

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thiago Evangelista Neves

Teorema de Quine para Aplicações de Gauss

Juiz de Fora

2026

Thiago Evangelista Neves

Teorema de Quine para Aplicações de Gauss

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Catarina Mendes de Jesus Sanchez

Coorientadora: Prof^ª. Dr^ª. Esther Sanabria-Codesal

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Neves, Thiago Evangelista.

Teorema de Quine para Aplicações de Gauss / Thiago Evangelista
Neves. – 2026.

116 f. : il.

Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sanchez

Coorientadora: Esther Sanabria-Codesal

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2026.

1. Teorema de Quine. 2. Aplicações de Gauss. 3. Grafos. 4. Aplicações
estáveis. I. Sanchez, Catarina Mendes de Jesus, orient. II. Sanabria-Codesal,
Esther, coorient. III. Título.

Thiago Evangelista Neves

Teorema de Quine para Aplicações de Gauss

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovada em 10 de fevereiro de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Catarina Mendes de Jesus Sanchez - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Esther Sanabria-Codesal - Coorientadora
Universitat Politècnica de València

Prof^a. Dr^a. Pouya Mehdipour
Universidade Federal de Viçosa

Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos
Universidade Federal de Uberlândia

Juiz de Fora, 08/07/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Catarina Mendes de Jesus Sanchez, Professor(a)**, em 08/07/2026, às 21:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Esther Sanabria Codesal, Usuário Externo**, em 16/07/2026, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pouya Mehdipour, Usuário Externo**, em 17/07/2026, às 12:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepúlveda Castellanos, Usuário Externo**, em 17/07/2026, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3073972** e o código CRC **8AA2C3C2**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Margareth, e ao meu pai, Carlos, por todo o apoio emocional e financeiro que me ofereceram ao longo de toda a minha vida. Sem vocês, eu não teria chegado até aqui. Também agradeço ao meu irmão, Leo, e à minha cunhada, Sara, pelo apoio emocional, e à toda a minha família.

Agradeço à Catarina e à Esther pela amizade, as conversas, o carinho e por terem aceitado me orientar ao longo da escrita deste e de outros trabalhos. As sugestões e recomendações de vocês foram fundamentais para que o meu trabalho se tornasse o que se tornou. Mais ainda, foram fundamentais para que eu me tornasse o matemático que sou.

Agradeço aos membros da banca, a professora Pouya Mehdipour, e o professor Alonso Sepúlveda Castellanos, por terem aceitado participar da banca e pelas sugestões de correções.

Agradeço à Paula, secretária do Programa e grande amiga. Seja nos sanando qualquer dúvida sobre o funcionamento do Mestrado, ou apenas tirando cinco minutinhos do seu tempo para conversar conosco. Se cheguei ao fim deste mestrado, é graças a você!

Agradeço à Sofia por todo o apoio, todo o carinho e todas as conversas. Sem você eu não me tornaria a pessoa que sou hoje. Se hoje estou na Matemática, sem sombra de dúvidas é graças a você. Se estou onde estou hoje, é porque você me acolheu, me escutou, me aconselhou e me ajudou.

Agradeço a todas as minhas amigas, que muitas são para citar todas nominalmente. Vocês foram apoio incomensurável para que eu pudesse seguir por toda a minha vida. Saibam que guardo cada um de vocês no meu coração.

Agradeço a todos os trabalhadores que me permitiram me dedicar aos meus estudos. Vocês são a força motriz de nossa sociedade. Em especial, eu agradeço aos funcionários do RU, aos da limpeza e manutenção da UFJF, aos da biblioteca e aos meus professores. Sem vocês eu não teria conseguido chegar até aqui. Vocês são peça fundamental para me garantir um ambiente de estudo limpo, uma alimentação decente e uma formação de excelência. Serei sempre eternamente grato.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro que me permitiu me dedicar exclusivamente ao mestrado.

*Can you wait a sec?
Let me catch my breath
Let me catch my
I can't remember how I got here
Can you wait a sec?
Let me catch my breath
Let me catch my
I can't remember how I got here
Got here*

*They wanted heaven from me
I gave 'em hell
Now they want something bigger
I'm overwhelmed
I think it's time to go now
I think my curtain's falling
Just don't forget about me
When you get out of college
If it's my final album
And if I am forgotten
I hope I made you smile
That's all I ever wanted*

*Congratulations on your
Bit of success
Welcome to the Neotheater
We can't wait to see
What you do next*

(AJR, 2019, Finale (Can't Wait To See What You Do Next) - Neotheater)

RESUMO

Neste trabalho temos como objetivo o estudo das aplicações de Gauss estáveis. Estudaremos suas singularidades, que se organizam em curvas simples fechadas e disjuntas, chamadas de curvas singulares ou, no caso das aplicações de Gauss, curvas parabólicas. Essas curvas serão sempre fronteira entre uma região de curvatura Gaussiana positiva (região elíptica) e uma região de curvatura Gaussiana negativa (região hiperbólica). Também veremos como podemos associar a cada aplicação um grafo bipartido e com peso, cujos vértices estão associados às regiões regulares da aplicação, onde o sinal do vértice vem da curvatura Gaussiana da região, as arestas às curvas parabólicas e os pesos ao gênero de cada região. Além disto, a adjacência dos vértices reflete a adjacência das regiões regulares, que se torna uma importante ferramenta para analisarmos a topologia da superfície. Por fim, veremos como o Teorema de Quine se mostra no caso das aplicações de Gauss estáveis.

Palavras-chave: teorema de Quine; aplicações de Gauss; grafos; aplicações estáveis.

ABSTRACT

In this thesis we aim to study stable Gauss maps. We investigate their singularities, which are organized as simple, closed and disjoint curves, called the singular curves, or, in the case of Gauss maps, parabolic curves. These curves will always be the boundary between a region of positive Gaussian curvature (elliptic region) and a region of negative Gaussian curvature (hyperbolic region). We also study how to associate to each map a bipartite weighted graph, whose vertices are associated to the regular regions, with the sign of each vertex being the sign of the Gaussian curvature of the corresponding region, the edges are associated to the parabolic curves and the weights to the genus of each region. Moreover, the adjacency between vertices reflects the adjacency between the regular regions, making the graph an important tool for analyzing the topology of the surface. At last, we discuss how Quine's Theorem appears in the case of stable Gauss maps.

Keywords: Quine's theorem; Gauss maps; graphs; stable maps.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Um exemplo de grafo.	18
Figura 2.2 – Outra representação do grafo da Figura 2.1.	18
Figura 2.3 – Grafo com 4 vértices e 5 arestas.	20
Figura 2.4 – Grafo K_4	24
Figura 2.5 – Árvores geradoras de K_4	25
Figura 2.6 – Parametrização de uma 2-variedade M	30
Figura 2.7 – Parametrização de uma 2-variedade com bordo.	31
Figura 2.8 – 0-, 1-, e 2-células	33
Figura 2.9 – Exemplos de complexos	33
Figura 2.10 – Um exemplo de triangulação da esfera.	35
Figura 2.11 – Pontos duplos de uma aplicação entre superfícies.	45
Figura 3.1 – Sinal das cúspides.	53
Figura 3.2 – Transição lips (L^+)	56
Figura 3.3 – Exemplo de transição beaks.	57
Figura 3.4 – Os oito subtipos locais da transição beaks.	57
Figura 3.5 – Exemplo do estrato S para aplicações de Gauss.	60
Figura 3.6 – Estratos K	61
Figura 3.7 – Exemplo do estrato K_0 para aplicações de Gauss.	62
Figura 3.8 – Comportamento do contorno aparente na transição K_0	62
Figura 3.9 – Exemplo do estrato K_1 para aplicações de Gauss.	63
Figura 3.10 – Comportamento do contorno aparente na transição K_1	64
Figura 3.11 – Exemplo do estrato K_2 para aplicações de Gauss.	65
Figura 3.12 – Comportamento do contorno aparente na transição K_2	66
Figura 3.13 – Estratos T	67
Figura 3.14 – Exemplo do estrato T_0 para aplicações de Gauss.	67
Figura 3.15 – Comportamento do contorno aparente na transição T_0	68
Figura 3.16 – Exemplo do estrato T_1 para aplicações de Gauss.	69
Figura 3.17 – Comportamento do contorno aparente na transição T_1	70
Figura 3.18 – Estratos C	71
Figura 3.19 – Exemplo do estrato C_0 para aplicações de Gauss.	72
Figura 3.20 – Comportamento do contorno aparente na transição C_0	73
Figura 3.21 – Exemplo do estrato C_1 para aplicações de Gauss.	74
Figura 3.22 – Comportamento do contorno aparente na transição C_1	75
Figura 3.23 – Exemplo do estrato D_4^- para aplicações de Gauss.	76
Figura 3.24 – Exemplo do estrato $D_4^+{}_1$ para aplicações de Gauss.	77
Figura 3.25 – Comportamento do contorno aparente na transição $D_4^+{}_1$	78
Figura 3.26 – Exemplo do estrato $D_4^+{}_2$ para aplicações de Gauss.	79

Figura 3.27–Comportamento do contorno aparente na transição D_4^+ .	79
Figura 3.28–Cirurgia S .	81
Figura 3.29–Bitoro com as curvas Γ , e as regiões M_E e M_H .	82
Figura 3.30–Exemplos de superfícies com aplicações de Gauss estáveis obtidas por transições lips, beaks e cirurgias.	84
Figura 3.31–Aplicações de Gauss obtidas com a cirurgia S^1 , transições lips e beaks.	84
Figura 3.32–Efeitos de transições beaks em uma superfície de gênero 1 e suas aplicações de Gauss estáveis.	86
Figura 4.1 – Superfície com curvas associada a um caminho.	89
Figura 4.2 – Superfície com curvas associada a um ciclo.	89
Figura 4.3 – Associando uma superfície com curvas a um grafo.	90
Figura 4.4 – Superfícies com curvas não equivalentes cujos grafos duais são isomorfos.	91
Figura 4.5 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss do tipo $\mathcal{N} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com até quatro curvas e seus grafos duais.	92
Figura 4.6 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre $\mathbb{T}^2$ com até duas curvas e seus grafos duais, quando existirem.	93
Figura 4.7 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre $\mathbb{T}^2$ com três curvas e seus grafos duais, quando existirem.	94
Figura 4.8 – Efeito da transição Lips no grafo dual.	95
Figura 4.9 – Efeito da transição Beaks no grafo dual.	96
Figura 4.10–Efeitos das cirurgias no grafo dual.	97
Figura 4.11–Mergulhos do toro $\mathbb{T}^2$ e os grafos duais de suas aplicações de Gauss estáveis.	99
Figura 4.12–Exemplos de grafos de aplicações de Gauss sem cúspides.	104
Figura 5.1 – Incremento das transições lips e beaks.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Efeito da transição beaks no número de regiões regulares, curvas parabólicas e gênero de regiões	59
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

A

$\mathcal{N}$	Aplicação de Gauss de uma superfície imersa; Aplicação de Gauss quando a imersão está subentendida;
$\mathcal{N}_f$	Aplicação de Gauss da imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$;
a_γ	Aresta dual da curva parabólica γ ;

B

∂M	Bordo da variedade M ;
--------------	--------------------------

C

$\chi(M)$	Característica de Euler da superfície M ;
$\#C$	Cardinalidade do conjunto C ;
$\mathcal{E}(M, N)$	Conjunto das aplicações estáveis entre as variedades M e N ;
$C^\infty(M, N)$	Conjunto das aplicações infinitamente diferenciáveis entre as variedades M e N ;
$J^k(M, N)_{p,q}$	Conjunto das classes de equivalência da relação $\sim_p^k$;
$E(\mathcal{G})$	Conjunto de arestas do grafo $\mathcal{G}$;
$V(\mathcal{G})$	Conjunto de vértices do grafo $\mathcal{G}$;
$\Gamma(M, N)$	Conjunto discriminante;
$J^k(M, N)$	Conjunto dos k -jatos de aplicações entre as variedades M e N ;
$E_{\mathcal{N}}$	Conjunto elíptico da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$H_{\mathcal{N}}$	Conjunto hiperbólico da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$R_{\mathcal{N}}$	Conjunto regular da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$\Sigma_{\mathcal{N}}$	Conjunto singular da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$	Contorno aparente da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$\mathbb{F}_2$	Corpo finito com dois elementos
γ	Curva parabólica;
$K(p)$	Curvatura Gaussiana da superfície M no ponto $p \in M$;

D

df_p	Diferencial da aplicação f no ponto p ;
$\dim V$	Dimensão do espaço vetorial V ;

E

$\mathbb{S}^2$	Esfera bidimensional;
$\mathbb{C}(\mathcal{G})$	Espaço cíclico do grafo $\mathcal{G}$;
$\mathbb{E}(\mathcal{G})$	Espaço de arestas do grafo $\mathcal{G}$;
$T_p M$	Espaço tangente à variedade M no ponto $p \in M$;
$\mathbb{F}_2^n$	Espaço vetorial n –dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}_2$;

F

TM	Fibrado tangente da variedade M
------	-----------------------------------

G

$g(M)$	Gênero da superfície M ;
$\mathcal{G}$	Grafo;
$\mathcal{T}$	Grafo do tipo árvore;
$\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$	Grafo dual da aplicação de Gauss $\mathcal{N}$;
$\mathcal{T} + vw$	Grafo obtido adicionando-se a aresta vw entre os vértice v e w da árvore $\mathcal{T}$;
$\mathcal{T} - a$	Grafo obtido retirando-se a aresta a da árvore $\mathcal{T}$;
$\deg f$	Grau da aplicação f ;
$\deg_q f$	Grau local da aplicação f no valor regular q ;

R

$\overset{k}{\sim}_p$	Relação de contato de k –ésima ordem em p ;
-----------------------	---

S

$S_r(f)$	Singularidades do tipo S_r da aplicação estável f ;
$M_1 \# M_2$	Soma conexa entre as superfícies M_1 e M_2 ;

T

$\mathcal{W}$	Topologia C^∞ de Whitney;
$\mathcal{W}_k$	Topologia C^k de Whitney;
$\mathbb{T}^2$	Toro;
B	Transição beaks;
$-B$	Transição beaks inversa;
L	Transição lips;
$-L$	Transição lips inversa;

V

M	Variedade suave;
$\emptyset$	Vazio;
v_R	Vértice dual da região regular R ;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	CONCEITOS INICIAIS	17
2.1	TEORIA DE GRAFOS	17
2.1.1	Teoria Básica de Grafos	17
2.1.2	Ciclos	19
2.1.3	Árvores	21
2.1.4	Grafos Bipartidos com Peso	22
2.2	CICLOS FUNDAMENTAIS E O ESPAÇO CÍCLICO	23
2.2.1	Árvore Geradora	23
2.2.2	Espaço Cíclico	25
2.2.3	Ciclos Fundamentais	27
2.3	SUPERFÍCIES	30
2.3.1	Superfícies Fechadas	30
2.3.2	Complexos	32
2.3.3	Característica de Euler	34
2.3.4	Orientação	35
2.3.5	Gênero	36
2.3.6	Aplicação de Gauss	37
2.3.7	Superfícies com Curvas	38
2.4	APLICAÇÕES ESTÁVEIS	38
2.4.1	k -jatos	38
2.4.2	Topologia C^∞ de Whitney	40
2.4.3	Grau de uma aplicação	41
2.4.4	Aplicações Estáveis	41
2.4.5	Singularidades de Aplicações entre Variedades	42
2.4.6	Pontos Duplos	44
3	APLICAÇÕES DE GAUSS	46
3.1	APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS	46
3.2	SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS . . .	48
3.2.1	Curvas Parabólicas	48
3.2.2	Classificação de Singularidades	51
3.2.3	Sinal das Cúspides	52
3.3	TRANSIÇÕES DE APLICAÇÕES DE GAUSS	53
3.3.1	Transições de Codimensão 1	53
3.3.2	Estrato L	55
3.3.3	Estrato B	56
3.3.4	Estrato S	59

3.3.5	Estratos K	60
3.3.5.1	Estrato K_0	61
3.3.5.2	Estrato K_1	63
3.3.5.3	Estrato K_2	65
3.3.6	Estratos T	66
3.3.6.1	Estrato T_0	67
3.3.6.2	Estrato T_1	69
3.3.7	Estratos C	71
3.3.7.1	Estrato C_0	71
3.3.7.2	Estrato C_1	73
3.3.8	Estratos D_4	75
3.3.8.1	Estrato D_4^-	75
3.3.8.2	Estrato $D_{4\ 1}^+$	76
3.3.8.3	Estrato $D_{4\ 2}^+$	78
3.4	CIRURGIAS DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS	80
3.5	APLICAÇÕES DE GAUSS SEM CÚSPIDES	81
4	GRAFO DUAL	87
4.1	GRAFOS ASSOCIADOS A SUPERFÍCIES COM CURVAS	87
4.2	GRAFO DUAL DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS	92
4.3	TRANSIÇÕES E CIRURGIAS NO GRAFO DUAL	95
4.3.1	Efeito da Transição Lips	95
4.3.2	Efeito da Transição Beaks	96
4.3.3	Efeito das Cirurgias	97
4.4	REALIZAÇÃO DE GRAFOS BIPARTIDOS COM PESO	97
4.5	GRAFOS DE APLICAÇÕES DE GAUSS SEM CÚSPIDES	100
4.5.1	Grafos 2–negativos	100
4.5.2	Árvores com Peso Zero	102
4.5.3	Grafos com Peso Zero	103
5	TEOREMA DE QUINE PARA APLICAÇÕES DE GAUSS .	105
5.1	TEOREMA DE QUINE	105
5.2	TEOREMA DE QUINE PARA APLICAÇÕES DE GAUSS	106
6	CONCLUSÃO	111
	REFERÊNCIAS	112
	ÍNDICE	115

1 INTRODUÇÃO

As aplicações de Gauss já se mostram como uma ferramenta no estudo da geometria intrínseca das superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$. Dada uma superfície imersa, as singularidades da sua aplicação de Gauss são os pontos de curvatura Gaussiana zero. Entretanto, uma mesma superfície possui diferentes imersões, que geram diferentes aplicações de Gauss com diferentes singularidades.

A fim de estudar como essas aplicações de Gauss e suas singularidades se correlacionam, fazemos a composição entre a aplicação de Gauss e sua imersão. Essa técnica nos permite fazer uso da teoria de aplicações entre variedades, no caso em que ambas as variedades são superfícies, para classificar as aplicações de Gauss, podendo compará-las e organizá-las em conjuntos de aplicações equivalentes, donde surgem as aplicações de Gauss estáveis.

Assim podemos fazer uso da Teoria de Aplicações entre Variedades para estudar essas aplicações, donde podemos utilizar os estudos feitos por H. Whitney no clássico artigo de 1955 *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane* (30), em que Whitney descreve as singularidades das aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, e que motiva todo o estudo das singularidades de aplicações entre superfícies.

Diversos pesquisadores se debruçaram sobre essa área posteriormente, por exemplo, Quine em (24), que estabelece uma relação entre a característica de Euler do domínio e do contradomínio, o grau e as cúspides de uma aplicação entre superfícies; Pignoni em (23), que descreve um critério pra determinar o número mínimo de singularidades de uma aplicação no plano; Hacon, De Jesus e Fuster em (11), que estabelecem a associação de um grafo ponderado a uma aplicação no plano; Ohmoto e Aicardi em (22) que descrevem as transições de aplicações de superfícies fechadas no plano; Kamenosono e Yamamoto em (13), que descrevem o número mínimo de singularidades de uma aplicação na esfera;

No campo das aplicações de Gauss, destacamos os trabalhos de Bleecker e Wilson em (2), que estudam a estabilidade das aplicações de Gauss e correlacionam com a geometria da aplicação de Gauss de superfícies imersas, e de Bruce, Giblin e Tari em (3) que estudam as curvas parabólicas em famílias de superfícies variando a um parâmetro; De Jesus, Moraes e Fuster em (17), que estabelecem que todo grafo bipartido com peso pode ser associado a uma aplicação de Gauss estável; Souza em (26), que faz sua dissertação sobre singularidades de aplicações de Gauss estáveis; De Jesus e Sanabria-Codesal em (21), que analisam o uso de grafos para aplicações de Gauss sem cúspides; e De Jesus e Romero em (18), que analisam o resultado de Quine no caso particular das aplicações de Gauss estáveis.

Neste trabalho vamos estudar as singularidades de aplicações de Gauss estáveis e como podemos fazer uso de um grafo bipartido com peso para estudá-las. Também iremos

analisar o caso das aplicações de Gauss sem cúspides. Por fim, iremos estudar a prova do Teorema de Quine para aplicações de Gauss estáveis. Organizamos este trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentamos alguns dos conceitos que consideramos essenciais para o bom entendimento do trabalho. Nas Seções 2.1 e 2.2 apresentamos um pouco da Teoria de Grafos que faremos uso aqui. Na Seção 2.3 apresentamos um pouco da Geometria e da Topologia de superfícies. Já na Seção 2.4 apresentamos alguns conceitos gerais sobre aplicações estáveis entre variedades.

No Capítulo 3 focamos mais especificamente nas aplicações de Gauss, embora também usamos este capítulo para apresentar alguns conceitos que podem ser generalizados pra outros tipos de aplicações estáveis. Na Seção 3.1 definimos o que são as aplicações de Gauss estáveis. Na Seção 3.2 focamos o nosso olhar para as singularidades das aplicações de Gauss. Na Seção 3.3 estudamos as transições de aplicações de Gauss, enquanto na Seção 3.4 estudamos as cirurgias de aplicações de Gauss, tanto as transições quanto as cirurgias são formas de obtermos novas aplicações a partir de aplicações já conhecidas. Encerramos este capítulo com a Seção 3.5, onde estudamos alguns resultados sobre aplicações de Gauss sem cúspides.

No Capítulo 4 apresentamos uma ferramenta para o estudo das aplicações de Gauss estáveis, o grafo dual. Começamos na Seção 4.1, onde apresentamos uma forma de associar grafos a superfícies com curvas. Na Seção 4.2 nos focamos no caso particular em que as curvas são o conjunto parabólico de uma aplicação de Gauss estável. Na Seção 4.3 estudamos como as transições e as cirurgias de aplicações de Gauss estáveis atuam sobre o grafo dual. Na Seção 4.4 mostramos como todo grafo bipartido com peso é grafo dual de alguma aplicação de Gauss estável. Já na Seção 3.5 estudamos os grafos duais das aplicações de Gauss sem cúspides.

Por fim, encerramos o escopo do nosso trabalho com o Capítulo 5. Na Seção 5.1 apresentamos um importante resultado pro estudo de aplicações estáveis entre variedades de mesma dimensão, o Teorema de Quine. Já na Seção 5.2 apresentamos uma versão desse teorema adaptada para as aplicações de Gauss estáveis.

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo trazemos os conceitos que julgamos principais para uma boa compreensão da dissertação.

Na Seção 2.1 traremos alguns conceitos básicos da Teoria de Grafos. Definiremos o que é um grafo, especialmente o que trataremos como grafo neste trabalho, além de trazer alguns tipos especiais de grafos: caminhos, ciclos e árvores. Também definiremos o que são os grafos bipartidos com peso, cruciais na teoria desenvolvida neste trabalho. Nos baseamos na referência (28).

Na Seção 2.2 nos debruçamos sobre o espaço cíclico de um grafo. Nossos principais objetivos nesta seção é definir os ciclos fundamentais e o número ciclomático de um grafo. Pra esta seção nos baseamos em (5, 28).

Na Seção 2.3 focamos na geometria e topologia de superfícies. Os principais conceitos são a definição de uma superfície fechada (compacta e sem bordo), a característica de Euler, que definimos a partir de complexos, e o gênero das superfícies. Também discutimos sobre a orientação de superfícies e aplicação de Gauss de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$. Por fim, definimos o que é uma superfície com curvas. Nos baseamos nas referências (16, 6, 10, 14) para montar esta seção.

Para encerrar este capítulo inicial, temos a Seção 2.4. Nela vimos um pouco da área geral das aplicações estáveis. Começamos definindo a topologia C^∞ de Whitney, crucial para definirmos aplicações estáveis. Seguimos analisando um pouco das singularidades das aplicações entre variedades, além de vermos um pouco sobre a imagem das aplicações. Por fim, definimos as aplicações estáveis, a fim principalmente de compararmos futuramente com a definição das aplicações de Gauss estáveis. Para esta seção nos baseamos nas referências (1, 9, 10, 25).

2.1 TEORIA DE GRAFOS

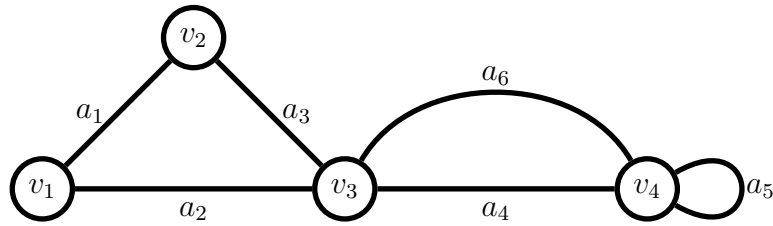
2.1.1 Teoria Básica de Grafos

Definição 2.1.1 ((28), p.6). Um **grafo (abstrato)** $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ é uma estrutura composta de dois conjuntos finitos: o conjunto não vazio $V(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ dos **vértices** de $\mathcal{G}$ e o conjunto $E(\mathcal{G}) = \{a_1, \dots, a_k\}$ das **arestas** de $\mathcal{G}$. Observemos que podemos ter $E(\mathcal{G}) = \emptyset$.

Observemos que a forma mais usual de se representar um grafo é como ilustrado na Figura 2.1, onde os vértices são representados por círculos ou pontos e as arestas são representadas por linhas.

Entretanto, a posição exata dos vértices e das arestas no desenho não nos são

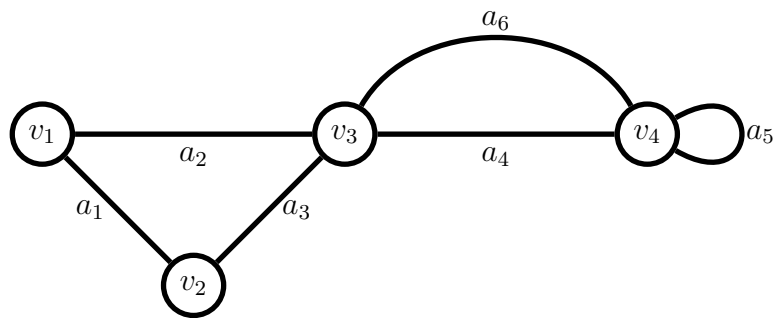
Figura 2.1 – Um exemplo de grafo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

relevantes. O que nos interessa é saber quais vértices são conectados por quais arestas. Por exemplo, na Figura 2.2, temos uma outra representação do grafo representado na Figura 2.1.

Figura 2.2 – Outra representação do grafo da Figura 2.1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Podemos encontrar o termo *realização de grafo* para se referir a essas diferentes representações de um mesmo grafo, inclusive representações no $\mathbb{R}^n$, não somente no $\mathbb{R}^2$, como estamos fazendo aqui (vide a Definição 1.3 da referência (8)). Entretanto, como na Seção 4.4 iremos falar de “realização de grafos”, mas com outro significado, vamos guardar esse termo para o uso que faremos futuramente.

Definição 2.1.2 ((28), p. 7). Diremos que uma aresta a é **incidente** sobre um vértice v quando a e v estiverem conectados.

Por exemplo, na Figura 2.1 as arestas a_1 e a_2 são incidentes sobre o vértice v_1 , já as arestas a_3, a_4, a_5 e a_6 não são incidentes sobre o vértice v_1 .

Definição 2.1.3 ((21), p. 252). Definimos o **grau** de um vértice v como sendo o número de arestas incidentes sobre v .

Por exemplo, na Figura 2.1 os vértices v_1 e v_2 tem ambos grau 2. O vértice v_3 tem grau 4, assim como o vértice v_4 , pois a aresta a_5 incide duas vezes sobre ele.

Definição 2.1.4 ((28), p. 7). Diremos que dois vértices v_1 e v_2 são **adjacentes** (ou **vizinhos**) quando existir uma aresta incidente sobre os dois.

Por exemplo, na Figura 2.1 os vértices v_1 e v_2 são adjacentes, pois a aresta a_1 incide sobre os dois. Já os vértices v_1 e v_4 não são adjacentes, pois não há aresta que incida sobre os dois simultaneamente.

Definição 2.1.5 ((28), p.7). Diremos que duas arestas a_1 e a_2 de um grafo $\mathcal{G}$ são **paralelas** quando a_1 e a_2 forem incidentes sobre os mesmos vértices.

Por exemplo, no grafo da Figura 2.1, as arestas a_4 e a_6 são paralelas, pois ambas conectam os vértices v_3 e v_4 . Chamamos a atenção para esta definição, pois boa parte da Teoria de Grafos é construída em cima dos chamados **grafos simples**, grafos que não possuem arestas paralelas.

Entretanto, na teoria que estamos construindo neste trabalho, trabalharemos com grafos que possuem arestas paralelas, os chamados **multigrafos**. Deste modo, daqui para frente, não faremos distinções entre grafos simples e multigrafos.

Em função de um grafo poder ter diferentes representações, e de a nomeação dos vértices e das arestas ser arbitrária, definimos o seguinte.

Definição 2.1.6. Uma aresta u de um grafo $\mathcal{G}$ é chamada um **laço** (ou **loop**) de $\mathcal{G}$ quando u conecta um vértice v a ele mesmo.

Por exemplo, no grafo da Figura 2.1, a aresta a_5 é um laço, pois conecta o vértice v_4 a ele mesmo.

Definição 2.1.7. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ e $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ dois grafos. Diremos que $\mathcal{H}$ é um **subgrafo** de $\mathcal{G}$, quando $V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subset E(\mathcal{G})$.

Diremos que $\mathcal{H}$ é um subgrafo **próprio** de $\mathcal{G}$ quando $V(\mathcal{H}) \neq V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \neq E(\mathcal{G})$.

Definição 2.1.8. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ e $\mathcal{G}' = (V(\mathcal{G}'), E(\mathcal{G}'))$ dois grafos. Diremos que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são grafos **isomorfos** quando existir uma bijeção $\sigma : V(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G}')$ tal que

$$v_1, v_2 \in V(\mathcal{G}) \text{ são adjacentes} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(v_1), \sigma(v_2) \in V(\mathcal{G}') \text{ são adjacentes.}$$

2.1.2 Ciclos

Definição 2.1.9 (Baseada em (28), p.123). Um **caminho** P no grafo $\mathcal{G}$ é uma sequência $P = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, \dots, v_n, a_n, v_{n+1})$ que alterna vértices e arestas de $\mathcal{G}$ e é tal que a aresta a_i da sequência incide sobre os vértices v_i e v_{i+1} . Neste caso, diremos que os vértices v_1 e v_{n+1} são os **extremos** de P .

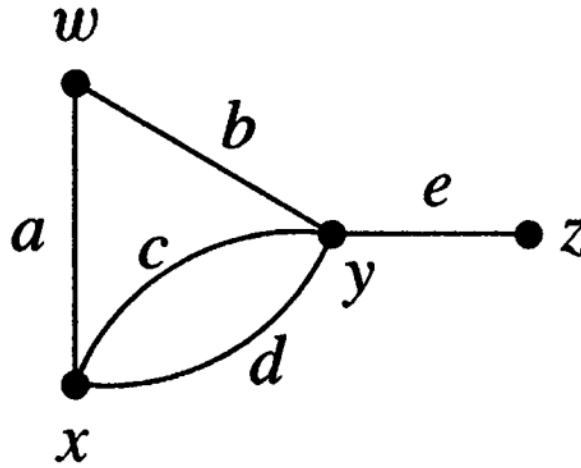
Diremos que o caminho P é **simples** sempre que todas as arestas e os vértices forem distintos, exceto, talvez, pelos vértices v_1 e v_n .

Definição 2.1.10. Seja C um caminho num grafo $\mathcal{G}$. Diremos que C é um **ciclo** em $\mathcal{G}$ quando os extremos de C forem iguais.

Diremos que o ciclo C é **simples** sempre que os vértices forem distintos.

Exemplo 2.1.11. Consideremos o grafo $\mathcal{G}$ representado na Figura 2.3. A sequência $P = (w, a, x, d, y, e, z)$ é um caminho em $\mathcal{G}$. Já o caminho $C = (x, a, w, b, y, c, x)$ é um ciclo em $\mathcal{G}$.

Figura 2.3 – Grafo com 4 vértices e 5 arestas.



Fonte: Retirado de (29), p.7.

Observemos que os extremos do ciclo C na representação (x, a, w, b, y, c, x) não nos interessam, isto é, poderíamos também escrever $C = (w, b, y, c, x, a, w) = (y, c, x, a, w, b, y)$. Além disto, a ordem do ciclo também não nos é relevante, ou seja, podemos também escrever $C = (x, c, y, b, w, a, x)$.

Definição 2.1.12 (Baseada em (28), p.). Seja $P = (v_1, a_1, \dots, a_n, v_{n+1})$ um caminho em um grafo $\mathcal{G}$. Definimos o **comprimento** de P como sendo o número n de arestas de P .

Como todo ciclo é um caminho, definimos o comprimento de um ciclo como sendo o número de arestas deste ciclo.

Desta forma, o caminho P e o ciclo C no Exemplo 2.1.11 possuem ambos comprimento 3.

Definição 2.1.13. Diremos que um grafo $\mathcal{G}$ é **conexo** quando existir um caminho ligando quaisquer dois vértices de $\mathcal{G}$. Caso contrário, diremos que $\mathcal{G}$ é **desconexo**.

2.1.3 Árvores

Definição 2.1.14. Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos.

Definição 2.1.15. Seja $\mathcal{T} = (V(\mathcal{T}), E(\mathcal{T}))$ uma árvore. Uma **subárvore** de $\mathcal{T}$ é um subgrafo $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ que é também uma árvore.

Definição 2.1.16. Seja $\mathcal{T} = (V(\mathcal{T}), E(\mathcal{T}))$ uma árvore. Diremos que um vértice $v \in V(\mathcal{T})$ é um **vértice extremo** de $\mathcal{T}$ se tiver grau 1.

Observação 2.1.17. No caso das árvores, e mais geralmente dos grafos simples, em que cada par de vértices adjacentes possui apenas uma aresta incidente sobre ambos, podemos identificar cada aresta apenas indicando os vértices sobre os quais ela incide.

Neste caso, se $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ é uma árvore (mais geralmente, um grafo simples) e se $a \in E(\mathcal{G})$ é uma aresta que incide sobre os vértices $v, w \in V(\mathcal{G})$, então denotaremos $a = vw = wv$.

Proposição 2.1.18 ((5), p.14). *Seja $\mathcal{T} = (V(\mathcal{T}), E(\mathcal{T}))$ um grafo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\mathcal{T}$ é uma árvore;
- ii) Quaisquer dois vértices de $\mathcal{T}$ estão conectados por um caminho único em $\mathcal{T}$;
- iii) $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo, isto é, $\mathcal{T}$ é conexo, mas $\mathcal{T} - a$ é desconexo para qualquer aresta $a \in E$;
- iv) $\mathcal{T}$ é maximalmente acíclico, isto é, $\mathcal{T}$ não possui ciclos, mas $\mathcal{T} + vw$ possui, para qualquer par de vértices não adjacentes $v, w \in V$.

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Seja $\mathcal{T}$ uma árvore. Suponhamos, por absurdo, que existissem dois vértices v e w em $\mathcal{T}$ que podem ser conectados por dois caminhos distintos P_1 e P_2 em $\mathcal{T}$. Ora, poderíamos então tomar o caminho C que vai de v a w por P_1 e depois retorna a v por P_2 . Dessa forma C seria um caminho fechado, pois os seus vértices extremos seriam ambos o vértice v , ou seja, C é um ciclo. Mas isso não pode acontecer, pois sendo $\mathcal{T}$ uma árvore, não possui ciclos. Assim provamos $(i) \Rightarrow (ii)$.

Por outro lado, se $\mathcal{T}$ é um grafo em que todo par de vértices podem ser ligados por um único caminho, então $\mathcal{T}$ é conexo. Além disso, $\mathcal{T}$ não admite ciclos, pois cada ciclo gera dois caminhos entre quaisquer um de seus pares de vértices distintos. Ou seja, $\mathcal{T}$ é um grafo conexo e sem ciclo, logo uma árvore. Assim provamos $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Se $\mathcal{T}$ é um grafo minimalmente conexo, então cada par de vértices está conectado por um único caminho em $\mathcal{T}$. De fato, tomemos qualquer par de vértices v

e w . Como $\mathcal{T}$ é conexo, então deve existir um caminho P ligando v a w . Retirando-se uma aresta a de P , partiremos o grafo $\mathcal{T}$ em duas componentes conexas, pois $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo, e são tais que v e w estarão em componentes conexas distintas. Ora, mas isso significa que qualquer caminho ligando v a w necessariamente precisa conter a aresta a . Repetindo o processo para todas as arestas de P , podemos concluir que P é o único caminho em $\mathcal{T}$ que liga v a w . Assim provamos $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Agora, se cada par de vértices v e w de $\mathcal{T}$ só pode ser ligado por um único caminho P , então retirando-se qualquer aresta de P , separaremos o caminho P em duas componentes conexas: a componente de v e a componente de w . Ora, mas isso também partirá o grafo G em duas componentes conexas, do contrário teríamos mais de um caminho ligando v a w . Como isso funciona para qualquer par de vértices, podemos concluir que $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo. Assim provamos $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$: Se cada par de vértices de $\mathcal{T}$ podem ser conectados por um único caminho em $\mathcal{T}$, já sabemos que isso implica em $\mathcal{T}$ ser acíclico. Tomemos v e w um par arbitrário de vértices não adjacentes em $\mathcal{T}$, por hipótese existe um único caminho P ligando v a w . Adicionando a aresta vw nós conseguimos criar um ciclo em $\mathcal{T} + vw$, basta irmos de v a w por P e retornarmos a v por vw . Como o par v e w é arbitrário, isso significa que qualquer aresta a adicionada entre vértices não adjacentes gera um ciclo em $\mathcal{T} + a$, ou seja, $\mathcal{T}$ é maximalmente acíclico. Assim provamos $(ii) \Rightarrow (iv)$.

Agora, suponhamos que $\mathcal{T}$ seja maximalmente acíclico. Tomemos qualquer par v e w de vértices não adjacentes em $\mathcal{T}$. Ao adicionarmos a aresta vw , geramos um único ciclo C contendo v e w . Retirando-se a aresta vw de C , obteremos um único caminho $P = C \setminus vw$ em $\mathcal{T}$ que conecta os vértices v e w . Como os vértices são arbitrários, podemos concluir que qualquer par de vértices está conectado por um único caminho em $\mathcal{T}$. Assim provamos $(iv) \Rightarrow (ii)$.

□

2.1.4 Grafos Bipartidos com Peso

Definição 2.1.19. Um grafo $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ é dito **bipartido** quando for possível dividir o conjunto $V(\mathcal{G})$ em dois conjuntos $X, Y \subset V$ tais que $V = X \cup Y$ e cada aresta $a \in A(\mathcal{G})$ conecta um vértice de X a um vértice de Y .

Lema 2.1.20 ((28), p.45). *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na referência (28), página 45.

□

Corolário 2.1.21. Toda árvore é um grafo bipartido.

Demonstração. Basta observarmos que se uma árvore não fosse um grafo bipartido, então deveria ter um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiria a hipótese de ser uma árvore. $\square$

Definição 2.1.22. Diremos que um grafo $\mathcal{G}$ é um grafo **com peso** (ou **ponderado**) quando atribuímos valores (pesos) a cada um de seus vértices ou de suas arestas.

2.2 CICLOS FUNDAMENTAIS E O ESPAÇO CÍCLICO

2.2.1 Árvore Geradora

Definição 2.2.1 ((28), p. 32). Seja $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo. Diremos que uma árvore $\mathcal{T} = (V(\mathcal{T}), E(\mathcal{T})) \subset \mathcal{G}$ é uma **árvore geradora** de $\mathcal{G}$ quando

$$V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{G}).$$

Ou seja, uma árvore geradora de $\mathcal{G}$ é um subgrafo de $\mathcal{G}$ que é uma árvore e que possui todos os vértices de $\mathcal{G}$.

Proposição 2.2.2. *Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo conexo com $n + 1$ vértices. Consideremos o subgrafo desconexo $\mathcal{H}_0 = (V(\mathcal{G}), \emptyset)$ composto pelos vértices de $\mathcal{G}$ e sem arestas. Vamos construir uma árvore geradora para $\mathcal{G}$.

Para isso, escolhamos arbitrariamente um vértice qualquer $v_1 \in V(\mathcal{G})$ de $\mathcal{H}_0$. Como $\mathcal{G}$ é conexo, deve existir alguma aresta $a_1 \in E(\mathcal{G})$ que incide sobre v_1 e sobre um outro vértice $v_2 \in V(\mathcal{G}) \setminus \{v_1\}$.

Consideremos o subgrafo $\mathcal{H}_1 = (V(\mathcal{G}), \{a_1\}) \subset \mathcal{G}$. Agora temos dois casos para o vértice v_2 :

- i) existe outro vértice $v_3 \neq v_1$ que é adjacente a v_2 ;
- ii) v_1 é o único vértice de $\mathcal{G}$ que é adjacente a v_2 .

No caso (i), escolhemos a_2 como sendo uma das arestas incidentes sobre v_2 e v_3 . No caso (ii), escolhemos v_3 como sendo um outro vértice, diferente de v_2 , que também é adjacente a v_1 e escolhemos a_2 como sendo uma das arestas incidentes sobre v_1 e v_3 .

Consideremos, agora, o subgrafo $\mathcal{H}_2 = (V(\mathcal{G}), \{a_1, a_2\}) \subset \mathcal{G}$. Assim como anteriormente, temos dois casos para o vértice v_3 :

- i) existe outro vértice $v_4 \notin \{v_1, v_2\}$ que é adjacente a v_3 ;

ii) v_1 é o único vértice de $\mathcal{G}$ que é adjacente a v_3 .

No caso (i), escolhemos a_3 como sendo uma das arestas incidentes sobre v_3 e v_4 . No caso (ii), escolhemos v_4 como sendo um outro vértice, diferente de v_2 e v_3 , que também é adjacente a v_1 e escolhemos a_3 como sendo uma das arestas incidentes sobre v_3 e v_4 .

Percebamos que, no grafo $\mathcal{H}_2$, repetimos o mesmo algoritmo feito no grafo $\mathcal{H}_1$. De fato, enquanto houverem vértices isolados no subgrafo $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{G}$, podemos reproduzir o algoritmo e obter um novo subgrafo $\mathcal{H}_{i+1} \subset \mathcal{G}$.

Seguindo esse algoritmo, obteremos um subgrafo $\mathcal{H}_n = (V(\mathcal{G}), \{a_1, \dots, a_n\}) \subset \mathcal{G}$ que é um grafo conexo com $n + 1$ vértices, com n arestas e sem ciclos, e é tal que se adicionarmos qualquer outra aresta $a_{n+1} \in E(\mathcal{G}) \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, o subgrafo $\mathcal{H}_{n+1}$ deixa de ser uma árvore.

Ou seja, $\mathcal{H}_n$ assim construído é um subgrafo de $\mathcal{G}$ que é uma árvore com

$$V(\mathcal{H}_n) = V(\mathcal{G}),$$

isto é, $\mathcal{H}_n$ é uma árvore geradora de $\mathcal{G}$.

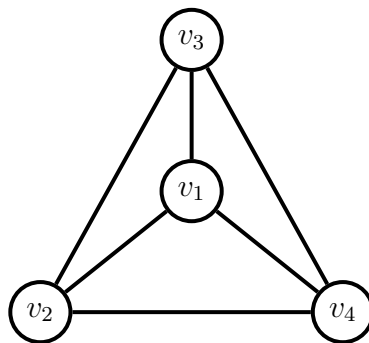
□

Percebamos que o algoritmo usado na demonstração da Proposição 2.2.2 não necessariamente gera uma única árvore geradora para o grafo $\mathcal{G}$, nem mesmo levando em consideração isomorfismos. De fato, a ordem de escolha dos vértices pode gerar árvores diferentes. Vejamos um desses casos no Exemplo 2.2.3

Exemplo 2.2.3. Dizemos que um grafo simples é **completo** quando os seus vértices forem dois a dois adjacentes. Denotaremos o grafo completo de n vértices por K_n .

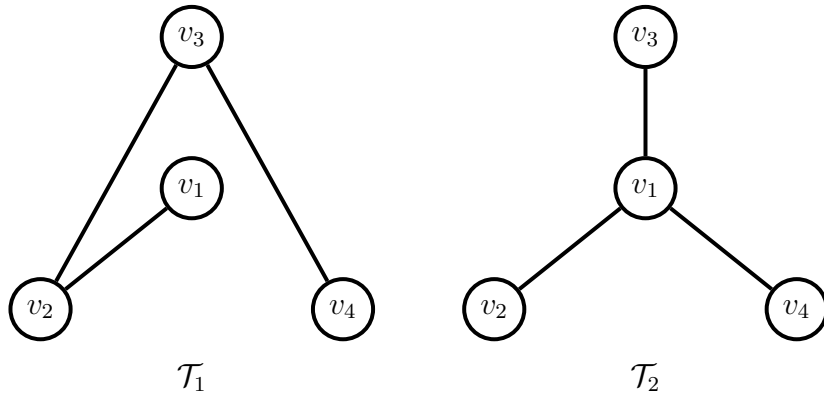
Tomemos $\mathcal{G}$ como sendo o grafo K_4 , representado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Grafo K_4 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Percebamos que, a menos de isomorfismos, o grafo K_4 possui duas árvores geradoras, no caso as árvores $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ representadas na Figura 2.5. De fato, se qualquer nova aresta

Figura 2.5 – Árvore geradoras de K_4 .

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

de K_4 for adicionado a um dos grafos $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, criariamos um ciclo e não mais teríamos uma árvore.

Entretanto, alguns grafos de fato possuem uma única árvore geradora.

Corolário 2.2.4. Se $\mathcal{G}$ for em si uma árvore, então $\mathcal{G}$ possui uma única árvore geradora. Neste caso, $\mathcal{G}$ é a sua própria árvore geradora.

2.2.2 Espaço Cíclico

Definição 2.2.5. (Adaptado de (5), p.23) Seja $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo. Definimos o **espaço de arestas** de $\mathcal{G}$ como sendo o conjunto $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ de todas as aplicações $\sigma : E \rightarrow \mathbb{F}_2$, onde $\mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$ é o corpo finito com dois elementos.

Proposição 2.2.6. Seja $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo. O conjunto $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ é um espaço vetorial (vide (12)) sobre o corpo $\mathbb{F}_2$.

Demonstração. Ora, devemos nos perguntar o que exatamente é o conjunto $\mathbb{E}(\mathcal{G})$. Um elemento $\sigma \in \mathbb{E}(\mathcal{G})$ é uma aplicação que associa a cada aresta $a \in E$ um valor 0 ou 1. Ora, fixado $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, podemos representar σ apenas olhando pra imagem de a_i . Por exemplo, suponhamos que σ seja tal que $\sigma(a_1) = 1$, mas $\sigma(a_i) = 0$, para $i = 2, \dots, n$, então teríamos

$$\sigma := (1, 0, \dots, 0).$$

Desta forma vemos que cada aplicação $\sigma \in \mathbb{E}(\mathcal{G})$ pode ser associada a um único elemento $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n$, e como $\sigma_1 = \sigma_2$ se e só se coincidem em todos os elementos, essa associação induz uma bijeção $\varphi : \mathbb{E}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ entre $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ e $\mathbb{F}_2^n$.

Dessa forma, dados aplicações $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{E}(\mathcal{G})$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{F}_2$, podemos definir

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 &= \varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)) \\ \alpha \cdot \sigma &= \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma)) \end{cases},$$

e teremos φ sendo um isomorfismo. Como $\mathbb{F}_2^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_2$, podemos concluir que $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ também o é.

□

Uma outra forma de olharmos para o espaço $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ é como sendo o conjunto das partes de E , isto é, $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ é a coleção de todos os subconjuntos de E . Desta forma, olhar pra o elemento $\sigma = (1, 0, \dots, 0)$ que é diferente de zero apenas na primeira entrada seria olhar pro subconjunto $\{a_1\} \subset E$. Assim, teremos:

- i) O conjunto $\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ é a base canônica de $\mathbb{E}(\mathcal{G})$;
- ii) A dimensão de $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ é o número $\mu(\mathcal{G})$ de arestas de $\mathcal{G}$;
- iii) A soma de vetores é a diferença simétrica ((7), p.32) definida como

$$\sigma_1 + \sigma_2 := (\sigma_1 \setminus \sigma_2) \cup (\sigma_2 \setminus \sigma_1);$$

- iv) O vetor nulo de $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ é o subconjunto $\emptyset$;
- v) Cada vetor é o seu próprio simétrico;

Definição 2.2.7. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo e $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ seu espaço de arestas. Definimos o **espaço cíclico** de $\mathcal{G}$ como sendo o subespaço vetorial $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ de $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ gerado pelos ciclos de $\mathcal{G}$, ou mais precisamente, pelo conjunto de arestas dos ciclos de $\mathcal{G}$.

Proposição 2.2.8. Sejam $\mathcal{G}$ um grafo e $\mathcal{H}$ um subgrafo de $\mathcal{G}$. Então

- i) $\mathbb{E}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{E}(\mathcal{G})$;
- ii) $\mathbb{C}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{C}(\mathcal{G})$.

Demonstração. Basta observarmos que todo conjunto composto por arestas de $\mathcal{H}$ é também um conjunto composto por arestas de $\mathcal{G}$, logo $\mathbb{E}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{E}(\mathcal{G})$. Seguindo o mesmo raciocínio mostramos que $\mathbb{C}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{C}(\mathcal{G})$.

□

Corolário 2.2.9. Sejam $\mathcal{G}$ um grafo e $\mathcal{H}$ um subgrafo de $\mathcal{G}$. Então

$$\mathbb{C}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}(\mathcal{G}) \cap \mathbb{E}(\mathcal{H}).$$

Demonstração. Basta observarmos que os ciclos de $\mathcal{H}$ são ciclos de $\mathcal{G}$ cujas arestas estão em $\mathbb{E}(\mathcal{H})$. Daí teremos que $\mathbb{C}(\mathcal{H})$ é gerado pelos ciclos de $\mathcal{G}$ que estão simultaneamente em $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ e em $\mathbb{E}(\mathcal{H})$, ou seja,

$$\mathbb{C}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}(\mathcal{G}) \cap \mathbb{E}(\mathcal{H}).$$

□

2.2.3 Ciclos Fundamentais

Definição 2.2.10. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo e $\mathcal{T} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{T}))$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$. Chamaremos de **cordas (da árvore $\mathcal{T}$)** aos elementos $c \in (E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T}))$, quando existirem.

Definição 2.2.11 ((5), p. 26.). Dados um grafo $\mathcal{G}$ e $\mathcal{T}$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$, chamamos de **ciclo fundamental** da corda c com relação à árvore $\mathcal{T}$ ao único ciclo gerado em $\mathcal{T} + c$, quando existir.

Proposição 2.2.12. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo e $\mathcal{T} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{T}))$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$. Sejam $\{c_1, \dots, c_k\} = E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T})$ as cordas de $\mathcal{T}$. Seja C_{c_i} o ciclo fundamental da corda c_i , com $i = 1, \dots, k$. Então o conjunto $\{C_{c_1}, \dots, C_{c_k}\}$ dos ciclos fundamentais é um conjunto LI em $\mathbb{C}(\mathcal{G})$.

Demonstração. Reescrevendo o conjunto $E(\mathcal{G})$ como $\{c_1, \dots, c_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$, onde $\{a_{k+1}, \dots, a_n\} := E(\mathcal{T})$, teremos que os ciclos fundamentais de cada c_i serão escritos, em termos de suas coordenadas em $\mathbb{E}(\mathcal{G})$, como

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_{c_1} & = & (1, 0, \dots, 0, x_{(k+1,1)}, \dots, x_{(n,1)}) \\ C_{c_2} & = & (0, 1, \dots, 0, x_{(k+1,2)}, \dots, x_{(n,2)}) \\ & \vdots & \\ C_{c_k} & = & (0, 0, \dots, 1, x_{(k+1,k)}, \dots, x_{(n,k)}) \end{array} \right.,$$

onde as coordenadas $x_{(j,i)}$, com $i = 1, \dots, k$ e $j = k+1, \dots, n$, assumem seus valores em $\mathbb{F}_2$. Pois como as cordas c_i não são arestas de $\mathcal{T}$, e cada ciclo C_{c_i} tem todas as suas arestas em $\mathcal{T}$, exceto pela corda c_i , podemos concluir que de fato a corda c_i aparecerá somente no ciclo C_{c_i} . Logo C_{c_i} será o único ciclo fundamental de $\mathcal{T}$ que tem a i -ésima coordenada diferente de 0.

Ora, mas então sabemos que o ciclo fundamental C_{c_i} deve ser linearmente independente dos outros ciclos fundamentais, do contrário conseguiríamos escrever, ao fazermos um combinação linear dos ciclos em $\mathbb{C}(\mathcal{G})$,

$$1 \cdot \{c_i\} = 0 \cdot \{c_i\}$$

o que implicaria em $1 = 0$ em $\mathbb{F}_2$, o que é um absurdo.

Assim, concluímos que o conjunto $\{C_{c_1}, \dots, C_{c_k}\}$ dos ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$ é um conjunto LI em $\mathbb{C}(\mathcal{G})$.

□

Corolário 2.2.13. Sejam $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo e $\mathcal{T} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{T}))$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$. O subespaço vetorial $F \subset \mathbb{C}(\mathcal{G})$ gerado pelos ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$ tem dimensão

$$\dim F = \#E(\mathcal{G}) - \#E(\mathcal{T}),$$

onde $\#A$ denota a cardinalidade do conjunto A .

Proposição 2.2.14. Sejam $\mathcal{G}$ um grafo e $\mathcal{T}$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$. Seja F o subespaço de $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ gerado pelos ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$. Então

$$\dim \mathbb{C}(\mathcal{G}) = \dim F.$$

Ou seja, os ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$ formam uma base para o espaço cíclico de $\mathcal{G}$.

Demonstração (Adaptada de (5), p. 26). Vamos mostrar que dado qualquer elemento $C \in \mathbb{C}(\mathcal{G})$, então podemos escrever C como combinação linear dos ciclos fundamentais $\{C_{c_1}, \dots, C_{c_k}\}$ de $\mathcal{T}$.

Seja $C \in \mathbb{C}(\mathcal{G})$. Tomemos o vetor

$$D := C + \sum_{e \in C \setminus \mathcal{T}} C_e.$$

Observemos que D não possui elementos fora das arestas de $\mathcal{T}$, isto é, D não possui nenhuma corda de $\mathcal{T}$. De fato, como cada corda e aparece num único ciclo fundamental C_e , ao tomarmos $e \in C \setminus \mathcal{T}$, estamos escolhendo as cordas de $\mathcal{T}$ que pertencem a C . Ao fazermos a soma $D_e := C + C_e$, estamos zerando a coordenada de C referente à corda e . Fazendo essa soma para todas as cordas $\{e_1, \dots, e_l\} := C \setminus \mathcal{T}$, zeramos todas as coordenadas de C referentes às cordas e_i , $i = 1, \dots, l$. Ou seja, D só possui arestas de $\mathcal{T}$.

Ora, mas então temos $D \subset E(\mathcal{T})$, o que nos dá $D \in \mathbb{E}(\mathcal{T})$. Pelo Corolário 2.2.9, podemos concluir que

$$D \in \mathcal{C}(\mathcal{T}) = \mathbb{C}(\mathcal{G}) \cap \mathbb{E}(\mathcal{T}).$$

Ora, mas $\mathcal{T}$ não possui ciclos, pois é uma árvore, logo o seu espaço cíclico $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ é o subespaço nulo de $\mathbb{F}_2^n$, onde n é a dimensão de $\mathbb{E}(\mathcal{G})$. Isso implica que $D \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ só pode ser o vetor nulo $\emptyset$. Ou seja, temos

$$\emptyset = D = C + \sum_{e \in C \setminus \mathcal{T}} C_e \Rightarrow C = \sum_{e \in C \setminus \mathcal{T}} C_e.$$

Dessa forma concluímos que dado qualquer elemento $C \in \mathbb{C}(\mathcal{G})$, podemos escrever C como combinação linear de ciclos fundamentais da árvore geradora $\mathcal{T}$. Ou seja, o espaço $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ é o espaço F gerado pelos ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$, daí temos que os ciclos fundamentais de $\mathcal{T}$ formam uma base pra $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ e

$$\dim \mathbb{C}(\mathcal{G}) = \dim F.$$

□

Corolário 2.2.15. Seja $\mathcal{G}$ um grafo. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ árvores geradoras de $\mathcal{G}$. Então $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ possuem o mesmo número de ciclos fundamentais.

Demonstração. Basta observarmos que a Proposição 2.2.14 independe de qual árvore geradora estamos considerando. Ou seja, dadas $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas árvores geradoras de $\mathcal{G}$, e denotando por F_1 e F_2 os espaços gerados pelos seus respectivos ciclos fundamentais, temos

$$F_1 = \mathbb{C}(\mathcal{G}) = F_2 \Rightarrow \dim F_1 = \dim F_2.$$

Como o conjunto dos ciclos fundamentais de uma árvore geradora é sempre LI em $\mathbb{C}(\mathcal{G})$, podemos concluir que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ possuem o mesmo número de ciclos fundamentais.

□

Corolário 2.2.16. Seja $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ um grafo com $m = \#E(\mathcal{G})$ arestas e $n = V(\mathcal{G})$ vértices. Então

$$\dim \mathbb{C}(\mathcal{G}) = m - n + 1.$$

Demonstração. Observemos que se $\mathcal{G}$ tem n vértices, então suas árvores geradoras também possuem n vértices. Logo, todas as suas árvores geradoras possuem $n - 1$ arestas. Como $\dim \mathbb{C}(\mathcal{G})$ é igual ao número de cordas de uma árvore geradora, que por sua vez é igual à diferença entre o número de arestas de $\mathcal{G}$ e o número de arestas dessa árvore, temos

$$\dim \mathbb{C}(\mathcal{G}) = m - (n - 1) = m - n + 1$$

□

Definição 2.2.17 ((5), p. 24). Seja $\mathcal{G}$ um grafo. Chamaremos de **número ciclomático** (ou também **primeiro número de Betti**, vide (17)) de $\mathcal{G}$ ao número

$$\beta_1(\mathcal{G}) := \dim \mathbb{C}(\mathcal{G})$$

Isto é, $\beta_1(\mathcal{G})$ é o número de arestas que podem ser retiradas de $\mathcal{G}$ a fim de se obter uma de suas árvores geradoras, ou equivalentemente, β_1 é o número de ciclos fundamentais de $\mathcal{G}$.

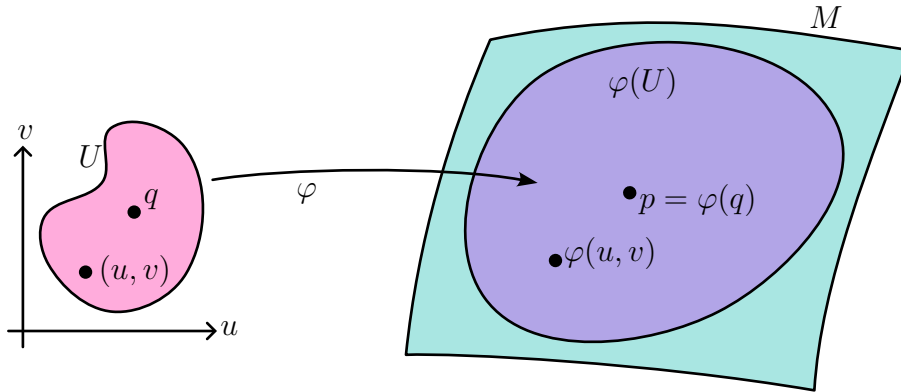
2.3 SUPERFÍCIES

2.3.1 Superfícies Fechadas

Definição 2.3.1 ((10), p.3). Diremos que um conjunto M é uma **n -variedade diferenciável** (ou uma **variedade diferenciável n -dimensional**) quando para cada ponto $p \in M$, existir um aberto $V \subset M$ e um difeomorfismo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$, definido sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso, diremos que o inteiro n é a **dimensão** de M .

Nas condições da Definição 2.3.1, a aplicação φ será chamada uma **parametrização (local)** de M (em p).

Figura 2.6 – Parametrização de uma 2-variedade M .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Definição 2.3.2 ((10), p. 9). Seja M uma n -variedade e $p \in M$ um ponto de M . Chamamos de **espaço tangente a M em p** , e denotaremos por $T_p M$, à imagem da diferencial $d\varphi_q$, onde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização de M em p e $\varphi(q) = p$. Isto é,

$$T_p M = d\varphi_q(\mathbb{R}^n).$$

Observemos que na Definição 2.3.2, a definição do espaço tangente independe da parametrização. Os elementos $v \in T_p M$ serão chamados de **vetores tangentes** a M em p .

Definição 2.3.3 ((10), p. 50). Seja M uma n -variedade. Definimos o **fibrado tangente** de M como sendo o conjunto

$$TM := \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n; v \in T_p M\}.$$

Intuitivamente, o fibrado tangente é a união da variedade M com os espaços tangentes em cada um de seus pontos.

Definição 2.3.4 ((10), p.57). Diremos que M é uma n -variedade **com bordo** quando, para cada ponto $p \in M$, existir um aberto $V \subset M$ e uma aplicação $\varphi : U \subset H^n \rightarrow V$, definida sobre um aberto $U \subset H^n$, que seja um difeomorfismo.

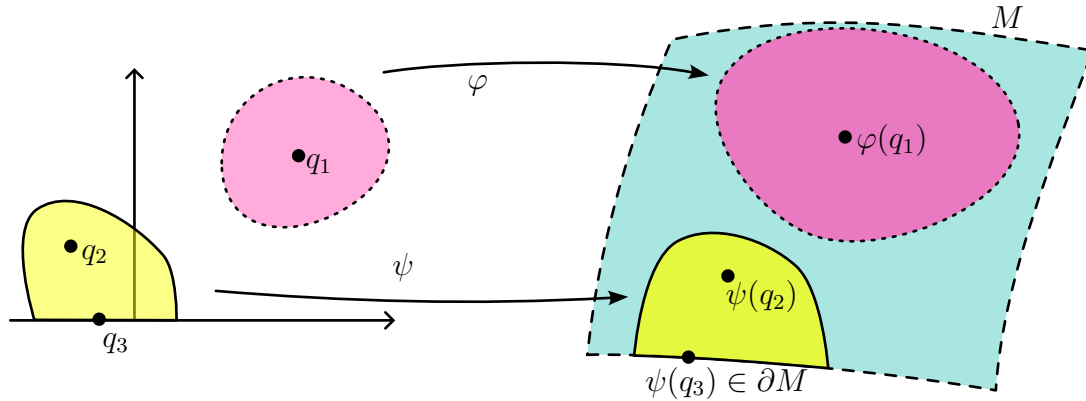
Em outras palavras, M é uma variedade com bordo quando, na Definição 2.3.1, trocarmos $\mathbb{R}^n$ por $H^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$.

Definição 2.3.5. Nas condições da Definição 2.3.4, chamaremos de **bordo** da variedade M ao conjunto ∂M definido por

$$\partial M := \{p \in M; p = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \text{ para alguma parametrização } \varphi \text{ e algum } (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in H^n\},$$

como ilustrado na Figura 2.7. Os pontos $p \in \partial M$ são chamados **pontos de bordo** de M .

Figura 2.7 – Parametrização de uma 2-variedade com bordo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observemos que, na realidade, toda superfície satisfaz à definição de uma superfície com bordo. Entretanto, para algumas superfícies, como é o caso de esferas, teremos $\partial M = \emptyset$. Neste caso, temos a seguinte definição

Definição 2.3.6. Diremos que uma variedade M é uma **variedade sem bordo** se, e somente se, $\partial M = \emptyset$. Desta forma, salvaremos o termo **variedade com bordo** para os casos em que $\partial M \neq \emptyset$.

Definição 2.3.7. Diremos que uma n -variedade M é **compacta** quando M for um espaço topológico compacto. Ou seja, quando dada qualquer coleção $\{U_\lambda\}$ de abertos $U_\lambda \subset M$ tais que $M = \bigcup U_\lambda$, for sempre possível obter uma subcoleção finita $\{U_1, \dots, U_k\}$ tal que $M = \bigcup_{\lambda=1}^k U_\lambda$.

Definição 2.3.8. Diremos que uma variedade M é **fechada** quando M for uma variedade compacta e sem bordo.

Definição 2.3.9. Sejam M_1 e M_2 duas n -variedades fechadas. Definimos a **soma conexa** de M_1 e M_2 , denotada por $M = M_1 \# M_2$, como sendo a variedade obtida pelo seguinte processo:

1. Retiramos um disco aberto de M_1 e um disco aberto de M_2 ;
2. Colamos os bordos gerados retirando-se os discos, de modo a unirmos M_1 e M_2 ;

Definição 2.3.10. Sejam M e N duas variedades e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é

1. uma **imersão**, quando $\dim M \leq \dim N$ e df_p é injetora em cada $p \in M$;
2. uma **submersão**, quando $\dim M \geq \dim N$ e df_p é sobrejetora em cada $p \in M$;
3. um **mergulho**, quando f é uma imersão e um homeomorfismo entre M e $f(M)$, isto é, $f : M \rightarrow f(M)$ é uma bijeção contínua e sua inversa $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ é também contínua.

Embora variedades sejam um conceito extremamente interessante, neste trabalho iremos, em geral, apenas trabalhar com uma classe especial de variedades: as superfícies, que definimos a seguir.

Definição 2.3.11. Uma **superfície (regular)** é uma 2-variedade. Isto é, uma superfície é um conjunto localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

No caso de M ser uma superfície, chamaremos o espaço tangente $T_p M$ de **plano tangente** a M em p .

Definição 2.3.12. Diremos que uma superfície M é uma **superfície fechada** quando for uma variedade fechada.

2.3.2 Complexos

Definição 2.3.13 ((14), p. 56.). Uma n -**célula** ν é um conjunto cujo interior é homeomorfo ao disco n -dimensional $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ com a propriedade adicional de que o seu bordo deve ser composto por um número finito de células de dimensão menor, chamadas de faces de ν . Escreveremos $\tau < \nu$ para denotar que τ é uma face de ν .

Exemplo 2.3.14 ((14), p. 56.). A seguir, apresentamos alguns exemplos de n -células.

1. Uma 0-célula é um ponto A ;

Figura 2.8 – 0–, 1–, e 2–células



Fonte: Retirado de (14), p. 56.

2. Uma 1–célula é um segmento de reta AB , onde A e B são as faces 0–dimensionais;
3. Uma 2–célula é um polígono;
4. Uma 3–célula é um poliedro.

Definição 2.3.15 ((14), p. 57.). Um **complexo** K é uma união finita de células

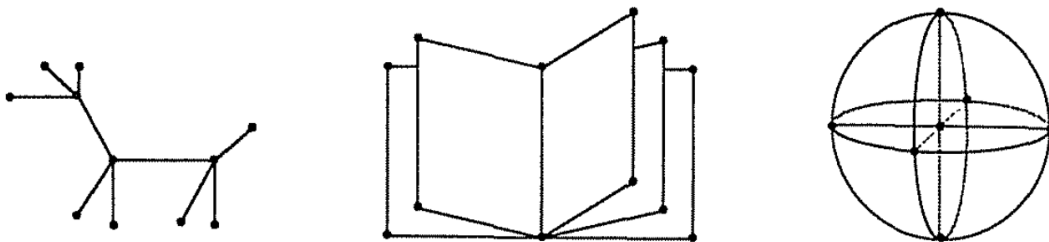
$$K := \bigcup \{\nu ; \nu \text{ é uma célula}\},$$

tal que

1. se ν é uma célula de K , então todas as suas faces são células de K ;
2. se ν e τ são células de K , então $\text{int}(\nu) \cap \text{int}(\tau) = \emptyset$.

A dimensão n de K é a maior dimensão de suas células. Neste caso, diremos que K é um n –**complexo** ou também um **complexo** n –**dimensional**

Figura 2.9 – Exemplos de complexos



Fonte: Retirado de (14), p. 57.

Definição 2.3.16 ((14), p. 58.). Seja K um complexo. Chamaremos de **espaço adjacente ao complexo** K ao conjunto

$$|K| := \{x; x \in \nu, \nu \text{ é uma célula de } K\}.$$

Isto é, $|K|$ é o conjunto de todos os pontos que pertencem a uma das células de K .

Definição 2.3.17 ((14), p. 97.). Seja K um complexo k -dimensional. Seja $a_n := \#\{\nu; \nu \text{ é uma } n\text{-célula de } K\}$. Definimos a **característica de Euler** do complexo K como sendo o número

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^k (-1)^n a_n.$$

Proposição 2.3.18. *Seja $\mathcal{G}$ um grafo, então*

$$\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G}).$$

Demonstração. Pela Definição 2.2.17, temos $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 + m - n$, onde m é o número de arestas de $\mathcal{G}$ e n o número de vértices. Como todo grafo é um 1-complexo, temos pela Definição 2.3.17 que $\chi(\mathcal{G}) = n - m$. Donde obtemos

$$\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G}).$$

□

2.3.3 Característica de Euler

Definição 2.3.19 ((14), p. 73). Seja M uma superfície. Diremos que um 2-complexo K é uma **triangulação** da superfície M quando

1. $M = |K|$;
2. Todas as 2-células de K forem homeomorfas a triângulos, isto é, possuem apenas três arestas e três vértices;
3. Dadas T_1 e T_2 2-células de K , então acontece somente um dos casos abaixo:
 - i) T_1 e T_2 possuem uma única aresta em comum;
 - ii) T_1 e T_2 possuem um único vértice em comum;
 - iii) T_1 e T_2 são disjuntas.

Definição 2.3.20. Seja M uma superfície. Seja K uma triangulação de M . Definimos a **característica de Euler** da superfície M como sendo a característica de Euler de K . Isto é, se F é o número de 2-células de K , A o número de arestas e V o número de vértices, então

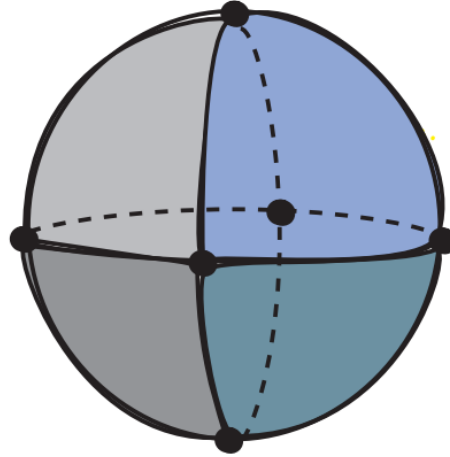
$$\chi(M) := \chi(K) = F - A + V.$$

Lema 2.3.21 ((14), p. 108.). *Seja M^* uma superfície compacta com $k \geq 0$ componentes de bordo. Seja M a superfície sem bordo obtida a partir de M^* fazendo-se a soma conexas de um disco em cada uma de suas componentes de bordo. Então*

$$\chi(M^*) = \chi(M) - k.$$

Demonstração. Vide o comentário após a Definição 5.16 na referência (14). □

Figura 2.10 – Um exemplo de triangulação da esfera.



Fonte: Retirado de (26), p. 7.

2.3.4 Orientação

Definição 2.3.22 ((4), p. 36.). Seja E um espaço vetorial n -dimensional, $k \geq 1$. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_k\}$ duas bases ordenadas de E . Diremos que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ definem a mesma **orientação** em E quando

$$\det P > 0,$$

onde P denota a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$.

Observemos que a relação $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \Leftrightarrow \text{definem a mesma orientação}$, é uma relação de equivalência no conjunto B_E de todas as bases ordenadas de E . Além disso, dado que fixado uma base $\mathcal{B}$, o determinante da matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para uma base $\mathcal{B}'$ qualquer só pode ser positivo ou negativo. Desta forma a relação $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ estabelece apenas duas classes de equivalência em B_E , chamadas as **orientações de E** .

Definição 2.3.23 ((10), p. 95). Seja E um espaço vetorial n -dimensional, $k \geq 1$. Definimos a **orientação positiva** (ou **canônica**) de E como sendo a orientação da base canônica.

Isto é, uma base $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial E orienta E positivamente quando o determinante da matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base canônica for positivo.

Definição 2.3.24 ((10), p. 96.). Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais k -dimensionais, $k \geq 1$, orientados. Diremos que um isomorfismo $T : E_1 \rightarrow E_2$ **preserva orientação** sempre que $\det T > 0$. Do contrário diremos que T **inverte orientação**.

Definição 2.3.25 ((10), p. 96.). Diremos que uma variedade diferenciável n -dimensional M é **orientável** quando for possível orientar todos os espaços tangentes $T_x M$ a M de tal

modo que, dado qualquer ponto $p \in M$, existe uma parametrização $\varphi : U \rightarrow M$ de M em p tal que, para todo $q \in U$,

$$d\varphi_q : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\varphi(q)}M \quad \text{preserva orientação,}$$

onde consideraremos $\mathbb{R}^k$ sempre na orientação positiva. Caso contrário diremos que M é **não orientável**.

Proposição 2.3.26 ((10), p. 97.). *Seja M uma variedade orientável conexa. Então M admite exatamente duas orientações.*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser verificada na referência (10), página 97. $\square$

Lema 2.3.27. *Seja M uma superfície fechada e orientável. Se $M = M_1 \cup M_2$, onde M_1 e M_2 são ambas superfícies compactas e conexas então*

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

2.3.5 Gênero

Definição 2.3.28 ((14), p. 107). Seja M uma superfície fechada, definimos como **gênero** de M ao número

$$g(M) := \begin{cases} 1 - \frac{\chi(M)}{2}, & \text{se } M \text{ for orientável} \\ 2 - \chi(M), & \text{se } M \text{ for não orientável} \end{cases}.$$

Quando não houver dúvidas sobre qual superfície estamos falando, diremos apenas g ao invés de $g(M)$.

Proposição 2.3.29. *A característica de Euler, e consequentemente o gênero, de uma superfície fechada e orientável é um invariante topológico, isto é, duas superfícies homeomorfas possuem a mesma característica de Euler.*

Lema 2.3.30 (Classificação de Superfícies Orientáveis ((14), p. 79)). *Seja M uma superfície fechada e orientável. Então M é difeomorfa a $\mathbb{S}^2$, caso o gênero de M seja 0, ou à soma conexa de n toros, caso o gênero de M seja n .*

Demonstração. A demonstração do lema pode ser encontrada na referência (14), página 79. $\square$

Uma consequência do Lema 2.3.30, é que o gênero de uma superfície M mede o número de alças, ou equivalentemente, o número de “buracos” que M possui. Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^2$ não possui buracos, por isso $g(\mathbb{S}^2) = 0$. Já o toro $\mathbb{T}^2$ possui 1 buraco, logo $g(\mathbb{T}^2) = 1$, enquanto o n -toro $n\mathbb{T}^2$ possui n buracos, logo $g(n\mathbb{T}^2) = n$.

Definição 2.3.31 ((14), p. 108). Seja M^* uma superfície compacta e com bordo. Seja M a superfície sem bordo obtida a partir de M^* fazendo a soma conexa de um disco em cada uma de suas componentes de bordo. Então, definimos o gênero de M^* como

$$g(M^*) = g(M).$$

Como consequência da Definição 2.3.31 e do Lema 2.3.21, temos que se M^* é uma superfície com $k \geq 0$ componentes de bordo, então

$$g(M^*) = 1 - \frac{\chi(M^*) + k}{2} = \frac{2 - \chi(M) - k}{2}.$$

2.3.6 Aplicação de Gauss

Observemos que dada uma superfície M imersa em $\mathbb{R}^3$, em cada ponto $p \in M$, temos dois vetores $v_1, v_2 \in T_p M$ que formam uma base para $T_p M$. Dessa forma, fica definida, de maneira única, uma direção $N_p := \{n \in \mathbb{R}^3; n \perp T_p M\}$, chamada a **direção normal** a M em p . Neste caso, os vetores $n \in N_p$ serão ditos **vetores normais** a M em p .

Desse modo podemos definir aplicações $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa cada ponto $p \in M$ a um vetor $N(p) \in N_p$. Mais ainda, podemos nos restringir somente a considerar vetores normais a M em p que sejam unitários.

Proposição 2.3.32 ((6), p. 124.). *Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existir uma aplicação diferenciável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Vide a demonstração da Proposição 1 da Seção 2.6 da referência (6). $\square$

Definição 2.3.33 ((6), p. 161.). Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável. Definimos a **aplicação de Gauss** de M como sendo a aplicação $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ da Proposição 2.3.32.

Definição 2.3.34 ((6), p. 172.). Seja M uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{N}$ sua aplicação de Gauss. Podemos definir duas funções $H, K : M \rightarrow \mathbb{R}$ em M da seguinte forma:

$$\begin{cases} H(p) &= -\frac{\text{tr}(d\mathcal{N}_p)}{2}, \\ K(p) &= \det(d\mathcal{N}_p) \end{cases},$$

onde $\text{tr}(d\mathcal{N}_p)$ denota o traço de $d\mathcal{N}_p$. A função H é chamada de **curvatura média** de M e a função K é chamada de **curvatura Gaussiana** de M .

Observemos que, como $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ toma sua imagem na esfera unitária de $\mathbb{R}^3$, então pra cada $p \in M$, temos $\mathcal{N}(p) \perp T_p M$, mas também $\mathcal{N}(p) \perp T_{\mathcal{N}(p)} \mathbb{S}^2$. Isso significa que $T_p M$ e $T_{\mathcal{N}(p)} \mathbb{S}^2$ são o mesmo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Dessa forma, a diferencial $d\mathcal{N}_p : T_p M \rightarrow T_{\mathcal{N}(p)} \mathbb{S}^2$ é um operador linear em $T_p M = T_{\mathcal{N}(p)} \mathbb{S}^2$. Então faz sentido nos

questionarmos sobre a existência de autovetores, e consequentemente autovalores, para $d\mathcal{N}_p$.

Definição 2.3.35 ((6), p. 144.). Seja M uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a sua aplicação de Gauss. Chamaremos de **curvaturas principais** em $p \in M$ aos inversos aditivos $k_1 \geq k_2$ dos autovalores de $d\mathcal{N}_p : T_p M \rightarrow T_{\mathcal{N}(p)} \mathbb{S}^2$.

Definição 2.3.36 ((6), p. 172.). Seja M uma superfície fechada e orientada mergulhada no $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{N}$ uma de suas aplicações de Gauss. Então podemos classificar os pontos de M da seguinte forma:

1. diremos que $p \in M$ é um ponto **planar** quando $H(p) = 0$ e $K(p) = 0$;
2. diremos que $p \in M$ é um ponto **elíptico** quando $K(p) > 0$;
3. diremos que $p \in M$ é um ponto **parabólico** quando $H(p) \neq 0$ e $K(p) = 0$;
4. diremos que $p \in M$ é um ponto **hiperbólico** quando $K(p) < 0$;

Definição 2.3.37 ((6), p. 173.). Diremos que um ponto $p \in M$ é um **ponto umbílico** quando $k_1(p) = k_2(p)$.

2.3.7 Superfícies com Curvas

Definição 2.3.38 ((16), p. 7.). Seja M uma superfície fechada. Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

obtido pela união de n curvas regulares $\gamma_k \subset M$ que são simples, fechadas e disjuntas. Chamaremos o par $(M, \mathcal{C})$ de uma **superfície com curvas**.

Definição 2.3.39 ((16), p. 7.). Diremos que duas superfícies com curvas $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são **equivalentes** quando existir um difeomorfismo de M em M' que leva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$.

2.4 APLICAÇÕES ESTÁVEIS

2.4.1 k-jatos

Definição 2.4.1 ((9), p. 37). Sejam M e N duas variedades. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações diferenciáveis tais que $f(p) = q = g(p)$. Diremos que

- f e g fazem **contato de primeira ordem** em p se

$$df_p = dg_p,$$

enquanto transformações lineares de $T_p M \rightarrow T_p N$;

- f e g fazem **contato de k -ésima ordem** em p (com k inteiro positivo) quando as aplicações $df, dg : TM \rightarrow TN$ fazem contato de $(k - 1)$ -ésima ordem em todo ponto de $T_p M$.

Proposição 2.4.2. *A relação em $C^\infty(M, N)$ definida por*

$$f \stackrel{k}{\sim}_p g \Leftrightarrow f \text{ e } g \text{ tem contato de } k\text{-ésima ordem em } p$$

é uma relação de equivalência em $C^\infty(M, N)$.

Demonstração. Sejam $f, g, h \in C^\infty(M, N)$.

1. Como df_p é sempre igual a df_p , temos $f \stackrel{k}{\sim}_p f$ em p ;
2. Suponhamos $f \stackrel{k}{\sim}_p g$. Então,

$$df_p = dg_p \Leftrightarrow dg_p = df_p.$$

Logo também concluímos $g \stackrel{k}{\sim}_p f$;

3. Suponhamos $f \stackrel{k}{\sim}_p g$ e $g \stackrel{k}{\sim}_p h$. Então,

$$df_p \stackrel{k}{\sim}_p dg_p \stackrel{k}{\sim}_p dh_p.$$

Daí concluímos $df_p = dh_p$ e temos $f \stackrel{k}{\sim}_p h$.

□

Definição 2.4.3 ((9), p. 37). Consideremos $C^\infty(M, N)$ com a relação de equivalência $\stackrel{k}{\sim}_p$ definida na Proposição 2.4.2. Seja $J^k(M, N)_{p,q}$ o conjunto das classes de equivalência sobre $\stackrel{k}{\sim}_p$ das aplicações $f : M \rightarrow N$, com $f(p) = q$. Definimos um **k -jato (de aplicações)** de M em N como sendo um elemento σ do conjunto

$$J^k(M, N) := \bigcup_{(p,q) \in M \times N} J^k(M, N)_{p,q},$$

onde a união acima é disjunta.

Definição 2.4.4. Seja $f \in C^\infty(M, N)$. Chamaremos de **k -jato de f** à aplicação

$$\begin{aligned} j^k f &: M \rightarrow J^k(M, N) \\ p &\mapsto j^k f(p) = [f]_k \end{aligned},$$

onde $[f]_k$ é a classe de equivalência de f em $J^k(M, N)_{p,f(p)}$.

2.4.2 Topologia C^∞ de Whitney

Definição 2.4.5 (Adaptada de (1), p. 41). Sejam M e N variedades. Seja $U \subset J^k(M, N)$. Fixado um inteiro não negativo k , definimos o conjunto

$$K(U) := \{f \in C^\infty(M, N); j^k f(M) \subset U\}.$$

Lema 2.4.6 ((1), p. 41). $K(U) \cap K(V) = K(U \cap V)$.

Demonstração. Vide a referência (1), página 41.

□

Lema 2.4.7 ((1), p. 41). A família $\{K(U)\}$, com U aberto em $J^k(M, N)$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(M, N)$, a qual chamaremos de **topologia C^k de Whitney**.

Demonstração. Vide a Proposição 3.7 da referência (1), página 41.

□

Lema 2.4.8 (Adaptado de (1), p. 42). Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^l & : & J^l(M, N) \rightarrow J^k(M, N) \\ & & [f]_l \mapsto [f]_k \end{array},$$

isto é, π_k^l leva a classe de equivalência de f pela relação $\sim^l$, $[f]_l$, na classe de equivalência de f pela relação $\sim^k$, $[f]_k$. Então

$$K(U) = K((\pi_k^l)^{-1}(U)).$$

Demonstração. Vide a Proposição 3.8 na referência (1), página 42.

□

Denotando por $\mathcal{W}_k$ os abertos de $C^\infty(M, N)$ na topologia C^k de Whitney, temos como consequência do Lema 2.4.8 que $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_l$ sempre que $k \leq l$.

Lema 2.4.9 (Adaptada de (1), p. 42). Chamamos de **topologia C^∞ de Whitney** à topologia em $C^\infty(M, N)$ cuja base é

$$\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k.$$

Demonstração. Vide a Proposição 3.9 na referência (1), página 42.

□

2.4.3 Grau de uma aplicação

Teorema 2.4.10 (Teorema da Pilha de Discos. (10), p. 26.). *Seja r um valor regular de uma aplicação $f : M \rightarrow N$, onde M é compacta e tem a mesma dimensão que N . Então $f^{-1}(r)$ é um subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_t\}$ de M . Além disso, existe uma vizinhança U de r em N tal que $f^{-1}(U)$ é uma união disjunta $V_1 \cup \dots \cup V_t$.*

Definição 2.4.11 ((10), p. 108.). Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades k -dimensionais, $k \geq 1$. Seja $p \in M$ um ponto regular de f . Definimos o **número de orientação** de f em p como sendo

$$\mathcal{O}(p) = \begin{cases} 1 & , \text{se } f \text{ preserva orientação em } p, \\ -1 & , \text{se } f \text{ inverte orientação em } p. \end{cases}$$

Definição 2.4.12 ((10), p. 108.). Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas e k -dimensionais, $k \geq 1$. Seja $q \in N$ um valor regular de f . Definimos o **grau local** de f em q como sendo o número

$$\deg_p f := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathcal{O}(p).$$

Teorema 2.4.13 ((25), p. 198.). *O grau local de f é o mesmo para qualquer valor regular de f .*

Demonstração. Vide a demonstração do Teorema 25.9, página 198, na referência (25). $\square$

Definição 2.4.14 ((25), p. 200.). Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas e k -dimensionais, $k \geq 1$. Definimos o **grau** de f como sendo o número

$$\deg f := \deg_q f,$$

para qualquer valor regular $q \in N$ de f .

2.4.4 Aplicações Estáveis

Definição 2.4.15 ((9), p. 72). Sejam M e N duas variedades. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações diferenciáveis. Diremos que f e g são **$\mathcal{A}$ -equivalentes** (ou somente **equivalentes**), quando existirem difeomorfismos $k : M \rightarrow M$ e $l : N \rightarrow N$ tais que

$$f \circ k = l \circ g.$$

Lema 2.4.16. *A $\mathcal{A}$ -equivalência é uma relação de equivalência em $C^\infty(M, N)$. Neste caso, denotaremos*

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ e } g \text{ são } \mathcal{A}\text{-equivalentes}.$$

Demonstração. Vide a referência (1), página 42.

□

Definição 2.4.17 ((9), p. 72). Sejam M e N duas variedades. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Diremos que f é uma aplicação **estável** quando existir um aberto $U_f \subset C^\infty(M, N)$, na topologia C^∞ de Whitney, tal que

$$f \sim g, \quad \forall g \in U_f.$$

Definição 2.4.18. Sejam M e N variedades. Definimos

1. o **conjunto das aplicações estáveis** de M em N , denotado por $\mathcal{E}(M, N)$, composto por todas as aplicações estáveis de M em N ;
2. o **conjunto discriminante**, definido como $\Gamma(M, N) := C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$.

Teorema 2.4.19. *Caso M e N sejam superfícies, o conjunto $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$.*

Demonstração. Vide o Teorema 3.16 na Referência (1), página 44.

□

2.4.5 Singularidades de Aplicações entre Variedades

Definição 2.4.20 ((26), p. 14.). Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre as variedades M e N . Diremos que um ponto $p \in M$ é uma **singularidade** (ou um **ponto singular**) de f quando df_p não tem posto máximo. Caso contrário, diremos que p é um **ponto regular**.

Definição 2.4.21 ((26), p. 14.). Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre as variedades M e N . Definimos

1. o **conjunto regular** de f como sendo o conjunto

$$R_f := \{p \in M; p \text{ é um ponto regular de } f\};$$

2. o **conjunto singular** de f como sendo o conjunto

$$\Sigma_f := \{p \in M; p \text{ é um ponto singular de } f\};$$

3. o **contorno aparente** de f como sendo o conjunto

$$\mathcal{B}_f := f(\Sigma_f).$$

Definição 2.4.22 ((9), p.143). Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre as variedades M e N . Diremos que $p \in M$ é uma **singularidade do tipo S_r** , de f quando

$$\text{posto}(df_p) = m - r,$$

onde $m := \min\{\dim M, \dim N\}$ e $0 \leq r \leq m$. Denotaremos por $S_r(f)$ ao conjunto das singularidades do tipo S_r de f .

Observemos que, pela Definição 2.4.22, a diferencial df_p assume posto máximo se, e só se, $p \in M$ é uma singularidade do tipo S_0 . Ora, isso significa dizer que as singularidades do tipo S_0 são os pontos regulares (Definição 2.4.20) de M .

Equivalentemente, se $p \in M$ é uma singularidade do tipo S_r , com $r > 0$, então df_p não tem posto máximo. Ou seja, os pontos singulares de M (Definição 2.4.20) são as singularidades do tipo S_r , com $r > 0$. Assim podemos redefinir:

Definição 2.4.23. Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação entre as variedades M e N . Definimos

1. O **conjunto regular de f** como sendo o conjunto $R_f = S_0(f)$;
2. O **conjunto singular de f** como sendo o conjunto

$$\Sigma_f = S_1(f) \cup \dots \cup S_m(f)$$

Lema 2.4.24 ((9), p. 144.). *Sejam M e N variedades. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. O conjunto $S_r(f) \subset M$ é uma subvariedade de M de codimensão*

$$\text{codim } S_r(f) = r^2 - mr,$$

onde $m := |\dim M - \dim N|$.

Demonstração. Vide a discussão após a Proposição 1.4 em (9), página 144.

□

Corolário 2.4.25. Se M e N tiverem a mesma dimensão, então $\text{codim } S_r(f) = r^2$.

Proposição 2.4.26. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre superfícies. Então*

$$\Sigma_f = S_1(f).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.4.24, temos que o conjunto $S_r(f)$ terá codimensão

$$\text{codim } S_r(f) = r^2.$$

Daí teríamos

$$\text{i) } p \in S_0(f) \Rightarrow \begin{cases} \text{posto}(df_p) = 2; \forall p \in S_0(f), \\ \text{codim } S_0(f) = 0. \end{cases}$$

$$\text{ii) } p \in S_1(f) \Rightarrow \begin{cases} \text{posto}(df_p) = 1; \forall p \in S_0(f), \\ \text{codim } S_1(f) = 1. \end{cases}$$

$$\text{iii) } p \in S_2(f) \Rightarrow \begin{cases} \text{posto}(df_p) = 0, \\ \text{codim } S_2(f) = 4. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente (Definição 2.4.23), temos $R_f = S_0(f)$. Dessa forma, a princípio teríamos

$$\Sigma_f = S_1(f) \cup S_2(f).$$

Entretanto, como $\text{codim } S_2(f) = 4 > \dim M$, teremos $S_2(f) = \emptyset$. Dessa forma podemos concluir

$$\Sigma_f = S_1(f).$$

□

Teorema 2.4.27 ((26), p. 14). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre superfícies, então o conjunto singular Σ_f é composto por curvas simples, fechadas e disjuntas.*

2.4.6 Pontos Duplos

Definição 2.4.28. Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável entre duas superfícies. Diremos que um ponto d no contorno aparente de f é um **ponto duplo** de f quando d for a interseção de dois arcos de curvas no contorno aparente.

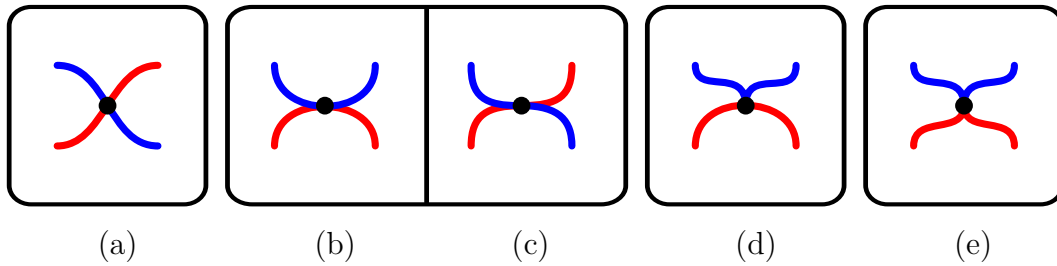
Ou seja, dizer que o ponto d é um ponto duplo de f significa que existem exatos dois arcos de curvas α_1 e α_2 do conjunto singular de f tais que

$$f(\alpha_1) \cap f(\alpha_2) = d.$$

Definição 2.4.29. Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável entre superfícies. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \subset \Sigma_f$ arcos de curvas no conjunto singular de f tais que as suas imagens por f $\beta_1 = f(\alpha_1), \beta_2 = f(\alpha_2) \subset \mathcal{B}_f$ se interseccionem num único ponto $d = \beta_1 \cap \beta_2$. Então diremos que d é:

1. um **ponto duplo transversal**, quando existirem $v_1, v_2 \in T_d N$ vetores tangentes a β_1 e β_2 em d não nulos, respectivamente, e $\{v_1, v_2\}$ for uma base para $T_d N$;
2. uma **tangência de dobras**, quando existirem $v_1, v_2 \in T_d N$ vetores tangentes a β_1 e β_2 em d não nulos, respectivamente, e um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = \lambda v_2$;
3. um **cruzamento de cúspide com dobra**, quando a pré-imagem de d em $\alpha_1(\alpha_2)$ for um ponto de dobra de f , e a pré-imagem de d em $\alpha_2(\alpha_1)$ for uma cúspide de f ;
4. um **cruzamento de cúspides**, quando a pré-imagem de d tanto em α_1 , quanto em α_2 forem cúspides de f .

Figura 2.11 – Pontos duplos de uma aplicação entre superfícies.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 2.11 temos os possíveis pontos de duplos de uma aplicação entre superfícies.

- Na Figura 2.11(a) vemos um ponto duplo transversal;
- Na Figura 2.11(b) e na Figura 2.11(c) vemos duas possibilidades de tangências de dobra;
- Na Figura 2.11(d) vemos um cruzamento de cúspide com dobra;
- Na Figura 2.11(e) vemos um cruzamento de cúspides

Proposição 2.4.30 ((1), p. 51.). *O contorno aparente $\mathcal{B}_f$ de uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ é composto por uma coleção de curvas em N com pontos duplos transversais e cúspides isoladas.*

3 APLICAÇÕES DE GAUSS

Vimos na Seção 2.4 a definição do que seria uma aplicação estável entre variedades. Neste capítulo temos a intenção de estudar uma classe específica de aplicações estáveis: as aplicações de Gauss.

Começamos na Seção 3.1 definindo o que são as aplicações de Gauss associadas a imersões, definimos a $\mathcal{A}$ -equivalência para as aplicações de Gauss e trazemos uma discussão acerca da diferença com o caso geral. Também apresentamos alguns resultados imediatos acerca das aplicações de Gauss. Nesta seção nos baseamos nas referências (2, 17, 21, 10).

Na Seção 3.2 voltamos nossos olhares para as singularidades das aplicações de Gauss. Aqui aprofundamos mais alguns conceitos de singularidades de aplicações que não vimos na subseção **2.4.5**, como a classificação das singularidades em cúspides e pontos de dobra e o sinal das cúspides. Também aprofundamos nas curvas singulares das aplicações de Gauss, mostrando como os pontos singulares e regulares das aplicações de Gauss estão intrinsecamente ligados à curvatura Gaussiana da superfície imersa, estabelecendo a conexão com a geometria diferencial da superfície. Nesta seção usamos as referências (9, 26).

Na Seção 3.3 estudaremos as transições de codimensão 1 nas classes de $\mathcal{A}$ -equivalência de aplicações de Gauss. Veremos como cada transição atua topologicamente no conjunto singular e no contorno aparente. Nos baseamos nas referências (3, 22) para descrever as transições.

Na Seção 3.4 descrevemos as cirurgias das aplicações de Gauss, método esse que, assim como as transições, nos permitem obter novas aplicações de Gauss a partir de aplicações previamente conhecidas, embora as cirurgias possuam a capacidade de alterar também a topologia da superfície. Nos baseamos na referência (19) para descrever as cirurgias.

Por fim temos a Seção 3.5, onde nos debruçamos sobre as aplicações de Gauss sem cúspides. Aqui apresentamos os resultados da referência (19), que nos garantem condições para que uma superfície possua uma imersão cuja aplicação de Gauss não possua cúspides.

3.1 APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

Definição 3.1.1 ((17), p. 91). Seja M uma superfície fechada e orientada. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{N} : f(M) \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss de $f(M)$. Chamamos de **aplicação de Gauss associada à imersão f** à aplicação

$$\mathcal{N}_f := \mathcal{N} \circ f : M \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

Definição 3.1.2 ((17), p. 91). Sejam M superfície fechada e orientada e $\mathcal{N}_f, \mathcal{N}_g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ duas aplicações de Gauss associadas às imersões $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, respectivamente. Diremos que $\mathcal{N}_f$ é **$\mathcal{A}$ –equivalente** (ou somente **equivalente**) a $\mathcal{N}_g$ quando existirem difeomorfismos que preservam orientação $k : M \rightarrow M$ e $l : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tais que

$$\mathcal{N}_f \circ k = l \circ \mathcal{N}_g.$$

Definição 3.1.3 ((19), p. 37.). Seja M uma superfície fechada e orientada e $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicação de Gauss associada à imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos que $\mathcal{N}_f$ é uma **aplicação de Gauss estável** quando existir um aberto $U_f \subset \mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3)$, onde o espaço das imersões $\mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ está munido da topologia C^∞ de Whitney, tal que

$$\mathcal{N}_f \sim \mathcal{N}_g, \text{ para toda imersão } g \in U_f.$$

Um questionamento interessante de nos fazermos é: por que a estabilidade das aplicações de Gauss vem de perturbações em $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ e não de perturbações em $C^\infty(M, \mathbb{S}^2)$?

Pela Definição 2.4.17, temos que uma aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é estável se e só se existe um aberto $U_{\mathcal{N}_f} \subset C^\infty(M, \mathbb{S}^2)$ tal que para todo $\mathcal{N}_g \in U_{\mathcal{N}_f}$, existem difeomorfismos $k_{\mathcal{N}_g} : M \rightarrow M$ e $l_{\mathcal{N}_g} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tais que

$$\mathcal{N}_f \circ k_{\mathcal{N}_g} = l_{\mathcal{N}_g} \circ \mathcal{N}_g.$$

Ora, mas pela Definição 3.1.1, temos

$$\begin{cases} \mathcal{N}_f &= \mathcal{N}_1 \circ f, \\ \mathcal{N}_g &= \mathcal{N}_2 \circ g. \end{cases}$$

onde $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ são imersões, e $\mathcal{N}_1 : f(M) \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $\mathcal{N}_2 : g(M) \rightarrow \mathbb{S}^2$ são, respectivamente, as orientações positivas de $f(M)$ e $g(M)$. Daí, temos

$$\mathcal{N}_1 \circ f \circ k_{\mathcal{N}_g} = l_{\mathcal{N}_g} \circ \mathcal{N}_2 \circ g.$$

Percebamos que a única forma de perturbar $\mathcal{N}_f$ em $\mathcal{N}_g$ no conjunto $C^\infty(M, \mathbb{S}^2)$, é perturbar a imersão f na imersão g no conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$. Isso acontece, pois as orientações não são alteráveis por nós. Por isso, quando falamos de aplicações de Gauss estáveis, a estabilidade vem por perturbações nas imersões.

Lema 3.1.4 ((2), p. 284). *Seja M uma superfície fechada e orientada. O subconjunto $GS \subset \mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3)$ das imersões de M em $\mathbb{R}^3$ cujas aplicações de Gauss são estáveis é aberto e denso em $\mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Vide a demonstração do Teorema 2.5, página 284 da referência (2).

□

O Lema 3.1.4 implica que se f é uma imersão de uma superfície fechada e orientada M em $\mathbb{R}^3$, cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f$ não é estável, então por pequenas perturbações podemos obter uma nova imersão g cuja aplicação de Gauss é estável. Por outro lado, se $\mathcal{N}_f$ é estável, então o Lema nos garante que quaisquer perturbações pequenas o suficiente na imersão f devem gerar aplicações de Gauss estáveis.

Por fim, enunciamos um resultado que correlaciona o grau de uma aplicação de Gauss com o gênero da superfície.

Teorema 3.1.5 ((10), p. 198.). *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss, então*

$$\deg \mathcal{N} = \frac{\chi(M)}{2} = 1 - g(M),$$

onde $\chi(M)$ e $g(M)$ são respectivamente a característica de Euler e o gênero de M .

3.2 SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

3.2.1 Curvas Parabólicas

Na Subseção 2.4.5 vimos alguns conceitos gerais sobre a Teoria de Singularidades de Aplicações Estáveis que usaremos neste trabalho. Entretanto, lá admitimos o caso geral em que a aplicação é entre duas variedades de dimensões quaisquer. Como estamos trabalhando com aplicações de Gauss estáveis, queremos analisar (e traduzir) os resultados para o caso particular em que as variedades são ambas superfícies.

Proposição 3.2.1. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$. Se a sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é estável, então $f(M)$ possui apenas pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Além disso, $f(\Sigma_{\mathcal{N}_f})$ é o conjunto dos pontos parabólicos de $f(M)$.*

Demonstração. Observemos primeiro que, sendo $\mathcal{N}_f := \mathcal{N} \circ f$, pela Regra da Cadeia temos, para todo ponto $p \in M$,

$$d(\mathcal{N}_f)_p = d\mathcal{N}_{f(p)} \circ df_p.$$

Como f é uma imersão, tomando o determinante teremos

$$\det d(\mathcal{N}_f)_p = \det d\mathcal{N}_{f(p)} \cdot \det df_p.$$

Ora, mas pela Definição 2.3.34, temos que $\det d\mathcal{N}_{f(p)}$ é a curvatura Gaussiana $K(f(p))$ de $f(M)$ em $f(p)$, o que nos dá

$$\det d(\mathcal{N}_f)_p = K(f(p)) \cdot \det df_p.$$

Como f é imersão, então sua diferencial nunca se anula em M , o que implica em dizer que

$$\det d(\mathcal{N}_f)_p = 0 \Leftrightarrow K(f(p)) = 0,$$

isto é, os pontos de $\Sigma_{\mathcal{N}_f}$ são os pontos de M que, quando imersos, possuem curvatura Gaussiana nula. Reciprocamente, os pontos de M que quando imersos possuem curvatura Gaussiana nula são as singularidades de $\mathcal{N}_f$.

Agora, se $K(f(p)) = 0$, então sabemos que ao menos uma das curvaturas principais, k_1 ou k_2 , deve se anular em $f(p)$. Temos dois casos (vide a Definição 2.3.36):

1. Ambas k_1 e k_2 se anulam em $f(p)$, e $f(p)$ é um ponto planar;
2. Apenas k_1 , ou apenas k_2 se anula em $f(p)$, e $f(p)$ é um ponto parabólico.

No primeiro caso, temos que $d\mathcal{N}_{f(p)}$ é o operador nulo em $T_{f(p)}f(M)$, o que implicaria em $d(\mathcal{N}_f)_p$ ter posto 0, e teríamos que p é uma singularidade do tipo S_2 de $\mathcal{N}_f$. Ora, mas isso contradiria a hipótese de $\mathcal{N}_f$ ser uma aplicação de Gauss estável, pois vimos pela Proposição 2.4.26. No segundo caso, temos que $d(\mathcal{N}_f)_p$ tem posto 1, logo p seria uma singularidade do tipo S_1 , e temos $p \in \Sigma_{\mathcal{N}_f}$.

Com isso verificamos que $f(M)$ possui apenas pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos, também verificamos que, sendo P o conjunto dos pontos parabólicos de $f(p)$, temos $f(\Sigma_{\mathcal{N}_f}) = P$ e $\Sigma_{\mathcal{N}_f} = f^{-1}(P)$.

□

Corolário 3.2.2. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$. Se a sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é estável, então o conjunto $f(R_{\mathcal{N}_f})$, onde $R_{\mathcal{N}_f}$ é o conjunto regular de $\mathcal{N}_f$, é igual ao conjunto dos pontos elípticos ou hiperbólicos de $f(M)$.

Demonstração. Basta observarmos que identificamos as singularidades de M com os pontos parabólicos de $f(M)$, então resta-nos identificar os pontos regulares com os pontos elípticos e com os pontos hiperbólicos de $f(M)$.

□

A Proposição 3.2.1 nos mostra uma intrínseca relação entre a geometria da imersão e os pontos regulares e singulares de uma aplicação de Gauss estável, o que nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 3.2.3. Seja $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicação de Gauss estável da imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de M em $\mathbb{R}^3$. Definimos:

1. o **conjunto elíptico** de $\mathcal{N}_f$, definido como o conjunto

$$E_{\mathcal{N}_f} := \{p \in M; K(f(p)) > 0\};$$

2. o **conjunto parabólico** de $\mathcal{N}_f$, definido como o conjunto

$$\Sigma_{\mathcal{N}_f} := \{p \in M; K(f(p)) = 0\};$$

3. o **conjunto hiperbólico** de $\mathcal{N}_f$, definido como o conjunto

$$H_{\mathcal{N}_f} := \{p \in M; K(f(p)) < 0\}.$$

Definição 3.2.4. Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Definimos:

1. As **regiões elípticas** de $\mathcal{N}$ como sendo as componentes conexas de $E_{\mathcal{N}_f}$;
2. As **curvas parabólicas** de $\mathcal{N}$ como sendo as componentes conexas de $\Sigma_{\mathcal{N}_f}$;
3. As **regiões hiperbólicas** de $\mathcal{N}$ como sendo as componentes conexas de $H_{\mathcal{N}_f}$.

Proposição 3.2.5. *Seja $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss estável associada à imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então o conjunto parabólico $\Sigma_{\mathcal{N}_f}$ é a fronteira comum em M do conjunto elíptico $E_{\mathcal{N}_f}$ com o conjunto hiperbólico $H_{\mathcal{N}_f}$.*

Demonstração. Verifiquemos, primeiro, que $F \subset \Sigma_{\mathcal{N}_f}$, onde $F = \partial E_{\mathcal{N}_f} \cap \partial H_{\mathcal{N}_f}$ é definido como a fronteira em M comum a $E_{\mathcal{N}_f}$ e $H_{\mathcal{N}_f}$. Seja $p \in F$. Como p é ponto de fronteira tanto de $E_{\mathcal{N}_f}$, quanto de $H_{\mathcal{N}_f}$, conseguimos garantir a existência de dois caminhos contínuos, o caminho $e : [0, 1] \rightarrow \overline{E_{\mathcal{N}_f}}$, com $e([0, 1)) \subset \text{int}(E_{\mathcal{N}_f})$ e $e(1) = p$, e o caminho $h : [1, 2] \rightarrow \overline{H_{\mathcal{N}_f}}$, com $h(1) = p$ e $h((1, 2]) \subset \text{int}(H_{\mathcal{N}_f})$.

Dessa forma, podemos construir um caminho contínuo $x = e * h : [0, 2] \rightarrow M$ fazendo-se a justaposição em p dos caminhos e e h . Como x é um caminho contínuo, a composição

$$g := K \circ f \circ x : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

da curvatura Gaussiana K , da imersão f e do caminho x é uma função contínua, pois é composição de contínuas. Como $g(0) > 0$, e $g(2) < 0$, o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe $t \in (0, 2)$ tal que $g(t) = 0$. Ora, mas como $g(y) > 0, \forall y \in [0, 1)$, e $g(y) < 0, \forall y \in (1, 2]$, temos

$$0 = (K \circ f \circ x)(1) = (K \circ f)(p) \Rightarrow p \in \Sigma_{\mathcal{N}_f}.$$

Como isso é válido para qualquer $p \in F$, concluímos $F \subset \Sigma_{\mathcal{N}_f}$.

Suponhamos que tivéssemos $p \in \Sigma_{\mathcal{N}_f}$, mas $p \notin F$. Isso significa dizer que podemos obter uma vizinhança V_p de p tal que $V_p \setminus \Sigma_{\mathcal{N}_f} \subset \text{int} E_{\mathcal{N}_f}$, ou $V_p \setminus \Sigma_{\mathcal{N}_f} \subset \text{int} H_{\mathcal{N}_f}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$V_p \setminus \Sigma_{\mathcal{N}_f} \subset \text{int} E_{\mathcal{N}_f}.$$

Como $p \in \Sigma_{\mathcal{N}_f}$, que é composto por curvas, podemos supor que exista uma curva $\gamma_p \subset \Sigma_{\mathcal{N}_f}$ tal que $p \in \gamma_p$. Em particular, existe todo um segmento de γ_p contido em V_p , a saber, o segmento $\gamma_p \cap V_p$.

Ora, mas então poderíamos fazer uma pequena perturbação no mergulho f a fim de obter um mergulho $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que coincide com f em todos os pontos fora de um pequeno aberto $U_p \subset V_p$, vizinhança de p , e é tal que $g(q)$ tem curvatura Gaussiana positiva para todo $q \in U_p$. Isso implicaria em uma curva parabólica $\gamma_p \setminus (\gamma_p \cap U_p)$ aberta, que contradiz o Teorema 2.4.27. Dessa forma mostramos $\Sigma_{\mathcal{N}_f} \subset F$, e concluímos a demonstração. $\square$

Lema 3.2.6. *Sejam $\mathcal{N}_f, \mathcal{N}_g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ duas aplicações de Gauss de M . Então $\mathcal{N}_f$ e $\mathcal{N}_g$ serão equivalentes se, e só se, existirem difeomorfismos $k : M \rightarrow M$ e $l : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que preservam orientação tais que*

$$\begin{cases} \Sigma_{\mathcal{N}_f} &= k(\Sigma_{\mathcal{N}_g}), \\ \mathcal{B}_{\mathcal{N}_f} &= l(\mathcal{B}_{\mathcal{N}_g}). \end{cases}$$

3.2.2 Classificação de Singularidades

Vimos no Teorema 2.4.27 que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável entre superfícies, então o conjunto singular Σ_f é composto por curvas.

Nesta subseção queremos estudar localmente o conjunto singular de aplicações de Gauss estáveis. Mais especificamente, queremos classificar os pontos singulares dessas aplicações.

Proposição 3.2.7 ((9), p. 146.). *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável na superfície fechada M . Seja $p \in \Sigma_{\mathcal{N}}$ um ponto singular de $\mathcal{N}$. Então um dos seguintes casos acontece:*

- a) $T_p \Sigma_{\mathcal{N}} \oplus \ker(d\mathcal{N}_p) = T_p M$;
- b) $T_p \Sigma_{\mathcal{N}} = \ker(d\mathcal{N}_p)$.

Demonstração. Como $p \in S_1(\mathcal{N}) \subset \Sigma_{\mathcal{N}}$, temos que $d\mathcal{N}_p$ tem posto 1, o que implica em dizermos que a imagem de $d\mathcal{N}_p$ tem dimensão 1, e, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que $\ker(d\mathcal{N}_p)$ tem dimensão 1.

Ora, dessa forma, ao tomarmos $v \in (T_p M \cap T_p \Sigma_{\mathcal{N}})$ nos resta apenas duas possibilidades:

- 1. $v \notin \ker(d\mathcal{N}_p)$;
- 2. $v \in \ker(d\mathcal{N}_p)$.

No primeiro caso, temos que

$$T_p \Sigma_{\mathcal{N}} \oplus \ker(d\mathcal{N}_p) = V \quad \text{tem dimensão 2.}$$

Ou seja, V é um subespaço vetorial de $T_p M$ que tem a mesma dimensão que $T_p M$, donde concluímos

$$T_p \Sigma_{\mathcal{N}} \oplus \ker(d\mathcal{N}_p) = T_p M.$$

Já no segundo caso, teremos $T_p \Sigma_{\mathcal{N}} \subset \ker(d\mathcal{N}_p)$, mas como ambos possuem a mesma dimensão, temos

$$T_p \Sigma_{\mathcal{N}} = \ker(d\mathcal{N}_p).$$

□

Definição 3.2.8 ((9), p. 146.). Nas condições da Proposição 3.2.7, temos

1. Se (a) acontece, então diremos que p é um **ponto de dobra**;
2. Se (b) acontece, então diremos que p é uma **cúspide** (ou **ponto de cúspide**).

3.2.3 Sinal das Cúspides

Definição 3.2.9. Diremos que uma cúspide $p \in M$ da aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma cúspide:

1. **positiva** quando existir uma vizinhança V_p de p em M tal que $\deg \mathcal{N}|_{V_p} = 1$ para a restrição $\mathcal{N}|_{V_p} : V_p \rightarrow \mathbb{S}^2$;
2. **negativa** quando existir uma vizinhança V_p de p em M tal que $\deg \mathcal{N}|_{V_p} = -1$ para a restrição $\mathcal{N}|_{V_p} : V_p \rightarrow \mathbb{S}^2$.

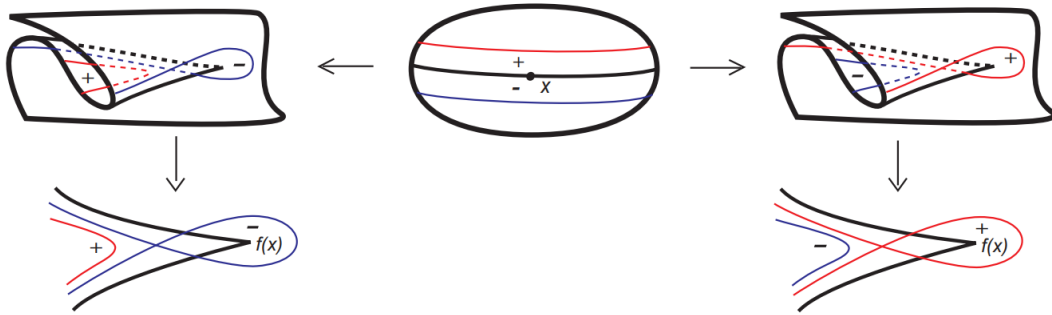
Tomemos como exemplo uma cúspide positiva p da aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Como M é compacta, sabemos que todo valor regular r tem pré-imagem finita. Como $\deg \mathcal{N}|_{V_p} = 1$, podemos garantir que existe uma vizinhança $U_p \subset V_p$ de p em V_p tal que $\mathcal{N}|_{U_p} : U_p \cap E_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é injetiva, isto é, $\mathcal{N}' = \mathcal{N}|_{U_p}$ é injetora na região elíptica suficientemente próxima da cúspide positiva p .

Seja γ_p a curva parabólica de $\mathcal{N}'$ em que p se encontra. A fim de preservar o grau da aplicação $\mathcal{N}'$ nas proximidades de p , ao cruzarmos a curva $\mathcal{N}'(\gamma_p)$ no contorno aparente numa vizinhança de $\mathcal{N}'(p)$ deveremos aumentar o número de pré-imagens em 2, totalizando três pré-imagens: duas na região elíptica e uma na região hiperbólica. Analogamente, se p é uma cúspide negativa, teremos duas pré-imagens na região hiperbólica e uma na região elíptica. Esta análise nos permite redefinir o sinal das cúspides através do número de pré-imagens.

Definição 3.2.10. Diremos que uma cúspide $p \in M$ da aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma cúspide:

1. **positiva** quando existir uma vizinhança $V_{\mathcal{N}(p)}$ de $\mathcal{N}(p)$ em $\mathbb{S}^2$, tal que todos os valores regulares em $V_{\mathcal{N}(p)}$ tenham duas pré-imagens no conjunto elíptico e uma pré-imagem no conjunto hiperbólico de $\mathcal{N}$;
2. **negativa** quando existir uma vizinhança $V_{\mathcal{N}(p)}$ de $\mathcal{N}(p)$ em $\mathbb{S}^2$, tal que todos os valores regulares em $V_{\mathcal{N}(p)}$ tenham duas pré-imagens no conjunto hiperbólico e uma pré-imagem no conjunto elíptico de $\mathcal{N}$.

Figura 3.1 – Sinal das cúspides.



Fonte: Retirada de (26), p. 17.

Na Figura 3.1, vemos a representação do sinal das cúspides. Embora, aqui foi representada uma cuspide de uma projeção no plano por fins didáticos, visto que as pré-imagens ficam bem mais visíveis, em comparação com as aplicações de Gauss.

3.3 TRANSIÇÕES DE APLICAÇÕES DE GAUSS

3.3.1 Transições de Codimensão 1

Definição 3.3.1 ((10), p. 33.). Sejam $f_0, f_1 : M \rightarrow P$ duas aplicações diferenciáveis entre as variedades M e P . Diremos que f_0 e f_1 são **homotópicas** quando existir uma aplicação contínua $F : M \times [0, 1] \rightarrow P$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, $\forall x \in M$. Neste caso, diremos que F é uma **homotopia** entre f_0 e f_1 .

Isso significa que dadas duas aplicações homotópicas f_0 e f_1 , podemos deformar f_0 em f_1 através de um caminho contínuo $\varphi : [0, 1] \rightarrow C^\infty(M, P)$ definido por

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f_t : M \rightarrow P, \\ x &\mapsto f_t(x) = F(x, t). \end{aligned}$$

Quando nos restringimos ao estudo das aplicações de Gauss estáveis, o mesmo deve acontecer, e podemos traduzir a homotopia em termos das imersões. Isto é, dadas duas aplicações de Gauss homotópicas $\mathcal{N}_f, \mathcal{N}_g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, existe um caminho $N : [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$N(0) = f \quad \text{e} \quad N(1) = g.$$

Observemos que isso significa que o conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{N}_f}$ e o contorno aparente $\mathcal{B}_{\mathcal{N}_f}$ de $\mathcal{N}_f$ são deformados de forma contínua (mas não necessariamente diferenciável) nos conjuntos $\Sigma_{\mathcal{N}_g}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{N}_g}$ de $\mathcal{N}_g$, respectivamente.

Entretanto, recordemos que na Seção 2.4, dissemos que a $\mathcal{A}$ –equivalência estabelece uma relação de equivalência no conjunto das aplicações infinitamente diferenciáveis. Em termos das aplicações de Gauss, essa relação de equivalência também pode ser traduzida em termos das imersões. Logo, da mesma forma que fizemos na Definição 2.4.18 podemos definir, nos restringindo às aplicações de Gauss

Definição 3.3.2. Seja M uma superfície fechada e orientável. Definimos

1. o conjunto $\mathcal{E}_{GS}(M) \subset \mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3)$, composto por todas as imersões cujas aplicações de Gauss são estáveis;
2. o **conjunto discriminante**, definido como $\Gamma_{GS}(M) := \mathcal{I}(M, \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{E}_{GS}(M)$.

Observação 3.3.3. Dado que as aplicações de Gauss estão intrinsecamente ligadas às suas imersões, simplificaremos a escrita tratando o conjunto $\mathcal{E}_{GS}(M)$ apenas como **conjunto das aplicações de Gauss estáveis**.

Observemos que podemos ter aplicações de Gauss homotópicas, mas não equivalentes, pois o conjunto $\mathcal{E}_{GS}(M)$ é composto por componentes conexas por caminho, que são justamente as classes de equivalência da $\mathcal{A}$ –equivalência. Nos casos em que $\mathcal{N}_f$ e $\mathcal{N}_g$ não são equivalentes, o caminho N deve obrigatoriamente cruzar o conjunto discriminante. Ou seja, existe ao menos um valor $q \in (0, 1)$ tal que $N(q) \in \Gamma_{GS}(M)$. A aplicação $N(q)$ será chamada uma **transição de aplicações de Gauss**.

Dessa forma, as transições ocorrem quando cruzamos (transicionamos) de uma classe de estabilidade para outra. Entretanto, elas podem ocorrer de formas específicas. Em (22), Ohmoto e Aicardi estabelecem que o conjunto discriminante de uma aplicação estável pode ser decomposto em subconjuntos, chamados de **estratos**. Quando a homotopia é transversal a todos os estratos do conjunto discriminante, diremos que ocorreu uma **transição de codimensão 1**. Nesse mesmo trabalho, Ohmoto e Aicardi também estabelecem dez estratos de codimensão 1:

1. O estrato L , capaz de alterar o número de regiões regulares, curvas parabólicas e cúspides;
2. O estrato B , capaz de alterar o número de regiões regulares, curvas parabólicas e cúspides;
3. O estrato S , capaz de alterar o número de cúspides e pontos duplos;
4. O estrato K_0 , capaz de alterar o número de pontos duplos;

5. O estrato K_1 , capaz de alterar o número de pontos duplos;
6. O estrato K_2 , capaz de alterar o número de pontos duplos;
7. O estrato T_0 , capaz de alterar o número de pontos na pré-imagem;
8. O estrato T_1 , capaz de alterar o número de pontos na pré-imagem;
9. O estrato C_0 , capaz de alterar o número de pontos duplos;
10. O estrato C_1 , capaz de alterar o número de pontos duplos.

Em (3), Bruce, Giblin e Tari descrevem mais três estratos para as aplicações de Gauss estáveis que se caracterizam pelo surgimento de um ponto umbílico, que são

11. O estrato D_4^- ;
12. O estrato $D_4^+{}_{11}$, capaz de transferir um cúspide entre curvas parabólicas;
13. O estrato $D_4^+{}_{22}$, capaz de transferir um cúspide entre curvas parabólicas e alterar o número de pontos duplos;

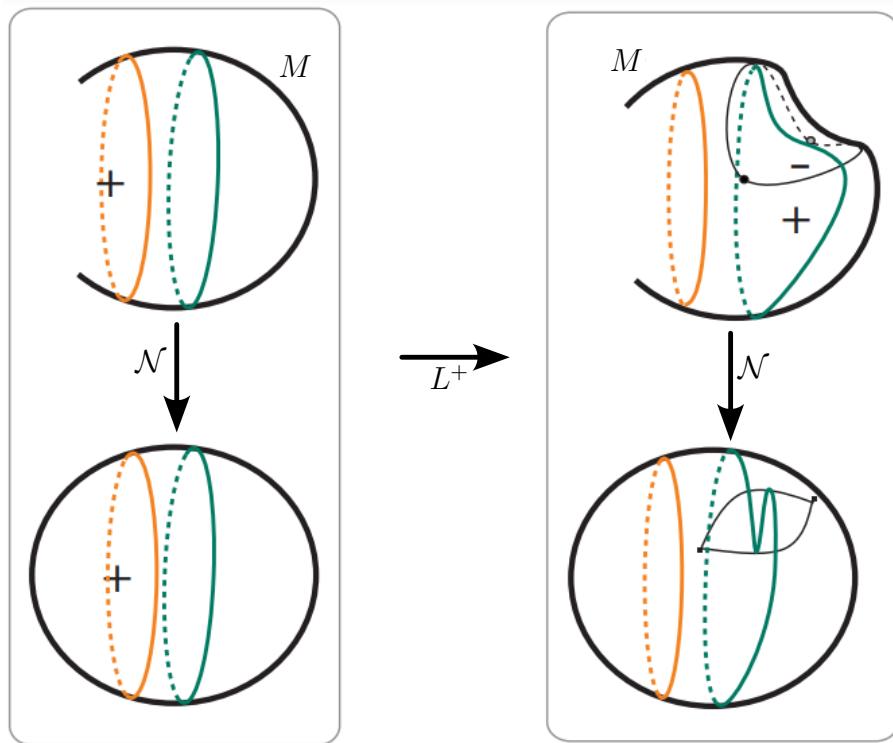
Nas subseções seguintes descreveremos geometricamente e topologicamente como cada uma das transições atuam.

3.3.2 Estrato L

O primeiro estrato do conjunto discriminante que temos é o estrato L , representado pelas **transições lips**, também chamada de **transição lábios**, (L) . Essa transição consiste na criação de uma nova região hiperbólica dentro de uma região elíptica, ou, equivalentemente, de uma nova região elíptica dentro de uma região hiperbólica. No processo, criamos uma nova curva parabólica na fronteira da região criada com a região já existente e duas cúspides de mesmo sinal.

A transição do tipo **lips inversa**, $(-L)$, consiste no processo inverso da transição lips, isto é, na aniquilação de uma região hiperbólica/elíptica que só possui uma única fronteira com uma única região elíptica/hiperbólica, e que possui duas cúspides de mesmo sinal. Além de aniquilar a região regular, a transição lips inversa também aniquila a curva parabólica na fronteira da região e as duas cúspides.

Classificaremos as transições lips em dois tipos: a transição L^+ , que cria uma região hiperbólica dentro de uma região elíptica, criando assim duas cúspides positivas. A transição L^- , que cria uma região elíptica dentro de uma região hiperbólica, criando duas cúspides negativas.

Figura 3.2 – Transição lips (L^+).

Fonte: Adaptado de (26), p.29.

3.3.3 Estrato B

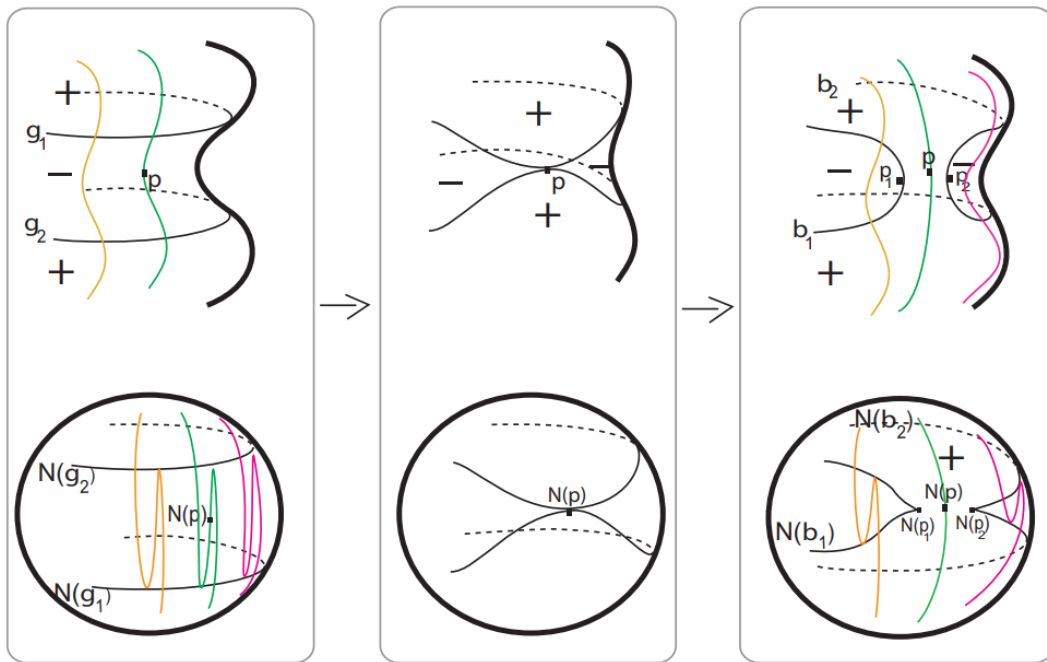
O estrato B é representado pelas **transições beaks**, ou **transição bicos**. Essa transição consiste em unir regiões de mesmo sinal (localmente) disjuntas, e com isso separar uma região com o sinal inverso em duas regiões (localmente) disjuntas.

Mais detalhadamente, as transições do tipo beaks consistem em unir dois arcos parabólicos (localmente) disjuntos em um único ponto, chamado **beak point**, depois separamos novamente esses arcos de modo a criar duas cúspides com o mesmo sinal.

Observemos que a transição beaks pode ser classificada em oito subtipos, conforme vemos ilustrado na Figura 3.4. Investiguemos, brevemente, como cada um dos subtipos atua na superfície, alterando o número de regiões elípticas, hiperbólicas ou de curvas parabólicas.

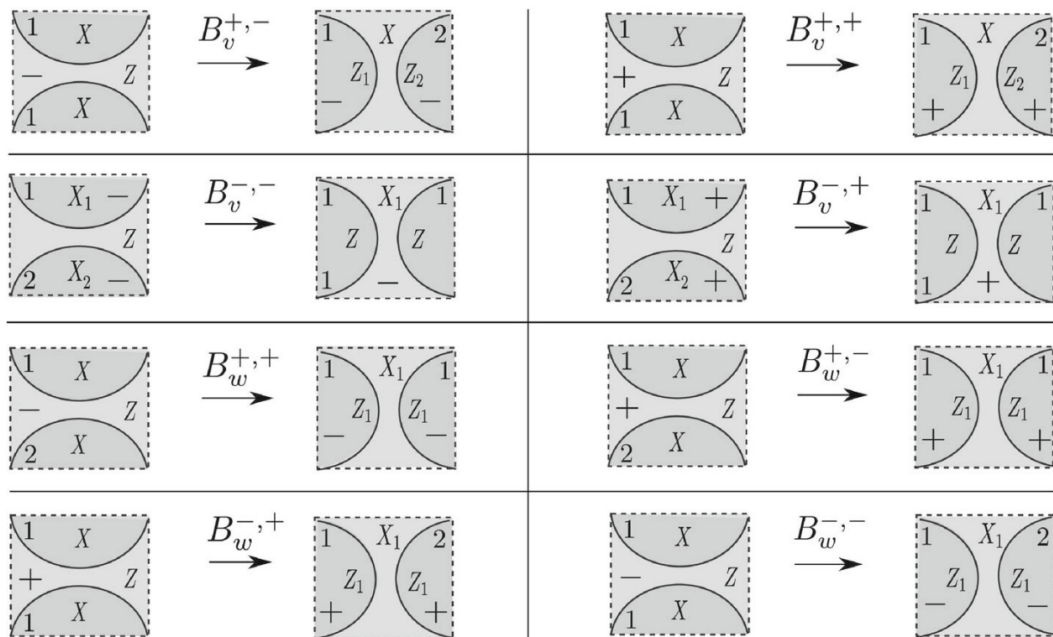
- A transição $B_v^{+,-}$ divide uma mesma região hiperbólica H em duas novas regiões hiperbólicas H_1 e H_2 distintas. Essa transição também divide uma mesma curva parabólica γ em duas novas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas. Embora não una nem separe regiões elípticas distintas, essa transição une duas regiões localmente disjuntas de uma mesma região elíptica E ;
- A transição $B_v^{+,+}$ divide uma mesma região elíptica E em duas novas regiões elípticas

Figura 3.3 – Exemplo de transição beaks.



Fonte: Adaptada de (26), p.29.

Figura 3.4 – Os oito subtipos locais da transição beaks.



Fonte: Retirada de (19), p. 5.

E_1 e E_2 distintas. Essa transição também divide uma mesma curva parabólica γ em duas novas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas. Embora não una nem separe regiões hiperbólicas distintas, essa transição une duas regiões localmente disjuntas de uma mesma região hiperbólica H ;

- A transição $B_v^{-,-}$ une duas regiões hiperbólicas H_1 e H_2 distintas em uma mesma região hiperbólica H . Essa transição também une duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas numa mesma curva parabólica γ . Embora não una nem separe regiões elípticas distintas, essa transição divide uma pequena vizinhança de uma região elíptica E em duas regiões localmente disjuntas;
- A transição $B_v^{-,+}$ une duas regiões elípticas E_1 e E_2 distintas em uma mesma região elíptica E . Essa transição também une duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas numa mesma curva parabólica γ . Embora não una nem separe regiões hiperbólicas distintas, essa transição divide uma pequena vizinhança de uma região hiperbólica H em duas regiões localmente disjuntas;
- A transição $B_w^{+,+}$ une duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas numa mesma curva parabólica γ . Localmente, essa transição une duas regiões elípticas distintas em uma mesma região elíptica e divide uma mesma região hiperbólica em duas regiões hiperbólicas distintas. Entretanto, esse efeito é somente local, visto que globalmente a transição não altera o número de regiões elípticas e o número de regiões hiperbólicas;
- A transição $B_w^{+,-}$ une duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas numa mesma curva parabólica γ . Localmente, essa transição une duas regiões hiperbólicas distintas em uma mesma região hiperbólica e divide uma mesma região elíptica em duas regiões elípticas distintas. Entretanto, esse efeito é somente local, visto que globalmente a transição não altera o número de regiões elípticas e o número de regiões hiperbólicas;
- A transição $B_w^{-,+}$ separa uma mesma curva parabólica γ em duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas. Localmente, essa transição une duas regiões hiperbólicas distintas em uma mesma região hiperbólica e divide uma mesma região elíptica em duas regiões elípticas distintas. Entretanto, esse efeito é somente local, visto que globalmente a transição não altera o número de regiões elípticas e o número de regiões hiperbólicas;
- A transição $B_w^{-,-}$ separa uma mesma curva parabólica γ em duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 distintas. Localmente, essa transição une duas regiões elípticas distintas em uma mesma região elíptica e divide uma mesma região hiperbólica em duas regiões hiperbólicas distintas. Entretanto, esse efeito é somente local, visto que globalmente a transição não altera o número de regiões elípticas e o número de regiões hiperbólicas;

Na notação usada para os subtipos da transição beaks, temos que o índice inferior indica se a transição altera somente as regiões regulares, índice v , ou também altera o gênero das regiões, índice w . Já para os índices superiores, o primeiro sinal indica se a transição aumenta, $(+)$, ou diminui, $(-)$, o número de regiões regulares, ou o gênero delas, enquanto o segundo sinal indica se foi criado um par de cúspides positivas, $(+)$, ou negativas, $(-)$.

Na Tabela 1 vemos, em resumo, como cada um dos subtipos da transição beaks altera o número de regiões elípticas (ΔV^+), regiões hiperbólicas (ΔV^-), curvas parabólicas (ΔE), o gênero das regiões elípticas (ΔW^+) e o gênero das regiões hiperbólicas (ΔW^-).

Tabela 1 – Efeito da transição beaks no número de regiões regulares, curvas parabólicas e gênero de regiões

Transição	ΔV^+	ΔV^-	ΔE	ΔW^+	ΔW^-
$B_v^{+,-}$	0	+1	+1	0	0
$B_v^{+,+}$	+1	0	+1	0	0
$B_v^{-,-}$	0	-1	-1	0	0
$B_v^{-,+}$	-1	0	-1	0	0
$B_w^{+,+}$	0	0	-1	+1	0
$B_w^{+,-}$	0	0	-1	0	+1
$B_w^{-,+}$	0	0	+1	-1	0
$B_w^{-,-}$	0	0	+1	0	-1

As transições beaks ocorrem no sentido em que o número de cúspides é maior. Dessa forma, as transições beaks inversas ocorrem no sentido em que o número de cúspides é menor, sendo portanto capazes de aniquilar duas cúspides da aplicação, além dos efeitos de cada subtipo.

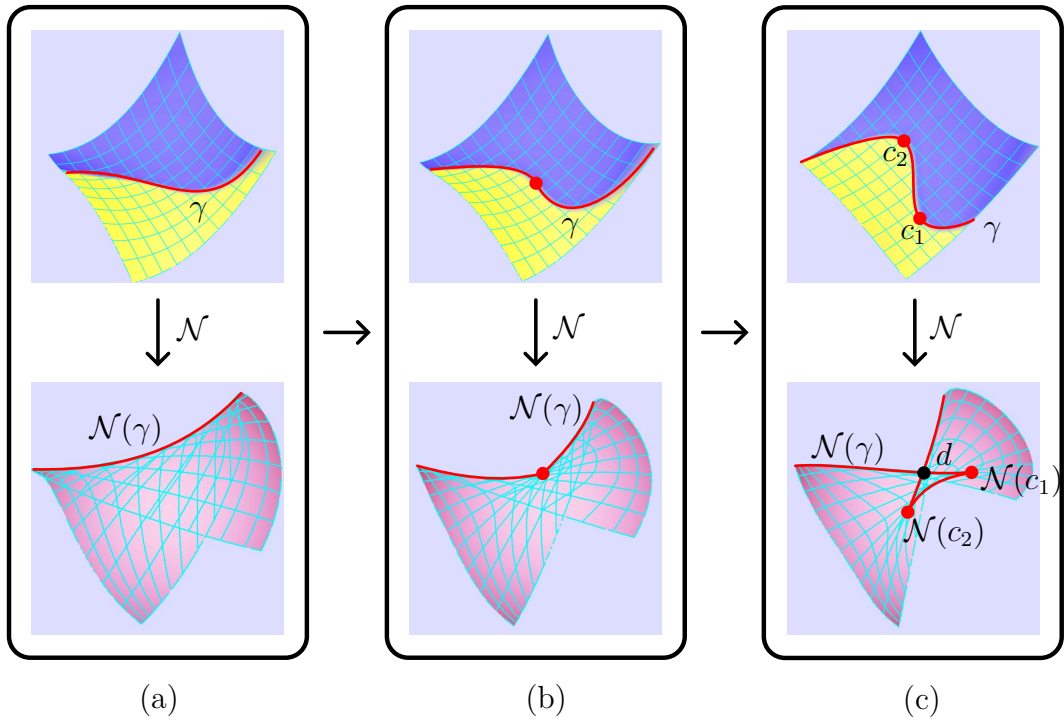
3.3.4 Estrato S

Agora vemos a **transição swallowtail**, que representa o estrato S . Essa transição é caracterizada pelo surgimento de duas cúspides, uma positiva e outra negativa, e um ponto duplo no contorno aparente. A transição swallowtail não altera o conjunto singular, tendo seu efeito apenas no contorno aparente.

Na Figura 3.5 vemos um exemplo da transição swallowtail para as aplicações de Gauss.

- Na Figura 3.5(a) vemos a aplicação antes de passarmos pela transição. Notemos que não há cúspides nem pontos duplos;
- Na Figura 3.5(b) vemos a aplicação enquanto a transição ocorre. Aqui surge um ponto bigodron (vide (27), p. 743.).

Figura 3.5 – Exemplo do estrato S para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

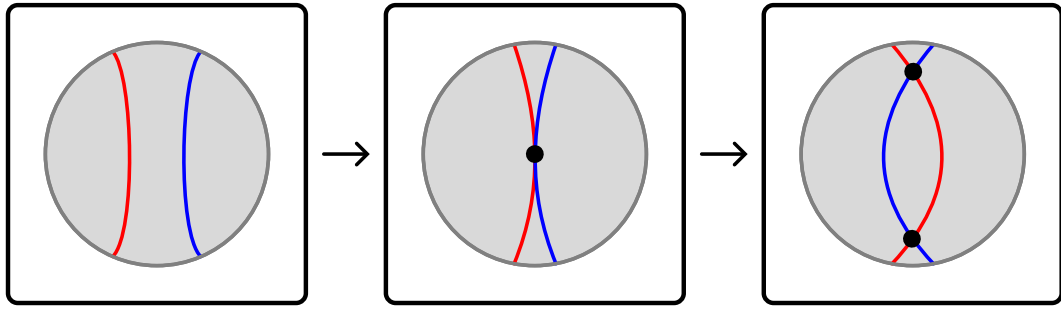
- Na Figura 3.5(c) vemos a aplicação após executarmos a transição swallowtail. Note-mos que surgem duas cúspides, os pontos c_1 e c_2 , além de surgir um ponto duplo, o ponto d , no contorno aparente. As cúspides possuem sinais opostos, onde a cúspide c_1 é negativa e a cúspide c_2 é positiva.

Antes da transição *swallowtail* ocorrer, o arco de curva parabólica não intercepta nenhum cume. No momento da transição a curva parabólica e o cume se interceptam tangencialmente, e após a transição ocorrer, há uma interseção em dois pontos diferentes.

3.3.5 Estratos K

Agora veremos as transições do tipo K . Essa classe é caracterizada pela tangência de dobras no contorno aparente, resultando no surgimento de dois novos pontos duplos e uma região delimitada pelas curvas de dobra, com os pontos duplos como vértices. Ao todo são três transições, K_0 , K_1 e K_2 , que se distinguem pelas orientações das curvas de dobra no momento da tangência, e pelo número de pré-imagens necessárias na região. As transições do tipo K não atuam sobre o conjunto singular, tendo seus efeitos perceptíveis apenas no contorno aparente.

As **pré-imagens necessárias** são pontos na pré-imagem de uma região que são necessários para que a transição ocorra. Uma vez que as transições são, em essência, eventos locais, ao analisá-las não precisamos analisar tudo o que acontece com o conjunto

Figura 3.6 – Estratos K .

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

singular e o contorno aparente num âmbito global. Só precisamos analisar o que está acontecendo em vizinhanças das singularidades que surgem (ou se aniquilam) durante as transições. Daí surgem as pré-imagens necessárias, elas não precisam ser as únicas pré-imagens em torno das singularidades alteradas pelas transições, mas sem a existência dessas pré-imagens, a transição não aconteceria.

3.3.5.1 Estrato K_0

A **transição** K_0 ocorre quando a tangência se dá com curvas de dobra que, no ponto de tangência, possuem orientações contrárias, concluindo-se com a criação de dois novos pontos duplos, e a criação de uma região delimitada pelas curvas que possui zero pré-imagem necessária.

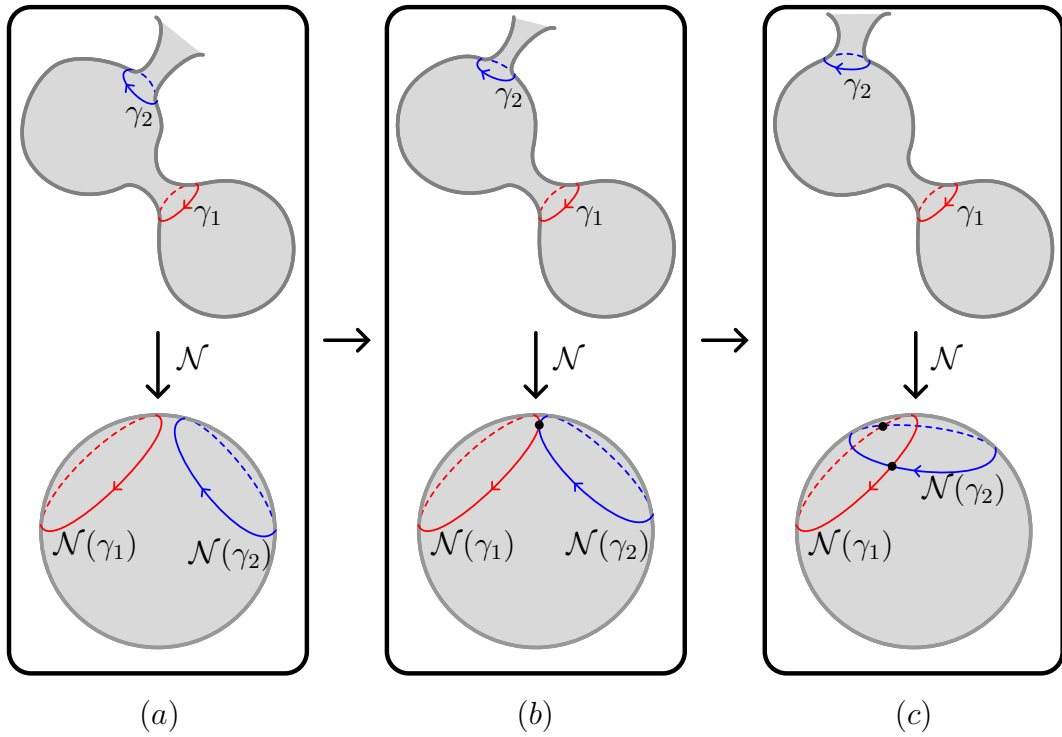
A Figura 3.7 ilustra duas das três curvas parabólicas, γ_1 e γ_2 , sobre uma região homeomorfa ao disco, com duas regiões elípticas e duas regiões hiperbólicas. Vemos na figura um exemplo da transição K_0 para aplicações de Gauss. Notemos que as curvas parabólicas estão orientadas de modo que a região elíptica esteja à esquerda de alguém que esteja percorrendo essa curva.

A orientação das curvas parabólicas também induz uma orientação no contorno aparente. Essa orientação induzida é de tal forma que nas curvas de dobra (isto é, as curvas geradas pelas imagens dos pontos de dobra pela aplicação de Gauss) a superfície é “dobrada à esquerda da curva”. As pré-imagens necessárias serão justamente observadas à esquerda de cada arco do contorno aparente envolvido na transição.

Além disso, na figura estamos destacando apenas as curvas parabólicas envolvidas na transição, além de suas imagens pela aplicação de Gauss. Isso se dá, pois ao destacarmos todas as curvas parabólicas poderíamos ter mais de uma transição ocorrendo em diversos pontos, além de poluir a nossa ilustração, o que anularia o caráter didático da figura.

- Na Figura 3.7(a) vemos o contorno aparente antes da transição ocorrer, onde os arcos estão próximos, mas ainda não existem pontos duplos;

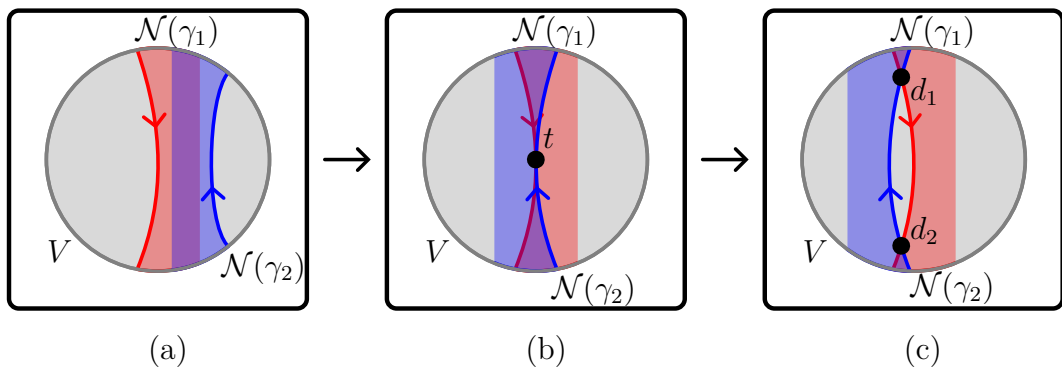
Figura 3.7 – Exemplo do estrato K_0 para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- Na Figura 3.7(b) vemos a aplicação durante a transição, onde se cria um ponto de tangência entre dois arcos no contorno aparente;
- Já na Figura 3.7(c) vemos a aplicação após a transição K_0 ocorrer, onde criaram-se dois novos pontos duplos.

Figura 3.8 – Comportamento do contorno aparente na transição K_0 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.8 vemos mais detalhadamente o comportamento do contorno aparente na transição K_0 numa vizinhança V do ponto de tangência. As cores à esquerda de cada arco no contorno aparente, seguindo-se a orientação do arco, representam a dobra da superfície pela aplicação de Gauss.

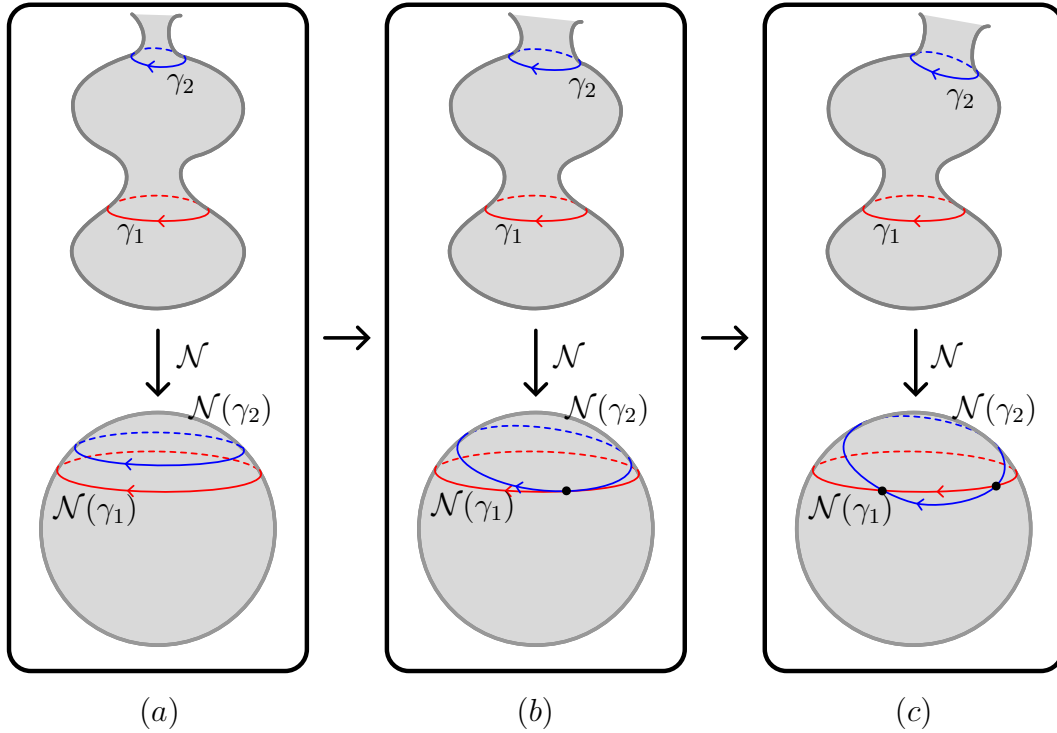
- Na Figura 3.8(a) vemos a imagem da aplicação antes da transição ocorrer, criando uma região com quatro pré-imagens necessárias;
- Na Figura 3.8(b) vemos a imagem da aplicação durante a transição, criando o ponto t , que é um o ponto de tangência entre os arcos do contorno aparente; Notemos que no ponto t as curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$ possuem orientações opostas;
- Na Figura 3.8(c) vemos a imagem da aplicação após a transição ocorrer. Nela podemos verificar que criaram-se dois pontos duplos, os pontos d_1 e d_2 , e criou-se uma região limitada por $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$ com zero pré-imagens necessárias.

A transição K_0 ocorre sempre no sentido em que o número de pontos duplos aumenta. Desse modo, a transição K_0 inversa ($-K_0$) ocorrerá no sentido em que o número de pontos duplos é menor, sendo assim capaz de aniquilar dois pontos duplos.

3.3.5.2 Estrato K_1

A segunda das transições de tangência de dobras é a **transição K_1** . Essa transição ocorre quando a tangência se dá com curvas cujas orientações sejam iguais, concluindo-se com a criação de dois novos pontos duplos, e a criação de uma região delimitada pelas curvas que possui duas pré-imagens necessárias.

Figura 3.9 – Exemplo do estrato K_1 para aplicações de Gauss.

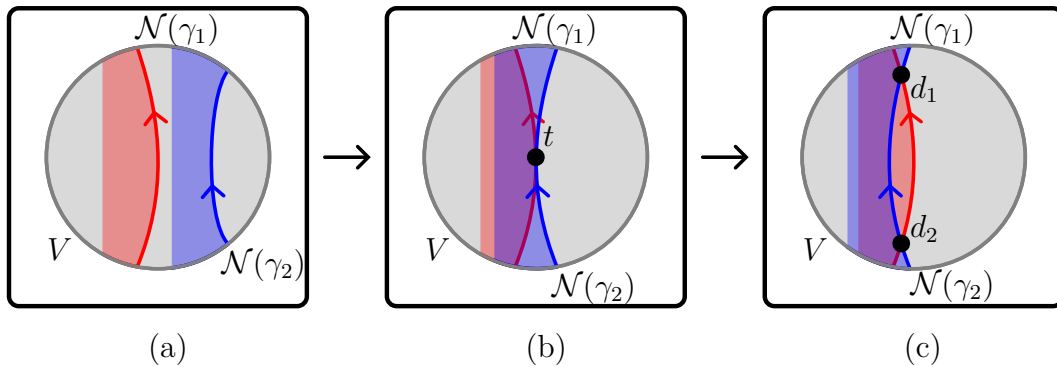


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.9 ilustra duas das três curvas parabólicas sobre uma região homeomorfa ao disco, com duas regiões elípticas e duas regiões hiperbólicas, vemos um exemplo da transição K_1 para aplicações de Gauss. Novamente, as curvas parabólicas estão orientadas a fim de que a região elíptica esteja à esquerda, e apenas destacamos as curvas parabólicas envolvidas nesta transição.

- Na Figura 3.9(a) temos uma aplicação antes da transição ocorrer;
- Na Figura 3.9(b) temos uma aplicação no instante em que a transição ocorre, criando um ponto de tangência entre dois arcos no contorno aparente;
- Na Figura 3.9(c) vemos uma aplicação de Gauss após a transição ocorrer, onde criaram-se dois novos pontos duplos.

Figura 3.10 – Comportamento do contorno aparente na transição K_1 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.10 vemos com mais detalhes como o contorno aparente se comporta numa vizinhança V do ponto de tangência ao passar pela transição K_1 . As cores à esquerda das curvas, seguindo a orientação, indicam o comportamento de dobra da superfície quando tomamos a aplicação de Gauss.

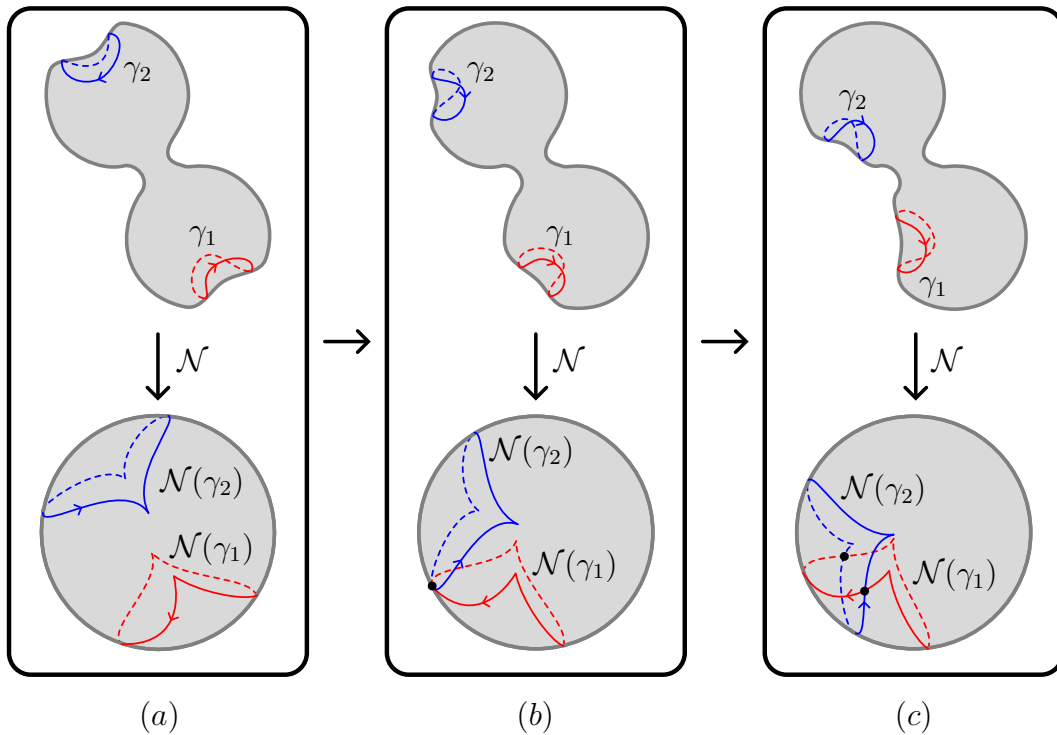
- Na Figura 3.10(a) vemos o contorno aparente antes de realizarmos a transição, onde ainda não surgiram pontos duplos;
- Na Figura 3.10(b) vemos o contorno aparente durante a transição K_1 , onde surge o ponto de tangência t . Notemos que no ponto t as curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$ possuem a mesma orientação.
- Na Figura 3.10(c) vemos o contorno aparente após a transição K_1 ocorrer. Nela podemos perceber que criaram-se dois novos pontos duplos, os pontos d_1 e d_2 . Além disso, criou-se uma região limitada simultaneamente pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$, que possui apenas duas pré-imagens necessárias.

A transição K_1 ocorre sempre no sentido em que o número de pontos duplos aumenta. Desse modo, a transição K_1 inversa ($-K_1$) será capaz de aniquilar dois pontos duplos.

3.3.5.3 Estrato K_2

A última das transições do tipo K é a transição **transição** K_2 , que também ocorre quando a tangência se dá com curvas cujas orientações sejam opostas, e conclui-se criando dois novos pontos duplos, além de criar de uma região delimitada pelas curvas que possui quatro pré-imagens necessárias, o que a distingue da transição K_0 .

Figura 3.11 – Exemplo do estrato K_2 para aplicações de Gauss.

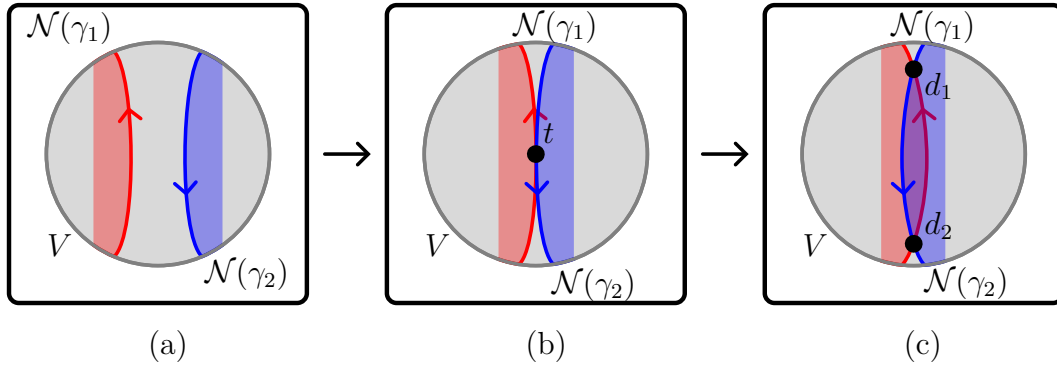


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.11 vemos um exemplo de uma transição K_2 para as aplicações de Gauss. As curvas parabólicas seguem orientadas como anteriormente, e novamente destacamos apenas as curvas envolvidas na transição.

- Na Figura 3.11(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer;
- Na Figura 3.11(b), temos um exemplo de uma aplicação durante a transição, onde podemos observar uma tangência entre arcos no contorno aparente;
- Já na Figura 3.11(c), vemos uma aplicação após a transição K_2 ocorrer, onde vemos que criaram-se dois novos pontos duplos.

Figura 3.12 – Comportamento do contorno aparente na transição K_2 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

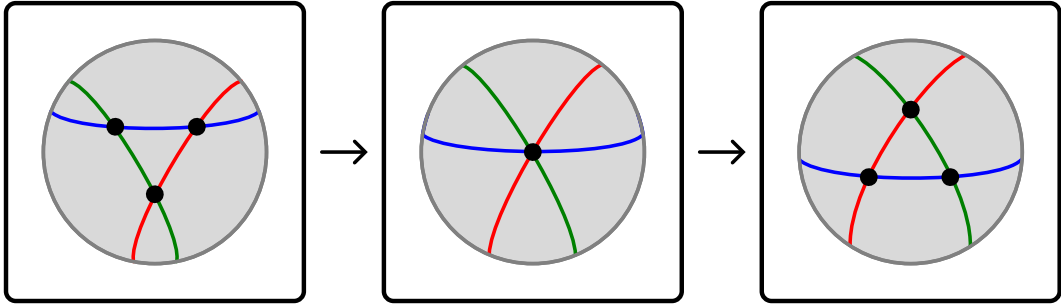
Na Figura 3.12 podemos observar com mais detalhes como o contorno aparente de uma aplicação de Gauss se comporta, numa pequena vizinhança V do ponto de tangência, durante a transição K_2 .

- Na Figura 3.12(a), vemos o contorno aparente antes da transição;
- Na Figura 3.12(b), vemos o contorno aparente durante a transição, onde surge um ponto de tangência, o ponto t , entre as curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$. Notemos que no ponto t as curvas possuem orientações opostas;
- Na Figura 3.12(c), vemos o contorno aparente após a transição K_2 ocorrer. Nela podemos verificar que houve o surgimento de dois pontos duplos novos, os pontos d_1 e d_2 . Houve também o surgimento de uma região limitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$ que possui quatro pré-imagens necessárias.

A transição K_2 ocorre no sentido em que o número de pontos duplos aumenta. Dessa forma, a transição K_2 inversa ($-K_2$) ocorre no sentido em que o número de pontos duplos diminui, sendo, portanto, capaz de aniquilar dois pontos duplos da aplicação.

3.3.6 Estratos T

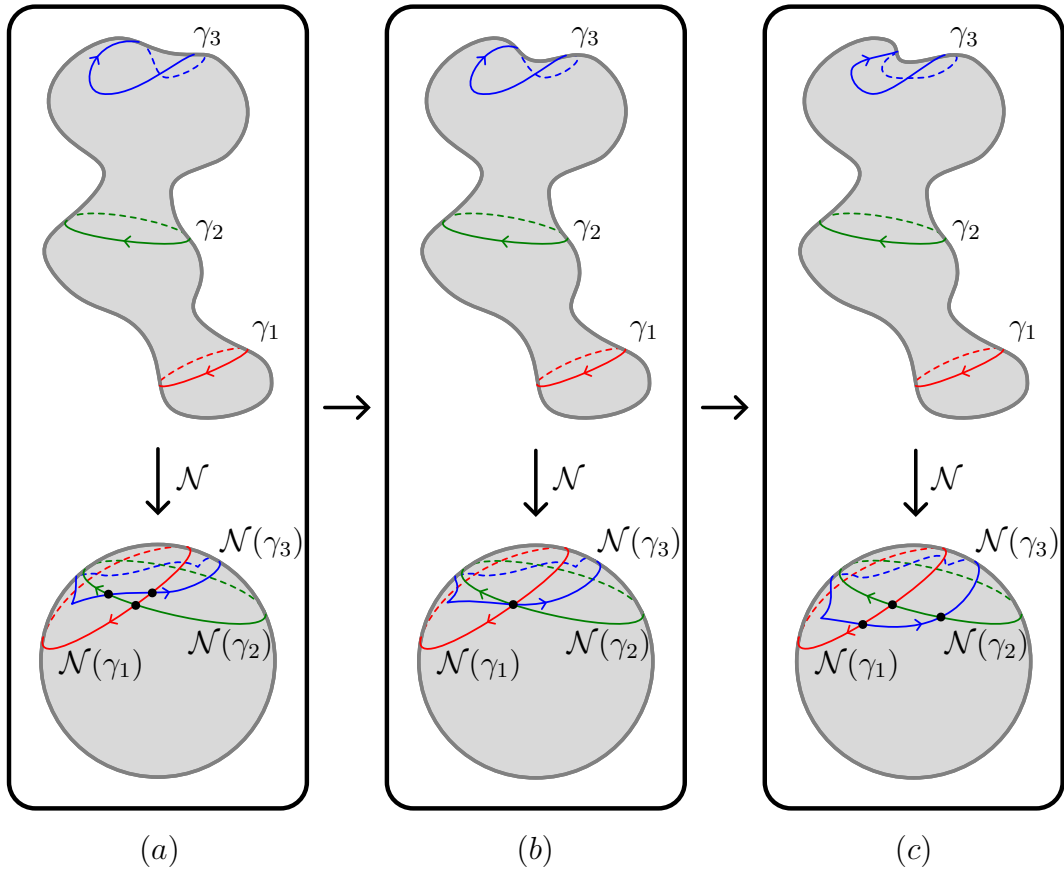
Os estratos da classe T ocorrem quando há o surgimento de um ponto triplo no contorno aparente. Antes da transição temos uma região triangular delimitada pelas curvas de dobra e que possui três pontos duplos, provenientes das interseções entre as curvas, como vértices. Essa região e os pontos duplos dão lugar a um ponto triplo durante a transição, e após voltam a surgir uma região triangular com três pontos duplos como vértices. Existem dois tipos de transições T , T_0 e T_1 , que se distinguem pelo número de pré-imagens necessárias na região triangular criada.

Figura 3.13 – Estratos T .

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.3.6.1 Estrato T_0

A **transição** T_0 ocorre quando há o surgimento de um ponto triplo, isto é, a interseção de curvas no contorno aparente. Antes da transição temos uma região triangular com zero pré-imagem necessária, e após a transição temos uma região triangular com seis pré-imagens necessárias. A transição T_0 não é capaz de alterar o conjunto singular das aplicações de Gauss, assim, seu efeito se faz visível apenas no contorno aparente.

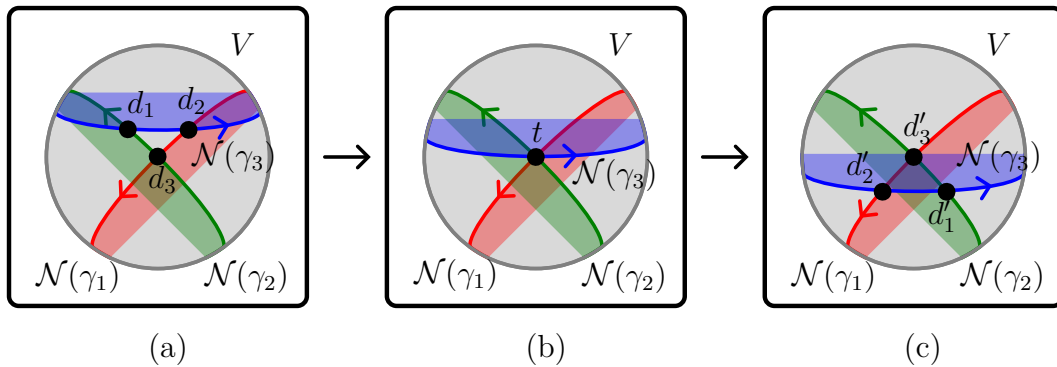
Figura 3.14 – Exemplo do estrato T_0 para aplicações de Gauss.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.14 vemos um exemplo da transição T_0 para aplicações de Gauss. Novamente, destacamos apenas as curvas parabólicas envolvidas na transição por fins didáticos. Cada uma das curvas parabólicas está orientada de modo que ao percorrê-la a região elíptica esteja à sua esquerda.

- Na Figura 3.14(a) vemos a aplicação antes da transição ocorrer. Notemos que existem três pontos duplos, cada um surgindo da interseção no contorno aparente entre duas das três imagens pela aplicação das curvas parabólicas envolvidas na transição;
- Na Figura 3.14(b) vemos a aplicação durante a transição. Os pontos duplos desaparecem, dando lugar a um ponto triplo;
- Na Figura 3.14(c) vemos a aplicação após ocorrer a transição T_0 . Nela, vemos que o ponto triplo desaparece e voltam a surgir três pontos duplos.

Figura 3.15 – Comportamento do contorno aparente na transição T_0 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.15 vemos, agora mais detalhadamente, como a transição T_0 atua, numa pequena vizinhança V do ponto triplo, no contorno aparente das aplicações de Gauss. As regiões coloridas à esquerda de cada curva do contorno aparente, seguindo a orientação, indicam o comportamento de dobra da superfície quando tomamos a imagem da aplicação de Gauss numa vizinhança das curvas parabólicas.

- Na Figura 3.15(a) vemos o contorno aparente antes da transição. Notemos os três pontos duplos, os pontos d_1 , d_2 e d_3 , cada um surgindo da interseção de duas das curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$. A região triangular delimitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$, e que possui os pontos d_1 , d_2 e d_3 como vértices, possui zero pré-imagem necessária;
- Na Figura 3.15(b) vemos o contorno aparente de uma aplicação durante a transição. A região triangular desaparece junto dos pontos duplos, que se encontram num ponto triplo, o ponto t . Notemos que as orientações das curvas no ponto t apontam para vértices alternados de um hexágono;

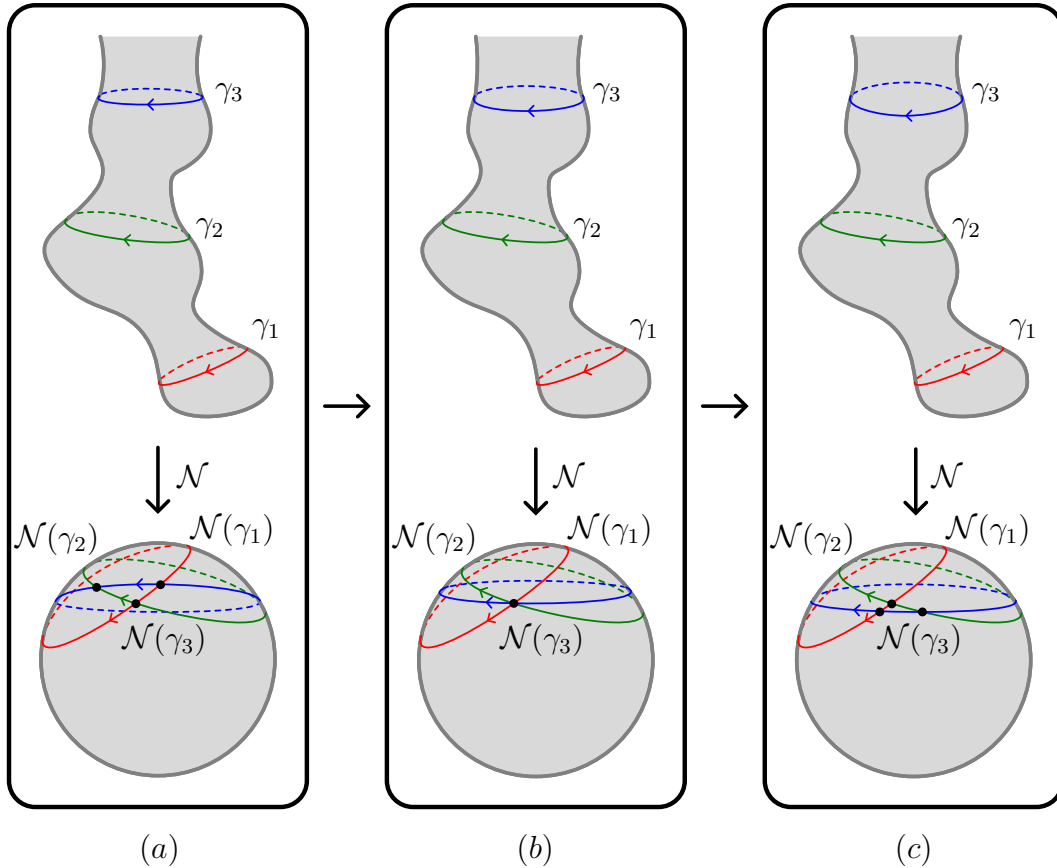
- Na Figura 3.15(c) vemos a aplicação após a transição T_0 ocorrer. Nela podemos verificar que voltam a surgir três pontos duplos, os pontos d'_1 , d'_2 e d'_3 , além de uma nova região triangular delimitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$, e com os pontos d'_1 , d'_2 e d'_3 como vértices. Notemos que agora a região triangular possui seis pré-imagens necessárias.

A transição T_0 ocorre no sentido em que o número de pré-imagens necessárias na região triangular formada é maior. Dessa forma, a sua transição inversa ($-T_0$) ocorre no sentido em que o número de pré-imagens da região triangular formada diminui.

3.3.6.2 Estrato T_1

A outra transição do tipo ponto triplo é a **transição** T_1 . Assim como na transição T_0 , esta transição envolve o surgimento de um ponto triplo, além do desaparecimento e surgimento de uma região triangular delimitada por curvas do contorno aparente. A diferença da transição T_1 com a transição T_0 se dá pelo número de pré-imagens necessárias nas regiões triangulares. A transição T_1 não é capaz de alterar o conjunto singular da aplicação de Gauss, tendo, portanto, os seus efeitos visíveis apenas no contorno aparente.

Figura 3.16 – Exemplo do estrato T_1 para aplicações de Gauss.

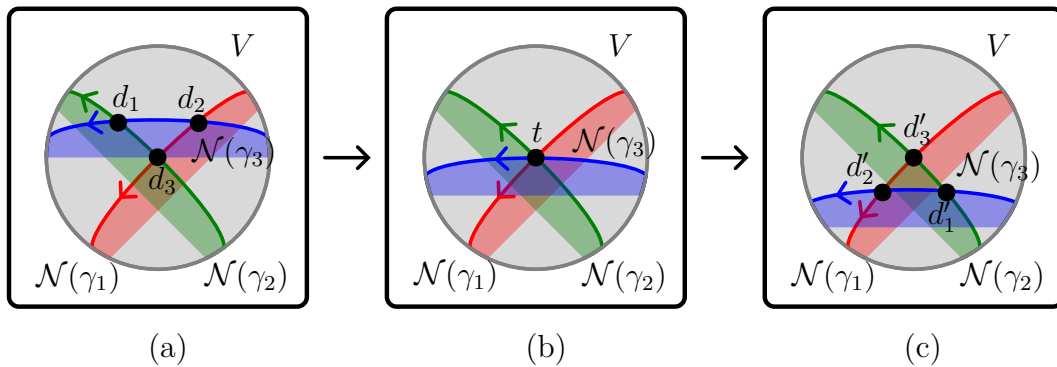


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.16 vemos um exemplo de uma transição T_1 para aplicações de Gauss. Novamente, destacamos somente as curvas parabólicas envolvidas na transição por motivos didáticos. As curvas parabólicas são orientadas de modo que a região elíptica esteja à esquerda de quem percorre

- Na Figura 3.16(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer. Podemos observar que nela existem três pontos duplos que surgem da interseção no contorno aparente das imagens das curvas parabólicas pela aplicação de Gauss. Essas curvas delimitam um região triangular em $\mathbb{S}^2$;
- Na Figura 3.16(b), vemos a aplicação durante a transição. Neste momento os pontos duplos desaparecem, dando lugar a um ponto triplo. A região triangular também desaparece;
- Na Figura 3.16(c), vemos a aplicação após a transição T_1 . Aqui podemos verificar que voltam a aparecer três novos pontos duplos e uma nova região triangular.

Figura 3.17 – Comportamento do contorno aparente na transição T_1 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.17 vemos como o contorno aparente se comporta ao realizarmos a transição T_1 . Estamos representando a transição apenas numa pequena vizinhança V do ponto triplo. As cores à esquerda de cada curva representam o comportamento de dobra da superfície quando tomamos a imagem pela aplicação de Gauss duma vizinhança das curvas parabólicas.

- Na Figura 3.17(a), vemos o contorno aparente antes da transição ocorrer. Notemos os três pontos duplos, os pontos d_1 , d_2 e d_3 . Além disso, temos também uma região triangular delimitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$ e que possui os pontos d_1 , d_2 e d_3 como vértices. Essa região triangular possui apenas duas pré-imagens necessárias, provenientes da dobra da superfície na curva $\mathcal{N}(\gamma_3)$;

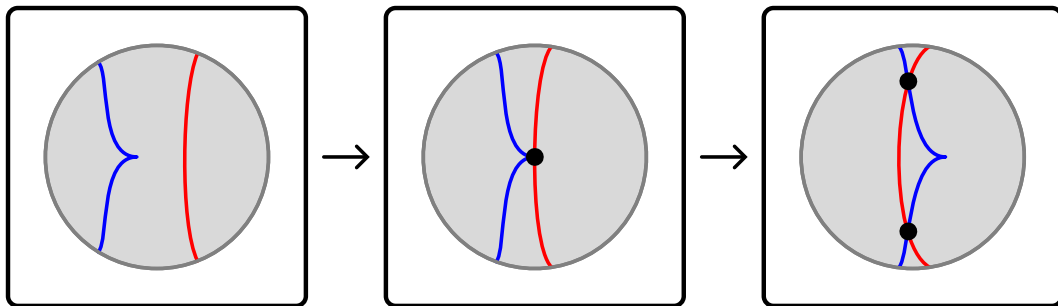
- Na Figura 3.17(b), vemos o contorno aparente durante a transição. Aqui podemos verificar que os pontos duplos e a região triangular desapareceram. No lugar, surge um ponto triplo, o ponto t . Notemos que no ponto triplo as orientações das curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$ apontam para vértices adjacentes de um hexágono.
- Na Figura 3.17(c), vemos o contorno aparente após a transição T_1 ocorrer. Aqui verificamos que o ponto triplo desaparece e surgem três novos pontos duplos, os pontos d'_1 , d'_2 e d'_3 . Além disso, surge uma nova região triangular limitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$, $\mathcal{N}(\gamma_2)$ e $\mathcal{N}(\gamma_3)$ e tendo os pontos d'_1 , d'_2 e d'_3 como vértices. Notemos que essa região triangular possui quatro pré-imagens necessárias, duas provenientes da curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e duas da curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$.

A transição T_1 ocorre no sentido em que o número de pré-imagens necessárias na região triangular formada é maior. Dessa forma, a sua transição inversa ($-T_1$) ocorre no sentido em que o número de pré-imagens necessárias na região triangular formada é menor.

3.3.7 Estratos C

A próxima classe de transições são as transições do tipo C . Essa classe de transições é caracterizada pelo cruzamento de uma cúspide com uma curva de dobra no contorno aparente, resultando no surgimento de dois pontos duplos e de uma região triangular delimitada pelas curvas, e que possui os pontos duplos e a cúspide como vértices. Ao todo são duas transições, C_0 e C_1 , que se distinguem pelo número de pré-imagens necessárias para a região triangular. As transições do tipo C atuam somente no contorno aparente, logo não são capazes de alterar o conjunto singular de uma aplicação de Gauss.

Figura 3.18 – Estratos C .



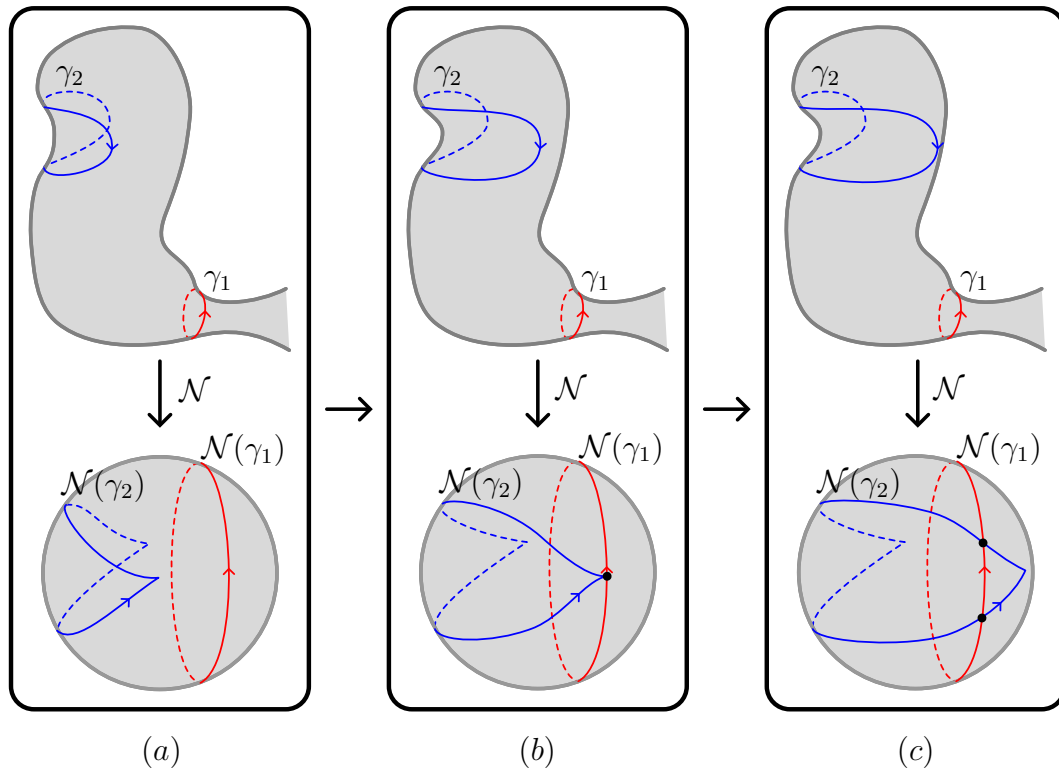
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.3.7.1 Estrato C_0

A **transição** C_0 ocorre quando há a interseção de uma cúspide com uma curva de dobra, resultando na criação de dois pontos duplos e uma região triangular com três

pré-imagens necessárias.

Figura 3.19 – Exemplo do estrato C_0 para aplicações de Gauss.



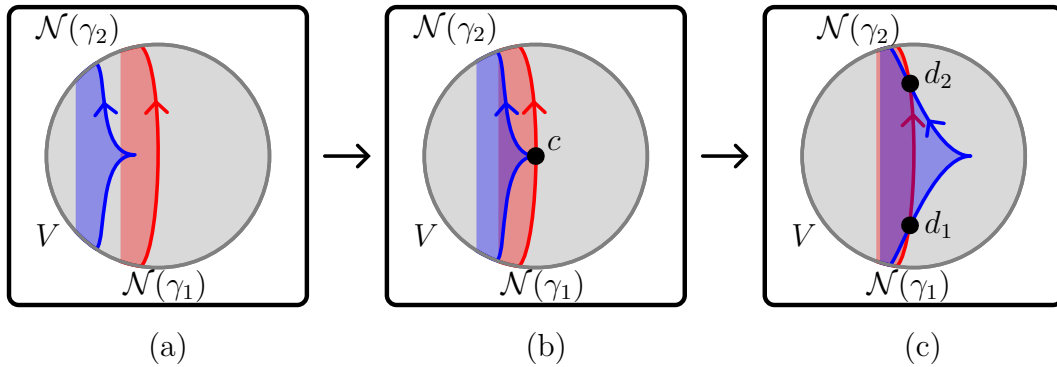
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.19 vemos um exemplo da transição C_0 para aplicações de Gauss. Por motivos didáticos, apenas destacamos as curvas parabólicas envolvidas na transição. As curvas parabólicas estão orientadas de modo que as regiões elípticas estejam à esquerda de quem percorre a curva.

- Na Figura 3.19(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer;
- Na Figura 3.19(b), vemos a aplicação durante a transição. Aqui vemos uma cúspide se encontrando com uma curva de dobra no contorno aparente;
- Na Figura 3.19(c), vemos a aplicação após a transição ocorrer. Aqui podemos ver que surgem dois novos pontos duplos no contorno aparente, além de uma região triangular.

Na Figura 3.20, vemos com mais detalhes como o contorno aparente se comporta, numa vizinhança V do ponto de interseção da cúspide com a curva, quando fazemos a transição C_0 . As cores à esquerda de cada curva, seguindo a orientação, representam o comportamento de dobra da superfície quando tomamos a aplicação de Gauss numa vizinhança das curvas parabólicas. Entretanto, diferentemente dos casos anteriores, neste caso existe uma pequena diferença entre o comportamento de dobra quando olhamos pra

Figura 3.20 – Comportamento do contorno aparente na transição C_0 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$, em que cada ponto da região colorida possui duas pré-imagens na vizinhança de γ_1 , e quando olhamos pra curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$, em que cada ponto da região colorida possui três pré-imagens na vizinhança de γ_2 . Vide as Figuras 3.2 e 3.3 para uma melhor compreensão de como se dão as pré-imagens.

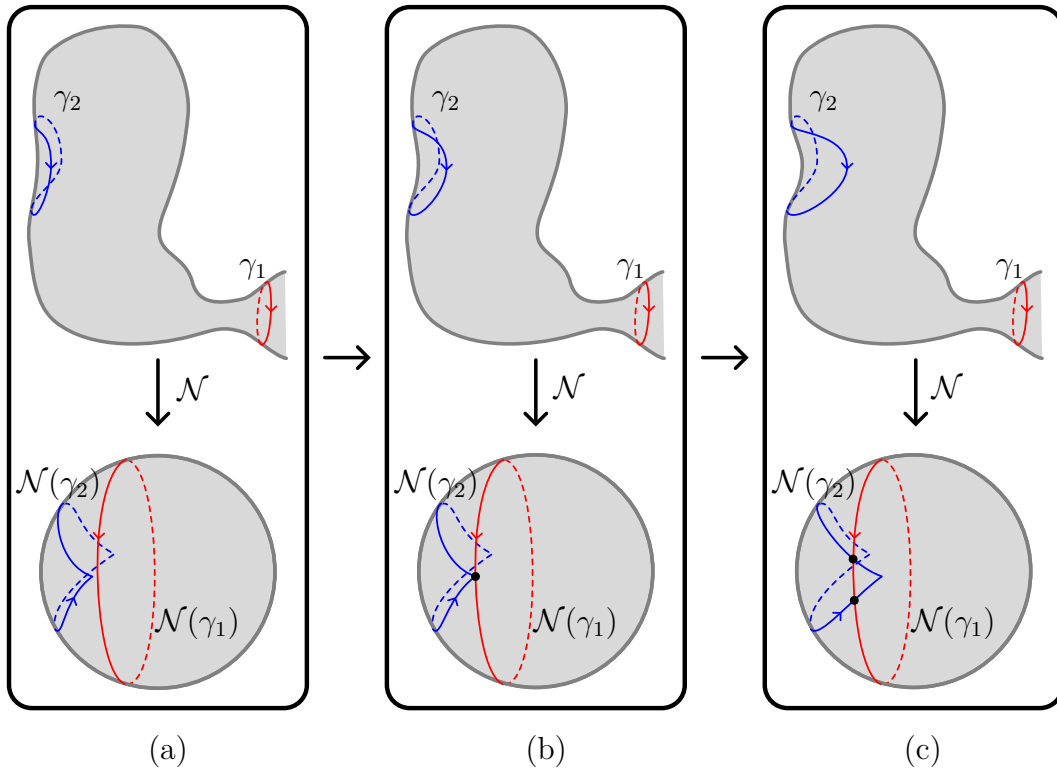
- Na Figura 3.20(a), vemos o contorno aparente antes da transição, onde ainda não há interseção entre as curvas;
- Na Figura 3.20(b) vemos o contorno aparente durante a transição. Aqui podemos observar que a cúspide de $\mathcal{N}(\gamma_2)$ está se interseccionando com a curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$ no ponto c ;
- Na Figura 3.20(c), vemos o contorno aparente após a transição C_0 ocorrer. Aqui podemos verificar que surgem dois novos pontos duplos, os pontos d_1 e d_2 , além de uma região triangular delimitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$, e que possui como vértices os pontos duplos d_1 e d_2 e a cúspide de $\mathcal{N}(\gamma_2)$. Notemos também que a única curva que colore a região triangular é a curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$, visto que a região está à direita de $\mathcal{N}(\gamma_1)$, seguindo a sua orientação. Como vimos que a região colorida por $\mathcal{N}(\gamma_2)$ possui três pré-imagens na superfície, concluímos que a região triangular deve ter três pré-imagens necessárias.

A transição C_0 ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é maior. Dessa forma, a sua transição inversa ($-C_0$) ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é menor, sendo, assim, capaz de aniquilar dois pontos duplos da aplicação.

3.3.7.2 Estrato C_1

A **transição** C_1 ocorre quando há a interseção de uma cúspide com uma curva de dobra, resultando na criação de dois pontos duplos e uma região triangular com cinco pré-imagens necessárias.

Figura 3.21 – Exemplo do estrato C_1 para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

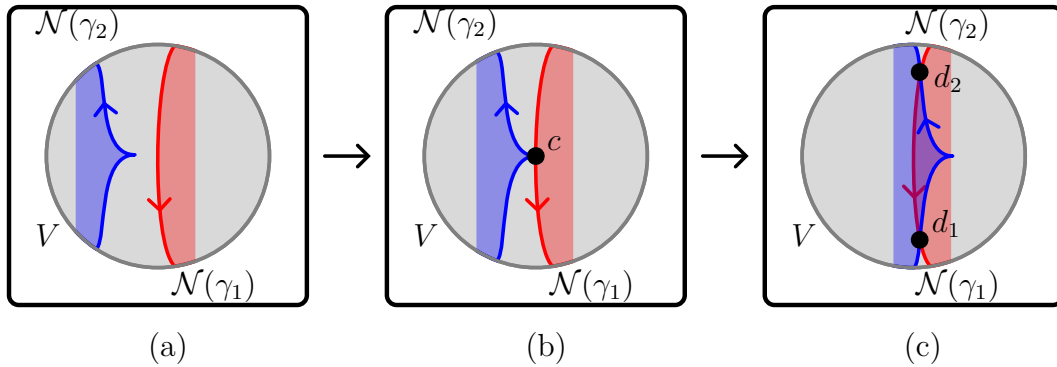
Na Figura 3.21 vemos um exemplo da transição C_1 para aplicações de Gauss. Por uma questão didática, representamos apenas as curvas parabólicas envolvidas na transição. As curvas parabólicas estão orientadas de modo que a região elíptica esteja à esquerda de quem está percorrendo a curva.

- Na Figura 3.21(a) vemos a aplicação antes de passar pela transição.
- Na Figura 3.21(b) vemos a aplicação passando pela transição. Aqui podemos verificar uma cúspide se encontrando com uma curva de dobra no contorno aparente;
- Na Figura 3.21(c) vemos a aplicação após a transição. Aqui podemos verificar que surgem dois pontos duplos no contorno aparente e uma região triangular.

Na Figura 3.22, observamos de forma mais detalhada o comportamento do contorno aparente numa vizinhança V do ponto de interseção da curva com a cúspide ao fazermos a transição C_1 . As cores ao lado das curvas representam o comportamento de dobra da superfície quando tomamos a aplicação de Gauss, novamente com o detalhe de que na curva $N(\gamma_1)$ temos duas pré-imagens, enquanto na curva $N(\gamma_2)$ teremos três pré-imagens.

- Na Figura 3.22(a), vemos o contorno aparente antes da transição ocorrer. Notemos que ainda não existem pontos duplos;

Figura 3.22 – Comportamento do contorno aparente na transição C_1 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- Na Figura 3.22(b), vemos o contorno aparente durante a transição. Aqui podemos verificar que a cúspide da curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$ passa a interseccionar a curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$ no ponto c ;
- Na Figura 3.22(c), vemos o contorno aparente após a transição ocorrer. Aqui podemos verificar que surgem dois novos pontos duplos, os pontos d_1 e d_2 , além de uma região triangular delimitada pelas curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$, e que possui os pontos d_1 e d_2 e a cúspide de $\mathcal{N}(\gamma_2)$ como vértices. Além disso, podemos verificar que a região triangular possui cinco pré-imagens necessárias: duas provenientes da curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e três provenientes da curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$.

A transição C_1 ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é maior. Dessa forma, a sua transição inversa ($-C_1$) ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é menor, sendo, portanto, capaz de aniquilar dois pontos duplos da aplicação.

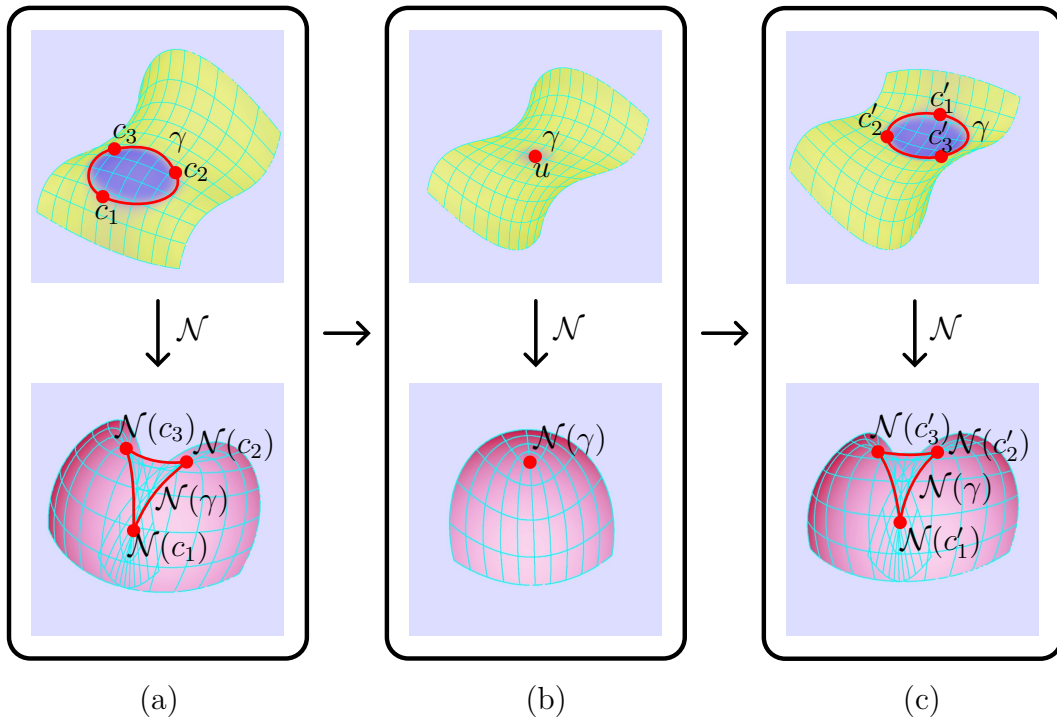
3.3.8 Estratos D_4

Por fim, temos as **transições** D_4 , que se caracterizam pelo surgimento de um ponto umbílico. Ao todo, temos três transições do tipo D_4 : a transição D_4^- , que se caracteriza pelo surgimento de um ponto umbílico elíptico, e duas transições D_4^+ , as transições $D_4^+{}_{1}$ e $D_4^+{}_{2}$, que se caracterizam pelo surgimento de um ponto umbílico hiperbólico. Embora as transições D_4 causem alterações na topologia do conjunto singular enquanto a transição está ocorrendo, não somos capazes de distinguir o conjunto singular antes e após a transição apenas topologicamente.

3.3.8.1 Estrato D_4^-

A **Transição** D_4^- se dá quando há uma região triangular no contorno aparente com três cúspides como vértices, que desaparece num ponto umbílico elíptico, para por fim reaparecer uma nova região triangular.

Figura 3.23 – Exemplo do estrato D_4^- para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.23, vemos um exemplo para a transição D_4^- para aplicações de Gauss. Este exemplo é ilustrado pela família de funções $f(x, y, t) = x^3 - xy^2 + ty^2$.

- Na Figura 3.23(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer. Aqui podemos verificar que existem três cúspides, os pontos c_1 , c_2 e c_3 . No contorno aparente, vemos a região triangular com três cúspides como vértices;
- Na Figura 3.23(b), vemos a aplicação durante a transição. Aqui vemos que a curva singular se torna um ponto umbílico, o ponto u ;
- Na Figura 3.23(c), vemos a aplicação após a transição ocorrer. Aqui vemos que volta a aparecer uma curva parabólica com três cúspides, os pontos c'_1 , c'_2 e c'_3 . No contorno aparente volta a aparecer uma região triangular com três cúspides como vértices.

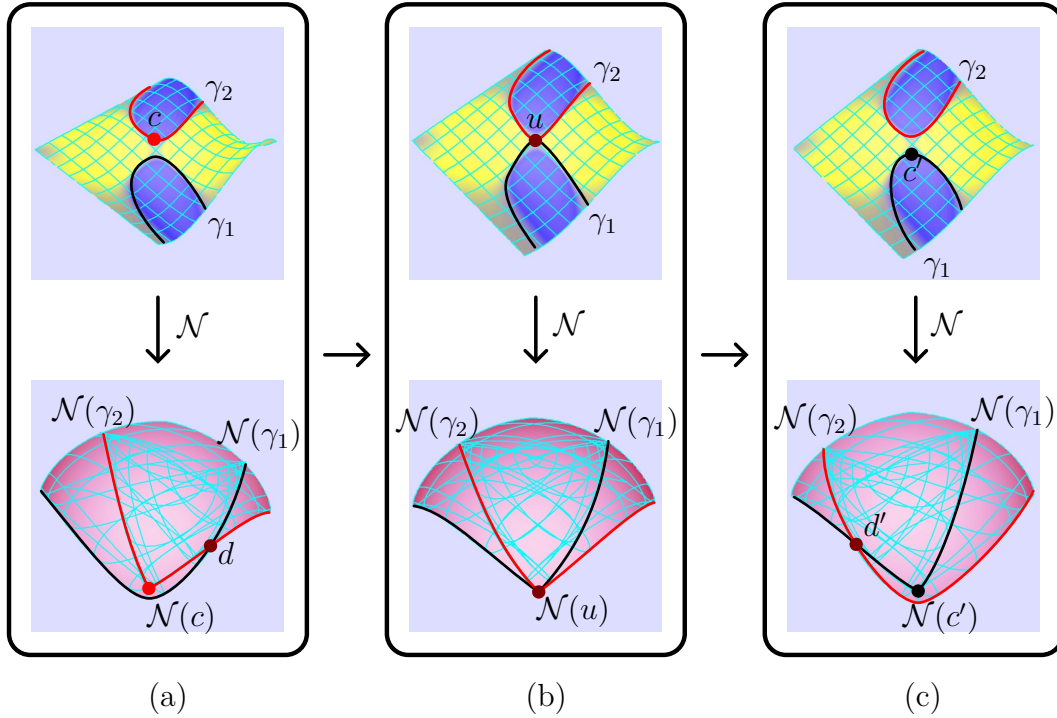
Com as informações trazidas neste trabalho não somos capazes de estabelecer uma orientação para a transição D_4^- , portanto não conseguimos diferenciá-la da sua transição inversa.

3.3.8.2 Estrato $D_{4_1}^+$

A **transição** $D_{4_1}^+$ é capaz de transferir uma cúspide de uma curva parabólica para outra. Ela ocorre quando há a uma interseção de duas curvas singulares num ponto umbílico, que logo depois se separam, transferindo a cúspide de uma curva para a outra.

Nessa transição também temos a presença de um ponto duplo, que desaparece no momento da transição, e reaparece depois.

Figura 3.24 – Exemplo do estrato D_{4-1}^+ para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

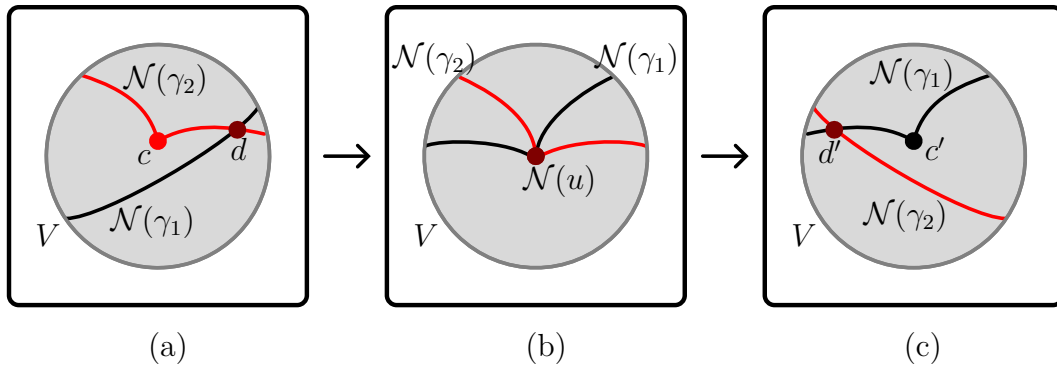
Na Figura 3.24 vemos um exemplo da transição D_{4-1}^+ para as aplicações de Gauss.

- Na Figura 3.24(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer;
- Na Figura 3.24(b), vemos a aplicação durante a transição. Surge um ponto umbílico na superfície, o ponto u , onde passa a haver uma interseção entre as curvas parabólicas γ_1 e γ_2 ;
- Na Figura 3.24(c), vemos a aplicação após a transição ocorrer. Aqui as curvas parabólicas voltam a se separar, desaparecendo com o ponto umbílico.

Na Figura 3.25, vemos com mais detalhes como o contorno aparente da aplicação de Gauss se comporta, numa vizinhança V da imagem do ponto umbílico, ao fazermos a transição D_{4-1}^+ .

- Na Figura 3.25(a), vemos o contorno aparente antes de realizarmos a transição. Notemos que a curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$ possui uma cúspide, o ponto c , e que existe um ponto duplo, o ponto d ;

Figura 3.25 – Comportamento do contorno aparente na transição $D_4^+{}_1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- Na Figura 3.25(b), vemos o contorno aparente durante a transição. Aqui a cúspide e o ponto duplo desaparecem, dando espaço a uma interseção entre as curvas $\mathcal{N}(\gamma_1)$ e $\mathcal{N}(\gamma_2)$;
- Na Figura 3.25(c), vemos o contorno aparente após a transição $D_4^+{}_1$. Notemos que volta a aparecer um ponto duplo, o ponto d' , na interseção das curvas. Além disso, notemos que volta a aparecer uma cúspide, o ponto c' , entretanto, após a transição a cúspide passa a estar na curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$.

Com as informações que trouxemos neste trabalho não somos capazes de estabelecer uma orientação positiva para a transição $D_4^+{}_1$.

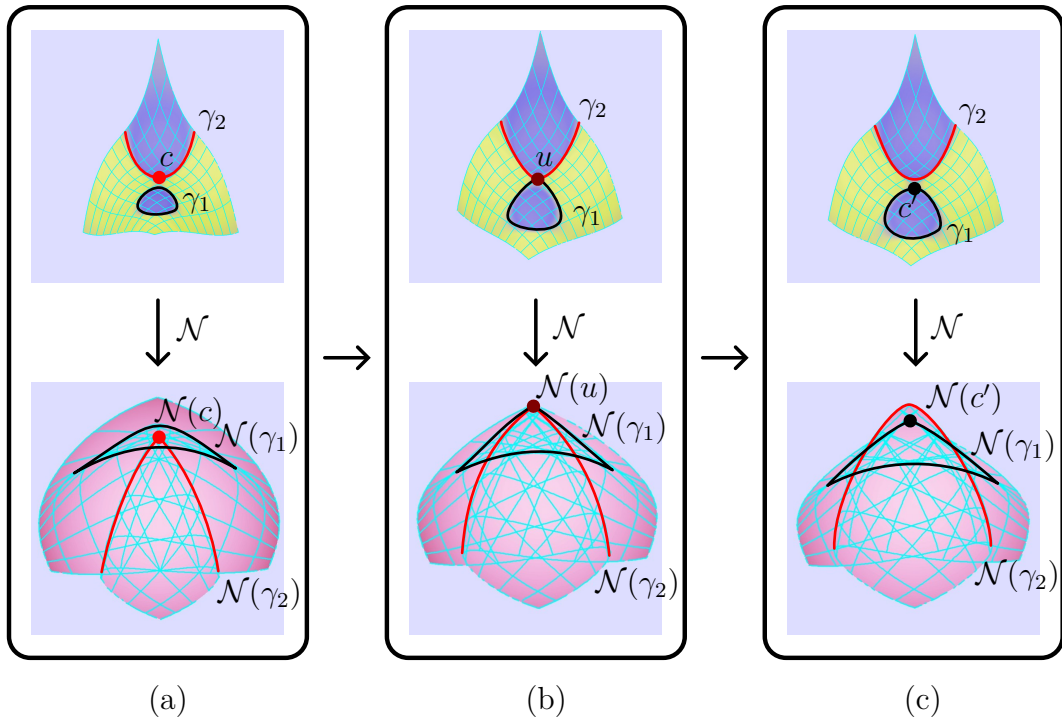
3.3.8.3 Estrato $D_4^+{}_2$

A última das transições D_4 , e também a última das transições que descreveremos aqui, é a **transição** $D_4^+{}_2$. Por ser uma transição do tipo D_4^+ , ela é caracterizada por transferir uma cúspide de uma curva parabólica para outra, surgindo um ponto umbílico durante a transição. Entretanto, ela se distingue da transição $D_4^+{}_1$, pois ela cria dois novos pontos duplos no contorno aparente.

Na Figura 3.26 vemos um exemplo da transição $D_4^+{}_2$.

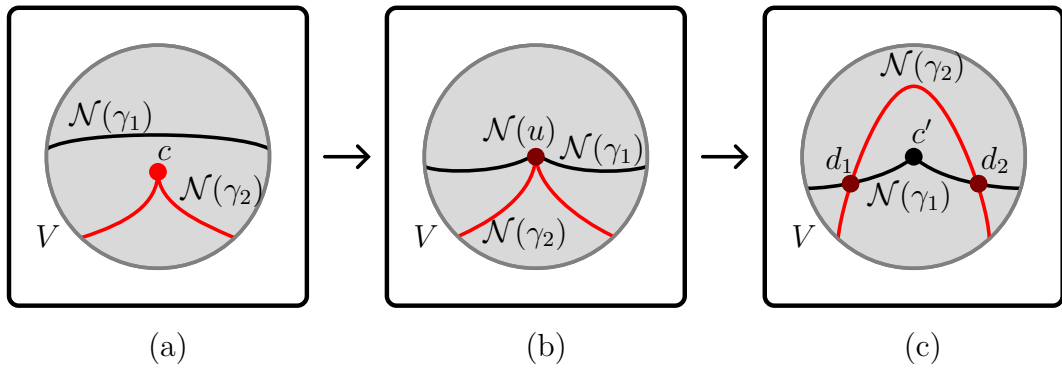
- Na Figura 3.26(a), vemos a aplicação antes da transição ocorrer. Notemos a cúspide, o ponto c , na curva γ_2 ;
- Na Figura 3.26(b), vemos a aplicação durante a transição. Notemos que as curvas parabólicas se interceptam num ponto, o ponto u , que é um ponto umbílico;
- Na Figura 3.26(c), vemos a aplicação após a transição ocorrer. Aqui vemos que as curvas parabólicas voltam a se separar, desaparecendo com o ponto umbílico. Notemos que a cúspide volta a reaparecer, mas desta vez na curva γ_1 .

Figura 3.26 – Exemplo do estrato $D_{4\ 2}^+$ para aplicações de Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 3.27 – Comportamento do contorno aparente na transição $D_{4\ 2}^+$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 3.27, vemos com mais detalhes como o contorno aparente se comporta, numa vizinhança V da imagem do ponto umbílico, ao realizarmos a transição D_4^+ .

- Na Figura 3.27(a), vemos o contorno aparente antes da transição. Aqui ainda não temos pontos duplos, e a cúspide está na curva $\mathcal{N}(\gamma_2)$;
- Na Figura 3.27(b), vemos o contorno aparente durante a transição. Aqui surge uma intercessão entre as curvas na imagem do ponto umbílico;
- Na Figura 3.27(c), vemos o contorno aparente após realizarmos a transição. Aqui vemos que as curvas passam a se interseccionar transversalmente em dois novos pontos duplos, os pontos d_1 e d_2 . Além disso, podemos notar que a cúspide agora está na curva $\mathcal{N}(\gamma_1)$.

A transição D_4^+ ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é maior. Dessa forma, a sua transição inversa $(-D_4^+)$ ocorre no sentido em que o número de pontos duplos é menor, sendo assim capaz de aniquilar dois pontos duplos da aplicação de Gauss.

3.4 CIRURGIAS DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

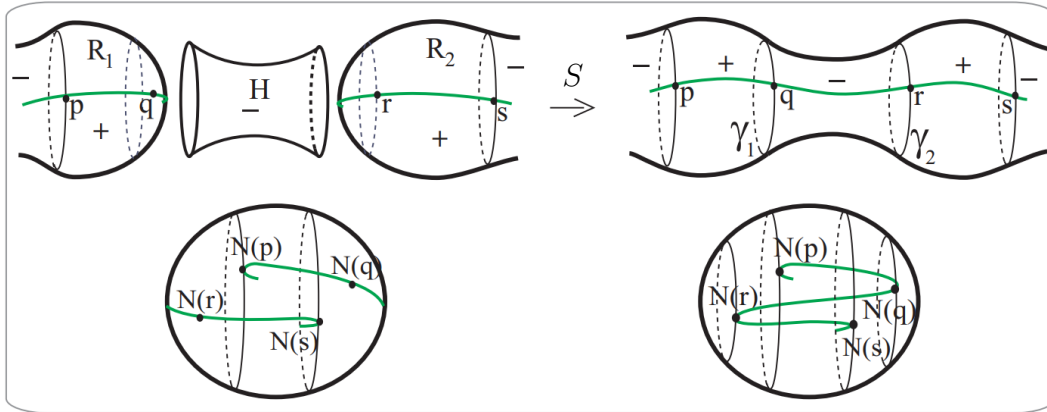
Com as transições nós vimos maneiras de se remodelar uma superfície M a fim de se obter novas aplicações de Gauss estáveis. Embora as transições consigam alterar as regiões regulares, elas não são capazes de alterar a superfície em si, não são capazes, por exemplo, de aumentar o gênero de M . Para isso, precisaremos das cirurgias.

Existem dois tipos de cirurgias de aplicações de Gauss estáveis que definiremos: a cirurgia S^0 e a cirurgia S^1 . A diferença entre as duas cirurgias é simplesmente que a cirurgia S^0 é feita entre regiões de superfícies disjuntas, enquanto a cirurgia S^1 é feita entre regiões de uma mesma superfície. Entretanto, ambas seguem o mesmo processo, o qual descreveremos a seguir.

Sejam R_1 e R_2 duas regiões elípticas distintas. A fim de efetuarmos uma cirurgia entre R_1 e R_2 , retiramos de cada região um disco aberto. A retirada desses discos gera uma curva de bordo em cada região, a curva ∂R_1 em R_1 e a curva ∂R_2 em R_2 . Tomemos a superfície H sendo um pedaço de catenoide homeomorfo a um cilindro com duas curvas de borda, as curvas ∂H_1 e ∂H_2 , de tal modo que seja possível identificar os planos tangentes em cada ponto, isto é, exista uma bijeção $\varphi_i : \partial H_i \rightarrow \partial R_i$, para $i = 1, 2$, tal que

$$T_p H = T_{\varphi_i(p)} M, \forall p \in \partial H_i.$$

Fazemos, então, a identificação de ∂H_i com ∂R_i de acordo com a bijeção φ_i acima, com $i = 1, 2$. Dessa forma uniremos as regiões elípticas R_1 e R_2 por uma nova região hiperbólica H . No processo criamos duas novas curvas parabólicas, a saber as curvas ∂R_1 e ∂R_2 . A cirurgia está ilustrada na Figura 3.28.

Figura 3.28 – Cirurgia S .

Fonte: Adaptado de (26), p. 31.

Observemos que todo o processo deve ser feito a fim de que a nova superfície seja estável. Para isso, os discos retirados devem ser tomados de modo que as imagens das curvas parabólicas criadas nas cirurgias não tangenciem outras partes do contorno aparente. Além disso, é interessante que façamos a cirurgia a fim de não criar novas cúspides.

Uma pergunta pode surgir a partir da definição das cirurgias: o que diferencia uma cirurgia de uma soma conexa? No contexto das aplicações de Gauss, não existe diferença entre as duas topologicamente. O que as distingue é a geometria diferencial da superfície. A soma conexa não exige diferenciabilidade, o que nos seria um problema, pois a aplicação de Gauss poderia deixar de estar bem definida. O processo da cirurgia, portanto, nos garante que a nova superfície obtida mantenha uma aplicação de Gauss bem definida.

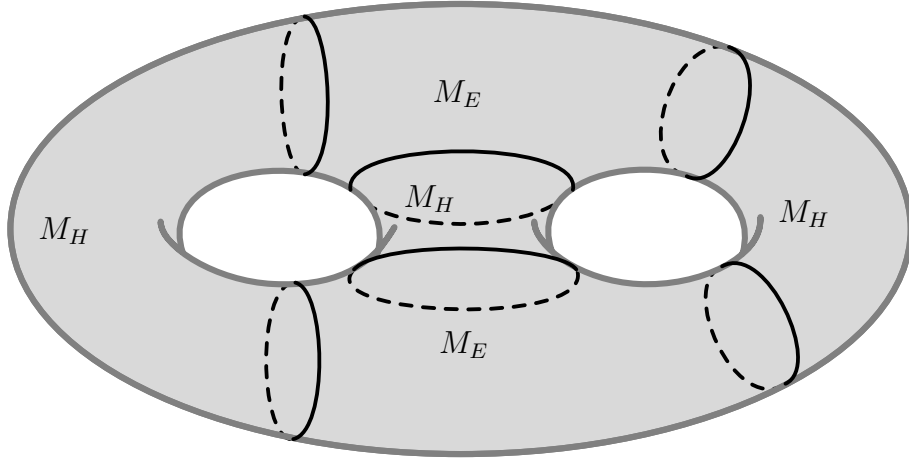
3.5 APLICAÇÕES DE GAUSS SEM CÚSPIDES

Definição 3.5.1. Diremos que uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma **aplicação de Gauss sem cúspides** quando for também uma aplicação sem cúspides, isto é, quando for uma aplicação de Gauss sem cúspides.

Consideremos, nos resultados a seguir, que M seja uma superfície fechada, conexa e orientável, que contém um subconjunto Γ composto por um número finito de curvas fechadas, simples e disjuntas (círculos mergulhados), e tais que $M \setminus \Gamma$ é a união de regiões de M , denotadas por M_E e M_H , e que em cada curva de Γ é bordo comum de uma região de M_E e de uma região M_H , como ilustrado da Figura 3.29.

Proposição 3.5.2 ((19), p. 9). *Seja M uma superfície fechada, conexa e orientável, cujo subconjunto Γ consiste de dois círculos mergulhados que separam duas regiões M_E de uma região M_H homeomorfa a um cilindro. Então existe uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss é uma aplicação sem cúspides.*

Figura 3.29 – Bitoro com as curvas Γ , e as regiões M_E e M_H .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Demonstração (Adaptada de (19), p. 9). Começaremos analisando os casos mais simples.

1. Se M tem apenas uma região M_H homeomorfa a um cilindro e as duas regiões M_E são homeomorfas a um disco, então considerando a identidade, enquanto aplicação de Gauss do mergulho canônico de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$, e usando transições lips e beaks, obteremos uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Essa imersão tem $f(M_E)$ como sendo a região elíptica, $f(M_H)$ como a região hiperbólica e $f(\Gamma)$ como sendo o conjunto parabólico de $f(M)$. Desse modo, a aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f$ se tornará uma aplicação de Gauss sem cúspides.

Uma outra forma é aplicar uma cirurgia S^0 entre duas esferas mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ a fim de obtermos uma imersão com uma aplicação de Gauss sem cúspides.

2. Se M tem uma região M_H homeomorfa a um cilindro, uma de suas regiões M_E tem gênero 1 e a outra região M_E é homeomorfa a um disco, os passos (a) a (e) na Figura 3.30 nos ilustram uma forma de se obter uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de tal modo que $f(M_H)$ é a região hiperbólica, $f(M_E)$ é a região elíptica, $f(\Gamma)$ é o conjunto parabólico de $f(M)$ e sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação de Gauss sem cúspides.
3. Se M tem uma região M_H homeomorfa a um cilindro e duas regiões M_E , onde uma delas tem gênero 2 e a outra é homeomorfa a um disco, então os passos (a) a (c) na Figura 3.31 nos mostram as transições aplicadas a fim de se obter uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tem $f(M_H)$ como sua região hiperbólica, $f(M_E)$ como sua região elíptica, $f(\Gamma)$ como seu conjunto parabólico e $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação de Gauss sem cúspides.

As imersões das superfícies acima e suas respectivas aplicações de Gauss sem cúspides nos servirão como casos base para uma indução matemática. Se a superfície M tem uma região do tipo M_H homeomorfa a um cilindro e cada região M_E tem gênero 1, podemos usar a Figura 3.30(m) e uma transição $B_v^{-,-}$ seguida de uma transição $-L^-$ a fim de obtermos uma imersão com uma aplicação de Gauss sem cúspides. Da mesma forma, se M tiver uma região M_H homeomorfa a um cilindro, uma região M_E de gênero 1 e uma região M_E de gênero 2, podemos aplicar uma cirurgia S^0 entre as superfícies nas Figuras 3.30(e) e 3.31(c), seguida pelas transições $B_v^{-,-}$ e $-L^-$ a fim de obtermos uma imersão de M com uma aplicação de Gauss estável.

Se assumirmos que dada qualquer superfície M_i com duas curvas em Γ e somente uma região M_{iH} , homeomorfa a um cilindro, e duas regiões M_{iE} , uma delas com gênero $g^+ = i$ e a outra homeomorfa a um disco, existe uma imersão $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_{f_i}$ é uma aplicação sem cúspides e que tem esse padrão de pontos elípticos e hiperbólicos, então podemos provar o caso em que $g^+ = i + 1$ executando a sequência (c) a (h) na Figura 3.31 em M_i a fim de obtermos uma imersão para M_{i+1} com uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}_{f_{i+1}}$.

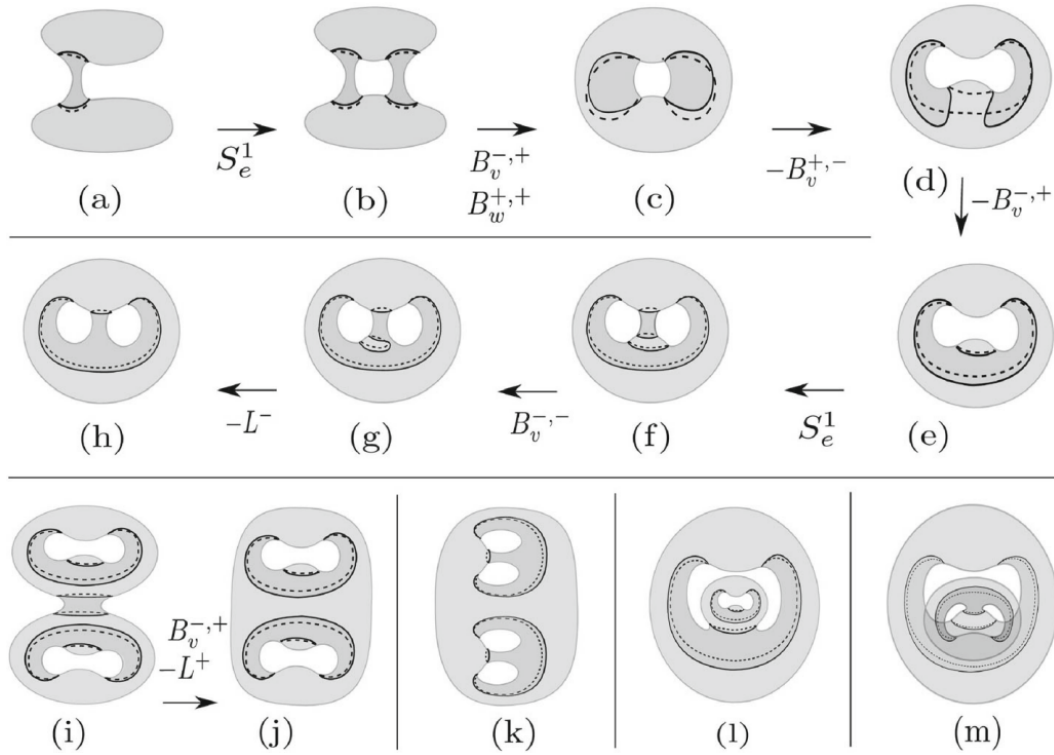
No caso geral de uma superfície M com apenas uma região M_H homeomorfa a um cilindro, e duas regiões M_E de gêneros $g_1^+ = k > 1$ e $g_2^+ = l > 2$, respectivamente, consideramos duas superfícies M_k e M_l como no caso anterior: a superfície M_k tem uma região M_{kH} homeomorfa a um cilindro, e duas regiões M_{kE} , uma com gênero $g_1^+ = k$ e a outra homeomorfa a um disco, de maneira similar, a superfície M_l tem uma região M_{lH} homeomorfa a um cilindro, e duas regiões M_{lE} , uma com gênero $g_2^+ = l$ e a outra homeomorfa a um disco. Então, fazendo uma cirurgia S^0 entre as regiões homeomorfas a um disco de M_{kE} e M_{lE} , e aplicando uma transição $B_v^{-,-}$ seguida por uma $-L^-$, obtemos uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação sem cúspides, e que tem esse padrão de pontos hiperbólicos e elípticos.

□

Proposição 3.5.3 ((19), p. 9). *Seja M uma superfície fechada, conexa e orientável de gênero $2k$, com $k \geq 1$, cujo subconjunto Γ consiste de $2k$ círculos mergulhados que separam k regiões M_H , cada uma homeomorfa a um cilindro, de uma região M_E de gênero k . Então existe uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss é uma aplicação sem cúspides.*

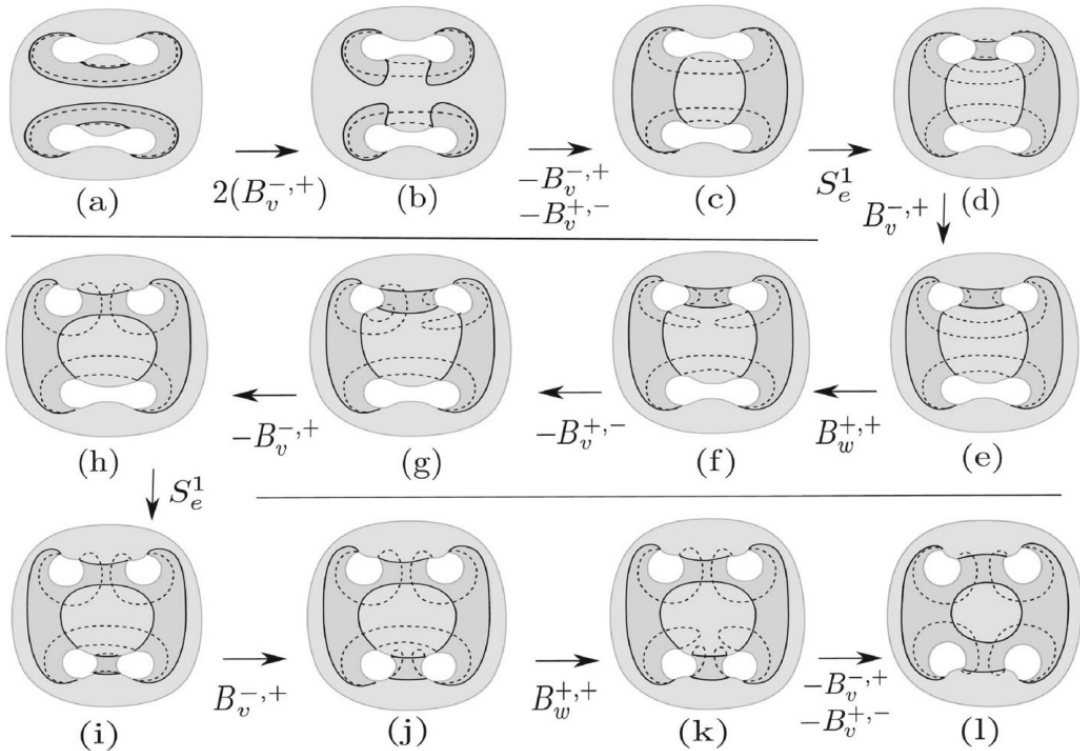
Demonstração (Adaptada de (19), p. 10). Se M_1 tem gênero $g = 2$, tem duas curvas em Γ , tem somente uma região M_{1H} homeomorfa a um cilindro e uma região M_{1E} de gênero 1, então aplicando uma cirurgia S^0 entre dois elipsoides, e seguindo a sequência (a) a (h) na Figura 3.30, obtemos uma imersão $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com esse padrão de pontos hiperbólicos e elípticos, e cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_{f_1} : M_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação sem cúspides.

Figura 3.30 – Exemplos de superfícies com aplicações de Gauss estáveis obtidas por transições lips, beaks e cirurgias.



Fonte: Retirado de (19), p. 7

Figura 3.31 – Aplicações de Gauss obtidas com a cirurgia S^1 , transições lips e beaks.



Fonte: Retirado de (19), p. 8

Se assumirmos que dada qualquer superfície M_i com gênero $g = 2i$ e $2i$ curvas em Γ , que tem i regiões M_{iH} , cada qual homeomorfa a um cilindro, e somente uma região M_{iE} de gênero i , existe uma imersão $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_{f_i}$ é uma aplicação sem cúspides e que tem esse padrão de pontos elípticos e hiperbólicos, então podemos provar o caso $g = 2(i + 1)$ executando uma cirurgia S^0 entre a região M_{iE} e a região M_{1E} da superfície M_1 . Aplicando as transições $B^{-,+}$ e $-L^+$ nessa superfície, obtemos uma imersão correspondente $f_{i+1} : M_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tem esse padrão de pontos hiperbólicos e elípticos, e é tal que sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_{f_{i+1}} : M_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação sem cúspides.

□

Proposição 3.5.4 ((19), p. 11). *Seja M uma superfície fechada, conexa e orientável de gênero $g = k \geq 1$, cujo subconjunto Γ consiste de $2k$ círculos mergulhados que separam k regiões M_H , cada uma homeomorfa a um cilindro, de uma região M_E homeomorfa a uma esfera menos $2k$ discos. Então existe uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss é uma aplicação sem cúspides.*

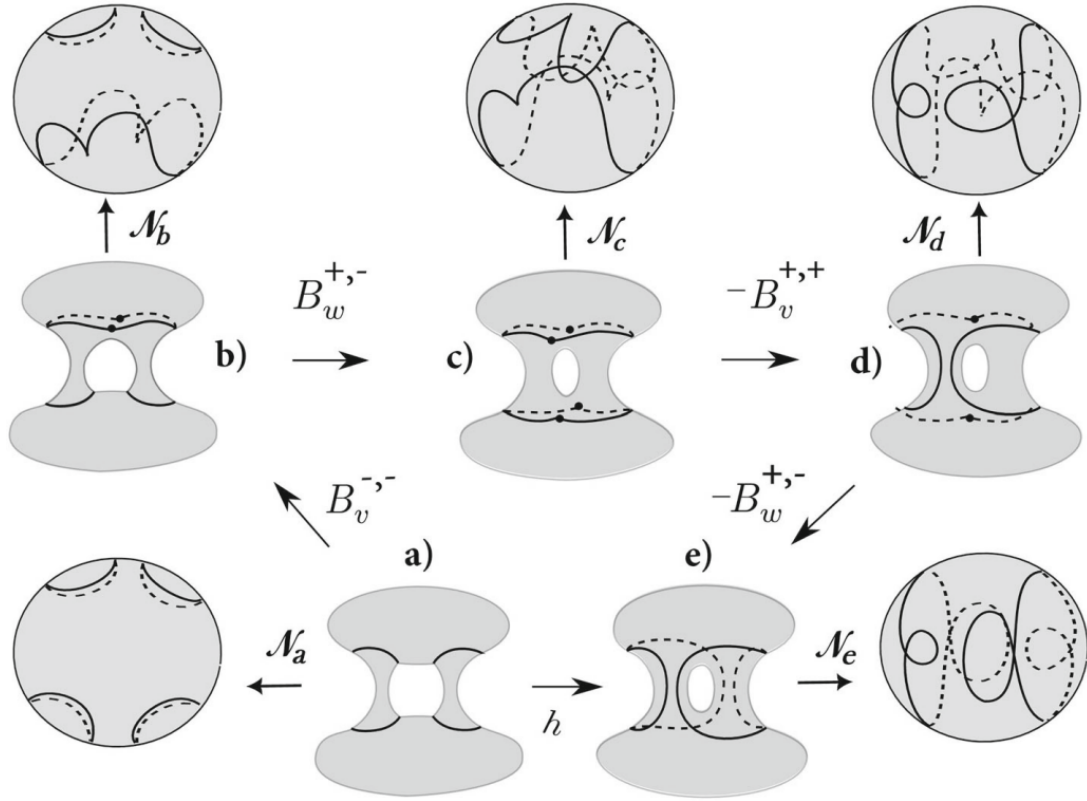
Demonstração (Adaptada de (19), p. 11). Se a superfície M_1 tem gênero $g = 1$ e duas regiões, M_{1H} e M_{1E} , ambas homeomorfas a um cilindro, então aplicando uma cirurgia S^0 entre dois elipsoides, seguida por uma cirurgia S^1 , obtemos a superfície (b) na Figura 3.30. Usando a sequência de transições beaks ilustrada na Figura 3.32, obtemos uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com esse padrão de pontos elípticos e hiperbólicos e tal que sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação sem cúspides.

Se assumirmos que dada qualquer superfície M_i com gênero $g = i$ e $2i$ curvas em Γ que separam i regiões M_{iH} , cada uma homeomorfa a um cilindro, de uma única região M_{iE} homeomorfa a uma esfera menos $2i$ discos, existe uma imersão $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f$ é uma aplicação sem cúspides, então podemos provar o caso em que $g = i + 1$ aplicando uma cirurgia S^0 conectando a região M_{iE} à região M_{1E} de M_1 . Aplicando as transições $B_v^{-,+}$ e $-L^+$, obtemos uma imersão $f_{i+1} : M_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tem esse padrão de pontos hiperbólicos e elípticos, e é tal que sua aplicação de Gauss $\mathcal{N}_{f_{i+1}} : M_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação sem cúspides.

□

Teorema 3.5.5 ((19), p. 12). *Seja M uma superfície fechada, conexa e orientável, cujo subconjunto Γ consiste de $2k$ círculos mergulhados, com $k \geq 1$. Se M pode ser obtida como uma soma conexa de superfícies com as propriedades descritas nas Proposições 3.5.2, 3.5.3 e 3.5.4, então existe uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss é uma aplicação sem cúspides.*

Figura 3.32 – Efeitos de transições beaks em uma superfície de gênero 1 e suas aplicações de Gauss estáveis.



Fonte: Retirado de (19), p. 11.

Demonstração. Basta observarmos que as proposições nos garantem que as superfícies todos possuem uma imersão cuja aplicação de Gauss é uma aplicação sem cúspides. Além disso, devemos notar que a soma conexa entre duas regiões elípticas de duas superfícies M_1 e M_2 pode ser também efetuada fazendo-se uma cirurgia S^0 seguida de uma transição $B_v^{-, -}$ e de uma transição $-L^+$.

□

4 GRAFO DUAL

Neste capítulo introduziremos o grafo dual de uma aplicação de Gauss estável. Começaremos na Seção 4.1 mostramos como podemos associar um grafo a uma superfície com curvas.

Na Seção 4.2 estudamos o caso em que o conjunto de curvas é o conjunto parabólico de uma aplicação de Gauss estável. Dessa forma mostramos como podemos estabelecer um grafo dual pra cada aplicação. Depois nos baseamos em (21) para mostrar alguns resultados que podemos obter sobre a aplicação de Gauss a partir de seu grafo dual.

Na Seção 4.3 estudamos como as transições lips e beaks, que alteram o conjunto parabólico, e as cirurgias atuam sobre o grafo dual de uma aplicação de Gauss.

Na Seção 4.4 nos baseamos em (17) para vermos como podemos garantir que todo grafo bipartido com peso é grafo dual de alguma aplicação de Gauss estável.

Por fim, na Seção 3.5 vemos o caso particular das aplicações de Gauss sem cúspides, e vemos como podemos garantir que um grafo é grafo dual de alguma aplicação de Gauss sem cúspides. Nesta seção nos baseamos em (21).

4.1 GRAFOS ASSOCIADOS A SUPERFÍCIES COM CURVAS

Definição 4.1.1. Dada uma superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$, podemos associar um grafo $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ a $(M, \mathcal{C})$ através do seguinte algoritmo:

1. a cada região conexa R_i de $M \setminus \mathcal{C}$, com $i = 1, \dots, m$, associaremos um vértice v_{R_i} em $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$, o qual chamaremos de **vértice dual à região** R_i ;
2. a cada curva $\gamma_k \subset \mathcal{C}$, com $k = 1, \dots, n$, associaremos uma aresta e_{γ_k} em $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$, a qual chamaremos de **aresta dual à curva** γ_k ;
3. a aresta e_γ incide sobre o vértice v_R quando a curva γ for fronteira em M da região R ;
4. ao vértice v_R daremos o gênero $g(R)$ de R como peso.

O grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ assim definido será chamado de **grafo dual** à superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$.

Observemos que um laço ocorre em $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ somente quando sua curva dual γ for bordo de uma única região R de $M \setminus \mathcal{C}$, isto é, quando for possível dois abertos $U_1, U_2 \subset R$ tais que

$$\partial U_1 \cap \partial R = \gamma = \partial U_2 \cap \partial R,$$

onde ∂U denota a fronteira em M da região U .

Teorema 4.1.2 ((15), p. 25.). *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com peso total $W(\mathcal{G})$. Se $\mathcal{G}$ é grafo dual da superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$, então o gênero de M é dado por*

$$g(M) = 1 - \chi(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G}).$$

Demonstração (Adaptada de (15), p. 25.) Analisemos, primeiro, as alças de M e vejamos como são representadas no grafo dual. Dada uma alça de M , ao olharmos pro conjunto de curvas $\mathcal{C}$, temos dois casos possíveis:

1. Não existe nenhuma curva de $\mathcal{C}$ presente na alça;
2. existe ao menos uma curva $\gamma \in \mathcal{C}$ presente na alça.

No caso 1, temos que a alça será representada como um peso 1 adicionado a algum vértice de $\mathcal{G}$. No caso 2, teremos um ciclo em $\mathcal{G}$ que possui tantos vértices quanto o número de curvas de $\mathcal{C}$ presentes na alça. Temos, assim, que as alças de M são representadas em $\mathcal{G}$ ou como ciclos, ou como pesos nos vértices.

Reciprocamente, pela Definição 4.1.1, o peso em cada vértice v_R de $\mathcal{G}$ representa o número de alças na região R . Além disso, cada ciclo fundamental de $\mathcal{G}$ representa uma alça de M .

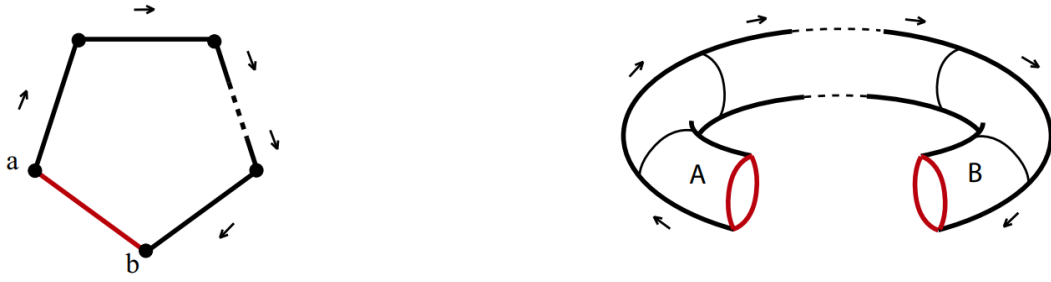
De fato, tomemos $\mathcal{G}_0$ um ciclo fundamental qualquer em $\mathcal{G}$ e suponhamos que $\mathcal{G}_0$ esteja associado a alguma superfície com curvas $(M_0, \mathcal{C}_0)$. Analisemos as possibilidades para M_0 . Se $\mathcal{G}_0$ possui k vértices, então $M_0 \setminus \mathcal{C}_0$ possui k componentes conexas. Sendo um ciclo, cada um dos vértices de $\mathcal{G}_0$ possuem exatamente duas arestas incidentes sobre eles, o que implica que cada componente conexa de $M_0 \setminus \mathcal{C}_0$ é uma superfície com exatamente duas componentes de bordo, sendo, assim, homeomorfas a um tronco de cilindro. Além disso, temos que as regiões de $M_0 \setminus \mathcal{C}_0$ preservam a adjacência de seus vértices duais em $\mathcal{G}_0$.

Escolhendo dois vértices adjacentes a e b de $\mathcal{G}_0$, podemos percorrer o caminho $C = \{a, \dots, b\}$ em $\mathcal{G}_0$ começando em a e terminando em b que passa por todos os vértices de $\mathcal{G}_0$. Esse caminho nos dá a sequência de regiões adjacentes de $(M_0, \mathcal{C}_0)$, que possui como regiões extremas as regiões A e B , respectivamente duais aos vértices a e b , como ilustrado na Figura 4.1.

Fechar o ciclo $\mathcal{G}_0$ adicionando a aresta ab ao caminho C equivale, na superfície M_0 , a identificarmos o bordo da região A com o bordo da região B . Observemos que essencialmente podemos fazer essa identificação de duas formas, como ilustrado na Figura 4.2.

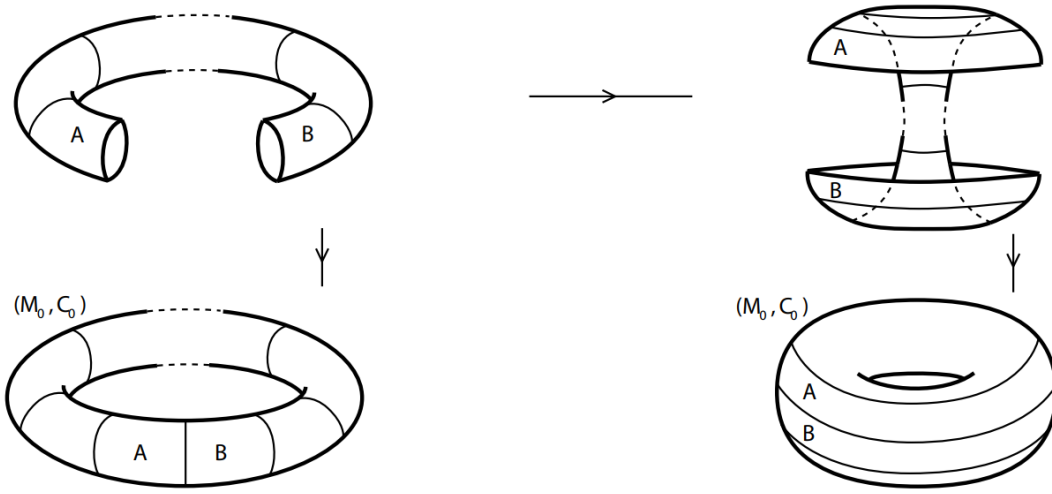
Independente da forma que escolhermos para identificar os bordos, obteremos como resultado uma superfície com gênero 1, ou seja, uma alça de M quando olhamos pra $\mathcal{G}_0$ como um ciclo de $\mathcal{G}$.

Figura 4.1 – Superfície com curvas associada a um caminho.



Fonte: Retirada de (15), p. 26.

Figura 4.2 – Superfície com curvas associada a um ciclo.



Fonte: Retirada de (15), p. 27.

Dessa forma, como $W(\mathcal{G})$ representa o número de alças sem curvas de $\mathcal{C}$ em M , e como $\beta_1(\mathcal{G})$, o número de ciclos fundamentais de $\mathcal{G}$, e cada ciclo fundamental também representa uma alça de M , temos

$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G}).$$

Como $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G})$ (Proposição 2.3.18), segue que

$$g(M) = 1 - \chi(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G}).$$

□

Proposição 4.1.3 ((16), p.7.). *Todo grafo $\mathcal{G}(V, E)$, com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ e peso total $W(\mathcal{G}) = w_1 + w_2 + \dots + w_n \geq 0$ está associado a uma superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$, onde*

1. M tem gênero $g(M) = 1 - \chi(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G})$;
2. $M \setminus \mathcal{C}$ tem n componentes conexas;

3. $\mathcal{C}$ tem m componentes conexas;

4. cada vértice v_i com peso w_i , $i = 1, \dots, n$, está associado a uma componente conexa $R_i \subset M \setminus \mathcal{C}$ com gênero w_i .

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ um grafo com peso total W . Seja $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ o subgrafo de $\mathcal{G}$ que possui todos os vértices e todas as arestas de $\mathcal{G}$, mas com peso total 0. Mergulhando o grafo $\mathcal{G}_0$ em $\mathbb{R}^3$, obtemos um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$, os vértices, e um conjunto de curvas disjuntas, as arestas. Tomemos uma vizinhança tubular de $\mathcal{G}_0$, tão pequena quanto se queira. Tomando o bordo dessa vizinhança, obtemos uma superfície M_0 . Escolhendo o ponto médio m_j de cada aresta e_j de $\mathcal{G}_0$, podemos tomar a curva α_j em M_0 que possui m_j como seu centro. Tomando $\mathcal{C}_0$ como sendo a união das curvas α_j , temos que o par $(M_0, \mathcal{C}_0)$ será uma superfície com curvas que possui $\mathcal{G}_0$ como seu grafo dual.

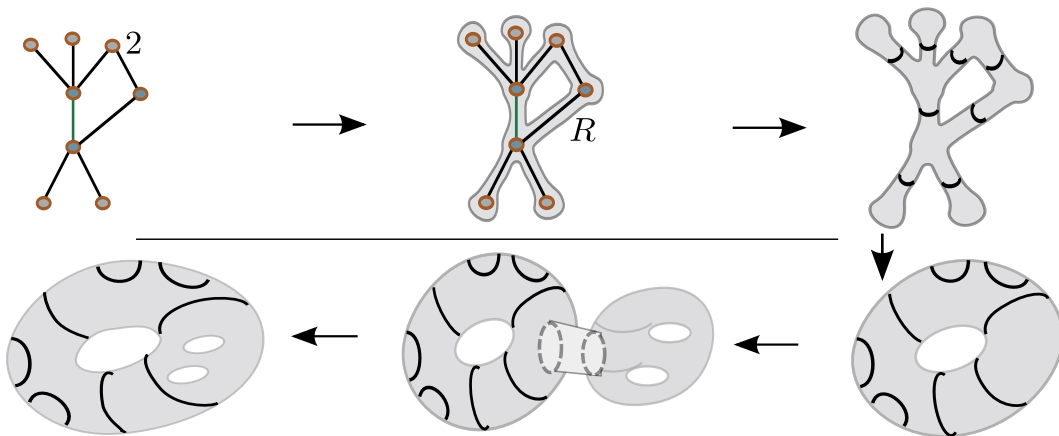
Vamos, agora, obter uma superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$ que possui $\mathcal{G}$ como seu grafo dual. A fim de obtermos $\mathcal{G}$ a partir de $\mathcal{G}_0$, basta adicionarmos o peso w_i ao vértice v_i de $\mathcal{G}_0$. Tomemos, então a superfície com curvas $(M_0, \mathcal{C}_0)$. Tomemos a região R_i dual ao vértice v_i . Adicionar o peso w_i a v_i representa fazer a soma conexa de R_i com o w_i -toro, adicionando, assim, w_i alças à região R_i . Fazendo isso para todos os vértices de $\mathcal{G}_0$, obtemos o grafo $\mathcal{G}$, enquanto fazendo esse processo para a superfície M_0 , obtemos uma superfície M . Tomando $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, temos que a superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$ é tal que $\mathcal{G}$ é seu grafo dual. Pelo Teorema 4.1.2, temos

$$g(M) = 1 - \chi(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G}) = \beta_1(\mathcal{G}) + W(\mathcal{G}).$$

A Figura 4.3 ilustra todo o processo de associar uma superfície com curvas a um grafo que descrevemos nesta demonstração.

□

Figura 4.3 – Associando uma superfície com curvas a um grafo.



Fonte: Retirado de (16), p. 8.

Proposição 4.1.4 ((16), p.7.). *Sejam $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ duas superfícies com curvas. Sejam $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ e $\mathcal{G}_{(M', \mathcal{C}'})$ seus respectivos grafos duais. Se $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são equivalentes, então $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ e $\mathcal{G}_{(M', \mathcal{C}'})$ são isomorfos.*

Demonstração. Observemos que se $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são equivalentes, então existe um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M'$ que leva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$. Pela continuidade de φ podemos afirmar que se $\gamma \in \mathcal{C}$ é fronteira comum das regiões $R_1, R_2 \subset M \setminus \mathcal{C}$ em M , então $\gamma' = \varphi(\gamma) \in \mathcal{C}'$ é fronteira comum das regiões $R'_1 = \varphi(R_1), R'_2 = \varphi(R_2) \subset M' \setminus \mathcal{C}'$ em M' . Além disso, por φ ser difeomorfismo, podemos concluir que $M \setminus \mathcal{C}$ e $M' \setminus \mathcal{C}'$ possuem o mesmo número de componentes conexas.

Sejam V e V' os respectivos conjuntos de vértices de $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ e de $\mathcal{G}_{(M', \mathcal{C}'})$. Definamos, então, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi &: V \rightarrow V', \\ v_R &\mapsto v_{\varphi(R)}. \end{aligned}$$

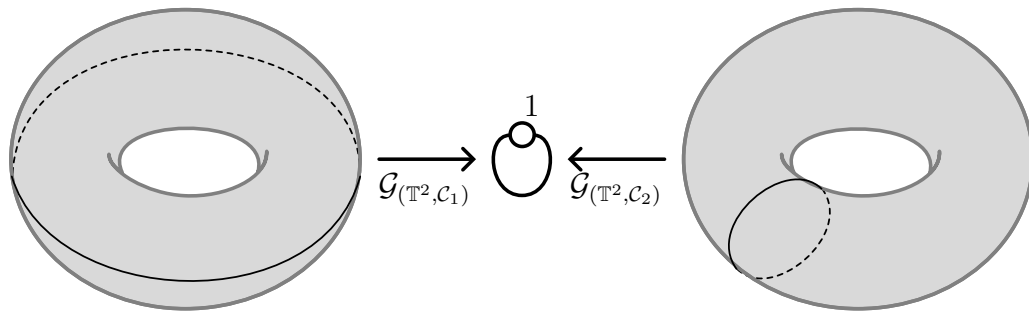
Observemos que ψ é uma bijeção. De fato como cada região regular $R' \subset M' \setminus \mathcal{C}'$ é imagem por φ de uma única região regular $R \subset M \setminus \mathcal{C}$, e vice-versa, temos que cada vértice $v_{R'} \in V'$ é imagem por ψ de um único vértice $v_R \in V$, onde $R' = \varphi(R)$. Além disso, se os vértices $v_{R_1}, v_{R_2} \in V$ estão conectados pela aresta $e_\gamma \in E$, então os vértices $v_{\varphi(R_1)}, v_{\varphi(R_2)} \in V'$ estão conectados pela aresta $e_{\varphi(\gamma)} \in E'$, onde E e E' são os respectivos conjuntos de arestas de $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$ e de $\mathcal{G}_{(M', \mathcal{C}'})$.

Dessa forma mostramos que se duas superfícies com curvas são equivalentes, então seus grafos duais são isomorfos.

□

Observemos que a recíproca da Proposição 4.1.4 não é verdadeira. Basta tomarmos como exemplo as superfícies com curvas ilustradas na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Superfícies com curvas não equivalentes cujos grafos duais são isomorfos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

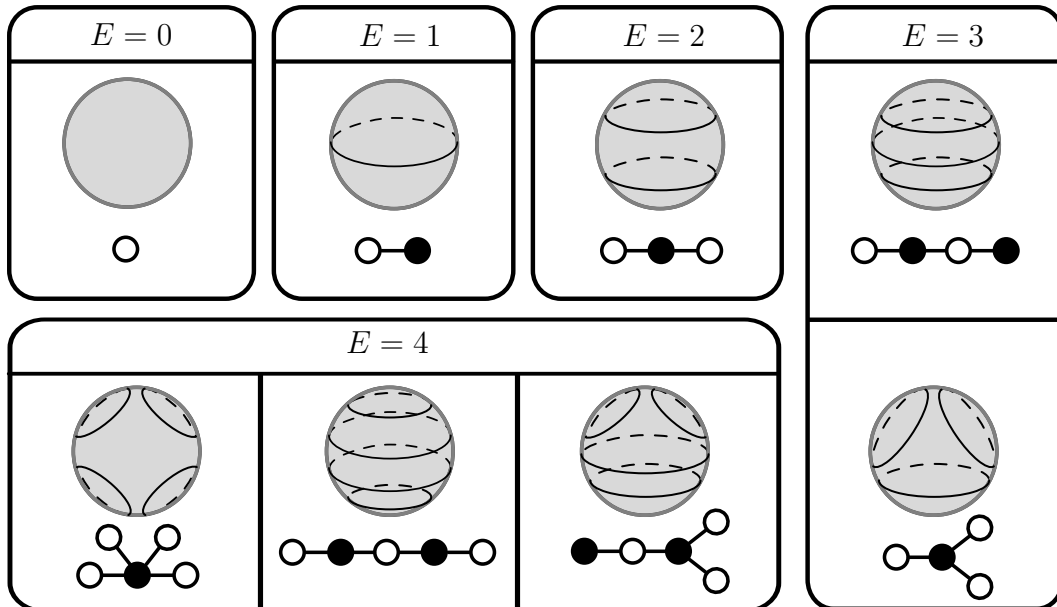
4.2 GRAFO DUAL DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

Como vimos na Subseção **3.2.1**, o conjunto parabólico $\Sigma_{\mathcal{N}}$ de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é composto por curvas simples, fechadas e disjuntas. Ora, isso significa que a superfície M junto do conjunto $\Sigma_{\mathcal{N}}$ é uma superfície com curvas.

Na Seção 4.1 vimos que dada uma superfície com curvas $(M, \mathcal{C})$, sempre podemos construir um grafo associado $\mathcal{G}_{(M, \mathcal{C})}$. Colocando $\mathcal{C} = \Sigma_{\mathcal{N}}$, podemos construir o grafo $\mathcal{G}_{(M, \Sigma_{\mathcal{N}})}$, seguindo o algoritmo descrito na Seção 4.1.

Definição 4.2.1. Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Seja $\Sigma_{\mathcal{N}}$ seu conjunto parabólico. O grafo $\mathcal{G}_{\mathcal{N}} = \mathcal{G}_{(M, \Sigma_{\mathcal{N}})}$ será chamado de **grafo dual** da aplicação $\mathcal{N}$.

Figura 4.5 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss do tipo $\mathcal{N} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com até quatro curvas e seus grafos duais.



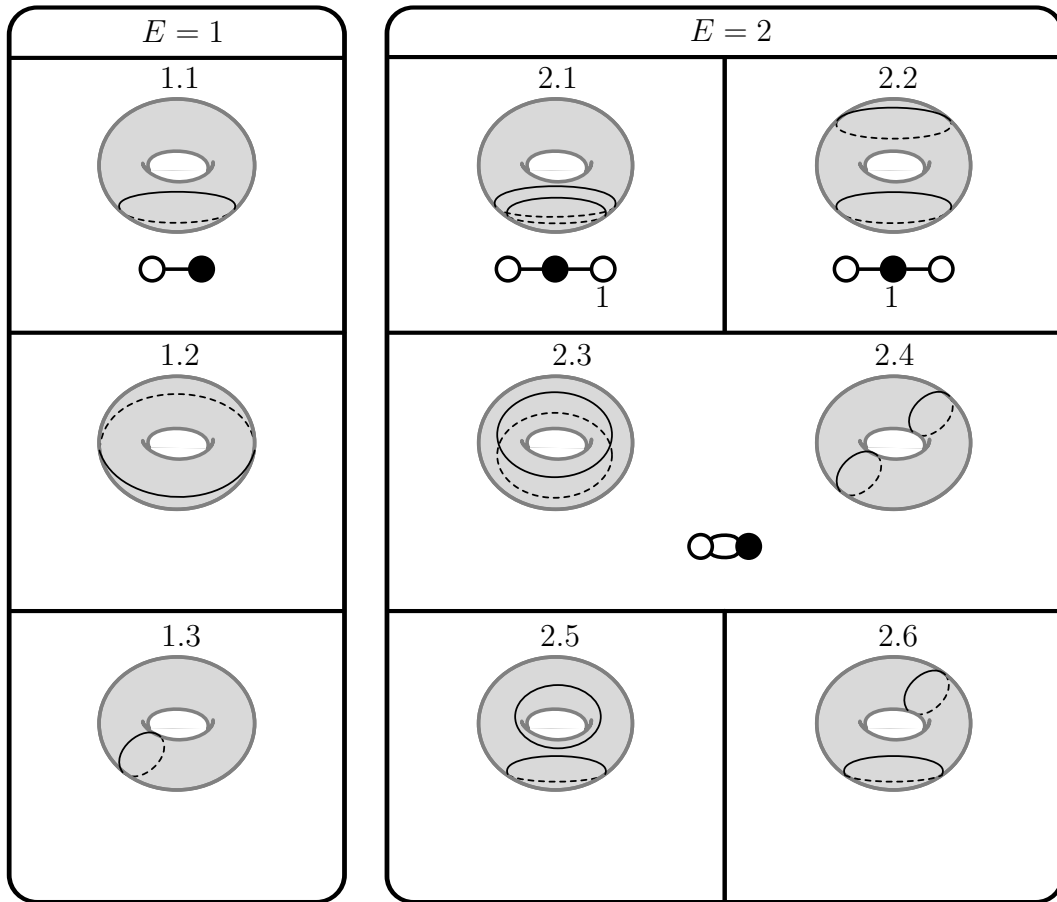
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 4.5, vemos todos os possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre $\mathbb{S}^2$, além de seus grafos duais. Na superfície, as linhas pretas representam curvas parabólicas.

É importante frisarmos que essas não existem somente oito aplicações de Gauss estáveis com até quatro curvas parabólicas, mas sim que todas as possíveis aplicações de Gauss estáveis com até quatro curvas parabólicas deverão ter seus conjuntos singulares difeomorfos a algum desses casos. Assim também são as cores dos vértices na figura que não devem ser entendidas como representando um vértice positivo ou negativo. Elas apenas cumprem a função de enfatizar que o grafo é bipartido.

Já nas Figuras 4.6 e 4.7, vemos os possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre o toro $\mathbb{T}^2$, isto é, do tipo $\mathcal{N} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Figura 4.6 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre $\mathbb{T}^2$ com até duas curvas e seus grafos duais, quando existirem.



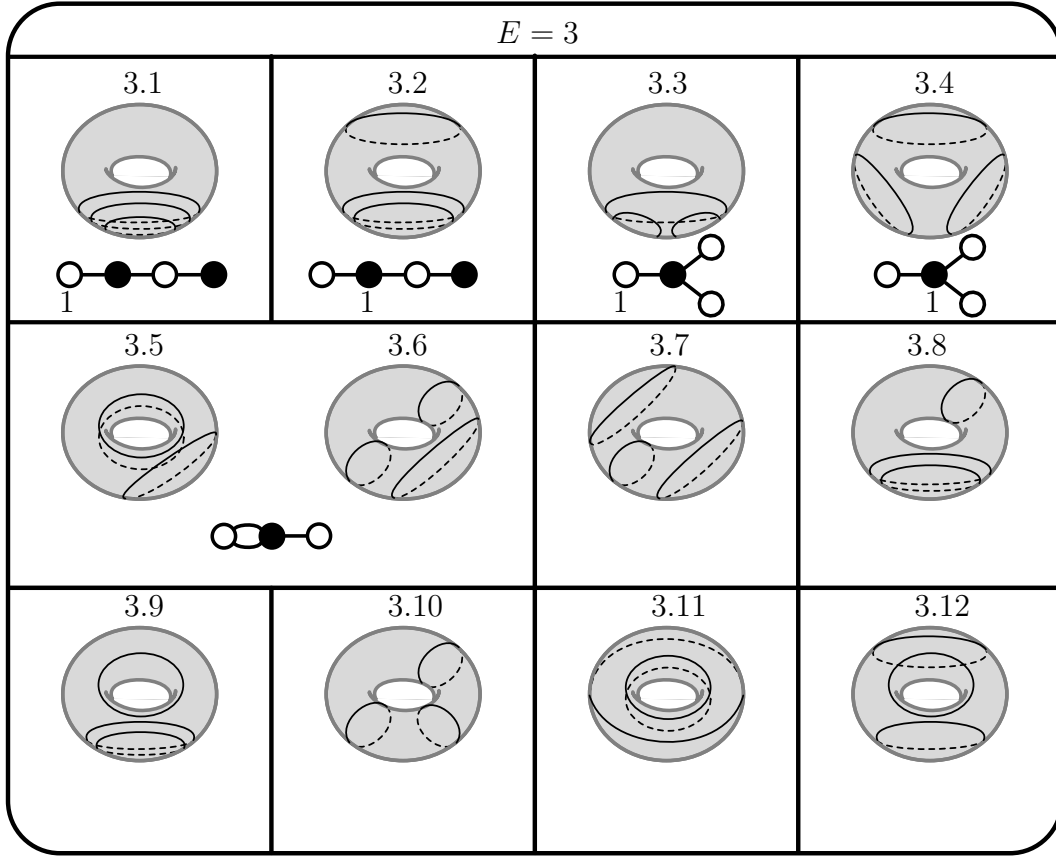
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Notemos que diferente do visto com $\mathbb{S}^2$ na Figura 4.5, nem todos os conjuntos de curvas definidas sobre o toro são conjuntos singulares de alguma aplicação de Gauss estável. Tanto nos casos 1.2, 1.3, 2.5 e 2.6 da Figura 4.6 quanto nos casos 3.7 a 3.12 da Figura 4.7 encontramos o mesmo problema: existe uma curva que é fronteira de uma região consigo mesma, que contradiz o fato de que curvas singulares de aplicações de Gauss estáveis são sempre fronteira comum entre uma região elíptica e uma região hiperbólica.

Dessa forma, temos que a construção do grafo dual $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ nos dá, de forma natural, um grafo bipartido, pois cada vértice positivo será somente adjacente a vértices negativos, e os vértices negativos aos positivos. Além disso, o processo de associar o gênero de uma região regular como peso de seu vértice dual faz com que o $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ seja um grafo com peso. Em suma, o processo de associação de grafo com uma aplicação de Gauss estável cria naturalmente um grafo bipartido e com peso.

Percebamos com os casos 2.3 e 2.4 da Figura 4.6, e os casos 3.5 e 3.6 da Figura 4.7, que podemos ter aplicações de Gauss tão diferentes a ponto de terem conjuntos singulares

Figura 4.7 – Possíveis conjuntos singulares de aplicações de Gauss definidas sobre $\mathbb{T}^2$ com três curvas e seus grafos duais, quando existirem.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

distintos, mas que mesmo assim possuem grafos duais isomorfos. Isso nos mostra que o grafo dual por si só não é suficiente pra dizer se duas aplicações de Gauss são equivalentes. Entretanto, a Proposição 4.2.2 nos mostra que se as aplicações de Gauss são equivalentes, então devem possuir grafos duais isomorfos.

Proposição 4.2.2. *Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ duas aplicações de Gauss estáveis. Se $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ são equivalentes, então seus grafos duais $\mathcal{G}_{\mathcal{N}_1}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{N}_2}$ são isomorfos.*

Demonstração. Basta observarmos que se $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ são equivalentes, então as superfícies com curvas $(M, \Sigma_{\mathcal{N}_1})$ e $(M, \Sigma_{\mathcal{N}_2})$ são equivalentes. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{N}_1}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{N}_2}$ são, respectivamente, os grafos duais de $(M, \Sigma_{\mathcal{N}_1})$ e $(M, \Sigma_{\mathcal{N}_2})$, pela Proposição 4.1.4 temos o isomorfismo.

□

Definição 4.2.3. *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Seja $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ seu grafo dual. Sejam, respectivamente, C^+ e C^- o número de cúspides positivas e negativas, V^+ e V^- o número de regiões elípticas e hiperbólicas (equivalentemente, o número de vértices positivos e negativos), e W^+ e W^- o gênero do conjunto elíptico e hiperbólico*

(equivalentemente, a soma total dos pesos dos vértices positivos e negativos). Definimos

$$\theta_C = C^+ - C^-, \quad \theta_V = V^+ - V^- \quad \text{e} \quad \theta_W = W^+ - W^-.$$

Proposição 4.2.4 ((21), p. 251.). *Seja $\mathcal{G}_N$ grafo dual de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Então*

$$\theta_V - \theta_W = 1 - g(M) - \frac{\theta_C}{2}.$$

Consequentemente, temos $\theta_C = 4(V^- - W^-) - 2E$, com E representando aqui o número de arestas de $\mathcal{G}$.

Corolário 4.2.5 ((21), p. 251.). *Se $\mathcal{G}$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides, então $\theta_C = 0$ e*

$$E = 2(V^- - W^-).$$

4.3 TRANSIÇÕES E CIRURGIAS NO GRAFO DUAL

Nas Seções 3.3 e 3.4 vimos que as transições e cirurgias são capazes de alterar a superfície, seja remodelando-a ou transformando-a em outra superfície, criando assim novas aplicações de Gauss.

Uma vez que temos conhecimento do grafo dual, e que estamos alterando a aplicação de Gauss, devemos nos questionar quais são os efeitos das transições e cirurgias no grafo dual.

Primeiro devemos observar que as únicas transições que criam ou aniquilam regiões regulares e curvas parabólicas são as transições lips e beaks. Dessa forma, essas serão as únicas transições que alteram o grafo dual. Além disso, como as cirurgias unem regiões regulares, elas também terão efeitos no grafo dual.

4.3.1 Efeito da Transição Lips

Como vimos na Subseção 3.3.2, a transição Lips é capaz de criar uma nova região regular e uma nova curva parabólica. No grafo dual isso significa criar um novo vértice e uma nova aresta incidente no vértice dual à região em que se aplicou a transição, como ilustrado na Figura 4.8.

Figura 4.8 – Efeito da transição Lips no grafo dual.

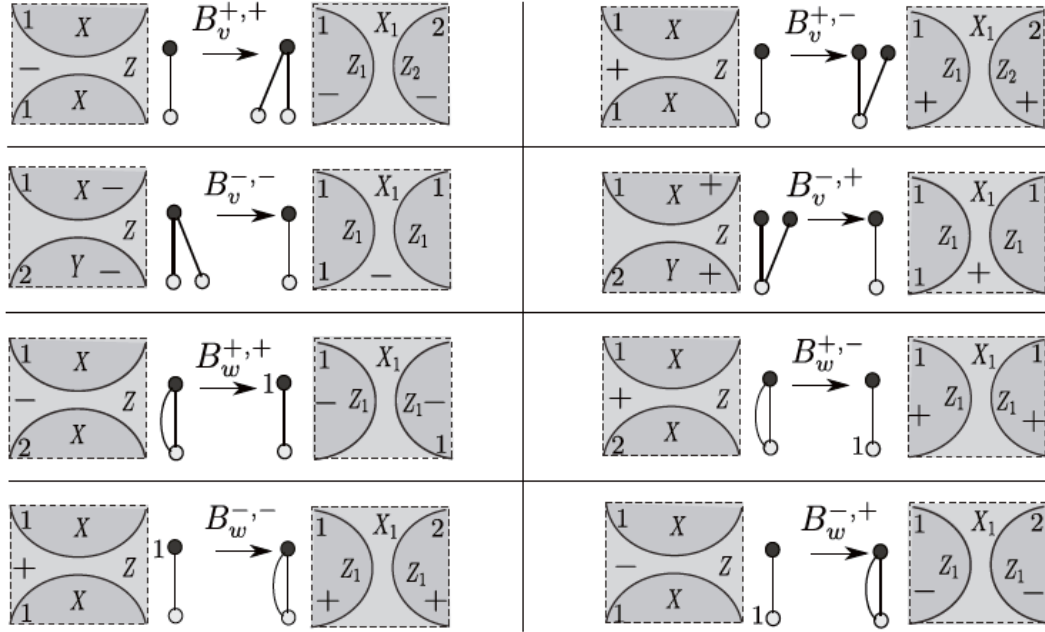


Fonte: Retirado de (18), p. 253.

4.3.2 Efeito da Transição Beaks

Diferentemente da transição Lips, a transição Beaks tem uma atuação mais complexa no grafo dual de uma aplicação de Gauss. Ela é capaz tanto de criar quanto de aniquilar vértices ou arestas, seu efeito depende de qual subtipo da transição Beaks está atuando. Na Figura 4.9 vemos o efeito de cada um de seus subtipos.

Figura 4.9 – Efeito da transição Beaks no grafo dual.



Fonte: Retirado de (20), p. 311.

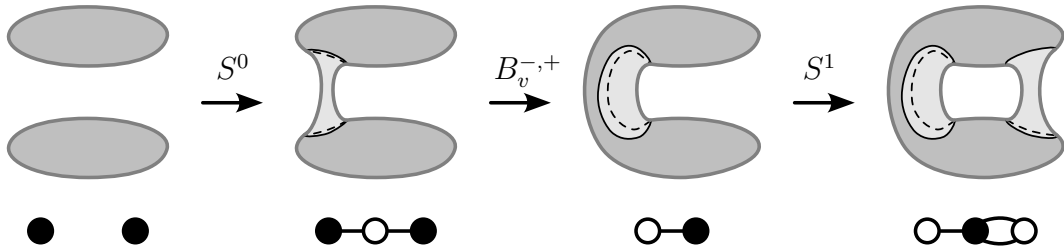
Detalhemos como cada subtipo atua sobre o grafo dual:

- a) a transição $B_v^{+,+}$ é capaz de criar um vértice negativo e uma aresta;
- b) a transição $B_v^{+,-}$ é capaz de criar um vértice positivo e uma aresta;
- c) a transição $B_v^{-,-}$ é capaz de aniquilar um vértice negativo e uma aresta;
- d) a transição $B_v^{-,+}$ é capaz de aniquilar um vértice positivo e uma aresta;
- e) a transição $B_w^{+,+}$ é capaz de aniquilar uma aresta, além de aumentar o peso de um vértice positivo em 1;
- f) a transição $B_w^{+,-}$ é capaz de aniquilar uma aresta, além de aumentar o peso de um vértice negativo em 1;
- g) a transição $B_w^{-,-}$ é capaz de criar uma aresta, além de diminuir o peso de um vértice positivo em 1;
- h) a transição $B_w^{-,+}$ é capaz de criar uma aresta, além de diminuir o peso de um vértice negativo em 1.

4.3.3 Efeito das Cirurgias

Assim como as transições, as cirurgias também irão atuar sobre o grafo dual. Como a cirurgia S^0 une superfícies disjuntas, ela é capaz de unir dois grafos duais distintos em um único grafo. Esse processo é feito unindo dois vértices positivos, um de cada grafo, através de um vértice negativo.

Figura 4.10 – Efeitos das cirurgias no grafo dual.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Já a cirurgia S^1 tem dois efeitos possíveis no grafo dual. O primeiro é semelhante à cirurgia S^0 , em que se une dois vértices positivos, desta vez de um mesmo grafo, através de um novo vértice negativo. O segundo efeito acontece nos casos semelhantes ao ilustrado na Figura 4.10, em que a cirurgia é feita entre duas vizinhanças disjuntas de uma mesma região elíptica. Neste caso, a cirurgia S^1 adiciona um vértice negativo adjacente a somente um único vértice positivo.

Em suma, ambas as cirurgias aumentam o número de vértices negativos em 1 e o número de arestas em 2. Além disto, a cirurgia S^1 também aumenta o número ciclômático do grafo dual em 1, pois ao criar um novo ciclo criando arestas novas, consequentemente cria um novo ciclo fundamental no grafo dual.

4.4 REALIZAÇÃO DE GRAFOS BIPARTIDOS COM PESO

Já sabemos que toda aplicação de Gauss estável possui um grafo dual. É natural surgir a pergunta: todo grafo bipartido com peso é grafo dual de alguma aplicação de Gauss estável? Os teoremas a seguir nos mostram que sim, entretanto só podemos garantir isso com algumas restrições sobre a superfície.

Teorema 4.4.1 ((17), p. 101). *Qualquer árvore com peso zero em cada um de seus vértices pode ser realizada por uma aplicação de Gauss estável definida sobre uma esfera mergulhada.*

Demonstração (Adaptada de (17), p.101). Provaremos este teorema por indução sobre o número de vértices. Primeiro, observemos que o mergulho canônico de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tem como

aplicação de Gauss a aplicação identidade $\mathcal{N}(p) = p$. Consequentemente, seu grafo dual $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ possui um único vértice, visto que a identidade não possui singularidades.

Agora, suponhamos, por indução, que o teorema seja verdadeiro para qualquer árvore com até k vértices e suponhamos que temos uma árvore $\mathcal{T}$ com $k + 1$ vértices. Ora, removendo-se um vértice extremo $v \in V(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ junto da aresta vw , que conecta v a $\mathcal{T}'$, obteremos uma subárvore $\mathcal{T}'$ com exatamente k vértices. Pela hipótese de indução, concluímos que deve existir algum mergulho $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss estável $\mathcal{N}_g$ possui $\mathcal{T}'$ como seu grafo dual.

Seja R_w a região regular de $\mathbb{S}^2$ referente ao vértice w de $\mathcal{T}'$. Aplicando-se uma transição lips em R_w , obteremos um novo mergulho $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo grafo dual da aplicação de Gauss estável $\mathcal{N}_f$ é obtido conectando uma nova aresta a $\mathcal{T}'$ no vértice w , isto é, o grafo dual de $\mathcal{N}_f$ é $\mathcal{T}$.

□

Teorema 4.4.2 ((17), p. 101). *Qualquer grafo bipartido $\mathcal{G}$ com peso zero em cada um de seus vértices pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável definida sobre uma superfície fechada e orientável M com*

$$\chi(M) = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G})),$$

onde $\beta_1(\mathcal{G})$ é o número ciclomático de $\mathcal{G}$.

Demonstração (Adaptada de (17), p. 101). Provaremos este teorema por indução sobre o número β_1 de ciclos independentes no grafo. No caso $\beta_1 = 0$, temos um grafo sem ciclos, ou seja, uma árvore. Esse caso já foi provado no Teorema 4.4.1.

Agora, suponhamos por indução que a afirmação seja verdadeira para qualquer grafo bipartido com peso total zero em cada um de seus vértices, e com $\beta_1 \leq n$ ciclos independentes. Seja, agora, $\mathcal{G}$ um grafo bipartido com peso zero em cada um de seus vértices, e com $\beta_1(\mathcal{G}) = n + 1$ ciclos independentes.

Tomemos C um dos ciclos independentes de $\mathcal{G}$. Tomemos um dos vértices positivos de C , e o separemos em dois novos vértices extremos v_1 e v_2 , ambos também positivos. Dessa forma iremos separar o ciclo C , e criaremos um novo grafo $\mathcal{G}'$ com $\beta_1(\mathcal{G}') = n$ ciclos independentes.

Pela hipótese de indução, podemos concluir que existe algum mergulho $h : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$, de uma superfície M' , cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_h : M' \rightarrow \mathbb{S}^2$ tem $\mathcal{G}'$ como seu grafo dual e que $\chi(M') = 2(1 - n)$.

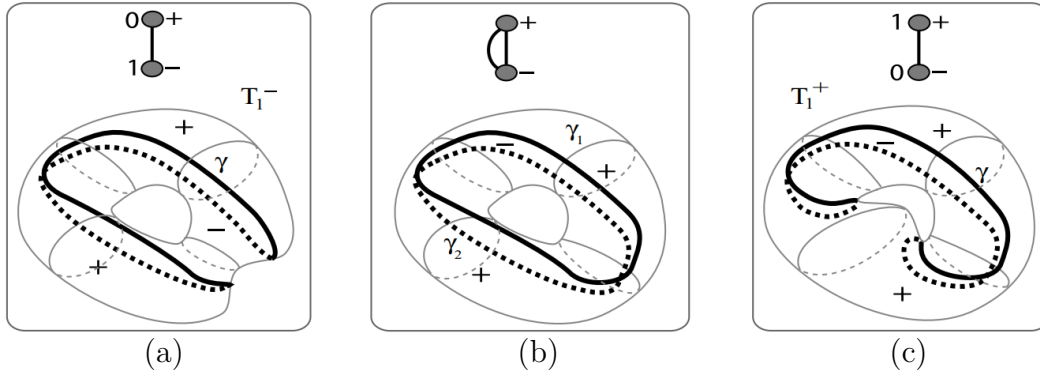
Aplicando uma cirurgia S^1 nas regiões elípticas E_1 e E_2 , cujos vértices duais são v_1 e v_2 , respectivamente, seguida de uma transição $B_v^{-,+}$ e uma transição $-L^+$, a fim de retirarmos a região hiperbólica adicionada, obteremos novamente a superfície M , e também um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo a aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ tem $\mathcal{G}$ como

seu grafo dual. Além disso, como a cirurgia está sendo feita entre regiões regulares de M' , temos que o gênero $g(M)$ de M será $g(M) = g(M') + 1$, onde $g(M') = n$ é o gênero de M' , daí concluímos

$$\chi(M) = 2(1 - g(M)) = 2(1 - (n + 1)) = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}))$$

e o teorema está provado. $\square$

Figura 4.11 – Mergulhos do toro T^2 e os grafos duais de suas aplicações de Gauss estáveis.



Fonte: Adaptado de (17), p.97.

Teorema 4.4.3 ((17), p. 101). *Qualquer grafo bipartido $\mathcal{G}$ pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável definida sobre uma superfície fechada e orientável M com*

$$\chi(M) = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}) - \omega(\mathcal{G})),$$

onde $\omega(\mathcal{G})$ é a soma dos pesos de cada vértice de $\mathcal{G}$.

Demonstração (Adaptada de (17), p. 101). Provaremos este teorema por indução sobre $\omega(\mathcal{G})$, o peso total de $\mathcal{G}$. O caso em que $\omega(\mathcal{G}) = 0$ já foi provado no Teorema 4.4.2. Suponhamos, por indução, que o teorema seja válido para qualquer grafo com peso total menor ou igual a p .

Tomemos um grafo $\mathcal{G}$ com $\omega(\mathcal{G}) = p + 1$. Consideremos um vértice v_R de $\mathcal{G}$ com peso $\omega_{v_R} > 0$. Tomemos um grafo $\mathcal{G}'$ que é isomorfo a $\mathcal{G}$ e com o mesmo peso em todos os vértices, exceto no vértice $v'_{R'} = \varphi(v_R)$, onde $\varphi : V(\mathcal{G}) \times E(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G}') \times E(\mathcal{G}')$ é o isomorfismo entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, que terá peso $\omega_{v'_{R'}} = \omega_{v_R} - 1$.

Pela hipótese de indução podemos encontrar uma superfície fechada e orientada M' , com $\chi(M') = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}') - p)$, e um mergulho $h : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_h$ possui $\mathcal{G}'$ como seu grafo dual.

Agora, suponhamos que $v'_{R'}$ tem sinal positivo, e que R' é a região elíptica de M' dual a $v'_{R'}$. Neste caso, fazemos uma cirurgia neck-beaks em R' com o toro T_1^+ (vide a Figura 4.11 (c)) e obteremos novamente a superfície M , e um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de

M cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f$ tem $\mathcal{G}$ como seu grafo dual. Além disso, como a cirurgia com o toro aumenta o gênero de M' em 1 unidade, teremos

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= 2(1 - g(M)) \\
 &= 2(1 - [g(M') + 1]) \\
 &= 2(1 - g(M')) - 2 \\
 &= \chi(M') - 2 \\
 &= 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}') - p) - 2 \\
 &= 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}') - p - 1) \\
 &= 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}') - [p + 1])
 \end{aligned}$$

e como $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são isomorfos, temos $\beta_1(\mathcal{G}) = \beta_1(\mathcal{G}')$, ou seja

$$\chi(M) = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}) - [p + 1]) = 2(1 - \beta_1(\mathcal{G}) - \omega(\mathcal{G})).$$

Caso o sinal de $v'_{R'}$ seja negativo e R' seja uma região hiperbólica de M' , basta fazermos o mesmo processo com o toro T_1^- (vide a Figura 4.11 (a)), e o resultado se segue. □

4.5 GRAFOS DE APLICAÇÕES DE GAUSS SEM CÚSPIDES

4.5.1 Grafos 2–negativos

Nesta seção queremos investigar as propriedades dos grafos duais das aplicações de Gauss sem cúspides. Como não teremos interesse em explicitar os conjuntos de vértices e de arestas, mas sim teremos interesse na cardinalidade desses conjuntos, optamos por usar a notação $\mathcal{G}(V, E, W)$ para dizer que o grafo $\mathcal{G}$ possui V vértices, E arestas e peso total W . Quando necessário, denotaremos por $V^\pm$ o número de vértices positivos/negativos ou $W^\pm$ a soma dos pesos dos vértices em $V^\pm$.

Definição 4.5.1 ((21), p. 252). Diremos que um grafo bipartido, cujos vértices recebem um sinal positivo ou negativo, é um **grafo positivo** quando não possuir vértices extremos negativos.

Definição 4.5.2 ((21), p. 252). Diremos que um grafo bipartido, cujos vértices recebem um sinal positivo ou negativo, é um grafo **2–negativo** quando todos os seus vértices negativos tiverem grau dois.

Lema 4.5.3 ((21), p. 252). *Um grafo bipartido $\mathcal{G}(V, E, W)$ é 2–negativo se, e só se, for um grafo positivo e $E = 2V^-$, onde V^- é o número de vértices negativos.*

Demonstração. todos os vértices extremos de um grafo 2–negativo são positivos por definição. Provaremos que qualquer grafo 2–negativo $\mathcal{G}$ satisfaz a identidade $E = 2V^-$ por indução sobre o número k de vértices negativos.

Se $k = 1$, então temos duas possíveis configurações para $\mathcal{G}$: uma com dois vértices extremos positivos, e a outra com um único vértice positivo de grau 2. Em ambos os casos temos $E = 2 = 2V^-$, e assim provamos o caso base. Suponhamos, agora, que a afirmação seja verdadeira para qualquer grafo 2-negativo com k vértices negativos.

Seja $\mathcal{G}$ um grafo 2-negativo com $V^- = k + 1$ vértices negativos. Removendo um vértice negativo de $\mathcal{G}$, e suas duas arestas incidentes, obtemos um novo grafo 2-negativo $\mathcal{G}'$ com k vértices negativos, com $E' = 2k$, pela hipótese de indução. Ora, mas como retiramos duas arestas de $\mathcal{G}$ para obtermos $\mathcal{G}'$, temos

$$E = E' + 2 = 2(k + 1) = 2V^-.$$

Reciprocamente, se $\mathcal{G}$ é um grafo positivo com $E = 2V^-$, então $\mathcal{G}$ é 2-negativo, pois nenhum de seus vértices negativos tem grau 1.

□

Teorema 4.5.4 ((21), p. 252). *Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ um grafo conexo bipartido. $\mathcal{G}$ é 2-negativo se, e só se, for positivo e $\theta_V = 1 - \beta_1(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Pela definição de $\beta_1(\mathcal{G})$ (Definição 2.2.17), temos $\beta_1(\mathcal{G}) = E - V + 1$. Aplicando o Lema 4.5.3, temos

$$1 - \beta_1(\mathcal{G}) = V - E = V^+ + V^- - 2V^- = V^+ - V^- = \theta_V.$$

E a equivalência se segue a partir da equivalência dada pelo Lema 4.5.3.

□

Lema 4.5.5 ((21), p. 254.). *Se $\mathcal{G}(V, E, 0)$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides, então $\mathcal{G}(V, E, 0)$ é positivo.*

Demonstração (Adaptada de (21), p. 254.). Suponhamos que $\mathcal{G}(V, E, 0) = \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ seja grafo dual da aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, mas não seja positivo. Isso significa que $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ tem ao menos um vértice extremo negativo v_H . Ora, mas se v_H é vértice extremo negativo, então sua região dual H é uma região hiperbólica cujo bordo $\gamma \subset \Sigma_{\mathcal{N}}$ em M é conexo. Como, por hipótese, $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ tem peso zero em cada vértice, podemos concluir que H tem gênero zero, donde é difeomorfa a um disco.

Como $\mathcal{N}$ é aplicação de Gauss sem cúspides, as direções de curvatura nula de M não são tangentes a nenhum ponto de γ , pois as direções de curvatura nula são tangentes ao conjunto parabólico apenas em cúspides. Em cada ponto de H existem duas direções assintóticas, e ao longo de γ essas duas retas coincidem com a direção de curvatura nula. Consideremos uma das duas famílias de retas assintóticas. Isto forma um campo de linhas num disco que não é tangente ao bordo do disco em nenhum lugar, e a integral deste

campo de linhas (uma família de curvas assintóticas) é uma folheação não singular do disco que é transversal ao bordo. Isto é impossível, o que nos leva a concluir que o grafo deva ser positivo.

□

Teorema 4.5.6 ((21), p. 255.). *Todo grafo dual a uma aplicação de Gauss sem cúspides e com peso zero em cada um de seus vértices é 2-negativo.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.2.5, se $\mathcal{G}$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides, temos $E = 2(V^- - W^-)$. Entretanto, como $\mathcal{G}$ possui peso total zero, temos $E = 2V^-$. Assim, o Lema 4.5.3 vai nos garantir que $\mathcal{G}$ é 2-negativo.

□

4.5.2 Árvores com Peso Zero

Teorema 4.5.7 ((21), p. 257). *Toda árvore 2-negativa com peso zero em cada um de seus vértices pode ser realizada por uma aplicação de Gauss sem cúspides definida sobre uma esfera mergulhada.*

Demonstração. Se a árvore possui um único vértice (0 vértices negativos), então pode ser realizada pela aplicação identidade associada ao mergulho canônico de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Quando $V = 3$ (uma árvore 2-negativa com 1 vértice negativo), podemos realizar essa árvore aplicando uma cirurgia S^1 entre duas esferas mergulhadas em $\mathbb{R}^3$.

Observemos que a cirurgia S^0 entre uma superfície M associada a uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}_f$ e o mergulho canônico de $\mathbb{S}^2$ associado à aplicação identidade, adiciona dois vértices ao grafo dual de $\mathcal{N}_f$, com as arestas correspondentes: uma aresta negativa de grau 2, dual ao tubo hiperbólico, e um vértice extremo, dual a $\mathbb{S}^2$.

Provaremos o teorema por indução sobre o número k de vértices negativos. Suponhamos, então, que a afirmação é verdadeira para toda árvore 2-negativa com peso total zero e k vértices negativos. Suponhamos que $\mathcal{T}$ seja uma árvore 2-negativa com peso total zero e $k + 1$ vértices negativos. Removendo-se um vértice negativo adjacente a um vértice extremo, e suas arestas correspondentes, obtemos uma árvore $\mathcal{T}'$ 2-negativa com k vértices negativos.

Pela hipótese de indução, $\mathcal{T}'$ pode ser realizada por uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}' : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Aplicando uma cirurgia S^0 entre a esfera associada à aplicação $\mathcal{N}'$ e $\mathbb{S}^2$ associada à aplicação de Gauss identidade, obtemos uma nova imersão $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss $\mathcal{N}_f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação sem cúspides cujo grafo dual é $\mathcal{T}$.

□

4.5.3 Grafos com Peso Zero

Lema 4.5.8 ((21), p. 257.). *Seja $\mathcal{G}$ um grafo 2-negativo com peso total zero. Se cada um dos ciclos de $\mathcal{G}$ tiver ao menos quatro arestas, então $\mathcal{G}$ pode ser realizado por uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, com $g(M) = \beta_1(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}(V, E, 0)$ um grafo 2-negativo com c ciclos fundamentais, e tal que cada um de seus ciclos tem ao menos quatro arestas. Ao remover um vértice negativo (que possui grau 2), de cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos fundamentais, obtemos uma árvore 2-negativa $\mathcal{T}$ com $V - \beta_1(\mathcal{G})$ vértices.

Pelo Teorema 4.5.7, garantimos que $\mathcal{T}$ possa ser realizada por alguma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Ao retirarmos cada um dos c vértices negativos de $\mathcal{G}$ a fim de obtermos $\mathcal{T}$, geramos em $\mathcal{T}$ c pares de vértices positivos extremos, que chamaremos de $v_{E_1^i}$ e $v_{E_2^i}$, com $i = 1, \dots, \beta_1(\mathcal{G})$.

Sejam E_1^i e E_2^i , com $i = 1, \dots, \beta_1(\mathcal{G})$, as regiões elípticas em $\mathbb{S}^2$ duais aos vértices $v_{E_1^i}$ e $v_{E_2^i}$, respectivamente. Ao fazermos uma cirurgia S^1 entre E_1^i e E_2^i , para $i = 1, \dots, \beta_1(\mathcal{G})$, obteremos uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $g(M) = \beta_1(\mathcal{G})$, tal que $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ seja sua aplicação de Gauss estável com $\mathcal{G}$ como seu grafo dual, concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 4.5.9 ((21), p. 257.). *Qualquer grafo 2-negativo com peso total zero $\mathcal{G}$ pode ser realizado por uma aplicação de Gauss sem cúspides definida sobre uma superfície fechada e orientável M com*

$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}).$$

Demonstração. Dado um grafo 2-negativo $\mathcal{G}(V, E, 0)$, assumamos que este grafo tem r ciclos com apenas duas arestas. Removendo-se um vértice negativo, que tem grau 2, de cada um desses r ciclos, obteremos um grafo 2-negativo $\mathcal{G}'(V - r, E - 2r, 0)$ tal que todos os ciclos tem pelo menos quatro arestas.

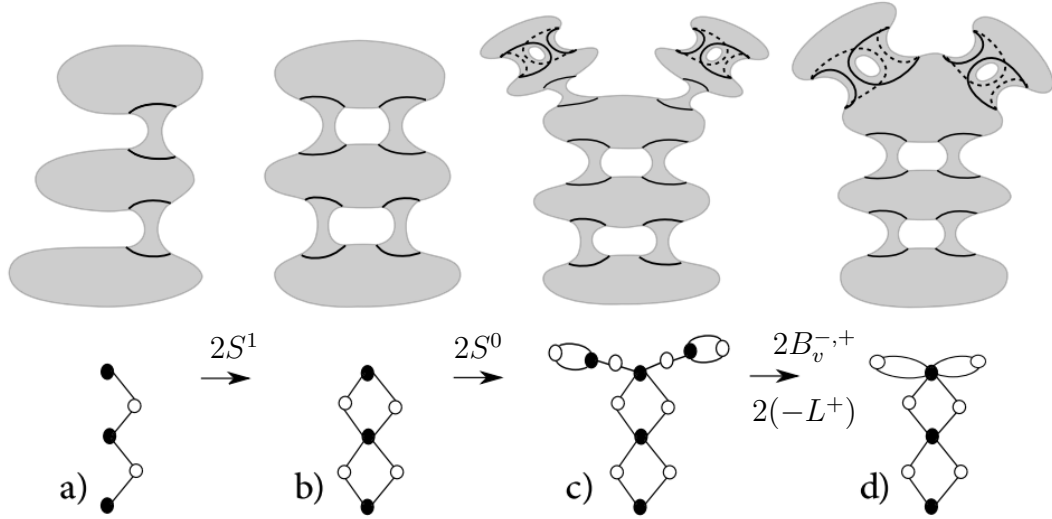
Pelo Lema 4.5.8, Sabemos que o grafo $\mathcal{G}'$ é realizável por uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, com $g(M_1) = 1 - V + E - r$.

Aplicando r cirurgias S^0 entre a superfície M_1 e o toro associado ao grafo $\mathcal{G}(2, 2, 0)$, ilustrado na Figura 3.32(e), obteremos uma nova imersão $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associada a uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N}_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, com $g(M_2) = 1 - V + E$, cujo grafo dual é $\mathcal{G}_{\mathcal{N}_2} = \mathcal{G}(V + r, E + 2r, 0)$, como ilustrado na Figura 4.12(c).

A fim de obtermos, então, uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $g(M) = 1 - V + E = \beta_1(\mathcal{G})$, associada à aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, cujo grafo dual é $\mathcal{G}$, podemos remover as r regiões hiperbólicas introduzidas pelas cirurgias S^0 com transições B_v^- , que une duas curvas parabólicas, e por fim fazemos transições $-L^+$, que remove as regiões hiperbólicas e as curvas parabólicas com duas cúspides em cada.

□

Figura 4.12 – Exemplos de grafos de aplicações de Gauss sem cúspides.



Fonte: Adaptada de (21), p. 256.

Teorema 4.5.10 ((21), p. 258.). *Um grafo $\mathcal{G}(V, E, 0)$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides se, e somente se, $\mathcal{G}$ for um grafo 2 – negativo.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.5.6, temos que se $\mathcal{G}$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides, então é 2–negativo.

Reciprocamente, o Teorema 4.5.9 nos garante que todo grafo 2– negativo é grafo dual de alguma aplicação de Gauss sem cúspides.

□

5 TEOREMA DE QUINE PARA APLICAÇÕES DE GAUSS

Neste capítulo, apresentamos uma nova demonstração do Teorema de Quine (24), baseada na abordagem desenvolvida em (18). A prova proposta utiliza técnicas de transições de codimensão 1, permitindo uma interpretação geométrica mais direta do resultado e destacando o papel dessas transições na estrutura das aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas e orientadas imersas no $\mathbb{R}^3$.

5.1 TEOREMA DE QUINE

Em seu artigo de 1978 ((24)), J. R. Quine demonstra o seguinte teorema:

Teorema 5.1.1 (Teorema de Quine, (24), p. 307.). *Sejam M e N 2-variedades compactas, conexas e orientadas. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável tal que cada ponto $p \in M$ seja um ponto regular, um ponto de dobra ou uma cúspide de f . Sejam M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares onde f preserva orientação e M^- o fecho do conjunto dos pontos em que f inverte orientação. Sejam $p_1, \dots, p_n$ as cúspides de f e $\mu(p_k)$ o grau local de f na cúspide p_k . Então*

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum \mu(p_k) = \deg f \cdot \chi(N),$$

onde χ é a característica de Euler e $\deg$ é o grau topológico.

Observemos que, como $\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-)$, podemos equivalentemente escrever

$$\chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum \mu(p_k) = \deg f \cdot \chi(N).$$

Além de ser um resultado mais geral para aplicações entre superfícies compactas, a demonstração do Teorema de Quine é demasiadamente complexa para que a trouxéssemos neste trabalho. Ao invés disso, nos basearemos no trabalho de De Jesus e Romero (2022, (18)) para apresentar uma versão equivalente ao Teorema de Quine especificamente para as aplicações de Gauss estáveis.

Entretanto, trazemos uma consequência do teorema que talvez tenha sido observada através dos exemplos e das ilustrações que trouxemos ao longo deste trabalho, mas não formalizamos.

Corolário 5.1.2 ((24), p. 312.). Nas hipóteses do Teorema de Quine, f tem um número par de cúspides.

Demonstração. Notemos que sendo M e N superfícies compactas, conexas e orientáveis, então devem ser homeomorfas a uma esfera ou ao n -toro, a depender do gênero, retirando-se m e n discos, onde $m, n \geq 0$ são os respectivos números de componentes de bordo de M e N . De qualquer modo, temos que $\chi(M)$ e $\chi(N)$ são ambas pares.

Daí, concluímos que $\sum \mu(p_k)$ é um número par. Sendo C^+ o número de cúspides positivas, e C^- o número de cúspides negativas, temos

$$\sum \mu(p_k) = C^+ - C^- = C - 2C^-,$$

onde $C = C^+ + C^-$ é o número total de cúspides. Daí

$$C = \sum \mu(p_k) + 2C^-$$

é a soma de pares, logo é par. □

Reforçamos que isso não significa que cada curva singular terá um número par de cúspides, como podemos ver com a transição D_4^- para as aplicações de Gauss, mas sim que o conjunto singular como um todo terá um número par de cúspides. Isso também nos mostra o porquê as transições lips, beaks e swallowtail criavam sempre duas cúspides cada uma.

5.2 TEOREMA DE QUINE PARA APLICAÇÕES DE GAUSS

Definição 5.2.1. Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Definimos

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) = \chi(M_N^+) - \chi(M_N^-),$$

onde M_N^+ é o fecho do conjunto elíptico de M , e M_N^- o fecho do conjunto hiperbólico.

Definição 5.2.2. Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ grafo dual de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Denotamos

1. $\theta_V(\mathcal{N}) = V^+ - V^-$, como sendo a diferença entre o número de vértices positivos, V^+ , e o número de vértices negativos, V^- ;
2. $\theta_W(\mathcal{N}) = W^+ - W^-$, como sendo a diferença entre a soma dos pesos dos vértices positivos, W^+ , e a soma dos pesos dos vértices negativos, W^- ;
3. $\theta_C(\mathcal{N}) = C^+ - C^-$, como sendo a diferença entre o número de cúspides positivas, C^+ , e o número de cúspides negativas, C^- .

Lema 5.2.3 ((18), p. 4.). *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss sem cúspides com grau $d = \deg(\mathcal{N})$, então $\theta_\chi(\mathcal{N}) = 2 \deg(\mathcal{N})$.*

Demonstração. Se $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação de Gauss sem cúspides, então pelo 3.1.5 temos que $\deg(\mathcal{N}) = 1 - g(M) \leq 1$. Como M é uma superfície fechada, então $\mathcal{N}$ é sobrejetiva.

Denotemos por $S_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ o conjunto complementar do contorno aparente de $\mathcal{N}$ em $\mathbb{S}^2$. Denotemos por $M_0^\pm = \mathcal{N}^{-1}(S_0) \cap M^\pm$ a pré-imagem de S_0 por $\mathcal{N}$ no conjunto $M^\pm$.

Se $\deg(\mathcal{N}) > 0$, então para cada componente conexa R_i^- contida em M_0^- , existe uma cópia de R_i^- em M_0^+ , que denotaremos por R_i^+ . Teremos $\chi(R_i^+) = \chi(R_i^-)$ e $M^- = \bigcup_i R_i^-$. A união das regiões $M^+ \setminus \bigcup_i R_i^+$ em M forma d regiões que cobrem $\mathbb{S}^2$, donde temos

$$\frac{\chi(M^+ \setminus \bigcup_i R_i^+)}{2} = d \Leftrightarrow \chi(M^+ \setminus \bigcup_i R_i^+) = 2d$$

No caso $d = 1$, temos $\chi(M) = 2$, e $M = \mathbb{S}^2$.

Caso $\deg(\mathcal{N}) \leq 0$, para cada componente conexa R_i^+ contida em M_0^+ , existe uma cópia de R_i^+ em M_0^- , que denotaremos por R_i^- , e $M^+ = \bigcup_i R_i^+$. Equivalentemente, a união das regiões $M^- \setminus \bigcup_i R_i^-$ formam $-d$ regiões em M que cobrem $\mathbb{S}^2$. Então, $\chi(M^- \setminus \bigcup_i R_i^-) = -2d$.

Em ambos os casos, teremos

$$\begin{aligned} 2d &= \chi(M^+ \setminus \bigcup_i R_i^+) & e & \quad -2d = \chi(M^- \setminus \bigcup_i R_i^-) \\ &= \chi(M^+) - \chi(\bigcup_i R_i^+) & & = \chi(M^-) - \chi(\bigcup_i R_i^-) \\ &= \chi(M^+) - \chi(\bigcup_i R_i^-) & & = \chi(M^-) - \chi(\bigcup_i R_i^+) \\ &= \chi(M^+) - \chi(M^-) & & = \chi(M^-) - \chi(M^+), \end{aligned}$$

donde temos $\chi(M^+) - \chi(M^-) = 2 \deg(\mathcal{N})$, e o resultado segue da Definição 5.2.1. □

Lema 5.2.4 ((18), p. 4.). *Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ grafo dual de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. A diferença $\theta_{\mathcal{N}} = \chi(M^+) - \chi(M^-)$, onde M^+ é a união das regiões elípticas de $\mathcal{N}$ e M^- a união das hiperbólicas, será dada por*

$$\theta_{\mathcal{N}} = 2(\theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N})).$$

Demonstração. A característica de Euler de $M_i^\pm$ é dada por $\chi(M_i^\pm) = 2 - 2w_i^\pm - E_i^\pm$, onde $w_i^\pm$ e $E_i^\pm$ denotam, respectivamente, o gênero e o número de componentes de bordo de cada superfície $M_i^\pm$. Então

$$\chi(M^\pm) = \sum_{i=1}^{V^\pm} \chi(M_i^\pm) = 2V^\pm - 2W^\pm - E.$$

Daí,

$$\theta_{\mathcal{N}} = \chi(M^+) - \chi(M^-) = 2(\theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N})).$$

□

Teorema 5.2.5 ((18), p. 4.). *Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ grafo dual de uma aplicação de Gauss sem cúspides $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Então $\mathcal{N}$ tem grau $\deg(\mathcal{N}) = \theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N})$*

Demonstração. Usando os Lemas 5.2.3 e 5.2.4, temos $2 \deg(\mathcal{N}) = \theta_\chi(\mathcal{N}) = 2(\theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N}))$, donde teremos $\deg(\mathcal{N}) = \theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N})$. □

Figura 5.1 – Incremento das transições lips e beaks.

Trans \ Invar	L_{v-}^+	L_{v+}^-	$B_{v-}^{-,-}$	$B_{v-}^{+,+}$	$B_{v+}^{-,+}$	$B_{v+}^{+,-}$	$B_{w+}^{+,+}$	$B_{w+}^{-,-}$	$B_{w-}^{+,-}$	$B_{w-}^{-,+}$
ΔE	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
ΔC^+	2	0	0	2	2	0	2	0	0	2
ΔC^-	0	2	2	0	0	2	0	2	2	0
ΔV^+	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0
ΔV^-	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
ΔW^+	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
ΔW^-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

Fonte: Retirada de (18), p. 7.

Lema 5.2.6 ((18), p. 8.). *Se $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ são duas aplicações de Gauss estáveis, então a variação do número de cúspides, do número de curvas parabólicas, do número de regiões elípticas e hiperbólicas, e do gênero total das regiões, ao longo de um caminho entre $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é dado por*

$$\begin{aligned}
\Delta C^\pm &= 2(|B_v^{+,\pm}| + |B_v^{-,\pm}| + |B_w^{+,\pm}| + |B_w^{-,\pm}| + |L^\pm|); \\
\Delta E &= (|L^+| + |L^-| + |B_v^{+,+}| + |B_v^{+,-}| + |B_w^{-,-}| + |B_w^{-,+}|) \\
&\quad - (|B_v^{-,+}| + |B_v^{-,-}| + |B_w^{+,+}| + |B_w^{+,-}|); \\
\Delta V^\pm &= |L^\mp| + |B_v^{+,\mp}| - |B_v^{-,\pm}|; \\
\Delta W^\pm &= |B_w^{+,\pm}| - |B_w^{-,\mp}|.
\end{aligned}$$

Lema 5.2.7 ((18), p. 8.). *Se $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ são duas aplicações de Gauss estáveis, então a variação de θ_C , θ_V e θ_W é dada por*

$$\begin{aligned}
\Delta \theta_C &= 2(|L^+| + |B_v^{+,+}| + |B_v^{-,+}| + |B_w^{+,+}| + |B_w^{-,+}|) \\
&\quad - 2(|L^-| + |B_v^{+,-}| + |B_v^{-,-}| + |B_w^{+,-}| + |B_w^{-,-}|); \\
\Delta \theta_V &= (|L^-| + |B_v^{+,-}| + |B_v^{-,-}|) - (|L^+| + |B_v^{+,+}| + |B_v^{-,+}|); \\
\Delta \theta_W &= (|B_w^{+,+}| + |B_w^{-,+}|) - (|B_w^{+,-}| + |B_w^{-,-}|); \\
\Delta \theta_\chi &= 2(\Delta \theta_V - \Delta \theta_W) = -\Delta \theta_C
\end{aligned}$$

Demonstração. Recordemos que $\Delta \theta_C = \Delta C^+ - \Delta C^-$, $\Delta \theta_V = \Delta V^+ - \Delta V^-$ e $\Delta \theta_W = \Delta W^+ - \Delta W^-$. A prova sai diretamente dos Lemas 5.2.4 e 5.2.6. □

Teorema 5.2.8 ((18), p. 8.). *Sejam $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1 : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ duas aplicações de Gauss estáveis. Se $\mathcal{N}_1$ é uma aplicação sem cúspides, então*

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) + \theta_C(\mathcal{N}) = \theta_\chi(\mathcal{N}_1).$$

Demonstração. Se $\mathcal{N}_1$ é uma aplicação de Gauss sem cúspides, então teremos $\theta_C(\mathcal{N}_1) = 0$ e $\theta_C(\mathcal{N}) = \Delta\theta_C(\mathcal{N})$. O resultado se segue da igualdade $\theta_\chi(\mathcal{N}) = \theta_\chi(\mathcal{N}_1) + \Delta\theta_\chi(\mathcal{N})$ e do Lema 5.2.7.

□

Teorema 5.2.9 ((18), p. 8.). *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Se $\mathcal{N}$ tem grau $d = \deg(\mathcal{N})$, então*

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) + \theta_C(\mathcal{N}) = 2d.$$

Demonstração. Se $\mathcal{N}_1 : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação de Gauss sem cúspides, o Lema 5.2.3 nos dá que $\theta_\chi(\mathcal{N}_1) = 2 \deg(\mathcal{N}_1)$, e usando o Teorema 5.2.8, teremos

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) + \theta_C(\mathcal{N}) = \theta_\chi(\mathcal{N}_1) = 2 \deg(\mathcal{N}_1).$$

Como $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_1$ são ambas aplicações de Gauss da superfície M , temos $\deg(\mathcal{N}_1) = \deg(\mathcal{N})$. Daí

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) + \theta_C(\mathcal{N}) = 2d$$

e o resultado se segue.

□

Recordemos que na Definição 5.2.1, definimos $\theta_\chi(\mathcal{N}) = \chi(M^+) - \chi(M^-)$, como $\chi(M^+) = \chi(M) - \chi(M^-)$, temos

$$\theta_\chi(\mathcal{N}) = \chi(M) - 2\chi(M^-).$$

Na Definição 5.2.2, definimos $\theta_C(\mathcal{N}) = C^+ - C^-$. Sejam $p_1, \dots, p_k$ as k cúspides de $\mathcal{N}$, e definindo $\mu(p_i)$ como sendo o sinal da cúspide, temos

$$\theta_C(\mathcal{N}) = \sum_{i=1}^k \mu(p_i).$$

Como toda aplicação de Gauss $\mathcal{N} : M \rightarrow N$ toma a sua imagem na esfera $\mathbb{S}^2$, temos sempre $\chi(N) = 2$. Ou seja, podemos reescrever o enunciado do Teorema 5.2.9 como sendo:

Teorema de Quine para Aplicações de Gauss Estáveis. *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável. Seja M^- o fecho em M da região hiperbólica de $\mathcal{N}$. Sejam $p_1, \dots, p_k$ as cúspides de $\mathcal{N}$ e $\mu(p_i)$ o sinal da cúspide p_i . Então*

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum \mu(p_i) = \deg(\mathcal{N})\chi(\mathbb{S}^2).$$

Que é exatamente o enunciado do Teorema de Quine adaptado para as aplicações de Gauss. Isto é, o Teorema 5.2.9 é justamente a versão do Teorema de Quine para as aplicações de Gauss estáveis.

Teorema 5.2.10 ((18), p. 8.). *Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ grafo dual de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Se $\mathcal{N}$ tem grau d , então*

$$2(\theta_V - \theta_W) = 2d - \theta_C.$$

Demonstração. Se $\mathcal{G}(V, E, W)$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss estável, pelo Teorema 5.2.9 temos $\theta_\chi(\mathcal{N}) = 2d - \theta_C(\mathcal{N})$, enquanto que pelo Teorema 5.2.5 temos $\theta_\chi(\mathcal{N}) = 2(\theta_V(\mathcal{N}) - \theta_W(\mathcal{N}))$. O resultado se segue das duas igualdades.

□

Corolário 5.2.11 ((18), p. 9.). *Se $\mathcal{G}(2, 1, 0)$ é grafo dual de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ com grau d , então*

$$2\theta_W = \theta_C - 2d.$$

Definição 5.2.12 ((18), p. 9.). *Diremos que o contorno aparente de uma aplicação de Gauss estável $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é **irredutível** quando $\Sigma_{\mathcal{N}}$ tiver apenas uma única componente conexa.*

Teorema 5.2.13 ((18), p. 9.). *Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação de Gauss estável com grau d . Se $\mathcal{N}$ tem contorno irredutível, então*

$$-2(g(M) - d) \leq \theta_C \leq 2(g(M) + d).$$

Demonstração. Se $\mathcal{N}$ tem contorno irredutível, então $E = 1$. Aplicando o Teorema 4.4.3, obtemos $g(M) = W^+ + W^-$. Notemos que $\theta_W = W^+ - W^- = g(M) - 2W^-$. Do Corolário 5.2.11, temos $2g(M) = 4W^- + \theta_C - 2d$.

Para $d > 0$, como $W^- \geq 0$, então $2g(M) \geq \theta_C - 2d$, e consequentemente

$$\theta_C \geq 2(g(M) + d). \quad (5.1)$$

Por outro lado, se $d < 0$, como $g(M) - W^+ = W^-$, temos $2g(M) = 4W^+ - \theta_C + 2d$. Como $W^+ \geq 0$, teremos $2g(M) \geq -(\theta_C - 2d)$, e consequentemente

$$-2(g(M) - d) \leq \theta_C. \quad (5.2)$$

O resultado segue das Equações 5.1 e 5.2.

□

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos e classificamos as singularidades das aplicações de Gauss. Estudamos o caso particular das aplicações sem cúspides, estabelecendo condições que nos garantem que um conjunto de curvas numa superfície possa ser o conjunto parabólico de um aplicação de Gauss sem cúspides.

Vimos como podemos associar um grafo bipartido com peso a cada aplicação de Gauss estável, e garantimos que cada grafo bipartido com peso possa ser associado a uma aplicação de Gauss estável, embora não possamos garantir uma relação um para um entre as classes de aplicações e os grafos. Vimos como podemos usar os grafos duais para obtermos informações acerca da topologia da superfície e da aplicação, e usamos essa ferramenta para o estudo das aplicações sem cúspides.

Por fim, estudamos uma demonstração do teorema de Quine no caso particular das aplicações de Gauss estáveis, fazendo uma conexão mais direta com a geometria e a topologia da superfície e dando mais notoriedade para o uso das transições.

Algumas perguntas que podem surgir a partir deste estudo:

1. **Quais são as informações que devemos colocar sobre os grafos bipartidos com peso para estabelecer essa relação de forma única?**

Podemos iniciar esse estudo adicionando a informação sobre o número de cúspides positivas e negativas, e o número de pontos duplos da aplicação de Gauss no grafo dual.

2. **Quais são as condições para que esses grafos sejam realizados por uma aplicação de Gauss estável?**

Vimos, por exemplo, que um grafo só pode ser grafo dual de uma aplicação sem cúspides se for 2—negativo, logo um grafo com dois vértices e uma aresta, e com zero cúspide jamais poderia ser realizado por uma aplicação de Gauss estável.

3. **É possível associar um grafo ao contorno aparente a fim de estudá-lo?**

Poderíamos investigar se é possível sintetizar informações sobre o contorno aparente com um grafo. Embora neste caso tenhamos o desafio de que as “arestas” do contorno aparente podem se interseccionar. Também poderíamos estudar como o contorno aparente se comporta quando fazemos as cirurgias.

REFERÊNCIAS

- 1 ABIB, L. M.: **Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas**. Juiz de Fora, UFJF, Dissertação (Mestrado em Matemática), 2025
- 2 BLEECKER, D. ; WILSON, L.: Stability of Gauss maps. In: **Illinois Journal of Mathematics** 22 (1978), june, Nr. 2, S. 279–289
- 3 BRUCE, J. W. ; GIBLIN, P. J. ; TARI, F.: Parabolic Curves of Evolving Surfaces. In: **International Journal of Computer Vision** 17 (1996), Nr. 3, S. 291–306
- 4 CAMACHO, C. ; NETO, A.L.: **Geometric Theory of Foliations**. Birkhäuser Boston, 1984 (Projeto Euclides). – URL <https://books.google.com.br/books?id=eukYGZtI1ooC>. – ISBN 9780817631390
- 5 DIESTEL, R.: **Graph Theory**. Springer, 2017 (Electronic library of mathematics). – URL https://web.xidian.edu.cn/zhangxin/files/20020101_111456.pdf. – ISBN 9783540261834
- 6 DO CARMO, M. P.: **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 5ª ed. Rio de Janeiro : SBM, 2012 (Textos Universitários). – ISBN 9788585818265
- 7 ENDERTON, H. B.: **Elements of Set Theory**. New York : Academic Press, 1977. – ISBN 978-0122384400
- 8 GIBLIN, P.: **Graphs, Surfaces and Homology**. Cambridge University Press, 2010. – ISBN 9781139491174
- 9 GOLUBITSKY, M. ; GUILLEMIN, V.: **Stable Mappings and Their Singularities**. Springer, 1974 (Graduate texts in mathematics). – ISBN 9787506200448
- 10 GUILLEMIN, V. ; POLLACK, A.: **Differential Topology**. AMS Chelsea Pub., 2010 (AMS Chelsea Publishing). – ISBN 9780821851937
- 11 HACON, D. ; MENDES DE JESUS, C. ; ROMERO-FUSTER, M. C.: Topological Invariants of Stable Maps from a Surface to the Plane from a Global Viewpoint. (2003), 03. ISBN 978-0-8247-4091-7
- 12 HOFFMAN, K. ; KUNZE, R. A.: **Linear Algebra**. 2ª ed. [S.l.] : PHI Learning, 2004
- 13 KAMENOSONO, A. ; YAMAMOTO, T.: The minimal number of singularities of stable maps between surfaces. In: **Topology and Its Applications - TOPOL APPL** 156 (2009), 08, S. 2390–2405
- 14 KINSEY, L.C.: **Topology of Surfaces**. Springer New York, 1997 (Undergraduate Texts in Mathematics). – ISBN 9780387941028
- 15 MACHADO, D. S.: **Ivariante global de aplicações estáveis de superfície fechada no plano**, Universidade Federal de Viçosa, Diplomarbeit, 2010
- 16 MENDES DE JESUS, C.: **Aplicações entre Superfícies**. 2023. – Minicurso sobre aplicações e grafos

- 17 MENDES DE JESUS, C. ; MORAES, S. M. ; ROMERO-FUSTER, M. C.: Stable Gauss maps from a global viewpoint. In: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society** (2012), Nr. 42, S. 87–103
- 18 MENDES DE JESUS, C. ; ROMERO, P. D.: Graphs of Stable Gauss Maps and Quine's Theorem for Oriented 2-Manifolds. In: **Mathematics** 10 (2022), Nr. 17. – URL <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/17/3104>. – ISSN 2227-7390
- 19 MENDES DE JESUS, C. ; ROMERO, P. D. ; SANABRIA-CODESAL, E.: Closed orientable surfaces and fold Gauss maps. In: **Research in the Mathematical Sciences** 11 (2024), S. 37. – URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s40687-024-00451-0>
- 20 MENDES DE JESUS, C. ; ROMERO, P. D. ; SANTOS, L. J.: Stable Plane-Gauss Maps on Closed Orientable Surfaces. In: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 24 (2023), Apr, Nr. 2, S. 305–318. – URL <https://doi.org/10.5540/tcam.2023.024.02.00305>. – ISSN 2676-0029
- 21 MENDES DE JESUS, C. ; SANABRIA-CODESAL, E.: Realization of graphs by fold Gauss maps. In: **Topology and its Applications** 234 (2018), S. 248–258. – URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864117306028>. – ISSN 0166-8641
- 22 OHMOTO, T. ; AICARDI, F: First order local invariants of apparent contours. In: **Topology** 45 (2006), Nr. 1, S. 27–45. – URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004093830500042X>. – ISSN 0040-9383
- 23 PIGNONI, R.: Projection of surfaces with a connected fold curve. In: **Topology and its Applications** 49 (1993), S. 55–74
- 24 QUINE, J. R.: A GLOBAL THEOREM FOR SINGULARITIES OF MAPS BETWEEN ORIENTED 2-MANIFOLDS. In: **Transactions of the American Mathematical Society** 236 (1978), 02, S. 307–314
- 25 SANTOS, L. J.: **Introdução à Topologia Diferencial**. 2021. – Notas de aulas
- 26 SOUZA, I. V.: **Singularidades de Aplicações de Gauss Estáveis**. Viçosa, UFV, Dissertação (Mestrado em Matemática), 2012
- 27 URIBE-VARGAS, R.: A Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve. In: **Moscow Mathematical Journal** 6 (2006), 01, S. 731–768
- 28 VOLOSHIN, V.I.: **Introduction to Graph and Hypergraph Theory**. Nova Science Publishers, 2009. – ISBN 9781606923726
- 29 WEST, D.B.: **Introduction to Graph Theory**. Prentice Hall, 2001 (Featured Titles for Graph Theory). – ISBN 9780130144003

- 30 WHITNEY, H.: On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane. In: **Annals of Mathematics** 62 (1955), Nr. 3, S. 374–410.
– URL <http://www.jstor.org/stable/1970070>. – Zugriffsdatum: 2025-04-25. –
ISSN 0003486X, 19398980

ÍNDICE

A	
Adjacência de vértices	19
Aplicação de Gauss	37
associada à imersão	46
estável	47
sem cúspides	81
Aplicação estável	42
Aplicações	
equivalentes	41
homotópicas	53
Aresta incidente sobre um vértice	18
Arestas paralelas	19
Árvore	21
geradora	23
B	
Bordo de uma variedade	31
C	
Caminho	19
Característica de Euler	
de um complexo	34
de uma superfície	34
Ciclo	20
comprimento de um	20
fundamental	27
Complexo	33
Conjunto	
das aplicações estáveis	42
discriminante	42
regular	42
singular	42
Contato	
de k -ésima ordem	39
de primeira ordem	39
Contorno	
aparente	42
irredutível	110
Corda	27
Curva parabólica	50
Curvatura	
Gaussiana	37
média	37
principal	38
Cúspide	52
negativa	52
positiva	52
E	
Espaço	
adjacente a um complexo	33
cíclico	26
de arestas	25
tangente	30
Estrato	54
F	
Fibrado tangente	30
G	
Gênero de uma superfície	
com bordo	37
fechada	36
Grafo	17
2-negativo	100
bipartido	22
com peso	23
conexo	20
desconexo	20
dual	92
a uma superfície com curvas	87
positivo	100
Grau	
de um vértice	18
de uma aplicação	41
H	
Homotopia	53
I	
Imersão	32
Isomorfismo de grafos	19

K

k -jato	39
de uma aplicação	39

M

Mergulho	32
----------------	----

N

n -célula	32
Número ciclomático	29
Número de orientação	41

O

Orientação	
de base	35
de espaço vetorial	35

P

Plano tangente	30
Ponto	
de bordo	31
de cúspide	52
de dobra	52
duplo	44
elíptico	38
hiperbólico	38
parabólico	38
planar	38
regular	42
singular	42
umbílico	38
Primeiro número de Betti	29

R

Região	
elíptica	50
hiperbólica	50

S

Singularidade	42
do tipo S_r	43
Soma conexa	32

Subárvore	21
Subgrafo	19
próprio	19
Submersão	32
Superfície	32
com curvas	38
equivalentes	38
fechada	32

T

Topologia	
C^∞ de Whitney	40
C^k de Whitney	40
Transição	54
beaks	56
C_0	71
C_1	73
D_4^-	75
$D_{4\ 1}^+$	76
$D_{4\ 2}^+$	78
K_0	61
K_1	63
K_2	65
lips	55
lips inversa	55
swallowtail	59
T_0	67
T_1	69
Triangulação	34

V

Variedade	30
com bordo	31
compacta	31
diferenciável	30
fechada	32
não orientável	36
orientável	36
sem bordo	31
Vértice extremo	21