_k = \sigma \cdot \cos \varphi ,$$

em que $\sigma \in \{1, r\}$ e² $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Logo, $d_k > 0$;

c. $\widehat{d}_k > 0$: Realmente, pois $d_k > 0$ e $i_k \geq 0$;

d. $\mathcal{R}_k < 0$: De fato, pela Equação (3.5), $\mathcal{R}(x) = -\frac{2}{d_k}$. Portanto, como $d_k > 0$, o resultado segue;

e. $\widehat{\mathcal{R}}_k < 0$: Análise análoga à do item anterior;

f. $\widehat{\tau}_k$ e $\bar{\tau}_k$: Não podemos afirmar nada sobre o sinal destes valores.

Agora, do mesmo modo que fizemos antes, queremos obter as curvaturas das frentes de ondas associadas com uma iteração de F . Para tanto, procederemos de forma similar à mostrada na subseção anterior. Assim, dados $x \in M$, $v \in T_x M$ e $v_1 = D_x F(v)$, pela Equação (3.7), pela Observação 4.2.3 e pela Proposição 2.2.8, item d, obtemos

$$\mathcal{B}(v_1) = \left[2d_2, -\frac{2}{d_2}, \dots, -\frac{2}{d_2}, \tau_1, -\frac{2}{d_1}, 2d_1, \dots, -\frac{2}{d_1}, \tau_0, -\frac{2}{d_0}, 2d_0, \dots, -\frac{2}{d_0}, 0, \mathcal{B}(v) \right] \quad (4.13)$$

em que o par $\left(-\frac{2}{d_k}, 2d_k\right)$ se repete i_k vezes, para $k \in \{0, 1\}$, e o par $\left(2d_2, -\frac{2}{d_2}\right)$ se repete i_2 vezes.

Com o intuito de prosseguirmos com a caracterização de $\mathcal{B}(v_1)$, temos o lema a seguir.

Lema 4.3.11. *Seja $x \in M$, $v \in T_x \mathcal{M}$ e $v_1 = D_x F(v)$. Então,*

$$\mathcal{B}(v_1) = \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right]. \quad (4.14)$$

Demonstração: Consideremos $\widehat{v}_1 = D_x \mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(v)$. Então, $v_1 = D_x \mathcal{F}^{i_2}(\widehat{v}_1)$. Consequentemente, pelas Equações (3.7) e (4.13), segue que

$$\mathcal{B}(v_1) = \left[2d_2, -\frac{2}{d_2}, \dots, 2d_2, -\frac{2}{d_2} + \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right], \quad (4.15)$$

pois apresentamos uma “decomposição” de v_1 . Em particular, observemos que, considerando uma equivalência das notações, o vetor $\widehat{v}_1$ pode ser associado com a curvatura da frente de ondas da aplicação de primeiro retorno $\widehat{F}$. Dessa forma, pelo Lema 4.3.8, temos

$$\mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau_1 - i_1 \cdot \widehat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right]. \quad (4.16)$$

Daí, para concluirmos a prova do lema, analisaremos dois casos distintos. São eles,

² Não incluímos as extremidades do intervalo pois vimos no Capítulo 3 que colisões tangenciais não ocorrem em componentes focalizadoras.

- $i_2 = 0$: Então,

$$v_1 = D_x \mathcal{F}^{i_2}(\widehat{v}_1) = D_x \mathcal{F}^0(\widehat{v}_1) = \widehat{v}_1 .$$

Logo, pelo argumento mencionado acima, basta recorrermos ao Lema 4.3.8, ou seja,

$$\mathcal{B}(v_1) = \mathcal{B}(\widehat{v}_1) = \left[\tau_1 - i_1 \cdot \widehat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] .$$

Este resultado se dá em conformidade com a Equação (4.14), pois

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v_1) &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot 0}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[d_2, 0, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[d_2 + \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] , \text{ pela Proposição 2.2.8, item d .} \\ &= \left[\tau_1 - i_1 \cdot \widehat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] . \end{aligned}$$

- $i_2 > 0$: Neste caso, observemos que, da Equação (4.15), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\frac{2}{d_2} + \mathcal{B}(v_1)} &= \left[-\frac{2}{d_2}, 2d_2, -\frac{2}{d_2}, \dots, 2d_2, -\frac{2}{d_2} + \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] \\ &= \left[\underbrace{-\frac{2}{d_2}, 2d_2, \dots, 2d_2}_{i_2 \text{ vezes}}, -\frac{2}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] , \text{ pela Proposição 2.2.8, item d} \\ &= \left[-\frac{1}{d_2}, -i_2 \cdot (2d_2), -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] , \text{ pela Proposição 2.2.10} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{d_2} + \left[-2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right]} , \text{ pela Proposição 2.2.8, item a .} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\frac{2}{d_2} + \mathcal{B}(v_1)} &= \frac{1}{-\frac{1}{d_2} + \left[-2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right]} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{d_2} + \left[-2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] = -\frac{2}{d_2} + \mathcal{B}(v_1) \\ &\Rightarrow \mathcal{B}(v_1) = \frac{1}{d_2} + \left[-2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] . \end{aligned}$$

Equivalentemente, a fim de que a curvatura $\mathcal{B}(v_1)$ volte para o formato de fração contínua, temos

$$\mathcal{B}(v_1) = \left[0, \frac{1}{d_2}, -2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right]. \quad (4.17)$$

Com isso, aplicaremos o Teorema 2.2.12, em que

$$a = \frac{1}{d_2} \quad , \quad b = -2 \cdot i_2 \cdot d_2 \quad \text{e} \quad c = -\frac{1}{d_2}.$$

Consequentemente,

$$B = a + c + a \cdot b \cdot c = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_2} + \left(\frac{1}{d_2} \right) (-2 \cdot i_2 \cdot d_2) \left(-\frac{1}{d_2} \right) = \frac{2i_2}{d_2}.$$

$$A = \frac{b \cdot c}{B} = \frac{(-2 \cdot i_2 \cdot d_2) \cdot \left(-\frac{1}{d_2} \right)}{\frac{2i_2}{d_2}} = 2i_2 \cdot \frac{d_2}{2i_2} = d_2.$$

$$C = \frac{a \cdot b}{B} = -\frac{c \cdot b}{B} = -A = -d_2.$$

Em suma,

$$A = d_2 \quad B = \frac{2i_2}{d_2} \quad \text{e} \quad C = -d_2.$$

Finalmente, usando o Teorema 2.2.12 na Equação (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v_1) &= \left[0, \frac{1}{d_2}, -2 \cdot i_2 \cdot d_2, -\frac{1}{d_2}, 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] \\ &= [0 + A, B, C + 0, \mathcal{B}(\widehat{v}_1)] \\ &= \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, -d_2, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right]. \end{aligned}$$

Por fim, substituindo a Equação (4.16) na expressão acima e utilizando a Proposição 2.2.8, item c, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v_1) &= \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, -d_2, \mathcal{B}(\widehat{v}_1) \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, -d_2 + \tau_1 - i_1 \cdot \widehat{d}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{B}(v_1) = \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v) \right],$$

como queríamos demonstrar. ■

Tal como fizemos no final da subseção anterior, através de um processo indutivo, podemos obter a curvatura da frente de ondas associada a um vetor $v_n = D_x F^n(v)$ e $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, também somos capazes de obter a fração contínua que resulta quando tomamos $n \rightarrow -\infty$. Contudo, como tal expressão ainda contém termos que não somos capazes de determinar o sinal, a saber, $\bar{\tau}_k$ e $\widehat{\tau}_k$, também não poderemos utilizar os teoremas clássicos de convergência de fração contínua.

5 A HIPERBOLICIDADE NO LIMÃO ASSIMÉTRICO

Neste capítulo, provaremos os nossos resultados principais, isto é, mostraremos que o bilhar no limão assimétrico é hiperbólico quando atende a certas condições e também apresentaremos um teorema que provê condições geométricas simples para a construção de um bilhar no limão assimétrico que seja hiperbólico. Antes de chegarmos nestes resultados, passaremos por duas subseções, uma que apresenta as hipóteses para atingirmos a hiperbolicidade do bilhar e a outra que trata de resultados que nos auxiliarão na demonstração das afirmações supracitadas. Para esta parte, nossa referência principal foi (BUNIMOVICH; ZHANG; ZHANG, 2016).

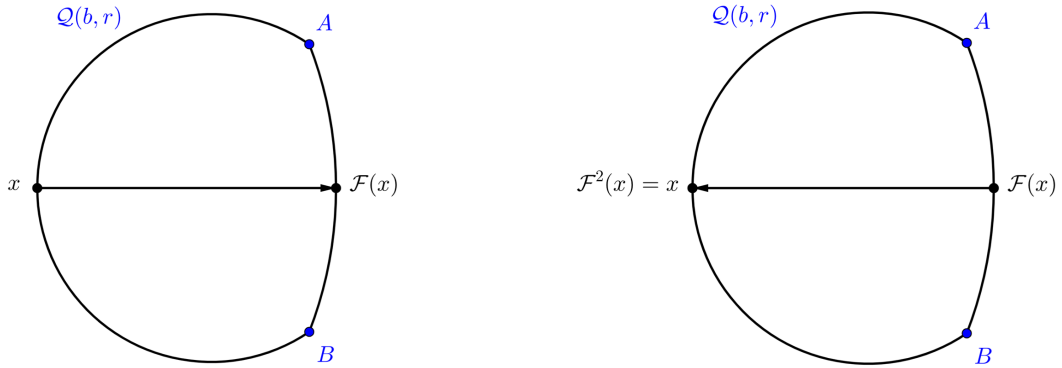
5.1 HIPÓTESES

Como analisado no final da seção anterior, independente da aplicação induzida considerada, não somos capazes de garantir a convergência da fração contínua das curvaturas quando $n \rightarrow -\infty$. Por esse motivo, para conseguirmos provar a existência deste limite e, por consequência, a hiperbolicidade do bilhar, nossa análise terá que ser mais técnica, através do controle dos parâmetros vistos anteriormente. Para alcançarmos este objetivo, iremos impor algumas hipóteses sobre os objetos trabalhados até o momento. No que segue, adicionaremos duas hipóteses sobre a mesa $\mathcal{Q}(b, r)$.

A primeira das hipóteses é puramente geométrica e é utilizada majoritariamente para garantirmos a construção da classe de bilhares no limão assimétrico hiperbólicos.

Hipótese (H1). *A componente Γ_1 de $\mathcal{Q}(b, r)$ é um arco maior, isto é, Γ_1 é maior que o semicírculo do disco D_1 .*

Por outro lado, para entendermos a justificativa da segunda hipótese, precisamos analisar a única órbita de período 2 que colide com as duas componentes do bilhar em $\mathcal{Q}(b, r)$, denominaremos tal órbita por $\mathcal{O}_2$. A saber, a trajetória desta órbita é dada pela interseção entre o segmento de reta que liga os centros dos discos D_1 e D_r com a própria mesa $\mathcal{Q}(b, r)$, como representamos na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Representação da órbita $\mathcal{O}_2$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Naturalmente, esta é a única órbita de período 2 que colide com ambas as componentes da mesa, visto que uma órbita é de período 2 se, e somente se, as retas tangentes ao bordo nos pontos de colisão são paralelas. Dessa forma, devido aos raios diferentes dos discos, esta condição é satisfeita apenas no caso supracitado.

Agora, no lema abaixo, iremos classificar a órbita $\mathcal{O}_2$ de acordo com os parâmetros da mesa $\mathcal{Q}(b, r)$.

Lema 5.1.1. *Seja $\mathcal{Q}(b, r)$ a mesa do bilhar no limão assimétrico. Então, a órbita $\mathcal{O}_2$ é,*

- a. hiperbólica: se $1 < b < r$;*
- b. parabólica: se $b = 1$ ou $b = r$;*
- c. elíptica: se $b < 1$ ou $b > r$.*

Demonstração: Sejam $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}(x) = x_1 \in \mathcal{M}_r$ os pontos que realizam a órbita $\mathcal{O}_2$, ou seja,

$$\mathcal{O}_2 = (x, x_1, x, x_1, \dots) .$$

Então, pela Definição 3.2.3, a fim de classificarmos a órbita $\mathcal{O}_2$, basta analisarmos $|\text{tr}(D_x \mathcal{F}^2)|$. Logo, devemos calcular

$$D_x \mathcal{F}^2 = (D_{\mathcal{F}(x)} \mathcal{F}) \cdot (D_x \mathcal{F}) = (D_{x_1} \mathcal{F}) \cdot (D_x \mathcal{F}) . \quad (5.1)$$

Para efetuarmos o cálculo acima, ressaltamos que $x = (s, \varphi)$ e $x_1 = (s_1, \varphi_1)$, de modo que, através da descrição de $\mathcal{O}_2$ feita acima, obtemos

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \quad , \quad \tau = 1 - (b - r) \quad , \quad \kappa = -1 \quad \text{e} \quad \kappa_1 = -\frac{1}{r} .$$

Daí, pela Equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}
D_x \mathcal{F} &= \frac{-1}{\cos \varphi_1} \cdot \begin{bmatrix} \tau \cdot \kappa + \cos \varphi & \tau \\ \tau \cdot \kappa \cdot \kappa_1 + \kappa \cdot \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cdot \cos \varphi & \tau \cdot \kappa_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{bmatrix} -\tau + 1 & \tau \\ \frac{\tau}{r} - 1 - \frac{1}{r} & -\frac{\tau}{r} + 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 - \tau & \tau \\ \frac{\tau - 1 - r}{r} & \frac{r - \tau}{r} \end{bmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{bmatrix} b - r & \tau \\ -\frac{b}{r} & \frac{b - 1}{r} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

em que usamos $1 - \tau = b - r$, $\tau - 1 - r = -b$ e $r - \tau = b - 1$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
D_{x_1} \mathcal{F} &= \frac{-1}{\cos \varphi} \cdot \begin{bmatrix} \tau \cdot \kappa_1 + \cos \varphi_1 & \tau \\ \tau \cdot \kappa_1 \cdot \kappa + \kappa_1 \cdot \cos \varphi + \kappa \cdot \cos \varphi_1 & \tau \cdot \kappa + \cos \varphi \end{bmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\tau}{r} + 1 & \tau \\ \frac{\tau}{r} - \frac{1}{r} - 1 & -\tau + 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{r - \tau}{r} & \tau \\ \frac{\tau - 1 - r}{r} & 1 - \tau \end{bmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{b - 1}{r} & \tau \\ -\frac{b}{r} & b - r \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Com isso, substituindo as equações acima na Expressão (5.1), segue que

$$\begin{aligned}
 D_x \mathcal{F}^2 &= (D_{x_1} \mathcal{F}) \cdot (D_x \mathcal{F}) = -1 \cdot \begin{bmatrix} b-r & \tau \\ -\frac{b}{r} & \frac{b-1}{r} \end{bmatrix} \cdot -1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{b-1}{r} & \tau \\ -\frac{b}{r} & b-r \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b-r & \tau \\ -\frac{b}{r} & \frac{b-1}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{b-1}{r} & \tau \\ -\frac{b}{r} & b-r \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(b-1)(b-r) - \tau b}{r} & 2\tau(b-r) \\ -\frac{2b(b-1)}{r^2} & \frac{(b-1)(b-r) - \tau b}{r} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\text{tr}(D_x \mathcal{F}^2) = \frac{2}{r} \cdot [(b-1)(b-r) - \tau b] = \frac{2}{r} \cdot [2b^2 - 2br - 2b + r] = \frac{2}{r} \cdot [2b(b-r-1) + r] .$$

$$\therefore |\text{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| = \frac{2}{r} \cdot |2b(b-r-1) + r|$$

Assim, analisemos os casos abaixo.

a. $|\text{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| > 2$: Daí,

$$\frac{2}{r} \cdot |2b(b-r-1) + r| > 2 \Rightarrow |2b(b-r-1) + r| > r$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad & 2b(b-r-1) + r > r & \text{ou} & \quad 2b(b-r-1) + r < -r \\
 \Rightarrow \quad & 2b(b-r-1) > 0 & \text{ou} & \quad 2b(b-r-1) + 2r < 0 \\
 \Rightarrow \quad & -2b\tau > 0 & \text{ou} & \quad 2 \cdot [b(b-r-1) + r] < 0
 \end{aligned}$$

Da primeira desigualdade, concluímos que não há solução alguma, visto que, por definição, $b, \tau > 0$. Por este motivo, continuaremos analisando apenas a segunda desigualdade.

$$\begin{aligned}
 2 \cdot [b(b-r-1) + r] < 0 &\Rightarrow b(b-r-1) + r < 0 \Rightarrow b^2 - (1+r)b + r < 0 \\
 &\Rightarrow 1 < b < r .
 \end{aligned}$$

Portanto, para que $|\text{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| > 2$, devemos ter $1 < b < r$. Consequentemente, a órbita $\mathcal{O}_2$ será hiperbólica em $\mathcal{Q}(b, r)$ quando $1 < b < r$.

b. $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| = 2$: Daí,

$$\frac{2}{r} \cdot |2b(b-r-1) + r| = 2 \Rightarrow |2b(b-r-1) + r| = r$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2b(b-r-1) + r &= r & \text{ou} & \quad 2b(b-r-1) + r = -r \\ \Rightarrow \quad 2b(b-r-1) &= 0 & \text{ou} & \quad 2b(b-r-1) + 2r = 0 \\ \Rightarrow \quad -2b\tau &= 0 & \text{ou} & \quad 2 \cdot [b(b-r-1) + r] = 0 \end{aligned}$$

Analogamente ao item anterior, a primeira desigualdade não possui soluções, pois, $b, \tau > 0$. Assim, resta analisarmos a segunda desigualdade.

$$\begin{aligned} 2 \cdot [b(b-r-1) + r] = 0 &\Rightarrow b(b-r-1) + r = 0 \Rightarrow b^2 - (1+r)b + r = 0 \\ &\Rightarrow b = 1 \quad \text{ou} \quad b = r . \end{aligned}$$

Portanto, para que $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| = 2$, devemos ter $b = 1$ ou $b = r$. Consequentemente, a órbita $\mathcal{O}_2$ será parabólica em $\mathcal{Q}(b, r)$ quando $b = 1$ ou $b = r$.

c. $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| < 2$: Naturalmente, como todos os casos analisados são disjuntos, por um argumento de tricotomia, concluímos que $|\operatorname{tr}(D_x \mathcal{F}^2)| < 2$ ocorre quando $b < 1$ ou $b > r$. Consequentemente, a órbita $\mathcal{O}_2$ será elíptica em $\mathcal{Q}(b, r)$ quando $b < 1$ ou $b > r$.

Destarte, dos itens acima, o lema fica provado. ■

O lema acima é de suma importância para a hipótese que adicionaremos a seguir pois, de acordo com (CHEN et al., 2013), quando a órbita $\mathcal{O}_2$ é elíptica, ou seja, quando $b < 1$ ou $b > r$, ocorre a existência de ilhas elípticas, o que impossibilita o comportamento caótico. Por este motivo, é necessário que $\mathcal{O}_2$ não seja elíptica. Além disso, por simplicidade, também excluiremos os casos em que $\mathcal{O}_2$ é parabólica.

Combinando as exigências acima com a condição de existência, dada na Observação 4.2.2, somos levados à hipótese abaixo.

Hipótese (H2). *Os parâmetros (b, r) da mesa $\mathcal{Q}(b, r)$ satisfazem*

$$\max\{r-1, 1\} < b < r .$$

Finalizada as hipóteses sobre $\mathcal{Q}(b, r)$, partiremos para hipóteses mais técnicas. Para tanto, é necessário decompor o espaço M da seguinte forma,

$$M = X_0 \cup X_1 \cup X_2 , \quad (5.2)$$

em que

- $X_0 = \{x \in M ; i_1(x) \geq 1\} ;$
- $X_1 = \{x \in M ; i_1(x) = 0 \text{ e } i_2(x) \geq 1\} ;$
- $X_2 = \{x \in M ; i_1(x) = i_2(x) = 0\} .$

Observemos que a decomposição acima possui medida total em M visto que estamos excluindo o conjunto N , definido pela Equação (4.6), que, pelo Corolário 4.3.3, possui medida nula.

Com esta decomposição em mente, enunciaremos as três hipóteses restantes para que possamos garantir a hiperbolicidade da aplicação $F : M \rightarrow M$.

Hipótese (H3). Para $x \in X_0$, temos $i_2 \geq 1$ e valem as desigualdades

$$\tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 < 0 ; \quad (5.3)$$

$$\bar{\tau}_1 < -\frac{d_2}{2i_2}, \quad (5.4)$$

em que $p = 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)}$.

Hipótese (H4). Para $x \in X_1$, valem as desigualdades

$$\widehat{d}_0 < d_1 ; \quad (5.5)$$

$$\tau_0 + \tau_1 < p \cdot d_0 + d_1 + q \cdot d_2 .$$

em que $p = 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)}$ e $q = 1 - \frac{1}{2i_2}$.

Hipótese (H5). Para $x \in X_2$, vale

$$\tau_0 \leq \frac{d_1}{2} .$$

5.2 RESULTADOS AUXILIARES

Como o nome da seção sugere, no que segue enunciaremos e provaremos resultados que serão úteis para a demonstração dos resultados principais. Os primeiros destes resultados nos fornecem desigualdades, como podemos ver a seguir.

Lema 5.2.1. *Seja $x \in M$ tal que $i_1(x) = 0$. Então,*

$$\tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 .$$

Demonstração: Por hipótese, $i_1(x) = 0$. Consequentemente, a órbita atrelada a x é do tipo

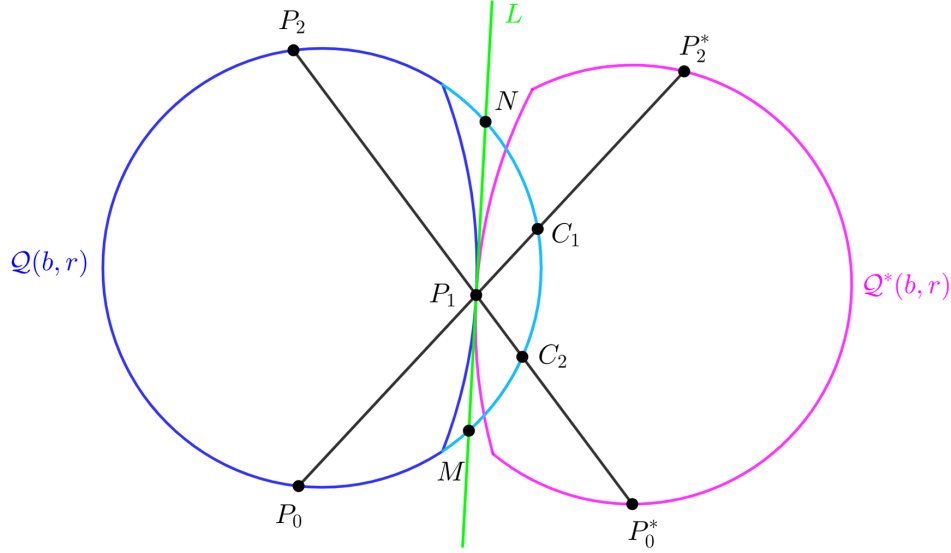
$$(\dots, \mathcal{F}^{i_0}(x), x_1, x_2, \dots) ,$$

em que $\mathcal{F}^{i_0}(x), x_2 \in \mathcal{M}_1$ e $x_1 \in \mathcal{M}_r$. Dessa forma, consideremos $P_0, P_2 \in \Gamma_1$ e $P_1 \in \Gamma_r$ os pontos de reflexão de $\mathcal{F}^{i_0}(x), x_2$ e x_1 , respectivamente.

Com isso, seja L a reta tangente a Γ_r no ponto P_1 . Daí, seja $\mathcal{Q}^*(b, r)$ a reflexão de $\mathcal{Q}(b, r)$ por L . Além disso, consideremos também o disco D_1 em sua totalidade.

Dessa forma, ao considerarmos a extensão futura da reta que representa a trajetória de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ até x_1 (isto é, de P_0 até P_1), obtemos $C_1 \in D_1$ e $P_2^* \in \mathcal{Q}^*(b, r)$. Similarmente, ao considerarmos a extensão passada da reta que representa a trajetória de x_2 até x_1 (isto é, de P_2 até P_1), obtemos $C_2 \in D_1$ e $P_0^* \in \mathcal{Q}^*(b, r)$. Tais considerações estão representadas na Figura 5.2 abaixo.

Figura 5.2 – Figura auxiliar do Lema 5.2.1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Naturalmente, pela simetria da figura, temos

$$|P_0P_1| = |P_0^*P_1| = \tau_0 \quad \text{e} \quad |P_1P_2| = |P_1P_2^*| = \tau_1 .$$

Consequentemente,

$$|P_0P_2^*| = |P_0P_1| + |P_1P_2^*| = \tau_0 + \tau_1 \quad \text{e} \quad |P_0^*P_2| = |P_0^*P_1| + |P_1P_2| = \tau_0 + \tau_1 .$$

Por outro lado, pelas propriedades do bilhar no círculo, vistas na Seção 3.4, junto da Observação 4.2.3, temos

$$|P_0C_1| = 2d_0 \quad \text{e} \quad |P_2C_2| = 2d_2 .$$

Ademais, como $b > r - 1$, o disco D_1 possui uma componente “fora” de D_r . Consequentemente, a reta L cortará D_1 em um arco maior MN que contém Γ_1 . Daí, seguem as inclusões abaixo.

$$P_0C_1 \subsetneq P_0P_2^* \Rightarrow |P_0C_1| < |P_0P_2^*| \Rightarrow 2d_0 < \tau_0 + \tau_1$$

$$P_2C_2 \subsetneq P_0^*P_2 \Rightarrow |P_2C_2| < |P_0^*P_2| \Rightarrow 2d_2 < \tau_0 + \tau_1$$

Portanto, somando as duas desigualdades acima, concluimos que

$$2d_0 + 2d_2 < 2(\tau_0 + \tau_1) \Rightarrow d_0 + d_2 < \tau_0 + \tau_1$$

$$\therefore \tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 .$$

■

Lema 5.2.2. *Seja $x \in M$ tal que $i_1(x) = 0$. Então,*

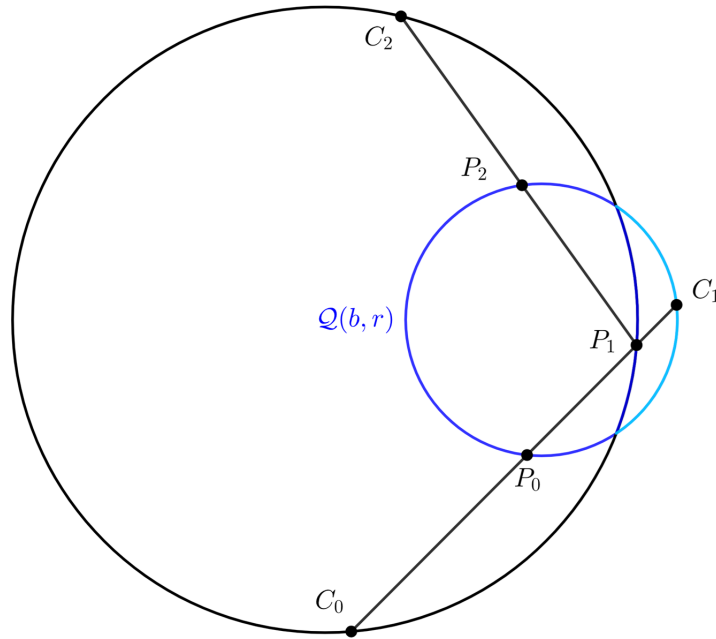
$$\tau_0 < d_0 + d_1 .$$

Demonstração: Como a hipótese deste lema coincide com a do lema anterior, a órbita de x possui o mesmo comportamento. Assim, segue que $\mathcal{F}^{i_0}(x), x_2 \in \mathcal{M}_1$ e $x_1 \in \mathcal{M}_r$, com $P_0, P_2 \in \Gamma_1$ e $P_1 \in \Gamma_r$ os pontos de reflexão de $\mathcal{F}^{i_0}(x), x_2$ e x_1 , respectivamente.

Além disso, tal qual no lema acima, também consideraremos o disco D_1 em sua totalidade. Contudo, para esta demonstração também será necessário fazermos a mesma consideração para o disco D_r .

Dessa forma, ao traçarmos a extensão passada e futura da reta que representa a trajetória de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ até x_1 (isto é, de P_0 até P_1), obtemos $C_0 \in \Gamma_r$ e $C_1 \in D_1$, respectivamente. Similarmente, ao traçarmos a extensão futura da reta que representa a trajetória de x_1 até x_2 (isto é, de P_1 até P_2), obtemos $C_2 \in D_r$. Tais considerações estão representadas na Figura 5.3 abaixo.

Figura 5.3 – Figura auxiliar do Lema 5.2.2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Da construção acima e pelas propriedades do bilhar no círculo, vistas na Seção 3.4, temos

$$|P_0P_1| = \tau_0 \quad , \quad |P_0C_1| = 2d_0 \quad , \quad |P_1C_2| = |C_0P_1| = 2d_1 \quad .$$

Consequentemente, pela forma que o bilhar no limão assimétrico é definido, segue que

$$P_0P_1 \subsetneq P_0C_1 \Rightarrow |P_0P_1| < |P_0C_1| \Rightarrow \tau_0 < 2d_0 \quad .$$

$$P_0P_1 \subsetneq C_0P_1 \Rightarrow |P_0P_1| < |C_0P_1| \Rightarrow \tau_0 < 2d_1 \quad .$$

Portanto, somando as duas desigualdades acima, concluímos que

$$2\tau_0 < 2d_0 + 2d_1 \Rightarrow \tau_0 < d_0 + d_1 \quad ,$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 5.2.3. *Pela decomposição feita da Equação (5.2), segue que ambos os lemas acima são válidos sempre que $x \in X_1 \cup X_2$.*

Observação 5.2.4. *Nas demonstrações dos lemas acima recorreremos ao uso de imagens para ilustrar a situação e fornecer um melhor entendimento sobre os processos tomados. Contudo, para que a ilustração fosse esclarecedora tivemos que adaptar as proporções dos*

elementos, por exemplo, o raio r é bem menor do que o ideal, como veremos futuramente. Porém, trabalhar com um valor de r grande dificultaria a criação de ilustrações. Muitas das figuras futuras seguirão essa mesma lógica, isto é, servirão apenas para ilustrar o processo.

Agora, voltaremos nossa atenção para o estudo de curvaturas de frentes de onda, em que o Lema 4.3.11 será de grande relevância. Contudo, focaremos nosso estudo em dois vetores específicos, a saber, para cada $x \in M$, tomemos $v_x^d, v_x^p \in T_x M$ tais que

$$\mathcal{B}(v_x^d) = \frac{1}{d(x)} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(v_x^p) = 0 .$$

Lembremos que, como vimos na Seção 3.3, os vetores acima estão bem definidos. Além disso, a fim de justificarmos a notação, usamos o índice superior d para relacionar com o valor da curvatura. Por outro lado, o índice p é atrelado ao paralelismo da frente de ondas, já que esta é a única possibilidade para que a curvatura seja nula.

Observação 5.2.5. *A partir deste momento, para simplificarmos a escrita, utilizaremos a notação*

$$D_y F(v) = DF(v_y) ,$$

ou seja, o subíndice do vetor aplicado na derivada também indicará o ponto no qual esta derivada está sendo tomada.

Baseado nos elementos definidos acima, temos o resultado abaixo.

Proposição 5.2.6. *Sejam $x \in M$, $v \in T_x M$ e $p = 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)}$. Assim, mantendo a notação descrita acima, segue que,*

a. Se

$$\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] > 0 \quad (\text{D1})$$

ou

$$\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] < -\frac{d_2}{2i_2} , \quad (\text{F1})$$

então vale que

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} . \quad (5.6)$$

b. Se

$$\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] > 0 \quad (\text{D2})$$

ou

$$\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] < -\frac{d_2}{2i_2} , \quad (\text{F2})$$

então vale que

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \frac{1}{d_2} . \quad (5.7)$$

c. Se

(P1) as Desigualdades (D1)-(D2)¹ ou (F1)-(F2) são válidas e

$$\left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] ; \quad (5.8)$$

ou

(P2) as Desigualdades (D1)-(F2) valem ;

então vale que

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} . \quad (5.9)$$

Demonstração: Primeiramente, notemos que, pela Observação 4.2.3 e pela forma que definimos v_x^d e v_x^p , temos

$$\mathcal{B}(v_x^d) = \frac{1}{d_0} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(v_x^p) = 0 .$$

Além disso, pelo Lema 4.3.11, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(DF(v_x^d)) &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v_x^d) \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{2}{\widehat{d}_0}, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \frac{1}{d_0} \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{2}{\widehat{d}_0}, -i_0 \cdot \widehat{d}_0 + d_0 \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{2}{\widehat{d}_0}, \widehat{d}_0 \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{1}{\widehat{d}_0} \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0 - \widehat{d}_0 \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - i_0 \cdot \widehat{d}_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 - \widehat{d}_0 \right] \\ &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] . \end{aligned} \quad (5.10)$$

¹ A notação (D1)-(D2), será utilizada para simplificar a frase “(D1) e (D2)”. Tal notação será perpetuada a partir deste momento do texto.

Analogamente, pelo lema supracitado, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(DF(v_x^p)) &= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, \mathcal{B}(v_x^p) \right] \\
&= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{2}{\widehat{d}_0}, -i_0 \cdot \widehat{d}_0, 0 \right] \\
&= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0, -\frac{2}{\widehat{d}_0} \right], \text{ pela Proposição 2.2.8, item e.} \\
&= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\tau}_0 - \frac{\widehat{d}_0}{2} \right] \\
&= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - i_0 \cdot \widehat{d}_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 - \frac{\widehat{d}_0}{2} \right] \\
&= \left[d_2, \frac{2 \cdot i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Com as equações acima em mente, somos capazes de provar os itens da proposição.

a. Avaliemos cada uma das hipóteses do presente item.

- Se (D1) é satisfeita, então

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] &> 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} > 0 \\
&\Rightarrow \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] > 0. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Notemos que, pela Observação 4.3.10, $d_2 > 0$. Ademais, por definição, segue que $i_2 \geq 0$. Dessa forma, concluímos que $\frac{2 \cdot i_2}{d_2} \geq 0$.

Com isso, da Equação (5.12), temos

$$\begin{aligned}
\left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] &> -\frac{2i_2}{d_2} \Rightarrow \frac{2i_2}{d_2} + \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] > 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{\frac{2i_2}{d_2} + \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} &> 0 \Rightarrow \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] > 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $d_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} < \frac{1}{d_2} \\
&\Rightarrow 0 < \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \frac{1}{d_2} \\
&\Rightarrow 0 < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2}.
\end{aligned}$$

Logo, se (D1) é válida, a afirmação segue.

- Se (F1) é satisfeita, então

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] &< -\frac{d_2}{2i_2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1]} > -\frac{2i_2}{d_2} \\
&\Rightarrow [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > -\frac{2i_2}{d_2} \\
&\Rightarrow \frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > 0 \\
&\Rightarrow \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] > 0 .
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $d_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} < \frac{1}{d_2} \\
&\Rightarrow 0 < \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \frac{1}{d_2} \\
&\Rightarrow 0 < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} .
\end{aligned}$$

Logo, se (F1) é válida, a afirmação segue.

Destarte, se (D1) ou (F1) são válidas, a Equação (5.6) também o será.

- b. De modo análogo ao item anterior, avaliemos cada uma das hipóteses do presente item.

- Se (D2) é satisfeita, então

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] &> 0 \\
&\Rightarrow [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > 0 . \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, $\frac{2 \cdot i_2}{d_2} \geq 0$. Daí, pela equação anterior, temos

$$\begin{aligned}
[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] &> -\frac{2i_2}{d_2} \Rightarrow \frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > 0 \\
&\Rightarrow \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] > 0 .
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $d_2 > 0$, temos

$$0 < \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} < \frac{1}{d_2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 < \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] < \frac{1}{d_2} . \\ \Rightarrow 0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \frac{1}{d_2} . \end{aligned}$$

Logo, se (D2) é válida, a afirmação segue.

- Se (F2) é satisfeita, então

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] < -\frac{d_2}{2i_2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{\tau}_1 + \left[\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right]} > -\frac{2i_2}{d_2} \\ \Rightarrow \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] > -\frac{2i_2}{d_2} \\ \Rightarrow \frac{2i_2}{d_2} + \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] > 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] > 0 \end{aligned}$$

Consequentemente, como $d_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right]} < \frac{1}{d_2} \\ \Rightarrow 0 < \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \hat{d}_1 \right] < \frac{1}{d_2} \\ \Rightarrow 0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \frac{1}{d_2} . \end{aligned}$$

Logo, se (F2) é válida, a afirmação segue.

Destarte, se (D2) ou (F2) são válidas, a Equação (5.7) também o será.

c. Novamente, analisemos cada uma das hipóteses do item atual.

- Primeiramente, observemos que, se as Equações (D1)-(D2) ou (F1)-(F2) forem satisfeitas, pelos itens anteriores, segue que

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)), \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} .$$

Desse modo, resta provarmos que

$$\mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) .$$

Por hipótese e pela Desigualdade (5.13),

$$\begin{aligned}
& 0 < [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] \\
& \Rightarrow \frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < \frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] \\
& \Rightarrow \frac{1}{\frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1]} < \frac{1}{\frac{2i_2}{d_2} + [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1]} \\
& \Rightarrow \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] \\
& \Rightarrow d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] \\
& \Rightarrow \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} < \frac{1}{d_2 + \left[\frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]} \\
& \Rightarrow \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \left[d_2, \frac{2i_2}{d_2}, \bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) .$$

- Se as Equações (D1)-(F2) valem, pelos itens anteriores, segue que

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)), \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} .$$

Desse modo, resta provarmos que

$$\mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) .$$

Por hipótese e pelo fato que $\frac{d_2}{2i_2} > 0$, constatamos

$$\begin{cases} \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > 0 \\ \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < -\frac{d_2}{2i_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] > 0 \\ \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < 0 \end{cases} ,$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < 0 < \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] \\
& \Rightarrow \frac{1}{\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1]} < 0 < \frac{1}{\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1]} \\
& \Rightarrow [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] < 0 < [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1] .
\end{aligned}$$

De modo geral,

$$\left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] < \left[\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}}_1, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 \right] ,$$

que é justamente a desigualdade da Condição **(P1)** que, como provado acima, garante a validade da expressão

$$\mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) .$$

Destarte, se **(P1)** ou **(P2)** são válidas, a Equação (5.9) também o será.

■

Observação 5.2.7. *No resultado acima, a parte relevante encontra-se em seu terceiro item, que caracteriza a ordenação das curvaturas das frentes de ondas associadas às imagens dos vetores v_x^p e v_x^d pela aplicação DF . Em particular, podemos observar que a Condição **(P2)** é mais forte do que a Condição **(P1)**. Isto ocorre pois, na sua hipótese, isto é, a validade das Desigualdades **(D1)**-**(F2)**, conseguimos distinguir os sinais das frações contínuas que queremos analisar entre positiva e negativa. Como não conseguimos tal distinção em **(P1)**, surge a necessidade de uma nova hipótese, a Equação (5.8).*

Observação 5.2.8. *Vale ressaltarmos que, quando $i_2 = 0$, as condições **(F1)** e **(F2)** são vazias.*

Apesar da tecnicidade da proposição acima, sua interpretação geométrica é um tanto quanto simples, visto que ela basicamente nos fornece condições que asseguram a invariância dos cones limitados pelas curvaturas associadas aos vetores v_x^p e v_x^d , hipótese necessária para a prova da hiperbolicidade, como vimos na Seção 3.3.

Para finalizarmos esta seção, como a Proposição 5.2.6 é genérica para quaisquer bilhares com duas ou mais componentes circulares, temos que aplicá-la no contexto adequado. Dessa forma, obtemos o resultado abaixo.

Proposição 5.2.9. *Seja $\mathcal{Q}(b, r)$ uma mesa de bilhar no limão assimétrico que satisfaz as Hipóteses **(H1)**-**(H2)**-**(H3)**-**(H4)**-**(H5)**. Então, para quase todo $x \in M$, temos*

$$0 = \mathcal{B}(v_{F(x)}^p) < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \mathcal{B}(v_{F(x)}^d) = \frac{1}{d(F(x))} . \quad (5.14)$$

Demonstração: Começemos observando que, por definição, temos

$$\mathcal{B}(v_{F(x)}^p) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(v_{F(x)}^d) = \frac{1}{d(F(x))} .$$

Porém, pela forma que definimos a aplicação F , sabemos que $F(x)$ é um dos estados que pertencem à série de colisões do ponto x_2 . Consequentemente, pela Observação 4.2.3, constatamos que

$$\mathcal{B}(v_{F(x)}^d) = \frac{1}{d(F(x))} = \frac{1}{d(x_2)} = \frac{1}{d_2} .$$

Com isso, a Desigualdade (5.14) é equivalente a

$$0 < \mathcal{B}(DF(v_x^p)) < \mathcal{B}(DF(v_x^d)) < \frac{1}{d_2} .$$

Naturalmente, a desigualdade acima coincide com a Desigualdade (5.9). Assim, pela Proposição 5.2.6, a fim de garantirmos tal expressão, basta verificarmos que quase todo ponto $x \in M$ satisfaz ou a Condição (P1) ou a Condição (P2).

Para realizarmos a verificação acima, usaremos a decomposição de M apresentada na Equação (5.2), analisando como os pontos dos espaços X_0, X_1 e X_2 se comportam.

a. $x \in X_0$: Neste caso, vale a Hipótese (H3). Daí, pela Desigualdade (5.3), temos

$$\tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1} < 0 .$$

Daí, como $p = 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)} < 1$, segue que

$$\begin{aligned} \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1} &< \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1} < 0 \\ \Rightarrow [\tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< [\tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < 0 \\ \Rightarrow \widehat{\mathcal{R}_1} + [\tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< \widehat{\mathcal{R}_1} + [\tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < \widehat{\mathcal{R}_1} < 0 , \end{aligned}$$

em que usamos a Observação 4.3.10. Prosseguindo,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_1} + [\tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< \widehat{\mathcal{R}_1} + [\tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < 0 \\ \Rightarrow [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < 0 . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Agora, nos lembremos da Desigualdade (5.4), também proveniente da Hipótese (H3), dada por

$$\bar{\tau}_1 < -\frac{d_2}{2i_2} < 0 .$$

Com isso em mente, da Desigualdade (5.15), temos

$$\bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < -\frac{d_2}{2i_2} < 0 .$$

Logo, as Condições (F1)-(F2) são satisfeitas. Em particular,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< \bar{\tau}_1 + [\widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < 0 . \\ \Rightarrow [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - p \cdot d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] &< [\bar{\tau}_1, \widehat{\mathcal{R}_1}, \tau_0 - d_0 - i_1 \cdot \widehat{d_1}] < 0 , \end{aligned}$$

que é justamente a hipótese da Condição **(P1)** que ainda não havíamos verificado.

Destarte, para quase todo $x \in X_0$, a Condição **(P1)** é satisfeita e, pelo argumento inicial, a Desigualdade (5.14) é válida.

b. $x \in X_1$: Neste caso, pela definição de X_1 , temos $i_1(x) = 0$. Consequentemente,

$$\widehat{d}_1 = \frac{d_1}{i_1 + 1} = d_1 \quad , \quad \widehat{\mathcal{R}}_1 = -\frac{2}{\widehat{d}_1} = -\frac{2}{d_1} = \mathcal{R}_1 \quad \text{e} \quad \bar{\tau}_1 = \tau_1 - i_1 \cdot \widehat{d}_1 - d_2 = \tau_1 - d_2 .$$

Com isso em mente, podemos simplificar as condições da Proposição 5.2.6, obtendo

$$\textbf{(D1')} : \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] > 0;$$

$$\textbf{(F1')} : \tau_1 - q \cdot d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < 0, \text{ em que } q = 1 - \frac{1}{2i_2};$$

$$\textbf{(D2')} : \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - p \cdot d_0] > 0;$$

$$\textbf{(F2')} : \tau_1 - q \cdot d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - p \cdot d_0] < 0, \text{ em que } q = 1 - \frac{1}{2i_2};$$

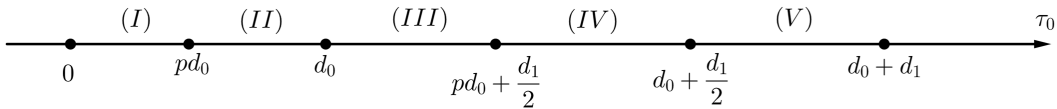
$$\textbf{(P1')} : \text{Valem as Desigualdades \textbf{(D1')-(D2')} ou \textbf{(F1')-(F2')} e}$$

$$[\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - p \cdot d_0] < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] .$$

$$\textbf{(P2')} : \text{Valem as Desigualdades \textbf{(D1')-(F2')} .}$$

Agora, lembremos que, pelo Lema 5.2.2, $\tau_0 \in (0, d_0 + d_1)$. Dessa forma, para nossa próxima análise, consideraremos a posição de τ_0 neste intervalo, a saber, estudaremos os casos ilustrados na Figura 5.4 abaixo.

Figura 5.4 – Sub-casos referentes aos possíveis valores de τ_0 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Naturalmente, a ordenação acima é válida. De fato, pela Observação 4.3.10, sabemos que $d_k > 0$. Além disso, temos $p < 1$. Daí, asseguramos que

$$0 < p \cdot d_0 < d_0 \quad \text{e} \quad p \cdot d_0 + \frac{d_1}{2} < d_0 + \frac{d_1}{2} < d_0 + d_1 .$$

Desta forma, resta justificar apenas uma das desigualdades. Contudo,

$$d_0 < p \cdot d_0 + \frac{d_1}{2} \Leftrightarrow d_0 - p \cdot d_0 < \frac{d_1}{2} \Leftrightarrow (1 - p) \cdot d_0 < \frac{d_1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)} \cdot d_0 < \frac{d_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_0}{1+i_0} < d_1 \Leftrightarrow \widehat{d_0} < d_1 ,$$

isto é, a desigualdade que queremos justificar é equivalente à Desigualdade (5.5) da Hipótese (H4).

Portanto, toda a estrutura da Figura 5.4 fica justificada. Agora, vamos à análise de cada um dos sub-casos.

I) $0 < \tau_0 < pd_0$: De modo geral, $x \in X_1$, logo, vale o Lema 5.2.1, ou seja,

$$\tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 \Rightarrow d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 .$$

Daí, usando a hipótese do sub-caso e o fato que $pd_0 < d_0$, obtemos

$$0 < pd_0 - \tau_0 < d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 .$$

Consequentemente,

$$0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < \frac{1}{d_0 - \tau_0} < \frac{1}{pd_0 - \tau_0} . \quad (5.16)$$

Em particular, como $\mathcal{R}_1 < 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < \frac{1}{d_0 - \tau_0} < -\mathcal{R}_1 + \frac{1}{d_0 - \tau_0} &\Rightarrow 0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < -\mathcal{R}_1 + \frac{1}{d_0 - \tau_0} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{-\mathcal{R}_1 + \frac{1}{d_0 - \tau_0}} < \tau_1 - d_2 \\ &\Rightarrow \tau_1 - d_2 - \frac{1}{-\mathcal{R}_1 + \frac{1}{d_0 - \tau_0}} > 0 \\ &\Rightarrow \tau_1 - d_2 + \frac{1}{\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0}} > 0 \\ &\Rightarrow \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] > 0 , \end{aligned} \quad (5.17)$$

que é justamente a Condição (D1').

Analogamente, se focarmos na expressão

$$0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < \frac{1}{pd_0 - \tau_0}$$

da Desigualdade (5.16), somos capazes de ver que ela implica justamente na Condição (D2').

Por fim, focaremos na expressão

$$0 < \frac{1}{d_0 - \tau_0} < \frac{1}{pd_0 - \tau_0}$$

da Desigualdade (5.16). Daí, multiplicando por -1 e somando $\mathcal{R}_1 < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \frac{1}{\tau_0 - d_0} < 0 &\Rightarrow \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} < 0 \\ &\Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 \end{aligned}$$

Agora, somaremos o termo $\tau_1 - d_2$ nas expressões acima, o que manterá a ordenação. Porém, como as Condições (D1') e (D2') são válidas, após este processo, os termos serão positivos, ou seja,

$$0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0]$$

Consequentemente,

$$0 < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] ,$$

que é justamente a Desigualdade que faltava para garantirmos a validade da Condição (P1').

Portanto, para este sub-caso, a Condição (P1') é satisfeita.

II) $p \cdot d_0 \leq \tau_0 < d_0$: Tal qual no sub-caso acima, vale o Lema 5.2.1, ou seja,

$$\tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 \Rightarrow d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 .$$

Ademais, usando a hipótese do sub-caso, obtemos

$$pd_0 - \tau_0 \leq 0 < d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 . \quad (5.18)$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{pd_0 - \tau_0} \leq 0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < \frac{1}{d_0 - \tau_0} . \quad (5.19)$$

Assim, se focarmos na expressão

$$0 < \frac{1}{\tau_1 - d_2} < \frac{1}{d_0 - \tau_0}$$

da Desigualdade (5.19), validamos a Condição (D1') de modo idêntico ao feito no sub-caso anterior.

Agora, vamos verificar que a Condição (D2') é satisfeita. Para tanto, notemos que, pela hipótese do sub-caso e pela Figura 5.4, temos

$$\begin{aligned} 0 < pd_0 \leq \tau_0 < d_0 < pd_0 + \frac{d_1}{2} &\Rightarrow 0 < pd_0 \leq \tau_0 < pd_0 + \frac{d_1}{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Assim, temos dois cenários a serem considerados. São eles,

- $\tau_0 - pd_0 = 0$: Trivialmente, pela Observação 2.2.9, a Condição (D2') se reduz a

$$\tau_1 - d_2 > 0 ,$$

que segue da Desigualdade (5.18).

- $\tau_0 - pd_0 \neq 0$: Neste caso,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{2}{d_1} < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} &\Rightarrow -\frac{2}{d_1} + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} > 0 \Rightarrow \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} > 0 \\ &\Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] > 0 . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Daí, lembremos que, pela Desigualdade (5.18), $\tau_1 - d_2 > 0$. Logo,

$$\tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] > 0 ,$$

que é justamente a Condição (D2').

Dessa forma, em qualquer dos casos, a Condição (D2') é válida.

Por fim, vejamos que, ao longo da verificação da Condição (D1'), que é idêntica para os sub-casos trabalhados até o momento, temos a Desigualdade (5.17). Em particular,

$$0 < \frac{1}{-\mathcal{R}_1 + \frac{1}{d_0 - \tau_0}} \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0}} < 0 \Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < 0 .$$

Assim, unindo a expressão acima com a Desigualdade (5.21), obtemos

$$[\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < 0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] .$$

Agora, somaremos o termo $\tau_1 - d_2$ nas expressões acima, o que manterá a ordenação. Porém, como as Condições (D1') e (D2') são válidas, após este processo, os termos serão positivos, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] &< \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\ &\Rightarrow [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] , \end{aligned}$$

que é uma das desigualdades necessárias para a Condição (P1').

Desta forma, dos passos acima, concluímos que, para este sub-caso, a Condição (P1') é válida.

- III) $d_0 \leq \tau_0 < pd_0 + \frac{d_1}{2}$: Neste sub-caso, apesar do Lema 5.2.1 valer, não somos capazes de determinar o sinal da expressão $\tau_1 - d_2$, como fizemos nos sub-casos acima. Por este motivo, devemos analisar as situações abaixo.

- $\tau_1 - d_2 > 0$: Das hipóteses, segue que

$$d_0 - \tau_0 \leq 0 < \tau_1 - d_2 .$$

Daí, temos dois cenários a serem analisados. São eles,

- A. $d_0 - \tau_0 = 0$: Trivialmente, pela Observação 2.2.9, a Condição (D1') se reduz a

$$\tau_1 - d_2 > 0 ,$$

que segue da hipótese do presente item.

- B. $d_0 - \tau_0 < 0$: Então,

$$\tau_0 - d_0 > 0 .$$

Assim, usando que $p < 1$ e a hipótese do caso, obtemos

$$0 < \tau_0 - d_0 < \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} = -\frac{1}{\mathcal{R}_1}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 < \tau_0 - d_0 < -\frac{1}{\mathcal{R}_1} &\Rightarrow 0 < -\mathcal{R}_1 < \frac{1}{\tau_0 - d_0} \\ &\Rightarrow \mathcal{R}_1 < 0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} . \end{aligned}$$

Em particular,

$$\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} > 0 \Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] > 0 . \quad (5.22)$$

Além disso, lembremos que, por hipótese desde caso, também vale

$$\tau_1 - d_2 > 0 . \quad (5.23)$$

Com isso, das Equações (5.22) e (5.23), segue que

$$\tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] > 0 .$$

que é justamente a Condição (D1').

Desse modo, independente do caso, verificamos que a Condição (D1') é válida.

Além disso, da hipótese do sub-caso, temos

$$0 < d_0 < \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} \Rightarrow 0 < \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} ,$$

que é justamente a Desigualdade (5.20) do sub-caso (II) que garante a validade da Condição (D2').

Da mesma desigualdade acima, notemos que

$$\begin{aligned}
0 < \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} = -\frac{1}{\mathcal{R}_1} &\Rightarrow 0 < \tau_0 - pd_0 < -\frac{1}{\mathcal{R}_1} \\
&\Rightarrow 0 < -\mathcal{R}_1 < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} \\
&\Rightarrow \mathcal{R}_1 < 0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} \\
&\Rightarrow 0 < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - pd_0] .
\end{aligned}$$

Desta forma, utilizando o fato que $p < 1$ e a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
0 < \tau_0 - d_0 < \tau_0 - pd_0 &\Rightarrow 0 < [\tau_0 - pd_0] < [\tau_0 - d_0] \\
&\Rightarrow \mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - pd_0] < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - d_0] \\
&\Rightarrow 0 < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - pd_0] < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - d_0] .
\end{aligned}$$

Prosseguindo, usando que $\tau_1 - d_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - pd_0] < \mathcal{R}_1 + [\tau_0 - d_0] &\Rightarrow 0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\
&\Rightarrow 0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\
&\Rightarrow 0 < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] ,
\end{aligned}$$

que é precisamente a desigualdade que faltava para garantirmos que, quando $\tau_1 - d_2 > 0$, a Condição **(P1')** é válida.

- $\tau_1 - d_2 \leq 0$: Pela hipótese do sub-caso e usando que $p < 1$, obtemos

$$0 \leq \tau_0 - d_0 < \tau_0 - pd_0 < \frac{d_1}{2} . \quad (5.24)$$

Por outro lado, pelo Lema 5.2.1 e pela hipótese,

$$\tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 \Rightarrow d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 \leq 0 . \quad (5.25)$$

Em particular, da desigualdade acima, constatamos que $d_0 - \tau_0 < 0$. Consequentemente, $\tau_0 - d_0 \neq 0$. Daí, da Desigualdade (5.24), obtemos

$$\begin{aligned}
0 < \frac{2}{d_1} < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \frac{1}{\tau_0 - d_0} \\
&\Rightarrow 0 < -\frac{2}{d_1} + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < -\frac{2}{d_1} + \frac{1}{\tau_0 - d_0} \\
&\Rightarrow 0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \quad (5.27)$$

Com isso em mente, temos dois casos a serem considerados. São eles,

A. $\tau_1 - d_2 = 0$: Neste caso, podemos simplificar as Condições **(D1')** e **(D2')**. Assim, tais condições são validadas pela Desigualdade (5.27). Similarmente, simplificando a desigualdade da Condição **(P1')**, obtemos justamente a Desigualdade (5.26).

Portanto, a condição **(P1')** é válida.

B. $\tau_1 - d_2 < 0$: Assim, da Desigualdade (5.25), temos

$$0 < d_2 - \tau_1 < \tau_0 - d_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{1}{d_2 - \tau_1} .$$

Unindo a expressão acima com a Desigualdade (5.26), formulamos

$$0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{1}{d_2 - \tau_1} ,$$

pois $\mathcal{R}_1 < 0$. Prosseguindo,

$$\begin{aligned} 0 < d_2 - \tau_1 &< [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\ \Rightarrow 0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] &< \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\ \Rightarrow 0 < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] &< [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] . \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, somos capazes de verificar que a Condição **(P1')** é válida.

Portanto, em quaisquer dos casos, quando $\tau_1 - d_2 \leq 0$, a Condição **(P1')** é satisfeita.

De modo geral, da análise acima, constatamos que a Condição **(P1')** é atendida quando $p \cdot d_0 \leq \tau_0 < d_0$.

IV) $p \cdot d_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 < d_0 + \frac{d_1}{2}$: Da hipótese, segue que

$$p \cdot d_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 \Rightarrow 0 < \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 - pd_0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} \leq \frac{2}{d_1} = -\mathcal{R}_1$$

$$\Rightarrow 0 < -\mathcal{R}_1 - \frac{1}{\tau_0 - pd_0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < 0 .$$

Analogamente, da hipótese, obtemos

$$0 < \tau_0 < d_0 + \frac{d_1}{2} \Rightarrow 0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} .$$

Agrupando as desigualdades acima, formulamos

$$\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < 0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} \quad (5.28)$$

$$\Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] . \quad (5.29)$$

Assim, tal como no sub-caso anterior, devemos analisar três cenários. São eles,

- $\tau_1 - d_2 > 0$: Pela Desigualdade (5.29), temos

$$0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] \Rightarrow 0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] ,$$

que é justamente a Condição **(D1')**.

- $\tau_1 - d_2 = 0$: Trivialmente, a Condição **(D1')** se reduz a

$$0 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] ,$$

que é garantida pela Desigualdade (5.29).

- $\tau_1 - d_2 < 0$: Pelo Lema 5.2.1 e pela hipótese,

$$\begin{aligned} \tau_0 + \tau_1 > d_0 + d_2 &\Rightarrow d_0 - \tau_0 < \tau_1 - d_2 < 0 \\ &\Rightarrow 0 < d_2 - \tau_1 < \tau_0 - d_0 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{1}{d_2 - \tau_1} \end{aligned}$$

Daí, pela Desigualdade (5.28), segue que

$$0 < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{1}{d_2 - \tau_1} ,$$

pois $\mathcal{R}_1 < 0$. Prosseguindo,

$$0 < d_2 - \tau_1 < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] \Rightarrow 0 < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] ,$$

que é precisamente a Condição **(D1')**.

Logo, para qualquer um dos casos acima, a Condição **(D1')** é verificada.

Agora, vamos verificar que a Condição **(F2')** também é satisfeita. Para tanto, vejamos que, da hipótese, segue que

$$pd_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 \Rightarrow -\tau_0 \leq -pd_0 - \frac{d_1}{2} .$$

Por outro lado, como $x \in X_1$, da Hipótese (H4), vale que

$$\begin{aligned}
 \tau_0 + \tau_1 &< pd_0 + d_1 + qd_2 \Rightarrow \tau_1 < -\tau_0 + pd_0 + d_1 + qd_2 \\
 &\Rightarrow \tau_1 < \left(-pd_0 - \frac{d_1}{2}\right) + pd_0 + d_1 + qd_2 \\
 &\Rightarrow \tau_1 < \frac{d_1}{2} + qd_2 \\
 &\Rightarrow \tau_1 - qd_2 < \frac{d_1}{2} .
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Daí, temos que analisar duas situações, a saber,

- $\tau_1 - qd_2 \leq 0$: Pela Desigualdade (5.29), temos

$$[\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 \Rightarrow \tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 ,$$

que é justamente a Condição (F2').

- $\tau_1 - qd_2 > 0$: Então, pela Desigualdade (5.30), temos

$$\begin{aligned}
 0 < \tau_1 - qd_2 < \frac{d_1}{2} &\Rightarrow 0 < \frac{2}{d_1} < \frac{1}{\tau_1 - qd_2} \\
 &\Rightarrow 0 < -\mathcal{R}_1 < \frac{1}{\tau_1 - qd_2} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 < 0 .
 \end{aligned}$$

Por outro lado, da hipótese, segue que

$$\begin{aligned}
 pd_0 + \frac{d_1}{2} &\leq \tau_0 \Rightarrow pd_0 - \tau_0 \leq -\frac{d_1}{2} < 0 \\
 &\Rightarrow -\frac{2}{d_1} \leq \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0 \\
 &\Rightarrow \mathcal{R}_1 \leq \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0 .
 \end{aligned}$$

Unindo as duas expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 \leq \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0 &\Rightarrow \frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 - \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < 0 \\
 &\Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < qd_2 - \tau_1 < 0 \\
 &\Rightarrow \tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 ,
 \end{aligned}$$

que é precisamente a Condição (F2').

Destarte, da análise acima, as Condições **(D1')** e **(F2')** são sempre satisfeitas. Equivalentemente, vale a Condição **(P2')**.

V) $d_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 < d_0 + d_1$: Da hipótese, segue que

$$\begin{aligned} d_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 &\Rightarrow 0 < \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 - d_0 < \tau_0 - pd_0 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{2}{d_1} = -\mathcal{R}_1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < -\mathcal{R}_1 - \frac{1}{\tau_0 - d_0} < -\mathcal{R}_1 - \frac{1}{\tau_0 - pd_0} \\ &\Rightarrow 0 < -\left(\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - d_0}\right) < -\left(\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_0 - pd_0}\right) \\ &\Rightarrow 0 < -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Em particular,

$$\begin{aligned} -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] &\Rightarrow [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\ &\Rightarrow \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < \tau_1 - d_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] \\ &\Rightarrow [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < [\tau_1 - d_2, \mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] , \end{aligned}$$

que é uma das desigualdades necessárias para a Condição **(P1')**. Agora, com o intuito de validarmos tal condição por completo, consideremos os seguintes cenários.

- $\tau_1 - qd_2 \leq 0$: Então, da Desigualdade (5.32), temos

$$\tau_1 - qd_2 \leq 0 < -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < -[\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0]$$

Consequentemente,

$$\tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < 0 \quad \text{e} \quad \tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 ,$$

que são justamente as Condições **(F1')** e **(F2')**.

- $\tau_1 - qd_2 > 0$: Da hipótese, segue que

$$\begin{aligned} d_0 + \frac{d_1}{2} \leq \tau_0 &\Rightarrow -\tau_0 \leq -d_0 - \frac{d_1}{2} < -pd_0 - \frac{d_1}{2} \\ &\Rightarrow -\tau_0 < -pd_0 - \frac{d_1}{2} . \end{aligned}$$

Com a desigualdade acima verificada, a fim de provarmos as condições desejadas neste caso, basta fazermos um processo análogo à verificação da Condição **(F2')** no sub-caso anterior, em que $\tau_1 - qd_2 > 0$.

Deste modo, como $x \in X_1$, da Hipótese **(H4)**, vale que

$$\tau_0 + \tau_1 < pd_0 + d_1 + qd_2 \Rightarrow \tau_1 - qd_2 < \frac{d_1}{2} .$$

Junto da hipótese deste item, obtemos

$$0 < \tau_1 - qd_2 < \frac{d_1}{2} \Rightarrow \frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 < 0 .$$

Ademais, da Desigualdade (5.31) segue que

$$0 < \frac{1}{\tau_0 - pd_0} < \frac{1}{\tau_0 - d_0} < \frac{2}{d_1} = -\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_1 < \frac{1}{d_0 - \tau_0} < \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0$$

Das desigualdades acima, formulamos

$$\frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 < \frac{1}{d_0 - \tau_0} < 0 \Rightarrow \tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - d_0] < 0 ,$$

que é precisamente a Condição **(F1')**. Analogamente, comprovamos a validade da Condição **(F2')**. De fato,

$$\frac{1}{qd_2 - \tau_1} < \mathcal{R}_1 < \frac{1}{pd_0 - \tau_0} < 0 \Rightarrow \tau_1 - qd_2 + [\mathcal{R}_1, \tau_0 - pd_0] < 0 .$$

Portanto, da análise acima, concluímos que a Condição **(P1')** é satisfeita.

Destarte, em cada um dos cinco itens acima, verificamos a validade ou da Condição **(P1')** ou da Condição **(P2')**, como queríamos. Consequentemente, pelo argumento inicial, para todo $x \in X_1$, a proposição é válida.

- c. $x \in X_2$: Neste caso, pela definição de X_2 , temos $i_1(x) = i_2(x) = 0$. Além disso, pela Hipótese **(H5)**, vale

$$\tau_0 \leq \frac{d_1}{2} .$$

Consequentemente, como $d_0 > 0$ e $p < 1$, temos

$$\tau_0 < pd_0 + \frac{d_1}{2} . \quad (5.33)$$

Agora, recordemos da ordenação provida pela Figura 5.4. Esta ordenação foi fortemente utilizada no item anterior. Contudo, ela não é totalmente válida para este caso, visto que a desigualdade

$$d_0 < pd_0 + \frac{d_1}{2}$$

foi obtida através de uma hipótese quando $x \in X_1$. Contudo, ainda vale

$$pd_0 + \frac{d_1}{2} < d_0 + \frac{d_1}{2} , \quad (5.34)$$

pois $p < 1$.

Logo, das Desigualdades (5.33) e (5.34), constatamos que τ_0 deve pertencer, no máximo, aos casos (I), (II) ou (III). Porém, para a validação destes itens no caso anterior, não usamos nenhuma hipótese que não é válida para o presente caso, ou seja, podemos reutilizar os argumentos passados.

Portanto, a Condição (P1') é válida sempre que $x \in X_1$. Consequentemente, pelo argumento inicial, para todo $x \in X_2$, a proposição é válida.

Destarte, para cada um dos tópicos analisados acima, provamos que μ_M -quase todo ponto $x \in M$ satisfaz ou a Condição (P1') ou a Condição (P2'). Por este motivo, pelo argumento apresentado inicialmente, a proposição é válida para μ_M -quase todo ponto $x \in M$. ■

5.3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Finalmente, nesta seção apresentaremos nossos resultados principais, prometidos desde a introdução do trabalho. Logo de início, assumidas as hipóteses adequadas, provaremos a hiperbolicidade do bilhar no limão assimétrico.

Teorema 5.3.1. *Seja $\mathcal{Q}(b, r)$ uma mesa de bilhar no limão assimétrico que satisfaz as Hipóteses (H1)-(H2)-(H3)-(H4)-(H5). Então, o bilhar $\mathcal{Q}(b, r)$ é hiperbólico.*

Demonstração: Seja $x \in M \setminus \mathcal{S}_\infty$. Lembremos que, pela Proposição 3.2.6, temos $\mu(\mathcal{S}_\infty) = 0$. Em especial, $\mu_M(\mathcal{S}_\infty) = 0$. Dessa forma, para todo $n \geq 1$, os vetores

$$v_n^p(x) = DF^n(v_{F^{-n}(x)}^p) \quad \text{e} \quad v_n^d(x) = DF^n(v_{F^{-n}(x)}^d)$$

estão bem definidos. Em particular, notemos que $(v_n^p(x))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n^d(x))_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de vetores em $T_x \mathcal{M}$.

Com isso em mente, provaremos as afirmações a seguir.

• **Afirmação 1:** A sequência real $(\mathcal{B}(v_{F^{-n}(x)}^p))_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada inferiormente por 0.

De fato, aplicando a Proposição 5.2.9 nos pontos $F^{-1}(x)$ e $F^{-2}(x)$, temos, respectivamente,

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-1}(x)}^p)) \quad \text{e} \quad 0 = \mathcal{B}(v_{F^{-1}(x)}^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-2}(x)}^p)) .$$

Daí, aplicando o Teorema 3.3.5 na segunda desigualdade, obtemos

$$\mathcal{B}(DF(v_{F^{-1}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^2(v_{F^{-2}(x)}^p)) .$$

Logo, das desigualdades acima, segue que

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-1}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^2(v_{F^{-2}(x)}^p)) .$$

Agora, suponhamos que a afirmativa seja válida para $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-1}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^2(v_{F^{-2}(x)}^p)) < \dots < \mathcal{B}(DF^k(v_{F^{-k}(x)}^p)) .$$

Provaremos que a afirmativa também valerá para $k + 1$. Com efeito, aplicando a Proposição 5.2.9 no ponto $F^{-(k+1)}(x)$, temos

$$0 = \mathcal{B}(v_{F^{-k}(x)}^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-(k+1)}(x)}^p)) ,$$

Assim, aplicando o Teorema 3.3.5, obtemos

$$\mathcal{B}(DF^k(v_{F^{-k}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^{k+1}(v_{F^{-(k+1)}(x)}^p)) .$$

Portanto, usando a hipótese de indução, constatamos que a afirmativa também é válida para $k + 1$. Consequentemente, pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que a afirmação é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-1}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^2(v_{F^{-2}(x)}^p)) < \dots < \mathcal{B}(DF^n(v_{F^{-n}(x)}^p)) < \dots$$

Equivalentemente,

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \mathcal{B}(v_1^p(x)) < \mathcal{B}(v_2^p(x)) < \dots < \mathcal{B}(v_n^p(x)) < \dots ,$$

como queríamos mostrar.

• **Afirmção 2:** A sequência real $(\mathcal{B}(v_{F^{-n}(x)}^d))_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada superiormente por $\frac{1}{d(x)}$.

Como a prova desta afirmação é completamente análoga à feita acima, omitiremos tal justificativa. Apesar disso, ressaltamos seu resultado, ou seja,

$$\dots < \mathcal{B}(v_n^d) < \dots < \mathcal{B}(v_2^d(x)) < \mathcal{B}(v_1^d(x)) < \mathcal{B}(v_x^d) = \frac{1}{d(x)} .$$

• **Afirmção 3:** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(v_n^p) < \mathcal{B}(v_n^d)$.

Realmente, aplicando a Proposição 5.2.9 no ponto $F^{-n}(x)$, temos

$$\mathcal{B}(DF(v_{F^{-n}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF(v_{F^{-n}(x)}^d)) .$$

Logo, pelo Teorema 3.3.5, segue que

$$\mathcal{B}(DF^n(v_{F^{-n}(x)}^p)) < \mathcal{B}(DF^n(v_{F^{-n}(x)}^d)) \Rightarrow \mathcal{B}(v_n^p) < \mathcal{B}(v_n^d) .$$

• **Afirmção 4:** A aplicação F é hiperbólica.

Com efeito, combinando as afirmações acima, segue que

$$0 = \mathcal{B}(v_x^p) < \dots < \mathcal{B}(v_n^p(x)) < \mathcal{B}(v_n^d) < \dots < \mathcal{B}(v_x^d) = \frac{1}{d(x)} ,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Em particular, quando tomamos $n \rightarrow \infty$, concluímos que a sequência $(\mathcal{B}(v_{F^{-n}(x)}^d))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, visto que é decrescente e limitada inferiormente². Logo, existe $\mathcal{B}^u(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{B}^u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(v_n^d(x)) \quad , \quad \text{com} \quad 0 < \mathcal{B}^u(x) < \frac{1}{d(x)} .$$

Naturalmente, atrelado ao valor de curvatura $\mathcal{B}^u(x)$, existe um vetor $v_x^u \in T_x\mathcal{M}$ de modo que $\mathcal{B}^u(x) = \mathcal{B}(v_x^u)$. Assim, pelo argumento apresentado na Seção 3.3, segue que

$$E_x^u = \langle v_x^u \rangle \subset T_x\mathcal{M} \quad \text{e} \quad E_x^s = \langle v_x^s \rangle \subset T_x\mathcal{M} ,$$

em que $v_x^s = D\mathcal{I}(v_{\mathcal{I}(x)}^u)$. Consequentemente, no ponto x , a aplicação F é hiperbólica. Contudo, como tomamos $x \in M \setminus \mathcal{S}_\infty$, tal afirmação é válida para μ_M -quase todo ponto. Consequentemente, F é hiperbólica.

Agora, basta provarmos que $\mathcal{F}$, a aplicação de colisão original, também é hiperbólica. Para tanto, basta mostrarmos que μ -quase todo $x \in \mathcal{M}$ admite um expoente de Lyapunov $\chi^+(\mathcal{F}, x) > 0$. Consequentemente, pelo Lema 3.3.2, também existirá $\chi^-(\mathcal{F}, x) < 0$. Daí, pela Definição 2.6.12, garantimos que $\mathcal{F}$ é hiperbólica.

A fim de provarmos a existência de $\chi^+(\mathcal{F}, x)$, seguiremos outra sequência de afirmações.

• **Afirmção 1:** O tempo de primeiro retorno $\xi_M(x) = i_0 + i_1 + i_2 + 2$ associado a F é integrável.

Realmente, lembremos que (M, F, μ_M) é uma aplicação induzida sobre $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu)$. Por outra perspectiva, segue que $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu)$ é uma suspensão discreta sobre (M, F, μ_M) com tempo $\xi_M(x) = i_0 + i_1 + i_2 + 2$. Daí, pelo Corolário 2.6.7, obtemos

$$\int_M \xi_M(x) d\mu_M < \infty ,$$

² Uma afirmação similar pode ser feita para a sequência $(\mathcal{B}(v_{F^{-n}(x)}^p))_{n \in \mathbb{N}}$.

como afirmarmos.

• **Afirmção 2:** O tempo de retorno médio $\bar{\xi}(x)$ existe, para μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, $2 \leq \bar{\xi}(x) < \infty$.

Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\xi_k(x) = \xi_M(x) + \dots + \xi_M(F^{k-1}(x)) = \sum_{j=0}^{k-1} \xi_M(\mathcal{F}^j(x)) .$$

Então, como ξ_M é integrável, pelo Teorema 2.6.8, para μ -quase todo ponto $x \in M$, o tempo médio de retorno existe, isto é, o limite

$$\bar{\xi}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \xi_M(\mathcal{F}^j(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k(x)}{k} < \infty ,$$

para μ -quase todo ponto $x \in M$. Em particular, como $\xi_M(x) \geq 2$, temos $\xi_k(x) \geq 2k$. Daí,

$$\bar{\xi}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k(x)}{k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{k} = 2 .$$

Portanto,

$$2 \leq \bar{\xi}(x) < \infty .$$

• **Afirmção 3:** Fixado $x \in M$ arbitrário, que satisfaça as condições anteriores, vale $\mathcal{F}^{\xi_k(x)}(x) = F^k(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, é claro que

$$\mathcal{F}^{\xi_1(x)}(x) = \mathcal{F}^{\xi_M(x)}(x) = F(x) .$$

Agora, suponhamos que a afirmativa seja válida para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, ou seja, $\mathcal{F}^{\xi_k(x)}(x) = F^k(x)$. Então, provaremos que também será válida para $k+1$. Realmente, pois

$$\xi_{k+1}(x) = \xi_M(x) + \dots + \xi_M(F^{k-1}(x)) + \xi_M(F^k(x)) = \xi_k(x) + \xi_M(F^k(x)) .$$

Daí,

$$\mathcal{F}^{\xi_{k+1}(x)}(x) = \mathcal{F}^{\xi_k(x) + \xi_M(F^k(x))}(x) = \mathcal{F}^{\xi_M(F^k(x))}(\mathcal{F}^{\xi_k(x)}(x)) = \mathcal{F}^{\xi_M(F^k(x))}(F^k(x)) ,$$

em que usamos a hipótese de indução. Finalmente, pela definição do tempo de retorno, temos

$$\mathcal{F}^{\xi_{k+1}(x)}(x) = \mathcal{F}^{\xi_M(F^k(x))}(F^k(x)) = F^{k+1}(x) ,$$

como queríamos demonstrar.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmativa é válida para todo $k \in \mathbb{N}$.

• **Afirmção 4:** Existe $\chi^+(\mathcal{F}, x) > 0$, para μ -quase todo ponto $x \in M$.

Realmente, pelo Teorema 3.3.1, para μ -quase todo ponto $x \in M$, o limite

$$\chi(\mathcal{F}, x, v_x^u) = \chi^+(\mathcal{F}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln \|D_x \mathcal{F}^n(v_x^u)\|$$

existe, em que $v_x^u \in T_x \mathcal{M}$ é o vetor obtido ao longo da prova da hiperbolicidade da aplicação F . Equivalentemente, podemos pensar que a sequência $\left(\frac{1}{n} \cdot \ln \|D_x \mathcal{F}^n(v_x^u)\| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\chi^+(\mathcal{F}, x)$.

Consequentemente, a subsequência $\left(\frac{1}{\xi_k(x)} \cdot \ln \|D_x \mathcal{F}^{\xi_k(x)}(v_x^u)\| \right)_{k \in \mathbb{N}}$ também deve convergir para $\chi^+(\mathcal{F}, x)$, isto é,

$$\chi^+(\mathcal{F}, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k(x)} \cdot \ln \|D_x \mathcal{F}^{\xi_k(x)}(v_x^u)\|.$$

Daí, utilizando a afirmação anterior e as definição de tempo médio de retorno e expoente de Lyapunov, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k(x)} \cdot \ln \|D_x \mathcal{F}^{\xi_k(x)}(v_x^u)\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k(x)} \cdot \ln \|D_x F^k(v_x^u)\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\xi_k(x)} \cdot \frac{1}{k} \cdot \ln \|D_x F^k(v_x^u)\| \\ &= \frac{1}{\bar{\xi}(x)} \cdot \chi^+(F, x). \end{aligned}$$

Logo, como $\chi^+(F, x) > 0$ e $2 \leq \bar{\xi}(x) < \infty$, segue das expressões acima que

$$\chi^+(\mathcal{F}, x) = \frac{1}{\bar{\xi}(x)} \cdot \chi^+(F, x) > 0.$$

Portanto, para μ -quase todo $x \in M$, a aplicação $\mathcal{F}$ admite um expoente de Lyapunov positivo.

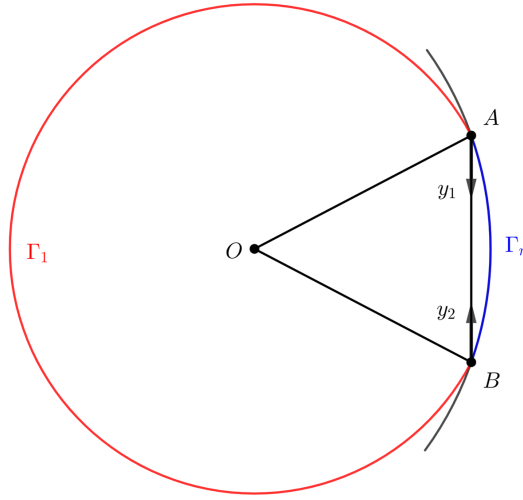
Destarte, pelo argumento enunciado anteriormente, da existência de um expoente de Lyapunov de $\mathcal{F}$ em x positivo, para μ -quase todo ponto $x \in M$, concluímos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação hiperbólica, como queríamos demonstrar. ■

Com o resultado anterior, finalmente provamos que, sob as hipóteses estabelecidas ao longo do trabalho, o bilhar $\mathcal{Q}(b, r)$ é realmente hiperbólico. Contudo, como as condições impostas são um tanto quanto técnicas, vale nos questionarmos sobre as condições

geométricas que uma mesa $\mathcal{Q}(b, r)$ deve possuir para que as hipóteses (H1)-(H5), sejam satisfeitas. Apresentar um resultado que trate deste assunto é justamente o objetivo final deste trabalho.

Para alcançarmos o objetivo acima, precisaremos construir um conjunto especial. Com isso em mente, consideremos $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$ os pontos do espaço de fase do bilhar que movem-se ao longo da corda AB , a saber, $y_1 = \overrightarrow{AB}$ e $y_2 = \overrightarrow{BA}$, como representamos na Figura 5.5 abaixo.

Figura 5.5 – Representação visual de y_1 e y_2 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Da imagem acima, fica claro que $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$, visto que partem dos vértices da mesa. Com isso em mente, consideremos $U_j \subset \mathcal{M}$ uma vizinhança de y_j , para $j \in \{1, 2\}$. Assim, temos a proposição a seguir.

Proposição 5.3.2. *Seja $\mathcal{Q}(b, r)$ a mesa do bilhar no limão assimétrico, com $|AB| < 1$, em que $|AB|$ é o comprimento do segmento AB . Então, dado $x \in U_j \cap (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1))$, temos*

- a. $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}_r$, em que $\mathcal{F}(x)$ permanece em $\mathcal{M}_r$ após $i_1 = \eta(\mathcal{F}(x))$ colisões.
- b. $\mathcal{F}^{i_1+2}(x) \in \mathcal{M}_n$, para algum $n \geq 5$.

Demonstração: Antes de provarmos os itens acima, exploraremos a hipótese $|AB| < 1$. Vamos encarar o segmento AB como uma corda do disco D_1 , com centro O , que compõe $\mathcal{Q}(b, r)$. Então,

$$|AB| < 1 \Rightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{3},$$

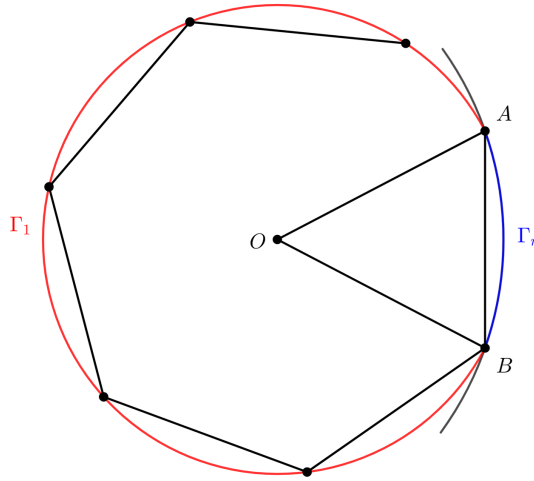
em que $\alpha = \angle AOB$. Em particular, como estamos trabalhando em uma circunferência unitária, o arco menor $\widehat{AB}$ de D_1 possui a mesma medida de $\angle AOB$. Consequentemente, o comprimento deste arco também será limitado da forma acima.

Daí, consideremos n^* a parte inteira³ da razão entre os comprimentos de D_1 e do arco $\widehat{AB}$, isto é,

$$n^* = \left\lfloor \frac{2\pi}{\angle AOB} \right\rfloor \geq 6,$$

em que usamos a limitação acima. Logo, o disco D_1 sempre é dividido em, no mínimo, 6 partes iguais a $\widehat{AB}$. Consequentemente, a componente Γ_1 de $\mathcal{Q}(b, r)$ é dividida em, no mínimo, 5 partes iguais a $\widehat{AB}$. De fato, pois uma das partes da divisão em questão é justamente substituída pela componente Γ_r , restando $n^* - 1 \geq 5$ partes para a componente Γ_1 . A situação descrita acima é ilustrada na Figura 5.6 abaixo.

Figura 5.6 – Divisão da mesa $\mathcal{Q}(b, r)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Com as questões acima trabalhadas, vamos à prova dos itens do enunciado.

- Por hipótese, $x \in U_i \cap (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1))$. Em particular, $x \in \mathcal{M}_1$ e $x \notin \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1)$, ou seja, $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}(x) \notin \mathcal{M}_1$. Equivalentemente, $x \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}_r$. Além disso, é claro que $\mathcal{F}(x)$ permanece em $\mathcal{M}_r$ após $i_1 = \eta(\mathcal{F}(x))$ colisões, visto que segue diretamente da definição do tempo de primeira saída η .
- Pelo item anterior, é claro que $\mathcal{F}^{i_1+2}(x) \in \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{i_2+1}(x)) = \mathcal{F}^{i_1+1}(x) \in \mathcal{M}_r$. Logo, a fim de mostrarmos a afirmação, basta provarmos que $\eta(\mathcal{F}^{i_1+1}(x)) \geq 5$. Para tanto, observemos as primeiras colisões da órbita do ponto y_1 no disco D_1 , que é

³ Como estamos trabalhando apenas com números positivos, usamos a equivalência entre a função piso e a parte inteira de um número.

justamente os pontos que realizam a divisão de Γ_1 , como representamos na Figura 5.6.

Daí, sem perda de generalidade, suponhamos $x \in U_1 \cap (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1))$. Consequentemente, a trajetória de sua órbita com a menor quantidade possível de colisões em Γ_1 deve “sombrear” a trajetória da órbita de y_1 em D_1 . Dessa forma, garantimos que $\eta(\mathcal{F}^{i_1+1}(x)) \geq 5$, como queríamos. De modo análogo, o argumento segue para $x \in U_2 \cap (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1))$, o que conclui a demonstração da proposição. ■

A partir da proposição acima, que trata das propriedades da vizinhança U_j de y_j , definimos o conjunto

$$U = (U_1 \cup U_2) \cap (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_1)) ,$$

que, de certo modo, herda as propriedades mencionadas acima. Em especial, observemos que os estados pertencentes a U estão tão próximos dos vértices A e B quanto gostaríamos (basta considerarmos U_1 e U_2 suficientemente pequenos) e apontam para a componente Γ_r , com direção também tão próxima quanto gostaríamos da direção vertical da corda AB .

Agora, apresentamos o lema abaixo, que será de grande relevância na demonstração do nosso último resultado.

Lema 5.3.3. *Sejam $x \in M$ e $d_1 \leq 4$. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $r_0 = r(\varepsilon) > 5$ tal que, para qualquer $r \geq r_0$, valem as seguintes afirmações:*

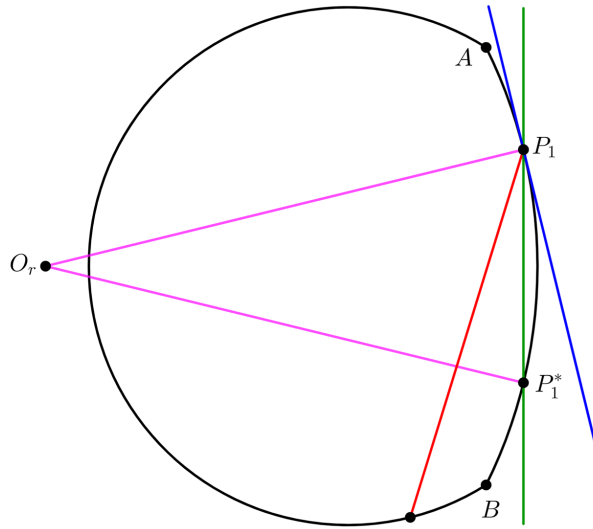
- a. $\mathcal{F}^{i_0}(x) \in U$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x) \in \bigcup_{n \geq 5} M_n$;
- b. Os pontos de colisão associados a $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$, ambos em Γ_1 , estão ε -próximos dos vértices $\{A, B\}$.
- c. O comprimento total da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$ é limitado superiormente por $|AB| + \varepsilon$.

Demonstração: Antes de partirmos para a prova dos itens acima, examinaremos o cenário a seguir. Seja $x \in M$, então, pela notação definida anteriormente, $x_1 = \mathcal{F}^{i_0+1}(x) \in \mathcal{M}_r$. Daí, seja P_1 o ponto de reflexão de x_1 . Com isso em mente, tracemos a trajetória de x_1 , a reta tangente a Γ_r no ponto P_1 e a reta vertical que passa por P_1 . Todas estas retas estão representadas na Figura 5.7, dadas pelas cores vermelha, azul e verde, respectivamente. Além disso, considerando O_r o centro do disco D_r , tracemos a reta $O_r P_1$ representada pela cor rosa na figura supracitada.

Naturalmente, a reta vertical traçada corta a componente em Γ_r em outro ponto além de P_1 , o qual denominaremos por P_1^* . Observemos que o arco $\widehat{P_1 P_1^*} \subset \widehat{AB}$. Logo,

$$|P_1 P_1^*| < |AB| < 1 .$$

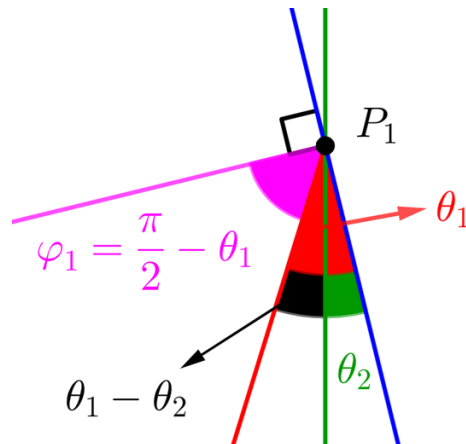
Figura 5.7 – Representação da situação descrita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Com a figura acima em mente, consideremos θ_1 o ângulo entre a reta tangente e a trajetória de x_1 . Similarmente, consideremos θ_2 o ângulo entre a reta tangente e a reta vertical. Ambos os ângulos estão representados na Figura 5.8, que, desconsiderando alguns elementos, apresenta um “zoom” no ponto P_1 . Os outros ângulos representados na figura são facilmente obtidos quando lembramos que a direção radial é perpendicular à reta tangente traçada.

Figura 5.8 – Zoom no Ponto P_1 , a partir da Figura 5.7.



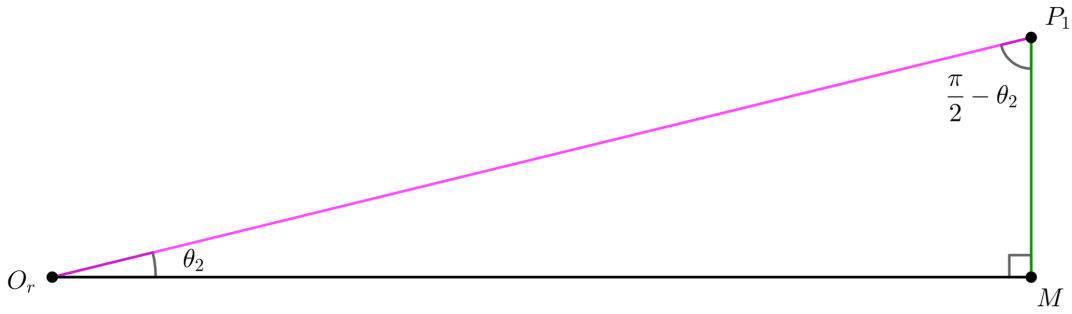
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Notemos que, pela Observação 4.2.3, temos

$$\begin{aligned} d_1 \leq 4 &\Rightarrow r \cos \varphi_1 \leq 4 \Rightarrow r \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \leq 4 \Rightarrow r \sin \theta_1 \leq 4 \\ &\Rightarrow \sin \theta_1 \leq \frac{4}{r} . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Agora, consideremos M o ponto médio do segmento $P_1P_1^*$. Assim, obtemos o triângulo O_rMP_1 , representado na Figura 5.9, cujos ângulos são completados seguindo as informações anteriores.

Figura 5.9 – Triângulo O_rMP_1 , obtido a partir da Figura 5.7.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Desse modo,

$$\sin \theta_2 = \frac{|P_1M|}{r} \Rightarrow |P_1M| = r \sin \theta_2 .$$

Consequentemente,

$$|P_1P_1^*| = 2|P_1M| = 2r \sin \theta_2 .$$

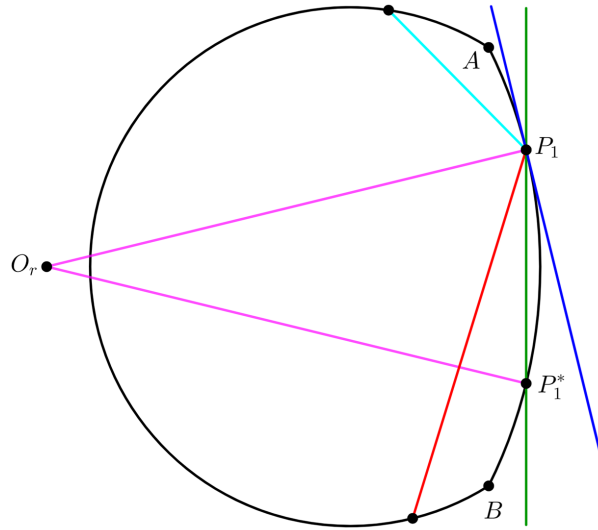
Em particular,

$$\begin{aligned} |P_1P_1^*| < 1 &\Rightarrow 2r \sin \theta_2 < 1 \\ &\Rightarrow \sin \theta_2 < \frac{1}{2r} . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Com a construção acima em mente, vamos à prova de cada um dos itens do lema.

- a. Partindo da Figura 5.7, tracemos a reta que representa a trajetória de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ até $x_1 = \mathcal{F}^{i_0+1}(x)$, representada pela cor ciano, obtendo a figura 5.10 abaixo.

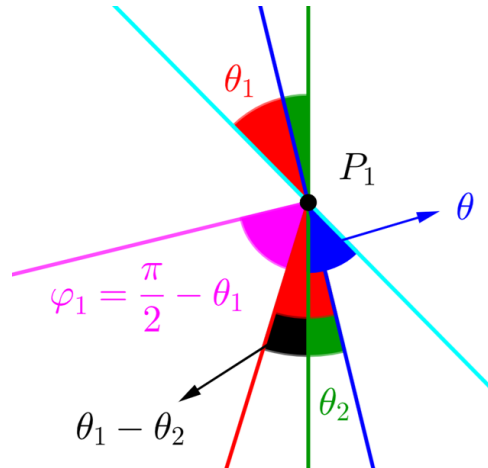
Figura 5.10 – Representação da situação descrita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Denotemos por θ o ângulo entre a reta vertical e a trajetória traçada. A fim de calcularmos θ , tal como fizemos na Figura 5.8, construímos a Figura 5.11 abaixo, em que consideramos a trajetória mencionada acima e, para preencher os ângulos, usamos a relação de ângulos opostos pelo vértice e também que, no bilhar, os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Daí, constatamos que $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Figura 5.11 – Zoom no Ponto P_1 , a partir da Figura 5.10.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Para obtermos o resultado acima, seguimos as imagens disponibilizadas. Contudo, a depender da posição relativa entre a reta vertical e a reta tangente a Γ_r em P_1 , também é possível que $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Portanto,

$$\theta = \theta_1 \pm \theta_2 .$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{sen} \theta| &= |\operatorname{sen}(\theta_1 \pm \theta_2)| = |\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \pm \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1| \\
 &\leq |\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2| + |\operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1| \\
 &= |\operatorname{sen} \theta_1| \cdot |\cos \theta_2| + |\operatorname{sen} \theta_2| \cdot |\cos \theta_1| .
 \end{aligned}$$

Mais que isso, como $|\cos \theta_1|, |\cos \theta_2| \in [0, 1]$, segue que,

$$|\operatorname{sen} \theta| \leq |\operatorname{sen} \theta_1| + |\operatorname{sen} \theta_2| \quad (5.37)$$

Assim, usando as Desigualdades (5.35) e (5.36), obtemos

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{sen} \theta| &\leq |\operatorname{sen} \theta_1| + |\operatorname{sen} \theta_2| \leq \frac{4}{r} + \frac{1}{2r} = \frac{9}{2r} < \frac{10}{2r} = \frac{5}{r} \\
 \therefore |\operatorname{sen} \theta| &< \frac{5}{r} .
 \end{aligned}$$

Portanto, para r suficientemente grande, θ se aproxima de 0, isto é, a direção da trajetória de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ se aproxima da direção vertical. Por consequência, concluímos que $\mathcal{F}^{i_0}(x) \in U$. Daí, pela Proposição 5.3.2, segue que $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x) \in \bigcup_{n \geq 5} M_n$.

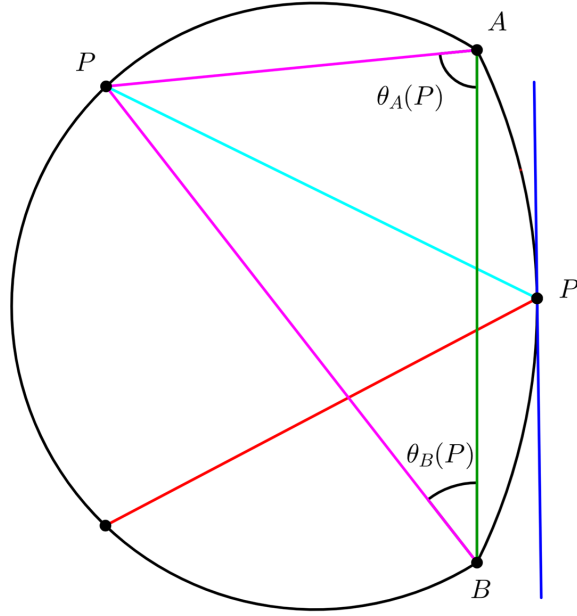
- b. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\Lambda \subset \Gamma_1$ o conjunto dos pontos em Γ_1 que estão ε -próximos dos vértices $\{A, B\}$. Tomemos $x \in M$ tal que $i_0(x) = 0$ e $P \in \Gamma_1 \setminus \Lambda$ seja seu ponto de reflexão. Assim, consideremos $\theta_A(P)$ o ângulo entre o segmento AP e a reta vertical. Analogamente, definimos $\theta_B(P)$. Desse modo, seja

$$\theta_m = \min_{P \in \Gamma_1 \setminus \Lambda} \{\theta_A(P), \theta_B(P)\} .$$

Observemos que $\theta_A(P)$ e $\theta_B(P)$ são funções contínuas definidas em um conjunto compacto, já que Λ é aberto. Logo, pelo Teorema de Weierstrass, segue que θ_m está bem definido.

Como $i_0(x) = 0$, temos $\mathcal{F}(x) = x_1 \in \mathcal{M}_r$. Denotemos por P_1 o ponto de reflexão x_1 . Geometricamente, temos o cenário representado na Figura 5.12 abaixo.

Figura 5.12 – Representação da situação descrita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Daí, de modo similar ao que fizemos anteriormente, focando nossa análise no ponto P_1 e usando a propriedade de colisão regular do bilhar, constatamos que o ângulo entre o segmento PP_1 e a reta vertical é igual a $\beta = \theta_1 \pm \theta_2$, em que, novamente, o sinal depende da posição relativa entre a reta vertical e a reta tangente a Γ_r no ponto de colisão.

Observemos que, se $P_1 = A$, então $\beta = \theta_A(P)$. Analogamente, se $P_1 = B$, então $\beta = \theta_B(P)$. Ademais, podemos perceber que, ao variarmos a posição de P_1 entre A e B , os valores de β são sempre maiores do que os valores de $\theta_A(P)$ e $\theta_B(P)$. Logo, é válido que

$$\theta_m = \min_{P \in \Gamma_1 \setminus \Lambda} \{\theta_A(P), \theta_B(P)\} \leq \beta = \theta_1 \pm \theta_2 .$$

Agora, relembremos que todos estes ângulos são agudos, devido às suas respectivas definições. Consequentemente, a função seno é crescente no domínio analisado. Assim,

$$\theta_m \leq \theta_1 \pm \theta_2 \Rightarrow \text{sen } \theta_m \leq \text{sen}(\theta_1 \pm \theta_2) . \quad (5.38)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_1 \pm \theta_2) &= \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \pm \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \\ &\leq \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \\ &\leq \text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 , \end{aligned} \quad (5.39)$$

em que usamos fortemente o fatos de θ_1 e θ_2 serem ângulos agudos.

Desta forma, substituindo a Desigualdade (5.39) na Desigualdade (5.38), segue que

$$\begin{aligned} \sin \theta_m &\leq \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \\ \Rightarrow \sin \theta_1 &\geq \sin \theta_m - \sin \theta_2 \geq \sin \theta_m - \frac{1}{2r} \\ \therefore \sin \theta_1 &\geq \sin \theta_m - \frac{1}{2r}, \end{aligned}$$

em que usamos a Desigualdade (5.36)

Finalmente, usando a última expressão junto com a hipótese $d_1 \leq 4$, concluímos que

$$\begin{aligned} 4 \geq d_1 = r \sin \theta_1 &\geq r \cdot \left(\sin \theta_m - \frac{1}{2r} \right) = r \sin \theta_m - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow r &\leq \frac{9}{2 \sin \theta_m} < \frac{5}{\sin \theta_m}. \end{aligned}$$

Portanto, para que P esteja ε distante ou de A ou de B , concluímos que $r < \frac{5}{\sin \theta_m}$. Consequentemente, para que P esteja ε -próximo ou de A ou de B , como queremos, devemos ter $r \geq \frac{5}{\sin \theta_m}$. Em particular, notemos que $r_0 \geq 5$, como afirmamos no enunciado do lema.

- c. Seja $r \geq 5$, então, pelo item anterior, segue que $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$ estão ε -próximos dos vértices $\{A, B\}$. Dessa forma, como Γ_r possui curvatura tão pequena quanto gostaríamos, bastando tomar r suficientemente grande, concluímos que o comprimento da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$ é tão próxima de $|AB|$ quanto queremos, o que prova o presente item.

■

Observação 5.3.4. Para o lema acima, uma hipótese suficiente seria $d_1 \leq 2|AB|$. Contudo, a fim de facilitarmos os cálculos, extrapolamos tal valor. Apesar disso, como esta parte do trabalho visa mostrar a existência de mesas que satisfaçam as hipóteses da hiperbolicidade, tal extrapolação não é mal vista.

Finalmente, enunciaremos e provaremos nosso segundo resultado central.

Teorema 5.3.5. *Seja Γ_1 um arco maior de um disco unitário tal que seus bordos A e B satisfazem $|AB| < 1$. Então, existe $r_* > 5$ de modo que, para cada $r \geq r_*$, o sistema do bilhar $\mathcal{Q}(b, r)$, com vértices em A e B , é hiperbólico.*

Demonstração: Vamos verificar que, das condições acima, somos capazes de obter as Hipóteses (H1)-(H2)-(H3)-(H4)-(H5).

- Vimos anteriormente que $|AB| < 1$ é equivalente a $\angle AOB < \frac{\pi}{3}$, em que O é o centro do disco D_1 . Consequentemente, Γ_1 é um arco maior, ou seja, a Hipótese **(H1)** é satisfeita.
- Primeiramente, notemos que o centro do disco D_1 se encontra à esquerda da corda AB , como mostra a Figura 4.3, por exemplo, pois Γ_1 é um arco maior. Deste modo, podemos calcular a distância b em função do valor de r , obtendo

$$b = \left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

em que usamos apenas o Teorema de Pitágoras. Com isso, podemos simplificar a notação da mesa do bilhar no limão assimétrico, usando $\mathcal{Q}(r) = \mathcal{Q}(b, r)$.

Da equação acima, é claro que $b < r$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} b &= \left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right) - \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)}{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r^2 - 1}{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(r+1)(r-1)}{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Daí, como $|AB| < 1$, segue que

$$b = \frac{(r+1)(r-1)}{\left(r^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{|AB|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} > \frac{(r+1)(r-1)}{(r^2)^{\frac{1}{2}} + (1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(r+1)(r-1)}{r+1} = r-1.$$

Logo, $b > r-1$. Em particular, tomando $r_1 = 2$ e assumindo $r > r_1$, concluímos que $b > 1$.

Portanto, se $r > r_1$, a Hipótese **(H2)** é satisfeita.

- A fim de verificarmos a validade da Hipótese **(H3)**, consideremos $x \in X_0$, isto é, $i_1(x) \geq 1$. Então, a órbita de x possui pelo menos uma colisão sucessiva na componente Γ_1 . Consequentemente, $2d_1$, que é o comprimento entre as colisões sucessivas da órbita de x na componente Γ_1 , satisfaz

$$2d_1 < |AB| < 1 \Rightarrow d_1 < \frac{1}{2}. \quad (5.40)$$

Desse modo, podemos usar o Lema 5.3.3. Porém, para utilizarmos seus itens de modo geral, já assumiremos que $r \geq r_0$, em que conservamos as notações do lema supracitado.

Assim, pelo Lema 5.3.3, item a, segue que $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x) \in \bigcup_{n \geq 5} M_n$. Equivalentemente, $\eta(\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)) \geq 5$. Consequentemente,

$$i_2(x) = \left\lceil \frac{\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3.$$

Em particular, $i_2(x) \geq 1$, como gostaríamos de mostrar.

Além disso, pelo Lema 5.3.3, item b, sabemos que $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ está ε -próximo ou de A ou de B . Em qualquer dos casos, pelo mesmo raciocínio utilizado na Proposição 5.3.2, constatamos que a quantidade mínima de colisões passadas de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ é 5. Logo, como $x \in M$, definido pela Equação (4.12), x deve pertencer, no mínimo, ao conjunto $\mathcal{F}^{\lceil \frac{5}{2} \rceil}(M_5) = \mathcal{F}^3(M_5)$. Consequentemente, $i_0(x) \geq 5 - 3 = 2$.

Usando as limitações dos parâmetros acima, somos capazes de estimar os valores de p e q que aparecem na hipótese que queremos verificar, a saber,

$$p = 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + i_0)} \geq 1 - \frac{1}{2 \cdot (1 + 2)} = \frac{5}{6}$$

$$q = 1 - \frac{1}{2i_2} \geq 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Com isso em mente, podemos simplificar as desigualdades que queremos verificar da seguinte forma,

$$\tau_0 - pd_0 - i_1 \widehat{d}_1 < 0 \Rightarrow \tau_0 < pd_0 + i_1 \widehat{d}_1 \Rightarrow \tau_0 < pd_0 + i_1 \cdot \frac{d_1}{i_1 + 1}$$

e

$$\bar{\tau}_1 < -\frac{d_2}{2i_2} \Rightarrow \tau_1 - i_1 \widehat{d}_1 - d_2 < -\frac{d_2}{2i_2} \Rightarrow \tau_1 < i_1 \widehat{d}_1 + d_2 - \frac{d_2}{2i_2} \Rightarrow \tau_1 < i_1 \cdot \frac{d_1}{i_1 + 1} + qd_2.$$

Assim, usando as estimativas obtidas acima, a fim de satisfazermos as expressões acima, basta verificarmos, respectivamente, as desigualdades

$$\tau_0 < \frac{5}{6} \cdot d_0 + 1 \cdot \frac{d_1}{1 + 1} \Rightarrow \tau_0 < \frac{5d_0}{6} + \frac{d_1}{2} \quad (5.41)$$

e

$$\Rightarrow \tau_1 < 1 \cdot \frac{d_1}{1 + 1} + \frac{5}{6} \cdot d_2 \Rightarrow \tau_1 < \frac{d_1}{2} + \frac{5d_2}{6}. \quad (5.42)$$

Ademais, como $\tau_0, \tau_1 < 2d_1$ (lembremos da demonstração do Lema 5.2.2), vale

$$\frac{\tau_0}{4} < \frac{d_1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_1}{4} < \frac{d_1}{2}.$$

Dessa forma, subtraindo as desigualdades acima das Desigualdades (5.41) e (5.42), respectivamente, obtemos uma condição ainda mais simples para garantirmos a validade da hipótese desejada, a saber,

$$\frac{3\tau_0}{4} < \frac{5d_0}{6} \quad \text{e} \quad \frac{3\tau_1}{4} < \frac{5d_2}{6} .$$

Equivalentemente,

$$\tau_0 < \frac{10d_0}{9} \quad \text{e} \quad \tau_1 < \frac{10d_2}{9} .$$

Para garantirmos que as igualdades acima sejam satisfeitas, consideremos $r_2 = 100$. Então, considerando θ_2 o ângulo entre a reta tangente a um ponto de Γ_r e uma reta vertical qualquer, como fizemos na demonstração do Lema 5.3.3, segue pela Desigualdade (5.36) que, para $r \geq r_2$, temos

$$\text{sen}\theta_2 < \frac{1}{2r} \leq \frac{1}{2 \cdot 100} = \frac{1}{200} . \quad (5.43)$$

Desse modo, considerando θ como o ângulo entre a trajetória definida por τ_0 e a reta vertical, que coincide com o valor de θ utilizado no lema anterior, segue, pela Equação (5.37),

$$\begin{aligned} |\text{sen } \theta| &\leq |\text{sen } \theta_1| + |\text{sen } \theta_2| \\ &= \text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 , \text{ pois } \theta_1 \text{ e } \theta_2 \text{ são agudos} \\ &= \frac{r \text{sen } \theta_1}{r} + \text{sen } \theta_2 \\ &= \frac{d_1}{r} + \text{sen } \theta_2 \\ &< \frac{1}{2r} + \frac{1}{200} , \text{ pelas Desigualdades (5.40) e (5.43)} \\ &< \frac{1}{200} + \frac{1}{200} , \text{ pois } r \geq r_2 = 100 \\ &= \frac{1}{100} . \end{aligned}$$

Portanto, os valores de θ são pequenos o suficiente para que valha a clássica aproximação $\text{sen } \theta \approx \theta$. Desta forma, para as estimativas tomadas, a trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$ é praticamente vertical, consequentemente, $2d_0$, que é o comprimento da trajetória livre de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ no disco D_1 , é ligeiramente menor que $|AB|$. A saber, tomamos r_2 grande o suficiente para que valha

$$2d_0 \geq 0,95 \cdot |AB| \Rightarrow |AB| \leq \frac{2d_0}{0,95} . \quad (5.44)$$

De modo similar, pelo Lema 5.3.3, item c, segue que

$$\tau_0 + \tau_1 + 2i_1d_1 < 1,05 \cdot |AB| , \quad (5.45)$$

visto que o lado esquerdo da desigualdade representa justamente o comprimento total da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \tau_0 < 2d_1 &\Rightarrow 2\tau_0 < \tau_0 + 2d_1 \Rightarrow \tau_0 < \frac{\tau_0 + 2d_1}{2} \\ &< \frac{\tau_0 + \tau_1 + 2i_1d_1}{2} , \text{ pois } \tau_1 > 0 \text{ e } i_1 \geq 1 \\ &\leq \frac{1,05 \cdot |AB|}{2} , \text{ pela Desigualdade (5.45)} \\ &\leq \frac{1,05}{2} \cdot \frac{2d_0}{0,95} , \text{ pela Desigualdade (5.44)} \\ &= \frac{21d_0}{19} < \frac{10d_0}{9} \\ &\therefore \tau_0 < \frac{10d_0}{9} , \end{aligned}$$

que é justamente uma das condições suficientes para garantirmos uma das desigualdades desejadas.

De modo completamente análogo ao procedimento acima, provamos que $\tau_1 < \frac{10d_2}{9}$, o que garante a outra desigualdade desejada.

Portanto, ao longo do processo acima, verificamos que, se $r \geq \max\{r_0, r_2\}$, a Hipótese (H3) é válida.

- De modo similar ao item anterior, para verificarmos a Hipótese (H4), assumiremos $x \in X_1$, ou seja, $i_1(x) = 0$ e $i_2(x) \geq 1$. Aqui, nosso objetivo é garantir que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas,

$$\frac{d_0}{1+i_0} < d_1 \quad \text{e} \quad \tau_0 + \tau_1 < p \cdot d_0 + d_1 + q \cdot d_2 .$$

Para tanto, devemos analisar dois cenários possíveis. São eles,

- a) $d_1 > 4$: Observemos que para satisfazermos a primeira condição, é suficiente garantirmos que $d_0 < d_1$, o que é trivial, pois pela definição dos valores e pela hipótese deste sub-caso, temos

$$d_0 \leq 1 < 4 < d_1 .$$

Em relação à segunda desigualdade, ela também é trivial, visto que $\tau_0, \tau_1 \leq 2$ e $p, d_0, d_2 > 0$. Daí,

$$\tau_0 + \tau_1 \leq 4 < d_1 < p \cdot d_0 + d_1 + q \cdot d_2 .$$

Logo, a Hipótese (H4) é atendida.

- b) $d_1 \leq 4$: Neste sub-caso, como $d_1 \leq 4$, segue pelo Lema 5.3.3 que $i_0(x) \geq 2$ e $i_2(x) \geq 3$, em que usamos o mesmo raciocínio explicado no item anterior. Ademais, também podemos resgatar do item anterior as estimativas dos parâmetros p e q , a saber, $p, q \geq \frac{5}{6}$. Prosseguindo, como $i_1(x) = 0$ e $\tau_0, \tau_1 < 2d_1$, temos

$$|AB| < \tau_0 + \tau_1 < 4d_1 \Rightarrow d_1 > \frac{|AB|}{4} . \quad (5.46)$$

Agora, tomemos r_3 suficientemente grande de modo que, para qualquer $r \geq r_3$, dado $x_1 \in \mathcal{M}_r$, com $d_1 < 4$, o ângulo θ da direção correspondente a x_1 com a direção vertical é limitado por 0,05. No item anterior, mostramos com mais detalhes como este processo ocorre. Como consequência, a trajetória que gera τ_0 será praticamente vertical, isto é, próxima de $|AB|$. Daí, podemos tomar r_3 grande o suficiente de modo que as desigualdade abaixo sejam válidas. A saber,

$$2d_0 \leq \frac{4 \cdot |AB|}{3} \Rightarrow d_0 \leq \frac{4 \cdot |AB|}{6} . \quad (5.47)$$

$$2d_0 \geq 0,95 \cdot |AB| \Rightarrow d_0 \geq \frac{0,95 \cdot |AB|}{2} . \quad (5.48)$$

Além disso, como as condições de $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$ são essencialmente iguais, pela reversibilidade do bilhar, também podemos assumir

$$2d_2 \geq 0,95 \cdot |AB| \Rightarrow d_2 \geq \frac{0,95 \cdot |AB|}{2} . \quad (5.49)$$

Ainda, pelo Lema 5.3.3, item c, podemos assumir

$$\tau_0 + \tau_1 \leq 1,04 \cdot |AB| , \quad (5.50)$$

visto que $\tau_0 + \tau_1$ é precisamente o comprimento total da trajetória entre $\mathcal{F}^{i_0}(x)$ e $\mathcal{F}^{i_0+i_1+2}(x)$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d_0}{1+i_0} &\leq \frac{d_0}{3}, \text{ pois } i_0 \geq 2 \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot |AB|}{6}, \text{ pela Desigualdade (5.47)} \\
&< \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot 4d_1, \text{ pela Desigualdade (5.46)} \\
&= \frac{8d_1}{9} < d_1 \\
&\quad \therefore \frac{d_0}{1+i_0} < d_1,
\end{aligned}$$

que é precisamente uma das desigualdades que queríamos verificar.

Agora, para verificarmos a segunda desigualdade, notemos que, devido às estimativas de p e q , é suficiente verificarmos que

$$\tau_0 + \tau_1 < \frac{5d_0}{6} + d_1 + \frac{5d_2}{6}.$$

Assim, pelas Desigualdades (5.46), (5.48) e (5.49), temos

$$\begin{aligned}
\frac{5d_0}{6} + d_1 + \frac{5d_2}{6} &> \frac{5}{6} \cdot \frac{0,95 \cdot |AB|}{2} + \frac{|AB|}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{0,95 \cdot |AB|}{2} \\
&= \frac{25 \cdot |AB|}{24} > 1,04 \cdot |AB|.
\end{aligned}$$

Unindo a expressão acima com a Desigualdade (5.50), obtemos

$$\tau_0 + \tau_1 \leq 1,04 \cdot |AB| < \frac{5d_0}{6} + d_1 + \frac{5d_2}{6},$$

o que garante a validade da desigualdade que restava.

Portanto, a Hipótese (H4) segue para este caso.

Destarte, independente dos cenários acima, desde que $r \geq r_3$, garantimos que a Hipótese (H4) é válida.

- Finalmente, para verificarmos a Hipótese (H5), consideremos $x \in X_2$, isto é, $i_1(x) = i_2(x) = 0$. Consequentemente, $d_1 > 4$. Realmente, caso contrário, teríamos $d_1 \leq 4$. Daí, pelo Lema 5.3.3, item a, temos $i_2(x) \geq 3$. Absurdo. Logo, $d_1 > 4$. Além disso, pela geometria do bilhar no limão,

$$\tau_0 < 2 \Rightarrow 2\tau_0 < 4.$$

Assim, combinando as desigualdades acima, segue que

$$d_1 > 4 > 2\tau_0 \Rightarrow d_1 > 2\tau_0 \Rightarrow \tau_0 < \frac{d_1}{2},$$

que é a desigualdade necessária para a validade da hipótese desejada.

Portanto, a Hipótese (H5) é válida.

Destarte, desde que $r \geq \max\{r_0, r_1, r_2, r_3\} = r_*$, as Hipóteses **(H1)**-**(H2)**-**(H3)**-**(H4)**-**(H5)** são todas verificadas, isto é, pelo Teorema 5.3.1, o sistema de bilhares $\mathcal{Q}(b, r)$ é hiperbólico.

■

6 CONCLUSÃO

Iniciamos este trabalho com uma breve contextualização histórica da área de Sistemas Dinâmicos, direcionando, em seguida, nossa atenção à teoria dos bilhares, na qual também exploramos seu desenvolvimento histórico. Partindo dos trabalhos pioneiros de Birkhoff, responsável pela introdução da terminologia bilhar no contexto matemático, destacamos contribuições fundamentais de Sinai e Bunimovich, que estabeleceram as bases do estudo dos bilhares caóticos, em particular os bilhares dispersores e focalizadores, respectivamente. No contexto dos bilhares convexos, apresentamos as flores de Bunimovich e seu consagrado mecanismo de defocalização, que desempenha papel central na compreensão da hiperbolicidade em mesas focalizadoras. A partir dessas construções, introduzimos os bilhares no limão assimétrico, cuja hiperbolicidade havia sido inicialmente constatada por meio de evidências numéricas em (CHEN et al., 2013).

Com o objetivo de fornecer uma demonstração rigorosa da hiperbolicidade desses sistemas, como apresentada na referência (BUNIMOVICH; ZHANG; ZHANG, 2016), desenvolvemos ao longo do trabalho um conjunto de resultados preliminares essenciais para a compreensão do tema. Nesse sentido, apresentamos uma introdução sistemática à teoria dos bilhares, abordando os conceitos, definições e ferramentas necessárias para o entendimento adequado dos argumentos centrais da dissertação.

Uma vez estabelecidos os pré-requisitos, passamos ao estudo detalhado do bilhar no limão assimétrico por meio da análise de aplicações induzidas. O foco principal recaiu sobre a caracterização da evolução das curvaturas das frentes de onda, elemento crucial para a verificação das propriedades hiperbólicas do sistema.

Por fim, enunciamos as hipóteses sob as quais a hiperbolicidade do bilhar no limão assimétrico pode ser garantida, juntamente com resultados auxiliares que desempenham papel decisivo na demonstração dos principais teoremas do trabalho, a saber, a hiperbolicidade do sistema e a caracterização geométrica de mesas que satisfazem as condições impostas.

No que diz respeito à continuidade dessas investigações, merece destaque o artigo (JIN; ZHANG, 2021), no qual é apresentada uma nova prova matemática da hiperbolicidade dos bilhares no limão assimétrico. Nesse trabalho, além de se empregar uma abordagem técnica distinta, as hipóteses consideradas são substancialmente mais gerais. Em particular, a hiperbolicidade é estabelecida no caso em que Γ_1 é um arco maior, ao passo que, no presente trabalho, por vezes assumimos a condição $|AB| < 1$. Além disso, mais recentemente, o artigo (FAN; HASSELBLATT, 2025) demonstrou a ergodicidade do bilhar no limão assimétrico, ampliando de forma significativa a compreensão dinâmica dessa classe de sistemas.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. **Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$** . Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- BARREIRA, L.; VALLS, C. **Teoria dos Sistemas Dinâmicos: Uma Introdução**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- BIRKHOFF, G. **Dynamical Systems**. Nova Iorque: AMS, 1927.
- BLOCH, E. **A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry**. New York: Birkhäuser, 1956.
- BORWEIN, J. et al. **Neverending Fractions: an introduction to continued fractions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- BUNIMOVICH, L. On billiards close to dispersing. **Mathematics of the USSR-Sbornik**, v. 23, n. 1, p. 45–67, 1974.
- BUNIMOVICH, L. On ergodic properties of certain billiards. **Func. Anal. Appl.**, v. 8, p. 254–255, 1974.
- BUNIMOVICH, L. On ergodic properties of nowhere dispersing billiards. **Commun. Math. Phys.**, v. 65, p. 295–312, 1979.
- BUNIMOVICH, L. On absolutely focusing mirrors. In: **Lecture Notes in Math**. Berlin: Springer, 1992. p. 62–82.
- BUNIMOVICH, L.; ZHANG, H.-K.; ZHANG, P. On another edge of defocusing: hyperbolicity of asymmetric lemon billiards. **Commun. Math. Phys.**, v. 341, p. 781–803, 2016.
- CARMO, M. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- CHEN, J. et al. Ergodicity of the generalized lemon billiards. **Chaos**, v. 23, p. 043137, 2013.
- CHERNOV, N.; MARKARIAN, R. **Chaotic Billiards**. [S.l.]: AMS, 2006.
- CORREIA, M.; ZHANG, H.-K. Stability and ergodicity of moon billiards. **Chaos**, v. 25, p. 083110, 2015.
- DONNAY, V. Using integrability to produce chaos: billiards with positive entropy. **Communications in Mathematical Physics**, v. 141, p. 225–257, 1991.
- FAN, W.; HASSELBLATT, B. Ergodicity of asymmetric lemon billiards. **ArXiv**, p. 1–141, 2025.
- GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. **Differential Topology**. [S.l.]: AMS, 2010.
- HALPERN, B. Strange billiards tables. **American Mathematical Society**, v. 232, p. 297–305, 1977.

- HELLER, E.; TOMSOVIC, S. Postmodern quantum mechanics. **Physics Today**, p. 38–46, 1993.
- JIN, X.; ZHANG, P. Hyperbolicity of asymmetric lemon billiards. **Nonlinearity**, v. 34, n. 1, p. 92–117, 2021.
- JR, J. P.; MELO, W. de. **Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction**. Nova Iorque: Springer, 1982.
- KINCHIN, A. **Continued Fractions**. Chicago: The University of Chicago Press, 1964.
- LAZUTKIN, V. Existence of a continuum of closed invariant curves for a convex billiard. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 27, n. 3, p. 201–202, 1972.
- LOPAC, V.; MRKONJIC, I.; RADIC, D. Classical and quantum chaos in the generalized parabolic lemon shaped billiard. **Physichal Review**, v. 59, n. 1, 1999.
- LOPAC, V.; MRKONJIC, I.; RADIC, D. Chaotic behavior in lemon-shaped billiards with elliptical and hyperbolic boundary arcs. **Physichal Review**, v. 64, 2001.
- MAKINO, H.; HARAYAMA, T.; AIZAWA, Y. Quantum-classical correspondences of the berry-robnik parameter through bifurcations in lemon billiard systems. **Physichal Review**, v. 63, 2001.
- NEWTON, I. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. Nova Iorque: Daniel Adee, 1846.
- PRESSLEY, A. **Elementary Differential Geometry**. 2. ed. Londres: Springer, 2010.
- REE, S.; REICHL, L. Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut. **Physichal Review**, v. 60, n. 2, 1999.
- ROBINSON, C. **Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos**. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 1999.
- RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987.
- SINAI, Y. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. **Russian Mathematical Surveys**, v. 25, n. 2, p. 137–189, 1970.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.
- WOJTKOWSKI, M. Principles for the design of billiards with nonvanishing lyapunov exponents. **Communications in Mathematical Physics**, v. 105, p. 391–414, 1986.

APÊNDICE A – SIMULAÇÕES DO BILHAR

Com o intuito de fornecermos uma percepção visual de alguns dos temas abordados ao longo do trabalho, apresentaremos dois códigos feitos em Python que simulam a dinâmica do bilhar no círculo unitário e a dinâmica do bilhar no limão assimétrico, respectivamente. Tal abordagem enriquece o texto pois ilustra na prática muitas propriedades inerentes dos bilhares supracitados.

A.1 CÓDIGO DO BILHAR NO CÍRCULO UNITÁRIO

Abaixo, segue o código referente a dinâmica do bilhar no círculo unitário.

Código 1: Simulação do bilhar no círculo unitário.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.animation as animation
4 from matplotlib.widgets import TextBox, Button, CheckButtons
5 from matplotlib.patches import FancyBboxPatch
6 from collections import deque
7
8 plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'stix'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'
10
11 class ParticulaBilhar:
12     def __init__(self, s, varphi, cor, ativa=True):
13         self.cor = cor
14         self.ativa = ativa
15         self.rastro = deque(maxlen=30) # ALTERAR TAMANHO DO RASTRO AQUI
16         self.colisoess_s = []
17         self.colisoess_varphi = []
18         self.velocidade_modulo = 0.02 # ALTERAR VELOCIDADE AQUI
19         self.reset(s, varphi)
20
21     def reset(self, s, varphi):
22         self.s_ini = s % (2 * np.pi)
23         self.varphi_ini = np.clip(varphi, -np.pi/2 + 0.001, np.pi/2 -
24 0.001)
25         self.pos = np.array([np.cos(self.s_ini), np.sin(self.s_ini)])
26         angle_normal_interna = self.s_ini + np.pi
27         vel_angle = angle_normal_interna + self.varphi_ini
28         self.vel = np.array([np.cos(vel_angle), np.sin(vel_angle)]) *
29 self.velocidade_modulo
30         self.rastro.clear()

```

```

30     # Limpa o histórico anterior
31     self.colisoos_s.clear()
32     self.colisoos_varphi.clear()
33
34     # ---> AS DUAS LINHAS NOVAS AQUI <---
35     # Registramos o ponto de partida para aparecer no Espaço de
Colisão desde o início
36     self.colisoos_s.append(self.s_ini)
37     self.colisoos_varphi.append(self.varphi_ini)
38
39     def atualizar(self):
40         if not self.ativa: return
41         dt = 1.0
42         a = np.dot(self.vel, self.vel)
43         b = 2 * np.dot(self.pos, self.vel)
44         c = np.dot(self.pos, self.pos) - 1.0
45         delta = b**2 - 4*a*c
46         t_colisao = None
47         if delta >= 0:
48             t2 = (-b + np.sqrt(delta)) / (2*a)
49             if 0 <= t2 < dt: t_colisao = t2
50         if t_colisao is not None:
51             self.pos = self.pos + self.vel * t_colisao
52             self.pos /= np.linalg.norm(self.pos)
53             s_atual = np.arctan2(self.pos[1], self.pos[0]) % (2*np.pi)
54             normal = -self.pos
55             vel_norm = self.vel / np.linalg.norm(self.vel)
56             sin_varphi = normal[0]*vel_norm[1] - normal[1]*vel_norm[0]
57             varphi_atual = np.arcsin(np.clip(sin_varphi, -1.0, 1.0))
58             self.colisoos_s.append(s_atual)
59             self.colisoos_varphi.append(varphi_atual)
60             n_fora = self.pos
61             self.vel = self.vel - 2 * np.dot(self.vel, n_fora) * n_fora
62             self.pos = self.pos + self.vel * (dt - t_colisao)
63         else:
64             self.pos = self.pos + self.vel * dt
65             if np.linalg.norm(self.pos) > 1.001: self.pos /= np.linalg.norm(
self.pos)
66             self.rastro.append(self.pos.copy())
67
68     # --- CONFIGURAÇÃO DA INTERFACE (Eixos Manuais para total controle) ---
69     fig = plt.figure(figsize=(14, 8), facecolor='white')
70
71     # [esquerda, fundo, largura, altura] - Valores de 0 a 1
72     # Aumentei a largura/altura para 0.55 para a mesa ficar dominante
73     ax_mesa = fig.add_axes([0.05, 0.33, 0.4, 0.56])
74

```

```

75 # Espaço de colisão um pouco menor e deslocado para a direita
76 ax_espaco = fig.add_axes([0.55, 0.35, 0.34, 0.54])
77
78 p1 = ParticulaBilhar(0.0, 0.5, 'indigo', ativa=True)
79 p2 = ParticulaBilhar(np.pi, -0.5, 'orange', ativa=False)
80 particulas = [p1, p2]
81
82 # --- AJUSTE DA MESA (Traço mais fino) ---
83 ax_mesa.set_facecolor("#00000000")
84 circle = plt.Circle((0, 0), 1, color='black', fill=False, lw=1.5, zorder
    =1)
85 ax_mesa.add_artist(circle)
86 ax_mesa.set_xlim(-1.1, 1.1)
87 ax_mesa.set_ylim(-1.1, 1.1)
88 ax_mesa.set_aspect('equal')
89 ax_mesa.set_title("Mesa do Bilhar", fontsize=14, fontweight='bold', pad
    =20)
90 ax_mesa.set_xticks([])
91 ax_mesa.set_yticks([])
92 ax_mesa.set_frame_on(False)
93
94 # --- AJUSTE DO ESPAÇO DE COLISÃO (Mais detalhado) ---
95 ax_espaco.set_facecolor("#00000000")
96 ax_espaco.grid(True, alpha=0.2, linestyle='--', color='gray')
97 ax_espaco.set_xlim(0, 2*np.pi)
98 ax_espaco.set_ylim(-np.pi/2, np.pi/2)
99 ax_espaco.set_xlabel(r"Posição $$$", fontsize=11)
100 ax_espaco.set_ylabel(r"Ângulo $\varphi$", fontsize=11)
101 ax_espaco.set_title("Espaço de Colisão", fontsize=14, fontweight='bold',
    pad=20)
102
103 # Eixo s com pi/2 e 3pi/2
104 ax_espaco.set_xticks([0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2, 2*np.pi])
105 ax_espaco.set_xticklabels(['0', r'$\frac{\pi}{2}$', r'$\pi$', r'$\frac{
    3\pi}{2}$', r'$2\pi$'])
106
107 # Eixo varphi com pi/4 e -pi/4
108 ax_espaco.set_yticks([-np.pi/2, -np.pi/4, 0, np.pi/4, np.pi/2])
109 ax_espaco.set_yticklabels([r'$-\frac{\pi}{2}$', r'$-\frac{\pi}{4}$', '0'
    , r'$\frac{\pi}{4}$', r'$\frac{\pi}{2}$'])
110
111 # Elementos animados (Traço mais fino)
112 tracos = [ax_mesa.plot([], [], color=p.cor, lw=1.0, alpha=0.7)[0] for p
    in particulas]
113 pontos = [ax_mesa.plot([], [], 'o', color=p.cor, markersize=6,
    markeredgecolor='white', markeredgewidth=0.5)[0] for p in particulas]

```

```

114 scatters = [ax_espaco.scatter([], [], s=10, color=p.cor, alpha=0.6,
    edgecolors='none') for p in particulas]
115
116 # --- CONTROLES (UI) ---
117
118 # Pegamos as coordenadas reais dos gráficos para alinhar tudo
    perfeitamente
119 pos_m = ax_mesa.get_position() # Posição da Mesa (Esquerda)
120 pos_e = ax_espaco.get_position() # Posição do Espaço de Colisão (Direita
    )
121
122 # Configurações de tamanho (mais compactas)
123 y_base = 0.10
124 h_caixa = 0.13
125 w_caixa = 0.14
126 espacamento_interno = 0.08 # Distância do label para o input
127
128 # --- Bloco Partícula 1 (Alinhado com o início da Mesa) ---
129 rect_p1 = FancyBboxPatch((0.2, 0.08), 0.11, 0.12, transform=fig.
    transFigure,
130
    boxstyle="round,pad=0.01", facecolor="indigo",
    alpha=0.15, zorder=-1)
131 fig.patches.append(rect_p1)
132 fig.text(0.255, 0.175, 'Partícula 1',
133
    color='indigo', fontsize=11, fontweight='bold', ha='center')
134
135 ax_s1 = plt.axes([0.27, 0.125, 0.03, 0.03])
136 txt_s1 = TextBox(ax_s1, r'$s \in [0, 2\pi] \ : \ $ ', initial="0.0")
137 ax_var1 = plt.axes([0.271, 0.085, 0.03, 0.03])
138 txt_var1 = TextBox(ax_var1, r'$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ : \ $ ', initial="0.5")
139
140 # --- Bloco Partícula 2 (Alinhado ao lado da P1, ainda sob a Mesa) ---
141 rect_p2 = FancyBboxPatch((0.44, 0.08), 0.11, 0.12, transform=fig.
    transFigure,
142
    boxstyle="round,pad=0.01", facecolor="orange",
    alpha=0.15, zorder=-1)
143 rect_p2.set_visible(False) # Começa oculto
144 fig.patches.append(rect_p2)
145 txt_p2_label = fig.text(0.495, 0.175, 'Partícula 2',
146
    color='orange', fontsize=11, fontweight='bold', ha='center',
    visible = False)
147
148 ax_s2 = plt.axes([0.508, 0.125, 0.03, 0.03])
149 txt_s2 = TextBox(ax_s2, r'$s \in [0, 2\pi] \ : \ $ ', initial="3.14")
150 ax_var2 = plt.axes([0.509, 0.085, 0.03, 0.03])

```

```

151 txt_var2 = TextBox(ax_var2, r'$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : $ ', initial="-0.5")
152 ax_s2.set_visible(False); ax_var2.set_visible(False)
153
154
155 # --- Bloco de Controles (Alinhado com o início do Espaço de Colisão)
    ---
156 # Checkbox (Em cima)
157 ax_check = plt.axes([0.67, 0.15 , 0.13, 0.05])
158 ax_check.set_facecolor('#e0e0e0')
159 check = CheckButtons(ax_check, ['Ativar Partícula 2'], [False])
160
161 # Opcional: Ajustar a cor do texto do checkbox para combinar com o
    design
162 for label in check.labels:
163     label.set_fontsize(11)
164     label.set_fontweight('bold')
165     label.set_color('darkorange')
166     label.set_alpha(0.8) # Deixa o texto levemente suave
167
168
169 # Lógica para mostrar/esconder a UI da Partícula 2
170 def alternar_p2(label):
171     visivel = check.get_status()[0]
172     ax_s2.set_visible(visivel)
173     ax_var2.set_visible(visivel)
174     txt_p2_label.set_visible(visivel)
175     rect_p2.set_visible(visivel)
176     fig.canvas.draw_idle()
177 check.on_clicked(alternar_p2)
178
179 # Botão Reiniciar (Embaixo, mesma largura)
180 ax_btn = plt.axes([0.67, 0.08, 0.13, 0.05])
181 btn = Button(ax_btn, 'Reiniciar Simulação', color='#e0e0e0')
182
183 # Ajustes finais de estilo
184 for label in check.labels:
185     label.set_fontsize(10); label.set_fontweight('bold')
186
187 ##### Centraliza o texto internamente
188 def centralizar_textbox(widget):
189     # Move a ancoragem para o meio (0.5) e centraliza o alinhamento
190     widget.text_disp.set_position((0.5, 0.5))
191     widget.text_disp.set_horizontalalignment('center')
192     widget.text_disp.set_verticalalignment('center')
193
194 # Aplique a função em cada uma das suas caixas:

```

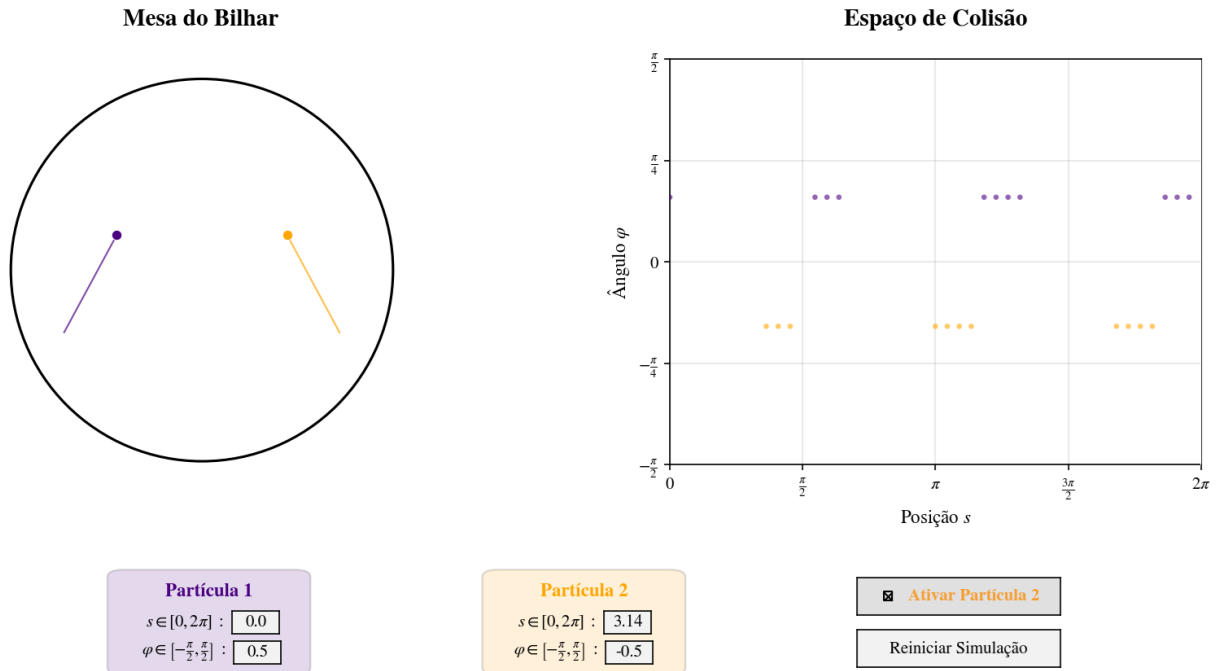
```

195 centralizar_textbox(txt_s1)
196 centralizar_textbox(txt_var1)
197 centralizar_textbox(txt_s2)
198 centralizar_textbox(txt_var2)
199
200 def reiniciar(event):
201     try:
202         namespace = {"np": np, "pi": np.pi, "": np.pi}
203         s1 = eval(txt_s1.text.replace("'", 'pi'), namespace)
204         v1 = eval(txt_var1.text.replace("'", 'pi'), namespace)
205         s2 = eval(txt_s2.text.replace("'", 'pi'), namespace)
206         v2 = eval(txt_var2.text.replace("'", 'pi'), namespace)
207         p1.reset(s1, v1)
208         p2.ativa = check.get_status()[0]
209         if p2.ativa: p2.reset(s2, v2)
210         for s_plt in scatters: s_plt.set_offsets(np.empty((0, 2)))
211     except Exception as e: print(f"Erro: {e}")
212
213 btn.on_clicked(reiniciar)
214
215 def animate(i):
216     for idx, p in enumerate(particulas):
217         if p.ativa:
218             p.atualizar()
219             if p.rastro:
220                 x, y = zip(*p.rastro)
221                 tracos[idx].set_data(x, y)
222                 pontos[idx].set_data([p.pos[0]], [p.pos[1]])
223             if p.colisoas_s:
224                 scatters[idx].set_offsets(np.c_[p.colisoas_s, p.
colisoas_varphi])
225         else:
226             tracos[idx].set_data([], []); pontos[idx].set_data([], [])
227             scatters[idx].set_offsets(np.empty((0, 2)))
228     return tracos + pontos + scatters
229
230 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, interval=10, blit=True,
cache_frame_data=False)
231 plt.show()

```

Na Figura A.1 a seguir, apresentamos a interface da simulação gerada pelo código acima.

Figura A.1 – Interface da simulação do bilhar no círculo unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Na interface acima, podemos perceber a mesa do bilhar na qual estamos trabalhando tal como o espaço de colisão, com coordenadas s e φ , atrelado a aplicação de colisão. O espaço de colisão mapeia tanto as colisões da partícula 1, representada pela cor roxa, quanto as colisões da partícula 2, representada pela cor laranja. Observemos que a presença da segunda partícula é opcional. No mais, para definirmos as partículas mencionadas, basta inserirmos suas coordenadas iniciais em suas respectivas caixas de texto, conforme mostra a imagem. Sempre que alterarmos as condições iniciais, devemos selecionar a opção “Reiniciar Simulação” para que o código utilize os novos valores selecionados.

A.2 CÓDIGO DO BILHAR NO LIMÃO ASSIMÉTRICO

Agora, de modo análogo ao que fizemos acima, apresentaremos o código referente a dinâmica do bilhar no limão assimétrico.

Código 2: Simulação do bilhar no limão assimétrico.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.animation as animation
```

```

4 import itertools # Importação extra necessária no topo do arquivo para
  alternar cores
5 from matplotlib.widgets import TextBox, Button, CheckButtons
6 from matplotlib.patches import FancyBboxPatch
7 from collections import deque
8
9 plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'stix'
10 plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'
11
12
13 # --- MOTOR FÍSICO (ESTRUTURA COMPLETA E ORIGINAL) ---
14 class ParticulaBilhar:
15     def __init__(self, s, phi, r, b):
16         self.rastro = deque(maxlen=30)
17         self.vel_modulo = 0.02
18         self.valido = False
19         self.historico_mapa = []
20         self.reset(s, phi, r, b)
21
22     def reset(self, s, phi, r, b):
23         self.r, self.b = r, b
24         self.rastro.clear()
25         self.historico_mapa = []
26         self.parada_no_vertice = False # <--- NOVA FLAG
27
28         if not ((b < r + 1) and (b > abs(r - 1))):
29             self.valido = False; return
30
31         self.valido = True
32         self.x_int = (r**2 - 1 - b**2) / (2 * b)
33         y_int = np.sqrt(max(0, 1 - self.x_int**2))
34
35         # <--- NOVAS LINHAS: Armazenando os vértices
36         self.vertices = [
37             np.array([self.x_int, y_int]),
38             np.array([self.x_int, -y_int])
39         ]
40
41         self.phi_c1 = np.arccos(self.x_int)
42         self.len_g1 = 2 * np.pi - 2 * self.phi_c1
43         phi_dr = np.arctan2(y_int, self.x_int + b)
44         self.len_gr = 2 * phi_dr * r
45         self.s_total = self.len_g1 + self.len_gr
46
47         s_norm = s % self.s_total
48         self.pos, n = self.get_pos_from_s(s_norm)
49

```

```

50     # Vetor tangencial para alinhar o ângulo inicial
51     t_vec = np.array([n[1], -n[0]])
52     vx = n[0]*np.cos(phi) + t_vec[0]*np.sin(phi)
53     vy = n[1]*np.cos(phi) + t_vec[1]*np.sin(phi)
54
55     self.vel = np.array([vx, vy]) * self.vel_modulo
56     if np.dot(self.vel, n) < 0: self.vel = -self.vel
57
58     self.historico_mapa.append((s_norm, phi))
59     self.rastro.append(self.pos.copy())
60
61     def get_pos_from_s(self, s_val):
62         if s_val <= self.len_g1:
63             ang = self.phi_c1 + s_val
64             pos = np.array([np.cos(ang), np.sin(ang)])
65             n = -pos
66         else:
67             s_rel = s_val - self.len_g1
68             phi_dr_val = np.arctan2(np.sqrt(max(0, 1-self.x_int**2)),
self.x_int+self.b)
69             ang = -phi_dr_val + (s_rel/self.r)
70             pos = np.array([-self.b + self.r * np.cos(ang), self.r * np.
sin(ang)])
71             n = np.array([-np.cos(ang), -np.sin(ang)])
72             return pos, n / np.linalg.norm(n)
73
74     def get_s_from_pos(self, pos, parede):
75         if parede == 'G1':
76             ang = np.arctan2(pos[1], pos[0])
77             if ang < self.phi_c1 - 0.1: ang += 2*np.pi
78             return ang - self.phi_c1
79         else:
80             ang = np.arctan2(pos[1], pos[0] + self.b)
81             phi_dr_val = np.arctan2(np.sqrt(max(0, 1-self.x_int**2)),
self.x_int+self.b)
82             return (ang + phi_dr_val) * self.r + self.len_g1
83
84     def atualizar(self):
85         if not self.valido or self.parada_no_vertice: return
86         dt = 1.0
87
88         # Testes de Colisão - Componente G1
89         a1 = np.dot(self.vel, self.vel)
90         b1 = 2 * np.dot(self.pos, self.vel)
91         c1 = np.dot(self.pos, self.pos) - 1.0
92         delta1 = b1**2 - 4*a1*c1
93

```

```

94     # Testes de Colisão - Componente Gr
95     origem_r = np.array([-self.b, 0.0])
96     p_rel = self.pos - origem_r
97     a_r = np.dot(self.vel, self.vel)
98     b_r = 2 * np.dot(p_rel, self.vel)
99     c_r = np.dot(p_rel, p_rel) - self.r**2
100    delta_r = b_r**2 - 4*a_r*c_r
101
102    t_min, parede = float('inf'), None
103    if delta1 >= 0:
104        for sign in [-1, 1]:
105            t = (-b1 + sign*np.sqrt(delta1)) / (2*a1)
106            if t > 1e-8:
107                p_t = self.pos + t * self.vel
108                if p_t[0] <= self.x_int + 1e-5:
109                    if t < t_min: t_min, parede = t, 'G1'
110    if delta_r >= 0:
111        for sign in [-1, 1]:
112            t = (-b_r + sign*np.sqrt(delta_r)) / (2*a_r)
113            if t > 1e-8:
114                p_t = self.pos + t * self.vel
115                if p_t[0] >= self.x_int - 1e-5:
116                    if t < t_min: t_min, parede = t, 'Gr'
117
118    if t_min < dt:
119        self.pos = self.pos + self.vel * t_min
120
121    # <--- NOVO BLOCO: Verificação do Vértice --->
122    limiar_vertice = 1e-3 # Distância mínima para considerar
colisão no vértice
123    for v in self.vertices:
124        if np.linalg.norm(self.pos - v) < limiar_vertice:
125            self.parada_no_vertice = True
126            self.vel = np.array([0.0, 0.0])
127            return # Encerra o cálculo desta etapa
128
129    n = -self.pos if parede == 'G1' else (origem_r - self.pos)/
self.r
130    n /= np.linalg.norm(n)
131
132    # Reflete a velocidade
133    self.vel = self.vel - 2 * np.dot(self.vel, n) * n
134
135    # Cálculo de phi (Birkhoff)
136    v_dir = self.vel / np.linalg.norm(self.vel)
137    t_vec = np.array([n[1], -n[0]])
138    v_t = np.dot(v_dir, t_vec)

```

```

139         v_n = np.dot(v_dir, n)
140         phi_col = np.arctan2(v_t, v_n)
141
142         s_col = self.get_s_from_pos(self.pos, parede) % self.s_total
143         self.historico_mapa.append((s_col, phi_col))
144
145         self.pos += self.vel * (dt - t_min) + n * 1e-7
146     else:
147         self.pos = self.pos + self.vel * dt
148
149     # Rede de Segurança (Snapping)
150     dist_c1 = np.linalg.norm(self.pos)
151     dist_cr = np.linalg.norm(self.pos - origem_r)
152     if dist_c1 > 1.0001 or dist_cr > self.r + 0.0001:
153         if self.pos[0] < self.x_int:
154             self.pos /= dist_c1; n = -self.pos
155         else:
156             p_rel_n = (self.pos - origem_r)
157             self.pos = origem_r + (p_rel_n / np.linalg.norm(p_rel_n)
158 ) * self.r
159             n = (origem_r - self.pos) / self.r
160             n /= np.linalg.norm(n)
161             if np.dot(self.vel, n) < 0:
162                 self.vel = self.vel - 2 * np.dot(self.vel, n) * n
163             self.rastro.append(self.pos.copy())
164
165 # --- APRESENTAÇÃO E DESENHO ---
166 def desenhar_sistema(ax_main, ax_ref, ax_info, ax_map, r, b, s_val,
167 phi_val):
168     ax_main.clear(); ax_ref.clear(); ax_info.clear(); ax_map.clear()
169     for ax in [ax_main, ax_ref, ax_info]: ax.axis('off')
170     ax_map.axis('on')
171
172     # Títulos das Seções
173     ax_ref.title.set_position([0.37, 0.01])
174     ax_ref.set_title("Representação Geral", fontsize=10, fontweight='
bold', pad=0.5)
175     ax_main.title.set_position([0.55, 1.0])
176     ax_main.set_title("Mesa do Bilhar", fontsize=14, fontweight='bold',
pad=15)
177
178     # Thumbnail Geral (Sempre visível)
179     theta_f = np.linspace(0, 2*np.pi, 500)
180     ax_ref.plot(np.cos(theta_f), np.sin(theta_f), 'k', lw=1)
181     ax_ref.plot(-b + r * np.cos(theta_f), r * np.sin(theta_f), 'k', lw
=1)
182     ax_ref.set_aspect('equal')

```

```

181     lim_ref = max(1, abs(b) + r) + 0.2
182     ax_ref.set_xlim(-lim_ref, lim_ref); ax_ref.set_ylim(-lim_ref,
lim_ref)
183
184     existe_limao = (b < r + 1) and (b > abs(r - 1))
185     if existe_limao:
186         # Piscininha Aquamarine
187         c1_ref = plt.Circle((0, 0), 1, color='aquamarine', alpha=0.5);
ax_ref.add_patch(c1_ref)
188         cr_ref = plt.Circle((-b, 0), r, visible=False); ax_ref.add_patch
(cr_ref); c1_ref.set_clip_path(cr_ref)
189
190         x_int = (r**2 - 1 - b**2) / (2 * b)
191         y_int = np.sqrt(max(0, 1 - x_int**2))
192         phi_c1 = np.arccos(x_int); len_g1 = 2 * np.pi - 2 * phi_c1
193         phi_dr = np.arctan2(y_int, x_int + b); len_gr = 2 * phi_dr * r
194         s_total = len_g1 + len_gr
195
196         # Mesa Principal
197         t1 = np.linspace(phi_c1, 2*np.pi - phi_c1, 400); ax_main.plot(np
.cos(t1), np.sin(t1), 'k', lw=2)
198         tr = np.linspace(-phi_dr, phi_dr, 400); ax_main.plot(-b + r * np
.cos(tr), r * np.sin(tr), 'k', lw=2)
199         ax_main.set_aspect('equal')
200
201         # --- Painel de Info (Lado a lado e centralizado) ---
202         # Criamos a string sem o \n e com espaços simples
203         info_txt = fr"$|\Gamma_1| = {len_g1:.3f}$ , $|\Gamma_r| = {
len_gr:.3f}$ , $s_{{total}} = {s_total:.3f}$"
204
205         # Usamos ha='center' e va='center' com transform para garantir
que o texto não "fuja" da caixa
206         ax_info.text(0.5, 0.5, info_txt, fontsize=10, family='serif',
207                     ha='center', va='center', transform=ax_info.
transAxes)
208
209         # Espaço de Colisão Estilizado
210         ax_map.set_title("Espaço de Colisão", fontsize=14, fontweight='
bold', pad=20)
211         ax_map.axvline(x=len_g1, color='red', linestyle='--', alpha=0.5)
212         # Linha de transição
213         ax_map.set_xlabel("Posição $s$")
214         ax_map.set_ylabel(r"Ângulo $\varphi$")
215         ax_map.set_xlim(0, s_total); ax_map.set_ylim(-np.pi/2, np.pi/2)
216
217         # Ticks em frações de PI
ax_map.set_yticks([-np.pi/2, -np.pi/4, 0, np.pi/4, np.pi/2])

```

```

218     ax_map.set_yticklabels([r'$-\frac{\pi}{2}$', r'$-\frac{\pi}{4}$',
219     , '0', r'$\frac{\pi}{4}$', r'$\frac{\pi}{2}$'])
220     ax_map.grid(True, alpha=0.2)
221     else:
222         ax_main.text(0.5, 0.5, "PARÂMETROS INVÁLIDOS", color='red', ha='
223         center', fontweight='bold', transform=ax_main.transAxes)
224     return existe_limao
225
226 # --- INTERFACE E LÓGICA DE MÚLTIPLAS PARTÍCULAS ---
227 fig = plt.figure(figsize=(16, 9), facecolor='white')
228 ax_ref = fig.add_axes([0.008, 0.13, 0.25, 0.25])
229 ax_main = fig.add_axes([0.27, 0.1, 0.35, 0.8])
230 ax_info = fig.add_axes([0.04, 0.365, 0.15, 0.15])
231 ax_map = fig.add_axes([0.72, 0.165, 0.23, 0.7])
232
233 # Caixas da Mesa
234 rect_mesa = FancyBboxPatch((0.055, 0.835), 0.12, 0.12, transform=fig.
235     transFigure,
236     boxstyle="round,pad=0.01", facecolor="gray",
237     alpha=0.1, zorder=-1)
238 fig.patches.append(rect_mesa)
239 fig.text(0.115, 0.93, "Informações da Mesa", fontsize=11, fontweight='
240     bold', ha='center')
241 ax_r = fig.add_axes([0.122, 0.88, 0.04, 0.03]); txt_r = TextBox(ax_r, r'
242     $r\in[0,\infty)\ : $ ', initial="1.5")
243 ax_b = fig.add_axes([0.135, 0.84, 0.04, 0.03]); txt_b = TextBox(ax_b, r'
244     $b\in(r-1,r+1)\ : $ ', initial="0.8")
245
246 # Caixas P1
247 rect_p1 = FancyBboxPatch((0.055, 0.685), 0.12, 0.12, transform=fig.
248     transFigure,
249     boxstyle="round,pad=0.01", facecolor="indigo",
250     alpha=0.15, zorder=-1)
251 fig.patches.append(rect_p1)
252 fig.text(0.115, 0.78, "Partícula 1", fontsize=11, fontweight='bold',
253     color='indigo', ha='center')
254 ax_s1 = fig.add_axes([0.128, 0.73, 0.04, 0.03]); txt_s1 = TextBox(ax_s1,
255     r'$s_1\in[0,s_{total}]\ : $ ', initial="0.1")
256 ax_phi1 = fig.add_axes([0.126, 0.69, 0.04, 0.03]); txt_phi1 = TextBox(
257     ax_phi1, r'$\varphi_1\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ : $ ',
258     initial="0.3")
259
260 # Checkbox P2 Centralizado
261 ax_chk = fig.add_axes([0.046, 0.615, 0.138, 0.05])
262 ax_chk.set_facecolor('#e0e0e0')
263 chk_p2 = CheckButtons(ax_chk, ['Ativar Partícula 2'], [False])
264

```

```

252 # Opcional: Ajustar a cor do texto do checkbox para combinar com o
    design
253 for label in chk_p2.labels:
254     label.set_fontsize(11)
255     label.set_fontweight('bold')
256     label.set_color('darkorange')
257     label.set_alpha(0.8) # Deixa o texto levemente suave
258
259 # Caixas P2 (Ocultas inicialmente)
260 rect_p2 = FancyBboxPatch((0.055, 0.475), 0.12, 0.12, transform=fig.
    transFigure, boxstyle="round,pad=0.01", facecolor="orange", alpha
    =0.15, zorder=-1)
261 rect_p2.set_visible(False) # Começa oculto
262 fig.patches.append(rect_p2)
263 txt_p2_label = fig.text(0.115, 0.57, "Partícula 2", fontsize=11,
264     fontweight='bold', color='orange', ha='center',
    visible=False)
265 ax_s2 = fig.add_axes([0.127, 0.52, 0.04, 0.03])
266 ax_phi2 = fig.add_axes([0.124, 0.48, 0.04, 0.03])
267 txt_s2 = TextBox(ax_s2, r'$s_2 \in [0, s_{total}] \backslash : $ ', initial="0.11"
    )
268 txt_phi2 = TextBox(ax_phi2, r'$\varphi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \backslash : $ ', initial="0.31")
269
270 ax_s2.set_visible(False); ax_phi2.set_visible(False)
271
272 ##### Centraliza o texto internamente
273 def centralizar_textbox(widget):
274     # Move a ancoragem para o meio (0.5) e centraliza o alinhamento
275     widget.text_disp.set_position((0.5, 0.5))
276     widget.text_disp.set_horizontalalignment('center')
277     widget.text_disp.set_verticalalignment('center')
278
279 # Aplique a função em cada uma das suas caixas:
280 centralizar_textbox(txt_r)
281 centralizar_textbox(txt_b)
282 centralizar_textbox(txt_s1)
283 centralizar_textbox(txt_phi1)
284 centralizar_textbox(txt_s2)
285 centralizar_textbox(txt_phi2)
286
287 # --- FUNÇÃO PARA NORMALIZAR O VALOR DE 's' NA INTERFACE ---
288 def normalizar_s(texto_digitado, widget_textbox):
289     try:
290         s_val = float(texto_digitado)
291         r = float(txt_r.text)
292         b = float(txt_b.text)

```

```

293
294     # Verifica se a mesa (limão) existe com os r e b atuais
295     if (b < r + 1) and (b > abs(r - 1)):
296         # Recalcula s_total com base na geometria atual
297         x_int = (r**2 - 1 - b**2) / (2 * b)
298         y_int = np.sqrt(max(0, 1 - x_int**2))
299         phi_c1 = np.arccos(x_int)
300         len_g1 = 2 * np.pi - 2 * phi_c1
301         phi_dr = np.arctan2(y_int, x_int + b)
302         len_gr = 2 * phi_dr * r
303         s_total = len_g1 + len_gr
304
305         # Calcula o módulo
306         s_norm = s_val % s_total
307
308         # Atualiza a caixa de texto apenas se o valor mudou
309         # (isso evita loops infinitos se o set_val disparar o evento
novamente)
310         if abs(s_val - s_norm) > 1e-6:
311             widget_textbox.set_val(f"{s_norm:.3f}")
312     except ValueError:
313         pass # Ignora caso o usuário digite texto em vez de números
314
315 # --- CONECTANDO O EVENTO ÀS CAIXAS S1 E S2 ---
316 txt_s1.on_submit(lambda text: normalizar_s(text, txt_s1))
317 txt_s2.on_submit(lambda text: normalizar_s(text, txt_s2))
318
319 ##### Botão Atualizar (movido mais para baixo)
320 ax_btn = fig.add_axes([0.055, 0.08, 0.12, 0.05]); btn = Button(ax_btn, '
Reiniciar Simulação')
321
322 # Lógica para mostrar/esconder a UI da Partícula 2
323 def alternar_p2(label):
324     visivel = chk_p2.get_status()[0]
325     ax_s2.set_visible(visivel)
326     ax_phi2.set_visible(visivel)
327     txt_p2_label.set_visible(visivel)
328     rect_p2.set_visible(visivel)
329     fig.canvas.draw_idle()
330 chk_p2.on_clicked(alternar_p2)
331
332 # --- INSTANCIACÃO DAS PARTÍCULAS E OBJETOS GRÁFICOS ---
333 p1 = ParticulaBilhar(0.0, 0.3, 1.5, 0.8)
334 p2 = ParticulaBilhar(0.0, 0.31, 1.5, 0.8) # P2 criada, mas controlada
por flag
335 p2_ativa = False
336

```

```

337 desenhar_sistema(ax_main, ax_ref, ax_info, ax_map, 1.5, 0.8, 0.0, 0.3)
338
339 # Objetos gráficos P1 (Indigo)
340 traco1, = ax_main.plot([], [], 'indigo', lw=1.2, alpha=0.7)
341 ponto1, = ax_main.plot([], [], color='indigo', marker='o', markersize=6)
342 mapa1, = ax_map.plot([], [], color='indigo', marker='o', markersize=1.8,
    alpha=0.5, linestyle='None')
343
344 # Objetos gráficos P2 (Orange)
345 traco2, = ax_main.plot([], [], 'orange', lw=1.2, alpha=0.7)
346 ponto2, = ax_main.plot([], [], color='orange', marker='o', markersize=6)
347 mapa2, = ax_map.plot([], [], color='orange', marker='o', markersize=1.8,
    alpha=0.5, linestyle='None')
348
349 # --- ATUALIZAÇÃO DOS DADOS ---
350 def atualizar_btn(event):
351     # IMPORTANTE: Adicionamos 'ani' à lista de variáveis globais
352     global p2_ativa, traco1, ponto1, mapa1, traco2, ponto2, mapa2, ani
353     try:
354         rv, bv = float(txt_r.text), float(txt_b.text)
355         s1v, phi1v = float(txt_s1.text), float(txt_phi1.text)
356
357         p2_ativa = chk_p2.get_status()[0]
358
359         # 1. Parar a animação atual para não conflitar com a limpeza da
360         # tela
361         if 'ani' in globals() and ani.event_source is not None:
362             ani.event_source.stop()
363
364         if desenhar_sistema(ax_main, ax_ref, ax_info, ax_map, rv, bv,
365             s1v, phi1v):
366             p1.reset(s1v, phi1v, rv, bv)
367
368             # Limpa e recria gráficos da P1
369             traco1, = ax_main.plot([], [], 'indigo', lw=1.2, alpha=0.7)
370             ponto1, = ax_main.plot([], [], color='indigo', marker='o',
371                 markersize=6)
372             mapa1, = ax_map.plot([], [], color='indigo', marker='o',
373                 markersize=1.8, alpha=0.5, linestyle='None')
374
375             if p2_ativa:
376                 s2v, phi2v = float(txt_s2.text), float(txt_phi2.text)
377                 p2.reset(s2v, phi2v, rv, bv)
378             else:
379                 p2.rastra.clear(); p2.historico_mapa.clear()
380
381             # Limpa e recria gráficos da P2

```

```

378         traco2, = ax_main.plot([], [], 'orange', lw=1.2, alpha=0.7)
379         ponto2, = ax_main.plot([], [], color='orange', marker='o',
380                                 markersize=6)
381
382         mapa2, = ax_map.plot([], [], color='orange', marker='o',
383                               markersize=1.8, alpha=0.5, linestyle='None')
384
385         # 2. Forçar a renderização imediata do novo fundo (A nova
386         # mesa)
387         fig.canvas.draw()
388
389         # 3. Recriar a animação. Isso força o blit a tirar uma nova
390         # "foto" do fundo atualizado.
391         ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, interval=10,
392                                       blit=True, cache_frame_data=False)
393
394     except ValueError:
395         pass
396
397 btn.on_clicked(atualizar_btn)
398
399 # --- BOTÃO EXTRA: LIMPAR MAPA ---
400 # Posição y=0.02 coloca ele logo abaixo do botão de Reiniciar (que está
401 # em y=0.08)
402 ax_btn_limpar = fig.add_axes([0.055, 0.02, 0.12, 0.05])
403 btn_limpar = Button(ax_btn_limpar, 'Limpar Mapa')
404
405 def limpar_mapa(event):
406     # Esvazia o histórico das duas partículas
407     p1.historico_mapa.clear()
408     p2.historico_mapa.clear()
409
410     # Limpa os dados visuais plotados no momento
411     mapa1.set_data([], [])
412     mapa2.set_data([], [])
413
414     # Força a interface a apagar os pontos velhos imediatamente
415     fig.canvas.draw_idle()
416
417 btn_limpar.on_clicked(limpar_mapa)
418
419 # --- LOOP DE ANIMAÇÃO ---
420 def animate(i):
421     graficos = []
422
423     # Processa P1
424     if p1.valido:
425         p1.atualizar()

```

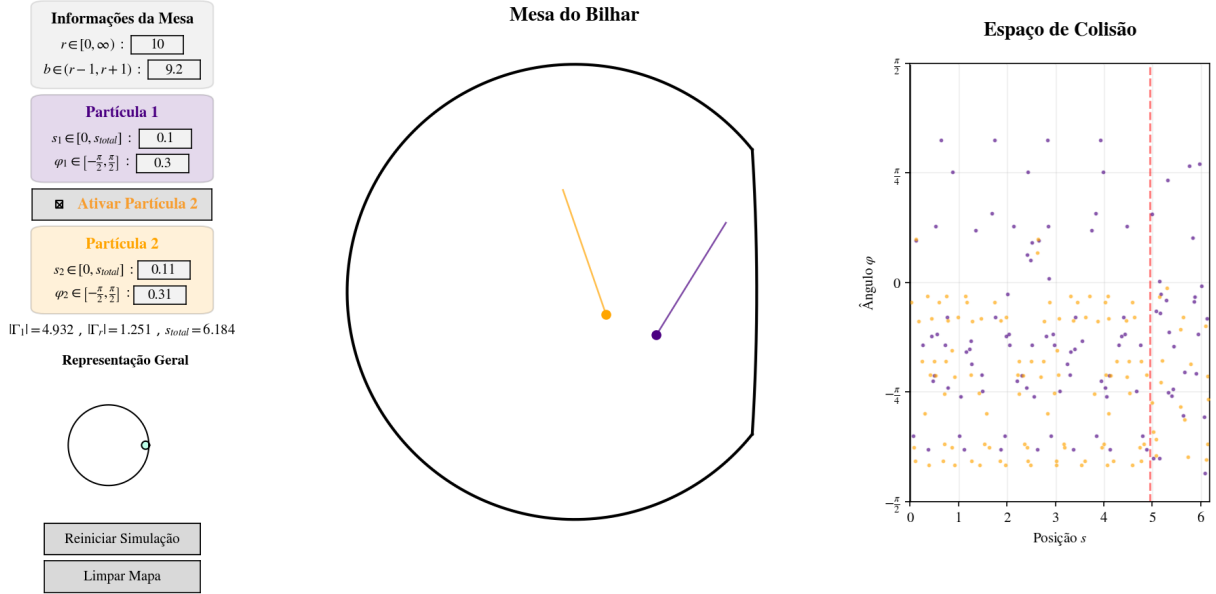
```

419         if p1.rastro:
420             x, y = zip(*p1.rastro); traco1.set_data(x, y)
421             ponto1.set_data([p1.pos[0]], [p1.pos[1]])
422         if p1.historico_mapa:
423             s_pts, phi_pts = zip(*p1.historico_mapa); mapa1.set_data(
424             s_pts, phi_pts)
425             graficos.extend([traco1, ponto1, mapa1])
426
427     # Processa P2 (se ativada pelo usuário)
428     if p2_ativa and p2.valido:
429         p2.atualizar()
430         if p2.rastro:
431             x, y = zip(*p2.rastro); traco2.set_data(x, y)
432             ponto2.set_data([p2.pos[0]], [p2.pos[1]])
433         if p2.historico_mapa:
434             s_pts, phi_pts = zip(*p2.historico_mapa); mapa2.set_data(
435             s_pts, phi_pts)
436             graficos.extend([traco2, ponto2, mapa2])
437         else:
438             # Se P2 for desativada durante a execução, esvazia os dados
439             visuais
440             traco2.set_data([], []); ponto2.set_data([], []); mapa2.set_data
441             ([], [])
442             graficos.extend([traco2, ponto2, mapa2])
443
444     return graficos
445
446 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, interval=10, blit=True,
447                               cache_frame_data=False)
448 plt.show()

```

Na Figura A.2 abaixo, apresentamos a interface da simulação gerada pelo código acima.

Figura A.2 – Interface da simulação do bilhar no limão assimétrico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Similarmente à interface da Figura A.1, na interface acima consta a mesa do bilhar na qual estamos trabalhando tal como o espaço de colisão, com coordenadas s e φ , atrelado a aplicação de colisão. O espaço de colisão mapeia tanto as colisões da partícula 1, representada pela cor roxa, quanto as colisões da partícula 2, representada pela cor laranja. Novamente, a presença da segunda partícula é opcional. Além disso, somos capazes de definirmos as partículas mencionadas inserindo suas coordenadas iniciais em suas respectivas caixas de texto, conforme mostra a imagem. Sempre que alterarmos as condições iniciais, devemos selecionar a opção “Reiniciar Simulação” para que o código utilize os novos valores selecionados.

Agora, diferente do código anterior, temos um controle maior sobre a mesa estudada. No caso, podemos definir os valores de r e b que geram a mesa. Para valores consistentes, a mesa do bilhar é gerada e representada de forma explícita no centro da interface, enquanto que a situação gráfica que gera tal mesa é representada com menos destaque no canto inferior esquerdo da interface.

Para cada mesa escolhida, as componentes Γ_1 e Γ_r apresentam comprimentos distintos, consequentemente, o comprimento total da mesa, denotado por s_{total} , também varia. Todos estes valores são calculados e exibidos abaixo da caixa atrelada à partícula 2. Em especial, no espaço de fase sempre há uma linha vertical vermelha, que representa justamente a reta $s = |\Gamma_1|$, que está contida no conjunto das singularidades do bilhar.

A inserção de uma segunda partícula é interessante pois nos permite comparar

órbitas de dois pontos próximos. Neste caso, outra funcionalidade útil é o botão de “Limpar Mapa”, que limpa o espaço de colisão sem reiniciar a simulação, possibilitando a comparação da órbita de dois pontos em um momento futuro de forma mais clara, visto que retira a poluição gerada pelas colisões até o momento escolhido.

Por fim, ressaltamos que apesar das simulações apresentadas serem muito úteis para uma melhor compreensão da dinâmica, elas não passam de ferramentas e devem ser analisadas com cuidado, visto que, devido aos erros de aproximações e as iterações sucessivas dos mesmos, a confiabilidade da simulação diminui conforme o tempo aumenta.

ÍNDICE

Symbols

σ -álgebra	37
de Borel	38
n -célula	38

A

Aplicação	
de colisão	56
de involução	61
de primeiro retorno, induzida	41
hiperbólica	44
mensurável	40

B

Bilhar no limão	73
assimétrico	75
Borelianos	38

C

Campo de cones	68
Classe de suavidade	46
Codimensão	32
Colisão	
regular	53
tangencial	53
Componente, parede	46
arco	46
curva fechada	46
dispersora, côncava	50
flat, plana	50
focalizadora, convexa	50
Conjunto	
de singularidades	58
dos pontos regulares	47
dos vértices	47
Lebesgue mensurável	39
mensurável	37
Curva	
plana	17
regular	17
reparametrizada	17

unitária	17
Curvatura	19
pré-colisional	64
pós-colisional	64
Cúspide	48

D

Difeomorfismo hiperbólico	37
---------------------------------	----

E

Equação do espelho	67
Espaço	
de colisão	56
de fase	55
de medida	39
de probabilidade	39
estável	37
instável	37
mensurável	37
Tangente	32
Expoente de Lyapunov	43, 44
multiplicidade	44

F

Fluxo	33
do bilhar	55
suspensão	35
Fração contínua	
finita	21
infinita	21
segmento	21
Frente de onda	
degenerada	65
dispersora	65
flat	65
focalizadora	64
Frente de ondas	
pré-colisional	64
pós-colisional	63
Função	
comprimento de arco	17

I			
Ilhas elípticas	74	Seção	
L		de Poincaré	36
Lema		de Poincaré global	36
de Kac	42	Sistema de bilhar	45
M		Sistema dinâmico	
Medida	38	contínuo	33
absolutamente contínua	40	discreto	33
de Borel	38	Subvariedade	32
de Lebesgue	39	Suspensão	35
de probabilidade	38	discreta	41
finita	38	T	
invariante, f -invariante	40	Tempo	
normalizada	38	de focalização	64
Mesa do bilhar	46	de primeira saída	78
O		de primeiro retorno	36
Órbita	34	Teorema	
Elíptica	59	da Variedade Estável	37
Hiperbólica	59	de Birkhoff	43
Parabólica	59	de Hartman-Grobman	37
P		de Oseledets	44
Parametrização local	32	de recorrência de Poincaré	40
Parâmetro de reflexão	67	de Seidel-Stern	31
Ponto		de Whitney	32
de reflexão, de colisão	57	Torre	41
fixo	34	Transformação	
hiperbólico	44	de Poincaré	36
periódico	35	de Poincaré global	36
Ponto regular	47	V	
Probabilidade	38	Variedade	32
do bilhar	60	transversal	33
Q		riemanniana	33
Quase todo ponto	39	Vetor	
R		normal	18
Reparametrização	17	tangente	18
S		velocidade	51
Semiórbita		Volume	38
negativa	34	Vértice	47
positiva	34	lados	48
		regular	48
		simples	48
		ângulo interior	48