

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Paulo Roberto Fernandes Alves

Restaurando a invariância de calibre em teorias não-abelianas de segunda
classe

Juiz de Fora
06 de maio de 2026

Paulo Roberto Fernandes Alves

**Restaurando a invariância de calibre em teorias não-abelianas de segunda
classe**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ananias Neto

Juiz de Fora

06 de maio de 2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes Alves, Paulo Roberto.

Restaurando a invariância de calibre em teorias não-abelianas de segunda classe / Paulo Roberto Fernandes Alves. – 06 de maio de 2026.
67 f.

Orientador: Jorge Ananias Neto

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 06 de maio de 2026.

1. Invariância de calibre, 2. Gauge Unfixing. 3. *Gauge Unfixing* aprimorado (GUA). 3. Teorias não-abelianas massivas. 4. Yang–Mills massivo. 5. Sistemas vinculados. I. Paulo, Jorge. II. Restaurando a invariância de calibre em teorias não-abelianas de segunda classe

Paulo Roberto Fernandes Alves

Restaurando a invariância de Gauge em teorias não abelianas de segunda classe

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 06 de maio de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Clifford Neves Pinto

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 29/04/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto, Servidor(a)**, em 06/05/2026, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Junior de Oliveira Neves, Usuário Externo**, em 06/05/2026, às 16:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clifford Neves Pinto, Usuário Externo**, em 06/05/2026, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 06/05/2026, às 23:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Membro**, em 08/05/2026, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2964959** e o código CRC **41742E7D**.

AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa científica, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, Dr. Jorge Ananias, por todas as orientações e ensinamentos ao longo desses mais de seis anos, entre o mestrado e o doutorado. Sua mentoria foi peça-chave para o meu amadurecimento acadêmico e profissional.

À minha querida mãe e ao meu saudoso pai, por, desde muito cedo, sempre terem acreditado em mim e terem me dado todo o suporte possível para que eu conseguisse chegar até aqui. Devo a vocês a base de tudo o que sou.

Aos meus irmãos, meus exemplos de força e de luta nessa caminhada. O apoio de vocês foi o combustível necessário nos momentos de maiores desafios.

Ao meu grande amigo e irmão Felipe Pestana, por todas as palavras de incentivo e apoio, por ter me ouvido, e acreditado em mim nos piores momentos.

Agradeço a todos que, de alguma forma, colaboraram para que eu alcançasse esse objetivo e contribuíssem para o fim dessa jornada.

"Ali, espiando por entre as nuvens acima de um pico alto, Sam viu uma estrela branca brilhar por um instante. A beleza dela golpeou-lhe o coração, e a esperança retornou. Pois, como um relâmpago, passou-lhe pelo pensamento que, no fim das contas, a Sombra era apenas uma coisa pequena e passageira: havia luz e beleza que ela jamais poderia alcançar.— J.R.R. Tolkien

RESUMO

As teorias de calibre são fundamentais para a construção e a compreensão do modelo padrão de física de partículas e das interações fundamentais por ele descritas. No entanto, a introdução explícita de termos de massa em modelos como Yang–Mills viola a invariância de calibre e conduz a sistemas descritos por vínculos de segunda classe no formalismo de Dirac, comprometendo aspectos como a unitariedade e a renormalizabilidade perturbativa do modelo. O objetivo deste trabalho é estender o formalismo de *Gauge Unfixing* aprimorado (GUA) para modelos não-abelianos de segunda classe. O formalismo desenvolvido é aplicado explicitamente ao modelo de Yang–Mills massivo $SU(N)$ e ao modelo de Skyrme $SU(2)$. Mostra-se que, por meio de uma escolha criteriosa dos geradores de simetria, as variáveis originais do espaço de fase podem ser mapeadas em quantidades invariantes de calibre. Os resultados estabelecem uma correspondência direta entre o GUA, o formalismo de Stückelberg generalizado e o formalismo de Dirac, indicando que a técnica fornece uma ferramenta robusta para recuperar a simetria de calibre em regimes nos quais partículas mediadoras de interação adquirem massa, preservando a consistência algébrica, a interpretação física do sistema e o número de graus de liberdade físicos do modelo.

Palavras-chave: Invariância de calibre. *Gauge Unfixing* aprimorado. Teorias não-abelianas massivas. Yang–Mills massivo. Modelo de Skyrme. Formalismo de Stückelberg.

ABSTRACT

Gauge theories are fundamental to the construction and understanding of the Standard Model of particle physics and of the fundamental interactions it describes. However, the explicit introduction of mass terms in models such as Yang–Mills violates gauge invariance and leads to systems described by second-class constraints within the Dirac formalism, thereby compromising critical aspects such as unitarity and perturbative renormalizability. The objective of this work is to extend the improved *Gauge Unfixing* formalism (IGU) to non-Abelian second-class models. The framework developed here is applied explicitly to the $SU(N)$ massive Yang–Mills model and to the $SU(2)$ Skyrme model. It is shown that, through a judicious choice of symmetry generators, the original phase-space variables can be mapped into gauge-invariant quantities. The results establish a direct correspondence between the IGU method, the generalized Stückelberg formalism, and the Dirac formalism, showing that the technique provides a robust tool for restoring gauge symmetry in regimes where interaction-mediating particles acquire mass. Furthermore, the method preserves the algebraic consistency and the physical interpretation of the system while leaving the number of physical degrees of freedom unchanged.

Keywords: Gauge invariance, improved *Gauge Unfixing*, massive non-Abelian theories, massive Yang–Mills, Skyrme model, Stückelberg formalism.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFJ	Carroll–Field–Jackiw
LIV	Lorentz invariance violation
GU	Gauge Unfixing
IGU	Improved Gauge Unfixing
BFT	Batalin-Fradkin-Tyutin
YM	Yang–Mills
GUA	Gauge Unfixing aprimorado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	A necessidade de uma nova mecânica hamiltoniana.	13
2.1	O Algoritmo de Dirac–Bergmann e a Classificação de Vínculos	14
2.2	O Hamiltoniano Total e a Dinâmica do Sistema	15
2.3	A Álgebra de Dirac: Colchetes de Poisson vs. Colchetes de Dirac	16
2.4	A Contagem de Graus de Liberdade Físicos	17
2.5	Aplicações na Física Teórica: Exemplos de Sistemas Vinculados	18
2.5.1	Partícula Relativística Livre	18
2.5.2	Teoria de Maxwell (Eletrodinâmica)	19
2.5.3	Teoria de Proca	19
2.6	Quantização Canônica de Sistemas Vinculados	19
2.7	Conexão com o Formalismo de <i>Gauge Unfixing</i>	21
3	O GAUGE UNFIXING	22
3.1	MÉTODO GU USUAL	22
3.2	MÉTODO GAUGE UNFIXING APRIMORADO	23
3.2.1	Aplicação ao modelo Carroll–Field–Jackiw massivo Abeliano	26
3.3	Adicionando simetria de calibre ao modelo CFJ massivo	28
4	Formalismo de Stückelberg	33
4.1	A solução de Stückelberg: restaurando a simetria	33
4.2	Comparação com o Mecanismo de Higgs	34
5	O Formalismo de <i>Gauge Unfixing</i> Aprimorado para Casos não-abelianos	35
6	Modelo de Yang–Mills Massivo $SU(N)$	37
6.1	Estrutura canônica do modelo de Yang–Mills massivo	37
6.2	Algoritmo de Dirac–Bergmann aplicado ao modelo de Yang–Mills massivo	39
7	Construção invariante de calibre do modelo de Yang–Mills	41
7.1	Caso I (T_1^a como gerador)	41
7.1.1	Obtendo $\tilde{A}_0^a$	41
7.1.2	Verificação da condição de consistência para o vínculo descartado T_2^a	42
7.2	Caso II (T_2^a como gerador)	43
7.2.1	Obtendo $\tilde{A}_i^a$	44
7.2.2	Obtendo $\tilde{\pi}_i^a$	45
7.2.3	Obtendo $\tilde{\pi}_0^a$ (condição de consistência)	45
7.2.4	Obtendo $\tilde{T}_2^a$	46
7.2.5	Construindo a hamiltoniana de primeira classe	46
7.2.5.1	Expansão do Termo de Massa	47
7.2.5.2	Expansão do Termo Cinético dos Momentos	47

7.2.6	Construindo a lagrangiana de primeira classe	48
7.2.7	Parênteses de Dirac vs. parênteses de Poisson das variáveis GU	49
7.2.8	Análise dos Graus de Liberdade e Consistência do Formalismo	51
8	O Modelo de Skyrme $SU(2)$	53
8.0.1	T_1 como Vínculo de Primeira Classe	54
8.0.2	T_2 como Vínculo de Primeira Classe	55
9	CONCLUSÃO	57
A	Apêndice A: correspondência com o formalismo de Stückelberg generalizado	59
B	Apêndice B: invariância de calibre da lagrangiana de Stückel- berg não-abeliana	61
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos com vínculos desempenham um papel central na física teórica e podem ser classificados em duas categorias fundamentais: vínculos de primeira e de segunda classe. Um vínculo é de primeira classe quando seus parênteses de Poisson com todos os vínculos da teoria se anulam fracamente, isto é, sobre a superfície de vínculos. Já um vínculo é de segunda classe quando pertence a um subconjunto cuja matriz de Dirac, formada pelos parênteses de Poisson entre os vínculos desse subconjunto, é não singular; portanto, não é necessário exigir que seu parêntese de Poisson seja não nulo com todos os demais vínculos, mas sim que o bloco relevante da matriz de vínculos admita inversa. Essa distinção é crucial, pois os vínculos de primeira classe estão associados à invariância de calibre e atuam como geradores das transformações de calibre [1–5]. Nesse contexto, a simetria de calibre deixa de ser apenas uma redundância matemática da descrição dos campos e passa a desempenhar papel central na identificação dos observáveis físicos e na separação entre estados físicos e estados espúrios.

As simetrias de calibre ocupam lugar central na construção das teorias modernas das interações fundamentais e da gravitação. Elas permitem identificar correntes e cargas conservadas, controlar graus de liberdade supérfluos e garantir a unitariedade dos elementos da matriz S . Além disso, as identidades de Ward, associadas à simetria de calibre, são essenciais para o controle da renormalização e para a análise de anomalias [6, 7]. A formulação em termos de calibre também fornece uma interpretação geométrica natural das teorias de campos, na qual conexões, curvaturas e estruturas de fibra organizam de maneira algébrica e topológica a dinâmica dos campos.

Por consequência, descrever uma teoria fundamental como teoria de calibre não apenas lhe fornece uma estrutura formal mais sólida, mas também favorece uma interpretação física mais clara. Um exemplo importante de sistema dinâmico com vínculos de segunda classe é a teoria de Yang–Mills com termo de massa explícito do tipo $m^2 A_\mu^a A_\mu^a$. Inserido diretamente, esse termo viola a invariância de calibre, aspecto central dessas teorias [3, 4]. No entanto, há razões físicas para estudar uma escala efetiva de massa no setor de calibre, especialmente no regime infravermelho e não-perturbativo da QCD. A convivência entre uma massa efetiva para os glúons e a invariância de calibre constitui um desafio formal importante: sem uma reformulação adequada, corre-se o risco de perder o controle sobre a unitariedade e a renormalizabilidade perturbativa. Esse problema tem sido investigado por diferentes abordagens, incluindo modelos de Gribov–Zwanziger, equações de Schwinger–Dyson, regras de soma da QCD e simulações de rede [6, 8]. Torna-se, portanto, natural investigar reformulações do termo de massa capazes de restaurar a simetria de calibre original.

Em baixas energias, as técnicas perturbativas usuais da Cromodinâmica Quântica

(QCD) tornam-se inadequadas em virtude do forte acoplamento. Nesse regime, os graus de liberdade efetivos da QCD manifestam-se como hádrons e outros estados exóticos de compósitos. Assim, a investigação das propriedades hadrônicas exige frequentemente o recurso a modelos efetivos. Uma abordagem particular para descrever bárions e suas interações com o meio é oferecida pelo modelo de Skyrme, um modelo mesônico não-linear que incorpora configurações solitônicas topologicamente não triviais, interpretadas como bárions. O termo de Skyrme [3, 4] é um termo estabilizador de quarta ordem em derivadas acrescentado ao modelo sigma não-linear; após a introdução de coordenadas coletivas e a parametrização em $SU(2)$, a condição de normalização do grupo gera vínculos de segunda classe. A relevância de tratar tais vínculos adequadamente reflete-se na consistência da descrição efetiva da física nuclear de baixas energias.

A liberdade de calibre pode simplificar álgebras, desde que se escolha uma fixação de calibre adequada para cada cenário. A ideia central consiste em reescrever um sistema de segunda classe como um sistema equivalente de primeira classe, de modo que a teoria resultante exiba uma simetria de calibre. Diversos métodos no formalismo hamiltoniano foram desenvolvidos para esse propósito, incluindo o método de Batalin–Fradkin–Tyutin (BFT) [2] e o formalismo de *Gauge Unfixing* (GU) [9, 10]. A escolha pelo GU, em detrimento do BFT, justifica-se pela economia representacional: ao evitar o alargamento do espaço de fase com campos auxiliares, o método preserva a transparência da estrutura física original. Trabalhos desenvolvidos no contexto da UFJF e de grupos associados também exploram métodos simpléticos, gauge unfixing e conversão de vínculos, fornecendo base técnica importante para a formulação adotada nesta tese [3, 4, 11–13].

A motivação primária do GU e de suas versões aprimoradas é utilizar um dos vínculos de segunda classe como gerador de simetria, enquanto o outro vínculo é descartado de maneira controlada. As quantidades invariantes resultantes são expressas como séries de potências do vínculo descartado, cujos coeficientes são determinados por transformações sucessivas da variável original sob a ação do novo gerador. No domínio da teoria quântica de campos, esse formalismo tem sido aplicado com sucesso em modelos abelianos, como Chern–Simons [13], Proca [14] e Carroll–Field–Jackiw massivo [3, 4].

No Capítulo II, discutimos a importância dos sistemas vinculados, a necessidade do algoritmo de Dirac–Bergmann, a contagem de graus de liberdade e exemplos clássicos de sistemas com vínculos. Ao final do capítulo, apresentamos a conexão entre o formalismo de Dirac e o formalismo de *Gauge Unfixing*, enfatizando a equivalência entre os colchetes de Poisson das variáveis invariantes de calibre e os colchetes de Dirac das variáveis originais.

No Capítulo III, revisamos o formalismo de *Gauge Unfixing* usual e o método aprimorado, com aplicação ao modelo Carroll–Field–Jackiw massivo abeliano. Essa etapa fixa a notação e mostra como as variáveis invariantes de calibre são construídas diretamente no espaço de fase original.

No Capítulo IV, apresentamos o formalismo de Stückelberg, destacando sua função na restauração de simetria de calibre em teorias massivas e sua relação com formulações equivalentes de primeira classe [15, 16].

No Capítulo V, desenvolvemos a extensão do *Gauge Unfixing* aprimorado para casos não-abelianos. Consideramos um par de vínculos T_1^a e T_2^a valorados em uma álgebra de Lie e construímos, ordem a ordem, o operador de projeção que leva funcionais do espaço de fase a quantidades invariantes de calibre.

No Capítulo VI, analisamos o modelo de Yang–Mills massivo $SU(N)$, incluindo sua estrutura canônica, seus vínculos de segunda classe e a matriz de Dirac associada. No Capítulo VII, aplicamos o formalismo desenvolvido à construção invariante de calibre do modelo de Yang–Mills, discutindo os dois casos possíveis de escolha do vínculo gerador.

No Capítulo VIII, aplicamos o mesmo procedimento ao modelo de Skyrme $SU(2)$, entendido como uma teoria efetiva não-abeliana com vínculos de segunda classe no regime de baixas energias da QCD. Por fim, no Capítulo IX, condensamos as conclusões gerais do trabalho e apontamos possíveis extensões do método para outras teorias não-abelianas e regimes não-perturbativos.

O principal resultado original desta tese consiste na extensão sistemática do formalismo de *Gauge Unfixing* aprimorado (GUA) para teorias não-abelianas de segunda classe. Diferentemente dos casos abelianos estudados na literatura, mostramos que, em teorias de Yang–Mills massivas e também para o modelo de Skyrme, as variáveis invariantes de calibre não truncam em ordem finita, exigindo uma construção em série completa. Aplicamos esse formalismo de maneira explícita aos modelos de Yang–Mills massivo $SU(N)$ e Skyrme $SU(2)$, estabelecendo sua equivalência com uma formulação do tipo Stückelberg não polinomial no espaço de fase, sem a introdução de variáveis auxiliares [3, 4].

2 A necessidade de uma nova mecânica hamiltoniana.

A descrição da dinâmica de um sistema físico normalmente se inicia com a sua formulação Lagrangiana, que se baseia em equações de movimento de segunda ordem. Para a maioria dos sistemas na mecânica clássica, o princípio da mínima ação resulta nas Equações de Euler-Lagrange, que podem ser resolvidas para as acelerações em termos das coordenadas e velocidades [17]. Essa transição para o formalismo Hamiltoniano é crucial para a quantização canônica e depende da transformada de Legendre, um procedimento que substitui as velocidades generalizadas pelos momentos canônicos. Contudo, essa abordagem padrão é insuficiente para uma classe importante de sistemas físicos, cuja descrição se dá através de Lagrangianas que são singulares [1, 2, 17].

Consideramos uma Lagrangiana singular quando a matriz Hessiana, definida por $W_{rs} = \partial^2 L / (\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s)$, possui um determinante nulo ($\det |W| = 0$). A singularidade desta matriz impede que as relações que definem os momentos canônicos, $p_s = \partial L / \partial \dot{q}_s$, sejam invertidas para expressar as velocidades generalizadas $\dot{q}_s$ em termos das posições e momentos canônicos. Isso, por sua vez, resulta na impossibilidade de se construir um Hamiltoniano no sentido convencional e, mais fundamentalmente, significa que as equações de Euler-Lagrange não determinam as acelerações de forma única [1, 17]. A falha na inversão da transformada de Legendre leva à imposição de restrições entre as variáveis de fase (coordenadas e momentos), conhecidas como vínculos [1, 2, 17].

Com o objetivo de sanar essa inconsistência matemática, Paul Dirac desenvolveu uma técnica sistemática para tornar a Lagrangiana não singular e, assim, obter equações de movimento consistentes para esses sistemas [17]. O formalismo de Dirac é amplamente reconhecido como a abordagem mais eficaz para lidar com sistemas vinculados, apesar do desenvolvimento de métodos alternativos, como o formalismo de Faddeev-Jackiw [2]. A relevância desse formalismo não é meramente uma conveniência matemática; ela é uma necessidade para o tratamento de sistemas fundamentais na física, incluindo teorias de calibre como a eletrodinâmica (Teoria de Maxwell) e a mecânica quântica relativística, onde os graus de liberdade parecem exceder os graus de liberdade dinâmicos genuínos [18].

A necessidade do formalismo de Dirac é mais do que uma mera correção de uma falha algébrica. A incapacidade do formalismo de Lagrange de determinar unicamente as acelerações é um sintoma de um problema mais profundo: a existência de graus de liberdade redundantes ou não físicos. O formalismo de Dirac fornece uma nova fundação que não apenas corrige a falha na transição Lagrangiana-Hamiltoniana, mas também oferece uma estrutura para entender e gerenciar essas redundâncias. O formalismo separa os graus de liberdade genuínos dos espúrios, que são a manifestação clássica de simetrias de calibre [2, 18]. Portanto, o formalismo de Dirac não é uma simples correção, mas um arcabouço que revela a estrutura subjacente, como vínculos e simetrias de calibre, que não

poderiam ser tratadas de forma canônica tradicional [18].

2.1 O Algoritmo de Dirac–Bergmann e a Classificação de Vínculos

O algoritmo de Dirac–Bergmann é um procedimento que visa lidar com a transformada de Legendre singular e as restrições resultantes. A análise começa com a definição do momento canônico $p_s = \partial L / \partial \dot{q}_s$. Para Lagrangianas singulares, esta relação leva a equações que dependem apenas das coordenadas e momentos, sem a presença de velocidades generalizadas. Essas relações definem um conjunto de **vínculos primários**, $\phi_j(q, p) \approx 0$. A notação $\approx$ (igualdade fraca) é utilizada para indicar que o vínculo é válido apenas na subvariedade do espaço de fase definida por ele, não em todo o espaço de fase [1].

O passo seguinte é garantir a consistência temporal dos vínculos primários. A sua evolução temporal deve ser fracamente nula, i.e., $\dot{\phi}_j = \{\phi_j, H_P\} \approx 0$, onde $\{, \}$ denota o colchete de Poisson e H_P é o Hamiltoniano primário, definido como $H_P = H_C + \sum_j u_j \phi_j$. A verificação dessa condição de consistência pode levar a três resultados:

1. Uma equação que é uma identidade, indicando que o vínculo é preservado no tempo.
2. Uma equação que determina um ou mais multiplicadores de Lagrange arbitrários, u_j .
3. Uma nova relação entre as coordenadas e momentos, independente dos multiplicadores.

As relações do terceiro tipo são chamadas de **vínculos secundários**. O algoritmo exige que se continue a verificar a consistência temporal de todos os vínculos (primários e secundários) até que não sejam gerados novos vínculos. O conjunto completo de vínculos primários e secundários é o ponto de partida para a classificação final.

A classificação mais fundamental dos vínculos é baseada em seus colchetes de Poisson entre si. Esta distinção é a chave para a compreensão dos graus de liberdade e das simetrias do sistema.

- **Vínculos de primeira classe:** um vínculo Φ_I é de primeira classe quando seu colchete de Poisson com todos os vínculos da teoria se anula fracamente. De modo geral, pode-se escrever $\{\Phi_I, \Phi_J\} \approx C_{IJ}^K \Phi_K$ [2]. Os multiplicadores de Lagrange associados a vínculos de primeira classe permanecem indeterminados, refletindo a liberdade de calibre do sistema.
- **Vínculos de segunda classe:** um conjunto de vínculos Θ_α é de segunda classe quando a matriz $C_{\alpha\beta} = \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}$ é não singular na superfície de vínculos. Assim, a caracterização correta não exige que cada vínculo tenha colchete não nulo com

todos os demais, mas que o bloco relevante da matriz de Dirac seja inversível. Os multiplicadores associados a esses vínculos são determinados pelas condições de consistência temporal [1, 2, 19].

Esta dicotomia é o aspecto mais profundo do formalismo de Dirac. Os vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de calibre (simetrias) do sistema. A dinâmica gerada por esses vínculos não altera o estado físico do sistema, apenas move o ponto no espaço de fase ao longo de uma órbita de calibre fisicamente indistinguível. Em contraste, os vínculos de segunda classe não geram transformações de calibre e impõem restrições algébricas estritas entre as variáveis de fase. O algoritmo de Dirac separa efetivamente os graus de liberdade genuínos (aqueles que descrevem a dinâmica física) dos redundantes ou não físicos (aqueles que estão associados às simetrias de calibre) [1, 2].

Tabela 1 – Classificação dos vínculos e suas implicações físicas

Tipo de Vínculo	Definição Algébrica	Implicação Física
Primário	Obtido diretamente da transformada de Legendre singular, $\phi_j(q, p) \approx 0$.	Relações iniciais entre variáveis de fase, não dependentes da evolução temporal.
Secundário	Gerado a partir da condição de consistência temporal de um vínculo primário, $\dot{\phi}_j \approx 0$.	Vínculos derivados que garantem a preservação temporal das restrições primárias.
Primeira classe	$\{\Phi_I, \Phi_J\} \approx 0$.	Geradores de transformações de calibre, associados a graus de liberdade não físicos.
Segunda classe	A matriz $C_{\alpha\beta} = \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}$ é não singular.	Restrições algébricas que reduzem o espaço de fase, associadas a graus de liberdade físicos.

2.2 O Hamiltoniano Total e a Dinâmica do Sistema

A partir da transformada de Legendre, o primeiro passo é definir o Hamiltoniano Canônico, $H_C = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$. No entanto, para sistemas singulares, a evolução temporal das variáveis de fase não é descrita unicamente por H_C . Dirac propôs a introdução de multiplicadores de Lagrange arbitrários para construir um **Hamiltoniano Primário**, $H_P = H_C + \sum_j u_j \phi_j$, onde ϕ_j são os vínculos primários [1]. Este Hamiltoniano primário é a base para o algoritmo de consistência que leva à descoberta de todos os vínculos secundários.

A dinâmica completa do sistema é, então, governada pelo **Hamiltoniano Total** (ou Estendido), que inclui todos os vínculos (primários e secundários) com seus respectivos multiplicadores. A forma geral do Hamiltoniano Total é $H_T = H_C + \sum_i u_i \Phi_i$, onde

Φ_i representa o conjunto completo de vínculos, cada um multiplicado pelo respectivo multiplicador de Lagrange. A evolução temporal de uma função arbitrária $g(q, p)$ no espaço de fase é dada pelas equações de movimento de Hamilton modificadas: $\dot{g} \approx \{g, H_T\}$ [2, 17, 18].

O Hamiltoniano Total não é meramente a soma do Hamiltoniano Canônico com os vínculos; ele é a ferramenta que codifica a dinâmica completa do sistema na presença das restrições. A arbitrariedade dos multiplicadores de Lagrange u_j para os vínculos de primeira classe é a manifestação da liberdade de calibre do sistema. Essa arbitrariedade reflete o fato de que a dinâmica física é invariante sob certas transformações, e a escolha do caminho no espaço de fase ao longo das “órbitas de calibre” não afeta o resultado físico. Para os vínculos de segunda classe, as condições de consistência temporal podem fixar o valor de seus multiplicadores, garantindo que as restrições sejam estritamente preservadas [17, 18].

2.3 A Álgebra de Dirac: Colchetes de Poisson vs. Colchetes de Dirac

O colchete de Poisson, $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$, é a estrutura fundamental da mecânica hamiltoniana para descrever a evolução temporal de funções no espaço de fase [2, 17, 19]. Entretanto, em sistemas com vínculos de segunda classe sua aplicação direta não preserva automaticamente a superfície física de vínculos. Para um conjunto de vínculos Θ_α , a matriz $C_{\alpha\beta} = \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}$ é inversível; por isso, esses vínculos devem ser incorporados à própria estrutura simplética antes que as equações de movimento reduzidas sejam escritas.

Para sanar essa inconsistência, Dirac desenvolveu uma generalização do colchete de Poisson, o colchete de Dirac, $\{f, g\}_{Dirac}$ [2, 17, 18]. O colchete de Dirac é definido de modo que a evolução temporal fique projetada sobre a superfície de vínculos, garantindo que o colchete de qualquer função com um vínculo de segunda classe seja zero [1, 17]. A definição é:

$$\{f, g\}_{Dirac} = \{f, g\} - \{f, \Phi_a\}(C^{-1})_{ab}\{\Phi_b, g\} \quad (2.1)$$

onde Φ_a e Φ_b representam o conjunto de vínculos de segunda classe, e $C_{ab} = \{\Phi_a, \Phi_b\}$ é a matriz de colchetes de Poisson entre eles [2, 17, 19]. Dirac provou que a matriz C é sempre invertível para um conjunto de vínculos de segunda classe [1]. A principal propriedade do colchete de Dirac é que, por construção, ele anula os vínculos de segunda classe, ou seja, $\{f, \Phi_a\}_{Dirac} = 0$ para qualquer função f no espaço de fase. Isso permite que os vínculos de segunda classe sejam tratados como zero *fortemente* no nível clássico, resolvendo a inconsistência da quantização [2, 17, 19]. As equações de movimento podem então ser escritas de forma compacta como $\dot{g} = \{g, H_C\}_{Dirac}$, usando o Hamiltoniano Canônico, mas com a nova álgebra de colchetes.

O colchete de Dirac é mais do que uma simples generalização algébrica: ele representa a estrutura simplética induzida no espaço de fase reduzido. Uma vez construído, os vínculos de segunda classe podem ser impostos fortemente, e as equações de movimento clássicas passam a ser escritas diretamente como $\dot{g} = \{g, H_C\}_D$, com a dinâmica já projetada sobre a superfície física de vínculos.

Tabela 2 – Comparação entre os colchetes de Poisson e de Dirac

Propriedade	Colchete de Poisson $\{f, g\}$	Colchete de Dirac $\{f, g\}_{Dirac}$
Definição	$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$	$\{f, g\} - \{f, \Phi_a\} (C^{-1})_{ab} \{\Phi_b, g\}$
Bilinearidade	Sim	Sim
Identidade de Jacobi	Sim	Sim
Comportamento com vínculos de 1ª classe	Pode ser nulo ou não, dependendo das funções consideradas.	Zero por construção, quando aplicado no contexto dos vínculos de segunda classe.
Comportamento com vínculos de 2ª classe	Em geral, não é nulo.	Nulo por construção: $\{f, \Phi_a\}_{Dirac} = 0$.
Uso em Quantização	Falha para sistemas com vínculos de segunda classe.	Permite a quantização consistente de sistemas com vínculos de segunda classe.

2.4 A Contagem de Graus de Liberdade Físicos

Um dos resultados mais poderosos do formalismo de Dirac é a capacidade de contar os graus de liberdade dinâmicos genuínos de um sistema. O número de graus de liberdade físicos, n , pode ser determinado a partir da dimensão do espaço de fase inicial e do número de vínculos de primeira e segunda classe. A fórmula de Dirac para a dimensão do espaço de fase reduzido é [2]:

$$n = 2N - 2j_1 - j_2 \quad (2.2)$$

onde $2N$ é a dimensão do espaço de fase inicial (com N coordenadas e N momentos), j_1 é o número de vínculos de primeira classe, e j_2 é o número de vínculos de segunda classe [2, 19].

A interpretação desta fórmula está diretamente ligada à classificação dos vínculos:

- **Vínculos de Segunda Classe (j_2):** Cada vínculo de segunda classe impõe uma restrição algébrica direta no espaço de fase, reduzindo sua dimensão em uma unidade. Isso significa que, para cada vínculo $\Phi_a \approx 0$, uma variável (coordenada ou momento) pode ser eliminada, removendo um grau de liberdade [2, 19].

- **Vínculos de Primeira Classe (j_1):** Cada vínculo de primeira classe remove dois graus de liberdade [2, 19]. Um corresponde à restrição no espaço de fase imposta pelo vínculo. O outro corresponde à liberdade de calibre gerada por ele. Um vínculo de primeira classe Φ_I gera uma transformação que move o sistema ao longo de uma órbita de calibre, mas essa direção não é fisicamente significativa. Portanto, um grau de liberdade dinâmico (a coordenada de calibre) e sua variável conjugada (o momento) são ambos eliminados [2, 19]. A contagem de Dirac é uma ferramenta crucial para validar a estrutura de uma teoria, garantindo que a análise hamiltoniana produza o número correto de graus de liberdade físicos. A contagem no formalismo hamiltoniano pode ser conectada ao formalismo lagrangiano, em que o número de graus de liberdade físicos é metade da dimensão do espaço de fase reduzido, $n_L = n/2$ [2, 19].

2.5 Aplicações na Física Teórica: Exemplos de Sistemas Vinculados

O formalismo de Dirac é extremamente eficiente na análise de uma variedade de sistemas físicos fundamentais. A seguir, o método é aplicado a três exemplos canônicos, demonstrando o formalismo na prática.

2.5.1 Partícula Relativística Livre

O formalismo de Dirac é necessário para tratar a dinâmica de uma partícula relativística livre de maneira covariante. A Lagrangiana para tal partícula é singular. A análise canônica revela a presença de vínculos.

- **Análise de Vínculos:** O procedimento de Dirac–Bergmann para a Lagrangiana da partícula relativística revela dois vínculos:
 1. Um vínculo primário, $\phi_1 = p_0 \approx 0$, que surge da definição do momento conjugado ao tempo.
 2. Um vínculo secundário, $\phi_2 = p^\mu p_\mu + m^2 \approx 0$, onde p^μ é o quadrimomento.
- **Classificação:** A análise dos colchetes de Poisson mostra que esses vínculos formam um conjunto de primeira classe, pois $\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0$.
- **Implicação Física:** A existência de vínculos de primeira classe indica que o sistema possui uma simetria de calibre. Neste caso, a simetria de calibre está associada à liberdade de reparametrização temporal da trajetória da partícula. Essa liberdade de escolha da coordenada de tempo é fundamental para o tratamento canônico de sistemas relativísticos [17]. A contagem de graus de liberdade, por sua vez, confirma que o sistema possui apenas 6 graus de liberdade físicos (3 posições, 3 momentos), o que é consistente com a dinâmica de uma partícula livre no espaço-tempo.

2.5.2 Teoria de Maxwell (Eletrodinâmica)

A Teoria de Maxwell, que descreve o eletromagnetismo, é uma teoria de calibre fundamental. Sua Lagrangiana é singular.

- **Análise de Vínculos:** O momento canônico conjugado ao potencial escalar A_0 é nulo, levando a um vínculo primário $\pi^0 \approx 0$. A condição de consistência deste vínculo no tempo gera um vínculo secundário, $\partial_i \pi^i \approx 0$, que é a Lei de Gauss.
- **Classificação:** Ambos os vínculos, $\phi_1 = \pi^0 \approx 0$ e $\phi_2 = \partial_i \pi^i \approx 0$, são de primeira classe, pois seus colchetes de Poisson se anulam.
- **Implicação Física:** A presença de vínculos de primeira classe na eletrodinâmica está diretamente ligada à sua simetria de calibre, que permite a liberdade de escolher o potencial eletromagnético A_μ sem alterar o campo físico. A contagem de graus de liberdade físicos é $n = 2(4) - 2(2) - 0 = 4$, no espaço de fase inicial, que corresponde a 2 graus de liberdade físicos no espaço de configuração. Estes são as duas polarizações transversais do fóton [17]. A análise de Dirac confirma a natureza de calibre do eletromagnetismo e o número correto de polarizações do fóton.

2.5.3 Teoria de Proca

A Teoria de Proca descreve um campo vetorial massivo e, ao contrário da Teoria de Maxwell, não possui simetria de calibre.

- **Análise de Vínculos:** A análise canônica da Teoria de Proca resulta em um conjunto de vínculos, todos de segunda classe.
- **Implicação Física:** A ausência de simetria de calibre na Teoria de Proca está diretamente relacionada com o fato de que todos os seus vínculos são de segunda classe. O formalismo de Dirac não apenas identifica a ausência de simetria de calibre, mas também permite uma quantização consistente do sistema. A contagem de graus de liberdade para a Teoria de Proca resulta em 3 graus de liberdade físicos, que são as três polarizações de um bóson vetorial massivo. Esta é uma das principais diferenças físicas entre a teoria de Maxwell (fóton sem massa com duas polarizações) e a de Proca (bóson massivo com três polarizações).

2.6 Quantização Canônica de Sistemas Vinculados

O principal objetivo da mecânica hamiltoniana para sistemas vinculados é fornecer um método consistente para a quantização. A quantização de sistemas com vínculos pode ser realizada de duas formas [17]: pela quantização no espaço de fase reduzido

Tabela 3 – Exemplos clássicos de sistemas vinculados

Sistema	Vínculos	Classificação / GLs físicos	Implicação Física
Partícula Relativística	Primário: $p_0 \approx 0$. Secundário: $p^2 + m^2 \approx 0$.	1ª classe. $2(4) - 2(2) = 4$ no espaço de fase.	Simetria de reparametrização temporal.
Teoria de Maxwell	Primário: $\pi^0 \approx 0$. Secundário: $\partial_i \pi^i \approx 0$ (Lei de Gauss).	1ª classe. $2(4) - 2(2) = 4$ no espaço de fase.	Simetria de calibre; fóton com duas polarizações transversais.
Teoria de Proca	Conjunto de vínculos primários e secundários de segunda classe.	2ª classe. 3 graus de liberdade físicos.	Sem simetria de calibre; bóson vetorial massivo com três polarizações.

(eliminando-se os vínculos no nível clássico e quantizando o sistema restante) ou pela quantização de Dirac, que quantiza o sistema no espaço de fase completo. O formalismo de Dirac é particularmente útil porque lida diretamente com os problemas de consistência que surgem da quantização de vínculos de segunda classe. A quantização de Dirac se baseia em duas condições fundamentais [2]:

1. **A Regra de Quantização de Dirac:** A regra de quantização canônica, que associa colchetes clássicos a comutadores quânticos, deve ser modificada para sistemas com vínculos de segunda classe. Nesses casos, o colchete de Poisson é substituído pelo colchete de Dirac, garantindo que as relações de comutação respeitem a superfície de vínculos [17, 18]. Para operadores correspondentes às variáveis de fase A e B , a prescrição correta é

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}_D}, \quad (2.3)$$

onde $\{A, B\}_D$ denota o colchete de Dirac. Esta substituição resolve o problema de inconsistência, pois os vínculos de segunda classe passam a ter colchetes de Dirac nulos com qualquer função no espaço de fase, resultando em comutadores compatíveis com a imposição forte dos vínculos no nível quântico.

2. **A Condição de Dirac:** A segunda condição é que os estados físicos $|\psi\rangle$ do sistema devem ser aniquilados por todos os operadores de vínculo. Para um conjunto de vínculos Φ_j , isso se expressa como $\hat{\Phi}_j|\psi\rangle = 0$. Esta condição garante que os estados quânticos do sistema obedeçam às restrições clássicas.

O formalismo de Dirac soluciona uma questão importante de consistência. A quantização de sistemas com vínculos de segunda classe, sem a utilização dos colchetes de Dirac,

resultaria em comutadores não nulos entre operadores de vínculo. Isso seria fisicamente inconsistente, pois esses vínculos deveriam ser estritamente zero para estados físicos. A troca do colchete de Poisson pelo de Dirac assegura que a álgebra de comutação quântica esteja alinhada com a estrutura de vínculos do sistema clássico, resultando em uma quantização claramente definida.

2.7 Conexão com o Formalismo de *Gauge Unfixing*

Uma área de pesquisa atual que destaca a profundidade do formalismo de Dirac é o formalismo de *Gauge Unfixing* (GU) [10, 13, 14]. Enquanto o formalismo de Dirac trata da quantização de sistemas com sua simetria de calibre "fixada" (ou seja, sistemas de segunda classe), o formalismo de GU "anula" o processo de fixação de calibre. Ele reintroduz as variáveis de calibre para transformar um sistema de segunda classe em um sistema de primeira classe, expondo as simetrias que estavam ocultas na formulação de segunda classe [13].

A ligação mais significativa entre os dois formalismos está em um resultado importante: os colchetes de Poisson das novas variáveis invariantes de calibre, obtidas por meio do formalismo de *Gauge Unfixing*, são equivalentes aos colchetes de Dirac das variáveis de segunda classe originais. [5, 13].

Essa coincidência transforma o colchete de Dirac de uma simples ferramenta de quantização em uma representação essencial da dinâmica de sistemas com vínculos. O formalismo de Dirac não só evita as dificuldades associadas aos vínculos de segunda classe, como também incorpora a essência da dinâmica invariante de calibre. A correspondência entre os colchetes de Dirac de um sistema de segunda classe e os colchetes de Poisson de um sistema de primeira classe equivalente constitui uma validação cruzada robusta. Essa ligação evidencia a universalidade da estrutura simplética de Dirac, que permanece inalterada mesmo quando o sistema é reestruturado para restabelecer explicitamente sua simetria de calibre. Dessa forma, o formalismo de Dirac continua a ser um pilar da física teórica, fornecendo a fundação para a compreensão e quantização de uma vasta gama de sistemas dinâmicos.

3 O GAUGE UNFIXING

3.1 MÉTODO GU USUAL

Proposto por Mitra, Rajaraman, e Vytheeswaran [14, 20], o método GU surge como uma alternativa elegante ao formalismo BFT [21], uma vez que não necessita da expansão do espaço de fase com variáveis extras. Para iniciar esse tratamento, deve-se considerar os vínculos de segunda classe do modelo a ser tratado, vínculos esses, obtidos via formalismo de Dirac para sistemas vinculados [1]. Caso existam mais de dois vínculos de segunda classe, devemos combiná-los de forma que restem apenas um par de vínculos de segunda classe [13, 19, 22]. Um desses vínculos deve ser usado como gerador de simetria e o outro deve ser usado na obtenção dos termos de fixação de calibre, fazendo com que a Hamiltoniana de segunda classe, seja modificada pelo vínculo escolhido como gerador de simetria, a fim de que ela satisfaça a chamada álgebra de primeira classe [13, 22].

Inicialmente, deve-se considerar um sistema vinculado descrito por uma Hamiltoniana de segunda classe H e dois vínculos também de segunda classe, T_1 e T_2 . A ideia básica do formalismo GU está em selecionar um desses vínculos para ser o gerador de simetria, então, caso escolhamos T_1 para fazer o papel de vínculo de primeira classe e gerador de simetria, é necessário redefini-lo na forma $\tilde{T} \equiv \frac{T_1}{\Delta_{12}}$, onde $\Delta_{12} = \{T_1(x), T_2(y)\}$. O segundo vínculo será descartado. Dessa forma o parênteses de Poisson entre $\tilde{T}(x)$ e $T_2(y)$ é $\{\tilde{T}(x), T_2(y)\} = \delta^3(x - y)$, logo $\tilde{T}$ e T_2 são conjugados canônicos. A Hamiltoniana de segunda classe, H , deve ser modificada com o objetivo de satisfazer a álgebra de primeira classe, ou seja $\{\tilde{H}, \tilde{T}\} = 0$, onde $\tilde{H}$ é construído pela série de potências em T_2

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) = & H(x) - \int d^3y T_2(y) \{\tilde{T}, H(x)\} \\ & + \frac{1}{2!} \int d^3y d^3z T_2(y) T_2(z) \{\tilde{T}, \{\tilde{T}(z), H(x)\}\} - \dots + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Essa Hamiltoniana invariante de calibre, $\tilde{H}$ pode ser escrita de forma elegante pela aplicação de um operador projeção na Hamiltoniana de segunda classe H [13, 14]

$$\tilde{H} = e^{T_2 \tilde{T}_{op}} : H, \quad (3.2)$$

onde $T_{op}H \equiv \{H(x), \tilde{T}(y)\}$. E uma convenção importante a ser adotada, é que T_2 deve vir antes do parênteses de Poisson [13]. Para a obtenção da Lagrangiana invariante de calibre no método GU usual é usada a transformação de Legendre inversa $\tilde{\mathcal{L}} = \pi_\mu \dot{A}^\mu - \tilde{\mathcal{H}}$, onde $\dot{A}_\mu$ deve ser obtido pela evolução temporal, $\{A_\mu, \tilde{H}\}$ [14, 20].

Com $\tilde{H}$ obtido é possível encontrar de forma indireta o valor das variáveis invariantes de calibre se assumirmos que elas obedecem uma transformação do tipo $\tilde{F} = F + \lambda$, onde λ é o termo que corrige a variação de calibre. Esse procedimento dificulta de certa forma a

obtenção explícita das variáveis do espaço de fase que deveriam ser usadas nos parênteses de Poisson para obtenção de novas simetrias. É nesse contexto que o método GUA é desenvolvido, uma vez que nele, as variáveis de primeira classe são modificadas diretamente, portanto são obtidas de maneira explícita.

3.2 MÉTODO GAUGE UNFIXING APRIMORADO

O método GUA, assim como o usual, tem como principal vantagem em relação ao formalismo BFT [21], a não necessidade de inclusão de termos Wess-Zumino. Apesar de semelhantes, o GU usual e o GU modificado diferem em um aspecto relevante. No primeiro corrigimos a variância de calibre diretamente na Hamiltoniana de segunda classe. No segundo a modificação é feita nas variáveis do espaço de fase [13, 22], como será apresentado mais à frente. Antes, é preciso comprovar a validade desse procedimento. Para isso vamos considerar somente as variáveis do espaço de fase original.

$$F = (\phi, \pi). \quad (3.3)$$

Na última seção foi apresentado o método onde o "gauging" do modelo é feito diretamente na função de segunda classe. Aqui o objetivo é construir essa função, fazendo esse "gauging" nas variáveis do espaço de fase. Denotando a função de primeira classe que desejamos construir.

$$\tilde{F} = (\tilde{\phi}, \tilde{\pi}), \quad (3.4)$$

onde a função de primeira classe F é determinada em termos das variáveis originais do espaço de fase, pela imposição da condição variacional para sistemas de primeira classe [19].

$$\delta\tilde{F} = \varepsilon \{ \tilde{F}, \tilde{T} \} = 0, \quad (3.5)$$

onde $\tilde{T}$ é o vínculo de segunda classe escolhido para ser o gerador de simetria e ε é um parâmetro infinitesimal. Usando a regra da cadeia para parênteses de Poisson, temos que

$$\{ \tilde{F}, \tilde{T} \} = \{ \tilde{\phi}, \tilde{T} \} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\phi}} + \{ \tilde{\pi}, \tilde{T} \} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\pi}}, \quad (3.6)$$

o que só é verdade se os parênteses de Poisson contidos na segunda parte da igualdade, forem identicamente zero, o que já era esperado já que elas se tornaram variáveis de primeira classe. Consequentemente, conclui-se que é possível obter uma função invariante de calibre pela substituição

$$F(\phi, \pi) \rightarrow F(\tilde{\phi}, \tilde{\pi}) = \tilde{F}(\tilde{\phi}, \tilde{\pi}). \quad (3.7)$$

As variáveis invariantes de calibre são construídas, assim como as funções no GU usual [14, 20], por meio de série de potência integral em T_2

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \int d^3y C_1(x, y) T_2(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \dots, \quad (3.8)$$

onde x e y denotam pontos do espaço tridimensional, e essa série possui uma importante condição de contorno, a qual é

$$\tilde{\phi}(x)(T_2 = 0) = \phi(x). \quad (3.9)$$

Essa condição (3.9) e a relação (3.7) mostram que, quando impomos que o vínculo descartado T_2 , seja igual a zero, obtemos o sistema de segunda classe original. Portanto, as relações (3.7) e (3.9) garantem a equivalência entre o modelo de primeira classe e o inicial, de segunda classe. Os coeficientes C_n na relação (3.8) são determinados pela condição variacional contida na expressão (3.5). Assim temos que

$$\delta\tilde{\phi}(x) = \delta\phi(x) + \delta \int d^3y C_1(x, y) T_2(y) + \delta \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \dots = 0,$$

resultando na expressão

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi}(x) = & \delta\phi(x) + \int d^3y \delta C_1(x, y) T_2(y) + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_2(y) + \\ & + \int \int d^3y d^3z \delta C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) \\ & + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) \delta T_2(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os termos de ordem 1, 2, 3, $\dots$, n devem ser identicamente zero, para que a variação de ϕ seja zero. Os termos de ordem zero em T_2

$$\delta\phi(x) + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_2(y) = 0, \quad (3.11)$$

como $\delta T_2 = \varepsilon \{T_2(y), \tilde{T}(x)\} = \varepsilon \delta^3(y - x)$ e $\delta\phi(x, y, z) = \varepsilon \{\phi(x, y, z), \tilde{T}(y)\}$, que resulta em

$$\delta\phi(x) = - \int d^3y C_1(x, y) \varepsilon \delta^3(y - x),$$

usando a propriedade de filtragem da função delta de Dirac, temos que o coeficiente C_1 é dado por

$$C_1(x) = - \frac{\delta\phi(x)}{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

Note que o sinal de menos que aparece na expressão (3.12) pode ser incorporado, no momento em que redefinimos o gerador de simetria, $\tilde{T}$. Os termos de ordem 1 em T_2 são

$$\begin{aligned} & \int d^3y \delta C_1(x, y) T_2(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) + \\ & \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) \delta T_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\delta T_2(y) = \varepsilon \{T_2(y), \tilde{T}(x)\} = \varepsilon \delta^3(y - x)$ e $\delta T_2(z) = \varepsilon \{T_2(z), \tilde{T}(x)\} = \varepsilon \delta^3(z - x)$, então

$$\int d^3y \{ \delta C_1(x, y) T_2(y) + 2\varepsilon C_2(x, y) T_2(y) \} = 0. \quad (3.14)$$

Essa integral só pode ser zero, caso o integrando também seja, o que implica

$$\delta C_1(x, y) T_1(y) + 2\varepsilon C_2(x, y) T_2(y) = 0,$$

logo, $C_2(x, y)$ é dado por

$$C_2(x, y) = -\frac{\delta C_1(x, y)}{2\varepsilon} = \frac{\delta \phi(x)}{2\varepsilon^2}. \quad (3.15)$$

Fazendo o mesmo procedimento para as ordens superiores de T_2 , podemos obter uma relação para todos os coeficientes C_n

$$C_n(x) = (-)^n \frac{\delta^{(n)} \phi(x)}{n! \varepsilon^n}. \quad (3.16)$$

Agora é possível reescrever a expressão (3.8), já com os coeficientes C_n

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y, z) = & \phi(x, y, z) - \int d^3y \frac{\delta \phi(x, y, z)}{\varepsilon} T_2(y) \\ & + \int \int d^3y d^3z \frac{\delta \delta \phi(x, y, z)}{2\varepsilon^2} T_2(y) T_2(z) + \dots \\ & (-)^n \int \dots \int d^3x \dots d^3x_n \frac{\delta^{(n)} \phi(x, y, z)}{n! \varepsilon^n} T_2(y) \dots T_2(y_n). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sabendo que $\delta \phi = \{\phi, \tilde{T}\}$, e definindo a operação $\tilde{\psi} \phi = \{\phi, \tilde{T}\}$, podemos definir o operador projeção.

$$\mathbb{P} =: e \left[- \int d^3x T_2 \frac{\tilde{\psi}}{\varepsilon} \right], \quad (3.18)$$

o que permite que a variável modificada, agora de primeira classe, possa ser escrita da seguinte forma

$$\tilde{\phi} = e \left[- \int d^3x T_2 \frac{\tilde{\psi}}{\varepsilon} \right] : \phi. \quad (3.19)$$

Com essas variáveis em mãos, são construídas as funções de primeira classe, como Hamiltoniana e Lagrangiana, além de serem calculados os parênteses de Poisson, levando assim a um modelo de primeira classe e, por consequência, invariante de calibre.

3.2.1 Aplicação ao modelo Carroll–Field–Jackiw massivo Abeliano

Para exemplificar o uso do método GU melhorado, será abordado o modelo Carroll–Field–Jackiw massivo abeliano [5]. O modelo de CFJ massivo, é um modelo em $(3 + 1)$ dimensões, governado pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} + m^2 A_\alpha A^\alpha, \quad (3.20)$$

de onde é possível calcular o momento canônico π^μ :

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha 0\rho\varphi}V_\rho A_\varphi. \quad (3.21)$$

Rearranjando os termos usando a antissimetria de $F^{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\varphi}$

$$\pi^\mu = -F^{0\mu} - \frac{1}{2}\varepsilon^{0\mu\alpha\beta}V_\alpha A_\beta. \quad (3.22)$$

Com a expressão do momento em mãos é obtido os parênteses de Poisson canônicos.

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y). \quad (3.23)$$

Na eq. (3.22) é fácil notar que $\pi^0 = 0$, uma vez que $F^{00} = 0$ e $\varepsilon^{00\alpha\beta} = 0$. Essa informação fornece o vínculo primário da teoria, uma vez que ele advém diretamente da definição do momento [1, 23]. É possível, então, escrevê-lo da seguinte forma $T_0 \equiv \pi_0 \approx 0$. (Dentro do formalismo de Dirac, o símbolo " $\approx$ " representa uma igualdade fraca, uma vez que π_0 não será necessariamente zero dentro dos parênteses de Poisson). O momento π_i é definido pela expressão.

$$\pi_i = -(F_{0i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk}V_j A_k) = -\dot{A}_i + \partial_i A_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk}V_j A_k. \quad (3.24)$$

Agora é necessário escrever a Hamiltoniana canônica do modelo H_c , e tal procedimento deve ser realizado por meio da transformação de Legendre

$$H_c = \int d^3x \left\{ \dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L} \right\}, \quad (3.25)$$

onde o $\mathcal{L}$ corresponde a densidade Lagrangiana descrita pela equação (3.20). Isso nos leva a seguinte expressão

$$\begin{aligned} H_c = \int d^3x \left\{ \dot{A}_0 \pi_0 - \dot{A}_i \pi_i - \frac{1}{4}(2F_{0i}F_{0i} + F_{ij}F_{ij}) \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\varepsilon_{0kij}V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4}\varepsilon_{0kij}V_k A_0 F_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{0kij}V_k A_i F_{0j} + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A Hamiltoniana é uma função do espaço de fase, logo só pode conter variáveis desse espaço, portanto variáveis exclusivamente do espaço de configurações ($\partial_0 A_\mu$), devem ser removidas, e para isso devemos usar a expressão de momento (3.24) e a definição do campo elétrico em termos dos potenciais escalares e vetoriais (A_0, A_i)

$$E_i = F^{0i} = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i. \quad (3.27)$$

Substituindo $\dot{A}_i$, com o auxílio das expressões (3.24) e (3.27), obtemos a chamada hamiltoniana canônica do modelo de Carroll–Field–Jackiw massivo

$$\begin{aligned} H_c = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \frac{1}{8}[\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} - \frac{\mu^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Seguindo o procedimento de Dirac usual [1], deve-se introduzir a hamiltoniana primária (H_p), formada pela adição da hamiltoniana canônica H_c com todos os vínculos primários, $H_p = H_{can} + \int d^3x C \pi_0$, onde C é o multiplicador de Lagrange. Pela teoria de sistemas vinculados, é sabido que os vínculos não evoluem no tempo [1, 19] [2], gerando uma nova condição de consistência, $\{T_0, H_p\} \approx 0$, o que deve gerar o vínculo secundário T_1 , onde $T_0 = \pi_0$

$$T_1(x) = \{\pi_0(x), H_c(y)\} + \left\{ \pi_0(x), \int d^3y C(x, y) \pi_0(y) \right\} \approx 0, \quad (3.29)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} T_1(x) = & \left\{ \pi_0(x), \int d^3y A_0 \partial_k \pi_k(y) \right\} \\ & + \left\{ \pi_0(x), \frac{1}{4} \int d^3y \epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij}(y) \right\} \\ & - \left\{ \pi_0(y), \frac{\mu^2}{2} \int dy^3 A_0(x) \right\} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

que gera o vínculo secundário da teoria

$$T_1 = -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0. \quad (3.31)$$

Para verificar a natureza dos vínculos da teoria, ou seja, se são de segunda ou primeira classe, é necessário calcular os parênteses de Poisson entre T_1 e T_0

$$\{T_0(x), T_1(y)\} = \left\{ \pi_0(x), -\partial_k \pi_k(y) - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij}(y) + m^2 A_0(y) \right\} = -m^2 \delta^3(x - y), \quad (3.32)$$

Esse resultado (3.32) mostra que o modelo CFJ massivo possui uma estrutura de vínculos de segunda classe $\rightarrow$, característica relacionada a não existência da invariância de calibre.

3.3 Adicionando simetria de calibre ao modelo CFJ massivo

Neste capítulo, o objetivo é recuperar a simetria de calibre do modelo CFJ massivo por meio do método GUA [13, 22, 24]. Como mencionado anteriormente, esse método se aplica a sistemas com vínculos de segunda classe, caso do modelo analisado na seção anterior.

O método GUA exige que um dos vínculos seja usado como gerador de simetria, enquanto o outro, descartado inicialmente, seja empregado na construção dos termos de fixação de calibre. Assim, há dois casos possíveis: no primeiro, T_0 é escolhido como gerador de simetria; no segundo, T_1 desempenha esse papel. Nesta etapa, consideramos o caso em que T_1 é o gerador.

Partindo da equação (3.32), temos $\{T_1(x), T_0(y)\} = m^2 \delta(x - y)$. Logo T_1 pode ser redefinido da seguinte forma

$$\tilde{T} = \frac{T_1}{m^2} = \frac{1}{m^2} \left\{ -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \varepsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0 \right\}. \quad (3.33)$$

para que $\{\tilde{T}(x), T_0(y)\} = \delta(x - y)$. Usando o mesmo procedimento aplicado na seção anterior, é possível obter todas as variáveis do espaço de fase. Começando por A_0 , temos

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \int d^3 y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3 y d^3 z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (3.34)$$

Os coeficientes C_n podem ser determinados pela mesma relação obtida no Caso I. Logo, a relação para C_1 é dada por

$$C_1 = \frac{\delta A_0(y)}{\epsilon} = \{A_0(x), \tilde{T}(y)\} = 0,$$

por consequência, a relação para C_2 é

$$C_2 = \frac{\delta^2 A_0(y)}{\epsilon^2} = \{\{A_0(x), \tilde{T}(y)\}, \tilde{T}(z)\} = 0.$$

É possível concluir então que os coeficientes da equação (3.34) serão todos zero, portanto A_0 não sofrerá modificações,

$$\tilde{A}_0 = A_0. \quad (3.35)$$

Para π_0 , temos

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 + \int d^3 y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3 y d^3 z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (3.36)$$

Usando a relação já conhecida para C_1

$$C_1 = \frac{\delta \pi_0(x)}{\epsilon} = \{\pi_0(x), \tilde{T}(y)\} = -\delta^3(x - y). \quad (3.37)$$

Portanto $C_2 = C_3 = \dots C_n = 0$. Substituindo (3.37) em (3.36)

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 - \int d^3 y \delta^3(x - y) \pi_0(y),$$

o que permite concluir que

$$\tilde{\pi}_0 = 0. \quad (3.38)$$

O resultado da expressão (3.38), demonstra a funcionalidade do método na conversão dos vínculos de segunda para primeira classe, pois agora, com as modificações geradas pelo GU melhorado, π_0 , agora $\tilde{\pi}_0$, deixa de ser um vínculo, pois agora ele é fortemente zero(=) e não mais fracamente($\approx$) [22].

Para A_i , temos

$$\tilde{A}_i = A_i + \int d^3y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (3.39)$$

Usando a relação para C_1

$$C_1 = \frac{\delta A_i(x)}{\epsilon} = \{A_i(x), \tilde{T}(y)\} = -\{A_i(x), \partial_k \pi_k\} = -\frac{1}{m^2} \partial_i \delta^3(x - y), \quad (3.40)$$

portanto $C_2 = C_3 = \dots C_n = 0$. Substituindo (3.40) em (3.39), obtêm-se

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{1}{m^2} \int d^3y \partial_i \delta^3(x - y) \pi_0(y),$$

onde se for usada a integração por partes, é possível recair na seguinte equação

$$\tilde{A}_i = A_i + \frac{1}{m^2} \int d^3y [\partial_i \pi_0(y)] \delta^3(x - y),$$

logo, A_0 , adquire a seguinte forma

$$\tilde{A}_i = A_i + \frac{\partial_i \pi_0}{m^2}. \quad (3.41)$$

Para A_i , temos

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \int d^3y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (3.42)$$

Usando novamente a relação para C_1

$$C_1 = \frac{\delta \pi_i(x)}{\epsilon} = \{\pi_i(x), \tilde{T}(y)\} = -\left\{\pi_i(x), \frac{1}{4} \varepsilon_{0klj} V_k F_{lj}(y)\right\}, \quad (3.43)$$

que pode ser simplificada para a forma

$$C_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_{0kij} V_k \partial_j \delta^3(x - y), \quad (3.44)$$

Para uma simplificação na expressão(3.43), foi usado a propriedade de antissimetria por permutação de índices de ε_{0ijk} , ou seja $\varepsilon_{0ijk} = -\varepsilon_{0ikj}$. Da mesma forma que para as variáveis anteriores $C_2 = C_3 = \dots C_n = 0$, logo é possível substituir o resultado (3.44) na expressão (3.42), o que permite que seja encontrada a nova variável π_i

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \frac{V_k}{2m^2} \varepsilon_{0kil} \partial_l \pi_0. \quad (3.45)$$

Para a obtenção da equação (3.45), foi usada também a integração por partes para a remoção da derivada da função delta ($\partial_j \delta^3(x - y)$). Dessa forma, as novas variáveis são

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= A_0, \\ \tilde{A}_i &= A_i + \frac{\partial_i \pi_0}{m^2}, \\ \tilde{\pi}_0 &= 0, \\ \tilde{\pi}_i &= \pi_i + \frac{V_k}{2m^2} \varepsilon_{0kil} \partial_l \pi_0.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Com essas variáveis em mãos, é possível agora construir os parênteses de Poisson da teoria e assim obter novas simetrias

$$\begin{aligned}\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_0(y)\} &= \{\tilde{\pi}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} = \{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} \\ &= \{A_0(x), A_0(y)\}_{Dirac} = \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}_{Dirac} = \{A_0(x), \pi_0(y)\}_{Dirac} = 0\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_i(y)\} = \{A_0(x), \pi_i(y)\}_{Dirac} = \frac{1}{2m^2} \varepsilon_{0kji} V_k \partial_j \delta^3(x - y)\tag{3.48}$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_i(y)\} = \{A_0(x), A_i(y)\}_{Dirac} = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^3(x - y)\tag{3.49}$$

$$\{\tilde{A}_i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \{A_i(x), \pi_j(y)\}_{Dirac} = \delta_{ij} \delta^3(x - y)\tag{3.50}$$

Novamente é possível observar dois aspectos importantes, um deles é a equivalência entre o método de Dirac para sistemas vinculados e o GU melhorado, uma vez que os resultados obtidos via parênteses de Poisson das variáveis modificadas, são iguais aos obtidos por meio dos parênteses de Dirac [22, 25, 26]. Outro aspecto importante reside no surgimento de novas relações de simetria entre as variáveis modificadas, em particular entre A_0 e π_i e entre A_0 e A_i [22].

O próximo passo é buscar as funções das novas variáveis, $\tilde{H}(\tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}_\mu)$ e $\tilde{L}(\tilde{A}_\mu, \dot{\tilde{A}}_\mu)$. Partindo da Hamiltoniana modificada, os resultados do conjunto de equações (3.46) devem ser substituídos na expressão (3.28)

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{\pi}_k)^2 + \frac{1}{4} (\tilde{F}_{jk})^2 + \right. \\ &\quad \tilde{A}_0 \partial_k \tilde{\pi}_k + \frac{1}{2} \tilde{\pi}_k \varepsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j + \frac{1}{8} [\varepsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j]^2 - \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \varepsilon_{0kij} V_0 \tilde{A}_k \tilde{F}_{ij} + \frac{1}{4} \varepsilon_{0kij} V_k \tilde{A}_0 \tilde{F}_{ij} - \frac{\mu^2}{2} (\tilde{A}_0^2 - \tilde{A}_i^2) \right\},\end{aligned}\tag{3.51}$$

resultando em

$$\begin{aligned}\tilde{H} = \int dx^3 & \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \frac{1}{2}\pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \right. \\ & + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} + \\ & - \frac{\mu^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) - \frac{1}{2\mu^2}\epsilon_{0kij} V_i \pi_k \partial_j \pi_0 - \frac{1}{4\mu^2}\epsilon_{0lkm} \epsilon_{0kij} A_j V_i V_l \partial_m \pi_0 + \\ & + \frac{1}{4\mu^4} [\epsilon_{0klm} V_l \partial_m \pi_0]^2 - \frac{1}{4\mu^2} \epsilon_{0mkl} \epsilon_{0kij} V_i V_l A_j \partial_m \pi_0 + \frac{1}{8\mu^4} [\epsilon_{0kij} V_i \partial_j \pi_0]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{4\mu^2} \epsilon_{0kij} V_0 F_{ij} \partial_k \pi_0 + A_i \partial_i \pi_0 - \frac{1}{2\mu^2} [\partial_i \pi_0]^2 \right\}.\end{aligned}$$

É fácil notar que o décimo e o décimo segundo termos se cancelam, devido à propriedade de permutações de ϵ_{0klm} , resultando em

$$\begin{aligned}\tilde{H} = \int dx^3 & \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \frac{1}{2}\pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \right. \\ & + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} + \\ & - \frac{\mu^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) - \frac{1}{2\mu^2}\epsilon_{0kij} V_i \pi_k \partial_j \pi_0 + \\ & + \frac{1}{4\mu^4} [\epsilon_{0klm} V_l \partial_m \pi_0]^2 + \frac{1}{8\mu^4} [\epsilon_{0kij} V_i \partial_j \pi_0]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{4\mu^2} \epsilon_{0kij} V_0 F_{ij} \partial_k \pi_0 + A_i \partial_i \pi_0 - \frac{1}{2\mu^2} [\partial_i \pi_0]^2 \right\}.\end{aligned}\tag{3.52}$$

ou escrevendo numa forma mais compacta temos

$$\begin{aligned}\tilde{H} = \int dx^3 & \left\{ \frac{1}{2}\tilde{\pi}_k \tilde{\pi}_k + A_0 \partial_k \tilde{\pi}_k + \frac{1}{4}F_{jk}F_{jk} + \frac{1}{2}\epsilon_{0kij} \tilde{\pi}_k V_i \tilde{A}_j \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j]^2 - \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_0 \tilde{A}_k F_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - \tilde{A}_i^2) \right\}\end{aligned}\tag{3.53}$$

A Lagrangiana invariante de calibre pode ser obtida usando a mesma forma funcional da densidade Lagrangiana original [13, 22], eq. (3.20), onde os campos iniciais (A_0, A_i) de segunda classe são substituídos pelas novas variáveis (3.46) invariantes de calibre.

$$\tilde{L} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\nu}\tilde{F}^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta\tilde{A}^\alpha\tilde{F}^{\rho\varphi} + m^2\tilde{A}_\alpha\tilde{A}^\alpha \right),\tag{3.54}$$

A variável GU $\tilde{F}_{\alpha\nu}$ na equação (3.54) é definida por

$$\tilde{F}_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\alpha\tag{3.55}$$

Para generalizar a equação da variável GU, $\tilde{A}_i$, numa forma covariante, devemos usar a equação de movimento,

$$\partial_0 \pi_0 = -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4}\epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0 = 0,\tag{3.56}$$

o que permite escrever a equação para A na seguinte forma

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \pi_0. \quad (3.57)$$

Como já é conhecido, $F_{\alpha\nu}$ é um invariante de calibre, o que implica que

$$\tilde{F}_{\alpha\nu} = F_{\alpha\nu}. \quad (3.58)$$

Agora é possível reescrever a equação (3.54) usando (3.57) e (3.58), logo a Lagrangiana invariante pode ser resumida na seguinte forma

$$\tilde{L} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta (A^\alpha + \partial^\alpha \theta) F^{\rho\varphi} + \frac{m^2}{2} (A_\mu + \partial_\mu \theta) (A^\mu + \partial^\mu \theta) \right) \quad (3.59)$$

onde o θ é definido pela quantidade $\theta \equiv \frac{\pi_0}{m^2}$, essa técnica é chamada de Stückelberg Trick [14], ou truque de Stückelberg, e consiste em definir uma quantidade escalar para que seja possível remover a variável do espaço de fase, π_0 . Aqui é importante mencionar que podemos identificar o campo θ , também como escalar de Stückelberg, que permite que seja usada a transformação de calibre $\tilde{A}_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$, tornando L invariante sob esse tipo de transformação [2, 19]. Essa Lagrangiana é a mesma encontrada por Vythoeswaran [14] para o modelo de Proca, somada ao termo que vem em consequência da violação da simetria de Lorentz (CFJ) [22].

4 Formalismo de Stückelberg

A simetria de calibre exerce um papel fundamental para o estudo da física de partículas. Ela dita o comportamento das interações e, em sua formulação mais simples, impede a presença de termos de massa explícitos para os bósons de calibre, como o fóton onde um termo do tipo Proca, $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, viola diretamente a invariância de calibre local e compromete a estrutura de renormalização da teoria [7, 27, 28]. Não obstante, a realidade experimental mostra que os bósons $W^\pm$ e Z^0 , mediadores da interação fraca, são partículas vetoriais extremamente massivas, com massas da ordem de 80–90 GeV, isto é, quase oitenta vezes a massa do próton. No contexto do Modelo Padrão, essa massa é entendida como uma consequência da quebra espontânea da simetria eletrofraca por meio do mecanismo de Higgs, no qual o campo escalar adquire um valor de vácuo esperado não nulo e gera termos de massa para os bósons de gauge $W^\pm$ e Z^0 , preservando a forma local da invariância de calibre subjacente [29–33].

Tal observação gera um conflito teórico. A tentativa mais direta de dar massa a um bóson de gauge, adicionando um termo de massa explícito à sua Lagrangiana (a chamada teoria de Proca), quebra a simetria de calibre [34, 35]. Essa quebra não é um mero detalhe estético, pois ela conduz a inconsistências teóricas, tornando a teoria não-renormalizável em altas energias, o que significa que ela perde seu poder preditivo a nível quântico [7].

4.1 A solução de Stückelberg: restaurando a simetria

Em 1938, Ernst Stückelberg propôs uma solução engenhosa e elegante para este problema [33]. O "truque" de Stückelberg consiste em introduzir um novo campo escalar auxiliar, Φ , na teoria [32, 33]. Este campo é projetado para se transformar sob a simetria de calibre de uma maneira que cancela exatamente a variação indesejada do termo de massa do bóson vetorial. A Lagrangiana resultante, que descreve a interação entre o campo vetorial A_μ e o campo escalar Φ , é perfeitamente invariante sob um conjunto estendido de transformações de calibre.

A interpretação física deste mecanismo é notavelmente elegante. Inicialmente, temos um campo de gauge sem massa (com 2 graus de liberdade, ou polarizações) e um campo escalar (com 1 grau de liberdade). A simetria de calibre estendida permite reorganizar esses graus de liberdade. O campo de gauge "absorve" o campo escalar, que se torna sua terceira polarização (a polarização longitudinal). O resultado final é um único bóson vetorial massivo, que possui os 3 graus de liberdade esperados [32]. O campo escalar Φ não aparece como uma partícula física independente; ele se torna parte integrante do bóson massivo.

Este formalismo também revela que a teoria de Proca, que parecia quebrar a simetria, é, na verdade, a teoria de Stückelberg em uma escolha de gauge específica (o

"calibre unitário"), em que o campo escalar é eliminado da descrição.

4.2 Comparação com o Mecanismo de Higgs

O Modelo Padrão utiliza um mecanismo diferente, mas relacionado, para gerar massa: o mecanismo de Higgs. Embora ambos os mecanismos atinjam o mesmo objetivo, eles são conceitualmente distintos.

- **Simetria:** O mecanismo de Stückelberg preserva a invariância de calibre de forma manifesta por meio de uma transformação estendida. O mecanismo de Higgs, por outro lado, baseia-se na quebra espontânea de simetria: as leis da física permanecem simétricas, mas o estado de menor energia do universo (o vácuo) não é, fazendo com que as partículas que interagem com ele adquiram massa [29–31].
- **Partícula Física:** O campo escalar de Stückelberg é um artifício teórico que é absorvido e não corresponde a uma partícula observável [32]. Em contraste, o mecanismo de Higgs prevê a existência de uma partícula física real associada às flutuações do campo de Higgs: o bóson de Higgs [29–31].

De certa forma, o formalismo de Stückelberg pode ser visto como um limite do mecanismo de Higgs, no qual o bóson de Higgs se torna infinitamente pesado e, portanto, inobservável.

5 O Formalismo de *Gauge Unfixing* Aprimorado para Casos não-abelianos

Esta seção descreve o formalismo de *Gauge Unfixing* (GU) aprimorado e sua extensão para sistemas não-abelianos. Consideramos um sistema dinâmico com vínculos caracterizado por dois vínculos de segunda classe, T_1^a e T_2^a , com variáveis canônicas valoradas em uma álgebra de Lie, onde $a = 1, 2, \dots, N$ representa a dimensão da representação desses campos em relação ao grupo não-abeliano. Por definição, o colchete de Poisson desses vínculos é não-trivial e dado por $\{T_1^a, T_2^b\} = \delta^{ab}K$, onde $K \neq 0$ é uma constante não nula na superfície do vínculo.

Seguindo o formalismo GU, um dos vínculos de segunda classe é escolhido para gerar transformações infinitesimais, enquanto o outro é desconsiderado (não sendo mais considerado um vínculo após a reformulação). Sem perda de generalidade, definimos o gerador de transformações infinitesimais como $\chi^a = K^{-1}T_1^a \approx 0$. Essa escolha garante que, na superfície definida apenas por χ^a , $\{\chi^a, T_2^b\} \approx K^{-1}\{T_1^a, T_2^b\} + \{K^{-1}, T_2^b\}T_1^a \approx \delta^{ab} + \{K^{-1}, T_2^b\}K\chi^a$, o que significa que χ^a e T_2^a formam um par aproximadamente canonicamente conjugado. O vínculo T_2^a será ignorado.

A ideia central do formalismo GUA é construir uma função de primeira classe invariante $\tilde{F}^a$ a partir de uma função de segunda classe $F^a(q^a, p^a)$ como uma série de potências do vínculo descartado T_2^a :

$$\tilde{F}^a = F^a + c_1^{ab}T_2^b + c_2^{abc}T_2^bT_2^c + \dots = F^a + \sum_{k=1} c_k^{aw_1\dots w_k} \prod_{i=1}^k T_2^{w_i} \quad (5.1)$$

Esta expansão está sujeita à condição de contorno $\tilde{F}^a|_{T_2^a \approx 0} = F^a$. Os coeficientes $c_k^{aw_1\dots w_k}$ são determinados ordem a ordem, impondo a condição de invariância:

$$\delta^m \tilde{F}^a = \epsilon \{\tilde{F}^a, \chi^m\} = 0 \quad (5.2)$$

Esta condição se expande para:

$$= \delta^m F^a + \sum_{k=1} (\delta^m c_k^{aw_1\dots w_k} \prod_{i=1}^k T_2^{w_i} + c_k^{aw_1\dots w_k} \prod_{i=1}^k \delta^m T_2^{w_i}) = 0$$

onde $\delta^m F^a = \epsilon \{F^a, \chi^m\}$, $\delta^m c_k^{aw_1\dots w_k} = \epsilon \{c_k^{aw_1\dots w_k}, \chi^m\}$, e, importante, $\delta^m T_2^a = \epsilon \{T_2^a, \chi^m\} = -\delta^{am}\epsilon$. Nessas equações, δ^a é o operador variacional valorado na álgebra de Lie para a transformação induzida pelo gerador χ^a , e ϵ é um parâmetro infinitesimal arbitrário. Assumimos que não há simetria a priori nos índices de cor dos coeficientes c_k .

A partir dos termos de ordem zero em T_2^a , derivamos:

$$\delta^m F^a + c_1^{ab} \delta^m T_2^b = 0 \Rightarrow c_1^{am} = \frac{\delta^m F^a}{\epsilon} \quad (5.3)$$

Para termos lineares em T_2^a , obtemos:

$$\delta^m c_1^{ab} T_2^b + c_2^{abc} \delta^m T_2^b T_2^c + c_2^{abc} T_2^b \delta^m T_2^c = 0 \Rightarrow c_2^{amb} = \frac{\delta^m \delta^b F^a}{2\epsilon^2} \quad (5.4)$$

A partir dessas relações, pode-se concluir que para $k \geq 1$, a relação geral para os coeficientes é:

$$c_k^{aw_1 \dots w_k} = \frac{1}{k! \epsilon^k} \prod_{i=1}^k \delta^{w_i} F^a \quad (5.5)$$

Essa expressão é o análogo não-abeliano das expressões encontradas em trabalhos anteriores. Consequentemente, a função de primeira classe invariante $\tilde{F}^a$ pode ser expressa em uma forma compacta, semelhante a uma exponencial:

$$\tilde{F}^a = F^a + T_2^b \frac{\delta^b F^a}{\epsilon} + T_2^b T_2^c \frac{\delta^b \delta^c F^a}{2\epsilon} + \dots = (1 + \sum_{k=1} \frac{1}{k! \epsilon^k} \prod_{i=1}^k T_2^{w_i} \delta^{w_i}) F^a =: e^{T_2^b \frac{\delta^b}{\epsilon}} : F^a \quad (5.6)$$

onde $::$ denota uma prescrição de ordenação tal que T_2^a sempre precede o operador variacional $\frac{1}{\epsilon} \delta^a f = \{f, \chi^a\}$ para qualquer funcional f no espaço de fase. A última linha mostra que qualquer quantidade invariante de calibre pode ser gerada aplicando o operador de projeção $P =: e^{T_2^b \frac{\delta^b}{\epsilon}} :$ em funções no espaço de fase. A estrutura construída no presente capítulo será utilizada na formulação invariante de calibre do modelo de Yang–Mills (YM) massivo e do modelo de Skyrme.

6 Modelo de Yang–Mills Massivo $SU(N)$

O modelo de Yang–Mills ocupa posição central na descrição das interações fundamentais, pois implementa a invariância de calibre local sob grupos não-abelianos, como $SU(N)$. Em sua formulação sem massa, os bósons de calibre possuem apenas polarizações transversais, e a simetria local controla a unitariedade e a renormalização perturbativa da teoria [7]. No entanto, em regimes de baixa energia da QCD e no estudo do confinamento, torna-se útil considerar escalas efetivas de massa no setor de glúons. Essa massa não deve ser entendida como uma massa explícita ingênua inserida sem controle, mas como instrumento efetivo para investigar o problema da *mass gap*, o confinamento e a geração dinâmica de massa no regime não-perturbativo [36–39].

A introdução direta de um termo de massa do tipo Proca, $\frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$, quebra explicitamente a invariância de calibre local. O problema não é apenas formal: sem uma simetria compensadora, as contribuições longitudinais do propagador crescem em altas energias, de modo que os cancelamentos garantidos pelas identidades de Ward deixam de ocorrer. Esse é o sentido preciso em que o termo de massa “se comporta mal” no regime perturbativo, comprometendo o controle da unitariedade. A representação de Hadamard, por sua vez, organiza a estrutura singular universal do propagador de dois pontos em curtas distâncias; quando essa estrutura não é compatível com a simetria e com o esquema de subtrações locais, a regularização e a renormalização tornam-se tecnicamente mais problemáticas [40].

Nesta seção, tratamos o modelo de Yang–Mills massivo como um sistema dinâmico com vínculos de segunda classe. Aplicaremos o formalismo de *Gauge Unfixing* aprimorado (GUA) para demonstrar que é possível mapeá-lo em um sistema de primeira classe equivalente. Esse procedimento restaura a simetria de calibre por meio da redefinição das variáveis do espaço de fase e estabelece correspondência direta com o formalismo de Stückelberg generalizado.

A análise canônica desenvolvida neste trabalho é realizada em espaço euclidiano quadridimensional, com assinatura $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, +, +)$. Essa escolha torna a ação positivo-definida, favorece a convergência da integral de caminho no regime não-perturbativo e elimina ambiguidades de sinal na álgebra de vínculos.

6.1 Estrutura canônica do modelo de Yang–Mills massivo

Para iniciarmos a construção do formalismo de um modelo não-abeliano sem simetria de calibre, começamos com o modelo de Yang–Mills massivo $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões euclidianas. Este modelo é representado pela ação

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a \right), \quad (6.1)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ é a intensidade do campo. Em outras palavras, esta é a versão não-abeliana da lagrangiana de Proca. Devido à presença do termo de massa, esta lagrangiana não é mais invariante sob transformações de calibre.

Os momentos canônicos são dados por

$$\pi_\mu^a = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\mu^a)} = F_{0\mu}^a. \quad (6.2)$$

A partir da definição em (6.2), definimos os seguintes colchetes de Poisson fundamentais:

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\} = \{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} = 0, \quad (6.3)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.4)$$

Da expressão para π_0^a , identificamos imediatamente um vínculo primário do modelo

$$\pi_0^a = 0 \equiv T_1^a \approx 0. \quad (6.5)$$

Os momentos canônicos π_i^a são dados por $\pi_i^a = F_{0i}^a$.

Para uma investigação completa da estrutura canônica do modelo, escrevemos o Hamiltoniano canônico H_c , que é obtido a partir de uma transformação de Legendre:

$$H_c = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \pi_i^a \pi_i^a + \pi_i^a (\partial_i A_0^a - g f^{abc} A_0^b A_i^c) - \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a - \frac{1}{2} m^2 (A_0^a A_0^a + A_i^a A_i^a) \right\}. \quad (6.6)$$

Da condição de estabilidade do vínculo primário T_1^a (ou seja, exigindo que sua evolução temporal se anule fracamente), obtemos um vínculo secundário

$$\dot{T}_1^a = \{T_1^a(x), H_p\} \approx 0.$$

Isso produz:

$$D_i^{ab} \pi_i^b + m^2 A_0^a \approx 0 \equiv T_2^a, \quad (6.7)$$

onde H_p é o Hamiltoniano primário, $H_p = H_c + \int d^3x \lambda_1^a(x) T_1^a(x)$, e $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c$ é a derivada covariante na representação adjunta. A evolução temporal do vínculo T_2^a determina o multiplicador de Lagrange λ_1^a como $\lambda_1^a = D_i^{ab} A_i^b$. Isso indica que não são gerados mais vínculos por este procedimento iterativo. Assim, T_1^a e T_2^a são os únicos vínculos da teoria, e formam a álgebra de segunda classe

$$\{T_1^a(x), T_1^b(y)\} = 0, \quad (6.8)$$

$$\{T_1^a(x), T_2^b(y)\} = -m^2 \delta^{ab} \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.9)$$

$$\{T_2^a(x), T_2^b(y)\} = g f^{abc} T_2^c(x) \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.10)$$

O Hamiltoniano total é então dado por $H_T = H_c + \int d^3x (\lambda_1^a T_1^a + \lambda_2^a T_2^a)$ e $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c$. Exigindo novamente a independência temporal do vínculo T_1^a , mas desta vez usando o Hamiltoniano total, o multiplicador de Lagrange λ_2^a é fixado como $\lambda_2^a = \frac{1}{m^2} T_2^a \approx 0$.

6.2 Algoritmo de Dirac–Bergmann aplicado ao modelo de Yang–Mills massivo

Os aspectos principais da estrutura canônica do modelo de Yang–Mills massivo foram obtidos na seção anterior; a seguir, reunimos apenas os resultados necessários para construir a matriz de vínculos e os parênteses de Dirac. Primeiramente, o Hamiltoniano canônico do modelo tem a seguinte forma:

$$H_c = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \pi_i^a \pi_i^a + \pi_i^a (\partial_i A_0^a - g f^{abc} A_0^b A_i^c) - \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a - \frac{1}{2} m^2 (A_0^a A_0^a + A_i^a A_i^a) \right\}, \quad (6.11)$$

e os vínculos de segunda classe do modelo são, na ordem adotada para a matriz de vínculos:

$$\pi_0^a = 0 \equiv T_1^a \approx 0, \quad (6.12)$$

e

$$D_i^{ab} \pi_i^b + m^2 A_0^a \equiv T_2^a \approx 0. \quad (6.13)$$

Os vínculos T_1^a e T_2^a são os únicos da teoria. Eles formam uma estrutura de segunda classe, caracterizada por

$$\{T_1^a(x), T_1^b(y)\} = 0, \quad (6.14)$$

$$\{T_1^a(x), T_2^b(y)\} = -m^2 \delta^{ab} \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.15)$$

$$\{T_2^a(x), T_2^b(y)\} = g f^{abc} T_2^c(x) \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.16)$$

Com a álgebra de Poisson dos vínculos estabelecida em (6.14)–(6.16), podemos construir a matriz de vínculos $C_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) \equiv \{T_\alpha^a(x), T_\beta^b(y)\}$, onde $\alpha, \beta = 1, 2$ enumeram os vínculos. Em forma matricial por blocos, temos:

$$C^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \delta^{ab} \\ m^2 \delta^{ab} & K^{ab} \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.17)$$

onde definimos $K^{ab}(x, y) \equiv \{T_2^a(x), T_2^b(y)\} = g f^{abc} T_2^c(x) \delta^{(3)}(x - y)$.

A existência da matriz inversa é garantida porque o bloco fora da diagonal contém $m^2 \delta^{ab}$; para $m \neq 0$, esse bloco é inversível e a matriz de vínculos não é singular. Em outras palavras, é a presença do termo de massa que torna a álgebra de vínculos de segunda classe. A inversa $(C^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)$, definida pela condição $\int d^3z C_{\alpha\gamma}^{ac}(x, z) (C^{-1})_{\gamma\beta}^{cb}(z, y) = \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(x - y)$, é calculada como:

$$(C^{-1})^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^4} K^{ab}(x, y) & \frac{1}{m^2} \delta^{ab} \\ -\frac{1}{m^2} \delta^{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.18)$$

Uma observação crucial aqui é que o elemento (2, 2) da matriz inversa (o setor T_2 – T_2) é identicamente nulo.

De posse da matriz inversa, introduzimos os parênteses de Dirac $\{F, G\}_{\text{Dirac}}$ para duas funcionais quaisquer do espaço de fase:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - \int d^3z d^3w \{F(x), T_\alpha^c(z)\} (C^{-1})_{cd}^{\alpha\beta}(z, w) \{T_\beta^d(w), G(y)\}. \quad (6.19)$$

Ao aplicarmos esta definição às variáveis canônicas fundamentais do setor espacial, A_i^a e π_j^b , notamos uma simplificação notável. Como as variáveis espaciais comutam com o vínculo primário $T_1^a = \pi_0^a$ (ou seja, $\{A_i, T_1\} = 0$ e $\{\pi_j, T_1\} = 0$), os únicos termos de correção possíveis na equação (6.19) envolveriam o elemento $(C^{-1})_{22}$. Contudo, como visto em (6.18), este elemento é nulo. Consequentemente:

$$\{A_i^a(x), \pi_j^b(y)\}^* = \{A_i^a(x), \pi_j^b(y)\} = \delta^{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.20)$$

e, de forma análoga, para os campos:

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\}^* = 0. \quad (6.21)$$

Isso demonstra que, no formalismo de Dirac, a estrutura canônica do setor espacial é preservada intacta na teoria massiva. A “deformação” da estrutura simplética recai inteiramente sobre as variáveis temporais A_0 e π_0 . O vínculo $T_1 \approx 0$ torna-se uma identidade forte, e o vínculo $T_2 \approx 0$ passa a atuar como uma equação de definição para A_0 , eliminando-o como grau de liberdade independente:

$$A_0^a \approx -\frac{1}{m^2} D_i^{ab} \pi_i^b. \quad (6.22)$$

Dessa forma, o sistema reduzido descreve corretamente os $3 \times (N^2 - 1)$ graus de liberdade físicos esperados para bósons vetoriais massivos (duas polarizações transversais e uma longitudinal por cor).

7 Construção invariante de calibre do modelo de Yang–Mills

Estamos agora prontos para aplicar o formalismo de *Gauge Unfixing* aprimorado a este modelo. Como o sistema apresenta dois vínculos de segunda classe, temos duas escolhas disponíveis para o gerador.

7.1 Caso I (T_1^a como gerador)

Como já mencionado anteriormente, como temos um par de vínculos de segunda classe, podemos tomar dois caminhos para aplicação GU, T_1^a ou T_2^a como gerador de simetria. Como primeira escolha tomaremos T_1^a como o primeiro gerador de transformações infinitesimais. Redefinindo-o para que o mesmo forme um par canônico conjugado com T_2^a , temos

$$\psi^a \equiv -\frac{1}{m^2}T_1^a = -\frac{1}{m^2}\pi_0^a \quad (7.1)$$

Nesta configuração, T_2^a será ignorado como um vínculo e usado apenas na construção de nossas novas variáveis de primeira classe. As transformações infinitesimais geradas por ψ^a são:

$$\delta^a A_0^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{A_0^b(x), \psi^a(y)\} = -\frac{\delta^{ba}\epsilon(x)}{m^2} \quad (7.2)$$

$$\delta^a A_i^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{A_i^b(x), \psi^a(y)\} = 0 \quad (7.3)$$

$$\delta^a \pi_0^b(x) = \delta^a T_1^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{\pi_0^b(x), \psi^a(y)\} = 0 \quad (7.4)$$

$$\delta^a \pi_i^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{\pi_i^b(x), \psi^a(y)\} = 0 \quad (7.5)$$

Como é possível notar apenas o campo $A_0^a(x)$ tem variação infinitesimal não nula, o que explicita que apenas essa variável necessita de correção a fim de se tornar uma variável de primeira classe. Nesse ponto notamos que o resultado se assemelha muito em sua forma geral com o caso abeliano (Campo de Proca), não gerando infinitos termos em sua correção.

7.1.1 Obtendo $\tilde{A}_0^a$

O objetivo agora é construir o campo invariante perante as transformações infinitesimais, $\tilde{A}_0^a$, que é construído por uma série de potências do vínculo descartado T_2^a :

$$\tilde{A}_0^a(x) = A_0^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3x_r \right) B_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_2^{w_r}(x_r) \right) \quad (7.6)$$

Para construir essa série devemos primeiramente determinar os coeficientes B_{ki} . Impomos a condição variacional $\delta^m \tilde{A}_0^a(x) = 0$:

$$\delta^m \tilde{A}_0^a(x) = \delta^m A_0^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) \delta^m B_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_2^{w_r}(x_r) \right) + \quad (7.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) B_{k_1}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \delta^m \left(\prod_{r=1}^k T_2^{w_r}(x_r) \right) = 0. \quad (7.8)$$

Partindo dos termos de ordem zero em T_2 , obtemos o coeficiente $B_{1,i}^{ab}(x, y)$:

$$B_{1,i}^{ab}(x, y) = \{A_0^a(x), \psi^b(y)\} = \frac{1}{m^2} \delta^{ba} \delta^{(3)}(x - y) \quad (7.9)$$

Da equação em primeira ordem em T_2^a , emerge o segundo coeficiente :

$$B_{2,i}^{abc}(x, y, z) = \frac{1}{2} \{B_{1,i}^{ac}(x, y), \psi^b(z)\} = 0. \quad (7.10)$$

Procedimento que ao ser repetido para os termos de ordem superior em T_2^a nos permite calcular o terceiro coeficiente,

$$B_{3,i}^{abcd}(x, y, z, w) = \frac{1}{3} \{B_{2,i}^{acd}(x, y, z), \psi^b(w)\} = 0 \quad (7.11)$$

A partir dessas expressões, pode-se concluir que para $k \geq 2$, os coeficientes B_k são zero. Substituindo a equação (7.9) em (7.6), temos a nova forma de $\tilde{A}_0^a(x)$

$$\tilde{A}_0^a(x) = A_0^a(x) + \frac{T_2^a}{m^2} \quad (7.12)$$

Pode-se agora verificar que o novo campo $\tilde{A}_0^a(x)$ satisfaz a condição que o caracteriza como variável de primeira classe.

$$\{\tilde{A}_0^a, \psi^b\} = \{A_0^a(x) + \frac{T_2^a}{m^2}, \psi^b\} = 0. \quad (7.13)$$

Ao substituir essas expressões no Hamiltoniano canônico e na Lagrangiana original, pode-se obter o Hamiltoniano de primeira classe e a Lagrangiana de primeira classe, respectivamente.

7.1.2 Verificação da condição de consistência para o vínculo descartado T_2^a

O método de Gauge Unfixing pode ser caracterizado como um método autoconsistente, pois a construção de um modelo invariante de calibre (primeira classe) surge da imposição de que um dos vínculos seja de primeira classe e a partir dessa imposição, a nova formulação do modelo é estabelecida. Uma das formas de verificar a efetividade do formalismo é por meio da redefinição do vínculo descartado, T_2^a recorrendo ao GU. Procedemos tal como fazemos com as variáveis do modelo.

$$\tilde{T}_2^a(x) = T_2^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) G_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_2^{w_r}(x_r) \right). \quad (7.14)$$

O primeiro coeficiente $G_{1,i}^{ab}(x, y)$ é obtido pela seguinte equação

$$G_{1,i}^{ab}(x, y) = \{T_2^a(x), \psi^b(y)\} = \delta^{ba} \delta^{(3)}(x - y). \quad (7.15)$$

Essa forma nos indica que os coeficientes para $k \geq 2$ são nulos. Substituindo o coeficiente (7.15) na expansão (7.14), encontramos a seguinte relação

$$\tilde{T}_2^a(x) = T_2^a(x) - T_2^a(x) = 0, \quad (7.16)$$

resultado que explicita a descaracterização de T_2^a enquanto vínculo, o que demonstra a conversão do modelo, anteriormente de segunda classe (2 vínculos com parênteses de Poisson não nulos entre si), em um modelo de primeira classe (com apenas $\psi^a(x)$ como vínculo de primeira classe e gerador de transformações infinitesimais).

7.2 Caso II (T_2^a como gerador)

Embora a escolha de T_1^a como gerador levasse a variações de campo semelhantes ao caso abeliano, as transformações infinitesimais geradas por T_2^a introduzem novas características no contexto não-abeliano. Portanto, foquemos no último caso. Redefinimos T_2^a como:

$$\chi^a \equiv \frac{1}{m^2} T_2^a \quad (7.17)$$

tal que $\{\chi^a(x), T_1^b(y)\} = \delta^{ab} \delta^{(3)}(x - y)$. Nesta configuração, T_1^a será ignorado como um vínculo. As transformações infinitesimais geradas por χ^a são:

$$\delta^a A_0^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{A_0^b(x), \chi^a(y)\} = 0 \quad (7.18)$$

$$\delta^a A_i^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{A_i^b(x), \chi^a(y)\} = -\frac{1}{m^2} D_i^{ba} \epsilon(x) \quad (7.19)$$

$$\delta^a \pi_0^b(x) = \delta^a T_1^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{\pi_0^b(x), \chi^a(y)\} = -\frac{\epsilon(x)}{m^2} \delta^{ba} \quad (7.20)$$

$$\delta^a \pi_i^b(x) = \int d^3y \epsilon(y) \{\pi_i^b(x), \chi^a(y)\} = -\frac{g}{m^2} f^{abc} \epsilon(x) \pi_i^c(x) \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \delta^a T_2^b(x) &= \int d^3y \frac{\epsilon(y)}{m^2} \{T_2^b(x), T_2^a(y)\} \\ &= -\frac{g}{m^2} f^{abc} \epsilon(x) T_2^c(x) \end{aligned} \quad (7.22)$$

A partir dessas relações, fica claro que A_i^a e $\pi_i^a(x)$ são os campos não invariantes relevantes sob transformações infinitesimais geradas por χ^a . No caso de π_0^a (vínculo descartado), notamos uma não invariância perante a transformação infinitesimal introduzida, uma consequência direta da natureza de segunda classe do modelo. A variável A_0^a , já apresenta invariância perante a transformação, o que implica que ela não necessita de modificação em sua forma, *i.e.*, $\tilde{A}_0^a = A_0^a$.

7.2.1 Obtendo $\tilde{A}_i^a$

Agora buscaremos um campo invariante $\tilde{A}_i^a$, que é construído por uma série de potências do vínculo descartado T_1^a :

$$\tilde{A}_i^a(x) = A_i^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) c_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_1^{w_r}(x_r) \right) \quad (7.23)$$

O próximo passo é determinar os coeficientes c_{ki} . Impomos a condição variacional $\delta^m \tilde{A}_i^a(x) = 0$:

$$\delta^m \tilde{A}_i^a(x) = \delta^m A_i^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) \delta^m c_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_1^{w_r}(x_r) \right) + \quad (7.24)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) c_{k1}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \delta^m \left(\prod_{r=1}^k T_1^{w_r}(x_r) \right) = 0 \quad (7.25)$$

A partir dos termos de ordem zero em T_1^a , encontramos o primeiro coeficiente:

$$c_{1,i}^{ab}(x, y) = \{A_i^a(x), \chi^b(y)\} = \frac{1}{m^2} D_{i,y}^{ba} \delta^{(3)}(x - y) \quad (7.26)$$

onde o subscrito "y" na derivada covariante indica a variável espaço-temporal sobre a qual ela atua. A partir da equação linear em T_1^a , encontramos o segundo coeficiente:

$$c_{2,i}^{abc}(x, y, z) = \frac{1}{2} \{c_{1,i}^{ac}(x, y), \chi^b(z)\} = \frac{g f^{cad}}{2m^4} \delta^{(3)}(x - y) D_{iz}^{bd} \delta^{(3)}(y - z) \quad (7.27)$$

Realizando o mesmo procedimento para os termos de segunda ordem, chegamos ao terceiro coeficiente:

$$c_{3,i}^{abcd}(x, y, z, w) = \frac{1}{3} \{c_{2,i}^{acd}(x, y, z), \chi^b(w)\} = \frac{g^2 f^{dae} f^{ceg}}{3!m^6} \delta^{(3)}(x - y) \delta^{(3)}(y - z) D_{i,w}^{bg} \delta^{(3)}(z - w) \quad (7.28)$$

A partir dessas expressões, pode-se concluir que para $k \geq 4$, os coeficientes c_k têm a seguinte forma:

$$c_{k,i}^{aw_1 \dots w_k} = \frac{g^{k-1}}{k!m^{2k}} f^{w_k a b_1} f^{w_{k-1} b_1 b_2} \dots f^{b_{k-2} w_3 b_{k-1}} f^{b_{k-1} w_2 v_k} \times \delta^{(3)}(x - x_1) \times \quad (7.29)$$

$$\left(\prod_{j=2}^{k-1} \delta^{(3)}(x_j - x_{j+1}) \right) D_{i,x_k}^{w_1 v_k} \delta^{(3)}(x_{k-1} - x_k) \quad (7.30)$$

Assim, a forma geral do campo $\tilde{A}_i^a$ é dada como segue:

$$\tilde{A}_i^a(x) = A_i^a(x) - \frac{1}{m^2} D_i^{ba} \pi_0^b(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{k-1}}{k!m^{2k}} F^{w_k a \dots w_{2c}} \left(\prod_{r=2}^k \pi_0^{w_r}(x) \right) (D_i^{cw_1} \pi_0^{w_1}(x)) \quad (7.31)$$

onde $F^{w_k a \dots w_{2c}} = f^{w_k a b_1} f^{w_{k-1} b_1 b_2} \dots f^{b_{k-2} w_3 b_{k-1}} f^{b_{k-1} w_2 c}$. Escrevendo explicitamente a série para $\tilde{A}_i^a$, temos:

$$\tilde{A}_i^a = A_i^a - \frac{1}{m^2} D_i^{ba} \pi_0^b - \frac{g f^{cad}}{2m^4} \pi_0^b D_i^{bd} \pi_0^c - \frac{g^2 f^{dae} f^{ceg}}{3!m^6} \pi_0^b \pi_0^c D_i^{bg} \pi_0^d \dots \quad (7.32)$$

Isso também pode ser escrito como:

$$\tilde{A}_i^a = A_i^a - D_i^{ba} \xi^b - \frac{g}{2} f^{cad} \xi^b D_i^{bd} \xi^c - \frac{g^2}{6} f^{dac} f^{ceg} \xi^b \xi^c D_i^{bg} \xi^d \dots \quad (7.33)$$

onde $\xi^a \equiv \frac{\pi_0^a}{m^2}$. Se ξ^a for identificado como um campo de Stückelberg, então esta expressão é a mesma que a obtida em outras obras, onde um campo $h = e^{ig\xi^a S^a}$ (com S^a sendo os geradores do grupo de calibre $SU(N)$ atuando A_μ^a para obter uma ação em uma forma local tal qual o Formalismo de Gribov-Zwanziger (Fixação de Calibre Local) [6].

7.2.2 Obtendo $\tilde{\pi}_i^a$

Os campos $\tilde{\pi}_i^a$ podem ser obtidos usando o mesmo algoritmo aplicado para os campos $\tilde{A}_i^a$. Apresentamos os três primeiros coeficientes da série para os campos $\tilde{\pi}_i^a$:

$$b_{1,i}^{ab}(x, y) = \frac{1}{m^2} g f^{bca} \pi_i^c(y) \delta^3(x - y) \quad (7.34)$$

$$b_{2,i}^{abc}(x, y, z) = \frac{1}{2m^4} g^2 f^{cda} f^{bed} \pi_i^e(z) \delta^3(x - y) \delta^3(y - z) \quad (7.35)$$

$$b_{3,i}^{abcd}(x, y, z, w) = \frac{1}{6m^6} g^3 f^{dea} f^{cge} f^{bhg} \pi_i^h(w) \delta^3(x - y) \delta^3(y - z) \delta^3(z - w) \quad (7.36)$$

A partir disso, é possível construir uma forma geral dos coeficientes para todo $k \geq 4$:

$$b_{k,i}^{a,w_1,\dots,w_k}(x, y, z, w) = \frac{g^k}{k!m^{2k}} f^{w_k b_{k-1} a} f^{w_{k-1} b_k b_{k-1}} \dots f^{w_1 v_k b_k} \times \pi_i^{v_k}(x_k) \delta^3(x - x_1) \left(\prod_{j=2}^{k-1} \delta^3(x_j - x_{j+1}) \right) \quad (7.37)$$

Assim, os resultados nos permitem obter a expressão para a variável $\tilde{\pi}_i^a$ corrigida por GU:

$$\tilde{\pi}_i^a = \pi_i^h \left[\delta^{ha} + g f^{bha} \xi^b + \frac{g^2}{2!} f^{cda} f^{bhd} \xi^b \xi^c + \frac{g^3}{3!} f^{dea} f^{cge} f^{bhg} \xi^b \xi^c \xi^d + \dots \right] \quad (7.38)$$

onde $\xi^a \equiv \frac{\pi_0^a}{m^2}$. Ainda é possível reescrever a equação anterior de uma forma simplificada

$$\tilde{\pi}_i^a = \pi_i^h \exp(g F^{ha}) \quad (7.39)$$

onde $\xi^a \equiv \frac{\pi_0^a}{m^2}$ e $F^{ha} = f^{bha} \xi^b$. Pode-se agora verificar que os novos campos satisfazem $\{\tilde{A}_i^a, \chi^b\} = 0$ e $\{\tilde{\pi}_i^a, \chi^b\} = 0$, significando que $\tilde{A}_i^a$ e $\tilde{\pi}_i^a$ são variáveis de primeira classe.

7.2.3 Obtendo $\tilde{\pi}_0^a$ (condição de consistência)

Como vimos em (7.20), a variação infinitesimal de π_0^a é não nula, então podemos prosseguir com a aplicação do GU.

$$\tilde{\pi}_0^a(x) = \pi_0^a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\prod_{r=1}^k d^3 x_r \right) D_{ki}^{aw_1 \dots w_k}(x_1, \dots, x_k; x) \left(\prod_{r=1}^k T_1^{w_r}(x_r) \right), \quad (7.40)$$

de onde é possível obter os coeficientes $D_{ki}^{aw_1 \dots w_k}$. Seguindo o formalismo GU, temos o primeiro

$$D_{1,i}^{ab}(x, y) = \{\pi_0^a(x), \chi^b(y)\} = -\delta^{ba} \delta^3(x - y). \quad (7.41)$$

Pela forma de $D_{1,i}^{ab}(x, y)$, fica evidente que os próximos coeficientes serão nulos. Substituindo o coeficiente anterior em (7.40), obtemos

$$\tilde{\pi}_0^a(x) = \pi_0^a(x) - \pi_0^a(x) = 0. \quad (7.42)$$

A relevância deste resultado reside na demonstração da eficácia do formalismo. Observa-se que $\tilde{\pi}_0^a(x)$ (vínculo primário) passa a ser fortemente igual a zero, pois a condição $\{\tilde{\pi}_0^a(x), A_0^b(y)\} = 0$ é satisfeita. Isso implica que $\tilde{\pi}_0^a(x)$ não atua mais como um vínculo, resultando em um modelo dotado de um único vínculo de primeira classe, assegurando a invariância de calibre do sistema.

7.2.4 Obtendo $\tilde{T}_2^a$

Como vimos em (7.22), a variação infinitesimal de $\tilde{T}_2^a$ é não nula, então podemos prosseguir com a aplicação do GU. É possível notar que a estrutura da variação de π_i^a e de T_2^a são similares, o que implica que a série construída por meio do GU é similar, seguindo a forma

$$\tilde{T}_2^a = T_2^h \left[\delta^{ha} + g f^{bha} \xi^b + \frac{g^2}{2!} f^{cda} f^{bhd} \xi^b \xi^c + \frac{g^3}{3!} f^{dea} f^{cge} f^{bhg} \xi^b \xi^c \xi^d + \dots \right] \quad (7.43)$$

onde $\xi^a \equiv \frac{\pi_0^a}{m^2}$. Ainda é possível reescrever a equação anterior de uma forma simplificada

$$\tilde{T}_2^a = T_2^h \exp(g F^{ha}) \quad (7.44)$$

onde $\xi^a \equiv \frac{\pi_0^a}{m^2}$ e $F^{ha} = f^{bha} \xi^b$. Pode-se agora verificar que $\{\tilde{T}_2^a, \chi^b\} = 0$, satisfazendo a álgebra de primeira classe.

7.2.5 Construindo a hamiltoniana de primeira classe

A passagem de um sistema com vínculos de segunda classe para uma com vínculos de primeira classe *i.e.* em uma teoria invariante de calibre exige a reestruturação das funções fundamentais do modelo Hamiltoniana ($\tilde{H}$) e Lagrangiana ($\tilde{L}$). A construção das versões de primeira classe dessas funções será conduzida exclusivamente sob a ótica do **Caso II**, e tal escolha se apoia sobre as seguintes justificativas:

- Complexidade Não-Abeliana: enquanto o Caso I produz variações de campo que se assemelham ao comportamento de teorias abelianas, o Caso II explicita a álgebra de Lie presente na estrutura da álgebra de Lie $SU(N)$. É neste cenário que as constantes de estrutura f^{abc} e a representação adjunta desempenham papéis centrais, exigindo o uso de séries infinitas de operadores para a restauração da simetria.
- Mecanismo de Stückelberg: O Caso II liga diretamente o campo auxiliar $\xi^a = \frac{\pi_0^a}{M^2}$ ao campo de Stückelberg não-abeliano. Desenvolver a dinâmica para este caso permite uma conexão direta com o formalismo de Gribov-Zwanziger local, essencial para a compreensão de glúons massivos no regime de baixas energias.

- **Prova** de Consistência do GU: A obtenção de uma Hamiltoniana invariante no Caso II serve como o teste de efetividade para o formalismo de *Gauge Unfixing* (GU) aprimorado. Demonstrar que a estrutura simplética é preservada mesmo diante da não-comutatividade dos geradores valida a robustez do método para qualquer teoria de calibre não-abeliana.

A estratégia consistirá na substituição sistemática das variáveis originais do espaço de fase (A, π) pelas variáveis modificadas $(\tilde{A}, \tilde{\pi})$ nas formas funcionais da Hamiltoniana canônica:

$$H_c \rightarrow \tilde{H} = H_c(\tilde{A}, \tilde{\pi}), \quad (7.45)$$

da seguinte forma

$$\tilde{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \tilde{\pi}_i^a \tilde{\pi}_i^a + \frac{1}{4} \tilde{F}_{ij}^a \tilde{F}_{ij}^a + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^a \tilde{A}_i^a - A_0^a \tilde{T}_2^a \right] \quad (7.46)$$

onde $\tilde{F}_{ij}^a = \partial_i \tilde{A}_j^a - \partial_j \tilde{A}_i^a + g f^{abc} \tilde{A}_i^b \tilde{A}_j^c$.

7.2.5.1 Expansão do Termo de Massa

O termo de massa é o ponto central onde ξ^a se acopla dinamicamente ao campo de gauge. Utilizando a expansão obtida em (7.33):

$$\tilde{A}_i^a = A_i^a - D_i^{ab} \xi^b - \frac{g}{2} f^{abc} \xi^b D_i^{cd} \xi^d + \dots \quad (7.47)$$

O termo $\frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^a \tilde{A}_i^a$ torna-se:

$$\frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^a \tilde{A}_i^a = \frac{1}{2} m^2 (A_i^a - D_i^{ab} \xi^b)(A_i^a - D_i^{ac} \xi^c) + O(g) \quad (7.48)$$

É importante notar que ao se realizar a expansão do produto, o termo $(\partial_i \xi^a)(\partial_i \xi^a)$ fornece a energia cinética necessária para o campo escalar, enquanto os termos cruzados $A_i \partial_i \xi$ representam o acoplamento característico do mecanismo de Stückelberg [32].

7.2.5.2 Expansão do Termo Cinético dos Momentos

O termo cinético dos momentos na Hamiltoniana de primeira classe é dado por $\frac{1}{2} \tilde{\pi}_i^a \tilde{\pi}_i^a$. Utilizando a relação compacta obtida em (7.39) e reescrita em termos da matriz adjunta $M^{ah} = g f^{bha} \xi^b$:

$$\tilde{\pi}_i^a = \pi_i^h [\exp(M)]^{ha} \quad (7.49)$$

Substituindo na expressão da densidade Hamiltoniana, temos:

$$T_\pi = \frac{1}{2} \left(\pi_i^h [e^M]^{ha} \right) \left(\pi_i^k [e^M]^{ka} \right) \quad (7.50)$$

Utilizando a propriedade de que os geradores na representação adjunta são antissimétricos ($M^{ha} = -M^{ah}$), a matriz exponencial e^M é uma matriz ortogonal, satisfazendo:

$$[e^M]^{ha} [e^M]^{ka} = [e^M e^{M^T}]^{hk} = [e^M e^{-M}]^{hk} = \delta^{hk} \quad (7.51)$$

Dessa forma, o termo cinético reduz-se a:

$$\frac{1}{2}\tilde{\pi}_i^a\tilde{\pi}_i^a = \frac{1}{2}\pi_i^h\pi_i^k\delta^{hk} = \frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a. \quad (7.52)$$

O resultado em (7.52) é extremamente relevante uma vez que ele indica que, embora o momento $\tilde{\pi}_i^a$ seja formalmente uma série infinita em termos de ξ^a , a energia cinética associada aos momentos transversais é numericamente idêntica à do sistema original. Isso confirma que a transformação de GU para os momentos atua como uma rotação pura no espaço de cor, preservando o produto escalar e, conseqüentemente, a norma do campo de momento [41].

Uma propriedade fundamental das variáveis modificadas é que elas satisfazem $\{\tilde{A}_i^a, \chi^b\} = 0$ e $\{\tilde{\pi}_i^a, \chi^b\} = 0$. Conseqüentemente, a Hamiltoniana construída a partir dessas variáveis é, por construção, invariante sob as transformações geradas por χ^a :

$$\delta\tilde{H} = \int d^3y \epsilon(y) \{\tilde{H}, \chi^b(y)\} = 0 \quad (7.53)$$

Isso implica que a teoria massiva original, que possuía vínculos de segunda classe e carecia de simetria de calibre local, foi redefinida para uma teoria de primeira classe, em que a massa do glúon coexiste com a invariância de calibre, à custa da introdução do campo ξ^a .

Substituindo então as formas exponenciais $\tilde{\pi}_i^a = \pi_i^h [e^{gF}]^{ha}$ e a série de $\tilde{A}_i^a$, a Hamiltoniana de primeira classe assume a forma local:

$$\tilde{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a + \frac{1}{4}F_{ij}^a(A)F_{ij}^a(A) + \frac{1}{2}m^2(A_i^a - D_i^{ab}\xi^b)^2 + \dots \right] \quad (7.54)$$

onde os termos omitidos representam as interações não-abelianas de ordem superior em g entre o campo de gauge e o campo de ξ^a (Stückelberg). Essa formulação demonstra como a Hamiltoniana manifesta claramente a natureza não polinomial do modelo em sua forma de primeira classe.

7.2.6 Construindo a lagrangiana de primeira classe

A densidade lagrangiana de primeira classe, L_I , é definida pela forma funcional da lagrangiana original atuando sobre os campos transformados $\tilde{A}_\mu^a$:

$$\tilde{L} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^a\tilde{F}_{\mu\nu}^a + \frac{m^2}{2}\tilde{A}_\mu^a\tilde{A}_\mu^a \quad (7.55)$$

Considerando a estrutura não-abeliana e utilizando a identificação do campo de Stückelberg $\xi^a \equiv \pi_0^a/m^2$, o tensor de intensidade de campo permanece invariante em sua forma, $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a$. Contudo, o termo de massa adquire uma dinâmica extra por meio da série não-polinomial $B_\mu^a(\theta)$, resultando na lagrangiana invariante de calibre:

$$\tilde{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF_{\mu\nu}^a + \frac{m^2}{2}\left(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi)\right)\left(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi)\right) \quad (7.56)$$

Nesta formulação, $B_\mu^a(\xi)$ é definido pela expansão:

$$B_\mu^a(\xi) = V^{cb}(\xi) D_\mu^{ca} \xi^b = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-g\bar{\xi})^n}{(n+1)!} \right]^{ab} D_\mu^{ca} \xi^b \quad (7.57)$$

onde $\bar{\xi}^{ab} = f^{acb} \xi^c$. Esta estrutura garante que a ação seja invariante sob as transformações de calibre locais simultâneas (procedimento detalhado no apêndice B):

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \epsilon^b \quad (7.58)$$

$$\delta \xi^a = \epsilon^a + \frac{g}{2} f^{abc} \xi^b \epsilon^c + \dots \quad (7.59)$$

Desta forma, o sistema original de segunda classe é mapeado em uma teoria de primeira classe, preservando a consistência algébrica e o número de graus de liberdade físicos do modelo através da introdução do campo escalar de Stückelberg.

7.2.7 Parênteses de Dirac vs. parênteses de Poisson das variáveis GU

Uma importante forma também de verificar a eficácia do método de *Gauge Unfixing* aprimorado reside na comparação dos resultados obtidos nos parênteses de Poisson das variáveis modificadas pelo GU, com o resultado encontrado via formalismo de Dirac com as variáveis originais do modelo, listados abaixo

$$\{A_i^a(x), \pi_j^b(y)\}_D = \delta_{ij} \delta^{ab} \delta^3(x-y), \quad (7.60)$$

$$\{A_0^a(x), A_i^b(y)\}_D = \frac{1}{M^2} D_i^{ab} \delta^3(x-y), \quad (7.61)$$

$$\{A_0^a(x), \pi_i^b(y)\}_D = \frac{g}{M^2} f^{abc} \pi_i^b(x) \delta^3(x-y), \quad (7.62)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_0^b(y)\}_D = 0. \quad (7.63)$$

Calculando os parênteses de Poisson das variáveis provenientes do GU, temos que para $\tilde{A}_i^a(x)$ e $\tilde{A}_0^d(y)$

$$\{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{A}_0^d(y)\} = \{-D_i^{ba} \xi^b, A_0^e\} + \{-\frac{g}{2} f^{cad} \xi^b D_i^{bd} \xi^c, A_0^e\} + \{-\frac{g^2}{6} f^{dac} f^{ceg} \xi^b \xi^c D_i^{bg} \xi^d, A_0^h\} + \dots, \quad (7.64)$$

que considerando o limite $\xi^a \rightarrow 0$, pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{A}_0^d(y)\} &\xrightarrow{\xi^a \rightarrow 0} \{A_i^a(x), A_0^d(y)\}_{Dirac} \\ &= \frac{1}{M^2} D_i^{ad} \delta^3(x-y) \\ &= \frac{1}{M^2} \left(\partial_i \delta^{ad} + g f^{abd} A_i^b \right) \delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (7.65)$$

Para $\tilde{A}_i^a(x)$ e $\tilde{\pi}_i^b(y)$ temos que

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{\pi}_j^h(y)\} = & \left\{ -D_i^{ba} \xi^b, \pi_j^m \right\} \exp(gF^{hm}) + \left\{ -\frac{g}{2} f^{cad} \xi^b D_i^{bd} \xi^c, \pi_j^m \right\} \exp(gF^{hm}) + \\ & \left\{ -\frac{g^2}{6} f^{dac} f^{ceg} \xi^b \xi^c D_i^{bg} \xi^d, \pi_j^m \right\} \exp(gF^{hm}) + \dots, \end{aligned} \quad (7.66)$$

calculando os parênteses de Poisson, temos que

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{\pi}_j^h(y)\} = & \delta^{ah} \delta_{ij} \delta^3(x-y) \exp(gF^{hm}) \\ & - g f^{cah} \xi^c \delta_{ij} \delta^3(x-y) \exp(gF^{hm}) \\ & - \frac{g}{2} f^{cad} \xi^b g f^{bdh} \delta_{ij} \delta^3(x-y) \exp(gF^{hm}) \\ & - \frac{g^2}{6} f^{dac} f^{ceg} \xi^b \xi^c g f^{bgh} \delta_{ij} \delta^3(x-y) \exp(gF^{hm}) \dots, \end{aligned} \quad (7.67)$$

onde se rearranjarmos os termos, teremos

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{\pi}_j^h(y)\} = & \delta_{ij} \delta^3(x-y) \left\{ \delta^{am} - g f^{cam} \xi^c - \frac{g^2}{2} f^{cad} \xi^d f^{bdm} \xi^c \right. \\ & \left. - \frac{g^3}{6} f^{dac} \xi^d f^{ceg} \xi^g f^{bgm} \xi^e \dots \right\} \exp(gF^{hm}) \end{aligned} \quad (7.68)$$

que, se usarmos a propriedade de antissimetria de f^{abc} , teremos

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{\pi}_j^h(y)\} = & \delta_{ij} \delta^3(x-y) \left\{ \delta^{am} - g f^{cam} \xi^c + \frac{g^2}{2} f^{acd} \xi^d f^{bdm} \xi^c \right. \\ & \left. - \frac{g^3}{6} f^{dac} \xi^d f^{ceg} \xi^g f^{bgm} \xi^e \dots \right\} \exp(gF^{hm}), \end{aligned} \quad (7.69)$$

que claramente pode ser escrita na forma

$$\{\tilde{A}_i^a(x), \tilde{\pi}_j^h(y)\} = \delta_{ij} \delta^3(x-y) \exp(-M^{am}) \exp(M^{hm}) = \delta_{ij} \delta^3(x-y) \delta^{ah}, \quad (7.70)$$

Note-se que a matriz $(M)^{ab} = g \xi^c f^{cab}$ representa a ação da álgebra de Lie na representação adjunta. A preservação do parêntese de Poisson sem a necessidade do limite $\xi \rightarrow 0$ demonstra que a transformação de Gauge Unfixing para as variáveis espaciais é, de fato, uma transformação canônica induzida pelo grupo de calibre.

Para $\tilde{A}_0^a(x)$ e $\tilde{\pi}_i^b(y)$, teremos

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_0^a(x), \tilde{\pi}_i^b(y)\} = & \left\{ \tilde{A}_0^a(x), \pi_i^h \exp(M^{ha}) \right\} \\ = & \pi_i^h \left\{ A_0^a(x), \exp(M^{ha}) \right\} \\ = & \pi_i^h \left\{ A_0^a(x), \left[g f^{bha} \xi^b + \frac{g^2}{2!} f^{cda} f^{bhd} \xi^a \xi^c + \dots \right] \right\} \\ = & \pi_i^h \left[\frac{g}{m^2} f^{bha} \{A_0^a(x), \pi_0^a(y)\} + \frac{g^2}{2m^4} f^{cda} f^{bhd} \left(\{A_0^a(x), \pi_0^b(y)\} \pi_0^c(y) \right. \right. \\ & \left. \left. + \pi_0^b(y) \{A_0^a(x), \pi_0^c(y)\} \right) + \frac{g^3}{3!} f^{dea} f^{cge} f^{bhg} \dots \right], \end{aligned} \quad (7.71)$$

considerando que $\{A_0^m(x), \pi_0^a(y)\} = \delta^{ma}\delta^3(x-y)$ e que $f^{abc} = -f^{acb}$, notamos que os termos de ordem maior ou igual a dois, vão a zero, resultando em

$$\{\tilde{A}_0^m(x), \tilde{\pi}_i^b(y)\} = \pi_i^h \frac{g}{m^2} f^{bhm} \delta^3(x-y). \quad (7.72)$$

A equivalência direta entre os parênteses de Dirac das variáveis originais e os de Poisson das variáveis GU ocorre porque o operador $\{A_0^m, \cdot\}$ atua como uma derivada funcional que reduz a ordem da expansão em série de $\tilde{\pi}_i$. Devido à antissimetria das constantes de estrutura f^{abc} contraída com a simetria dos produtos de campos $\xi^b \xi^c \dots$ nos termos de ordem superior, apenas o termo linear sobrevive, recuperando exatamente a estrutura de transformação da representação adjunta prevista pelo parêntese de Dirac.

7.2.8 Análise dos Graus de Liberdade e Consistência do Formalismo

A obtenção das funções Hamiltonianas e Lagrangianas de primeira classe através do método de *Gauge Unfixing* (GU) permite estabelecer uma nova estrutura de vínculos para o modelo de Yang–Mills massivo. Uma das principais vantagens deste formalismo, em contraste com o mecanismo de Stückelberg convencional ou mesmo formalismos como o BFFT, é que o espaço de fase original não é expandido pela introdução de campos auxiliares externos; em vez disso, a liberdade de calibre é reestabelecida por meio da reclassificação dos vínculos existentes [3, 4].

No modelo original de Yang–Mills (YM) $SU(N)$, o sistema é caracterizado por dois vínculos de segunda classe por gerador da álgebra: o vínculo primário $\pi_0^a \approx 0$ e o vínculo secundário $D_i \pi_i^a + m^2 A_0^a \approx 0$. No espaço de fase de dimensão 8 (considerando as componentes $\mu = 0, 1, 2, 3$ e seus momentos), a presença desses dois vínculos de segunda classe reduz o sistema a $8 - 2 = 6$ variáveis, resultando em 3 graus de liberdade físicos no espaço de configuração, correspondentes às três polarizações de um bóson de calibre massivo.

Com a aplicação do GU, o sistema é elevado a uma teoria de primeira classe. Sob esta nova perspectiva, um dos vínculos de segunda classe é efetivamente "desfixado", e o sistema passa a ser governado por um único vínculo de primeira classe — o gerador da simetria de calibre $\tilde{T}_2^a$. De acordo com formalismo de Dirac para sistemas de primeira classe, cada vínculo desta natureza remove dois graus de liberdade do espaço de fase (um pela restrição e outro pela liberdade de fixação de calibre) [2, 18, 19]. Assim, a contagem resulta em:

$$G.D.L. = \frac{1}{2} (8 - 2 \times 1) = 3 \quad (7.73)$$

Este resultado confirma que o formalismo GU preserva a integridade física do modelo original. A componente longitudinal, que em teorias de calibre puras é eliminada, aqui permanece como um grau de liberdade físico, mas agora descrito em uma linguagem onde a invariância de calibre é manifesta.

Dessa forma, a Hamiltoniana $\tilde{H}$ e a Lagrangiana $\tilde{L}$ construídas não representam um novo sistema físico, mas sim uma descrição dual e matematicamente mais tratável, onde os vínculos de segunda classe foram mapeados em uma órbita de calibre. Esta característica é o que permite a equivalência direta entre os parênteses de Poisson das variáveis modificadas e os parênteses de Dirac das variáveis originais, conforme demonstrado anteriormente, validando a eficácia do método na transição para um formalismo de primeira ordem invariante.

8 O Modelo de Skyrme $SU(2)$

Consideramos agora o modelo de Skyrme $SU(2)$, que descreve bárions e suas interações por meio de soluções de solitons. A Lagrangiana para este modelo é dada por:

$$L = \int d^3r \left[-\frac{F_\pi^2}{12} \text{Tr}\{\partial_i U \partial_i U^+\} + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}\{[U^+ \partial_i U, U^+ \partial_j U]\} \right] \quad (8.1)$$

onde F_π é a constante de decaimento do pión, e é um parâmetro adimensional, e U é uma matriz $SU(2)$. Ao inserir uma coordenada coletiva $A(t)$ na Lagrangiana e substituir $U(r)$ por $U(r, t) = A(t)U(r)A^+(t)$, obtemos:

$$L = -M + \lambda \text{Tr}\{\partial_0 A \partial_0 A^{-1}\} \quad (8.2)$$

onde M é a massa do sóliton, que, na *ansatz* de Skyrme $U(r) = \exp(iF(r) \cdot \hat{r})$, é dada por:

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{1}{8} F_\pi^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right] + \frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left[\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.3)$$

e $\lambda = 2/3(1/e^3 F_\pi) \Lambda$, com $\Lambda = \int_0^\infty dx x^2 \sin^2 F \{1 + 4[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2}]\}$ onde x é uma variável adimensional definida por $x = eF_\pi r$. A matriz A do grupo $SU(2)$ pode ser escrita como $A = a_0 + ia \cdot \tau$ com o vínculo $T_1 = a_i a_i - 1 \approx 0$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Então, a Lagrangiana pode ser reescrita como uma função dos a_i como $L = -M + 2\lambda \dot{a}_i \dot{a}_i$.

Para a transição para o formalismo Hamiltoniano, calculamos os momentos canônicos:

$$\pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = 4\lambda \dot{a}_i \quad (8.4)$$

Através da transformação de Legendre, obtemos o Hamiltoniano canônico:

$$H_c = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi_i \quad (8.5)$$

Da condição de consistência de que o vínculo T_1 não pode evoluir no tempo, obtemos um vínculo secundário:

$$T_2 = a_i \pi_i \approx 0 \quad (8.6)$$

Então, o Hamiltoniano total é $H_T = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi_i + u_1(a_k a_k - 1) + u_2 a_i \pi_i$. A conservação do vínculo T_2 determina o multiplicador de Lagrange u_1 :

$$u_1 = \frac{\pi_i \pi_i}{8\lambda a_j a_j} \quad (8.7)$$

Isso confirma que o sistema possui apenas dois vínculos, e eles são de segunda classe, com álgebra de Poisson dada por $\{T_a, T_b\} = 2\epsilon_{ab} a_i a_i$, onde $a, b = 1, 2$ e $\epsilon_{ab} = 1$. O Hamiltoniano total pode agora ser reescrito como:

$$H_T = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi_i + \frac{\pi_i \pi_i}{8\lambda a_j a_j} (a_k a_k - 1) + u_2 a_i \pi_i \quad (8.8)$$

A evolução temporal do vínculo T_1 fixa o multiplicador de Lagrange u_2 :

$$u_2 = -\frac{a_i \pi_i}{4\lambda a_j a_j} \quad (8.9)$$

e o Hamiltoniano total se torna:

$$H_T = M + \frac{1}{8\lambda} \left(2 - \frac{1}{a_j a_j} \right) - \frac{(a_i \pi_i)^2}{4\lambda a_j a_j} \quad (8.10)$$

A natureza de segunda classe mostrada pelos vínculos na equação (8.10) nos permite aplicar o formalismo de *Gauge Unfixing* aprimorado. Agora precisamos escolher um dos vínculos para ser o gerador de transformações infinitesimais. As duas possibilidades podem ser analisadas separadamente.

8.0.1 T_1 como Vínculo de Primeira Classe

Neste caso, escolhemos o vínculo (8.6), $T_1 = a_i a_i - 1 \approx 0$, como o gerador de transformações infinitesimais, χ . Podemos redefini-lo para que os dois vínculos formem um par aproximadamente canonicamente conjugado. Assim, reclassificamos T_1 como:

$$\chi = \frac{T_1}{2a_i a_i} = \frac{a_i a_i - 1}{2a_j a_j} \quad (8.11)$$

O vínculo T_2 será descartado. Portanto, as variações infinitesimais das quantidades relevantes são dadas por:

$$\delta a_i = \epsilon \{a_i, \chi\} = 0 \quad (8.12)$$

$$\delta T_2 = \epsilon \{T_2, \chi\} = -\epsilon(1 + 2\chi) \quad (8.13)$$

$$\delta \pi_i = \epsilon \{\pi_i, \chi\} = \epsilon \left(-\frac{a_i}{a_j a_j} + \frac{2a_i \chi}{a_j a_j} \right) \quad (8.14)$$

Conforme apresentado na Seção II, as variáveis de primeira classe são construídas como uma série de potências do vínculo descartado T_2 :

$$\tilde{a}_i = a_i + \sum_{n=1} b_n T_2^n \quad (8.15)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \sum_{n=1} c_n T_2^n \quad (8.16)$$

Os coeficientes b_n e c_n são calculados usando a fórmula geral da Seção II. Usando as expressões para as variações, podemos ver que para a variável $\tilde{a}_i$, todos os coeficientes b_n são trivialmente zero. Portanto, $\tilde{a}_i = a_i$. Para $\tilde{\pi}_i$, obtemos o primeiro coeficiente:

$$c_1 = \frac{(2\chi - 1)a_i}{2a_j a_j - 1} \quad (8.17)$$

Como $\delta c_1 = 0$, todos os coeficientes subsequentes para $n \geq 2$ são nulos. Portanto, as variáveis de primeira classe são:

$$\tilde{a}_i = a_i \quad (8.18)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \frac{(2\chi - 1)a_i}{2a_j a_j - 1} a_k \pi_k \quad (8.19)$$

A construção do Hamiltoniano através dessas novas variáveis é essencial para verificar se o novo sistema é agora do tipo de primeira classe. Podemos verificar isso através dos colchetes de Poisson entre o gerador de simetria χ e o novo Hamiltoniano. Ao inserir as expressões para $\tilde{a}_i$ e $\tilde{\pi}_i$ no Hamiltoniano canônico original $H_c = M + \frac{1}{8\lambda}\pi_i\pi_i$, obtemos o seguinte Hamiltoniano de primeira classe:

$$\tilde{H}_c = M + \frac{1}{8\lambda}\tilde{\pi}_i\tilde{\pi}_i = H_c + \frac{1}{4\lambda} \frac{(2\chi - 1)(a_i\pi_i)^2}{2a_ja_j - 1} + \frac{1}{8\lambda} \left[\frac{(2\chi - 1)a_ia_j\pi_j}{2a_ka_k - 1} \right]^2 \quad (8.20)$$

Pode-se verificar que $\{\chi, \tilde{H}_c\} = 0$.

8.0.2 T_2 como Vínculo de Primeira Classe

Agora consideraremos a outra escolha de gerador de transformações infinitesimais. Neste caso, reescalamos $T_2 = a_i\pi_i \approx 0$ como:

$$\chi' = -\frac{T_2}{2a_ia_i} = -\frac{a_i\pi_i}{2a_ja_j} \quad (8.21)$$

e T_1 será ignorado como um vínculo. χ' gera transformações infinitesimais como segue:

$$\delta a_i = -\epsilon\{a_i, \chi'\} = -\frac{\epsilon a_i}{2a_ja_j} \quad (8.22)$$

$$\delta \pi_i = \epsilon\{\pi_i, \chi'\} = \frac{\epsilon \pi_i}{2a_ja_j} + \frac{2\epsilon \chi' a_i}{a_ka_k} \quad (8.23)$$

$$\delta T_1 = \epsilon\{T_1, \chi'\} = -\epsilon \quad (8.24)$$

Assim, tanto a_i quanto π_i são variáveis de segunda classe e devem ser redefinidas. As variáveis de primeira classe $\tilde{a}_i$ e $\tilde{\pi}_i$ são construídas como séries de potências do vínculo descartado T_1 :

$$\tilde{a}_i = a_i + \sum_{n=1} b_n T_1^n \quad (8.25)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \sum_{n=1} c_n T_1^n \quad (8.26)$$

Para ambas as variáveis, temos um número infinito de coeficientes, pois as séries não truncam devido à natureza das transformações. Para $\tilde{a}_i$, os dois primeiros coeficientes são:

$$b_1 = -\frac{a_i}{2a_ja_j} \quad (8.27)$$

$$b_2 = -\frac{a_i}{8(a_ja_j)^2} \quad (8.28)$$

Para $n \geq 3$, a relação geral para os coeficientes b_n é dada por:

$$b_n = -\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \frac{a_i}{(a_ja_j)^n} \quad (8.29)$$

Portanto, $\tilde{a}_i$ se torna:

$$\tilde{a}_i = a_i \left[1 - \frac{(a_j a_j - 1)}{2a_k a_k} - \frac{(a_j a_j - 1)^2}{8(a_k a_k)^2} + \dots \right] \quad (8.30)$$

que pode ser colocada em uma forma fechada como:

$$\tilde{a}_i = a_i \left[1 - \frac{(a_j a_j - 1)}{a_k a_k} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{a_i}{(a_j a_j)^{\frac{1}{2}}} \quad (8.31)$$

Agora, para a variável π_i , os dois primeiros coeficientes são:

$$c_1 = \frac{\pi_i}{2a_j a_j} + \frac{2a_i \chi'}{a_k a_k} \quad (8.32)$$

$$c_2 = \frac{3\pi_i}{8(a_j a_j)^2} + \frac{a_i \chi'}{2(a_k a_k)^2} \quad (8.33)$$

Ao substituir esses c_n na expressão para $\tilde{\pi}_i$, a variável se torna:

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \left(\frac{\pi_i}{2a_k a_k} + \frac{2a_i \chi'}{a_k a_k} \right) (a_j a_j - 1) + \left(\frac{3\pi_i}{8(a_k a_k)^2} + \frac{a_i \chi'}{2(a_k a_k)^2} \right) (a_j a_j - 1)^2 \dots \quad (8.34)$$

Diferentemente de $\tilde{a}_i$, não se pode obter aqui uma forma fechada simples para a variável de primeira classe $\tilde{\pi}_i$. Este é um resultado diferente de alguns outros trabalhos anteriores. Ao inserir essas expressões no Hamiltoniano (8.5), obtemos um novo Hamiltoniano de primeira classe:

$$\tilde{H}'_c = M + \frac{1}{8\lambda} \tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_i \quad (8.35)$$

É possível verificar que $\{\chi, \tilde{H}'_c\} = 0$, o que reafirma a efetividade do GUA em tornar os modelos por ele tratados com estrutura de vínculos de primeira classe e por consequência, com invariância de calibre.

9 CONCLUSÃO

Nesta tese, generalizamos com sucesso o formalismo de *Gauge Unfixing* (GU) aprimorado para abordar sistemas não-abelianos de segunda classe, com foco na restauração da invariância de calibre [42–44]. Esta generalização é crucial para uma reformulação mais completa e formal de tais sistemas dentro do seu espaço de fase original [45, 46]. Diferente de métodos de extensão, o formalismo GUA preserva a dimensão do espaço de fase, convertendo a rigidez dos vínculos de segunda classe em liberdade de calibre, o que mantém a contagem de graus de liberdade físicos consistente com a descrição original do bóson massivo [47–49]. Demonstramos que variáveis de segunda classe podem ser sistematicamente convertidas em quantidades invariantes de calibre por meio de um procedimento iterativo, levando a um sistema totalmente invariante [50–52].

Investigamos especificamente a restauração da invariância de calibre para dois modelos não-abelianos significativos: o modelo de Yang–Mills massivo $SU(N)$ e o modelo de Skyrme $SU(2)$ [53–55]. Para o modelo de Yang–Mills massivo, uma escolha criteriosa do gerador de simetria de calibre permitiu-nos reproduzir com precisão a forma infinitesimal das variações de calibre características da teoria de Yang–Mills sem massa [7, 27, 28]. As expansões resultantes para as variáveis GU, expressas como séries de potências do vínculo descartado, correspondem precisamente à construção de Stückelberg (não-polinomial) derivada em trabalhos anteriores [16, 33, 53, 56]. Foi demonstrado que a transformação para os momentos ($\tilde{\pi}_i$) atua como uma rotação pura no espaço de cor, garantindo que a energia cinética do sistema permaneça numericamente invariante, preservando a norma do campo de momentos independentemente da complexidade da série infinita gerada [10]. Esta forte concordância valida a nossa abordagem e destaca a sua capacidade de recuperar resultados conhecidos de formalismos alternativos [50, 53].

No caso do modelo de Skyrme $SU(2)$, a nossa análise revelou duas teorias de calibre distintas, dependendo de qual vínculo foi escolhido como gerador de simetria [54, 55, 57]. Quando T_1 (o vínculo $a_i a_i - 1$) foi usado como gerador, as variáveis GU obtiveram uma forma mais simples e truncada [43, 57]. Por outro lado, quando T_2 (o vínculo $a_i \pi_i$) foi escolhido, as respectivas variáveis GU resultaram numa série infinita de coeficientes [55]. Embora a última série fosse infinita, ela pôde ser expressa numa forma fechada para $\tilde{a}_i$, enquanto $\tilde{\pi}_i$ permaneceu uma série infinita [3, 4]. Uma característica consistente em todas as aplicações é que o sistema de primeira classe recupera a sua natureza original de segunda classe quando o calibre unitário é imposto ou as condições de contorno iniciais são restabelecidas [42, 43, 52].

Além disso, estabelecemos uma conexão crucial entre o formalismo GUA e o formalismo de Stückelberg generalizado [16, 33, 53]. Demonstramos que os escalares auxiliares introduzidos no mecanismo de Stückelberg, juntamente com os seus conjugados

canônicos, podem ser diretamente identificados com os campos adicionais introduzidos no espaço de fase estendido na abordagem BFFT [21, 50, 58]. Este mapeamento confirma a equivalência destas duas prescrições distintas para transformar sistemas não invariantes de calibre em sistemas invariantes, independentemente da dimensionalidade do espaço-tempo ou do grupo de calibre não-abeliano específico [3, 4, 48, 51]. Esta correspondência estende e generaliza descobertas semelhantes anteriormente relatadas para grupos abelianos [14, 44, 59]. É importante ressaltar que, embora a generalização do formalismo de Stückelberg usual de teorias abelianas para não-abelianas seja não-trivial, o mesmo ocorre no formalismo BFFT [50, 53]. De facto, uma característica distintiva da transformação de sistemas de segunda classe não-abelianos em sistemas de primeira classe foi que todas as ordens de iteração na abordagem BFFT foram obrigatórias [21, 55]. No entanto, a nossa abordagem forneceu um algoritmo para calcular sistematicamente estas correções e expressá-las em formas fechadas [3, 4].

A consistência do nosso formalismo é ainda mais corroborada pela observação de que os parênteses de Poisson entre as variáveis GU são equivalentes aos parênteses de Dirac entre as variáveis originais de segunda classe para o modelo de Yang–Mills massivo e para o modelo de Skyrme $SU(2)$ [45, 46, 52, 60, 61]. Isto indica a robustez e validade do nosso formalismo GUA generalizado [3, 4]. Uma aplicação interessante do método desenvolvido aqui seria estudar a bosonização e a dualidade entre teorias não-abelianas em dimensões superiores, onde a abordagem de Lagrangiana mestre convencional falhou, enquanto a baseada no formalismo de Stückelberg generalizado foi eficaz [53, 62, 63].

Como observações finais, mencionamos que o formalismo Hamiltoniano para a teoria de Yang–Mills massiva, considerada um sistema de segunda classe, foi originalmente estabelecido na literatura clássica [8, 36, 41]. A interpretação canônica de primeira classe correspondente em termos da abordagem de Stückelberg parte de uma Lagrangiana incorporada e não utiliza o elaborado método BFFT [16, 53]. O presente trabalho avança ao converter sistemas de segunda classe nas suas formas de primeira classe sem a necessidade de estender artificialmente o espaço de fase, preservando a elegância geométrica da teoria [3, 4, 49]. Trabalhos futuros poderão explorar novas aplicações deste método, potencialmente em áreas como bosonização e dualidade em dimensões superiores, onde abordagens convencionais enfrentaram desafios significativos [2–5].

A Apêndice A: correspondência com o formalismo de Stückelberg generalizado

Esta seção explora a relação entre a imersão Hamiltoniana de sistemas de segunda classe, especificamente o formalismo de Batalin-Fradkin-Tyutin (BFFT), e o formalismo de Stückelberg generalizado para converter Lagrangianas não invariantes de calibre em formas invariantes de calibre. A teoria de Yang–Mills massiva serve como um exemplo clássico para essa comparação.

A Lagrangiana padrão de Yang–Mills massiva, definida como $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$, não é invariante sob transformações de calibre devido ao termo de massa. No entanto, o mecanismo de Stückelberg generalizado introduz escalares auxiliares para restaurar essa invariância de calibre. A Lagrangiana de Stückelberg modificada é:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{m^2}{2}(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi))(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi)) \quad (\text{A.1})$$

onde $\xi^a(x)$ são os campos escalares auxiliares (campos de Stückelberg) e $B_\mu^a(\theta) = V^{ab}(\theta)\partial_\mu\theta^b$ com $V^{ab}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-g\bar{\theta})^n}{(n+1)!} \right]^{ab}$ e $\bar{\theta}^{ab} = f^{acb}\theta^c$. Esta Lagrangiana é construída para ser invariante sob transformações de calibre não-abelianas infinitesimais:

$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a + D_\mu^{ab}(V(\xi)\lambda)^b \quad (\text{A.2})$$

$$\xi^a \longrightarrow \xi^a + \lambda^a \quad (\text{A.3})$$

onde λ é o parâmetro de calibre.

Desenvolvendo o formalismo canônico para esta Lagrangiana invariante de calibre, encontram-se vínculos primários e secundários. Os momentos canônicos são:

$$\pi_0^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^{0,a}} = m^2 \xi^a \quad (\text{A.4})$$

$$\pi_i^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^{i,a}} = -F_{0i}^a \quad (\text{A.5})$$

$$\pi_\xi^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} = m^2 V^{ca} V^{cd} \dot{\xi}^d - m^2 A_0^b W^{ba} \quad (\text{A.6})$$

onde $W^{ab}(\xi) = V^{ab}(\xi) - \delta^{ab}$. Da expressão para π_0^a , o vínculo primário é:

$$\tilde{T}_1^a = \pi_0^a - m^2 \xi^a \approx 0 \quad (\text{A.7})$$

Este vínculo pode ser diretamente identificado com o primeiro vínculo no formalismo BFFT, fazendo a simples identificação de campos $\xi^a \leftrightarrow \eta^{2a}$.

Para o cálculo do vínculo secundário, utiliza-se a conservação temporal de $\tilde{T}_1^a$, resultando em:

$$\tilde{T}_1^a = T_1^a - m^2 \xi^a = \pi_0^a - m^2 \xi^a \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{T}_2^a = m^2 A_0^a - \pi_\xi^a + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(g\bar{\xi})^n}{(n+1)!} \right]^{ab} (D_i \pi^i)^b \quad (\text{A.9})$$

Essa correspondência confirma que tanto as prescrições de imersão Lagrangiana quanto Hamiltoniana convertem sistemas não invariantes de calibre em sistemas invariantes de calibre.

B Apêndice B: invariância de calibre da lagrangiana de Stückelberg não-abeliana

Consideremos a Lagrangiana

$$L_I = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{m^2}{2} \left(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi) \right) \left(A_\mu^a - B_\mu^a(\xi) \right), \quad (\text{B.1})$$

onde o campo de calibre não-abeliano A_μ^a transforma como

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \epsilon^b = \partial_\mu \epsilon^a + g f^{acb} A_\mu^c \epsilon^b, \quad (\text{B.2})$$

e o tensor de campo é dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (\text{B.3})$$

É bem conhecido que, sob esta transformação, $F_{\mu\nu}^a$ varia covariantemente,

$$\delta F_{\mu\nu}^a = g f^{acb} F_{\mu\nu}^c \epsilon^b, \quad (\text{B.4})$$

de modo que o termo de Yang–Mills é invariante:

$$\delta \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \delta F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{acb} F_{\mu\nu}^c \epsilon^b = 0, \quad (\text{B.5})$$

pois $F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^c$ é simétrico em (a, c) enquanto f^{acb} é antissimétrico.

A parte de massa em (B.1) depende da combinação

$$C_\mu^a \equiv A_\mu^a - B_\mu^a(\xi), \quad (\text{B.6})$$

onde o campo de Stückelberg $B_\mu^a(\xi)$ é definido por

$$B_\mu^a(\xi) = V^{cb}(\xi) D_\mu^{ca} \xi^b = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-g\bar{\xi})^n}{(n+1)!} \right]^{ab} D_\mu^{ca} \xi^b, \quad \bar{\xi}^{ab} = f^{acb} \xi^c. \quad (\text{B.7})$$

Expandindo até segunda ordem em ξ , obtemos

$$B_\mu^a(\xi) = D_\mu^{ab} \xi^b - \frac{g}{2} f^{acb} \xi^c D_\mu^{bd} \xi^d + \mathcal{O}(\xi^3). \quad (\text{B.8})$$

Escolhemos a transformação de calibre do campo de Stückelberg como

$$\delta \xi^a = \epsilon^a + \frac{g}{2} f^{abc} \xi^b \epsilon^c + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (\text{B.9})$$

de forma que a variação de $B_\mu^a(\xi)$ reproduza a transformação padrão de um campo de conexão na representação adjunta.

De fato, tomando inicialmente o termo linear de (B.8),

$$B_\mu^{a(1)} = D_\mu^{ab} \xi^b, \quad (\text{B.10})$$

sua variação é

$$\delta B_\mu^{a(1)} = D_\mu^{ab} \delta \xi^b + (\delta D_\mu^{ab}) \xi^b. \quad (\text{B.11})$$

Usando (B.9) e

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{acb} A_\mu^c, \quad \delta D_\mu^{ab} = g f^{acb} \delta A_\mu^c = g f^{acb} D_\mu^{cd} \epsilon^d, \quad (\text{B.12})$$

vemos que a contribuição dominante de $\delta B_\mu^{a(1)}$ contém

$$\delta B_\mu^{a(1)} = D_\mu^{ab} \epsilon^b + \text{termos proporcionais a } g(\xi \epsilon, \partial \xi \epsilon) + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (\text{B.13})$$

onde o primeiro termo é o “shift” $D_\mu \epsilon$ desejado. Já o termo quadrático em (B.8),

$$B_\mu^{a(2)} = -\frac{g}{2} f^{acb} \xi^c D_\mu^{bd} \xi^d, \quad (\text{B.14})$$

gera, ao ser variado,

$$\delta B_\mu^{a(2)} = -\frac{g}{2} f^{acb} \delta \xi^c D_\mu^{bd} \xi^d - \frac{g}{2} f^{acb} \xi^c D_\mu^{bd} \delta \xi^d + \dots, \quad (\text{B.15})$$

onde os pontos indicam termos de ordem superior em ξ . Substituindo (B.9) e retendo termos até ordem $\xi \epsilon$, os termos adicionais de $\delta B_\mu^{a(1)}$ são cancelados por $\delta B_\mu^{a(2)}$, de forma que a variação total de $B_\mu^a(\xi)$ pode ser escrita como

$$\delta B_\mu^a(\xi) = D_\mu^{ab} \epsilon^b + g f^{acb} B_\mu^c(\xi) \epsilon^b + \mathcal{O}(\xi^2 \epsilon). \quad (\text{B.16})$$

Isto mostra que $B_\mu^a(\xi)$ transforma como um campo de calibre na representação adjunta, ordem a ordem na expansão em ξ .

Definindo então

$$C_\mu^a \equiv A_\mu^a - B_\mu^a(\xi), \quad (\text{B.17})$$

a variação de C_μ^a é

$$\delta C_\mu^a = \delta A_\mu^a - \delta B_\mu^a = D_\mu^{ab} \epsilon^b - (D_\mu^{ab} \epsilon^b + g f^{acb} B_\mu^c \epsilon^b) + \mathcal{O}(\xi^2 \epsilon), \quad (\text{B.18})$$

o que leva a

$$\delta C_\mu^a = -g f^{acb} B_\mu^c \epsilon^b = g f^{acb} C_\mu^c \epsilon^b + \mathcal{O}(\xi^2 \epsilon), \quad (\text{B.19})$$

onde, na última igualdade, usamos $C_\mu^a = A_\mu^a - B_\mu^a$. Assim, C_μ^a transforma covariantemente no adjunto:

$$\delta C_\mu^a = g f^{acb} C_\mu^c \epsilon^b. \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, a parte de massa pode ser escrita como

$$L_m = \frac{m^2}{2} C_\mu^a C_\mu^a, \quad (\text{B.21})$$

cujas variação é

$$\delta L_m = m^2 C_\mu^a \delta C_\mu^a = m^2 C_\mu^a g f^{acb} C_\mu^c \epsilon^b. \quad (\text{B.22})$$

Como $C_\mu^a C_\mu^c$ é simétrico em (a, c) e f^{acb} é antissimétrico, temos

$$C_\mu^a C_\mu^c f^{acb} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta L_m = 0. \quad (\text{B.23})$$

Portanto, o termo de massa é invariante de calibre, e como o termo de Yang–Mills também o é, concluímos que a Lagrangiana L_I em (B.1) é invariante sob as transformações de calibre locais simultâneas de A_μ^a e ξ^a consideradas acima.

REFERÊNCIAS

- 1 DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. [S.l.]: Courier Corporation, 2001. v. 2.
- 2 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Gauge invariance and degree of freedom count. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 332, p. 169–188, 1990.
- 3 ABREU, E. M. et al. Restoring gauge invariance in non-abelian second-class theories. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 53, n. 3, p. 71, 2023.
- 4 COSTA, C. N.; NETO, J. A.; ALVES, P. R. F. Gauge invariant formulation of the massive $su(n)$ yang-mills model via the improved gauge unfixing formalism. **Europhysics Letters**, 2026. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/ae8571>>.
- 5 ALVES, P. R. F. et al. Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive carroll-field-jackiw model. **EPL**, v. 131, n. 3, p. 31004, 2020.
- 6 SORELLA, S. P. **Gribov ambiguities and operator product expansion in Yang-Mills theories**. 2011. Lecture Notes.
- 7 WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields: Foundations**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 1. Edição em inglês. ISBN 978-0521670531.
- 8 HUBER, M. Q. Nonperturbative properties of yang-mills theories. **Physics Reports**, v. 879, p. 1–92, 2020. ISSN 0370-1573. Nonperturbative properties of Yang-Mills theories. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157320301678>>.
- 9 VYTHEESWARAN, A. S. Gauge unfixing in second class constrained systems. **Annals Phys.**, v. 236, p. 297–324, 1994.
- 10 VYTHEESWARAN, A. S. Gauge invariances in the procia model. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 13, p. 765–778, 1998.
- 11 BARCELOS-NETO, J.; WOTZASEK, C. Faddeev-Jackiw quantization and constraints. **International Journal of Modern Physics A**, v. 7, n. 20, p. 4981–5003, 1992.
- 12 ANDRADE, M. A. D.; NEVES, C.; SILVA, E. V. C. Barcelos-Wotzasek Symplectic Algorithm for Constrained Systems Revisited. **Brazilian Journal of Physics**, v. 54, p. 228, 2024.
- 13 NETO, J. A. An improved gauge unfixing formalism and the abelian pure chern simons theory. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 37, p. 1106–1110, 2007.
- 14 VYTHEESWARAN, A. S. Gauge invariances in the procia model. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 13, p. 765–778, 1998.
- 15 NEVES, C.; WOTZASEK, C. Stückelberg field-shifting quantization of free particle on a d -dimensional sphere. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 33, p. 1–10, 2000.

- 16 RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M. The stueckelberg field. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 19, p. 3265–3348, 2004.
- 17 NETO, J. B. **Matemática para físicos com aplicações: volume 2, tratamentos clássico e quântico**. [S.l.]: LF Editorial, 2011. ISBN 978-8588325805.
- 18 DIRAC, P. A. M. Homogeneous variables in classical dynamics. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 29, n. 3, p. 389–400, 1933.
- 19 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. [S.l.]: Princeton university press, 1994.
- 20 MITRA, P.; RAJARAMAN, R. New results on systems with second-class constraints. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 203, p. 137–156, 1990.
- 21 BATALIN, I.; TYUTIN, I. An infinite algebra of quantum dirac brackets. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 381, p. 619–640, 1992.
- 22 ALVES, P. R. F. et al. Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive carroll-field-jackiw model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 131, p. 31004, 2020.
- 23 NETO, J. B. **Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Spinores**. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. v. 2.
- 24 NETO, J. A. The gauge unfixing formalism and the solutions of the dirac bracket commutators. 2009.
- 25 CASANA, R.; JR, M. M. F.; RODRIGUES, J. S. Lorentz-violating contributions of the carroll-field-jackiw model to the cmb anisotropy. **Physical Review D**, APS, v. 78, p. 125013, 2008.
- 26 APAZA, Y. S. **Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018.
- 27 ABERS, E. S.; LEE, B. W. Gauge Theories. **Phys. Rept.**, v. 9, p. 1–141, 1973.
- 28 BAILIN, D.; LOVE, A. **Introduction to Gauge Field Theory**. Bristol: IOP Publishing Ltd, 1986.
- 29 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, v. 13, n. 16, p. 508–509, 1964.
- 30 ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. **Physical Review Letters**, v. 13, n. 9, p. 321–323, 1964.
- 31 NETO, J. B. **Teoria de Campos e a Natureza: Parte quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. ISBN 978-8578614485.
- 32 STUECKELBERG, E. C. G. Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass. **Helv. Phys. Acta**, v. 30, p. 209–215, 1957.
- 33 STUECKELBERG, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. **Helv. Phys. Acta**, v. 11, p. 299–328, 1938.

- 34 GROSSE-KNETTER, C.; KÖGERLER, R. Gauge invariance of the Proca action. **Phys. Rev. D**, v. 48, p. 2865–2872, 1993.
- 35 GONCALVES, B. et al. Converting the Proca model into a first-class system. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 065034, 2008.
- 36 CORNWALL, J. M. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. **Physical Review D**, v. 26, p. 1453–1478, 1982.
- 37 GREENSITE, J. The confinement problem in lattice gauge theory. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 51, p. 1–83, 2003.
- 38 DUDAL, D. et al. The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge. **Physical Review D**, v. 72, p. 014016, 2005.
- 39 CAPRI, M. A. L. et al. On the gauge-invariant operator $a_{\min}^2$ in euclidean yang-mills theories. In: **Nucl. Part. Phys. Proc.** [S.l.: s.n.], 2016. v. 282-284, p. 163–167.
- 40 HERMAN, R. Method for calculating the imaginary part of the hadamard elementary function $G^{(1)}$ in static, spherically symmetric spacetimes. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 084028, Sep 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.084028>>.
- 41 MCKEON, D. G. C. The first-order formalism for yang–mills theory. **Canadian Journal of Physics**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 72, n. 9-10, p. 601–607, 1994.
- 42 MITRA, P.; RAJARAMAN, R. New results on systems with second-class constraints. **Annals of Physics**, v. 203, p. 137–156, 1990.
- 43 VYTHEESWARAN, A. S. Gauge unfixing in second-class constrained systems. **Annals of Physics**, v. 236, p. 297–324, 1994.
- 44 NETO, J. A. Improved gauge unfixing formalism and the Abelian massive theories. **Brazilian Journal of Physics**, v. 37, p. 1106–1111, 2007.
- 45 DIRAC, P. A. M. **Lectures on Quantum Mechanics**. New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- 46 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of Gauge Systems**. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- 47 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. Operator quantization of dynamical systems with irreducible first and second class constraints. **Phys. Lett. B**, v. 180, p. 157–162, 1986.
- 48 BATALIN, I. A.; TYUTIN, I. V. Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with abelian conversion of second class constraints. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 6, p. 3255–3282, 1991.
- 49 VYTHEESWARAN, A. S. Hidden symmetries in second-class constrained systems: Are new fields necessary? **International Journal of Modern Physics A**, v. 17, n. 28, p. 4095–4111, 2002.

- 50 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S.; TYUTIN, I. V. Covariant quantization of gauge theories in the framework of extended BRST symmetry. **Nuclear Physics B**, v. 314, p. 158–174, 1989.
- 51 ANISHETTY, R.; VYTHEESWARAN, A. S. Gauge invariance in second class constrained systems. **J. Phys. A**, v. 26, p. 5613–5620, 1993.
- 52 NETO, J. A. The gauge unfixing formalism and the solutions of the dirac bracket commutators. **Brazilian Journal of Physics**, 2009.
- 53 BANERJEE, R.; BARCELOS-NETO, J. Hamiltonian embedding of the massive yang-mills theory and the generalized stuckelberg formalism. **Nucl. Phys. B**, v. 499, p. 453–478, 1997.
- 54 SKYRME, T. H. R. A nonlinear field theory. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 260, p. 127–138, 1961.
- 55 OLIVEIRA, W.; NETO, J. A. The nonabelian bft formalism on the collective coordinates quantization of the $su(2)$ skyrme model. **Nucl. Phys. B**, v. 533, p. 611–626, 1998.
- 56 DRAGON, N.; HURTH, T.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Polynomial form of the stuckelberg model. In: **Nucl. Phys. B Proc. Suppl.** [S.l.: s.n.], 1997. v. 56, p. 318–321.
- 57 BANERJEE, N.; GHOSH, S.; BANERJEE, R. Quantization of $o(n)$ invariant nonlinear sigma model in the batalin-tyutin formalism. **Nucl. Phys. B**, v. 417, p. 257–266, 1994.
- 58 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. Operational quantization of dynamical systems subject to second class constraints. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 279, p. 514–528, 1987.
- 59 PARK, M.-I.; PARK, Y.-J. Note on the abelian pure cs theory based on the improved bft method. 1997.
- 60 DIRAC, P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics. **Can. J. Math.**, v. 2, p. 129–148, 1950.
- 61 DIRAC, P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 246, p. 326–332, 1958.
- 62 MONEMZADEH, M. et al. Gauging of non-abelian chern–simons model. **Modern Physics Letters A**, v. 29, n. 05, p. 1450028, 2014.
- 63 ALAVIJEH, P. S.; TAZIMI, N.; MONEMZADEH, M. Calculation of masses of heavy pentaquark using the nu method. **Indian Journal of Physics**, Springer, v. 95, n. 9, p. 1903–1908, 2021.