

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos robustamente transitivos: o exemplo
do Shub e a classe de Shub

Juiz de Fora

2026

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

**Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos robustamente transitivos: o exemplo
do Shub e a classe de Shub**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Meirelles de Azevedo, Pedro Henrique.

Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos robustamente transitivos : o exemplo do Shub e a classe de Shub / Pedro Henrique Meirelles de Azevedo. – 2026.

110 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2026.

1. Parcialmente Hiperbólico. 2. Transitivo. 3. Exemplo do Shub. 4. Classe de Shub. I. Gomes, José Barbosa, orient. II. Título.

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos robustamente transitivos: o exemplo do Shub e a classe de Shub

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovada em 27 de fevereiro de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Regis Castijos Soares Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Pouya Mehdipour
Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 08/07/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Jose Barbosa Gomes, Professor(a)**, em 08/07/2026, às 17:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Regis Castijos Alves Soares Junior, Professor(a)**, em 16/07/2026, às 11:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pouya Mehdipour, Usuário Externo**, em 17/07/2026, às 12:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3073721** e o código CRC **3E81ABCF**.

Dedico este trabalho à minha mãe, ao meu irmão e às
minhas irmãs.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Ana Paula, ao meu irmão, Felipe, e às minhas irmãs, Ariane e Mariana, por todo o apoio, que foi fundamental para que eu chegasse até aqui.

Agradeço ao professor José Barbosa pela orientação e por estar sempre disposto a discutir minhas dúvidas, o que contribuiu significativamente para uma maior compreensão dessa teoria. Agradeço também ao professor Regis por ter me introduzido na área de sistemas dinâmicos, ainda durante a graduação.

Agradeço a todos os colegas com os quais eu tive contato durante a pós-graduação. Em particular, agradeço ao Gustavo pelas incontáveis horas de conversas, sejam elas matemáticas ou não.

Agradeço a todos os demais professores do departamento que, de alguma forma, participaram da minha formação.

Por fim, agradeço à CAPES e à FAPEMIG pelo auxílio financeiro concedido durante o mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, discutimos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos robustamente transitivos, com ênfase no exemplo clássico do Shub e a classe de Shub. Analisamos a construção original do exemplo de Shub, o primeiro exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico estritamente não hiperbólico a apresentar a transitividade robusta, e a generalização proposta pela classe de Shub, introduzida em 2025.

Palavras-chave: parcialmente hiperbólico; transitivo; exemplo do Shub; classe de Shub.

ABSTRACT

In this work, we discuss robustly transitive partially hyperbolic diffeomorphisms, with emphasis on the classical Shub's example and the Shub class. We analyze the original construction of the Shub example, the first example of a strictly non-hyperbolic partially hyperbolic diffeomorphism exhibiting robust transitivity, and the generalization proposed by the Shub class, introduced in 2025.

Keywords: partially hyperbolic; transitive; Shub's example; Shub class.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Variedade	19
Figura 2	– Folheação	25
Figura 3	– Holonomia	26
Figura 4	– Órbita de um ponto	30
Figura 5	– Representação da transitividade	33
Figura 6	– Isomorfismo Linear Hiperbólico	36
Figura 7	– α -Cone Estável	37
Figura 8	– α -Cone Instável	37
Figura 9	– λ -lema	62
Figura 10	– Ponto Homoclínico	65
Figura 11	– Pontos Homoclinicamente Relacionados	65
Figura 12	– Interseção entre $W^{cs}(p)$ e $W^{cu}(p)$	66
Figura 13	– Toro $\mathbb{T}^2$	68
Figura 14	– Imagem $A(\mathbb{T}^2)$	68
Figura 15	– Projeção $\pi \circ A(\mathbb{T}^2)$	68
Figura 16	– Antes da cirurgia	70
Figura 17	– Gráfico da <i>bump function</i>	70
Figura 18	– Depois da cirurgia	72
Figura 19	– Representação das vizinhanças V_q e U_q	76
Figura 20	– Holonomia Instável	85
Figura 21	– Aplicação $\tilde{h}_q$	95

LISTA DE SÍMBOLOS

C_s^α	α -cone estável
$C_s^\alpha(x)$	α -cone estável em x
C_u^α	α -cone instável
$C_u^\alpha(x)$	α -cone instável em x
i_d	Aplicação identidade
i	Aplicação inclusão
$f_{A,B}$	Aplicação induzida por A, B
F_A	Automorfismo hiperbólico induzido por A
$\mathcal{SH}$	Classe de Shub
$\mathcal{SH}^r$	Classe de Shub C^r
$\mathcal{SH}_b^r$	Classe de Shub Agrupada
$\mathcal{HC}(\mathcal{O}(p))$	Classe Homoclínica da órbita de p
$C^r(M, N)$	Conjunto das aplicações $f : M \rightarrow N$ de classe C^r
$\mathcal{PH}_{A,B}$	Conjunto definido na página 82
$\mathcal{PH}_{A,B}^0$	Conjunto definido na página 82
$\mathcal{U}_s^r$	Conjunto definido na página 96
$\mathcal{U}_u^r$	Conjunto definido na página 96
$\mathcal{U}^r$	Conjunto definido na página 96
$\text{Diff}^r(M)$	Conjunto dos difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ de classe de C^r
$\text{Per}(f)$	Conjunto dos pontos periódicos de f
Ω_f	Conjunto não-errante de f
v_s	Coordenada estável de v
v_u	Coordenada instável de v
$D_p f$	Derivada de f no ponto p
$\dim E$	Dimensão de E
$E^c(x)$	Espaço central em x
$E^{cs}(x)$	Espaço centro-estável em x
$E^{cu}(x)$	Espaço centro-instável em x
E^s	Espaço estável
$E^s(x)$	Espaço estável em x
E^u	Espaço instável
$E^u(x)$	Espaço instável em x
$T_p M$	Espaço tangente a M no ponto p
TM	Fibrado tangente a M
$\mathcal{F}^c(p)$	Folha central de p
$\mathcal{F}^{cs}(p)$	Folha centro-estável de p
$\mathcal{F}^{cu}(p)$	Folha centro-instável de p
$\mathcal{F}^s(p)$	Folha estável de p
$\mathcal{F}^u(p)$	Folha instável de p
$\mathcal{F}^c$	Folheação central

$\mathcal{F}^{cs})$	Folheação centro-estável
$\mathcal{F}^{cu}$	Folheação centro-instável
$\mathcal{F}^s$	Folheação estável
$\mathcal{F}^u$	Folheação instável
h^s	Holonomia estável
h^u	Holonomia instável
$\mathcal{O}_f(x)$	Órbita de x com relação a f
p_1	Projeção na primeira coordenada
T_*	Projetivização de T
$\overline{\cap}$	Transversalidade
$W^c(p)$	Variedade central de p
$W^{cs}(p)$	Variedade centro-estável de p
$W^{cu}(p)$	Variedade centro-instável de p
$W^s(p)$	Variedade estável de p
$W^u(p)$	Variedade instável de p
$W_r^s(p)$	Variedade estável local de tamanho r de p
$W_r^u(p)$	Variedade instável local de tamanho r de p

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	TOPOLOGIA GERAL	13
2.2	TEORIA DE VARIEDADES	18
2.3	TEORIA DE FOLHEAÇÕES	23
2.4	TEORIA DE FIBRADOS	26
2.5	TOPOLOGIA C^r	28
2.6	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS	30
3	HIPERBOLICIDADE E HIPERBOLICIDADE PARCIAL . .	35
3.1	ISOMORFISMOS HIPERBÓLICOS	35
3.2	CONJUNTOS HIPERBÓLICOS	45
3.3	CONJUNTOS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS	56
3.4	VARIEDADES INVARIANTES	58
3.5	INTERSEÇÕES HOMOCLÍNICAS	64
3.6	AUTOMORFISMOS LINEARES HIPERBÓLICOS DO TORO	66
3.7	DIFEOMORFISMOS DERIVADOS DE ANOSOV	69
4	O EXEMPLO DO SHUB	73
4.1	O EXEMPLO DO SHUB: CASO GERAL	73
4.2	O EXEMPLO DO SHUB: CASO PARTICULAR	75
5	A CLASSE DE SHUB	80
5.1	A CONSTRUÇÃO DA CLASSE DE SHUB	80
5.2	RESULTADOS PRINCIPAIS	84
6	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

Na matemática, a teoria de sistemas dinâmicos é a área responsável por estudar a forma como um sistema evolui com o tempo. Seu objetivo é compreender tanto o comportamento individual de cada trajetória quanto a complexidade geral do sistema, analisando seu comportamento qualitativo e as propriedades geométricas que emergem a longo prazo.

O desenvolvimento dessa disciplina tem como marco inicial os trabalhos de Henri Poincaré que, ao estudar a mecânica dos corpos celestes na década de 1890, introduziu conceitos fundamentais como variedades estáveis e instáveis e interseções homoclínicas, além de analisar problemas de estabilidade. As contribuições mencionadas estão presentes principalmente em suas obras *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, (34), e *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, (35). Posteriormente, George D. Birkhoff deu continuidade ao legado de Poincaré, consolidando as bases teóricas deste campo.

Em 1937, no artigo *Systèmes Grossiers*, (36), Aleksandr Andronov e Lev Pontryagin introduziram formalmente o conceito de estabilidade estrutural, que descreve sistemas cujo comportamento qualitativo permanece inalterado quando submetidos a pequenas perturbações. A preservação de propriedades dinâmicas sob perturbações admitiu grande importância nessa teoria. Nesse contexto, dizemos que uma propriedade é robusta quando é preservada por pequenas perturbações. Em particular, uma característica dinâmica que nos será de particular interesse é a transitividade, isto é, a propriedade de possuir uma órbita densa.

O primeiro exemplo de difeomorfismo a apresentar a propriedade de transitividade robusta foi apresentado em 1969 por Dmitri Anosov, em sua obra *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, (37). Nesse texto, o autor demonstra que os difeomorfismos de Anosov são estáveis frente a perturbações quando considerada a topologia C^1 . A partir daí, como corolário, segue que todo difeomorfismo Anosov transitivo é C^1 robustamente transitivo.

Em 1971, Michael Shub introduziu nos artigos *Topologically transitive diffeomorphisms of $\mathbb{T}^4$* , (24), e *Instability*, (25), o clássico exemplo do Shub, construído no toro $\mathbb{T}^4$. Essa construção representou o primeiro exemplo de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, não hiperbólico, a exibir a propriedade de transitiva robusta. Poucos anos depois, em 1978, no artigo *Contributions to the stability conjecture*, (38), Ricardo Mañé apresenta outro exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico, não hiperbólico, exibindo a propriedade de transitividade robusta, dessa vez construído no toro $\mathbb{T}^3$.

Recentemente, em 2025, no artigo *Shub's example revisited*, (27), Chao Liang, Radu Saghin, Fan Yang e Jiagang Yang apresentam uma nova construção baseada no

trabalho de Shub, introduzindo uma classe de aplicações denominada *classe de Shub*. No presente trabalho, analisaremos o artigo mencionado acima, discutindo alguns dos principais resultados expostos pelo mesmo. Entre os principais resultados considerados, destacam-se a demonstração de que o subconjunto $\mathcal{U}^r$ da classe de Shub é aberto na topologia C^2 , a relação homoclínica entre quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos com variedade estável bidimensional de uma aplicação neste conjunto e a unicidade da classe homoclínica associada a esses pontos, a qual coincide com toda a variedade ambiente.

Nos parágrafos a seguir, apresentamos uma breve descrição da organização deste trabalho e do conteúdo de cada um dos capítulos.

No Capítulo 2, estabelecemos os pré-requisitos básicos de diferentes áreas da matemática necessários para a compreensão do restante do texto. Entre os tópicos abordados estão topologia geral, teoria de folheações, teoria de fibrados, topologia C^r e sistemas dinâmicos.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de hiperbolicidade em diferentes contextos. Mais precisamente, consideramos isomorfismos hiperbólicos, conjuntos hiperbólicos e conjuntos parcialmente hiperbólicos. Em seguida, estudamos as variedades invariantes e suas interseções, isto é, os pontos de interseção homoclínica. Ao final desse capítulo, apresentamos dois exemplos clássicos de aplicações com comportamento hiperbólico: os automorfismos lineares hiperbólicos do toro e os difeomorfismos derivados de Anosov.

No Capítulo 4, abordamos o exemplo do Shub. Primeiramente, enunciamos um teorema demonstrado por Shub que fornece condições suficientes para que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico seja robustamente transitivo. Em seguida, apresentaremos um exemplo de aplicação que satisfaz as condições do teorema citado. Esse exemplo é tipicamente conhecido como exemplo do Shub.

No capítulo 5, apresentamos a Classe de Shub, uma construção desenvolvida a partir do exemplo do Shub. Descrevemos a construção mencionada e apresentamos os resultados principais desse trabalho.

No Capítulo 6, recapitulamos as discussões realizadas. Para finalizarmos esse capítulo, discutimos brevemente outros avanços recentes na área de dinâmica parcialmente hiperbólica.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, estabeleceremos os pré-requisitos essenciais para o prosseguimento deste trabalho. Serão apresentados definições e resultados básicos de diversas áreas, como topologia geral, teoria de folheações e sistemas dinâmicos.

2.1 TOPOLOGIA GERAL

Nesta seção, apresentaremos uma compilação dos conceitos e resultados básicos topológicos que serão utilizados ao longo do trabalho. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (1) e (3).

Definição 2.1.1 *Seja X um conjunto. Uma coleção τ de subconjuntos de X é dita uma **topologia** se satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$,
- Se $U_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in \Lambda$, então $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau$,
- Se $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Neste caso, aos elementos de τ chamamos de **abertos** e ao par (X, τ) damos o nome de **espaço topológico**. Adicionalmente, dizemos que um subconjunto de X é **fechado** se o seu complementar é aberto.

Definição 2.1.2 *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . O **fecho** de A , denotado por $\overline{A}$, é definido como a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A .*

Definição 2.1.3 *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Dizemos que o subconjunto A é **denso** em X se $\overline{A} = X$.*

Uma propriedade importante que algumas topologias possuem é a capacidade de “separar” pontos distintos usando conjuntos abertos. Motivados por isso, apresentamos a definição a seguir.

Definição 2.1.4 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Hausdorff** se, para quaisquer $x, y \in X$, existirem abertos U_1 e U_2 , contendo x e y , respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Em geral, topologias possuem uma grande quantidade de conjuntos abertos, de modo que se torna difícil explicitarmos cada um desses conjuntos individualmente. Para resolvermos esse problema, definimos o conceito de base, que nos permite descrever completamente uma topologia a partir de uma subcoleção de conjuntos da mesma.

Definição 2.1.5 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X é uma **base** para uma topologia em X se $\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$,
- Se $x \in B_1 \cap B_2$, em que $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

A **topologia gerada** pela base $\mathcal{B}$ pode então ser definida da seguinte forma: Um subconjunto $U \subset X$ é aberto se, para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Uma maneira alternativa de descrevermos uma topologia a partir de uma coleção ainda mais elementar de subconjuntos é através do conceito de subbase.

Definição 2.1.6 *Seja X um espaço topológico. Dizemos uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X é uma **subbase** para uma topologia em X se $\mathcal{S}$ cobre X , isto é,*

$$X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S.$$

A **base gerada pela subbase** $\mathcal{S}$ é a coleção

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n; S_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Nessa situação, dizemos que a **topologia gerada pela subbase** é a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$, que, por sua vez, é gerada por $\mathcal{S}$.

Ao considerarmos um subconjunto de um espaço topológico, existe uma maneira canônica de dotarmos esse subespaço com uma topologia induzida pela topologia do espaço maior. Essa construção é denominada topologia do subespaço, formalizada na definição a seguir.

Definição 2.1.7 *Sejam (X, τ_X) um espaço topológico e $Y \subset X$. A coleção*

$$\tau_Y = \{U \cap Y; U \text{ é aberto em } X\}$$

*forma uma topologia em Y , denominada **topologia do subespaço**. Neste caso, dizemos que (Y, τ_Y) é um **subespaço topológico** de (X, τ_X) .*

Outra forma usual de se definir uma topologia é partindo do conceito de distância. Nessa contexto, introduzimos a topologia induzida por uma métrica, conhecida como topologia da métrica.

Definição 2.1.8 *Seja X um conjunto. Uma **métrica** em X é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$, são satisfeitas as seguintes propriedades:*

- *Positividade:* $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- *Simetria:* $d(x, y) = d(y, x)$,
- *Desigualdade Triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Neste caso, ao par (X, d) damos o nome de **espaço métrico**. Em particular, a coleção $\{B(x, \varepsilon) ; x \in X \text{ e } \varepsilon > 0\}$ é base para uma topologia X , denominada **topologia da métrica**.

A partir de dois espaços topológicos arbitrários, podemos induzir uma topologia no produto cartesiano. Essa topologia é gerada pela coleção de produtos de abertos desses dois espaços.

Definição 2.1.9 *Sejam X e Y espaços topológicos. Consideremos a coleção*

$$\mathcal{B} = \{U \times V ; U \text{ é aberto de } X \text{ e } V \text{ é aberto de } Y\}.$$

*A coleção $\mathcal{B}$ é base para uma topologia sobre $X \times Y$, denominada **topologia produto**.*

Agora, introduziremos o conceito de continuidade.

Definição 2.1.10 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita **contínua** se, para todo subconjunto aberto V de Y , a pré-imagem $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X .*

Definição 2.1.11 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação bijetora $f : X \rightarrow Y$ é dita um **homeomorfismo** se f e sua inversa f^{-1} forem aplicações contínuas.*

A partir daqui, exploraremos algumas propriedades que espaços topológicos podem apresentar. A primeira delas será a conexidade, que é apresentada na definição a seguir.

Definição 2.1.12 *Seja X um espaço topológico. Uma **cisão** de X é um par A, B de subconjuntos de X não vazios, abertos e disjuntos tais que $X = A \cup B$. Dizemos que X é **conexo** se X não admite cisão.*

A seguir, apresentaremos outra propriedade que nos será de grande importância: a compacidade.

Definição 2.1.13 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **compacto** se, para toda coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de abertos de X satisfazendo $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Em outras palavras, X é compacto se toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.*

Proposição 2.1.14 *Seja X um espaço topológico. Se $\mathcal{K}$ é uma coleção de conjuntos compactos tal que a interseção de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{K}$ é não vazia, então $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$ é não vazia.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (4, Proposição A.1.6). ■

Proposição 2.1.15 *A imagem de um espaço compacto por uma aplicação contínua é um espaço compacto.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (1, Teorema 26.5). ■

Proposição 2.1.16 *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $Y \subset X$ é um subespaço compacto, então Y é fechado.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (1, Teorema 26.3). ■

Proposição 2.1.17 *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Então X é normal, isto é, dados $F_1, F_2 \subset X$ fechados e disjuntos, existem U e V abertos em X tais que $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (1, Teorema 32.3). ■

Proposição 2.1.18 *Sejam X um espaço métrico e $K \subset X$ um conjunto compacto. Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K) = 0,$$

então existe uma subsequência (x_{n_k}) convergindo para um ponto de K .

Definição 2.1.19 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **localmente compacto** se, para cada $x \in X$, existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que K contém uma vizinhança do ponto x .*

Proposição 2.1.20 *Seja X um espaço de Hausdorff. Então X é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ e U vizinhança de x , existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (1, Teorema 29.2). ■

A próxima propriedade que veremos será a separabilidade.

Definição 2.1.21 *Seja X um espaço topológico. O espaço X é dito **separável** se possuir um subconjunto enumerável denso.*

Proposição 2.1.22 *Seja X um espaço métrico separável. Então, existe uma base enumerável para a topologia de X .*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (3, Proposição 1, Capítulo 9). ■

Para finalizarmos essa seção, apresentaremos os espaços primeiro enumeráveis.

Definição 2.1.23 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X possui uma base enumerável no ponto x se existe uma coleção enumerável de vizinhanças de x , a saber, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que, para qualquer vizinhança U de x , temos $B_n \subset U$, para pelo menos um $n \in \mathbb{N}$.*

*Em particular, no caso em que todos os pontos de X possuem base enumerável, dizemos que X é **primeiro enumerável**.*

Proposição 2.1.24 *Seja X um espaço topológico compacto e primeiro enumerável. Então, X é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência de elementos de X admite uma subsequência convergente.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (2, Teorema 3.10.31). ■

2.2 TEORIA DE VARIEDADES

Nesta seção, introduziremos as definições e resultados fundamentais da teoria de variedades. Esses resultados terão grande importância para o nosso prosseguimento, uma vez que as variedades constituirão o ambiente padrão no qual realizaremos as discussões subsequentes. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (5) e (6).

Definição 2.2.1 *Seja M um espaço topológico. Uma **carta local** de M é um par (φ, U) , em que U é um aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. Uma coleção $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cartas locais é dita um **atlas** de classe C^r e dimensão n de M se são satisfeitas as seguintes propriedades*

1. A coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobre M , isto é, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$,
2. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação **mudança de coordenadas** $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo de classe C^r .

Em particular, um atlas $\mathcal{A}$ é dito **maximal** quando, para todo par (φ, U) , em que U é um aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, é válido que, se a aplicação mudança de coordenadas $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi(U \cap U_\alpha)$ é um difeomorfismo de classe C^r para todo $(\varphi_\alpha, U_\alpha) \in \mathcal{A}$ tal que $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$, então $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$.

Definição 2.2.2 *Sejam M, N espaços topológicos, com atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de classe C^r e dimensões m e n , respectivamente. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é uma **aplicação diferenciável** de classe C^r se, para cada ponto $p \in M$, existem cartas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que U e V são abertos de M e N , respectivamente, tais que $p \in U$ e $f(U) \subset V$, satisfazendo que a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ é de classe C^r .*

Observação 2.2.3 *A definição acima não depende da escolha das cartas locais (φ, U) e (ψ, V) .*

Notação 2.2.4 *Denotaremos o conjunto das aplicações diferenciáveis $f : M \rightarrow N$ de classe C^r por $C^r(M, N)$.*

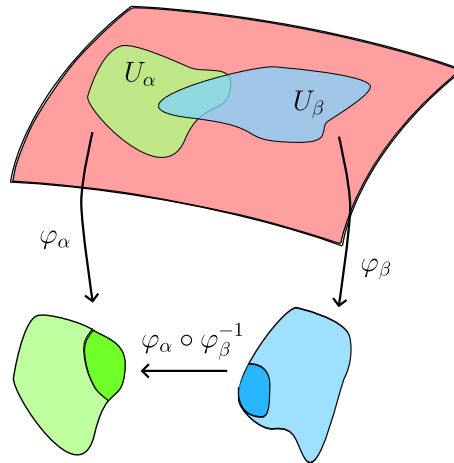
Definição 2.2.5 *Sejam M, N espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação bijetora $f : M \rightarrow N$ é um **difeomorfismo** de classe C^r se f e sua inversa f^{-1} forem aplicações diferenciáveis de classe C^r .*

Definição 2.2.6 Seja (M, τ_M) um espaço de Hausdorff com base enumerável. Dizemos que M é uma **variedade** n -dimensional de classe C^r se existe uma coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de abertos de M tal que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$ satisfazendo as seguintes propriedades

1. Para cada $\alpha \in \Lambda$, existe um difeomorfismo de classe C^r $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$,
2. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação **mudança de coordenadas** $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo de classe C^r .

Na figura a seguir, ilustramos a interseção entre duas cartas locais de uma variedade, bem como a aplicação mudança de coordenadas induzida por essas cartas na região de interseção.

Figura 1 - Variedade



Fonte: O próprio autor (2026).

Agora, queremos introduzir o conceito de diferenciabilidade de aplicações entre variedades. Com esse objetivo, apresentamos as definições a seguir.

Definição 2.2.7 Sejam M uma variedade m -dimensional, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva e (φ, U) uma carta local em M , satisfazendo que a imagem de α esteja contida em U . Dizemos que α é uma **curva diferenciável** se a composição $\varphi \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável. Duas curvas $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ são ditas equivalentes se existir uma carta local (φ, U) de modo que tenhamos

$$\alpha(0) = \beta(0) \quad e \quad D_0(\varphi \circ \alpha) = D_0(\varphi \circ \beta),$$

em que $D_0(\varphi \circ \alpha)$ e $D_0(\varphi \circ \beta)$ representam as derivadas das aplicações $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$ na origem, respectivamente.

Nessa situação, o **vetor tangente** a α no ponto $p = \alpha(0)$ é definido como o conjunto das curvas diferenciáveis equivalentes a α .

Observação 2.2.8 A definição acima não depende da escolha da carta local (φ, U) .

Definição 2.2.9 Seja M uma variedade m -dimensional. Para cada ponto $p \in M$, o **espaço tangente** a M em p , denotado por $T_p M$, é definido como o conjunto dos vetores tangentes a curvas diferenciáveis passando por M .

Observação 2.2.10 Em cada ponto $p \in M$, o espaço tangente $T_p M$ é um espaço vetorial m -dimensional.

Definição 2.2.11 Sejam M, N variedades, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$ e $q \in N$ dois pontos tais que $f(p) = q$. A **derivada** de f no ponto p , denotada por $D_p f$, é definida como a aplicação que a cada vetor tangente no ponto p a uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ associa o vetor tangente em q à curva $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$.

Observação 2.2.12 A definição acima não depende da escolha da curva α . Adicionalmente, a aplicação $D_p f$ é uma transformação linear.

Definição 2.2.13 Sejam M, N variedades e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é uma **submersão** se, para cada ponto $p \in M$, a derivada $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetiva.

Observação 2.2.14 Como um exemplo de submersão, podemos citar as fibrações, que serão apresentadas na Definição 2.4.1, na página 26.

Definição 2.2.15 Sejam M, N variedades e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é uma **imersão** se, para cada ponto $p \in M$, a derivada $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva.

Definição 2.2.16 Sejam M, N variedades e $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Dizemos que f é um **mergulho** se f for um homeomorfismo sobre a imagem $f(M)$.

Nosso próximo objetivo é descrever situações em que subconjuntos de uma variedade podem ser considerados de certa forma uma subvariedade contida na variedade inicial. Nesse contexto, apresentaremos os conceitos de subvariedade mergulhada e subvariedade imersa.

Definição 2.2.17 *Seja M uma variedade m -dimensional de classe C^r . Dizemos que um subconjunto $N \subset M$ é uma **subvariedade mergulhada** n -dimensional de classe C^k (com $k \leq r$) de M se N , dotado da topologia do subespaço induzida por M , é uma variedade n -dimensional de classe C^k tal que a aplicação inclusão $i : N \rightarrow M$ é um mergulho de classe C^k .*

Equivalentemente, dizemos que um subconjunto $N \subset M$ é uma subvariedade mergulhada n -dimensional de classe C^k (com $k \leq r$) de M se, para cada $p \in N$, existem uma vizinhança U de p em M , abertos $V \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$, tais que $0 \in V$ e $0 \in W$, e um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V \times W$ de classe C^k satisfazendo $\varphi(U \cap N) = V \times \{0\}$.

Observação 2.2.18 *A equivalência mencionada acima pode ser encontrada em (5, Proposição 4, Capítulo 6).*

Observação 2.2.19 *Se M é uma variedade e $N \subset M$ é uma subvariedade mergulhada, então o espaço tangente $T_p N$ pode ser identificado com um subespaço de $T_p M$, através da aplicação $D_p i : T_p N \rightarrow T_p M$, em que $i : N \rightarrow M$ representa a aplicação inclusão.*

Definição 2.2.20 *Seja M uma variedade m -dimensional de classe C^r . Dizemos que um subconjunto $N \subset M$ é uma **subvariedade imersa** n -dimensional de classe C^k (com $k \leq r$) de M se N , dotado da topologia do subespaço induzida por M , é uma variedade n -dimensional de classe C^k tal que a aplicação inclusão $i : N \rightarrow M$ é uma imersão de classe C^k .*

Observação 2.2.21 *Em geral, nos referiremos às subvariedades mergulhadas apenas como subvariedades. Se quisermos nos referir às subvariedades imersas, usaremos explicitamente o termo subvariedade imersa.*

Definição 2.2.22 *Sejam M uma variedade e $N_1, N_2 \subset M$ subvariedades. Dizemos que N_1 e N_2 são **transversais** se, em cada ponto $p \in N_1 \cap N_2$, é satisfeita a condição*

$$T_p N_1 \oplus T_p N_2 = T_p M.$$

Nessa situação, utilizaremos a notação $N_1 \overline{\cap} N_2$.

Proposição 2.2.23 *Sejam M, N variedades de classe C^r , com dimensões m e n , respectivamente, em que $m \geq n$. Se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão, então, para cada ponto $p \in N$, a pré-imagem $f^{-1}(p)$ é vazia ou $f^{-1}(p)$ é uma subvariedade de classe C^r de M , com dimensão $m - n$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (5, Proposição 1, Capítulo 7). ■

Para concluirmos essa seção, analisaremos como o produto cartesiano de duas variedades define uma nova variedade.

Proposição 2.2.24 *Sejam M, N variedades de classe C^r , com dimensões m e n , respectivamente. Então, o produto $M \times N$ possui uma estrutura de variedade, com dimensão $m + n$ e classe C^r . Nessa situação, dizemos que a variedade $M \times N$ é uma **variedade produto**.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (5, Exemplo 4, Capítulo 4, Seção 4). ■

Proposição 2.2.25 *Sejam M, N variedades de classe C^r . Se $p \in M$ e $q \in N$, então o espaço tangente à variedade produto $M \times N$ no ponto (p, q) é dado pelo produto dos espaços tangentes $T_p M$ e $T_q N$, isto é*

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (5, Capítulo 6, Seção 4). ■

Definição 2.2.26 *Sejam M, N variedades e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações contínuas. Uma **homotopia** entre as aplicações f e g é uma aplicação contínua $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ satisfazendo*

$$H(x, 0) = f(x) \quad e \quad H(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in M$.

*Em particular, se para cada $t \in [0, 1]$ a aplicação $H_t : M \rightarrow N$ definida por $H_t(x) = H(x, t)$ for um mergulho, dizemos que H é uma **isotopia**.*

Definição 2.2.27 *Sejam X, Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita **θ -Hölder**, com $0 < \theta \leq 1$, se existe uma constante k tal que para todo $x, y \in X$*

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)^\theta.$$

Definição 2.2.28 *Uma variedade é dita uma **variedade Hölder** se as aplicações mudança de coordenadas são θ -Hölder.*

2.3 TEORIA DE FOLHEAÇÕES

Nesta seção, apresentaremos as definições e resultados essenciais da teoria de folheações. Essa teoria desempenha um papel central ao longo deste texto, se apresentando principalmente por meio das folheações tangentes a espaços invariantes provenientes de decomposições parcialmente hiperbólicas, que serão detalhadas mais à frente. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (6) e (7).

Definição 2.3.1 *Seja M uma variedade de dimensão m . Uma **folheação** n -dimensional de M de classe C^r é um atlas maximal $\mathcal{F}$ de classe C^r satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *Se $(\varphi, U) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, em que U_1 e U_2 são abertos homeomorfos às bolas unitárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente.*
2. *Se $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ e (φ_β, U_β) em $\mathcal{F}$ são tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ preserva folhas, isto é, a segunda coordenada dessa aplicação depende apenas dos pontos $y \in \mathbb{R}^{m-n}$. Em outras palavras, podemos escrever essa aplicação no formato $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y))$.*

*Neste caso, dizemos que M é folheada por $\mathcal{F}$ e aos elementos de $\mathcal{F}$ chamamos **cartas da folheação**.*

Definição 2.3.2 *Sejam M uma variedade de dimensão m , $\mathcal{F}$ uma folheação de M e (φ, U) uma carta da folheação satisfazendo $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, em que U_1 e U_2 são abertos homeomorfos às bolas unitárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente. Para cada $c \in U_2$, o conjunto $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ é dito uma **placa** do aberto U .*

Observação 2.3.3 *No contexto da definição acima, cada placa do aberto U é uma variedade n -dimensional de classe C^r conexa.*

Como uma consequência da definição, se α e β são duas placas associadas a um mesmo aberto U , então essas placas devem coincidir ou ser disjuntas. Por outro lado, se α e β são placas de abertos distintos, U_α e U_β respectivamente, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então é possível que essas placas se intersectem. Nesse caso, a interseção de placas de diferentes cartas locais nos permitem introduzir o conceito de caminho de placas.

Definição 2.3.4 *Seja $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^k$ uma coleção de cartas da folheação tal que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Consideremos uma coleção de placas $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ satisfazendo as seguintes propriedades*

1. α_i é placa de U_i , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,
2. $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Neste caso, dizemos que a sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ é um **caminho de placas**.

Observação 2.3.5 Consideremos a relação definida por

$$x \sim y \iff \text{existe um caminho de placas } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ tal que } x \in \alpha_1 \text{ e } y \in \alpha_k.$$

A relação $\sim$ define uma relação de equivalência. Com efeito,

1. *Reflexiva:* $x \sim x$, para todo $x \in M$, pois basta considerarmos o caminho unitário composto por uma única placa que contém x .
2. *Simétrica:* Se $x \sim y$ por meio de um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, então o caminho reverso $\alpha_k, \dots, \alpha_1$ é um caminho de placas entre y e x , logo $y \sim x$.
3. *Transitiva:* Se $x \sim y$ por meio de um caminho $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ e $y \sim z$ por meio de um caminho $\beta_1, \dots, \beta_j$, então a concatenação $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_j$ é um caminho de placas entre x e z , logo $x \sim z$.

Definição 2.3.6 A classe de x pela relação de equivalência definida acima é denominada **folha** de $\mathcal{F}$ passando por x .

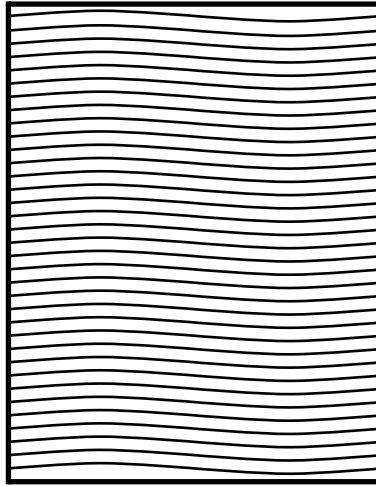
Intuitivamente, uma folheação de uma variedade m -dimensional M corresponde a uma decomposição de M em subvariedades, todas com a mesma dimensão, digamos $n < m$, chamadas folhas, que se comportam localmente como “fatias” paralelas de M . Mais precisamente, para cada carta (φ, U) a interseção de uma folha F com o aberto U deve satisfazer a propriedade

$$\varphi(F \cap U) = V \times \{c\},$$

em que $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ é uma constante que identifica a placa de U e $V \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

A figura a seguir nos fornece um exemplo de folheação definido em um plano.

Figura 2 - Folheação



Fonte: O próprio autor (2026).

Observação 2.3.7 *Toda folha de $\mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade de classe C^r naturalmente induzida pelas cartas da folheação.*

Definição 2.3.8 *Seja M uma variedade e $\mathcal{F}$ uma folheação de M . Uma subvariedade $\Sigma \subset M$ é dita **transversal à folheação $\mathcal{F}$** se, para cada folha F de $\mathcal{F}$, a subvariedade Σ é transversal a F .*

*Adicionalmente, dizemos que Σ é uma **seção transversal** de $\mathcal{F}$ se sua dimensão for complementar à da folheação, isto é, se $\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$.*

Agora, pretendemos definir o conceito de holonomia entre seções transversais. Procederemos da seguinte maneira:

Sejam M uma variedade de dimensão m , $\mathcal{F}$ uma folheação n -dimensional de M e F uma folha compacta de $\mathcal{F}$. Consideremos uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ e seções transversais Σ_0, Σ_1 a $\mathcal{F}$ passando pelos pontos $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, respectivamente. Tomemos uma coleção de cartas locais $U_0, U_1, \dots, U_k$ e uma partição

$$0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$$

do intervalo $[0, 1]$ de modo que sejam satisfeitas as propriedades

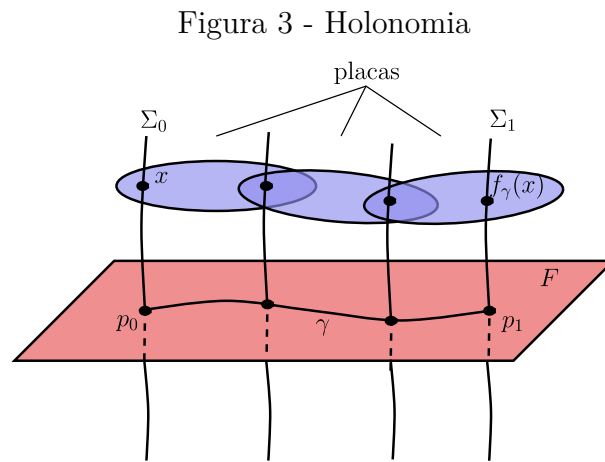
- Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cup U_j$ está contido em uma carta local de $\mathcal{F}$,
- $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Para cada $0 < i < k + 1$, escolhemos uma seção transversal a $\mathcal{F}$, $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$, homeomorfa a um disco de dimensão $m - n$, passando pelo ponto $\gamma(t_i)$. Denotemos $D(0) = \Sigma_0$ e $D(1) = \Sigma_1$.

Para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$, denotemos por $f_i(x)$ o único ponto de interseção da placa de U_i que contém x com a seção $D(t_{i+1})$. O domínio da f_i contém um disco $D(i) \subset D(t_i)$ contendo $\gamma(t_i)$.

Definição 2.3.9 No contexto acima, a aplicação **holonomia** entre as seções Σ_0 e Σ_1 associada a γ em uma vizinhança do ponto p_0 é a aplicação f_γ definida por

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0.$$



Fonte: O próprio autor (2026).

2.4 TEORIA DE FIBRADOS

Nesta seção, introduziremos os conceitos e resultados básicos da teoria de fibrados. Essas estruturas terão grande importância no decorrer do texto, estabelecendo a base necessária para discutirmos o exemplo do Shub. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (6) e (7).

Definição 2.4.1 Consideremos M, N, F variedades e $\pi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que (M, π, N, F) é um **fibrado** se existir uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de N tal que, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe um difeomorfismo $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ tal que $\pi(x) = p_1 \circ \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, em que p_1 representa a projeção na primeira coordenada.

Nesse caso, nomeamos os espaços M de **espaço total**, N de **espaço base**, F de **fibra** e a aplicação π de **projeção** de M em N . Alternativamente, denominamos a aplicação π de **fibração**. O diagrama comutativo a seguir representa a relação entre tais

objetos.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

Observação 2.4.2 Nesta situação, o espaço M é localmente difeomorfo ao produto cartesiano de um aberto de N com F .

Observação 2.4.3 Notemos que, para cada $x \in M$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Assim, como $\pi(y) = p_1 \circ \varphi_\alpha(y)$ para todo $y \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, segue que $d\pi_x = (dp_1)_{\varphi_\alpha(x)} \circ (d\varphi_\alpha)_x$. Concluimos então que π é uma submersão em cada x em M , isto é, π é uma submersão.

Para cada $q \in N$, a pré-imagem $\pi^{-1}(q)$ é uma subvariedade de M , difeomorfa a F , que chamaremos de **fibra de M sobre q** .

Nomenclatura 2.4.4 Dada uma fibração π e $x \in M$, denominamos o conjunto $\pi^{-1}(\pi(x))$ de **fibra por x** .

Exemplo 2.4.5 Seja M uma variedade m -dimensional. O **fibrado tangente** a M é definido por

$$TM = \{(p, v_p) ; p \in M \quad e \quad v_p \in T_p M\}.$$

O conjunto TM definido acima pode ser visto como um fibrado sobre M . Nessa situação, TM é o espaço total, M é o espaço base, o espaço tangente $T_p M$ representa a fibra sobre p e $\pi = p_1$ é a projeção.

Sejam $\alpha, \beta \in \Lambda$ índices tais que os abertos U_α e U_β possuam interseção não vazia, isto é, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Consideremos agora o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & & & \\ & \swarrow \varphi_\alpha & & \searrow \varphi_\beta & \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & \xrightarrow{\phi_{\alpha,\beta}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & \end{array}$$

A aplicação mudança de coordenadas entre as cartas locais é definida como o difeomorfismo

$$\phi_{\alpha,\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

dado pela composição

$$\phi_{\alpha,\beta}(x, y) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y).$$

Pela definição de fibrado, as aplicações φ_α e φ_β se comportam bem com relação à projeção sobre a base. Mais especificamente,

$$p_1 \circ \varphi_\alpha(\pi^{-1}(x)) = p_1 \circ \varphi_\beta(\pi^{-1}(x)) = \pi(\pi^{-1}(x)) = x.$$

Como consequência, a aplicação mudança de coordenadas preserva a primeira coordenada, isto é, podemos escrever

$$\phi_{\alpha,\beta}(x, y) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, h_{\alpha,\beta}(x, y)).$$

Observação 2.4.6 Para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, a aplicação $h_{\alpha,\beta}^x : F \rightarrow F$ definida por $h_{\alpha,\beta}^x(y) = h_{\alpha,\beta}(x, y)$ é um difeomorfismo.

Definição 2.4.7 Se a fibra F é um espaço vetorial e cada aplicação $h_{\alpha,\beta}^x : F \rightarrow F$ é um isomorfismo, dizemos que o fibrado (M, π, N, F) é um **fibrado vetorial**.

Definição 2.4.8 Um fibrado vetorial é dito um **fibrado θ -Hölder** se as aplicações mudança de coordenadas $\phi_{\alpha,\beta}$ são θ -Hölder.

Definição 2.4.9 Consideremos um fibrado com espaço base X , espaço das fibras Y e uma aplicação $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$ da forma

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y)).$$

Dado um subconjunto $X_0 \subset X$, tal que $f(X_0) \supset X_0$, dizemos que F é uma **contração de fibras** sobre X_0 se existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, para todo $x \in X_0$ e $y_1, y_2 \in Y$, temos

$$\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Uma **seção invariante** de F sobre X_0 é uma aplicação $\sigma : X_0 \rightarrow Y$ satisfazendo a relação

$$F(x, \sigma(x)) = (f(x), \sigma \circ f(x))$$

para todo $x \in X_0 \cap f^{-1}(X_0)$.

2.5 TOPOLOGIA C^r

Nessa seção, apresentaremos uma das principais topologias consideradas no nosso estudo: a topologia no espaço das aplicações de classe C^r . Essa topologia será de fundamental importância para que possamos estabelecer uma noção de distância entre aplicações. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (11), (12) e (13).

Definição 2.5.1 *Sejam M, N variedades de classe C^r , $f \in C^r(M, N)$ uma aplicação, (φ, U) e (ψ, V) cartas locais de M e N , respectivamente, e $K \subset U$ um conjunto compacto satisfazendo $f(K) \subset V$. Se $0 < \epsilon < \infty$, definimos uma **vizinhança subbásica fraca** da seguinte maneira*

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon) = \{g \in C^r(M, N) ; g(K) \subset V \quad e \quad \|D^i(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^i(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon \text{ para todo } x \in \varphi(K) \text{ e } i = 0, \dots, r\},$$

em que D^i representa a i -ésima derivada.

Observação 2.5.2 *Nessa situação, definimos a **topologia fraca** no espaço $C^r(M, N)$ como a topologia gerada pela subbase acima, isto é, a coleção formada pela união da interseção finita de conjuntos da forma*

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon).$$

Definição 2.5.3 *Sejam M, N variedades de classe C^r , $f \in C^r(M, N)$ uma aplicação, $\Phi = \{\varphi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ um atlas de M tal que cada ponto de M tenha uma vizinhança que intersecta apenas um número finito dos abertos U_α , $K = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos compactos de M , em que $K_\alpha \subset U_\alpha$, e $\Psi = \{\psi_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ um atlas de N . Se $\epsilon = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma família de números positivos, definimos uma **vizinhança básica forte** da seguinte maneira*

$$\mathcal{N}^r(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon) = \{g \in C^r(M, N) ; g(K_\alpha) \subset V_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda \quad e \quad \|D^i(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) - D^i(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)\| < \epsilon_\alpha \text{ para todo } x \in \varphi_\alpha(K_\alpha) \text{ e } i = 0, \dots, r\},$$

em que D^i representa a i -ésima derivada.

Observação 2.5.4 *Nessa situação, definimos a **topologia forte** no espaço $C^r(M, N)$ no como sendo a topologia gerada pela base acima, isto é, a coleção formada pela união de conjuntos da forma*

$$\mathcal{N}^r(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon).$$

Em suma, o cerne de ambas topologias está na exigência de que as representações locais de f e g , bem como de suas derivadas até a ordem r , permaneçam próximas em cada ponto dos compactos considerados.

Observação 2.5.5 *Em geral, consideraremos no nosso trabalho variedades compactas. Nesse contexto, as topologias fraca e forte no espaço $C^r(M, N)$ coincidem e nos referiremos a essa topologia como **topologia C^r** .*

Proposição 2.5.6 *Seja M uma variedade. O conjunto*

$$\text{Diff}^r(M) = \{f : M \rightarrow M ; f \text{ é um difeomorfismo de classe } C^r\}$$

é aberto em $C^r(M, M)$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (13, Proposição 1.36, Capítulo 1). ■

Observação 2.5.7 *De forma análoga ao que fizemos, podemos definir uma topologia C^0 no conjunto dos homeomorfismos $f : M \rightarrow N$.*

2.6 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

Nesta seção, introduziremos as definições e resultados fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos, área de concentração dessa dissertação. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (4), (8), (9) e (10).

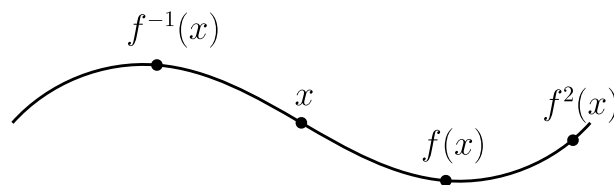
Para iniciarmos essa seção, enunciaremos diversos conceitos básicos da área de sistemas dinâmicos.

Definição 2.6.1 *Sejam X um conjunto, $f : X \rightarrow X$ uma aplicação invertível e $x \in X$. Denominamos o conjunto*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$$

*de **órbita** do ponto x .*

Figura 4 - Órbita de um ponto



Fonte: O próprio autor (2026).

Definição 2.6.2 *Sejam X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto periódico** se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Nessa situação, o menor número natural n satisfazendo essa propriedade é dito o **período** do ponto x . Adicionalmente, a órbita de x é dita uma **órbita periódica**.*

Definição 2.6.3 *Sejam X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto fixo** se x é um ponto periódico de período 1, isto é, se $f(x) = x$.*

Definição 2.6.4 *Sejam X um conjunto, $Y \subset X$ um subconjunto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que Y é **invariante** por f se $f^n(Y) = Y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 2.6.5 *Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um **ponto não-errante** de f se, para toda vizinhança U de x , existe um número inteiro $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto*

$$\Omega_f := \{x \in X ; x \text{ é um ponto não-errante de } f\}$$

*é denominado **conjunto não-errante** de f .*

Definição 2.6.6 *Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é dita **transitiva** se existir $x \in X$ tal que a órbita de x é densa em X .*

O clássico teorema a seguir apresenta uma caracterização equivalente e particularmente útil da transitividade topológica.

Teorema 2.6.7 *Sejam X um espaço métrico separável e localmente compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. A aplicação f é transitiva se, e somente se, para quaisquer abertos $U, V \subset X$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponhamos que f seja transitiva. Então, por definição, existe um ponto $x \in X$ tal que a órbita de x é densa no conjunto X . Consequentemente, dados abertos $U, V \subset X$, a órbita de x deve intersectar U e V , isto é, devem existir $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $f^m(x) \in U$ e $f^n(x) \in V$. A partir daí, vemos que

$$\begin{aligned} f^m(x) \in U &\implies x \in f^{-m}(U) \\ &\implies f^n(x) \in f^n(f^{-m}(U)) \\ &\implies f^n(x) \in f^{n-m}(U). \end{aligned}$$

Logo, $f^n(x) \in f^{n-m}(U) \cap V$ e, com isso, $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Suponhamos que, para quaisquer abertos $U, V \subset X$, exista $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Queremos encontrar $x \in X$ tal que a órbita de x intercepta cada aberto de X . Para isso, basta mostrarmos que a órbita de x intercepta cada elemento da base da topologia de X .

Como X é um espaço métrico separável, a Proposição 2.1.22 nos garante a existência de uma base enumerável $U_1, U_2, \dots$ para a topologia de X . Construiremos por indução uma cadeia de abertos não vazios

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

de modo que, para cada $i \in \mathbb{N}$, o fecho $\overline{V_i}$ seja compacto e satisfaça a relação de continência

$$\overline{V_i} \subset V_{i-1} \cap f^{-n_i}(U_{i+1}),$$

em que $n_i \in \mathbb{N}$. A partir daí, mostraremos que, se $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V_i}$, então a órbita de x é densa.

Primeiramente, consideremos os abertos U_1 e U_2 da base da topologia de X . Por hipótese, existe um inteiro $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^{n_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Como consequência, tomando a pré-imagem, concluímos que a interseção $U_1 \cap f^{-n_1}(U_2)$ deve ser um aberto não vazio. Assim, de acordo com a Proposição 2.1.20, como o espaço X é localmente compacto, existe um aberto V_1 tal que $\overline{V_1}$ é compacto e $\overline{V_1} \subset U_1 \cap f^{-n_1}(U_2)$.

Agora, como hipótese de indução, suponhamos que existam abertos $V_2, \dots, V_{k-1}$ satisfazendo a continência

$$\overline{V_i} \subset V_{i-1} \cap f^{-n_i}(U_{i+1}),$$

em que $i \in \{2, \dots, k-1\}$.

Aplicando novamente a hipótese inicial, sabemos que deve existir um inteiro $n_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^{n_k}(V_{k-1}) \cap U_{k+1} \neq \emptyset.$$

Com isso, considerando a pré-imagem, obtemos que a interseção $V_{k-1} \cap f^{-n_k}(U_{k+1})$ é um aberto não vazio. Assim, utilizando a Proposição 2.1.20, existe um aberto V_k tal que $\overline{V_k}$ é compacto e $\overline{V_k} \subset V_{k-1} \cap f^{-n_k}(U_{k+1})$.

Desse modo, obtemos uma cadeia de conjuntos abertos cujos fechos satisfazem a relação

$$\overline{V_i} \subset V_{i-1} \cap f^{-n_i}(U_{i+1}).$$

Nessa situação, a coleção dos fechos $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots$ satisfaz as hipóteses da Proposição 2.1.14, logo

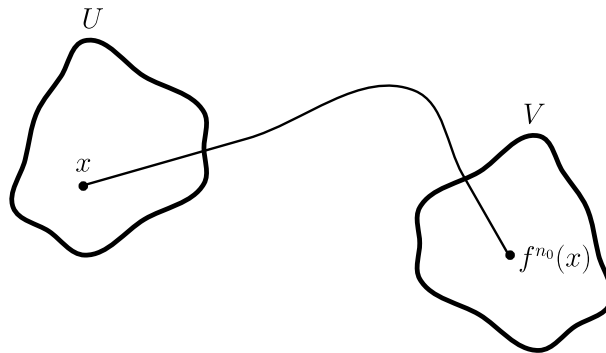
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset.$$

Por construção, se tomarmos um ponto x pertencente à interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V_i}$, então $f^{n_i-1}(x) \in U_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a órbita de cada ponto nesse conjunto

intersecta cada aberto base. Portanto, a órbita de cada ponto nesse conjunto intersecta cada aberto.

■

Figura 5 - Representação da transitividade



Fonte: O próprio autor (2026).

Definição 2.6.8 *Seja M uma variedade. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito **C^r robustamente transitivo** se existe uma vizinhança U da aplicação f na topologia C^r tal que, para todo $g \in U$, é válido que g é transitivo.*

Definição 2.6.9 *Sejam X, Y espaços topológicos. Dizemos que dois homeomorfismos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ de modo que $h \circ f = g \circ h$. O diagrama abaixo ilustra essa situação.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Observação 2.6.10 *Se $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são homeomorfismos topologicamente conjugados, então a conjugação preserva diversas propriedades dinâmicas. Mais precisamente, se $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo satisfazendo $h \circ f = g \circ h$, então são válidas as seguintes afirmações*

- A conjugação h leva órbitas de f em órbitas de g ,
- A conjugação h leva órbitas densas de f em órbitas densas de g ,
- A conjugação h leva pontos periódicos de f em pontos periódicos de g com o mesmo período,

- A conjugação h leva o conjunto não-errante de f no conjunto não-errante de g .

Agora, definiremos diferentes maneiras em que a noção de estabilidade pode se apresentar.

Definição 2.6.11 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r . Dizemos que f é **estruturalmente estável** se existe uma vizinhança U de f na topologia C^r tal que, para todo $g \in U$, as aplicações f e g são conjugadas.*

Definição 2.6.12 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r . Dizemos que f é **Ω -estável** se existe uma vizinhança U da aplicação f na topologia C^r tal que, para todo $g \in U$, as restrições $f|_{\Omega_f}$ e $g|_{\Omega_g}$ são topologicamente conjugadas.*

A seguir, é apresentada uma propriedade mais fraca do que a enunciada acima.

Definição 2.6.13 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r . Dizemos que f é **topologicamente Ω -estável** se existe uma vizinhança U da aplicação f na topologia C^r tal que, para todo $g \in U$, os conjuntos não errantes Ω_f e Ω_g são homeomorfos.*

3 HIPERBOLICIDADE E HIPERBOLICIDADE PARCIAL

Neste capítulo, exploraremos diversas manifestações do conceito de hiperbolicidade na teoria dos sistemas dinâmicos. Iniciaremos com o estudo dos isomorfismos hiperbólicos, partindo a seguir para o estudo dos conjuntos hiperbólicos e conjuntos parcialmente hiperbólicos. Em seguida, estabeleceremos resultados fundamentais, como o Teorema da Variedade Estável, e discutiremos as interseções homoclínicas. Por fim, apresentaremos dois exemplos clássicos de hiperbolicidade: os automorfismos hiperbólicos do toro e os difeomorfismos derivados de Anosov (DA).

3.1 ISOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Nesta seção, introduziremos o conceito de hiperbolicidade a partir de um de seus casos mais elementares, os isomorfismos hiperbólicos, apresentando definições e resultados que caracterizam sua dinâmica. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (4), (8) e (13).

Definição 3.1.1 *Seja E um espaço vetorial normado. Um isomorfismo linear $A : E \rightarrow E$ é dito um **isomorfismo linear hiperbólico** se o espaço E admite uma decomposição $E = E^s \oplus E^u$, satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *Os espaços E^s e E^u são invariantes por A , isto é,*

$$A(E^s) = E^s \quad e \quad A(E^u) = E^u,$$

2. *Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ de modo que, para todo $n \geq 0$, tenhamos*

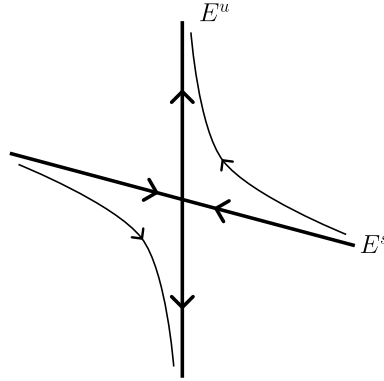
$$\|A^n v\| \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, \quad \forall v \in E^s$$

$$\|A^{-n} v\| \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, \quad \forall v \in E^u.$$

*Nessa situação, chamamos os espaços E^s de **espaço estável** e E^u de **espaço instável**. Ademais, a uma decomposição $E = E^s \oplus E^u$ do espaço E satisfazendo as propriedades acima damos o nome **decomposição hiperbólica**.*

A figura a seguir exemplifica o comportamento de um isomorfismo hiperbólico. Os vetores no espaço estável são contraídos, enquanto os vetores no espaço instável são expandidos. Consequentemente, as órbitas dos demais vetores em E tendem a convergir para a direção do subespaço instável.

Figura 6 - Isomorfismo Linear Hiperbólico



Fonte: O próprio autor (2026).

A definição acima pode nos levar ao seguinte questionamento: A definição de hiperbolicidade depende da norma que considerarmos no espaço E ? Em outras palavras, é possível que um isomorfismo A seja considerado hiperbólico se dotarmos o espaço E de uma norma $\|\cdot\|_1$ e que o mesmo isomorfismo não seja considerado hiperbólico se dotarmos E de uma outra norma $\|\cdot\|_2$? A resposta a esse questionamento é não. Com efeito, um resultado clássico da análise funcional nos diz o seguinte.

Teorema 3.1.2 *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então todas as normas em E são equivalentes. Isto é, se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas em E , então existe uma constante $k \geq 1$ tal que, para todo $v \in E$, é válida a desigualdade*

$$k^{-1} \cdot \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq k \cdot \|v\|_2.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (17, Teorema 8.7). ■

Desse modo, se verificarmos a hiperbolicidade de um isomorfismo A com relação a uma norma $\|\cdot\|_1$, então a equivalência de normas nos garante que para qualquer outra norma $\|\cdot\|_2$ em E conseguimos obter uma constante $k \geq 1$ de modo que

$$\begin{aligned} k^{-1} \cdot \|A^n v\|_2 &\leq \|A^n v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot k \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^s \\ k^{-1} \cdot \|A^{-n} v\|_2 &\leq \|A^{-n} v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot k \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^u. \end{aligned}$$

Assim, analisando os termos extremos nestas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} \|A^n v\|_2 &\leq (c \cdot k^2) \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^s \\ \|A^{-n} v\|_2 &\leq (c \cdot k^2) \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^u. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que, ao mudarmos a norma considerada no espaço E , o isomorfismo A ainda satisfaz as condições de hiperbolicidade. Equivalentemente, mostramos que a definição de hiperbolicidade não depende da norma considerada no espaço E .

A partir daqui seguiremos a seguinte notação,

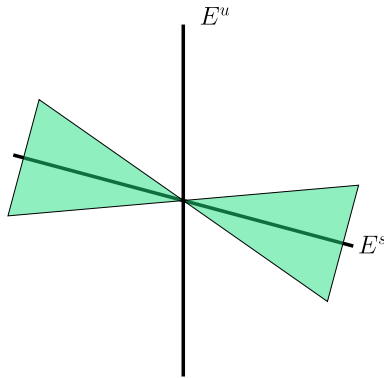
Notação 3.1.3 Se $v \in E = E^s \oplus E^u$, escreveremos $v = (v_s, v_u)$, em que $v^s \in E^s$ e $v_u \in E^u$. Neste caso, diremos que v_s é a **coordenada estável** de v e v_u é a **coordenada instável** de v .

Nomenclatura 3.1.4 Consideremos os conjuntos

$$C_s^\alpha = \{v \in E ; \|v_u\| \leq \alpha \cdot \|v_s\|\} \quad e \quad C_u^\alpha = \{v \in E ; \|v_s\| \leq \alpha \cdot \|v_u\|\},$$

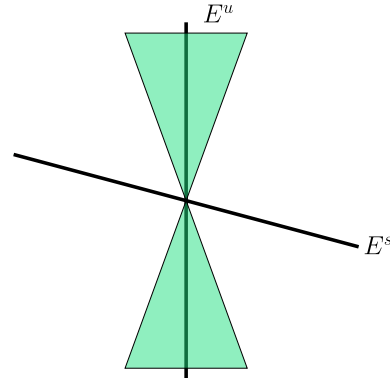
em que $\alpha > 0$. Denominamos o conjunto C_s^α de **α -cone estável** e o conjunto C_u^α de **α -cone instável**.

Figura 7 - α -Cone Estável



Fonte: O próprio autor
(2026).

Figura 8 - α -Cone Instável



Fonte: O próprio autor
(2026).

Nos dois próximos resultados, apresentaremos diferentes caracterizações para os espaços estável e instável. Primeiramente, vejamos o resultado válido para o espaço estável.

Teorema 3.1.5 Sejam E um espaço vetorial normado e $A : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear hiperbólico decompondo o espaço E como $E = E^s \oplus E^u$. Para cada vetor $v \in E$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $v \in E^s$,
2. $A^n v \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,
3. Existe $r > 0$ tal que $\|A^n v\| \leq r$, para todo $n \geq 0$,

4. Existe $\alpha > 0$ tal que $A^n v \in C_s^\alpha$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração:

- 1 $\implies$ 2)

Se $v \in E^s$, então existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|A^n v\| \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\| \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como $0 < \lambda < 1$, segue que $\lambda^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por consequência,

$$\|A^n v\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, concluímos que $A^n v \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- 2 $\implies$ 3)

Por hipótese, $A^n v \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, como toda sequência convergente é limitada, existe $r > 0$ tal que

$$\|A^n v\| \leq r \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

- 3 $\implies$ 4)

Suponhamos que não exista $\alpha > 0$ tal que $A^n v \in C_s^\alpha$ para todo $n \geq 0$. Então, para todo $\alpha > 0$, podemos encontrar um iterado de v que não pertença ao cone C_s^α . Em particular, existe um iterado $m \geq 0$ tal que $A^m v \notin C_s^1$.

Se escrevermos $w = A^m v$, o fato de que $w \notin C_s^1$ nos indica que

$$\|w_u\| > \|w_s\| \geq 0.$$

A partir daí, obtemos $w_u \neq 0$ e, com isso,

$$\|A^n w_u\| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|A^n w_s\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Aplicando a desigualdade triangular reversa, encontramos

$$\|A^n w\| = \|A^n w_u + A^n w_s\| \geq \left| \|A^n w_u\| - \|A^n w_s\| \right|.$$

Através das convergências expostas em (3.1), concluímos que $\|A^n w\| \rightarrow \infty$. Assim, a sequência $\{A^n v\}_{n \geq 0}$ não é limitada.

Para concluirmos, observemos que verificamos a contrapositiva do que desejávamos. Portanto, se a sequência $\|A^n v\|$ é limitada, então existe $\alpha > 0$ tal que $A^n v \in C_s^\alpha$, para todo $n \geq 0$.

4 $\implies$ 1)

Suponhamos a contrapositiva, isto é, que $v \notin E^s$. Então $v_u \neq 0$, assim

$$\|A^n v_u\| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|A^n v_s\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Desse modo, para qualquer $\alpha > 0$, podemos tomar $n \geq 0$ tal que a desigualdade

$$\|A^n v_u\| > \alpha \cdot \|A^n v_s\|$$

seja satisfeita. Logo, $A^n v \notin C_s^\alpha$.

Portanto, através da contrapositiva, concluímos que se existe $\alpha > 0$ tal que $A^n v \in C_s^\alpha$ para todo $n \geq 0$, então $v \in E^s$. ■

Similarmente, o resultado a seguir nos mostra diferentes formas de caracterizar o espaço instável.

Teorema 3.1.6 *Sejam E um espaço vetorial normado e $A : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear hiperbólico decompondo o espaço E como $E = E^s \oplus E^u$. Para cada vetor $v \in E$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $v \in E^u$,
2. $A^{-n}v \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,
3. Existe $r > 0$ tal que $\|A^{-n}v\| \leq r$, para todo $n \geq 0$,
4. Existe $\alpha > 0$ tal que $A^{-n}v \in C_u^\alpha$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é completamente análoga à demonstração do resultado anterior, bastando substituir os iterados positivos pelos negativos. ■

As caracterizações obtidas nos dois resultados acima nos mostram que os espaços estável e instável são unicamente determinados pelo isomorfismo linear hiperbólico A . Em outras palavras, se A induz no espaço E duas decomposições hiperbólicas $E = E^s \oplus E^u$ e $E = G^s \oplus G^u$, então, obrigatoriamente, devemos ter $E^s = G^s$ e $E^u = G^u$.

No resultado a seguir, veremos que é possível tomarmos uma norma conveniente de modo que o comportamento hiperbólico seja observado logo na primeira iteração. Com isso, as desigualdades hiperbólicas deixam de depender da constante c , tornando o comportamento mais fácil de ser analisado.

Teorema 3.1.7 *Sejam E um espaço vetorial normado e $A : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear hiperbólico decompondo o espaço E como $E = E^s \oplus E^u$. Existem uma norma $\|\cdot\|$ no espaço E e uma constante $0 < \tau < 1$ tal que*

$$\begin{aligned}\|Av\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall v \in E^s \\ \|A^{-1}v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall v \in E^u.\end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que $\|\cdot\|$ é uma **norma adaptada** ao isomorfismo A .

Demonstração: Inicialmente, consideremos uma norma $\|\cdot\|_1$ em E e constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que, para todo $n \geq 0$, tenhamos

$$\begin{aligned}\|A^n v\|_1 &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1, & \forall v \in E^s \\ \|A^{-n} v\|_1 &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1, & \forall v \in E^u.\end{aligned}$$

Nosso objetivo é construir uma nova norma, para a qual A seja uma contração imediata no espaço E^s e uma expansão imediata no espaço E^u . Para isso, consideremos a aplicação $\|\cdot\|_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_2 = \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1,$$

em que N é grande o suficiente para que tenhamos $c \cdot \lambda^N < 1$.

Primeiramente, pretendemos mostrar que a aplicação $\|\cdot\|_2$ definida acima é uma norma no espaço E . Com esse intuito, para todo $v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, verificaremos as propriedades a seguir.

- Positividade: Por definição, $\|v\|_2$ é uma soma de termos não negativos, logo $\|v\|_2 \geq 0$. Além disso, se $\|v\|_2 = 0$, então

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1 = 0 \implies \|A^n v\|_1 = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\},$$

Em particular, para $n = 0$, temos $\|A^0 v\|_1 = \|v\|_1 = 0$, o que implica $v = 0$.

- Homogeneidade: Utilizando a linearidade de cada iterado A^n e a homogeneidade da norma $\|\cdot\|_1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\alpha \cdot v\|_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n(\alpha \cdot v)\|_1 \\ &= |\alpha| \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1 \\ &= |\alpha| \cdot \|v\|_2.\end{aligned}$$

- Desigualdade Triangular: Utilizando a linearidade de cada iterado A^n e a desigualdade triangular válida para a norma $\|\cdot\|_1$, encontramos

$$\begin{aligned}
\|v + w\|_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n(v + w)\|_1 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v + A^n w\|_1 \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1 + \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n w\|_1 \\
&= \|v\|_2 + \|w\|_2,
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade necessária.

Após conferirmos que a aplicação $\|\cdot\|_2$ constitui uma norma, pretendemos mostrar que esta norma possui a propriedade enunciada. Para provarmos o que desejamos, precisaremos primeiro verificar que esta norma satisfaz duas desigualdades. A primeira delas é expressa a seguir:

$$\|v\|_2 \leq a \cdot \|v\|_1, \quad \forall v \in E^s \quad (3.2)$$

em que $a = \sum_{n=0}^{N-1} c \cdot \lambda^n$.

De fato, utilizando a definição da norma $\|\cdot\|_2$ e a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço estável com relação à norma $\|\cdot\|_1$ verificamos que, para todo $v \in E^s$,

$$\|v\|_2 = \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1 \leq \sum_{n=0}^{N-1} c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1 = a \cdot \|v\|_1,$$

o que prova a desigualdade expressa em (3.2).

Por sua vez, a segunda desigualdade que precisamos provar é expressa a seguir:

$$\|v\|_2 \leq a \cdot \|A^{N-1}v\|_1, \quad \forall v \in E^u. \quad (3.3)$$

Realmente, observando que $A^n v = A^{n-(N-1)}(A^{N-1}v)$ e considerando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço instável com relação à norma $\|\cdot\|_1$, segue que, para todo $v \in E^u$

$$\begin{aligned}
\|v\|_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n v\|_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \|A^{n-(N-1)}(A^{N-1}v)\|_1 \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} c \cdot \lambda^{(N-1)-n} \cdot \|A^{N-1}v\|_1 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} c \cdot \lambda^n \cdot \|A^{N-1}v\|_1 \\
&= a \cdot \|A^{N-1}v\|_1,
\end{aligned}$$

o que termina a prova da desigualdade enunciada em (3.3).

Para concluirmos a prova, resta mostrarmos que o isomorfismo linear hiperbólico A age como uma contração imediata no espaço E^s e uma expansão imediata no espaço E^u , com relação à norma que criamos.

Com isso em mente, mostraremos primeiro que A satisfaz o que desejamos para os vetores no espaço estável. Com efeito, para todo $v \in E^s$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|Av\|_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n(Av)\|_1 \\ &= \sum_{n=1}^N \|A^n v\|_1 \\ &= \|v\|_2 - \|v\|_1 + \|A^N v\|_1.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço estável em relação à norma $\|\cdot\|_1$ para escrevermos $\|A^N v\|_1 \leq c \cdot \lambda^N \cdot \|v\|_1$, segue que

$$\begin{aligned}\|Av\|_2 &\leq \|v\|_2 - \|v\|_1 + c \cdot \lambda^N \cdot \|v\|_1 \\ &= \|v\|_2 + (c \cdot \lambda^N - 1) \cdot \|v\|_1.\end{aligned}$$

Com isso, utilizando a desigualdade $\|v\|_2 \leq a \cdot \|v\|_1$, que verificamos em (3.2), e definindo a constante $\tau = 1 + a^{-1}(c \cdot \lambda^N - 1)$ constatamos que

$$\begin{aligned}\|Av\|_2 &\leq \|v\|_2 + a^{-1} \cdot (c \cdot \lambda^N - 1) \cdot \|v\|_2 \\ &= \tau \cdot \|v\|_2,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de que A se comporta como uma contração imediata no espaço estável.

Para finalizarmos, mostraremos que A satisfaz o que desejamos para os vetores no espaço instável, isto é, que A age como uma expansão imediata em E^u . Equivalentemente, provaremos que A^{-1} é uma contração imediata nesse mesmo espaço. Com efeito, para todo $v \in E^u$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|A^{-1}v\|_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n(A^{-1}v)\|_1 \\ &= \sum_{n=-1}^{N-2} \|A^n v\|_1 \\ &= \|v\|_2 + \|A^{-1}v\|_1 - \|A^{N-1}v\|_1.\end{aligned}$$

Observando que $A^{-1}v = A^{-N}(A^{N-1}v)$ e utilizando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço instável em relação à norma $\|\cdot\|_1$ para escrevermos

$\|A^{-N}(A^{N-1}v)\|_1 \leq c \cdot \lambda^N \cdot \|A^{N-1}v\|_1$, segue que

$$\begin{aligned}\|A^{-1}v\|_2 &\leq \|v\|_2 + c \cdot \lambda^N \cdot \|A^{N-1}v\|_1 - \|A^{N-1}v\|_1 \\ &= \|v\|_2 + (c \cdot \lambda^N - 1) \cdot \|A^{N-1}v\|_1.\end{aligned}$$

Com isso, utilizando a desigualdade $\|v\|_2 \leq a \cdot \|A^{N-1}v\|_1$, que verificamos em (3.3), e usando novamente a constante $\tau = 1 + a^{-1}(c \cdot \lambda^N - 1)$ constatamos que

$$\begin{aligned}\|A^{-1}v\|_2 &\leq \|v\|_2 + a^{-1} \cdot (c \cdot \lambda^N - 1) \cdot \|v\|_2 \\ &= \tau \cdot \|v\|,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de que A^{-1} se comporta como uma contração imediata no espaço instável.

Portanto, o isomorfismo linear hiperbólico A age como uma contração imediata no espaço E^s e uma expansão imediata no espaço E^u , com relação à norma que criamos. Em outras palavras, existe uma constante $0 < \tau < 1$ tal que

$$\begin{aligned}\|Av\|_2 &\leq \tau \cdot \|v\|_2, \quad \forall v \in E^s \\ \|A^{-1}v\|_2 &\leq \tau \cdot \|v\|_2, \quad \forall v \in E^u,\end{aligned}$$

isto é, a norma $\|\cdot\|_2$ é adaptada ao isomorfismo linear hiperbólico A . ■

Analisemos a desigualdade válida para os vetores no espaço instável:

$$\|A^{-1}v\| \leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall v \in E^u.$$

Essa desigualdade deve ser válida para qualquer vetor $v \in E^u$. Em particular, pela invariância de E^u com relação ao isomorfismo A , o vetor Av pertence ao espaço E^u , e assim é válida a desigualdade

$$\|A^{-1}(Av)\| \leq \tau \cdot \|Av\|$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\|Av\| \geq \tau^{-1} \cdot \|v\|,$$

em que, vale notar, $\tau^{-1} > 1$.

Assim, o teorema acima nos fornece uma intuição a respeito do comportamento dos isomorfismos hiperbólicos: essas aplicações contraem os vetores no espaço estável e expandem os vetores no espaço instável.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dado um isomorfismo linear A , como podemos determinar se A é hiperbólico? O resultado a seguir nos fornece uma forma prática de resolver esse problema.

Teorema 3.1.8 *Um isomorfismo linear A é hiperbólico se, e somente se, A não possui autovalores com norma unitária.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Seja A um isomorfismo linear hiperbólico. Suponhamos, por contradição, que A possui um autovalor λ tal que $|\lambda| = 1$. Então, existe um autovetor $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda \cdot v$. Em particular,

$$\|A^n v\| = |\lambda|^n \cdot \|v\| = \|v\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Considerando a decomposição de v nas coordenadas estável e instável, podemos utilizar a desigualdade triangular reversa para obtermos

$$\|A^n v\| \geq \|A^n v_u\| - \|A^n v_s\| \implies \|A^n v\| + \|A^n v_s\| \geq \|A^n v_u\|.$$

Ao passarmos o limite, encontramos

$$\|v\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n v_u\|,$$

de onde concluímos que $v_u = 0$, pois, caso contrário, teríamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n v_u\| = \infty$.

Assim, $v = v_s$. Consequentemente, devemos ter a convergência $A^n v \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como verificamos que $\|A^n v\| = \|v\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue $v = 0$, contradizendo a hipótese de que $v \neq 0$.

Desse modo, se A é um isomorfismo linear hiperbólico, então A não possui autovalores com norma unitária.

$\Leftarrow$) A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (13, Proposição 2.11). ■

Uma característica importante da hiperbolicidade é a sua robustez, isto é, a sua persistência por pequenas perturbações. No resultado abaixo, veremos uma das formas em que essa robustez se manifesta.

Teorema 3.1.9 *O conjunto dos isomorfismos lineares hiperbólicos é aberto e denso no conjunto dos isomorfismos lineares sobre o espaço E . Ademais, os espaços estáveis $E^s(A)$ e instáveis $E^u(A)$ variam continuamente com a aplicação A .*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (8, Teorema 2.10). ■

Com objetivo de explorarmos outras maneiras em que a robustez da hiperbolicidade se apresenta, introduziremos brevemente pontos fixos hiperbólicos e pontos periódicos hiperbólicos.

Definição 3.1.10 *Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^r . Um ponto fixo p de f é dito um **ponto fixo hiperbólico** se $D_p f : E \rightarrow E$ é um isomorfismo linear hiperbólico.*

Definição 3.1.11 *Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^r . Um ponto periódico p de f com período n é dito um **ponto periódico hiperbólico** se $D_p f^n : E \rightarrow E$ é um isomorfismo linear hiperbólico.*

O teorema a seguir estabelece a persistência local de pontos fixos sob pequenas perturbações de f na topologia C^1 , garantindo que existe exatamente um ponto fixo para a aplicação perturbada em uma vizinhança do ponto original.

Teorema 3.1.12 *Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^r com um ponto fixo hiperbólico p . Existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se g pertence à bola $B(f, \delta)$ na topologia C^1 , então g possui no máximo um ponto fixo em $B(p, \epsilon)$. Além disso, para qualquer $0 < \epsilon' \leq \epsilon$, existe $0 < \delta' \leq \delta$ tais que se g pertence à bola $B(f, \delta)$ na topologia C^1 , então g possui exatamente um ponto fixo em $B(p, \epsilon)$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (8, Teorema 2.6). ■

Complementando o resultado anterior, o próximo teorema nos mostra que o novo ponto fixo permanece hiperbólico. Adicionalmente, os espaços estáveis e instáveis dependem continuamente da aplicação.

Teorema 3.1.13 *Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^r com um ponto fixo hiperbólico p . Existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se g pertence à bola $B(f, \delta)$ na topologia C^1 , então g possui exatamente um ponto fixo p_g em $B(p, \epsilon)$, o qual é hiperbólico. Além disso, o ponto fixo hiperbólico p_g , e os espaços $E^s(p_g)$ e $E^u(p_g)$ variam continuamente com a aplicação g .*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (8, Teorema 2.11). ■

3.2 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS

Nesta seção, estenderemos o conceito de hiperbolicidade para o contexto de sistemas dinâmicos em variedades diferenciáveis. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (4), (8) e (12).

Antes de prosseguirmos, precisaremos estabelecer nas variedades uma estrutura que nos permita quantificar comprimentos no fibrado tangente de maneira coerente, para

que possamos considerar as desigualdades hiperbólicas vistas anteriormente. Com esse objetivo em mente, definimos o conceito de variedade riemanniana.

Definição 3.2.1 *Seja M uma variedade. Dizemos que M é uma **variedade riemanniana** se, em cada ponto $x \in M$, dotamos o espaço tangente $T_x M$ de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que, para cada par X, Y de campos vetoriais de classe C^∞ em M , a aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle X(x), Y(x) \rangle_x$ seja de classe C^r .*

*Nesse caso, dizemos que a coleção $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$ é uma **métrica riemanniana** de classe C^r na variedade M .*

Naturalmente, uma métrica riemanniana induz, para cada $x \in M$, uma norma no espaço $T_x M$, definida a seguir.

Definição 3.2.2 *Seja M uma variedade riemanniana. Para cada $x \in M$, a norma induzida pela métrica riemanniana em $T_x M$ é definida da seguinte forma:*

$$\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v \rangle_x}, \quad \forall v \in T_x M.$$

*A norma definida acima é denominada **norma induzida pela métrica riemanniana** em $T_x M$. Adicionalmente, dizemos que a coleção de normas $\{\|\cdot\|_x\}_{x \in M}$ é de classe C^r se, para cada campo vetorial X de classe C^∞ em M , a aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|X(x)\|_x^2$ é de classe C^r .*

Notação 3.2.3 *Quando não houver confusão com relação ao ponto base, ocultaremos os índices em $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ e $\|\cdot\|_x$, escrevendo apenas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$.*

Teorema 3.2.4 *Se M é uma variedade riemanniana compacta, então todas as coleções de normas de classe C^0 em TM são equivalentes. Isto é, se $\{\|\cdot\|_{1,x}\}_{x \in M}$ e $\{\|\cdot\|_{2,x}\}_{x \in M}$ são coleções de normas em TM , então existe uma constante $k \geq 1$ tal que, para todo $x \in M$, a desigualdade*

$$k^{-1} \cdot \|v\|_{2,x} \leq \|v\|_{1,x} \leq k \cdot \|v\|_{2,x}$$

é válida para todo $v \in T_x M$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (20, Lema 2.53). ■

Definição 3.2.5 *Seja M uma variedade riemanniana. A métrica induzida em M pela métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$ é definida como*

$$d(x, y) = \inf \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall x, y \in M,$$

em que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável por partes tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

Teorema 3.2.6 *Seja M uma variedade riemanniana conexa. Se d é a métrica induzida em M pela métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$, então a topologia da métrica induzida por d em M coincide com a topologia de M .*

Observação 3.2.7 *Lembremos que, por definição, M é um espaço topológico dotado de uma topologia τ_M (vide Definição 2.2.6). No teorema acima, a topologia de M corresponde à topologia τ_M mencionada na definição supracitada.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (20, Teorema 2.55). ■

Teorema 3.2.8 *Toda variedade admite uma métrica riemanniana.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (20, Proposição 2.4). ■

Munidos das noções básicas de variedades riemannianas, agora estamos em condições de introduzir o conceito de conjuntos hiperbólicos.

Definição 3.2.9 *Sejam M uma variedade riemanniana de classe C^∞ e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um subconjunto f -invariante $\Lambda \subset M$ é dito um **conjunto hiperbólico** se, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$, satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *As famílias E^s e E^u são invariantes por Df , isto é,*

$$D_x f(E^s(x)) = E^s(f(x)) \quad e \quad D_x f(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

2. *Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ de modo que, para todo $n \geq 0$, tenhamos*

$$\begin{aligned} \|D_x f^n v\| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f^{-n} v\| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nessa situação, chamamos os espaços $E^s(x)$ de **espaço estável em x** e $E^u(x)$ de **espaço instável em x** . Em particular, no caso em que $\Lambda = M$, dizemos que a aplicação f é um **difeomorfismo hiperbólico** ou, alternativamente, um **difeomorfismo Anosov**.

Assim como no caso dos isomorfismos hiperbólicos, se M é uma variedade riemanniana compacta, então a hiperbolicidade de um conjunto Λ não depende da métrica riemanniana definida em M . De fato, a equivalência de normas enunciada no Teorema 3.2.4

nos garante que se verificarmos a definição de hiperbolicidade para a coleção de normas $\{\|\cdot\|_{1,x}\}_{x \in M}$, então para qualquer outra coleção de normas $\{\|\cdot\|_{2,x}\}_{x \in M}$ conseguimos obter uma constante $k \geq 1$ de modo que

$$\begin{aligned} k^{-1} \cdot \|D_x f^n v\|_2 &\leq \|D_x f^n v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot k \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^s(x) \\ k^{-1} \cdot \|D_x f^{-n} v\|_2 &\leq \|D_x f^{-n} v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_1 \leq c \cdot \lambda^n \cdot k \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Assim, analisando os termos extremos nestas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} \|D_x f^n v\|_2 &\leq (c \cdot k^2) \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f^{-n} v\|_2 &\leq (c \cdot k^2) \cdot \lambda^n \cdot \|v\|_2, & \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que, ao mudarmos a métrica riemanniana considerada em M , o conjunto Λ ainda satisfaz as condições de hiperbolicidade. Em outras palavras, mostramos que a definição de hiperbolicidade de um conjunto não depende da métrica riemanniana considerada na variedade M .

A partir daqui seguiremos a seguinte notação,

Nomenclatura 3.2.10 *Consideremos os conjuntos*

$$C_s^\alpha(x) = \{v \in T_x M ; \|v_u\| \leq \alpha \cdot \|v_s\|\} \quad e \quad C_u^\alpha(x) = \{v \in T_x M ; \|v_s\| \leq \alpha \cdot \|v_u\|\},$$

em que $\alpha > 0$. Denominamos o conjunto C_s^α de **α -cone estável em x** e o conjunto C_u^α de **α -cone instável em x** .

Nos dois resultados a seguir, apresentaremos diferentes caracterizações para os espaços estável e instável em cada ponto. Primeiramente, vejamos o resultado válido para o espaço estável de um ponto.

Teorema 3.2.11 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Para cada vetor $v \in T_x M$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $v \in E^s(x)$,
2. $\|D_x f^n v\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,
3. Existe $r > 0$ tal que $\|D_x f^n v\| \leq r$, para todo $n \geq 0$,
4. Existe $\alpha > 0$ tal que $D_x f^n v \in C_s^\alpha(f^n(x))$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração:

$$1 \implies 2)$$

Se $v \in E^s(x)$, então existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|D_x f^n v\| \leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\| \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como $0 < \lambda < 1$, segue que $\lambda^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por consequência,

$$\|D_x f^n v\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

como queríamos.

2 $\implies$ 3)

Por hipótese, a sequência $\{\|D_x f^n v\|\}_{n=0}^\infty$ é convergente. Logo, como toda sequência convergente é limitada, existe $r > 0$ tal que

$$\|D_x f^n v\| \leq r \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

3 $\implies$ 4)

Suponhamos que não exista $\alpha > 0$ tal que $D_x f^n v \in C_s^\alpha(f^n(x))$ para todo $n \geq 0$. Então, para todo $\alpha > 0$, podemos encontrar um iterado de v que não pertença ao cone $C_s^\alpha(f^n(x))$. Em particular, existe um iterado $m \geq 0$ tal que $D_x f^m v \notin C_s^1(f^m(x))$.

Denotando $w = D_x f^m v$, o fato de que $w \notin C_s^1(f^m(x))$ nos indica que

$$\|w_u\| > \|w_s\| \geq 0.$$

A partir daí, obtemos $w_u \neq 0$ e, com isso,

$$\|D_x f^n w_u\| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|D_x f^n w_s\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Aplicando a desigualdade triangular reversa, encontramos

$$\|D_x f^n w\| = \|D_x f^n w_u + D_x f^n w_s\| \geq \left| \|D_x f^n w_u\| - \|D_x f^n w_s\| \right|.$$

Através da convergências apresentadas em (3.4), concluímos que $\|D_x f^n w\| \rightarrow \infty$. Assim, a sequência $\{\|D_x f^n v\|\}_{n=0}^\infty$ não é limitada.

Para concluirmos, observemos que verificamos a contrapositiva do que desejávamos. Portanto, se a sequência $\|D_x f^n v\|$ é limitada, então existe $\alpha > 0$ tal que $D_x f^n v \in C_s^\alpha(f^n(x))$ para todo $n \geq 0$.

4 $\implies$ 1) Suponhamos a contrapositiva, isto é, que $v \notin E^s(x)$. Então $v_u \neq 0$, assim

$$\|D_x f^n v_u\| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|D_x f^n v_s\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Desse modo, para qualquer $\alpha > 0$ podemos tomar $n \geq 0$ tal que a desigualdade

$$\|D_x f^n v_u\| \geq \alpha \cdot \|D_x f^n v_s\|$$

seja satisfeita. Logo, $D_x f^n v \notin C_s^\alpha$.

Portanto, através da contrapositiva, concluímos que se existe $\alpha > 0$ tal que $D_x f^n v \in C_s^\alpha(f^n(x))$ para todo $n \geq 0$, então $v \in E^s(x)$

■

Similarmente, o resultado a seguir nos mostra diferentes formas de caracterizar o espaço instável.

Teorema 3.2.12 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Para cada vetor $v \in T_x M$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $v \in E^u(x)$,
2. $\|D_x f^{-n} v\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,
3. Existe $r > 0$ tal que $\|D_x f^{-n} v\| \leq r$, para todo $n \geq 0$,
4. Existe $\alpha > 0$ tal que $D_x f^{-n} v \in C_u^\alpha(f^{-n}(x))$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é completamente análoga à demonstração do resultado anterior, bastando substituir os iterados positivos pelos negativos. ■

As caracterizações obtidas nos dois resultados acima, nos mostram que, em cada ponto, os espaços estável e instável são unicamente determinados por f . Em outras palavras, se f induz no espaço $T_x M$ duas decomposições hiperbólicas $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ e $T_x M = G^s(x) \oplus G^u(x)$, então, obrigatoriamente, devemos ter $E^s(x) = G^s(x)$ e $E^u(x) = G^u(x)$.

A seguir, veremos que é possível tomarmos uma norma riemanniana conveniente de modo que o comportamento hiperbólico seja observado logo na primeira iteração. Com isso, as desigualdades hiperbólicas deixam de depender da constante c , tornando o comportamento mais fácil de ser analisado.

Teorema 3.2.13 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Existem uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na variedade M e uma constante $0 < \tau < 1$ tal que, com relação à norma induzida*

$$\begin{aligned} \|D_x f v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que $\|\cdot\|$ é uma **norma adaptada** ao conjunto Λ .

Demonstração: Inicialmente, consideremos uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$ em M e constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que, para todo $n \geq 0$, tenhamos

$$\begin{aligned} |D_x f^n v| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot |v|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x) \\ |D_x f^{-n} v| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot |v|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nosso objetivo é construir uma nova métrica riemanniana, para a qual, para cada $x \in \Lambda$, a derivada $D_x f$ seja uma contração imediata no espaço $E^s(x)$ e uma expansão imediata no espaço $E^u(x)$. Para isso, em cada $x \in M$, consideremos a aplicação $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \langle v, w \rangle \rangle_x = \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n v, D_x f^n w \rangle,$$

em que N é grande o suficiente para que tenhamos $c \cdot \lambda^N < 1$.

Primeiramente, pretendemos mostrar que a coleção $\{\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_x\}_{x \in M}$ definida acima é uma métrica riemanniana em M . Com esse intuito, para todo $x \in M$, $v, w \in T_x M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, verificaremos as propriedades a seguir.

- Positividade: Por definição, se $v \neq 0$, então $\langle \langle v, v \rangle \rangle$ é uma soma de termos positivos, logo $\langle \langle v, v \rangle \rangle > 0$.
- Simetria: Utilizando a simetria do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, encontramos

$$\langle \langle v, w \rangle \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n v, D_x f^n w \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n w, D_x f^n v \rangle = \langle \langle w, v \rangle \rangle.$$

- Homogeneidade: Utilizando a linearidade de cada iterado $D_x f^n$ e a homogeneidade do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha \cdot v, w \rangle \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n(\alpha \cdot v), D_x f^n w \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle \alpha \cdot D_x f^n(v), D_x f^n w \rangle \\ &= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n(v), D_x f^n w \rangle \\ &= \alpha \cdot \langle \langle v, w \rangle \rangle. \end{aligned}$$

- Linearidade: Utilizando a linearidade de cada iterado $D_x f^n$ e a linearidade válida

para o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, encontramos

$$\begin{aligned}
 \langle \langle v + v', w \rangle \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n(v + v'), D_x f^n w \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n v + D_x f^n v', D_x f^n w \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n(v), D_x f^n w \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n(v'), D_x f^n w \rangle \\
 &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle.
 \end{aligned}$$

Após conferirmos que a coleção $\{\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_x\}_{x \in M}$ constitui métrica riemanniana em M , pretendemos mostrar que esta métrica riemanniana possui a propriedade pretendida. Para provarmos o que desejamos, precisaremos primeiro verificar que são satisfeitas duas desigualdades. A primeira delas é expressa a seguir:

$$\|v\|^2 \leq a \cdot |v|^2, \quad \forall x \in M, \forall v \in E^s(x). \quad (3.5)$$

em que $a = \sum_{n=0}^{N-1} c^2 \cdot \lambda^{2n}$ e $\|\cdot\|$ representa a norma induzida pela métrica riemanniana $\{\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_x\}_{x \in M}$.

De fato, utilizando a definição da norma $\|\cdot\|$ e a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço estável $E^s(x)$ com relação à norma $|\cdot|$ verificamos que, para todo $v \in E^s(x)$,

$$\begin{aligned}
 \|v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \langle D_x f^n v, D_x f^n v \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |D_x f^n v|^2 \\
 &\leq \sum_{n=0}^{N-1} c^2 \cdot \lambda^{2n} \cdot |v|^2 \\
 &= a^2 \cdot |v|^2,
 \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade expressa em (3.5).

Por sua vez, a segunda desigualdade necessária é expressa a seguir:

$$\|v\|^2 \leq a \cdot |D_x f^{n-1} v|^2, \quad \forall v \in E^u(x). \quad (3.6)$$

Realmente, observando que $D_x f^n v = D_{f^{N-1}(x)} f^{n-(N-1)}(D_x f^{N-1} v)$ e considerando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço instável com relação à norma

$|\cdot|$, segue que, para todo $v \in E^u$

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |D_x f^n v|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |D_{f^{N-1}(x)} f^{n-(N-1)} (D_x f^{N-1} v)|^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} c^2 \cdot \lambda^{2(N-1-n)} \cdot |D_x f^{N-1} v|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} c^2 \cdot \lambda^{2n} \cdot |D_x f^{N-1} v|^2 \\
&= a \cdot |D_x f^{N-1} v|^2,
\end{aligned}$$

o que termina a prova da desigualdade enunciada em (3.6).

Para concluirmos a prova, resta mostrarmos que, em cada ponto $x \in \Lambda$, a derivada $D_x f$ age como uma contração imediata no espaço $E^s(x)$ e uma expansão imediata no espaço $E^u(x)$, com relação à norma que criamos.

Com isso em mente, mostraremos primeiro que $D_x f$ satisfaz o que desejamos para os vetores no espaço estável. Com efeito, para todo $v \in E^s(x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|D_x f v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |D_{f^n(x)} f^n (D_x f v)|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |D_x f^{n+1} v|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N |D_x f^n v|^2 \\
&= \|v\|^2 - |v|^2 + |D_x f^N v|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço estável com relação à norma $|\cdot|$ para escrevermos $|D_x f^N v| \leq c \cdot \lambda^N \cdot |v|$, segue que

$$\begin{aligned}
\|D_x f v\|^2 &\leq \|v\|^2 - |v|^2 + c^2 \cdot \lambda^{2N} \cdot |v|^2 \\
&= \|v\|^2 + (c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1) \cdot |v|^2
\end{aligned}$$

Com isso, utilizando a desigualdade $\|v\|^2 \leq a \cdot |v|^2$, que verificamos em (3.5), e definindo a constante $\tau = \sqrt{1 + a^{-1}(c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1)}$ constatamos que

$$\begin{aligned}
\|D_x f v\| &\leq \sqrt{\|v\|^2 + a^{-1} \cdot (c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1) \cdot \|v\|^2} \\
&= \tau \cdot \|v\|,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de que $D_x f$ se comporta como uma contração imediata no espaço estável.

Para finalizamos, mostraremos que $D_x f$ satisfaz o que desejamos para os vetores no espaço instável, isto é, que $D_x f^{-1}$ é uma contração imediata em $E^u(x)$. Com efeito,

para todo $v \in E^u$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|D_x f^{-1}v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |D_{f^{-1}(x)} f^n(D_x f^{-1}v)|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |D_x f^{n-1}v|^2 \\
&= \sum_{n=-1}^{N-2} |D_x f^n v|^2 \\
&= \|v\|^2 + |D_x f^{-1}v|^2 - |D_x f^{N-1}v|^2.
\end{aligned}$$

Observando que $D_x f^{-1}v = D_{f^{N-1}(x)} f^{-N}(D_x f^{N-1}v)$ e utilizando a desigualdade hiperbólica válida para os vetores no espaço instável com relação à norma $|\cdot|$ para escrevermos $|D_{f^{N-1}(x)} f^{-N}(D_x f^{N-1}v)| \leq c \cdot \lambda^N \cdot |D_x f^{N-1}v|$, segue que

$$\begin{aligned}
\|D_x f^{-1}v\|^2 &\leq \|v\|^2 + c^2 \cdot \lambda^{2N} \cdot |D_x f^{N-1}v|^2 - |D_x f^{N-1}v|^2 \\
&\|v\|^2 + (c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1) \cdot |D_x f^{N-1}v|^2.
\end{aligned}$$

Com isso, utilizando a desigualdade $\|v\|^2 \leq a \cdot |D_x f^{N-1}v|^2$, que verificamos em (3.6), e usando novamente a constante $\tau = \sqrt{1 + a^{-1}(c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1)}$ constatamos que

$$\begin{aligned}
\|D_x f^{-1}v\| &\leq \sqrt{\|v\|^2 + a^{-1} \cdot (c^2 \cdot \lambda^{2N} - 1) \cdot \|v\|^2} \\
&= \tau \cdot \|v\|,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de que $D_x f^{-1}$ se comporta como uma contração imediata no espaço instável.

Portanto, em cada ponto $x \in \Lambda$, a derivada $D_x f$ age como uma contração imediata no espaço $E^s(x)$ e uma expansão imediata no espaço $E^u(x)$, com relação à norma que criamos. Em outras palavras, existe uma constante $0 < \tau < 1$ tal que

$$\begin{aligned}
\|D_x f v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall v \in E^s(x) \\
\|D_x f^{-1} v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall v \in E^u(x),
\end{aligned}$$

isto é, a norma $\|\cdot\|$ é adaptada ao conjunto Λ . ■

Observação 3.2.14 *Se f é um difeomorfismo de classe C^r , a métrica riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ definida acima é de classe C^{r-1} . Apesar disso, é possível aproximarmos essa métrica por uma métrica riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle'$ de classe C^∞ que satisfaz as desigualdades acima para uma constante $\tau' \in (\tau, 1)$. Para mais informações, ver a referência (21, Lema 3.2).*

Analisemos a desigualdade válida para os vetores no espaço instável de cada ponto:

$$\|D_x f^{-1}v\| \leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x).$$

Essa desigualdade deve ser válida para qualquer vetor $v \in E^u(x)$. Em particular, pela invariância de E^u com relação a Df , o vetor $D_x f v$ pertence ao espaço $E^u(f(x))$, e assim é válida a desigualdade

$$\|D_{f(x)} f^{-1}(D_x f v)\| \leq \tau \cdot \|D_x f v\|$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\|D_x f v\| \geq \tau^{-1} \cdot \|v\|,$$

em que, vale notar, $\tau^{-1} > 1$.

Assim, o teorema acima nos fornece uma intuição a respeito do comportamento de Df nos pontos de um conjunto hiperbólico: essas aplicações contraem os vetores no espaço estável de cada ponto e expandem os vetores no espaço instável de cada ponto.

A partir daqui, estaremos interessados em estudar como os espaços estáveis $E^s(x)$ e instáveis $E^u(x)$ variam quando deslocamos o ponto x . Para isso, precisaremos apresentar o espaço grassmanniano para que possamos desenvolver uma noção de convergência de espaços tangentes.

Definição 3.2.15 *Seja M uma variedade n -dimensional. Para cada $m \leq n$, consideremos o conjunto*

$$G_m(M) = \{E ; E \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } T_x M, \text{ para algum } x \in M\}.$$

*O conjunto definido acima é denominado **espaço m -grassmanniano** de M .*

Definição 3.2.16 *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de M e $m \geq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $E(x_n)$ um subespaço m -dimensional de $T_{x_n} M$. Dizemos que a sequência $(E_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $G_m(M)$ converge para um espaço $E(x)$ se, dada uma base $\mathcal{B}_x = \{e_1^x, \dots, e_m^x\}$ de E_x , existem bases $\mathcal{B}_{x_n} = \{e_1^{x_n}, \dots, e_m^{x_n}\}$ de E_{x_n} , tais que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, a sequência $(e_i^{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a e_i^x .*

Após nos familiarizarmos com a noção de convergência de espaços tangentes, podemos enunciar o resultado a seguir.

Teorema 3.2.17 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$. São válidas as seguintes afirmações:*

1. *Os espaços estáveis $E^s(x)$ e instáveis $E^u(x)$ variam continuamente com o ponto $x \in \Lambda$,*
2. *As dimensões dos espaços estáveis $E^s(x)$ e instáveis $E^u(x)$ são localmente constantes,*

3. O conjunto $\bar{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico para f .

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (8, Teorema 4.3). ■

3.3 CONJUNTOS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS

Nesta seção, apresentaremos o conceito de hiperbolicidade parcial, que representa uma generalização da hiperbolicidade, em que é admitida a existência de uma direção central com comportamento intermediário. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (14) e (15).

Definição 3.3.1 *Sejam M uma variedade riemanniana de classe C^∞ e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um subconjunto f -invariante $\Lambda \subset M$ é dito um **conjunto parcialmente hiperbólico** se, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, satisfazendo as seguintes propriedades*

1. As famílias E^s , E^c e E^u são invariantes por Df , isto é,

$$D_x f(E^s(x)) = E^s(f(x)), \quad D_x f(E^c(x)) = E^c(f(x)) \quad e \quad D_x f(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

2. Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < \mu < 1$ de modo que, para todo $n \geq 0$, tenhamos

$$\begin{aligned} \|D_x f^n v\| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f^n v\| &\leq c \cdot \mu^{-n} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-n} v\| &\leq c \cdot \mu^{-n} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-n} v\| &\leq c \cdot \lambda^n \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nessa situação, chamamos os espaços $E^s(x)$ de **espaço estável em x** , $E^c(x)$ de **espaço central em x** e $E^u(x)$ de **espaço instável em x** . Adicionalmente, os espaços $E^{cs}(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$ e $E^{cu}(x) = E^c(x) \oplus E^u(x)$ são chamados **espaço centro-estável em x** e **espaço centro-instável em x** , respectivamente. Em particular, no caso em que $\Lambda = M$, dizemos que a aplicação f é um **difeomorfismo parcialmente hiperbólico**.

Assim como nas seções anteriores, veremos que é possível tomarmos uma norma riemanniana conveniente de modo que o comportamento parcialmente hiperbólico seja observado logo na primeira iteração. Com isso, as desigualdades parcialmente hiperbólicas deixam de depender da constante c , tornando o comportamento mais fácil de ser analisado.

Teorema 3.3.2 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto parcialmente hiperbólico compacto, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$. Existem uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na variedade M e constantes $0 < \tau < \eta < 1$ tais que, com relação à norma induzida*

$$\begin{aligned} \|D_x f v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f v\| &\leq \eta^{-1} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \eta^{-1} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \tau \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que $\|\cdot\|$ é uma **norma adaptada** ao conjunto Λ .

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (14, Teorema 2.10). ■

Analisemos as desigualdades válidas para os vetores no espaço central:

$$\begin{aligned} \|D_x f v\| &\leq \eta^{-1} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \eta^{-1} \cdot \|v\|, & \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^c(x). \end{aligned}$$

A primeira delas nos diz que todo vetor no espaço $E^c(x)$ é expandido por um fator menor ou igual a η^{-1} . Em comparação, a desigualdade

$$\|D_x f^{-1} v\| \leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x)$$

é equivalente, como já vimos anteriormente, à desigualdade

$$\|D_x f v\| \geq \tau^{-1} \cdot \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x)$$

o que nos mostra que todo vetor no espaço $E^u(x)$ é expandido por um fator maior ou igual a τ^{-1} . Assim, como $\eta^{-1} < \tau^{-1}$, concluímos que qualquer vetor no espaço $E^c(x)$ é expandido menos do que qualquer vetor no espaço $E^u(x)$.

Por outro lado, a segunda desigualdade é equivalente à desigualdade

$$\|D_x f v\| \geq \eta \cdot \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^u(x),$$

nos indicando que todo vetor no espaço $E^c(x)$ é expandido por um fator maior ou igual a η . Em contrapartida, a desigualdade

$$\|D_x f v\| \leq \tau \cdot \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in E^s(x)$$

nos revela que todo vetor no espaço $E^s(x)$ é expandido por um fator menor ou igual a τ . Desse modo, como $\eta > \tau$, concluímos que qualquer vetor no espaço $E^c(x)$ é expandido

mais do que qualquer vetor no espaço $E^s(x)$. Equivalentemente, dizemos que qualquer vetor no espaço $E^c(x)$ é contraído menos do que qualquer vetor no espaço $E^s(x)$.

Em vista dessa discussão, o teorema acima nos fornece uma intuição a respeito do comportamento dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos: essas aplicações são tais que, em cada ponto, a derivada contrai os vetores no espaço estável, expande os vetores no espaço instável e os vetores no espaço central sofrem uma ação mais branda do que os vetores nos outros espaços, isto é, são contraídos menos do que os vetores no espaço estável e são expandidos menos do que os vetores no espaço instável.

No resultado a seguir, estaremos interessados em estudar como os espaços estáveis $E^s(x)$, centrais $E^c(x)$ e instáveis $E^u(x)$ variam quando deslocamos o ponto x .

Teorema 3.3.3 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto parcialmente hiperbólico, em que, em cada ponto $x \in \Lambda$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$. São válidas as seguintes afirmações:*

1. *Os espaços estáveis $E^s(x)$, centrais $E^c(x)$ e instáveis $E^u(x)$ variam continuamente com o ponto $x \in \Lambda$,*
2. *O conjunto $\bar{\Lambda}$ é um conjunto parcialmente hiperbólico para f .*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (14, Proposição 2.5). ■

3.4 VARIEDADES INVARIANTES

Nesta seção, apresentaremos o Teorema da Variedade Estável, estabelecendo as definições necessárias para a compreensão de seu enunciado e de suas implicações. Adicionalmente, exploraremos outros resultados e definições envolvendo as variedades invariantes. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (8), (10), (12) e (13).

Inicialmente, concentraremos a nossa análise no caso hiperbólico.

Definição 3.4.1 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r . Para cada ponto $p \in M$, consideremos os conjuntos*

$$W_r^s(p) = \{q \in M ; d(f^n(q), f^n(p)) \leq r \text{ para todo } n \geq 0\} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(q), f^n(p)) = 0$$

$$W_r^u(p) = \{q \in M ; d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \leq r \text{ para todo } n \geq 0\} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0.$$

Denominamos o conjunto $W_r^s(p)$ de **variedade estável local** de tamanho r de p e o conjunto $W_r^u(p)$ de **variedade instável local** de tamanho r de p .

Nos dois resultados a seguir, veremos que, se r for pequeno o suficiente, as variedades estável local e instável local em cada ponto podem ser caracterizadas de diferentes formas. Primeiramente, vejamos o resultado válido para o espaço estável de um ponto.

Teorema 3.4.2 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Se r é suficientemente pequeno, então, para cada ponto $p \in \Lambda$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $q \in W_r^s(p)$,
2. $d(f^n(q), f^n(p)) \leq r$, para todo $n \geq 0$,
3. *Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $d(f^n(q), f^n(p)) \leq r$ e $d(f^n(q), f^n(p)) \leq c \cdot \lambda^n \cdot d(q, p)$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (8, Teorema 4.13). ■

Similarmente, o resultado a seguir nos mostra diferentes formas de caracterizar a variedade instável local.

Teorema 3.4.3 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Se r é suficientemente pequeno, então, para cada ponto $p \in \Lambda$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $q \in W_r^u(p)$,
2. $d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \leq r$, para todo $n \geq 0$,
3. *Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \leq r$ e $d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \leq c \cdot \lambda^n \cdot d(q, p)$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado é completamente análoga à demonstração do resultado anterior. ■

Diferentemente das definições anteriores, em que considerávamos apenas uma vizinhança local, a seguir definiremos as variedades estável e instável globais.

Definição 3.4.4 *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Para cada ponto $p \in \Lambda$, os conjuntos*

$$W^s(p) = \{q \in M ; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(q), f^n(p)) = 0\}$$

$$W^u(p) = \{q \in M ; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0\}$$

são chamados *variedade estável* e *variedade instável* do ponto p , respectivamente.

No próximo resultado, enunciamos um conjunto muito útil de afirmações equivalentes para difeomorfismo Anosov.

Teorema 3.4.5 *Seja M uma variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Anosov. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. *O conjunto não errante de f coincide com toda a variedade M , isto é, $\Omega_f = M$,*
2. *A variedade instável $W^u(x)$ é densa em M , para todo $x \in M$,*
3. *A variedade estável $W^s(x)$ é densa em M , para todo $x \in M$,*
4. *A aplicação f é transitiva,*
5. *A aplicação f é topologicamente mixing, isto é, para quaisquer abertos $U, V \subset X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (9, Teorema 5.10.3). ■

A seguir, enunciaremos o Teorema da Variedade Estável, que nos fornece uma caracterização detalhada da estrutura dessas variedades invariantes. Antes disso, introduziremos a aplicação exponencial.

Definição 3.4.6 *Seja M uma variedade riemanniana. A **aplicação exponencial** em um ponto $p \in M$, denotada por $\exp_p : T_p M \rightarrow M$, associa a cada vetor $v \in T_p M$ o ponto $\gamma_{p,v}(1)$, em que $\gamma_{p,v}$ representa a curva geodésica começando no ponto p com a direção do vetor v .*

Teorema 3.4.7 (Teorema da Variedade Estável) *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, então, para cada ponto $p \in \Lambda$, são válidas as seguintes afirmações:*

1. *As variedades estável local $W_r^s(p)$ e instável local $W_r^u(p)$ são subvariedades mergulhadas de M , com dimensões iguais às dimensões dos espaços $E^s(p)$ e $E^u(p)$, respectivamente.*
2. *As variedades estável local $W_r^s(p)$ e instável local $W_r^u(p)$ são tangentes aos espaços $E^s(p)$ e $E^u(p)$, respectivamente.*
3. *As variedades estável local $W_r^s(p)$ e instável local $W_r^u(p)$ variam continuamente com o ponto p na topologia C^r .*

4. Existem aplicações $\sigma_s^p : E_r^s(p) \rightarrow E_r^u(p)$ e $\sigma_u^p : E_r^u(p) \rightarrow E_r^s(p)$ de classe C^r , satisfazendo

$$\sigma_s^p(0_p) = 0_p, \quad D_{0_p} \sigma_s^p = 0 \quad e \quad \sigma_u^p(0_p) = 0_p, \quad D_{0_p} \sigma_u^p = 0,$$

tais que, considerando a aplicação exponencial $\exp_p$, as variedades estável local $W_r^s(p)$ e instável local $W_r^u(p)$ podem ser representadas como os gráficos das aplicações σ_s^p e σ_u^p , isto é,

$$W_r^s(p) = \{(x, \sigma_s^p(x)) ; x \in E_r^s(p)\} \quad e \quad W_r^u(p) = \{(\sigma_u^p(y), y) ; y \in E_r^u(p)\},$$

em que os espaços $E_r^s(p)$ e $E_r^u(p)$ são definidos como

$$E_r^s(p) = \{v \in E^s(p) ; \|v\| \leq r\} \quad e \quad E_r^u(p) = \{v \in E^u(p) ; \|v\| \leq r\}$$

e 0_p representa a origem em $T_x M$.

5. As variedades estável $W^s(p)$ e instável $W^u(p)$ são subvariedades imersas de M , com dimensões iguais às dimensões dos espaços $E^s(p)$ e $E^u(p)$, respectivamente.
6. As variedades estável $W^s(p)$ e instável $W^u(p)$ podem ser caracterizadas como

$$W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_r^s(f^n(p))) \quad e \quad W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W_r^u(f^{-n}(p))).$$

Adicionalmente, as famílias $\{W_r^s(p)\}_{p \in \Lambda}$ e $\{W_r^u(p)\}_{p \in \Lambda}$ são auto-coerentes, isto é, para cada $p, q \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned} \text{int } W_r^s(p) \cap \text{int } W_r^s(q) &\text{ é aberto em } W_r^s(p) \text{ e em } W_r^s(q) \\ \text{int } W_r^u(p) \cap \text{int } W_r^u(q) &\text{ é aberto em } W_r^u(p) \text{ e em } W_r^u(q). \end{aligned}$$

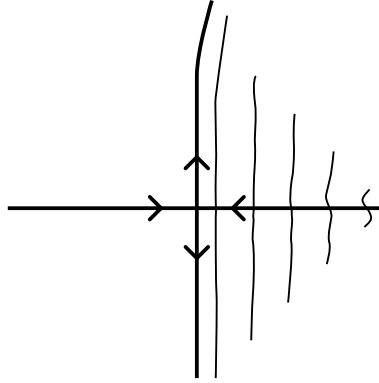
Em particular, se f for um difeomorfismo hiperbólico, e com isso queremos dizer $\Lambda = M$, então as famílias $\{W^s(p)\}_{p \in \Lambda}$ e $\{W^u(p)\}_{p \in \Lambda}$ formam folheações de classe C^0 da variedade M com folhas de classe C^r .

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em diversas referências, como (8, Teorema 4.16) e (12, Teorema 1.2, Capítulo 8). ■

Agora, apresentaremos uma ferramenta de grande importância no contexto da dinâmica hiperbólica, conhecida como λ -lema. Intuitivamente, ao considerarmos um disco que intersecta transversalmente a variedade estável de um ponto fixo hiperbólico p , a dinâmica de f age nesse disco de duas maneiras complementares. Como esse disco intersecta a variedade estável de p , ao iterarmos por f a imagem desse disco deve se aproximar do ponto p . Por outro lado, a expansão na coordenada instável faz com que esse disco se alongue. Como consequência, os iterados desse disco por f devem se acumular na

variedade instável do ponto p , isto é, devem se aproximar da variedade instável de p com relação à posição e à inclinação. A imagem a seguir ilustra essa ideia.

Figura 9 - λ -lema



Fonte: O próprio autor (2026).

Lema 3.4.8 (λ -lema ou lema da inclinação) *Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$, $r \geq 1$, tendo $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Sejam $B^s \subset W^s_{loc}(p)$ e $B^u \subset W^u_{loc}(p)$ bolas abertas em torno de $p \in M$. Sejam $V = B^s \times B^u$, $q \in W^s_{loc}(p) \setminus \{p\}$ e seja D^u um disco de dimensão $u = \dim(W^u(p))$ transversal a $W^s_{loc}(p)$ em q . Denotemos por D^u_n a componente conexa de $f^n(D^u) \cap V$ que contém $f^n(q)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que D^u_n está ϵ - C^1 -próximo de B^u para todo $n > n_0$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (13, Lema 2.49). ■

A partir daqui, concentraremos nossa análise nos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Para os nossos interesses, poderemos considerar apenas um caso mais restrito: o caso da hiperbolicidade normal. Com essa intenção em mente, apresentamos as seguintes definições.

Definição 3.4.9 *Seja E um espaço vetorial. Denotamos por $\mathcal{L}(E)$ o espaço das transformações lineares sobre E , isto é,*

$$\mathcal{L}(E) = \{A : E \rightarrow E; A \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Definição 3.4.10 *Sejam E um espaço vetorial normado e $A : E \rightarrow E$ uma transformação linear. Consideremos as aplicações $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ e $m : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Ax\| ; \|x\| = 1\} \\ m(A) &= \inf\{\|Ax\| ; \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

As aplicações acima são normas no espaço $\mathcal{L}(E)$. Denominamos a norma $\|\cdot\|$ de **norma do operador** e a norma $m(\cdot)$ de **norma do mínimo**.

Observação 3.4.11 Se a transformação linear A é invertível, então essas normas satisfazem a relação $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Definição 3.4.12 Sejam M uma variedade riemanniana compacta, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $N \subset M$ uma subvariedade invariante, isto é, $f(N) = N$. Dizemos que f é **r -normalmente hiperbólica** com relação a N se, em cada ponto $x \in N$, o espaço tangente $T_x M$ admite uma decomposição parcialmente hiperbólica $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, onde $E^c(x) = T_x N$, satisfazendo as seguintes propriedades

$$\|D_x f|_{E^s(x)}\| < m(D_x f|_{E^c(x)})^r \quad e \quad \|D_x f|_{E^c(x)}\|^r < m(D_x f|_{E^u(x)}).$$

Definição 3.4.13 Sejam M uma variedade riemanniana compacta, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\mathcal{F}$ uma folheação de M . Dizemos que f é **r -normalmente hiperbólica** com relação a $\mathcal{F}$ se, em cada ponto $x \in M$, o espaço tangente $T_x M$ admite uma decomposição parcialmente hiperbólica $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, onde $E^c(x) = T_x \mathcal{F}(x)$, satisfazendo as seguintes propriedades

$$\|D_x f|_{E^s(x)}\| < m(D_x f|_{E^c(x)})^r \quad e \quad \|D_x f|_{E^c(x)}\|^r < m(D_x f|_{E^u(x)}).$$

A seguir, enunciamos o Teorema da Variedade Estável no caso normalmente hiperbólico.

Teorema 3.4.14 (Teorema da Variedade Estável - caso normalmente hiperbólico)

Sejam M uma variedade compacta, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r e $V \subset M$ uma subvariedade invariante por f , com f r -normalmente hiperbólica a V . São válidas as seguintes afirmações

- Existem subvariedades localmente f -invariantes denotadas por $W_f^s, W_f^{cs}, W_f^{cu}$ e W_f^u tangentes em V aos espaços E^s, E^{cs}, E^{cu} e E^u , respectivamente; A invariância local nos diz que, para pontos em uma vizinhança suficientemente próxima de V , a aplicação f e sua inversa mantem esses pontos dentro da própria subvariedade.
- Qualquer conjunto localmente invariante no sentido do item acima e próximo a V está contido na união $W^{cs} \cup W^{cu}$,
- O conjunto W^{cs} consiste de todos os pontos cuja órbita positiva nunca se afasta de V e W^{cu} consiste de todos os pontos cuja órbita negativa nunca se afasta de V ,
- As variedades W^s, W^{cs}, W^{cu}, W^u e V são de classe C^r ,

- As variedades W^{cs} e W^{cu} são subfolheadas por W^s e W^u , respectivamente. Os pontos de W^s são caracterizados pela assintoticidade forte pra frente e os pontos de W^u são caracterizados pela assintoticidade forte pra trás.

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (10, Teorema 4.1). ■

Observação 3.4.15 *No Capítulo 4, as aplicações consideradas satisfarão a hipótese de hiperbolicidade normal com relação a uma folheação. Embora o teorema anterior tenha sido enunciado no contexto de uma subvariedade invariante, ele pode ser estendido naturalmente para o caso relativo a folheações.*

Em geral, fora do cenário da hiperbolicidade normal, a existência das variedades centro-estável e centro-instável não é imediata para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Nesse contexto, introduzimos a definição a seguir.

Definição 3.4.16 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Dizemos que f é **dinamicamente coerente** se existem uma folheação invariante $\mathcal{F}^{cs}$, tangente ao espaço centro-estável E^{cs} , e uma folheação invariante $\mathcal{F}^{cu}$, tangente ao espaço centro-instável E^{cu} . Nessa situação, chamamos as folheações $\mathcal{F}^{cs}$ de **folheação centro-estável** e $\mathcal{F}^{cu}$ de **folheação centro-instável**.*

No artigo *Dynamical coherence and center bunching*, (22), de 2008, Burns e Wilkinson provam que, nas condições descritas acima, a interseção das folheações $\mathcal{F}^{cs}$ e $\mathcal{F}^{cu}$ define uma nova folheação invariante $\mathcal{F}^c$, tangente ao espaço central E^c . Nesse caso, chamamos a folheação $\mathcal{F}^c$ de **folheação central**.

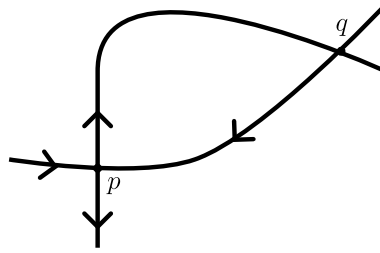
3.5 INTERSEÇÕES HOMOCLÍNICAS

Nesta seção, apresentaremos as interseções homoclínicas. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (4) e (8).

Inicialmente, apresentamos a definição de ponto homoclínico.

Definição 3.5.1 *Seja p um ponto periódico hiperbólico. Dizemos que um ponto q é um ponto **homoclínico transversal** ao ponto p se $q \in W^s(p) \bar{\cap} W^u(p)$.*

Figura 10 - Ponto Homoclínico



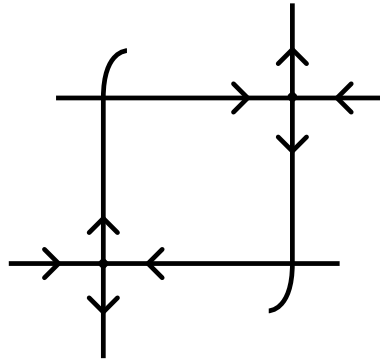
Fonte: O próprio autor (2026).

De modo similar, introduziremos a noção de interseção homoclínica para pontos periódicos hiperbólicos.

Definição 3.5.2 *Dados dois pontos periódicos hiperbólicos p e q de um difeomorfismo f , com a mesma dimensão do espaço estável, dizemos que eles são **homoclinicamente relacionados** se vale o seguinte:*

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset \quad e \quad W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset.$$

Figura 11 - Pontos Homoclinicamente Relacionados



Fonte: O próprio autor (2026).

A definição acima pode ser estendida naturalmente para as órbitas desses pontos da seguinte maneira

Definição 3.5.3 *Dizemos que as órbitas de p e q são **homoclinicamente relacionadas** se*

$$W^s(\mathcal{O}(p)) \cap W^u(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset \quad e \quad W^s(\mathcal{O}(q)) \cap W^u(\mathcal{O}(p)) \neq \emptyset.$$

Observação 3.5.4 *A relação definida acima é uma relação de equivalência.*

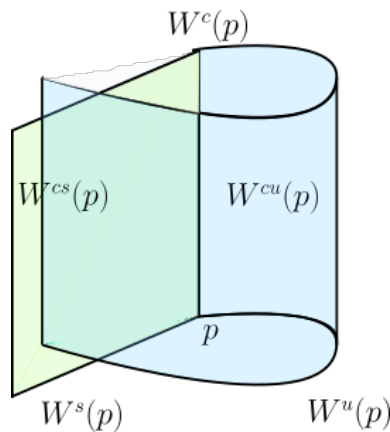
Sendo uma relação de equivalência, podemos agrupar órbitas com comportamento semelhantes por meio das classes de equivalência. Representando o fecho dessas classes de equivalência, temos a definição a seguir,

Definição 3.5.5 A **classe homoclínica** da órbita de p , denotada por $\mathcal{HC}(\mathcal{O}(p))$, é o fecho da classe de equivalência da órbita de p .

No caso parcialmente hiperbólico, podemos considerar uma definição semelhante envolvendo também as variedades centrais.

Definição 3.5.6 Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente e p um ponto fixo de f . Dizemos que um ponto q é **homoclínico** a $W^c(p)$ se $q \in W^{cs}(p) \cap W^{cu}(p)$.

Figura 12 - Interseção entre $W^{cs}(p)$ e $W^{cu}(p)$



Fonte: O próprio autor (2026).

3.6 AUTOMORFISMOS LINEARES HIPERBÓLICOS DO TORO

Nesta seção, apresentaremos uma família especial de difeomorfismos hiperbólicos, a saber, os automorfismos lineares hiperbólicos do toro. Como referência para os tópicos abordados nessa seção, é recomendada a consulta a (4) e (12). Para a descrição destas aplicações, prosseguiremos da seguinte maneira.

Consideremos $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ uma matriz n por n , com coordenadas inteiras, satisfazendo a propriedade $|\det A| = 1$ e que não possui autovalores de norma unitária. Como cada entrada da matriz A é um número inteiro, se $(x_1, \dots, x_n)$ é um vetor com

coordenadas inteiras, então o produto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tem como resultado um elemento de $\mathbb{Z}^n$, isto é, um vetor com coordenadas inteiras. Assim, se considerarmos π a projeção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{T}^n$ definida por

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \bmod 1, \dots, x_n \bmod 1),$$

fica bem definida a aplicação $F_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, no toro $\mathbb{T}^n$, determinada por

$$F_A \circ \pi = \pi \circ A.$$

Em adição a isso, a hipótese de que $|\det A| = 1$ nos diz que a inversa A^{-1} também possui coordenadas inteiras. Com efeito, um resultado clássico da teoria de matrizes nos diz o seguinte

Lema 3.6.1 *Se M é uma matriz n por n tal que $\det M \neq 0$, então*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \text{adj } M,$$

em que $\text{adj } M$ é a matriz adjunta de M , isto é, a transposta da matriz dos cofatores de M .

A partir daí, considerando que cada cofator de uma matriz com coordenadas inteiras é um número inteiro, concluímos que a matriz A^{-1} também possui entradas inteiras.

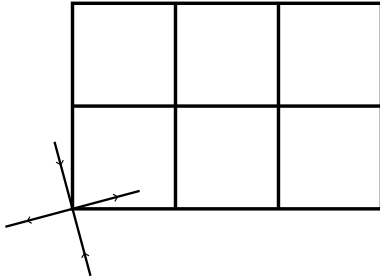
Adicionalmente, a matriz A^{-1} satisfaz $|\det A^{-1}| = 1$ e não possui autovalores de norma unitária. Desse modo, podemos definir de forma análoga ao que fizemos anteriormente uma aplicação $F_{A^{-1}}$.

Agora, verificaremos que as aplicações F_A e $F_{A^{-1}}$ são inversas, ou seja, $F_A^{-1} = F_{A^{-1}}$. Realmente, se tomarmos $x \in \mathbb{T}^2$ e $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\pi(\tilde{x}) = x$, então

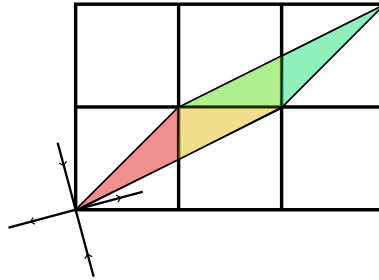
$$\begin{aligned} F_A \circ F_{A^{-1}}(x) &= F_A \circ F_{A^{-1}}(\pi(\tilde{x})) \\ &= F_A \circ \pi(A^{-1}(\tilde{x})) \\ &= \pi \circ A(A^{-1}(\tilde{x})) \\ &= \pi(\tilde{x}) \\ &= x. \end{aligned}$$

De modo completamente análogo, mostramos que $F_{A^{-1}} \circ F_A(x) = x$.

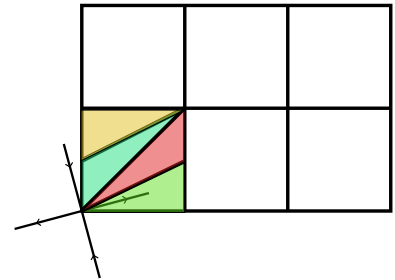
Na figura a seguir, o quadrado no canto inferior esquerdo representa o toro $\mathbb{T}^2$. Essa figura nos permite visualizar a ação de um automorfismo linear hiperbólico no toro $\mathbb{T}^2$.

Figura 13 - Toro $\mathbb{T}^2$ 

Fonte: O próprio autor
(2026).

Figura 14 - Imagem $A(\mathbb{T}^2)$ 

Fonte: O próprio autor
(2026).

Figura 15 - Projeção $\pi \circ A(\mathbb{T}^2)$ 

Fonte: O próprio autor
(2026).

No próximo resultado, enunciamos uma coleção de propriedades que tais aplicações possuem.

Teorema 3.6.2 *Seja $F_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ um automorfismo linear hiperbólico do toro. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

1. *O conjunto dos pontos periódicos de F_A é denso em $\mathbb{T}^n$. Em particular, existem infinitos pontos periódicos. Ademais, o conjunto não errante Ω_{F_A} é todo o toro $\mathbb{T}^n$.*
2. *O toro $\mathbb{T}^n$ é um conjunto hiperbólico para a aplicação F_A .*
3. *F_A é transitivo.*
4. *F_A é estruturalmente estável.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (12, Teorema 5.1, Capítulo 8). ■

O teorema a seguir, demonstrado inicialmente por Franks no artigo *Anosov diffeomorphisms on tori*, (19), estabelece que os automorfismos lineares hiperbólicos do toro são profundamente relacionados a uma classe mais geral de aplicações. Assim, através do estudo de aplicações mais simples, podemos obter diversas conclusões sobre aplicações mais gerais.

Teorema 3.6.3 *Todo difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^n$ é conjugado a um automorfismo linear hiperbólico do toro $\mathbb{T}^n$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (4, Teorema 18.6.1). ■

A conjugação enunciada acima nos permite concluir diversas propriedades sobre difeomorfismos Anosov no toro $\mathbb{T}^n$. Para finalizarmos essa seção, enunciamos a proposição a seguir.

Proposição 3.6.4 *Se $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um difeomorfismo Anosov, então $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega_f = \mathbb{T}^2$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (16, Teorema 1.5.2 e Teorema 1.5.3). ■

3.7 DIFEOMORFISMOS DERIVADOS DE ANOSOV

Em 1967, no artigo *Differentiable dynamical systems*, (23), Smale apresentou a ideia de realizar uma “cirurgia” em um difeomorfismo Anosov, isto é, realizar uma pequena modificação dessa aplicação em uma vizinhança de um ponto fixo hiperbólico, de modo a obter três pontos fixos nessa vizinhança: o original se torna um ponto atrator (ou repulsor), e surgem dois novos pontos fixos, os quais serão pontos hiperbólicos.

Nesta seção, exemplificaremos essa construção com um caso específico, aqui executaremos tal cirurgia no automorfismo linear hiperbólico do toro $F_L : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, induzido pela transformação linear $L(x, y) = (2x + y, x + y)$, na vizinhança do ponto fixo hiperbólico $p_0 = 0$. Para informações adicionais e resultados auxiliares, é recomendada a consulta a referências como (4) e (12).

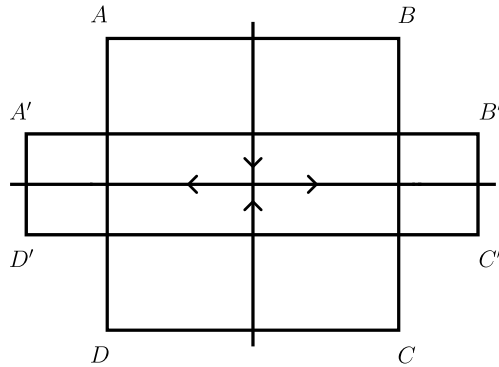
Primeiramente, observemos que a transformação linear L possui dois autovalores, a saber

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

em que λ_u é o autovalor instável e λ_s é o autovalor estável.

Denotando por v_u e v_s os autovetores unitários associados aos autovalores instável e estável respectivamente, consideremos em uma vizinhança U do ponto fixo hiperbólico p_0 um sistemas de coordenadas de modo que possamos escrever cada ponto dessa vizinhança como $(x_u, x_s) = x_u \cdot v_u + x_s \cdot v_s$. Assim, os pontos com coordenadas da forma $(x_u, 0)$ pertencem à variedade instável do 0, $W^u(0)$, enquanto os pontos com coordenadas da forma $(0, x_s)$ pertencem à variedade estável do 0, $W^s(0)$. Nesse sistemas de coordenadas, podemos escrever $F(x_u, x_s) = (\lambda_u \cdot x_u, \lambda_s \cdot x_s)$.

Figura 16 - Antes da cirurgia



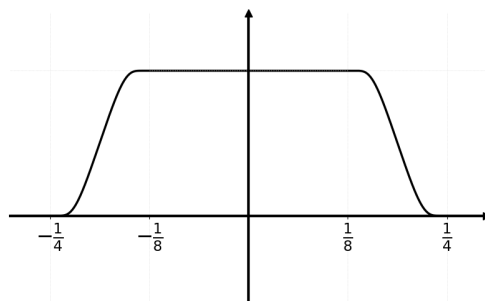
Fonte: O próprio autor (2026).

Com o objetivo de realizarmos a “cirurgia”, definamos uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ satisfazendo as seguintes propriedades

1. A aplicação ϕ é uma função par, isto é, $\phi(-t) = \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
2. A aplicação ϕ é constante igual a 1 em uma vizinhança do ponto p_0 e se anula fora de uma vizinhança maior deste ponto, mais precisamente

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq \frac{1}{8}, \\ 0, & \text{se } |t| \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

3. Entre as duas vizinhanças citadas no item acima, a função é decrescente para os valores positivos de t (e, por consequência, crescente para os valores negativos de t), ou seja, $\phi'(t) < 0$ para todo t no intervalo $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$.

Figura 17 - Gráfico da *bump function*

Fonte: O próprio autor (2026).

Agora, fixada uma constante $k > 0$, definimos uma aplicação f , que denominaremos difeomorfismo derivado de Anosov induzido pela aplicação F_L , da seguinte maneira

1. A aplicação f coincide com F_L fora da vizinhança U definida acima, isto é, $f(x) = F_L(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2 \setminus U$,
2. No aberto U , a aplicação f é definida por

$$\begin{aligned} f(x_u, x_s) &= F(x_u, x_s) + (0, (2 - \lambda_s) \cdot \phi(x_u) \cdot \phi(k \cdot x_s) \cdot x_s) \\ &= (\lambda_u \cdot x_u, \lambda_s \cdot x_s + (2 - \lambda_s) \cdot \phi(x_u) \cdot \phi(k \cdot x_s) \cdot x_s). \end{aligned}$$

Após definirmos a aplicação desejada, resta verificarmos que esta aplicação realmente satisfaz a propriedade pretendida: o ponto fixo p_0 é um ponto atrator (ou repulsor) para f , e que essa aplicação possui mais dois pontos fixos no aberto U , que devem ser pontos hiperbólicos. Com esse objetivo, fazemos uma análise dos pontos fixos de f .

Naturalmente, a aplicação f não possui pontos fixos no complementar do aberto U , visto que neste conjunto f coincide com a aplicação F_L . Por outro lado, em U , se (x_u, x_s) é um ponto fixo, então

$$\begin{aligned} x_u &= \lambda_u \cdot x_u, \\ x_s &= \lambda_s \cdot x_s + (2 - \lambda_s) \cdot \phi(x_u) \cdot \phi(k \cdot x_s) \cdot x_s. \end{aligned}$$

Através da primeira destas igualdades, concluimos que a coordenada x_u deve ser nula. Por sua vez, utilizando o fato de que $\phi(0) = 1$, a segunda desigualdade é verificada se, e somente se, $x_s = 0$ ou

$$\phi(k \cdot x_s) = \frac{1 - \lambda_s}{2 - \lambda_s}.$$

O primeiro caso, $x_s = 0$, nos indica que $p_0 = (x_u, x_s) = (0, 0)$ é um ponto fixo, como esperávamos. Em contrapartida, a definição da aplicação ϕ nos garante que a igualdade obtida no segundo caso é satisfeita por exatamente dois valores: $\bar{x}$ e $-\bar{x}$. Desse modo, a aplicação f possui exatamente três pontos fixos na vizinhança U , explicitamente

$$(0, 0), \quad (0, \bar{x}) \quad \text{e} \quad (0, -\bar{x}).$$

Por fim, analisemos o comportamento da derivada de f nestes pontos fixos. Calculando a derivada, encontramos

$$D_{(x_u, x_s)} f = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ (2 - \lambda_s) \cdot \phi'(x_u) \cdot \phi(k \cdot x_s) \cdot x_s & h(x_u, k \cdot x_s) \end{pmatrix}$$

em que h é a aplicação definida por

$$h(x_u, k \cdot x_s) = \lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot \phi(x_u) \cdot (\phi'(k \cdot x_s) \cdot k \cdot x_s + \phi(k \cdot x_s)).$$

Em particular, nos três pontos fixos que encontramos, a derivada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D_{(0,0)}f &= \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ D_{(0,\bar{x})}f &= \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot (\phi'(k \cdot \bar{x}) \cdot k \cdot \bar{x} + \phi(k \cdot \bar{x})) \end{pmatrix}, \\ D_{(0,-\bar{x})}f &= \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot (\phi'(k \cdot (-\bar{x})) \cdot k \cdot (-\bar{x}) + \phi(k \cdot (-\bar{x}))) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que, no cálculo das derivadas nos pontos $(0, \bar{x})$ e $(0, -\bar{x})$, utilizamos o fato de que ϕ é constante em uma vizinhança da origem para concluirmos que $\phi'(0) = 0$.

A matriz $D_{(0,0)}f$ nos indica que o ponto fixo p_0 é um ponto repulsor. De modo correspondente, como $\phi' < 0$ no intervalo $(0, 1)$ e $\phi' > 0$ no intervalo $(-1, 0)$, segue que

$$\phi'(k \cdot \bar{x}) \cdot k \cdot \bar{x} < 0 \quad \text{e} \quad \phi'(k \cdot (-\bar{x})) \cdot k \cdot (-\bar{x}) < 0,$$

e por consequência, são válidas as desigualdades

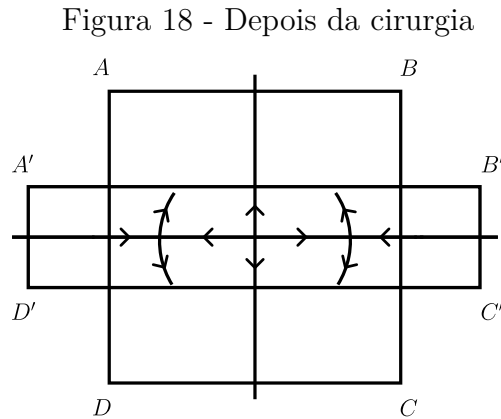
$$\lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot (\phi'(k \cdot \bar{x}) \cdot k \cdot \bar{x} + \phi(k \cdot \bar{x})) < \lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot \phi(k \cdot \bar{x}) = 1$$

$$\lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot (\phi'(k \cdot (-\bar{x})) \cdot k \cdot (-\bar{x}) + \phi(k \cdot (-\bar{x}))) < \lambda_s + (2 - \lambda_s) \cdot \phi(k \cdot (-\bar{x})) = 1,$$

onde utilizamos a igualdade

$$\phi(k \cdot \bar{x}) = \phi(k \cdot (-\bar{x})) = \frac{1 - \lambda_s}{2 - \lambda_s}.$$

Por meio das duas desigualdades acima, as matrizes $D_{(0,\bar{x})}$ e $D_{(0,-\bar{x})}$ nos indicam que os pontos fixos $(0, \bar{x})$ e $(0, -\bar{x})$ são pontos fixos hiperbólicos.



Fonte: O próprio autor (2026).

4 O EXEMPLO DO SHUB

Neste capítulo, exploraremos o exemplo do Shub, que consiste de um dos primeiros modelos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e estritamente não hiperbólico a apresentar a propriedade da transitividade robusta.

4.1 O EXEMPLO DO SHUB: CASO GERAL

Em 1971, no artigo *Topologically transitive diffeomorphisms of $\mathbb{T}^4$* , (25), Shub apresentou condições suficientes para que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico seja robustamente transitivo. Nesta seção, enunciaremos tais condições. Para informações adicionais e resultados auxiliares, é recomendada a consulta a referências como (10) e (25).

Primeiramente, precisaremos da definição a seguir.

Definição 4.1.1 *Sejam M e N variedades de classe C^∞ . Uma fibração $\pi : M \rightarrow N$ é dita uma **fibração C^r regular** se, para todo $y \in N$, $\pi^{-1}(y)$ é uma subvariedade C^r de M e a aplicação $x \mapsto T_x \pi^{-1}(\pi(x))$, definida em M , é contínua.*

Nos interessaremos por um tipo de fibração que se comporta bem com relação a uma aplicação $F : M \rightarrow M$ no seguinte sentido: queremos que, para cada ponto $x \in N$, a imagem dos pontos na fibra $\pi^{-1}(x)$ pertença a uma mesma fibra $\pi^{-1}(y)$, em que $y \in N$. Desse modo, poderemos definir uma aplicação $f : N \rightarrow N$ através da seguinte regra: se F leva a fibra $\pi^{-1}(x)$ na fibra $\pi^{-1}(y)$, então $f(x) = y$. Formalmente, escrevemos a definição a seguir.

Definição 4.1.2 *Dizemos que uma fibração C^r regular $\pi : M \rightarrow N$ é uma **fibração C^r equivariante** para um difeomorfismo $F : M \rightarrow M$ se F leva π -fibra em π -fibra, isto é, se está bem definida a aplicação $f : N \rightarrow N$ que satisfaz $\pi \circ F = f \circ \pi$.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

O teorema abaixo estabelece condições suficientes para garantir que a aplicação F seja transitiva, considerando a estrutura de uma fibração C^r equivariante que descrevemos acima.

Teorema 4.1.3 *Seja $f : N \rightarrow N$ um difeomorfismo Anosov. Suponhamos que f satisfaça as seguintes propriedades:*

1. O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em N ,
2. Existe $p \in N$ tal que $f(p) = p$, isto é, p é ponto fixo de f ,
3. Existe uma fibração C^r equivariante $\pi : M \rightarrow N$ para uma aplicação $F : M \rightarrow M$, com $\pi \circ F = f \circ \pi$, tal que $F|_{\pi^{-1}(p)}$ é um difeomorfismo Anosov com o conjunto dos pontos periódicos denso.

Então, a aplicação F é transitiva.

Demonstração: Para a demonstração deste resultado, ver (10, Proposição 8.6). ■

Antes de prosseguirmos para o próximo resultado, precisaremos estabelecer a noção de perturbações de uma fibração.

Definição 4.1.4 *Sejam M uma variedade de classe C^∞ , N uma variedade e $\pi : M \rightarrow N$ uma fibração C^r -regular. Uma **perturbação da fibração** π é um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$, de classe C^r nas fibras, tal que a aplicação $\pi' = \pi \circ h^{-1}$ é uma fibração C^r -regular, em que h é próximo da identidade na topologia C^0 e Dh nas fibras é próxima da identidade na topologia C^1 .*

Com base na definição anterior, enunciamos o Teorema da fibração equivariante. Esse teorema nos garante que se a dinâmica de f é dominante sobre a de F na direção das fibras, então a estrutura da fibração persistirá por pequenas perturbações F' de F . Mais do que isso, a igualdade $\pi' \circ F' = f \circ \pi'$ nos indica que a aplicação f continuará ditando como as fibras de π' são mapeadas umas nas outras por F' .

Teorema 4.1.5 (Teorema da fibração equivariante) *Sejam $f : N \rightarrow N$ um difeomorfismo Anosov e $\pi : M \rightarrow N$ uma fibração C^r equivariante para uma aplicação $F : M \rightarrow M$, com $\pi \circ F = f \circ \pi$. Suponhamos que f seja mais hiperbólica do que F é na direção das fibras, isto é, que em cada ponto $x \in M$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição parcialmente hiperbólica $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, com $E^c(x) = T_x \pi^{-1}(\pi(x))$, induzida por F . Então, se F' é uma perturbação suficientemente pequena de F na topologia C^r , existe uma perturbação π' da fibração π tal que π' é uma fibração C^r equivariante F' , com $\pi' \circ F' = f \circ \pi'$.*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{F} & M \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{F'} & M \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 N & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (10, Proposição 8.2 e Corolário 8.3). ■

Encerramos esta seção com o seu principal resultado, que reúne as hipóteses introduzidas anteriormente e mostra que as mesmas são suficientes para que a transitividade de F seja preservada para pequenas perturbações F' , isto é, para que tenhamos a transitividade robusta de F . Para as aplicações que cumprem as condições do teorema a seguir, diremos que elas satisfazem o caso geral do exemplo do Shub.

Teorema 4.1.6 *Consideremos $F : M \rightarrow M$ um difeomorfismo, $f : N \rightarrow N$ um difeomorfismo Anosov e $\pi : M \rightarrow N$ um fibração C^r equivariante para F , com $\pi \circ F = f \circ \pi$, satisfazendo as hipóteses dos dois teoremas anteriores, isto é,*

1. *O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em N ,*
2. *Existe $p \in N$ tal que $f(p) = p$, isto é, p é ponto fixo de f ,*
3. *A restrição $F|_{\pi^{-1}(p)}$ é um difeomorfismo Anosov com o conjunto dos pontos periódicos denso,*
4. *A aplicação f é mais hiperbólica que F na direção das fibras, isto é, em cada ponto $x \in M$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição parcialmente hiperbólica $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, com $E^c(x) = T_x \pi^{-1}(\pi(x))$, induzida por F .*

Então, qualquer perturbação suficientemente pequena de F na topologia C^r é transitiva.

Demonstração: Este resultado é um corolário dos teoremas 4.1.3 e 4.1.5. ■

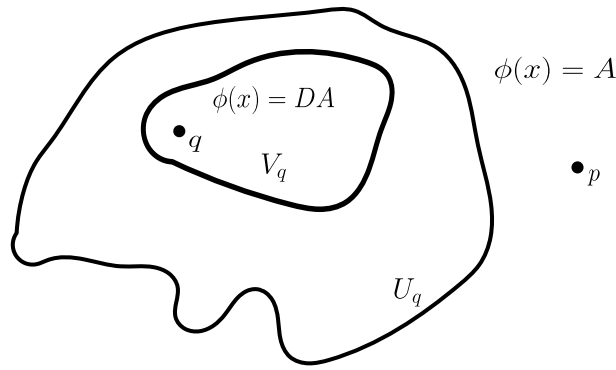
4.2 O EXEMPLO DO SHUB: CASO PARTICULAR

Em 1971, no artigo *Instability*, (24), Shub descreveu a construção de um difeomorfismo no toro $\mathbb{T}^4$ com a propriedade de que toda aplicação em uma vizinhança desse difeomorfismo é topologicamente Ω -estável, mas não é Ω -estável. No artigo, *Topologically transitive diffeomorphisms of $\mathbb{T}^4$* , (25), do mesmo ano, Shub afirma que o difeomorfismo descrito anteriormente satisfaz as condições necessárias para que seja um exemplo do Shub geral. Nesta seção, realizaremos a construção deste difeomorfismo e mostraremos que ele satisfaz as condições desejadas. Para informações adicionais e resultados auxiliares, é recomendada a consulta a referências como (10), (24) e (25).

Consideremos $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo Anosov com dois pontos fixos, p e q e $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{T}^2)$ uma aplicação diferenciável satisfazendo as seguintes propriedades

1. Existe uma vizinhança U_q de q , não contendo o ponto p , tal que, para todo $x \notin U_q$, $\phi(x) = A$,
2. Existe uma vizinhança $V_q \subset U_q$ de q , tal que, para todo $x \in V_q$, $\phi(x) = DA$ é um difeomorfismo derivado de Anosov,
3. No conjunto $U_q \setminus V_q$, a aplicação $\phi(x)$ representa uma isotopia entre as aplicações A e DA .

Figura 19 - Representação das vizinhanças V_q e U_q



Fonte: O próprio autor (2026).

A partir do produto cruzado das aplicações A e ϕ , definiremos o difeomorfismo descrito por Shub. Mais precisamente, seja $G : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ a aplicação definida por

$$G(x, y) = (Ax, \phi(x)y).$$

No decorrer desta subseção, verificaremos que a aplicação G definida acima realmente satisfaz as condições do caso geral do exemplo do Shub.

Por construção, se considerarmos $\pi = p_1$ a projeção canônica na primeira coordenada, então

$$\pi \circ G(x, y) = \pi(Ax, \phi(x)y) = Ax = A \circ \pi(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$$

isto é, π é uma fibração C^r equivariante para a aplicação G , com $\pi \circ G = A \circ \pi$. Assim, podemos representar esta situação com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^4 & \xrightarrow{G} & \mathbb{T}^4 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Teorema 4.2.1 *As aplicações G, A e $\pi = p_1$ satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.3.*

Demonstração: Para provarmos o desejado, devemos verificar cada uma das hipóteses do teorema citado. Com efeito,

1. O conjunto dos pontos periódicos de A é denso em $\mathbb{T}^2$, visto que A é um difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^2$.
2. Por construção, a aplicação A possui um ponto fixo p .
3. Verificamos acima que a projeção canônica na primeira coordenada $\pi = p_1 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é uma fibração C^r equivariante para a aplicação G , com $\pi \circ G = A \circ \pi$. Ademais, a restrição $G|_{\pi^{-1}(p)} = \phi(p)$ é o difeomorfismo Anosov A que, como já observamos, possui o conjunto dos pontos periódicos denso.

Assim, o Teorema 4.1.3 nos garante que G é transitiva. ■

Teorema 4.2.2 *As aplicações G, A e $\pi = p_1$ satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.5 (Teorema da Fibração Equivariante).*

Demonstração: Primeiramente, consideremos as aplicações

$$(x, y) \mapsto \|D_y \phi(x)\| \quad \text{e} \quad (x, y) \mapsto m(D_y \phi(x))$$

definidas no toro $\mathbb{T}^4$.

Como essas aplicações dependem continuamente do ponto (x, y) e têm como domínio o conjunto compacto $\mathbb{T}^4$, estão bem definidos os valores máximo e mínimo a seguir

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{T}^4} \|D_y \phi(x)\| \quad \text{e} \quad \min_{(x,y) \in \mathbb{T}^4} m(D_y \phi(x)).$$

A partir dos Teoremas 3.2.11 e 3.2.12 podemos concluir que, quando $n \rightarrow \infty$, temos as convergências

$$\|D_x A^n|E^s(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad m(D_x A^n|E^u(x)) \rightarrow \infty$$

para todo $x \in \mathbb{T}^2$.

Assim, tomando uma potência de A se necessário, podemos considerar válidas as desigualdades

$$\|D_x A|E^s(x)\| < \min_{(x,y) \in \mathbb{T}^4} m(D_y \phi(x)) < \max_{(x,y) \in \mathbb{T}^4} \|D_y \phi(x)\| < m(D_x A|E^u(x))$$

para todo $x \in \mathbb{T}^2$.

Sob estas condições o artigo *Recent results about stable ergodicity*, (26, p. 330), nos mostra que a aplicação G é parcialmente hiperbólica com o espaço central

$$E^c(x, y) = T_{(x, y)}\pi^{-1}(\pi(x, y)).$$

■

Além disso, com base nos resultados apresentados em *Recent results about stable ergodicity* e *Introduction to partially hyperbolic dynamics*, (26, p. 330) e (14, p. 29), utilizando o clássico argumento da transformação do gráfico, podemos garantir que os espaços estável e instável induzidos por G são projetados por $D\pi$ nos respectivos espaços induzidos por A , isto é,

$$D\pi(E_G^s(x, y)) = E_A^s(x) \quad \text{e} \quad D\pi(E_G^u(x, y)) = E_A^u(x).$$

Adicionalmente, as dimensões desses espaços são preservadas. Ou seja, temos as igualdades

$$\dim E_G^s(x, y) = \dim E_A^s(x) \quad \text{e} \quad \dim E_G^u(x, y) = \dim E_A^u(x).$$

Corolário 4.2.3 *A aplicação G é robustamente transitiva.*

Demonstração: Com efeito, através do Teorema 4.1.6, concluímos que qualquer perturbação suficientemente pequena de G na topologia C^r é transitiva. Em outras palavras, G é robustamente transitiva.

■

Teorema 4.2.4 *A aplicação G não é um difeomorfismo hiperbólico.*

Demonstração: A aplicação $\phi(q) = DA$ possui pontos periódicos com índices de Morse distintos, a saber, uma sela e uma fonte (ou poço). Por consequência, G possui a mesma característica.

Suponhamos que G seja um difeomorfismo hiperbólico e consideremos p_1 e p_2 pontos periódicos de G com índices de Morse distintos. Como as dimensões das variedades invariantes são localmente constantes, existem vizinhanças U_1 de p_1 e U_2 de p_2 em que os respectivos índices de Morse são preservados. Por transitividade, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$.

Seja $q \in G^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Por pertencer à vizinhança U_2 , o ponto q deve ter o mesmo índice de Morse de p_2 . Além disso, como a derivada de G é um isomorfismo, as dimensões das variedades estável e instável são constantes ao longo de uma órbita.

Assim, por pertencer ao conjunto $G^n(U_1)$, o ponto q deve ter o mesmo índice de Morse de p_1 . Por fim, como os índices de Morse dos pontos p_1 e p_2 são distintos, chegamos a uma contradição.

Portanto, a aplicação G não pode ser um difeomorfismo hiperbólico.



5 A CLASSE DE SHUB

Em 2025, o artigo *Shub's example revisited*, (27), apresentou um desdobramento no trabalho desenvolvido por Shub. Neste capítulo, discutiremos esse desenvolvimento, com base no texto supracitado.

5.1 A CONSTRUÇÃO DA CLASSE DE SHUB

Nesta seção, descreveremos a construção da classe de Shub. No contexto do artigo mencionado, é considerada uma definição de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos mais abrangente do que a considerada no Capítulo 3. A grande diferença entre essas definições é que as estimativas de expansão e contração não são mais limitadas por constantes. Ao invés disso, essas desigualdades dependem de funções que variam continuamente com os pontos na variedade. Formalmente, essa nova definição é enunciada a seguir.

Definição 5.1.1 *Sejam M uma variedade riemanniana de classe C^∞ e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. A aplicação f é dita um **difeomorfismo parcialmente hiperbólico** se, em cada ponto $x \in M$, o espaço $T_x M$ admite uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *As famílias E^s , E^c e E^u são invariantes por Df , isto é,*

$$D_x f(E^s(x)) = E^s(f(x)), \quad D_x f(E^c(x)) = E^c(f(x)) \quad e \quad D_x f(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

2. *Existem funções contínuas $0 < \lambda_s(x) < \lambda_c^-(x) \leq \lambda_c^+(x) < \lambda_u(x)$, com $\lambda_s(x) < 1 < \lambda_u(x)$ de modo que tenhamos*

$$\begin{aligned} \|D_x f v\| &\leq \lambda_s(x) \cdot \|v\|, & \forall x \in M, \forall v \in E^s(x) \\ \|D_x f v\| &\leq \lambda_c^+(x) \cdot \|v\|, & \forall x \in M, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \lambda_c^-(x) \cdot \|v\|, & \forall x \in M, \forall v \in E^c(x) \\ \|D_x f^{-1} v\| &\leq \lambda_u(x) \cdot \|v\|, & \forall x \in M, \forall v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Nessa situação, chamamos os espaços $E^s(x)$ de **espaço estável em x** , $E^c(x)$ de **espaço central em x** e $E^u(x)$ de **espaço instável em x** . Adicionalmente, os espaços $E^{cs}(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$ e $E^{cu}(x) = E^c(x) \oplus E^u(x)$ são chamados **espaço centro-estável em x** e **espaço centro-instável em x** , respectivamente.

Consideremos dois difeomorfismos lineares Anosov $A, B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ satisfazendo, para quaisquer pontos $x, y \in \mathbb{T}^2$, as desigualdades

$$\|D_x A|_{E_A^s(x)}\| < \|D_y B^{-1}\|^{-1} \leq \|D_y B\| < \|D_x A^{-1}|_{E_A^u(x)}\|. \quad (5.1)$$

A saber, queremos que a ação da derivada de B no espaço tangente seja mais fraca do que a ação da derivada de A no mesmo espaço.

Seja $f_{A,B} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ a aplicação definida por

$$f_{A,B}(x, y) = (A(x), B(y)).$$

Por construção, se considerarmos $\pi = p_1$ a projeção canônica na primeira coordenada, então

$$\pi \circ f_{A,B}(x, y) = \pi(A(x), B(y)) = A(x) = A \circ \pi(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$$

isto é, π é uma fibração C^r equivariante para a aplicação $f_{A,B}$, com $\pi \circ f_{A,B} = A \circ \pi$. Assim, podemos representar esta situação com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^4 & \xrightarrow{f_{A,B}} & \mathbb{T}^4 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Teorema 5.1.2 *A aplicação $f_{A,B}$ é robustamente transitiva.*

Demonstração: Para provarmos que $f_{A,B}$ é robustamente transitiva, basta verificarmos que as aplicações $f_{A,B}$, A e $\pi = p_1$ satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.6. Com efeito,

1. O conjunto dos pontos periódicos de A é denso em $\mathbb{T}^2$, visto que A é um difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^2$.
2. O ponto $p = 0 \in \mathbb{T}^2$ é um ponto fixo de A , isto é, $A(0) = 0$,
3. A restrição $f_{A,B}|_{\pi^{-1}(p)} = B$ é um difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^2$, logo o conjunto dos pontos periódicos dessa aplicação é denso em $\mathbb{T}^2$.
4. Devemos verificar que o comportamento de A é mais hiperbólico do que o comportamento de $f_{A,B}$ o é na direção das fibras, isto é, que em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{T}^4$, o espaço $T_{(x,y)}\mathbb{T}^4$ admite uma decomposição parcialmente hiperbólica induzida por $f_{A,B}$, de modo que o espaço central seja o espaço tangente à fibra por (x, y) .

Com esse objetivo, notemos que, para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{T}^4$, a fibra de (x, y) é

$$\pi^{-1}(\pi(x, y)) = \pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{T}^2.$$

Em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{T}^4$, o espaço tangente ao toro $\mathbb{T}^4$ neste ponto pode ser descrito como

$$T_{(x,y)}\mathbb{T}^4 = T_x\mathbb{T}^2 \oplus T_y\mathbb{T}^2.$$

Calculando a derivada de $f_{A,B}$ neste ponto, obtemos a matriz diagonal por blocos dada por

$$D_{(x,y)}f_{A,B} = \begin{pmatrix} D_x A & 0 \\ 0 & D_y B \end{pmatrix}.$$

A partir da análise da matriz acima, concluímos que a ação da derivada de $f_{A,B}$ deve deixar invariantes os fibrados $T_x \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ e $\{0\} \times T_y \mathbb{T}^2$. Com efeito, para quaisquer $(v, 0) \in T_x \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ e $(0, w) \in \{0\} \times T_y \mathbb{T}^2$, ao aplicarmos a derivada de $f_{A,B}$ obtemos como resultado

$$\begin{aligned} D_{(x,y)}f_{A,B}(v, 0) &= \begin{pmatrix} D_x A & 0 \\ 0 & D_y B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x A v \\ 0 \end{pmatrix} \in T_{A(x)} \mathbb{T}^2 \times \{0\} \\ D_{(x,y)}f_{A,B}(0, w) &= \begin{pmatrix} D_x A & 0 \\ 0 & D_y B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_y B(w) \end{pmatrix} \in \{0\} \times T_{B(y)} \mathbb{T}^2. \end{aligned}$$

Como a restrição de $D_{(x,y)}f_{A,B}$ ao primeiro fibrado corresponde à aplicação $D_x A$, podemos considerar a decomposição hiperbólica induzida por A neste espaço

$$T_x \mathbb{T}^2 = E_A^s(x) \oplus E_A^u(x).$$

Consequentemente, no toro $\mathbb{T}^4$ podemos decompor o espaço tangente como

$$T_{(x,y)} \mathbb{T}^4 = T_x \mathbb{T}^2 \times T_y \mathbb{T}^2 = E_A^s(x) \oplus T_y \mathbb{T}^2 \oplus E_A^u(x).$$

Mostraremos que esta é uma decomposição parcialmente hiperbólica. Naturalmente, como os espaços $E_A^s(x) \times \{0\}$ e $E_A^u(x) \times \{0\}$ são originados a partir do comportamento Anosov da aplicação A , estes espaços são contraídos e expandidos, respectivamente. Por fim, para verificarmos que o comportamento no espaço $T_y \mathbb{T}^2$ é intermediário, basta lembrarmos que a desigualdade

$$\|D_x A|_{E_A^s(x)}\| < \|D_y B^{-1}\|^{-1} \leq \|D_y B\| < \|D_x A^{-1}|_{E_A^u(x)}\|,$$

que apresentamos em (5.1), é válida para todo $(x, y) \in \mathbb{T}^4$.

■

A partir da construção de $f_{A,B}$, definimos uma classe de aplicações que preservam algumas propriedades estruturais.

Notação 5.1.3 Denotamos por $\mathcal{PH}_{A,B}$ o conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos a $f_{A,B}$ e que possuem fibrados estável e instável unidimensionais. Adicionalmente, denotamos por $\mathcal{PH}_{A,B}^0$ a componente conexa de $\mathcal{PH}_{A,B}$ contendo a aplicação $f_{A,B}$.

A proposição a seguir, demonstrada por Fisher, Potrie e Sambarino, mostra que as aplicações pertencentes ao conjunto $\mathcal{PH}_{A,B}^0$ satisfazem diversas propriedades.

Proposição 5.1.4 *Se $f \in \mathcal{PH}_{A,B}^0$, então são válidas as seguintes propriedades*

1. *A aplicação f é dinamicamente coerente (ver definição 3.4.16),*
2. *A aplicação f admite uma folheação central em que cada folha é um toro bidimensional de classe C^1 ,*
3. *A aplicação f é conjugada por folha central à aplicação $f_{A,B}$, isto é, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ tal que*

$$h(\mathcal{F}_f^c(x)) = \mathcal{F}_g^c(h(x)) \quad e \quad h \circ f(\mathcal{F}_f^c(x)) = \mathcal{F}_g^c(g \circ h(x)),$$

para todo $x \in \mathbb{T}^4$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (28, Teorema A e Teorema B). ■

Definição 5.1.5 *A classe de Shub $\mathcal{SH} \subset \bigcup_{A,B} \mathcal{PH}_{A,B}^0$, em que A e B satisfazem as condições hiperbólicas adequadas expressas em (5.1), é o conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos f do toro $\mathbb{T}^4$ tais que f pertence a algum $\mathcal{PH}_{A,B}^0$ e existe um ponto fixo $p_f \in \mathbb{T}^4$ tal que $f|_{\mathcal{F}_f^c(p_f)}$ é um difeomorfismo Anosov, em que $\mathcal{F}_f^c(p_f)$ é a folha central passando por p_f .*

Notação 5.1.6 *Definamos*

$$\mathcal{SH}^r := \{g \in \mathcal{SH} ; g \text{ é de classe } C^r\}, \quad r \geq 1.$$

Teorema 5.1.7 *O conjunto $\mathcal{SH}$ é aberto na topologia C^1 e toda aplicação $f \in \mathcal{SH}$ é transitiva.*

A prova do teorema acima pode ser adaptada a partir de um argumento apresentado por Shub, conforme indicado no artigo *Shub's example revisited*, (27). Para mais informações, é recomendada a consulta à demonstração em (10, Teorema 8.1).

Definição 5.1.8 *A classe de Shub agrupada $\mathcal{SH}_b^r$ é o conjunto de difeomorfismos $f \in \mathcal{SH}^r$ que satisfazem as seguintes condições:*

1. *Agrupamento global (1-bunching)*

$$\lambda_s(x) < \frac{\lambda_c^-(x)}{\lambda_c^+(x)} \leq \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} < \lambda_u(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{T}^4, \quad (5.2)$$

2. Agrupamento local mais forte na folha central fixada $\mathcal{F}_f^c(p_f)$

$$\lambda_s(x) < (\lambda_c^-(x))^2 \leq (\lambda_c^+(x))^2 < \lambda_u(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}_f^c(p_f), \quad (5.3)$$

e

$$\lambda_s(x) < \frac{\lambda_c^-(x)}{(\lambda_c^+(x))^2} \leq \frac{\lambda_c^+(x)}{(\lambda_c^-(x))^2} < \lambda_u(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}_f^c(p_f). \quad (5.4)$$

Observação 5.1.9 Nos itens a seguir, realizaremos uma análise da importância de cada uma dessas condições

1. No artigo *Partial differentiability of invariant splittings*, (32, Teorema A), de 2004, Pugh, Shub e Wilkinson mostram que, se f é de classe C^2 e satisfaz a condição exposta em (5.2), então os fibrados estável e instável são de classe C^1 quando restritos às folhas centro-estáveis e centro-instáveis, respectivamente. Por sua vez, nos artigos *Hölder Foliations*, (30, Teorema B), de 1997, e *Correction to ‘Hölder Foliations’*, (31), de 2000, os mesmos autores provam que, sob essas hipóteses, as holonomias estáveis e instáveis entre as folhas centrais (que serão detalhadas na subseção a seguir) são de classe C^1 quando restritas às folhas centro-estáveis e centro-instáveis, respectivamente.
2. Na referência (10, Teorema 4.1), é provado que, se f é de classe C^2 e satisfaz a condição em (5.3) (isto é, f é 2-normalmente hiperbólico), então as variedades central $\mathcal{F}_f^c(p_f)$, centro-estável $\mathcal{F}_f^{cs}(p_f)$ e centro-instável $\mathcal{F}_f^{cu}(p_f)$ do ponto fixo p_f são de classe C^2 . Adicionalmente, se as constantes centrais forem simétricas, isto é, $\lambda_c^+(x) \cdot \lambda_c^-(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^4$, então a condição em (5.3) equivale à condição em (5.2).
3. A condição expressa em (5.4) nos garante uma maior regularidade nas folheações correspondentes à folha hiperbólica fixada $\mathcal{F}_f^c(p_f)$. Mais especificamente, se f é de classe C^3 , então as folheações estável $\mathcal{F}_f^s$ e instável $\mathcal{F}_f^u$ são de classe C^2 quando restritas às variedades centro-estável $\mathcal{F}_f^{cs}(p_f)$ e centro-instável $\mathcal{F}_f^{cu}(p_f)$, respectivamente.

5.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

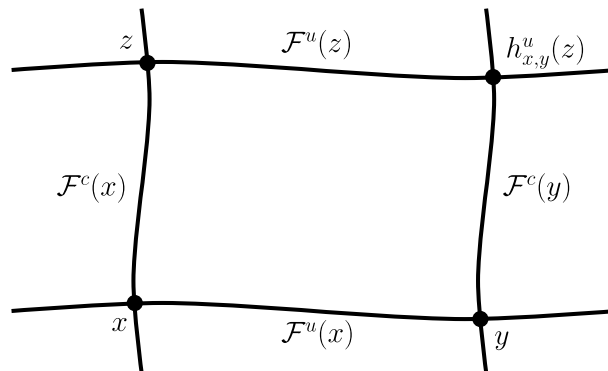
Nesta seção, apresentaremos um dos principais resultados discutidos nesse trabalho. Para tal, utilizaremos fortemente holonomias centrais, aplicações que enviam a folha central de um ponto na folha central de outro ponto, seguindo as folhas estável ou instável do ponto inicial. A seguir, definimos essas holonomias de forma precisa.

Definição 5.2.1 Sejam f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente e dois pontos $x, y \in M$, com $y \in \mathcal{F}_f^u(x)$. A **holonomia instável entre as**

folhas $\mathcal{F}_f^c(x)$ e $\mathcal{F}_f^c(y)$ é a aplicação $h_{f,x,y}^u : \mathcal{F}_{f,loc}^c(x) \rightarrow \mathcal{F}_f^c(y)$ definida da seguinte maneira: A cada ponto $z \in \mathcal{F}_{f,loc}^c(x)$ associamos o único ponto de interseção de $\mathcal{F}_f^u(z)$ com $\mathcal{F}_f^c(y)$.

Analogamente, dados dois pontos $x, y \in M$, com $y \in \mathcal{F}_f^s(x)$, a **holonomia estável entre as folhas** $\mathcal{F}_f^c(x)$ e $\mathcal{F}_f^c(y)$ é a aplicação $h_{f,x,y}^s : \mathcal{F}_{f,loc}^c(x) \rightarrow \mathcal{F}_f^c(y)$ definida da seguinte maneira: A cada ponto $z \in \mathcal{F}_{f,loc}^c(x)$ associamos o único ponto de interseção de $\mathcal{F}_f^s(z)$ com $\mathcal{F}_f^c(y)$.

Figura 20 - Holonomia Instável



Fonte: O próprio autor (2026).

Em 1997, no artigo *Hölder Foliations*, (30, Teorema B), Pugh, Shub e Wilkinson provaram que se um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 possui uma folheação central $\mathcal{F}^c$ invariante e tangente ao espaço E^c , e satisfaz as desigualdades descritas em (5.2), então as holonomias estável e instável entre as folhas centrais são uniformemente C^1 .

A continuidade da derivada destas holonomias foi abordada em diversos artigos. Em particular, em 2025, no artigo *On invariant holonomies between centers*, (29, Teorema 1.3), Saghin prova que, sob as mesmas condições, as derivadas destas holonomias variam continuamente com relação à aplicação f , considerando a topologia C^2 , e aos pontos x, y , com $y \in \mathcal{F}^u(x)$.

Frequentemente, nos interessaremos apenas pela forma que uma transformação linear modifica a direção dos vetores, sem nos importarmos com o efeito na magnitude dos mesmos. Motivados por isso, temos a definição a seguir.

Definição 5.2.2 *Sejam V um espaço vetorial normado e $T : V \rightarrow V$ um isomorfismo. A **projetivização** de T é a aplicação $T_* : S^1 \rightarrow S^1$ definida por*

$$T_*(v) = \frac{T(v)}{\|T(v)\|} \quad \text{para todo } v \in V \text{ tal que } \|v\| = 1.$$

Naturalmente, a projetivização está bem definida, visto que $\|T(v)\| \neq 0$ para todo vetor v não nulo. Por consequência, sendo o quociente de aplicações contínuas com o denominador não nulo, toda projetivização de um isomorfismo é uma aplicação contínua.

À vista da discussão anterior sobre a continuidade das holonomias centrais, um questionamento natural que podemos nos fazer é: A projetivização da derivada das holonomias centrais também depende continuamente da aplicação f e dos pontos x, y ? Para responder a essa pergunta, enunciamos o seguinte lema.

Lema 5.2.3 *A projetivização da derivada da holonomia instável, denotada por $Dh_{f,x,y*}^u$, depende continuamente da aplicação $f \in \mathcal{SH}_b^2$, considerando a topologia C^2 , e dos pontos $x, y \in \mathbb{T}^4$, em que $y \in \mathcal{F}_f^u(x)$. Isto é, se considerarmos f_n em $\mathcal{SH}_b^2$, $x_n \in \mathbb{T}^4$ e $y_n \in \mathcal{F}_{loc,f_n}^u(x_n)$ tais que $f_n \rightarrow f$ na topologia C^2 , $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, então Dh_{f_n,x_n,y_n*}^u converge uniformemente para $Dh_{f,x,y*}^u$.*

Analogamente, a projetivização da derivada da holonomia estável, denotada por $Dh_{f,x,y*}^s$, depende continuamente da aplicação $f \in \mathcal{SH}_b^2$, considerando a topologia C^2 , e dos pontos $x, y \in \mathbb{T}^4$, em que $y \in \mathcal{F}_f^s(x)$.

Notação 5.2.4 *Na demonstração a seguir, utilizaremos a notação $D_x f = Df(x)$, com o intuito de evitarmos uma possível confusão causada pela quantidade de subíndices.*

Observação 5.2.5 *A demonstração a seguir utiliza as mesmas ideias consideradas no artigo On invariant holonomies between centers, (29), durante a demonstração do Teorema 1.3, em que Saghin prova que as derivadas destas holonomias variam continuamente com relação à aplicação f , considerando a topologia C^2 , e aos pontos x, y , com $y \in \mathcal{F}^u(x)$.*

Demonstração: Consideremos $T^1\mathbb{T}^4$ o fibrado tangente unitário ao toro $\mathbb{T}^4$ e denotemos por Df_* a projetivização da derivada de f . Definimos o fibrado central unitário como a união

$$S_f = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^4} S(f, x),$$

em que $S(f, x) = T_x^1 \mathcal{F}_f^c(x)$, para cada $x \in \mathbb{T}^4$.

Como a folheação central $\mathcal{F}^c$ é tangente ao fibrado central E^c , cada espaço $T_x^1 \mathcal{F}_f^c(x)$ corresponde ao círculo unitário em $E^c(x)$. Nessa situação, o fibrado central unitário S_f pode ser visto como uma subvariedade de Hölder do fibrado tangente unitário $T^1\mathbb{T}^4$, a qual é invariante por Df_* . Adicionalmente, se considerarmos $\pi = p_1$ a projeção canônica na primeira coordenada, então S_f possui a estrutura de um fibrado de Hölder sobre o toro $\mathbb{T}^4$.

Mostraremos que existe uma folheação instável definida no espaço S_f . Em adição a isso, provaremos que a aplicação $Dh_{f,x,y*}^u$ coincide com a holonomia associada a essa folheação, definida considerando as seções transversais $T^1 \mathcal{F}_f^c(x)$ e $T^1 \mathcal{F}_f^c(y)$.

Com esse objetivo em mente, fixados $\delta > 0$ e um ponto $x \in \mathbb{T}^4$, parametrizemos uma vizinhança de x na folha instável $\mathcal{F}_f^u(x)$ pelo comprimento de arco, através da curva

$$\alpha_{f,x} : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathcal{F}_f^u(x).$$

Como a folheação instável é orientável e depende continuamente do ponto x e da aplicação f , considerando a topologia C^1 , a curva $\alpha_{f,x}$ depende continuamente de x e de f , ainda na topologia C^1 .

Dados dois pontos $x, y \in \mathbb{T}^4$, consideremos

$$\pi_{f,y,x} : E_f^c(y) \rightarrow E_f^c(x)$$

a projeção paralela ao espaço $E_f^s(x) \oplus E_f^u(x)$. Como os espaços mencionados dependem continuamente dos pontos x, y e da aplicação f , considerando a topologia C^1 , as projeções $\pi_{f,y,x}$ definidas acima mantêm a dependência contínua com relação aos mesmos parâmetros. Além disso, se os pontos x e y estão suficientemente próximos, então $\pi_{f,y,x}$ é invertível, está próxima da identidade e sua projetivização, denotada por $\pi_{f,y,x*}$, é bi-Lipschitz, com constante lipschitziana próxima a 1.

Adicionalmente, para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que quaisquer pontos $x, y \in \mathbb{T}^4$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$ são válidas as afirmações

- A aplicação $\pi_{f,y,x}$ e sua inversa estão próximas da identidade, isto é,

$$\|\pi_{f,y,x}^{\pm 1} - Id\| < \epsilon_\delta, \quad (5.5)$$

- A projetivização $\pi_{f,y,x*}$ e sua inversa são bi-Lipschitz com constante $(1 + \epsilon_\delta)$, isto é, para todo v, w

$$(1 + \epsilon_\delta)^{-1} \cdot d(v, w) \leq d(\pi_{f,y,x*}^{\pm 1}(v), \pi_{f,y,x*}^{\pm 1}(w)) \leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot d(v, w), \quad (5.6)$$

- As taxas centrais satisfazem a desigualdade

$$(1 + \epsilon_\delta)^{-1} \cdot \lambda_c^-(x) < \lambda_c^-(y) \leq \lambda_c^+(y) < (1 + \epsilon_\delta) \cdot \lambda_c^+(x), \quad (5.7)$$

- Se $y \in \mathcal{F}_{f,\delta}^u(x)$, então

$$d_u(f(x), f(y)) \geq (1 + \epsilon_\delta)^{-1} \cdot \lambda_u(x) \cdot d_u(x, y), \quad (5.8)$$

em que d_u representa a distância ao longo das folhas instáveis.

Vale ressaltar que a constante ϵ_δ pode ser escolhida de modo que não dependa da aplicação, em uma vizinhança C^1 de f , e que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon_\delta = 0$.

Com o objetivo de construir os candidatos às variedades instáveis locais no espaço S_f , fixemos $\delta > 0$ e consideremos

$$B = \left\{ \sigma : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R} ; \sigma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\sigma(t)}{t} \right| < \infty \right\}.$$

O espaço definido acima corresponde ao espaço das funções limitadas quando consideramos a norma

$$\|\sigma\| = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma(t)}{t} \right|.$$

Além disso, com a norma que definimos, B pode ser visto como um espaço de Banach.

A partir dessa construção, o conjunto

$$V_f := S_f \times B$$

possui a estrutura de um fibrado de Banach contínuo sobre S_f . Na verdade, podemos considerar V_f não só um fibrado de Banach contínuo sobre S_f , mas um fibrado de Banach Hölder sobre S_f .

Para qualquer elemento $(x, v) \in S_f$ e função $\sigma \in B$, definimos uma seção $\tilde{\sigma} : \mathcal{F}_{f,\delta}^u(x) \rightarrow S_f$ da seguinte maneira

$$\tilde{\sigma}(y) := \pi_{f,y,x}^{-1}(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y))) \in S(f, y).$$

O gráfico da seção $\tilde{\sigma}$ representa o candidato natural para a variedade instável local do elemento $(x, v) \in S_f$. Através do argumento clássico da transformação do gráfico, construiremos esse gráfico como o ponto fixo de uma aplicação. Tendo isso em vista, definamos a aplicação $T : V(f) \rightarrow V(f)$ por

$$T\sigma_{(x,v)}(t) = (\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x}^{-1})(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v),$$

em que o termo $y(t)$ corresponde a

$$y(t) = f^{-1} \circ \alpha_{f,f(x)}(t).$$

Por construção, a aplicação T satisfaz a relação

$$\widetilde{T\sigma} = Df_*\tilde{\sigma},$$

isto é, a seção correspondente à imagem $T\sigma$ é equivalente à imagem da seção $\tilde{\sigma}$ pela projetivização de Df . Mostraremos a seguir que T é uma aplicação fibrado (*bundle map*) contínua no espaço $V(f)$ e que, mais do que isso, T realiza uma contração nas fibras.

- Se $\sigma \in B$, então $T\sigma_{(x,v)} \in B$.

Para facilitar a nossa análise, denotaremos por $G(t)$ a composição das projeções com a derivada. Explicitamente,

$$G(t) := \pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x}^{-1}.$$

Dessa maneira, o operador T pode ser expresso como

$$T\sigma_{(x,v)}(t) = G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v).$$

A fim de realizarmos estimativa para as normas envolvendo as projetivizações das aplicações, verificaremos o seguinte lema auxiliar: Se a e b são vetores não nulos em um espaço vetorial normado, então é válida a desigualdade

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \frac{2}{\|b\|} \cdot \|a - b\|. \quad (5.9)$$

Com efeito, realizando a soma e subtração de um termo conveniente, podemos escrever

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| = \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{a}{\|b\|} + \frac{a}{\|b\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\|.$$

Aplicando a desigualdade triangular e colocando o termo $\frac{1}{\|b\|}$ em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{a}{\|b\|} + \frac{a}{\|b\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| &\leq \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{a}{\|b\|} \right\| + \left\| \frac{a}{\|b\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|b\|} \cdot \left(\left\| \left(\frac{\|b\|}{\|a\|} - 1 \right) \cdot a \right\| + \|a - b\| \right) \\ &= \frac{1}{\|b\|} \cdot \left(\left| \frac{\|b\|}{\|a\|} - 1 \right| \cdot \|a\| + \|a - b\| \right) \\ &= \frac{1}{\|b\|} \cdot (|\|b\| - \|a\|| + \|a - b\|). \end{aligned}$$

A partir daí, utilizando a desigualdade triangular reversa no termo $|\|b\| - \|a\||$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|b\|} \cdot (|\|b\| - \|a\|| + \|a - b\|) &\leq \frac{1}{\|b\|} \cdot (\|b - a\| + \|a - b\|) \\ &= \frac{2}{\|b\|} \cdot \|a - b\|, \end{aligned}$$

concluindo a verificação do lema auxiliar.

Agora, mostraremos que $G(t)_*$ é Lipschitz. De fato, pela definição da aplicação G , para todo $v, w \in E^c(y(t))$, a diferença

$$\|G(t)_*v - G(t)_*w\|$$

é equivalente à expressão

$$\|\pi_{f,f(y(t)),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - \pi_{f,f(y(t)),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|.$$

Na desigualdade exposta em (5.6), verificamos que a projetivização $\pi_{f,f(y(t)),x*}$ é uma aplicação lipschitziana com constante $(1 + \epsilon_\delta)$, assim

$$\begin{aligned} & \|\pi_{f,f(y(t)),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - \pi_{f,f(y(t)),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\| \\ & \leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \|Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|. \end{aligned}$$

Pela definição de projetivização, a expressão acima é equivalente a

$$(1 + \epsilon_\delta) \cdot \left\| \frac{Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v)}{\|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v)\|} - \frac{Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)}{\|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|} \right\|.$$

Utilizando o lema auxiliar que apresentamos em (5.9), a expressão acima se torna menor ou igual à expressão

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon_\delta) \cdot \frac{2}{\|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|} \cdot \|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\| \\ & \leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \frac{2}{\|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|} \cdot \|Df(y(t))(\pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w))\|. \end{aligned}$$

Considerando as desigualdades referentes às normas das imagens dos vetores unitários no espaço central por Df , obtemos

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon_\delta) \cdot \frac{2}{\|Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\|} \cdot \|Df(y(t))(\pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w))\| \\ & \leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \frac{2}{\lambda_c^-(y(t))} \cdot \lambda_c^+(y(t)) \cdot \|\pi_{f,y(t),x*}^{-1}(v) - \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(w)\| \\ & \leq (1 + \epsilon_\delta)^2 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(y(t))}{\lambda_c^-(y(t))} \cdot \|v - w\|. \end{aligned}$$

A partir da desigualdade envolvendo as taxas centrais exposta em (5.7), encontramos

$$(1 + \epsilon_\delta)^2 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(y(t))}{\lambda_c^-(y(t))} \cdot \|v - w\| \leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \|v - w\|.$$

Desse modo, chegamos à conclusão de que $G(t)_*$ é Lipschitz, possuindo como constante lipschitziana

$$\text{Lip}(G(t)_*) \leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)}.$$

No trecho a seguir, nosso objetivo será mostrar que a norma da aplicação $T\sigma$ é limitada. Com essa finalidade, recorreremos à desigualdade exposta em (5.8) para obtermos a seguinte estimativa relativa à parametrização na folha instável

$$|\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))| = d_u(x, y(t)) \leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \lambda_u(x)^{-1} \cdot d_u(f(x), f(y(t))) = (1 + \epsilon_\delta) \cdot \lambda_u(x)^{-1} \cdot |t|. \quad (5.10)$$

Analisemos a norma do operador $T\sigma$. Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\|T\sigma\| &= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*v}{t} \right| \\
&= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*v + G(t)_*v - Df(x)_*v}{t} \right| \\
&= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*v}{t} \right| + \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*v - Df(x)_*v}{t} \right|.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Vamos estimar o primeiro termo dessa soma. Como $G(t)_*$ é Lipschitz com constante de Lipschitz menor do que $(1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)}$, segue que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{G(t)_*(v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*v}{t} \right| &\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \left| \frac{v + \sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) - v}{t} \right| \\
&= (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \left| \frac{\sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{t} \right| \\
&= (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \left| \frac{\sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) \cdot \alpha_{f,x}^{-1}(y(t))}{t \cdot \alpha_{f,x}^{-1}(y(t))} \right| \\
&= (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \left| \frac{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))}{t} \right| \cdot \left| \frac{\sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))} \right|.
\end{aligned}$$

Utilizando a estimativa relativa à parametrização na folha instável que apresentamos em (5.10) e o fato de que a pré-imagem de α cobre todo o intervalo $[-\delta, \delta]$,

$$\begin{aligned}
(1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \left| \frac{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))}{t} \right| \cdot \left| \frac{\sigma(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))} \right| &\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \frac{1 + \epsilon_\delta}{\lambda_u(x)} \cdot \|\sigma\| \\
&= (1 + \epsilon_\delta)^5 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \cdot \lambda_u(x)} \cdot \|\sigma\|.
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar o segundo termo da soma em (5.11). Pela definição de projetivização

$$\left\| \frac{G(t)_*v - Df(x)_*v}{t} \right\| = \frac{1}{|t|} \cdot \left\| \frac{G(t)(v)}{\|G(t)(v)\|} - \frac{Df(x)(v)}{\|Df(x)(v)\|} \right\|.$$

Utilizando o lema auxiliar que apresentamos em (5.9),

$$\frac{1}{|t|} \cdot \left\| \frac{G(t)(v)}{\|G(t)(v)\|} - \frac{Df(x)(v)}{\|Df(x)(v)\|} \right\| \leq \frac{1}{|t|} \cdot \frac{2}{\|Df(x)(v)\|} \cdot \|G(t)(v) - Df(x)(v)\|.$$

Considerando as desigualdades referentes às normas das imagens dos vetores unitários no espaço central por Df , a expressão acima é menor ou igual a

$$\frac{2}{|t| \cdot \lambda_c^-(x)} \cdot \|G(t)(v) - Df(x)(v)\|.$$

Agora, estimaremos o termo $\|G(t)(v) - Df(x)v\|$. Para isso, precisaremos verificar que, para cada $v \in E_f^c(x)$, é válida a seguinte identidade

$$\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(x) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v) = Df(x)(v). \quad (5.12)$$

Com efeito, como por definição $\pi_{f,y,x}^{-1}$ é a projeção em $E^c(y)$ paralelamente ao espaço $E^s(x) \oplus E^u(x)$, existe um único $w \in E^s(x) \oplus E^u(x)$ tal que o vetor $\pi_{f,y,x}^{-1}(v)$ admite uma decomposição $\pi_{f,y,x}^{-1}(v) = v + w$.

Aplicando a derivada $Df(x)$ e considerando a invariância dos fibrados, encontramos

$$\begin{aligned} Df(x) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v) &= Df(x)(v + w) \\ &= Df(x)v + Df(x)w, \end{aligned}$$

em que $Df(x)v \in E^c(f(x))$ e $Df(x)w \in E^s(f(x)) \oplus E^u(f(x))$. A partir daí, aplicando a projeção $\pi_{f,f(y(t)),f(x)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \pi_{f,f(y(t)),f(x)}(Df(x)v + Df(x)w) &= \pi_{f,f(y(t)),f(x)}(Df(x)v) + \pi_{f,f(y(t)),f(x)}(Df(x)w) \\ &= Df(x)v + 0 \\ &= Df(x)v, \end{aligned}$$

o que prova a identidade exposta em (5.12).

Utilizando a identidade que acabamos de provar, o termo $\|G(t)(v) - Df(x)v\|$ pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \|G(t)(v) - Df(x)v\| &= \|\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(y(t)) \circ \pi_{f,y(t),x}^{-1} - \pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ Df(x) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v)\| \\ &= \|\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ (Df(y(t)) - Df(x)) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v)\| \end{aligned}$$

Considerando o fato de que $\|\pi_{f,f(y(t)),f(x)}\| \leq (1 + \epsilon_\delta)$ e $\|\pi_{f,y,x}^{-1}\| \leq (1 + \epsilon_\delta)$, ambas desigualdades consequências diretas de (5.5), segue que

$$\begin{aligned} \|\pi_{f,f(y(t)),f(x)} \circ (Df(y(t)) - Df(x)) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v)\| &\leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \|(Df(y(t)) - Df(x)) \circ \pi_{f,y,x}^{-1}(v)\| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta) \cdot \text{Lip}(Df) \cdot d(y(t), x) \cdot \|\pi_{f,y,x}^{-1}(v)\| \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^2 \cdot \text{Lip}(Df) \cdot d(y(t), x) \\ &\leq (1 + \epsilon_\delta)^2 \cdot \text{Lip}(Df) \cdot \frac{1 + \epsilon_\delta}{\lambda_u(x)} \cdot |t| \\ &= \text{Lip}(Df) \cdot \frac{(1 + \epsilon_\delta)^3}{\lambda_u(x)} \cdot |t| \end{aligned}$$

Combinando as três estimativas que calculamos, e voltando na expressão (5.11), concluímos que

$$\begin{aligned} \|T\sigma\| &\leq (1 + \epsilon_\delta)^5 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \cdot \lambda_u(x)} \cdot \|\sigma\| + \frac{2}{|t| \cdot \lambda_c^-(x)} \cdot \text{Lip}(Df) \cdot \frac{(1 + \epsilon_\delta)^3}{\lambda_u(x)} \cdot |t| \\ &= (1 + \epsilon_\delta)^5 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x) \cdot \lambda_u(x)} \cdot \|\sigma\| + \text{Lip}(Df) \cdot \frac{2 \cdot (1 + \epsilon_\delta)^3}{\lambda_c^-(x) \lambda_u(x)}. \end{aligned}$$

- T é uma contração de fibras.

Com efeito, considerando a constante lipschitziana da aplicação $G(t)_*$ e usando a desigualdade (5.10), encontramos

$$\begin{aligned}
\|T\sigma_1 - T\sigma_2\| &= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{T\sigma_1(t) - T\sigma_2(t)}{t} \right| \\
&= \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{G(t)_*(v + \sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - G(t)_*(v + \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))))}{t} \right| \\
&\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) - \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{t} \right| \\
&\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) - \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{t} \cdot \frac{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))}{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))} \right| \\
&\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \frac{|\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))|}{|t|} \cdot \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{\sigma_1(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) - \sigma_2(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))}{\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))} \right| \\
&\leq (1 + \epsilon_\delta)^4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_c^-(x)} \cdot \frac{1 + \epsilon_\delta}{\lambda_u(x)} \cdot \|\sigma_1 - \sigma_2\| \\
&= (1 + \epsilon_\delta)^5 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_c^+(x)}{\lambda_u(x) \cdot \lambda_c^-(x)} \cdot \|\sigma_1 - \sigma_2\|.
\end{aligned}$$

Se escolhermos δ pequeno o suficiente, então ϵ_δ vai estar próximo o suficiente de 0 para que tenhamos

$$(1 + \epsilon_\delta)^5 \cdot \frac{\lambda_c^+(x)}{\lambda_u(x) \cdot \lambda_c^-(x)} < 1,$$

consequentemente a aplicação T é uma contração.

Agora, veremos que a derivada da holonomia instável corresponde a uma seção invariante para o operador T . Definimos a seção σ_u associada à holonomia por

$$\sigma^u(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) = \pi_{f,y(t),x*} \circ Dh_{f,x,y*}^u(v) - v.$$

Ao aplicarmos o operador T a esta seção, encontramos

$$\begin{aligned}
T\sigma_{(x,v)}^u(t) &= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1})(v + \sigma^u(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t)))) - Df(x)_*(v) \\
&= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1})(v + \pi_{f,y(t),x*} \circ Dh_{f,x,y*}^u(v) - v) - Df(x)_*(v) \\
&= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ \pi_{f,y(t),x*}^{-1})(\pi_{f,y(t),x*} \circ Dh_{f,x,y*}^u(v)) - Df(x)_*(v) \\
&= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ Dh_{f,x,y*}^u(v)) - Df(x)_*(v).
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$Df(y(t))_* \circ Dh_{f,x,y*}^u = Dh_{f,f(x),f(y)*}^u \circ Df(x)_*.$$

Com efeito, utilizando a invariância da folheação instável, é válido que

$$f \circ h_{f,x,y}^u = h_{f,f(x),f(y)}^u \circ f.$$

Assim, aos derivarmos os dois lados dessa expressão no ponto x , obtemos a igualdade

$$Df(h_{f,x,y}^u(x)) \circ Dh_{f,x,y}^u(x) = Dh_{f,f(x),f(y)}^u(f(x)) \circ Df(x).$$

Como, pela definição da holonomia instável, temos $h_{f,x,y}^u(x) = y$, daí a expressão acima nos diz que

$$Df(y) \circ Dh_{f,x,y}^u(x) = Dh_{f,f(x),f(y)}^u(f(x)) \circ Df(x).$$

Simplificando a notação, escrevemos

$$Df(y) \circ Dh_{f,x,y}^u = Dh_{f,f(x),f(y)}^u \circ Df(x).$$

Assim, projetivizando os dois lados da igualdade anterior, concluímos que

$$Df(y(t))_* \circ Dh_{f,x,y*}^u = Dh_{f,f(x),f(y)*}^u \circ Df(x)_*,$$

como havíamos mencionado.

Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} T\sigma_{(x,v)}^u(t) &= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Df(y(t))_* \circ Dh_{f,x,y*}^u(v)) - Df(x)_*(v) \\ &= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Dh_{f,f(x),f(y)*}^u \circ Df(x)_*(v)) - Df(x)_*(v) \\ &= (\pi_{f,f(y),f(x)*} \circ Dh_{f,f(x),f(y)*}^u)(Df(x)_*(v)) - Df(x)_*(v) \\ &= \sigma_{f(x),Df(x)*}^u v, \end{aligned}$$

isto é, σ^u é uma seção (limitada) invariante de T . Pelo Teorema da Seção Invariante (ver (10, Teorema 3.1) e (12, Teorema 1.1, Capítulo 2)), a aplicação T admite uma única seção limitada invariante. Mais do que isso, o Teorema da Seção Invariante nos garante que a única seção limitada invariante mencionada deve ser também contínua. Por consequência, a seção σ^u é contínua.

A partir daí, escrevendo $Dh_{f,x,y*}^u = \pi_{f,y(t),x*}^{-1}(\sigma^u(\alpha_{f,x}^{-1}(y(t))) + v)$, verificamos que $Dh_{f,x,y*}^u$ depende continuamente dos pontos x e y .

Adicionalmente, se considerarmos uma sequência $f_n \rightarrow f$, então os fibrados unitários satisfazem a convergência $S_{f_n} \rightarrow S_f$ e os operadores verificam a convergência $T_{f_n} \rightarrow T_f$. Como a seção invariante varia continuamente com T , concluímos que $Dh_{f,x,y*}^u$ depende continuamente de f .

■

Consideremos uma aplicação $f \in \mathcal{SH}_b^2$. Pela definição da classe de Shub agrupada, existe um ponto fixo $p = p_f$ tal que a restrição de f à folha central $\mathcal{F}^c(p)$ é um difeomorfismo Anosov. Consideremos ainda um ponto q homoclínico a $\mathcal{F}^c(p)$, isto é, $q \in \mathcal{F}^{cs}(p) \cap \mathcal{F}^{cu}(p)$. Naturalmente, como $q \in \mathcal{F}^{cs}(p)$ e $q \in \mathcal{F}^{cu}(p)$, temos

$$\mathcal{F}^{cs}(q) = \mathcal{F}^{cs}(p) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{cu}(q) = \mathcal{F}^{cu}(p),$$

visto que, dada uma folheação, por um ponto passa uma única folha.

A partir do agrupamento local mais forte na folha central $\mathcal{F}^c(p)$, exposto em (5.3), o resultado em (10, Teorema 4.1) nos garante que as folhas centro-estável e centro-instável passando pelos pontos p e q são subvariedades de classe C^2 . Como as folhas centrais locais nos pontos p e q podem ser descritas como as interseções transversais

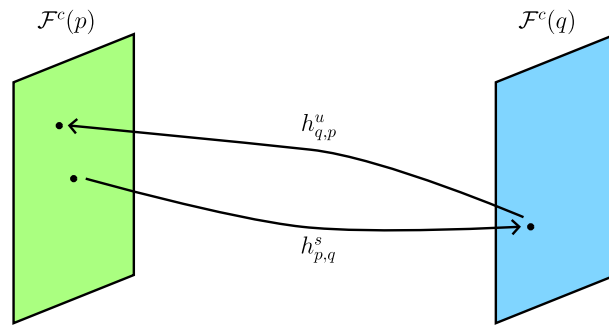
$$\mathcal{F}_{loc}^c(p) = \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p) \cap \mathcal{F}_{loc}^{cu}(p) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{loc}^c(q) = \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q) \cap \mathcal{F}_{loc}^{cu}(q),$$

concluimos que ambas variedades centrais locais são também subvariedades de classe C^2 .

Agora, o nosso objetivo é descrever uma aplicação $\tilde{h}_q$, que realiza uma “volta” começando e terminando na folha central do ponto fixo p . Começaremos com um ponto na folha central local do ponto p , passaremos para a folha central do ponto q , seguindo a folheação estável, e em seguida voltaremos para a folha central do ponto p , seguindo a folheação instável. Formalmente, definimos a aplicação $\tilde{h}_q : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$ da seguinte maneira

$$\tilde{h}_q = h_{q,p}^u \circ h_{p,q}^s.$$

Figura 21 - Aplicação $\tilde{h}_q$



Fonte: O próprio autor (2026).

Como já discutimos anteriormente, as holonomias estável $h_{p,q}^s : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow \mathcal{F}^c(q)$ e instável $h_{q,p}^u : \mathcal{F}^c(q) \rightarrow \mathcal{F}^c(p)$ são de classe C^1 , fato provado em (29, Teorema 1.3). Assim, a aplicação $\tilde{h}_q$ é também um difeomorfismo de classe C^1 .

Como a restrição de f à folha central do ponto p é um difeomorfismo Anosov, a folha $\mathcal{F}^c(p)$ pode ser subfolheada por uma folheação estável e uma folheação instável. Ao

aplicarmos a aplicação $\tilde{h}_q$ à folheação estável dentro da folha $\mathcal{F}^c(p)$, obtemos uma nova folheação.

Será do nosso interesse que essa nova folheação obtida seja transversal à folheação estável dentro da folha $\mathcal{F}^c(p)$. Como essas folheações são unidimensionais, para analisarmos essa condição de transversalidade basta considerarmos os vetores unitários tangentes a essas folheações em cada ponto. Sendo assim, fixemos uma orientação nos espaços tangentes às folhas estáveis dentro de $\mathcal{F}^c(p)$ e consideremos $\tilde{v} : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow T^1\mathcal{F}^c(p)$ a aplicação que a cada $x \in \mathcal{F}^c(p)$ associa o vetor unitário tangente à folha passando pelo ponto x da folheação estável dentro de $\mathcal{F}^c(p)$ no ponto x , de acordo com a orientação fixada. Pelo Teorema da Variedade Estável, as folhas da folheação estável dentro de $\mathcal{F}^c(p)$ são subvariedades de classe C^2 . Com isso, podemos concluir que a aplicação $\tilde{v}$ é de classe C^1 .

Agora, analisemos o vetor tangente à folheação obtida por meio da imagem da folheação estável dentro da folha $\mathcal{F}^c(p)$ pela aplicação $\tilde{h}_q$ em um ponto x . Tendo em vista que a nova folheação é obtida por meio da imagem da folheação estável dentro da folha $\mathcal{F}^c(p)$ pela aplicação $\tilde{h}_q$, o vetor

$$D\tilde{h}(\tilde{h}_q^{-1}(x))\tilde{v}^s(\tilde{h}_q^{-1}(x))$$

é tangente à nova folheação no ponto x . Desse modo, é natural descrevermos o vetor unitário tangente à nova folheação no ponto x através da aplicação $\tilde{g}_q : \mathcal{F}^c(p) \rightarrow T^1\mathcal{F}^c(p)$ definida por

$$\tilde{g}_q(x) = \frac{D\tilde{h}(\tilde{h}_q^{-1}(x))\tilde{v}^s(\tilde{h}_q^{-1}(x))}{\|D\tilde{h}(\tilde{h}_q^{-1}(x))\tilde{v}^s(\tilde{h}_q^{-1}(x))\|}.$$

A seguir, faremos a definição dos conjuntos cruciais para os resultados pretendidos. Primeiro, definiremos um conjunto $\mathcal{U}_s^r \subset \mathcal{SH}_b^r$ de aplicações tais que para todo ponto x na folha central do ponto fixo citado na definição da classe de Shub, existe um ponto q homoclínico à folha central do ponto fixo supracitado de modo que a folheação estável dentro da folha central deste ponto fixo é transversal à folheação definida por sua imagem pela aplicação $\tilde{h}_q$.

Analogamente, definiremos um conjunto $\mathcal{U}_u^r \subset \mathcal{SH}_b^r$ de aplicações tais que para todo ponto x na folha central do ponto fixo citado na definição da classe de Shub, existe um ponto q homoclínico à folha central do ponto fixo supracitado de modo que a folheação instável dentro da folha central deste ponto fixo é transversal à folheação definida por sua imagem pela aplicação $\tilde{h}_q$.

Por fim, definiremos o conjunto desejado $\mathcal{U}^r$ como sendo a interseção dos dois conjuntos anteriores. Explicitamente, temos as definições a seguir.

Definição 5.2.6 *Definimos*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_s^r &= \{f \in \mathcal{SH}_b^r; \text{ para todo } x \in \mathcal{F}^c(p) \text{ existe } q \text{ homoclínico a } \mathcal{F}^c(p) \text{ tal que } \tilde{g}_q(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)\} \\ \mathcal{U}_u^r &= \{f \in \mathcal{SH}_b^r; \text{ para todo } x \in \mathcal{F}^c(p) \text{ existe } q \text{ homoclínico a } \mathcal{F}^c(p) \text{ tal que } \tilde{g}_q(x) \neq \pm \tilde{v}^u(x)\} \end{aligned}$$

Através da interseção destes conjuntos, definimos

$$\mathcal{U}^r = \mathcal{U}_s^r \cap \mathcal{U}_u^r.$$

Nas definições acima, pedimos que, para cada ponto x na folha central, exista um ponto q homoclínico a esta folha satisfazendo a propriedade desejada. No lema a seguir, mostraremos que podemos nos restringir a um conjunto finito dos tais pontos q 's que satisfarão o desejado para todo x na folha central.

Teorema 5.2.7 *Seja $f \in \mathcal{SH}_b^r$. Então $f \in \mathcal{U}_s^r$ se, e somente se, existem pontos homoclínicos $q_1, \dots, q_k$ de $\mathcal{F}^c(p)$ tais que, para todo $x \in \mathcal{F}^c(p)$, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\tilde{g}_{q_i}(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)$.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Seja $x \in \mathcal{F}^c(p)$. Por hipótese, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\tilde{g}_{q_i}(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)$. Assim, o ponto homoclínico q_i satisfaz por definição a condição desejada.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $f \in \mathcal{SH}_b^r$. Então, para todo $x \in \mathcal{F}^c(p)$, existe um ponto q_x homoclínico a $\mathcal{F}^c(p)$ tal que $\tilde{g}_{q_x}(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)$. Pela continuidade das aplicações $\tilde{g}_{q_x}$ e $\tilde{v}^s$, cada ponto $x \in \mathcal{F}^c(p)$ possui uma vizinhança V_x tal que

$$\tilde{g}_{q_x}(y) \neq \pm \tilde{v}^s(y)$$

para todo $y \in V_x$.

De acordo com a Proposição 5.1.4, a folha central no ponto p é um toro bidimensional, logo $\mathcal{F}^c(p)$ é compacta. Como a coleção $\{V_x\}_{x \in \mathcal{F}^c(p)}$ constitui uma cobertura aberta de $\mathcal{F}^c(p)$, a compacidade desta folha nos garante que existe uma quantidade finita de pontos $x_1, \dots, x_k$ tais que a coleção de vizinhanças $\{V_{x_i}\}_{i=1}^k$ ainda cobre $\mathcal{F}^c(p)$.

Agora, tomemos um ponto z arbitrário em $\mathcal{F}^c(p)$. Como a coleção $\{V_{x_i}\}_{i=1}^k$ cobre $\mathcal{F}^c(p)$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $z \in V_{x_i}$. Por construção, temos a desigualdade

$$\tilde{g}_{q_{x_i}}(z) \neq \pm \tilde{v}^s(z).$$

Portanto, para cada ponto na folha $\mathcal{F}^c(p)$, ao menos um dos pontos homoclínicos dentre $q_{x_1}, \dots, q_{x_k}$ satisfaz a condição. ■

No Lema anterior, a hipótese de que existem pontos homoclínicos $q_1, \dots, q_k$ da folha central do ponto p tais que, para todo $x \in \mathcal{F}^c(p)$, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\tilde{g}_{q_i}(x) \neq \pm \tilde{v}^s(x)$ pode ser reformulada da seguinte maneira: existem pontos homoclínicos $q_1, \dots, q_k$ da folha central do ponto p tais que a imagem da aplicação $\tilde{g}_{q_1} \times \dots \times \tilde{g}_{q_k}$ é disjunta da imagem de $\pm \tilde{v}^{s^k}$. Com isso, podemos mostrar que o conjunto $\mathcal{U}^r$, definido anteriormente, é aberto na topologia C^2 .

Teorema 5.2.8 *O conjunto $\mathcal{U}^r$ é aberto na topologia C^2 .*

Demonstração: Conforme comentamos anteriormente, no artigo *On invariant holonomies between centers*, (29, Teorema 1.3), Saghin prova que, sob as nossas condições, as derivadas das holonomias centrais h^s e h^u variam continuamente com relação à aplicação f , considerando a topologia C^2 . Como uma consequência desse fato, as imagens das aplicações $\tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}^{s^k}$ também dependem continuamente de f . Denotaremos por $\text{Im } \tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k} \subset T^1 \mathcal{F}^c(p)^k$ e $\text{Im } \pm \tilde{v}^{s^k} \subset T^1 \mathcal{F}^c(p)^k$ as imagens de $\tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}^{s^k}$, respectivamente.

Como a folha $\mathcal{F}^c(p)$ é compacta e as aplicações $\tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}^{s^k}$ são contínuas, sabemos que as imagens destas aplicações são subconjuntos compactos de $T^1 \mathcal{F}^c(p)^k$. Assim, a Proposição 2.1.17, nos garante que podemos tomar vizinhanças disjuntas U_g e U_v para as imagens de $\tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\pm \tilde{v}^{s^k}$.

Com isso, a continuidade de $\text{Im } \tilde{g}_{q_1} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k}$ e $\text{Im } \pm \tilde{v}^{s^k}$ com relação à aplicação f , considerando a topologia C^2 , nos garante que existe uma vizinhança U_f de f nesta topologia tal que, para toda $f' \in U_f$, as aplicações correspondentes $\tilde{g}_{q_1, f'} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k, f'}$ e $\pm \tilde{v}_{f'}^{s^k}$ também terão as imagens contidas nos conjuntos U_g e U_v , respectivamente. Assim, o fato de que estes conjuntos são disjuntos nos mostra que a imagem da aplicação $\tilde{g}_{q_1, f'} \times \cdots \times \tilde{g}_{q_k, f'}$ é disjunta da imagem de $\pm \tilde{v}_{f'}^{s^k}$. Equivalentemente, existem pontos homoclínicos $q_1, \dots, q_k$ de $\mathcal{F}_{f'}^c(p)$ tais que, para todo $x \in \mathcal{F}_{f'}^c(p)$, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\tilde{g}_{q_i, f'}(x) \neq \pm \tilde{v}_{f'}^{s^k}(x)$. A partir daí, o Teorema 5.2.7 nos garante que f' pertence ao conjunto $\mathcal{U}_s^r$.

Pelo exposto, concluímos que o conjunto $\mathcal{U}_s^r$ é aberto na topologia C^2 . De modo análogo, podemos mostrar que o conjunto $\mathcal{U}_u^r$, definido anteriormente, também é aberto na topologia C^2 .

Portanto, como o conjunto $\mathcal{U}^r$ foi definido através da interseção $\mathcal{U}_s^r \cap \mathcal{U}_u^r$, fica demonstrado que $\mathcal{U}^r$ é aberto na topologia C^2 . ■

Agora que já estabelecemos que o conjunto $\mathcal{U}^r$ é aberto na topologia C^2 , exploraremos outra propriedade que este conjunto possui: a relação homoclínica entre seu pontos periódicos. Detalhadamente, toda aplicação f neste conjunto satisfaz a condição de que qualquer par de pontos periódicos hiperbólicos com variedade estável de dimensão 2 é homoclinicamente relacionado. Com o objetivo de verificarmos essa propriedade, enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 5.2.9 *Se $f \in \mathcal{U}^r$, então quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos de f com variedade estável de dimensão 2 são homoclinicamente relacionados.*

Demonstração: Nesta demonstração, mostraremos o seguinte: qualquer ponto periódico

hiperbólico de f com variedade estável de dimensão 2 é homoclinicamente relacionado ao ponto fixo $p = p_f$ tal que a folha $\mathcal{F}_f^c(p)$ é um conjunto hiperbólico para f . A partir daí, a transitividade da relação homoclínica nos permitirá concluirmos que quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos de f com variedade estável de dimensão 2 são homoclinicamente relacionados.

Com isso em mente, consideremos x um ponto periódico hiperbólico de $f \in \mathcal{U}^r$ com índice estável 2, isto é, tal que a variedade estável $W^s(x)$ é bidimensional. Como o espaço $T_x\mathbb{T}^4$ possui dimensão 4, concluímos que os espaços estável $E^s(x)$ e instável $E^u(x)$ devem ser bidimensionais. Assim, devem existir vetores $\tilde{v}^u(x)$ e $\tilde{v}^s(x)$ em $T_x\mathcal{F}^c(x)$ que são expandidos e contraídos, respectivamente. Chamaremos de direção instável fraca em x a direção do vetor $\tilde{v}^u(x)$ e de direção estável fraca em x a direção do vetor $\tilde{v}^s(x)$.

A variedade instável forte $\mathcal{F}^u(x)$ deve se acumular na folha $\mathcal{F}^c(p)$. Com efeito, a variedade instável $\mathcal{F}^u(x)$ não é compacta, visto que, pelo Teorema da Variedade Estável, $\mathcal{F}^u(x)$ é homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$, em que n representa a dimensão desta variedade. Com isso, $\mathcal{F}^u(x)$ deve possuir um ponto de acumulação $y \in \mathbb{T}^4$. No artigo, *Partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds*, Bonatti e Wilkinson provam que, em dimensão 3 e condições similares às nossas, a variedade $W^s(\mathcal{F}^c(p))$ é densa em $\mathbb{T}^3$. Procedendo de maneira análoga, podemos concluir que a transitividade da aplicação f nos indica que a variedade $W^s(\mathcal{F}^c(p))$ deve ser densa no toro $\mathbb{T}^4$. Ademais, como a restrição de f à folha central $\mathcal{F}^c(p)$ é um difeomorfismo Anosov transitivo, segue que o conjunto dos pontos periódicos de f deve ser denso em $\mathcal{F}^c(p)$. Assim, utilizando a densidade da variedade $W^s(\mathcal{F}^c(p))$, dada uma vizinhança do ponto de acumulação y , podemos tomar um ponto periódico $z \in \mathcal{F}^c(p)$ tal que a variedade $W^s(z)$ intersecta essa vizinhança. Considerando a transversalidade entre as folhas $W^s(z)$ e $W^u(x)$, e utilizando o clássico argumento do λ -lema, concluímos que a variedade instável forte $\mathcal{F}^u(x)$ deve se acumular na folha $\mathcal{F}^c(p)$.

Como consequência, podemos tomar uma sequência de pontos homoclínicos $p_n \in \mathcal{F}^u(x) \cap \mathcal{F}_{loc}^s(\mathcal{F}^c(p))$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$.

Consideremos a “folha instável fraca” de x , isto é, a interseção da variedade instável bidimensional $W^u(x)$ com a folha central $\mathcal{F}^c(x)$. Ao aplicarmos a holonomia h_{x,p_n}^u a este conjunto, obtemos como imagem a interseção de $W^u(x)$ com a folha central $\mathcal{F}^c(p_n)$. De forma similar, ao aplicarmos a holonomia h_{p,p_n}^s à folha estável fraca de $h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)$, obtemos como imagem a interseção da variedade estável bidimensional $W^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))$ com a folha $\mathcal{F}^c(p_n)$. Mais do que isso, a imagem da folheação estável fraca na folha $\mathcal{F}^c(p)$ pela holonomia h_{p,p_n}^s constitui uma nova folheação na folha $\mathcal{F}^c(p_n)$.

Os vetores $Dh_{x,p_n}^u(\tilde{v}^u(x))$ e $Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)))$ são tangentes, no ponto p_n , às curvas formadas pelas interseções

$$W^u(x) \cap \mathcal{F}^c(p_n) \quad \text{e} \quad W^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)) \cap \mathcal{F}^c(p_n),$$

respectivamente. Assim, caso para algum elemento p_n da sequência tenhamos

$$Dh_{x,p_n*}^u(\tilde{v}^u(x)) \neq \pm Dh_{p,p_n*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))),$$

concluiremos que as curvas $W^u(x) \cap \mathcal{F}^c(p_n)$ e $W^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)) \cap \mathcal{F}^c(p_n)$ se intersectam transversalmente no ponto p_n .

Como a restrição de f ao conjunto $\mathcal{F}^c(p)$ é um difeomorfismo Anosov, sabemos pelo Teorema 3.4.5 que a variedade estável fraca de f no ponto p é densa na folha central $\mathcal{F}^c(p)$. Utilizando o fato de que a holonomia h_{p,p_n}^s é um homeomorfismo, concluímos que a imagem desta folha estável fraca é densa na folha $\mathcal{F}^c(p_n)$, isto é, que a interseção $W^s(p) \cap \mathcal{F}^c(p_n)$ é densa na folha central $\mathcal{F}^c(p_n)$.

Assim, podemos tomar um ponto $y \in W^s(p) \cap \mathcal{F}^c(p_n)$ próximo o suficiente do ponto p_n para que sua folha pela folheação de $\mathcal{F}^c(p_n)$ obtida como imagem da folheação estável fraca de $\mathcal{F}^c(p)$ seja também transversal à curva $W^u(x) \cap \mathcal{F}^c(p_n)$.

Por consequência, constatamos que as variedades estável $W^s(p)$ e instável $W^u(x)$ se intersectam transversalmente.

No trecho anterior desta discussão, verificamos que se

$$Dh_{x,p_n*}^u(\tilde{v}^u(x)) \neq \pm Dh_{p,p_n*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))),$$

para algum elemento p_n na sequência, então os pontos x e p estão homoclinicamente relacionados. Agora, utilizando o raciocínio que construímos neste trecho anterior, concluiremos que em qualquer caso devemos ter uma interseção homoclínica entre os pontos x e p .

Com efeito, suponhamos que as variedades $W^u(x)$ e $W^s(p)$ não se interceptem. Então, pela contrapositiva do argumento anterior, devemos ter

$$Dh_{x,p_n*}^u(\tilde{v}^u(x)) = \pm Dh_{p,p_n*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))), \quad (5.13)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por definição, a aplicação f pertence ao conjunto $\mathcal{U}^r$. Logo, existe um ponto q homoclínico à folha $\mathcal{F}^c(p)$ tal que

$$\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Seja $q_0 = h_{p,q}^u(p_0)$ a imagem de p_0 pela holonomia homoclínica $h_{p,q}^u$. Consideremos ainda a holonomia instável forte $h_{loc}^u : \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$, que a cada ponto $z \in \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0)$ associa o único ponto de interseção da folha instável forte $\mathcal{F}^u(z)$ com $\mathcal{F}^{cs}(q_0)$, e definamos $q_n := h_{loc}^u(p_n) \in \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$. A partir da continuidade das holonomias, a sequência q_n deve convergir para o ponto q_0 .

Utilizando novamente o raciocínio que construímos anteriormente, apenas substituindo os elementos da sequência p_n pelos elementos da sequência q_n , verificamos que

como o ponto x e o ponto p não são homoclinicamente relacionados, devemos ter

$$Dh_{x,q_n}^u(\tilde{v}^u(x)) = \pm Dh_{p,q_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_n}^{s^{-1}}(p_n))), \quad (5.14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela definição das holonomias, se seguirmos pela folha instável de um ponto em $\mathcal{F}^c(x)$ até intersectarmos a folha $\mathcal{F}^c(p_n)$, e depois seguirmos a folha instável dessa interseção até encontrarmos a folha $\mathcal{F}^c(q_n)$, estaremos realizando o mesmo caminho que teríamos realizado se saíssemos do ponto inicial e seguissemos pela folha instável deste ponto até que encontrássemos a folha $\mathcal{F}^c(q_n)$. Matematicamente, essa equivalência é expressa pela propriedade $h_{x,q_n}^u = h_{p_n,q_n}^u \circ h_{x,p_n}^u$. Aplicando a regra da cadeia,

$$Dh_{x,q_n}^u = Dh_{p_n,q_n}^u \circ Dh_{x,p_n}^u.$$

Na equação (5.14), ao substituírmos o termo $Dh_{x,q_n}^u(\tilde{v}^u(x))$ pela identidade que acabamos de obter, encontramos

$$Dh_{p,q_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_n}^{s^{-1}}(p_n))) = \pm Dh_{p_n,q_n}^u \circ Dh_{x,p_n}^u(\tilde{v}^u(x)).$$

De acordo com a equação (5.13), os vetores $Dh_{x,p_n}^u(\tilde{v}^u(x))$ e $Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n)))$ são colineares. Assim, substituindo esses termos na equação acima, obtemos

$$Dh_{p,q_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_n}^{s^{-1}}(p_n))) = \pm Dh_{p_n,q_n}^u \circ Dh_{p,p_n}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_n}^{s^{-1}}(p_n))).$$

Com isso, através da continuidade da aplicação $\tilde{v}^s$ e das derivadas das holonomias h^s e h^u , podemos garantir que essa igualdade continua válida para os limites das sequência p_n e q_n , ou seja

$$Dh_{p,q_0}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_0}^{s^{-1}}(q_0))) = \pm Dh_{p_0,q_0}^u \circ Dh_{p,p_0}^s(\tilde{v}^s(h_{p,p_0}^{s^{-1}}(p_0))). \quad (5.15)$$

De acordo com a construção das holonomias h^s e h^u , caso tenhamos dois pares x, y e z, w de pontos, tais que $\mathcal{F}^c(x) = \mathcal{F}^c(z)$ e $\mathcal{F}^c(y) = \mathcal{F}^c(w)$, então as holonomias, estáveis ou instáveis, induzidas por esses pares serão iguais. A partir daí, o fato de que $q_0 \in \mathcal{F}^c(q)$ e $p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$, nos indica que

$$h_{p,q_0}^s = h_{p,q}^s, \quad h_{p_0,q_0}^u = h_{p,q}^u, \quad \text{e} \quad h_{p,p_0}^s = h_{p,p}^s = i_d.$$

Ao substituírmos as três igualdades acima na equação (5.15), verificamos que

$$Dh_{p,q}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) = \pm Dh_{p,q}^u(\tilde{v}^s(p_0)).$$

Desse modo, ao aplicarmos a inversa de $Dh_{p,q}^u$, equivalente a $Dh_{q,p}^u$, aos dois lados da última igualdade, chegamos a

$$Dh_{q,p}^u \circ Dh_{p,q}^s(\tilde{v}(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) = \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Lembrando que anteriormente definimos $\tilde{h}_q = h_{q,p}^u \circ h_{p,q}^s$, uma rápida aplicação da regra da cadeia nos permite escrever

$$D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) = \pm \tilde{v}^s(p_0) \quad (5.16)$$

Utilizando a definição que fizemos para o ponto q_0 , podemos reescrever o lado esquerdo da igualdade acima como

$$\begin{aligned} D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) &= D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(h_{p,q}^u(h_{q,p}^s(p_0)))) \\ &= D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(h_{q,p}^{u^{-1}}(p_0)))) \\ &= D\tilde{h}_{q*}(\tilde{v}^s(\tilde{h}_q^{-1}(p_0))), \end{aligned} \quad (5.17)$$

o que, por sua vez, é equivalente a $\tilde{g}_q(p_0)$.

Dessa maneira, a equação (5.16), nos indica que

$$\tilde{g}_q(p_0) = \pm \tilde{v}^s(p_0),$$

o que contradiz o fato de que, por definição, o ponto q satisfaz

$$\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Portanto, como a suposição de que as variedades $W^u(x)$ e $W^s(p)$ não se interceptam nos leva a uma contradição, concluímos que estas variedades devem se interceptar.

Um raciocínio análogo nos leva à conclusão de que as variedades $W^s(x)$ e $W^u(p)$ também devem se interceptar.

Pelo exposto, demonstramos que devemos ter as interseções

$$W^u(x) \cap W^s(p) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad W^s(x) \cap W^u(p) \neq \emptyset.$$

Em outras palavras, os pontos x e p são homoclinicamente relacionados. ■

Como um corolário da prova de que o conjunto $\mathcal{U}^r$ satisfaz propriedade de relação homoclínica entre seus pontos periódicos, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 5.2.10 *Todo difeomorfismo $f \in \mathcal{U}^r$ admite uma única classe homoclínica associada aos pontos periódicos hiperbólicos com variedade estável de dimensão 2. Adicionalmente, esta classe homoclínica coincide com toda a variedade ambiente.*

Demonstração: Mostraremos que, para qualquer aplicação f pertencente ao conjunto $\mathcal{U}^r$, o ponto fixo $p = p_f$, cuja folha $\mathcal{F}^c(p)$ é um conjunto hiperbólico para f , satisfaz a propriedade de que sua classe homoclínica coincide com o toro $\mathbb{T}^4$, isto é, que a interseção

$$W^s(p) \cap W^u(p)$$

é densa nesse toro. A partir daí, como provamos no Teorema 5.2.9 que qualquer ponto periódico hiperbólico de f com variedade estável de dimensão 2 é homoclinicamente relacionado ao ponto fixo p , teremos como uma consequência imediata a unicidade da classe homoclínica associada a esses pontos.

Para começarmos, consideremos uma aplicação f pertencente ao conjunto $\mathcal{U}^r$ e $p = p_f$ o ponto fixo de f citado na definição da classe de Shub $\mathcal{SH}$.

A interseção $W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$ é densa em $\mathbb{T}^4$. Com efeito, combinando a densidade da variedade instável $W^u(p)$ na folha $\mathcal{F}^c(p)$, a densidade da folha estável $W^s(\mathcal{F}^c(p))$, que verificamos durante a demonstração do Teorema 5.2.9, e a continuidade e transversalidade das variedades invariantes, podemos concluir que a interseção mencionada é densa em $\mathbb{T}^4$.

Seja $U \subset \mathbb{T}^4$ um conjunto aberto. Pela densidade da interseção $W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$ nesse toro, podemos tomar um ponto $x \in W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$ de modo que x pertença ao aberto U . Assim, como o conjunto U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que a bola $B(x, \delta)$ está contida em U .

Nosso objetivo é mostrar que a variedade instável $W^u(p)$ e a variedade estável $W^s(p)$ se intersectam na bola $B(x, \delta)$. Para isso, analisaremos dois casos:

- Caso 1: O vetor $\tilde{v}^s(x) = Dh_{p,x}^s(\tilde{v}^s(h_{p,x}^{s^{-1}}(x)))$ não pertence ao espaço $T_x W^u(p)$.

Por construção, o vetor $\tilde{v}^s(x)$ representa um vetor tangente à interseção da variedade estável bidimensional $W^s(h_{p,x}^{s^{-1}}(x))$ com a folha central $\mathcal{F}^c(x)$. Pela nossa hipótese, esse vetor não pertence ao espaço $T_x W^u(p)$, assim as curvas

$$W^s(h_{p,x}^{s^{-1}}(x)) \cap \mathcal{F}^c(x) \quad \text{e} \quad W^u(p) \cap \mathcal{F}^c(x)$$

devem se intersectar transversalmente no ponto x .

Como a restrição de f ao conjunto $\mathcal{F}^c(p)$ é um difeomorfismo Anosov, sabemos que a variedade estável fraca de f no ponto p é densa na folha central $\mathcal{F}^c(p)$. Utilizando o fato de que a holonomia $h_{p,x}^s$ é um homeomorfismo, concluímos que a imagem desta folha estável fraca é densa na folha $\mathcal{F}^c(x)$, isto é, que a interseção $W^s(p) \cap \mathcal{F}^c(x)$ é densa na folha central $\mathcal{F}^c(x)$.

Assim, podemos tomar um ponto $y \in W^s(p) \cap \mathcal{F}^c(x)$ próximo o suficiente de x para que sua folha pela folheação de $\mathcal{F}^c(x)$ obtida como imagem da folheação estável fraca de $\mathcal{F}^c(p)$ seja também transversal à curva $W^u(p) \cap \mathcal{F}^c(x)$.

Desse modo, constatamos que as variedades estável $W^s(p)$ e instável $W^u(p)$ possuem uma interseção arbitrariamente próxima do ponto x . Por consequência, as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ devem possuir um ponto de interseção na bola $B(x, \delta)$.

- Caso 2: O vetor $\tilde{v}^s(x) = Dh_{p,x}^s(\tilde{v}^s(h_{p,x}^{s^{-1}}(x)))$ pertence ao espaço $T_x W^u(p)$.

Pela escolha do ponto x , sabemos que x deve pertencer ao conjunto $W^s(\mathcal{F}^c(p))$. Em decorrência disso, a sequência $f^n(x)$ deve se aproximar da folha $\mathcal{F}^c(p)$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), \mathcal{F}^c(p)) = 0.$$

A partir da compacidade da folha $\mathcal{F}^c(p)$, concluímos que deve existir uma subsequência $n_k \rightarrow \infty$ de modo que a sequência $f^{n_k}(x)$ convirja para um ponto $p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$. Com isso, a continuidade da aplicação $\tilde{v}^s$, da holonomia h^s e de sua derivada, com relação aos pontos, nos garante a convergência

$$Dh_{p, f^{n_k}(x)*}^s(\tilde{v}^s(h_{p, f^{n_k}(x)}^{s^{-1}}(f^{n_k}(x)))) \rightarrow Dh_{p, p_0*}^s(\tilde{v}^s(h_{p, p_0}^{s^{-1}}(p_0))).$$

Como $p_0 \in \mathcal{F}^c(p)$, temos a identidade $h_{p, p_0}^{s^{-1}} = i_d$. Assim, a convergência acima pode ser reescrita como

$$Dh_{p, f^{n_k}(x)*}^s(\tilde{v}^s(h_{p, f^{n_k}(x)}^{s^{-1}}(f^{n_k}(x)))) \rightarrow \tilde{v}^s(p_0).$$

Por definição, a aplicação f pertence ao conjunto $\mathcal{U}^r$. Logo, existe um ponto q homoclínico à folha central $\mathcal{F}^c(p)$ de modo que a desigualdade

$$\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0)$$

seja satisfeita.

Seja $q_0 = h_{p, q}^u(p_0)$ a imagem de p_0 pela holonomia homoclínica $h_{p, q}^u$. Consideremos ainda a holonomia instável forte $h_{loc}^u : \mathcal{F}_{loc}^{cs}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$ e definamos $q_k := h_{loc}^u(f^{n_k}(x)) \in \mathcal{F}_{loc}^{cs}(q_0)$. A partir da continuidade das holonomias, a sequência q_k deve convergir para o ponto q_0 .

Analisemos a desigualdade

$$\tilde{g}_q(p_0) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Através da equivalência $\tilde{g}_q(p_0) = D\tilde{h}_q(\tilde{v}^s(h_{p, q}^{s^{-1}}(q_0)))$, que verificamos anteriormente em (5.17), podemos reescrever a desigualdade acima como

$$D\tilde{h}_q(\tilde{v}^s(h_{p, q}^{s^{-1}}(q_0))) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Lembrando que anteriormente definimos $\tilde{h}_q = h_{q, p}^u \circ h_{p, q}^s$, uma rápida aplicação da regra da cadeia nos permite escrever

$$Dh_{q, p*}^u \circ Dh_{p, q*}^s(\tilde{v}^s(h_{p, q}^{s^{-1}}(q_0))) \neq \pm \tilde{v}^s(p_0).$$

Desse modo, ao aplicarmos a inversa de $Dh_{q, p*}^u$, equivalente a $Dh_{p, q*}^u$, aos dois lados da última igualdade, chegamos a

$$Dh_{p,q*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q}^{s^{-1}}(q_0))) \neq \pm Dh_{p,q*}^u(\tilde{v}^s(p_0)). \quad (5.18)$$

Como o ponto q_0 pertence à folha central $\mathcal{F}^c(q)$ e o ponto p_0 pertence à folha central $\mathcal{F}^c(p)$, as igualdades

$$h_{p,q}^s = h_{p,q_0}^s, \quad \text{e} \quad h_{p,q}^u = h_{p_0,q_0}^u$$

nos permitem reescrever a desigualdade em (5.18) como

$$Dh_{p,q_0*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_0}^{s^{-1}}(q_0))) \neq \pm Dh_{p_0,q_0*}^u(\tilde{v}^s(p_0)).$$

Pela continuidade destas aplicações com relação aos pontos, para todo índice k suficientemente grande, a desigualdade acima se mantém válida ao substituirmos os pontos p_0 e q_0 pelos termos $f^{n_k}(x)$ e q_k , respectivamente, isto é

$$Dh_{p,q_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k))) \neq \pm Dh_{f^{n_k}(x),q_k*}^u(\tilde{v}^s(f^{n_k}(x))).$$

Iteremos por f^{-n_k} e denotemos $f^{-n_k}(q_k) = x_k \rightarrow x$. Na imagem obteremos

$$D_{q_k} f^{-n_k} \circ Dh_{p,q_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k))) \neq \pm D_{q_k} f^{-n_k} \circ Dh_{f^{n_k}(x),q_k*}^u(\tilde{v}^s(f^{n_k}(x))).$$

Considerando a invariância das folheações, segue que

$$f^{-n_k} \circ h_{p,q_k}^s = h_{p,x_k}^s \circ f^{-n_k} \quad \text{e} \quad f^{-n_k} \circ h_{f^{n_k}(x),q_k}^u = h_{x,x_k}^u \circ f^{-n_k}$$

Aplicando a regra da cadeia, ao derivarmos em um ponto z obtemos

$$\begin{aligned} Df^{-n_k}(h_{p,q_k}^s(z)) \circ Dh_{p,q_k}^s(z) &= Dh_{p,x_k}^s(f^{-n_k}(z)) \circ Df^{-n_k}(z) \\ Df^{-n_k}(h_{f^{n_k}(x),q_k}^u(z)) \circ Dh_{f^{n_k}(x),q_k}^u(z) &= Dh_{x,x_k}^u(f^{-n_k}(z)) \circ Df^{-n_k}(z) \end{aligned}$$

Substituindo na equação anterior,

$$Dh_{p,x_k}^s \circ D_{h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k)} f^{-n_k}(\tilde{v}^s(h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k))) \neq Dh_{p,x_k}^u \circ D_{h_{p,q_k}^{s^{-1}}(q_k)} f^{-n_k}(\tilde{v}^s(f^{n_k}(x)))$$

Utilizando a invariância do fibrado $\tilde{v}^s$, encontramos

$$Dh_{p,x_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{p,x_k}^{s^{-1}}(x_k))) \neq \pm Dh_{x,x_k*}^u(\tilde{v}^s(x)).$$

Ao aplicarmos Dh_{x,x_k}^u ao vetor $\tilde{v}^s(x)$, obtemos um vetor tangente à interseção da variedade instável bidimensional $W^u(x)$ com a folha central $\mathcal{F}^c(x_k)$. Assim, utilizando a igualdade $W^u(x) = W^u(p)$, o vetor $\pm Dh_{x,x_k*}^u(\tilde{v}^s(x))$ pertence ao espaço $T_{x_k} W^u(p)$.

Por construção, $x_k \in W^u(p) \cap W^s(\mathcal{F}^c(p))$. Como $x_k \in W^u(p)$, temos $W^u(p) = W^u(x_k)$. Assim, a transversalidade de $W^u(p)$ e $\mathcal{F}^c(x_k)$ nos indica que a interseção

$W^u(p) \cap \mathcal{F}^c(x_k)$ é uma curva. Logo, como o vetor $\pm Dh_{x, x_k*}^u(\tilde{v}^s(x))$ é tangente a essa curva, a desigualdade acima nos indica que

$$Dh_{p, x_k*}^s(\tilde{v}^s(h_{p, x_k}^{s^{-1}}(x_k))) \notin T_{x_k} W^u(p).$$

A partir daí, aplicando um argumento análogo ao que utilizamos no caso 1, concluímos que a variedade estável $W^s(p)$ e a variedade instável $W^u(p)$ possuem uma interseção arbitrariamente próxima do ponto x_k . Por fim, como a sequência x_k converge ao ponto x , concluímos que as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ possuem uma interseção arbitrariamente próxima do ponto x . ■

Além das propriedades estabelecidas anteriormente, o conjunto $\mathcal{U}^r$ satisfaz ainda outra propriedade importante: este conjunto é denso na topologia C^r . Formalmente, enunciamos esse resultado a seguir.

Teorema 5.2.11 *O conjunto $\mathcal{U}^r$ é denso na topologia C^r .*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (27, Proposição 3.4). ■

Finalmente, após verificarmos cada uma das propriedades do conjunto $\mathcal{U}^r$, podemos reunir os três resultados anteriores em um único grande teorema que expressa todas essas características. A seguir, apresentamos esse teorema.

Teorema 5.2.12 *Para qualquer $2 \leq r \leq \infty$, existe um subconjunto $\mathcal{U}^r \subset \mathcal{SH}_b^r$ aberto na topologia C^2 e denso na topologia C^r tal que, para qualquer $f \in \mathcal{U}^r$, vale o seguinte: todo par de pontos periódicos hiperbólicos de f com variedade estável de dimensão 2 são homoclinicamente relacionados.*

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos inicialmente o conceito de hiperbolicidade sob diferentes perspectivas, seguindo um percurso gradual que partiu dos isomorfismos hiperbólicos, passou pelos conjuntos hiperbólicos e culminou no estudo dos conjuntos parcialmente hiperbólicos.

Posteriormente, nos debruçamos sobre o trabalho de Shub, explorando o teorema que fornece condições suficientes para que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico seja robustamente transitivo. Na sequência, detalhamos a construção do exemplo do Shub, demonstrando que essa aplicação satisfaz as condições do teorema supracitado.

Em seguida, descrevemos a construção da classe de Shub e demonstramos alguns dos principais resultados relacionados a essa classe de aplicações. Entre as principais contribuições nessa etapa, destacamos a definição de um subconjunto $\mathcal{U}^r$ da classe do Shub, para o qual provamos diversas propriedades. Mais especificamente, mostramos que o referido conjunto é aberto na topologia C^2 , que quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos com variedade estável bidimensional de uma aplicação neste conjunto são homoclinicamente relacionados e a unicidade da classe homoclínica associada a esses pontos, a qual coincide com toda a variedade ambiente. Ressaltamos que as ideias apresentadas durante a construção da classe de Shub estimulam a investigação de novos exemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que apresentam transitividade robusta.

Por fim, quanto aos avanços recentes na área de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, destacamos o artigo *A new example of robustly transitive diffeomorphism*, (39), de Carrasco e Obata, em que é apresentado um novo exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico, não hiperbólico, apresentando a propriedade de transitividade robusta. Vale ressaltar ainda o artigo *Equilibrium states for Mañé diffeomorphisms*, (40), de Climenhaga, Fisher e Thompson, que desenvolve a construção da classe de Mañé a partir do exemplo original de Mañé. A análise desses avanços recentes abre discussões sobre novas possibilidades de construção de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos exibindo a transitividade robusta.

REFERÊNCIAS

- 1 MUNKRES, James R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- 2 ENGELKING, Ryszard. **General Topology**. Sigma Series in Pure Mathematics, v. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- 3 LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- 4 KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- 5 LIMA, Elon L. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- 6 LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York, NY: Springer New York, 2013.
- 7 CAMACHO, César; NETO, Alcides L. **Geometric Theory of Foliations**. Boston: Springer Science & Business Media, 1985.
- 8 WEN, Lan. **Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2016.
- 9 BRIN, Michael; STUCK, Garrett. **Introduction to Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- 10 HIRSCH, Morris W.; PUGH, Charles C.; SHUB, Michael. **Invariant Manifolds**. 1. ed. Heidelberg: Springer Berlin, 1977.
- 11 HIRSCH, Morris W. **Differential Topology**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1976.
- 12 ROBINSON, Clark. **Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 1998.
- 13 PALIS, Jacob; DE MELO, Welington. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- 14 CROVISIER, Sylvain; POTRIE, Rafael. Introduction to partially hyperbolic dynamics. **School on Dynamical Systems, ICTP, Trieste**, v. 3, n. 1, 2015.
- 15 PESIN, Yakov. **Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity**. European Mathematical Society, 2004.
- 16 SAMBARINO, Martín. **Hiperbolicidad y estabilidad**. XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2009.
- 17 BACHMAN, George; NARICI, Lawrence. **Functional Analysis**. New York: Dover Publications, 2000.
- 18 BONATTI, Christian. DÍAZ, Lorenzo J.; VIANA, Marcelo. **Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- 19 FRANKS, John. Anosov diffeomorphisms on tori. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 145, p. 117-124, 1969.

- 20 LEE, John M. **Introduction to Riemannian Manifolds**. Cham: Springer, 2018.
- 21 GOURMELON, N. Adapted metrics for dominated splittings. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, v. 27,n.6 p 1839-1849, 2007.
- 22 BURNS, Keith; WILKINSON, Amie. Dynamical coherence and center bunching. **Discrete Contin. Dyn. Syst**, v. 22, n. 1-2, p. 89-100, 2008.
- 23 SMALE, Stephen. Differentiable dynamical systems. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 73, n. 6, p. 747-817, 1967.
- 24 SHUB, Michael. (1971). Instability. In: Chillingworth, D. (eds) **Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems**. Lecture Notes in Mathematics, vol 206. Springer, Berlin, Heidelberg.
- 25 SHUB, Michael. (1971). Topologically transitive diffeomorphisms of $\mathbb{T}^4$. In: Chillingworth, D. (eds) **Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems**. Lecture Notes in Mathematics, vol 206. Springer, Berlin, Heidelberg.
- 26 BURNS, Keith; PUGH, Charles; SHUB, Michael; WILKINSON, Amie. (2001). Recent Results about Stable Ergodicity. In: **Smooth Ergodic Theory and Its Applications: Proceedings of the AMS Summer Research Institute on Smooth Ergodic Theory and Its Applications, July 26-August 13, 1999, University of Washington, Seattle**. American Mathematical Soc., p. 327.
- 27 LIANG, Chao; SAGHIN, Radu; YANG, Fan; YANG, Jiagang. Shub's example revisited. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, vol. 45, no. 3, pp. 894-914, 2025.
- 28 FISHER, Todd; POTRIE, Rafael; SAMBARINO, Martín. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov. **Mathematische Zeitschrift**, v. 278, n. 1, p. 149-168, 2014.
- 29 SAGHIN, Radu. On invariant holonomies between centers. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, vol. 45, no. 1, pp. 274-293, 2025.
- 30 PUGH, Charles; SHUB, Michael; WILKINSON, Amie. Hölder Foliations. **Duke Mathematical Journal**, vol. 86, no. 3, 1997.
- 31 PUGH, Charles; SHUB, Michael; WILKINSON, Amie. Correction to:"Hölder foliations". **Duke Mathematical Journal**, vol. 86 no. 3 (1997), pp. 517-546. 2000.
- 32 PUGH, Charles; SHUB, Michael; WILKINSON, Amie. Partial differentiability of invariant splittings. **Journal of Statistical Physics**, v. 114, n. 3, p. 891-921, 2004.
- 33 BONATTI, Christian; WILKINSON, Amie. Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds. **Topology**, v. 44, n. 3, p. 475-508, 2005.
- 34 POINCARÉ, Henri. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Mathematica**, v. 13, n. 1, p. A3-A270, 1890.
- 35 POINCARÉ, Henri. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. v. 1-3. Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1893.

- 36 ANDRONOV, Aleksandr; PONTRYAGIN, Lev. Systèmes Grossieres. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14, 247-251.
- 37 ANOSOV, Dmitrij V. **Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature**. American Mathematical Society, 1969.
- 38 MAÑÉ, Ricardo. Contributions to the stability conjecture. **Topology**, v. 17, n. 4, p. 383-396, 1978.
- 39 CARRASCO, Pablo D.; OBATA, Davi. A new example of robustly transitive diffeomorphism. **Mathematical Research Letters**, v. 28, n. 3, p. 665-679, 2021.
- 40 CLIMENHAGA, Vaughn; FISHER, Todd; THOMPSON, Daniel J. Equilibrium states for Mañé diffeomorphisms. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, v. 39, n. 9, p. 2433-2455, 2019.