

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Yuri Soncco Apaza

Cosmologia Não Comutativa: Dinâmica Clássica dos Modelos de Bianchi I e
III e Nucleação Quântica no Modelo FLRW

Juiz de Fora

2026

Yuri Soncco Apaza

**Cosmologia Não Comutativa: Dinâmica Clássica dos Modelos de Bianchi I e
III e Nucleação Quântica no Modelo FLRW**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Soncco Apaza, Yuri.

Cosmologia Não Comutativa: Dinâmica Clássica dos Modelos de Bianchi
I e III e Nucleação Quântica no Modelo FLRW / Yuri Soncco Apaza.
– 2026.

146 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de
Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2026.

1. cosmologia não-comutativa. 2. modelos de Bianchi. 3. cosmologia
quântica. 4. equação de Wheeler–DeWitt. 5. tunelamento quântico. I.
Oliveira Neto, Gil de, orient. II. Título.

Yuri Soncco Apaza

Cosmologia Não Comutativa: Dinâmica Clássica dos Modelos de Bianchi I e III e Nucleação Quântica no Modelo FLRW

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 18 de junho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 17/06/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 18/06/2026, às 17:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Gimenes Alvarenga, Usuário Externo**, em 18/06/2026, às 18:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto, Servidor(a)**, em 18/06/2026, às 18:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Membro**, em 18/06/2026, às 18:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sergio Vitorino de Borba Gonçalves, Usuário Externo**, em 19/06/2026, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3034588** e o código CRC **A6467C4F**.

Dedico este trabalho à Celia Tintaya Pajsi.

AGRADECIMENTOS

- Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, pelo apoio contínuo em todas as etapas, incluindo auxílio para participação em eventos e concessão de diárias.
- Ao Programa de Bolsas de Pós-Graduação (PBPG) e, posteriormente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento desta pesquisa.
- Ao Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto, pela orientação competente, atenta e sempre presente ao longo de todo o doutorado, com quem tive a oportunidade de aprender imensamente.
- Aos amigos que o Departamento de Física me proporcionou, pela convivência, pelo apoio e pela amizade ao longo desta jornada: A. Luisa, A. Lidia, Raina, Lizbeth, Diego C., Pablo C., Antonio K., Lucas, Henrique, Marlon, Isaac, Alan C., Benny G., Thiago M. e Ruben.
- Às minhas amigas, pelo apoio emocional e pela compreensão diante das minhas ausências durante este período: Milena Lucia M., Amanda Moriel T., e Leidlaine Medeiros.
- À minha irmã Yobana S. A., pelo apoio econômico e pelo respaldo emocional incondicional; aos meus sobrinhos Jean Marco M. S., Venilda M. S. e Hinelda M. S., por serem minha alegria e apoio emocional durante este período; e ao meu cunhado Santiago M. S. e aos meus irmãos Juvenal S. A. e Wilber S. A., pelos bons desejos.
- Ao meu pai, Demetrio Soncco Soncco, por ser meu pilar e apoio incondicional em cada etapa deste caminho; e à minha mãe, Delfina Apaza Luque (†), cuja memória e amor permanecem como luz que guia a minha vida.

RESUMO

A compreensão do Universo primitivo requer estender o arcabouço da Relatividade Geral para regimes onde os efeitos da gravidade quântica e as possíveis modificações da estrutura do espaço-tempo se tornam relevantes. O objetivo principal desta tese é estudar o papel da não comutatividade na cosmologia primordial por meio de duas abordagens complementares. No regime clássico, analisamos a dinâmica clássica de modelos de Bianchi I e III simétricos e localmente rotacionais (LRS) não-comutativos na era de radiação, avaliando o impacto do parâmetro não-comutativo (NC) γ sobre a expansão, a isotropização e sua evolução temporal sob a hipótese de um Universo homogêneo e isotrópico. Empregamos uma formulação hamiltoniana no formalismo ADM com um fluido de radiação descrito por meio do formalismo de Schutz, introduzindo a não comutatividade por meio de uma deformação da álgebra de Poisson entre as variáveis canônicas, o que permite incorporar correções geométricas às equações dinâmicas. Os resultados indicam que γ altera significativamente a dinâmica, com uma influência maior em estágios iniciais, favorecendo a expansão e a isotropização para valores negativos e produzindo comportamentos semelhantes entre os modelos de Bianchi I e III. No regime quântico, estudamos a nucleação quântica do Universo em um modelo FLRW em um minisuperspaço NC, analisando como o parâmetro NC ε modifica a equação de Wheeler–DeWitt (WDW) e a probabilidade de tunelamento. Formulamos um modelo FLRW fechado com constante cosmológica $\Lambda > 0$, no qual a não comutatividade no setor dos momentos canônicos conduz, após uma transformação unitária de fase, a uma equação de WDW do tipo Schrödinger. Ao analisar o processo de tunelamento por meio da aproximação WKB e do método numérico de Crank–Nicolson, observamos que valores de $\varepsilon < 0$ reduzem a altura e a largura da barreira de potencial, aumentando a probabilidade de nucleação, efeito que se intensifica com o aumento da energia de radiação E e de Λ . Em conclusão, as deformações não comutativas do minisuperspaço constituem uma extensão consistente para o estudo da cosmologia primordial, influenciando tanto os mecanismos de isotropização clássica quanto as condições iniciais mais prováveis para o “nascimento” do Universo.

Palavras-chave: cosmologia não-comutativa; modelos de Bianchi; cosmologia quântica; equação de Wheeler–DeWitt; tunelamento quântico.

ABSTRACT

Understanding the primordial Universe requires extending the framework of General Relativity to regimes in which the effects of quantum gravity and possible modifications of the structure of spacetime become relevant. The main objective of this thesis is to investigate the role of noncommutativity in primordial cosmology through two complementary approaches. In the classical regime, we analyze the dynamics of noncommutative locally rotationally symmetric (LRS) Bianchi I and III models during the radiation era, evaluating the impact of the noncommutative (NC) parameter γ on the expansion, isotropization, and its temporal evolution under the assumption of a homogeneous and isotropic Universe. We employ a Hamiltonian formulation within the ADM formalism, with a radiation fluid described through the Schutz formalism, introducing noncommutativity through a deformation of the Poisson algebra between the canonical variables, which allows geometric corrections to be incorporated into the dynamical equations. The results indicate that γ significantly modifies the dynamics, with a stronger influence at early stages, favoring expansion and isotropization for negative values and producing similar behaviors in both Bianchi I and III models. In the quantum regime, we study the quantum nucleation of the Universe in an FLRW model within a noncommutative minisuperspace, analyzing how the NC parameter ε modifies the Wheeler–DeWitt (WDW) equation and the tunneling probability. We formulate a closed FLRW model with a positive cosmological constant $\Lambda > 0$, in which noncommutativity in the canonical momentum sector leads, after a unitary phase transformation, to a Schrödinger-type WDW equation. By analyzing the tunneling process through the WKB approximation and the Crank–Nicolson numerical method, we observe that values of $\varepsilon < 0$ reduce both the height and width of the potential barrier, increasing the nucleation probability, an effect that becomes stronger as the radiation energy E and Λ increase. In conclusion, noncommutative deformations of minisuperspace constitute a consistent extension for the study of primordial cosmology, influencing both the mechanisms of classical isotropization and the most probable initial conditions for the “birth” of the Universe.

Keywords: noncommutative cosmology; Bianchi models; quantum cosmology; Wheeler–DeWitt equation; quantum tunneling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Campo vetorial dt que evolui da hipersuperfície Σ_t até a hipersuperfície Σ_{t+dt} .
 36
- Figura 2 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e $T_c(0) = 0$. Para cada valor selecionado de $\gamma = \{0, -0.2, 0.2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.58747, 5.43337, 7.74158\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 65
- Figura 3 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $C = \{0, 1, 3\}$, o valor correspondente de $\dot{\beta}_c(0) = \{5.78536, 5.50429, 4.8607\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 67
- Figura 4 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $a_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 15.5508, 28.1657\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 69
- Figura 5 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{a}_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 14.7829, 25.9576\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 70
- Figura 6 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.05$. Para cada valor selecionado de $\beta_c(0) = \{1, 5, 10\}$, o valor correspondente de $C = \{6.2990, 102.7980, 2920.6400\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 72
- Figura 7 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{\beta}_c(0) = \{1, 2, 3\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 7.0085, 6.51328\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. 73

- Figura 8 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e $T_c(0) = 0$. Para cada valor selecionado de $\gamma = \{0, -0.2, 0.2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.3040, 6.1499, 8.4581\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 75
- Figura 9 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $C = \{0, 1, 3\}$, o valor correspondente de $\dot{\beta}_c(0) = \{5.9746, 5.70785, 5.1066\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 77
- Figura 10 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $a_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 17.163, 31.0318\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. 79
- Figura 11 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{a}_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 15.4994, 26.6742\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. 80
- Figura 12 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.05$. Para cada valor selecionado de $\beta_c(0) = \{1, 5, 10\}$, o valor correspondente de $C = \{7.0155, 102.9870, 2920.6700\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. 82
- Figura 13 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{\beta}_c(0) = \{1, 2, 3\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 7.7250, 7.2298\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. 83
- Figura 14 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.1$. Para as geometrias negativa ($\kappa = -1$) e plana ($\kappa = 0$), o valor correspondente de $C = \{6.0104, 6.7269\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros. 85

Figura 15 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e o parâmetro NC $\gamma = 0.1$. Para as geometrias negativa ($\kappa = -1$) e plana ($\kappa = 0$), o valor correspondente de $C = \{7.1645, 7.8811\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	86
Figura 16 – Densidade de probabilidade $ \Psi(a, t_{\max}) ^2$ como função do fator de escala a para diferentes valores de ε , $\Lambda = 0.01$ e $E = 210$, no instante $t_{\max}$, quando Ψ atinge $a = 35$, valor que é adotado como uma aproximação numérica de $a \rightarrow \infty$	102
Figura 17 – Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(a)$ como função de a para diferentes valores de ε . .	103
Figura 18 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função do parâmetro NC ε , para $E = 218$ e $\Lambda = 0.01$	106
Figura 19 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função de Λ , para $E = 140$ e $\varepsilon = -0.5$. . .	108
Figura 20 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função de E , para $\varepsilon = -0.5$ e $\Lambda = 0.01$. . .	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 2, para diferentes instantes de tempo t , com $\gamma = 0$ na parte superior, $\gamma = -0.2$ na parte central e $\gamma = 0.2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	66
Tabela 2	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 3, para diferentes instantes de tempo t , com $C = 0$ na parte superior e $C = 3$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	68
Tabela 3	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 4, para diferentes instantes de tempo t , com $a_c(0) = 1$ na parte superior e $a_c(0) = 2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	69
Tabela 4	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 5, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{a}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{a}_c(0) = 2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	71
Tabela 5	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 6, para diferentes instantes de tempo t , com $\beta_c(0) = 1$ na parte superior e $\beta_c(0) = 10$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	72
Tabela 6	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 7, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{\beta}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{\beta}_c(0) = 3$ na parte inferior.	74
Tabela 7	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 8, para diferentes instantes de tempo t , com $\gamma = 0$ na parte superior, $\gamma = -0.2$ na parte central e $\gamma = 0.2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	76
Tabela 8	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 9, para diferentes instantes de tempo t , com $C = 0$ na parte superior e $C = 3$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.	78
Tabela 9	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 10, para diferentes instantes de tempo t , com $a_c(0) = 1$ na parte superior e $a_c(0) = 2$ na parte inferior.	79
Tabela 10	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 11, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{a}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{a}_c(0) = 2$ na parte inferior.	81
Tabela 11	– Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 12, para diferentes instantes de tempo t , com $\beta_c(0) = 1$ na parte superior e $\beta_c(0) = 10$ na parte inferior.	82

Tabela 12 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 13, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{\beta}(0) = 1$ na parte superior e $\dot{\beta}(0) = 3$ na parte inferior.	84
Tabela 13 – Valores numéricos do fator de escala a_{nc} , da idade cósmica t e do parâmetro NC γ . Os pares (t_1, γ_1) e (t_2, γ_2) correspondem a $H_0 = 67.4$ km/s/Mpc [145] e $H_0 = 73.3$ km/s/Mpc [146], respectivamente. A comparação ilustra a sensibilidade do parâmetro NC à escolha de H_0 e seu comportamento ao longo de diferentes épocas da evolução cósmica.	90
Tabela 14 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de ε , com $E = 218$ e $\Lambda = 0.01$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$. . .	105
Tabela 15 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de Λ , com $\varepsilon = -0.5$ e $E = 140$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 31.85$. .	107
Tabela 16 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de E , com $\varepsilon = -0.5$ e $\Lambda = 0.01$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$. . .	109

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADM	Arnowitt-Deser-Misner
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
RG	Relatividade Geral
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i> (Fundo Cósmico de Micro-ondas)
Λ CDM	<i>Lambda Cold Dark Matter</i> (modelo cosmológico padrão com constante cosmológica e matéria escura fria)
LRS	<i>Locally Rotationally Symmetric</i> (localmente rotacionalmente simétrico)
WDW	Wheeler-DeWitt
WKB	Wentzel-Kramers-Brillouin
NC	Não comutativo(a)
CN	Crank-Nicolson
CDM	<i>Cold Dark Matter</i> (matéria escura fria)
BI	Bianchi tipo I
BIII	Bianchi tipo III
KS	Kantowski-Sachs
RRG	<i>Reduced Relativistic Gas</i> (gás relativístico reduzido)
LQC	<i>Loop Quantum Cosmology</i> (cosmologia quântica em laços)
TP	<i>Tunneling Probability</i> (Probabilidade de Tunelamento)

CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

- Adotamos unidades naturais, nas quais $c = k_B = \hbar = 1$, salvo indicação em contrário.
- Em seções com análise cosmológica, toma-se $8\pi G = 1$ para simplificar as equações de campo de Einstein.
- A métrica do espaço-tempo possui assinatura $(-, +, +, +)$, conforme usual em Cosmologia.
- Utilizamos a convenção de soma de Einstein para índices repetidos, salvo indicação em contrário.
- Índices gregos $\mu, \nu, \rho, \dots$ variam de 0 a 3 e denotam coordenadas do espaço-tempo.
- Índices latinos $i, j, k, \dots$ variam de 1 a 3 e denotam coordenadas espaciais.
- A métrica do espaço-tempo é denotada por $g_{\mu\nu}$, enquanto a métrica espacial induzida sobre as hipersuperfícies é representada por h_{ij} .
- O símbolo $\equiv$ será utilizado para indicar definições, ou seja, notações introduzidas por convenção.
- As derivadas parciais de um campo A são representadas por $\partial_\mu A$ ou, de forma abreviada, por uma vírgula subscrita na forma $A_{,\nu}$.
- As derivadas covariantes são indicadas por $\nabla_\mu A$, ou, alternativamente, por um ponto-e-vírgula subscrito na forma $A_{;\nu}$.
- Os símbolos de Christoffel são denotados por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.
- A decomposição 3+1 segue o formalismo ADM, com N representando a função *lapse* e N^i o vetor *shift*.
- O escalar de curvatura tridimensional é indicado por ${}^{(3)}R$, e os símbolos de Christoffel por ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$.
- O parâmetro γ representa a não comutatividade no regime clássico.
- O parâmetro ε representa a não comutatividade no regime quântico.

PRODUÇÃO CIENTÍFICA VINCULADA À TESE

1. OLIVEIRA-NETO, G.; SONCCO APAZA, Y. *Noncommutative Bianchi I and III Cosmology Models: Radiation Era Dynamics and γ Estimation*. Universe, v. 11, n. 12, p. 408, 2025.
2. SONCCO APAZA, Y. *Impact of Noncommutativity on the Birth of the Universe: WKB and Numerical Approaches*. In: XI Workshop da Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2025, Juiz de Fora. Centro de Ciências da UFJF. Apresentação oral (Apresentação feita pelo autor da tese).
3. OLIVEIRA-NETO, G.; SONCCO APAZA, Y. *Modelo cosmológico de Bianchi tipo I não-comutativo com fluido de radiação*. In: XI Encontro Mineiro de Física, 2024, Lavras. Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG. Apresentação de pôster (Apresentação feita pelo autor da tese).
4. OLIVEIRA-NETO, G.; SONCCO APAZA, Y. *Non-Commutative Bianchi III Cosmological Model with Radiation*. In: IV Encontro de Primavera da SBF (EPSBF), 2024, Belo Horizonte. Universidade Federal de Minas Gerais, Campus Pampulha. Apresentação de pôster (Apresentação feita pelo autor da tese).
5. OLIVEIRA-NETO, G.; SONCCO APAZA, Y. *Modelo Cosmológico Bianchi III Não Comutativo com Radiação*. In: X Workshop da Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2024, Juiz de Fora. Centro de Ciências da UFJF. Apresentação oral (Apresentação feita pelo autor da tese).

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	ALGUNS ELEMENTOS DA COSMOLOGIA RELATIVISTA E MODELOS ANISOTRÓPICOS	23
2.1	ALGUNS ELEMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL APLICADA À COS- MOLOGIA	23
2.1.1	Equações de Einstein em Cosmologia	23
2.1.2	O princípio cosmológico	24
2.1.3	O modelo homogêneo e isotrópico: métrica FLRW	25
2.1.3.1	<i>Tempo conforme</i>	25
2.1.3.2	<i>Desvio para o vermelho</i>	26
2.1.4	Equações de Friedmann	28
2.1.4.1	<i>Matéria e radiação</i>	29
2.1.4.2	<i>Energia do vácuo</i>	29
2.1.4.3	<i>Densidade crítica e parâmetros de densidade</i>	30
2.1.4.4	<i>Idade do Universo</i>	31
2.2	MOTIVAÇÃO FÍSICA PARA MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPI- COS	33
2.2.1	Aspectos teóricos e isotropização	33
2.2.2	Evidências observacionais e anomalias no CMB	33
2.2.3	Panorama geométrico dos modelos anisotrópicos	34
3	FORMALISMO ADM E FORMALISMO DE SCHUTZ	35
3.1	FORMALISMO ADM	35
3.1.1	Decomposição 3+1 do espaço-tempo e métrica induzida	35
3.1.2	Curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais	38
3.1.3	Lagrangiano e Hamiltoniano ADM	41
3.2	FLUIDO PERFEITO NO FORMALISMO DE SCHUTZ	45
4	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA E NÃO COMUTATIVIDADE NO ESPAÇO DE FASE	47
4.1	PARÊNTESES DE POISSON E QUANTIZAÇÃO CANÔNICA	47
4.2	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA E EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT	48
4.3	QUANTIZAÇÃO POR DEFORMAÇÃO E PRODUTO ESTRELA	50
4.4	PROBLEMAS DE INTERPRETAÇÃO NA QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA GRAVIDADE	52
5	MODELOS NÃO COMUTATIVOS DE BIANCHI I E III NA ERA DA RADIAÇÃO: DINÂMICA E ESTIMATIVA DE γ	53
5.1	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO MODELO COSMOLÓGICO LRS	53
5.2	DINÂMICA HAMILTONIANA NÃO COMUTATIVA DO MODELO LRS	58

5.3	EVOLUÇÃO DO MODELO LRS NÃO COMUTATIVO DOMINADO POR RADIAÇÃO: ANÁLISE NUMÉRICA	62
5.3.1	Para o caso $\kappa = -1$	63
5.3.1.1	<i>Variação do parâmetro NC γ</i>	64
5.3.1.2	<i>Variação de C</i>	66
5.3.1.3	<i>Variação de $a_c(0)$</i>	68
5.3.1.4	<i>Variação de $\dot{a}_c(0)$</i>	70
5.3.1.5	<i>Variação de $\beta_c(0)$</i>	71
5.3.1.6	<i>Variação de $\dot{\beta}_c(0)$</i>	73
5.3.2	Para o caso $\kappa = 0$	74
5.3.2.1	<i>Variação do parâmetro NC γ</i>	74
5.3.2.2	<i>Variação de C</i>	76
5.3.2.3	<i>Variação de $a_c(0)$</i>	78
5.3.2.4	<i>Variação de $\dot{a}_c(0)$</i>	80
5.3.2.5	<i>Variação de $\beta_c(0)$</i>	81
5.3.2.6	<i>Variação de $\dot{\beta}_c(0)$</i>	83
5.3.3	Para o caso $\kappa = 1$	84
5.3.4	Influência da curvatura espacial na dinâmica NC	84
5.3.4.1	<i>Caso do parâmetro NC negativo ($\gamma < 0$)</i>	85
5.3.4.2	<i>Caso do parâmetro NC positivo ($\gamma > 0$)</i>	86
5.4	EVOLUÇÃO DO FATOR DE ESCALA NC E ESTIMATIVA COSMOLÓGICA DO PARÂMETRO γ	87
5.4.1	Formulação dinâmica e evolução do fator de escala NC	87
5.4.2	Estimativas numéricas de γ com dados cosmológicos	89
6	EFEITO TÚNEL QUÂNTICO EM COSMOLOGIA NÃO COMUTATIVA COM MATÉRIA E CONSTANTE COSMOLÓGICA 91	
6.1	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO MODELO Λ -FLRW COM FLUIDO PERFEITO	91
6.2	FORMULAÇÃO QUÂNTICA NÃO COMUTATIVA DO MODELO	94
6.3	TRATAMENTO SEMICLÁSSICO E NUMÉRICO DO EFEITO TÚNEL QUÂNTICO	97
6.3.1	Solução semiclássica WKB	97
6.3.2	Probabilidade de tunelamento WKB	97
6.3.3	Solução numérica da equação de Wheeler-DeWitt	98
6.3.3.1	<i>Condições inicial e de fronteira</i>	98
6.3.3.2	<i>Método de Crank-Nicolson e formulação numérica</i>	99
6.3.3.3	<i>Densidade de probabilidade em função do fator de escala</i>	101
6.3.4	Probabilidade de tunelamento numérica	103

6.3.5	Contraste entre as probabilidades de tunelamento WKB e integrada	103
6.3.6	Probabilidade de tunelamento e parâmetros do modelo	104
6.3.6.1	<i>Dependência da probabilidade de tunelamento com ε</i>	104
6.3.6.2	<i>Dependência da probabilidade de tunelamento com Λ</i>	106
6.3.6.3	<i>Dependência da probabilidade de tunelamento com E</i>	108
7	CONCLUSÃO	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A – Inversa da métrica ADM por meio da fórmula de Banachiewicz	125
	APÊNDICE B – Determinante da métrica ADM por meio da fórmula de Banachiewicz	127
	APÊNDICE C – Momento canônico conjugado a h_{ab}	129
	APÊNDICE D – Obtenção da densidade hamiltoniana ADM em função do momento canônico Π^{ij}	131
	APÊNDICE E – Obtenção de $p(\mu, s)$ a partir da primeira lei da termodinâmica relativista	134
	APÊNDICE F – Cálculo explícito da combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica LRS	136
	APÊNDICE G – Cálculo explícito do escalar de curvatura tridimensional ${}^{(3)}R$ para a métrica LRS	138
	APÊNDICE H – Cálculo explícito da combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica FLRW	140
	APÊNDICE I – Cálculo explícito de curvatura intrínseca ${}^{(3)}R$ para a métrica FLRW	142
	APÊNDICE J – Aproximação WKB para a equação de Wheeler-DeWitt	145

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da cosmologia moderna consiste em compreender a física que governa os instantes iniciais do Universo. No contexto da Relatividade Geral, a evolução cosmológica conduz, sob hipóteses físicas razoáveis, ao aparecimento de uma singularidade inicial, como estabelecem os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose [1, 2]. No entanto, em um regime caracterizado por densidades de energia e curvaturas extremamente altas, espera-se que a descrição clássica do espaço-tempo deixe de ser válida e que os efeitos da gravidade quântica se tornem dominantes [3, 4]. Nesse contexto, a geometria do espaço-tempo poderia apresentar fortes flutuações quânticas em escalas extremamente pequenas, dando origem a uma estrutura conhecida como “espuma quântica” (*spacetime foam*), conceito introduzido originalmente por Wheeler [5]. Diversas abordagens para a gravidade quântica, como a teoria de cordas e a teoria M [6, 7], bem como a gravidade quântica em laços [8, 9], sugerem que, próximo à escala de Planck, a estrutura do espaço-tempo poderia diferir substancialmente daquela prevista pela teoria clássica. Em certos limites da teoria de cordas emergem estruturas geométricas não comutativas [10, 11]. Uma forma efetiva de modelar essa possibilidade consiste em recorrer à geometria NC, introduzida originalmente por Snyder [12] e posteriormente desenvolvida no arcabouço matemático de Connes [13], na qual as coordenadas do espaço-tempo deixam de satisfazer as relações de comutação usuais, o que reforça sua relevância como ferramenta para descrever a física do Universo primordial.

Ainda que a estrutura fundamental do espaço-tempo não esteja completamente estabelecida, diversos argumentos teóricos e observacionais sugerem que o Universo primitivo pode ter sido muito menos simples do que aquele descrito pelo modelo cosmológico padrão (Λ CDM, *Lambda Cold Dark Matter*). Em grandes escalas, o Universo atual é notavelmente bem descrito pelo modelo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), que assume homogeneidade e isotropia espaciais [14, 15]. No entanto, não existe razão fundamental para supor que essas simetrias tenham estado presentes desde as etapas mais iniciais da evolução cósmica. Pelo contrário, em um regime dominado por processos quânticos gravitacionais e por condições iniciais extremas, torna-se natural considerar que o Universo pode ter emergido em um estado anisotrópico e até mesmo inhomogêneo [16, 17]. A partir dessa perspectiva, uma questão central na cosmologia teórica consiste em compreender como um Universo inicialmente anisotrópico pôde evoluir para o estado quase isotrópico observado atualmente. O problema da isotropização adquire, assim, um papel fundamental, pois conecta a física do Universo primordial com a estrutura global do Universo atual.

Modelos cosmológicos homogêneos anisotrópicos fornecem um quadro natural para estudar a possível evolução de um Universo primordial anisotrópico em direção ao estado quase isotrópico observado atualmente. Entre eles, alguns modelos de Bianchi

[18] constituem uma classe particularmente importante, pois generalizam o caso FLRW preservando a homogeneidade espacial, mas permitindo diferentes formas de anisotropia [19, 20]. Diversos trabalhos mostraram que, sob condições físicas apropriadas, tais Universos podem evoluir para estados isotrópicos; por exemplo, Wald demonstrou que modelos anisotrópicos inicialmente em expansão, na presença de uma constante cosmológica positiva, tendem assintoticamente a uma solução do tipo de Sitter [21]. Outros estudos indicaram que efeitos como a presença de radiação, viscosidade cósmica, campos escalares ou energia escura podem favorecer o processo de isotropização [22–25]. Além dessas motivações teóricas, cenários anisotrópicos também são discutidos no contexto observacional devido a possíveis anomalias na radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), como o baixo momento quadrupolar e alinhamentos em grande escala [26–35]. Nesse contexto, os modelos de Bianchi fornecem um quadro geométrico útil para investigar de que forma pequenos desvios da isotropia poderiam influenciar observáveis cosmológicos ou deixar vestígios na estrutura em grande escala do Universo [36, 37].

Entre os modelos anisotrópicos, os casos de Bianchi I e Bianchi III são especialmente relevantes para o presente trabalho. O modelo de Bianchi I constitui a generalização homogênea anisotrópica mais simples do modelo FLRW plano e tem sido amplamente estudado em diversos contextos físicos, como na presença de fluidos viscosos, campos magnéticos, constantes cosmológicas, acoplamentos não minimais e campos escalares [38–42]. Nesses cenários investigam-se, em particular, a evolução da anisotropia e as condições sob as quais o modelo pode aproximar-se de um estado isotrópico. Por outro lado, o modelo de Bianchi III descreve um Universo anisotrópico com geometria espacial aberta e tem sido utilizado para analisar processos de isotropização, a dinâmica da energia escura e diversas extensões da gravitação padrão [43–46]. Também foram exploradas extensões quânticas desses modelos; por exemplo, na *Loop Quantum Cosmology* (LQC) encontrou-se que certos modelos de Bianchi, como o Bianchi I, podem evoluir para estados mais isotrópicos devido a correções quânticas que modificam a dinâmica do espaço-tempo no regime de alta curvatura [47, 48], enquanto outros trabalhos estudaram a quantização de modelos de Bianchi no marco da cosmologia quântica de minisuperspaço [49–53]. Em conjunto, esses resultados mostram que a anisotropia não é relevante apenas no nível clássico, mas também no regime quântico, onde pode influenciar a estrutura do espaço de estados, as condições de fronteira e a interpretação da função de onda do Universo, o que motiva considerar geometrias anisotrópicas para obter descrições mais gerais do Universo primitivo.

Nesse contexto, a não comutatividade do espaço-tempo emerge como uma das extensões mais promissoras para explorar possíveis correções efetivas à dinâmica cosmológica. Para além de sua formulação original em termos de coordenadas do espaço-tempo, em cosmologia torna-se particularmente natural introduzir a não comutatividade diretamente nas variáveis canônicas do minisuperspaço [54, 55]. Nessa abordagem, os efeitos não

comutativos são implementados por meio de uma deformação da álgebra de Poisson [56] entre as variáveis canônicas que descrevem os graus de liberdade geométricos e de matéria do sistema. Diferentemente do cenário comutativo, no qual as variáveis generalizadas e seus momentos conjugados satisfazem as relações de comutação canônicas usuais, o caso NC introduz parâmetros de deformação que modificam a estrutura simplética do sistema. Essa ideia foi introduzida na cosmologia na Ref. [54] e posteriormente desenvolvida em diferentes direções. Entre as principais consequências dessa deformação encontram-se modificações na evolução do fator de escala, na dinâmica anisotrópica, na presença de singularidades e na expansão cosmológica [55, 57–62]. A partir dessa perspectiva, a não comutatividade em minisuperspaço constitui uma ferramenta útil para examinar como uma deformação da estrutura canônica pode influenciar a dinâmica do Universo primordial.

Em particular, a implementação de estruturas não comutativas em modelos anisotrópicos tem sido estudada em diversos trabalhos recentes. Nesses casos, a deformação da álgebra canônica permite explorar diferentes trajetórias dinâmicas e investigar se as correções não comutativas podem favorecer a isotropização, modificar a expansão ou até mesmo contribuir para evitar singularidades [51, 52, 58]. Além disso, em alguns cenários cosmológicos, a não comutatividade também pode atuar como um mecanismo efetivo capaz de influenciar a expansão acelerada do Universo, sem a necessidade da introdução de componentes exóticos adicionais. Trabalhos existentes sobre modelos não comutativos de Bianchi I mostram que esse tipo de deformação pode alterar substancialmente a evolução do sistema [61, 62]. No entanto, o estudo de modelos anisotrópicos não comutativos ainda permanece limitado em vários aspectos. Em particular, a análise comparativa entre Universos planos e de curvatura negativa durante a era de radiação ainda é escassa, e a deformação NC do modelo de Bianchi III não recebeu a mesma atenção que outros casos. Essa situação fornece uma motivação direta para examinar, dentro de um mesmo marco formal, como a não comutatividade afeta a dinâmica de modelos cosmológicos anisotrópicos localmente rotacionalmente simétrico (LRS, *Locally Rotationally Symmetric*) do tipo Bianchi I (BI), Bianchi III (BIII) e Kantowski–Sachs (KS) [63–66], considerando um fluido de radiação como conteúdo material dominante. Uma análise deste tipo é particularmente relevante, pois permite examinar sistematicamente o papel conjunto da anisotropia, da curvatura espacial e da deformação NC na dinâmica cosmológica.

A relevância da não comutatividade estende-se também ao regime quântico. Na cosmologia quântica, a redução ao minisuperspaço permite formular a quantização canônica do modelo e conduz à equação de Wheeler–DeWitt (WDW), que descreve a função de onda do Universo [67, 68]. Quando o minisuperspaço possui uma estrutura NC, a álgebra canônica sofre uma deformação e, conseqüentemente, a equação de WDW também é modificada. Isso pode resultar em correções ao potencial efetivo e em mudanças qualitativas na dinâmica quântica do sistema. Diversos trabalhos mostraram que essas modificações podem afetar a forma da função de onda do Universo e alterar processos físicos relacionados

à seleção de condições iniciais [51, 54, 69, 70]. Essa linha de investigação adquire especial importância porque estabelece uma conexão direta entre deformações não comutativas do minisuperspaço e problemas fundamentais da cosmologia quântica, como a origem do Universo e a transição do regime quântico para o regime clássico.

Um dos cenários mais estudados dentro da cosmologia quântica é a nucleação do Universo por meio do efeito de tunelamento. Nesse contexto, o nascimento não singular do Universo é concebido como um processo quântico no qual um Universo embrionário, inicialmente confinado por uma barreira de potencial, atravessa a barreira por tunelamento para uma região na qual a expansão clássica se torna possível [71–75]. Esse problema foi analisado em numerosos modelos de minisuperspaço, tanto no caso comutativo quanto em suas extensões não comutativas [76–79]. Em modelos FLRW com curvatura espacial positiva e constante cosmológica positiva, a equação de WDW apresenta uma barreira de potencial efetiva cuja forma depende dos parâmetros físicos do modelo. Consequentemente, a probabilidade de tunelamento contém informação sobre as condições iniciais mais prováveis para a evolução clássica posterior [77, 80]. A introdução de não comutatividade no minisuperspaço permite examinar como uma deformação da estrutura canônica modifica a barreira de potencial efetiva e, com isso, a probabilidade de nucleação do Universo.

Nesta tese investigamos o papel da não comutatividade em modelos cosmológicos relevantes para o estudo da origem e da evolução do Universo. Em primeiro lugar, estudamos a evolução dinâmica dos modelos cosmológicos LRS não comutativos dos tipos BI e BIII, acoplados a um fluido perfeito de radiação, com o objetivo de analisar os efeitos do parâmetro NC γ sobre os processos de expansão e de isotropização do Universo. A escolha de um fluido de radiação justifica-se porque esse componente dominou as etapas iniciais do Universo, nas quais os efeitos da não comutatividade poderiam ter sido mais relevantes. A versão LRS desses modelos é adotada devido à semelhança entre suas métricas, o que permite escrever os modelos BI, BIII e KS [63] de forma generalizada. No entanto, este último não será considerado no presente trabalho visto que, sob as condições adotadas, não produz soluções em expansão. O parâmetro γ surge da introdução de uma álgebra de parênteses de Poisson deformada, por meio de quatro parênteses não triviais entre as variáveis geométricas e as variáveis de matéria do modelo. Esse enfoque difere de trabalhos prévios: em [61] introduzem apenas dois parênteses não triviais entre variáveis geométricas e de matéria; em [62] consideram-se seis parênteses não triviais, enquanto em [58] introduzem-se quatro parênteses não triviais apenas entre variáveis geométricas. Além disso, o modelo de [62] utiliza um gás relativista reduzido (RRG, *Reduced Relativistic Gas*) como conteúdo de matéria e emprega o formalismo simplético para introduzir a deformação, enquanto em [58] as equações dinâmicas são resolvidas na aproximação Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB), incluindo também uma constante cosmológica. Em contraste, no presente trabalho resolvemos numericamente as equações dinâmicas do sistema. Além disso, estimamos o parâmetro γ sob a hipótese de que o

Universo evoluiu para um estado homogêneo e isotrópico na atualidade. O objetivo é avaliar quão influente esse parâmetro pode ter sido nas etapas iniciais do Universo e analisar seu possível impacto na tensão de Hubble, caracterizada pela discrepância entre a constante de Hubble inferida da CMB e aquela obtida por observações astronômicas do Universo local.

Em segundo lugar, analisamos o problema da nucleação quântica do Universo. Devido à complexidade técnica associada ao processo de quantização dos modelos LRS anisotrópicos no marco NC, examinamos os efeitos da não comutatividade sobre a probabilidade de tunelamento utilizando um modelo FLRW com curvatura espacial positiva ($k = 1$) e constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$), sob um cenário dominado por radiação. O modelo é formulado no formalismo de Arnowitt–Deser–Misner (ADM), enquanto a radiação é descrita por meio do formalismo variacional de Schutz [81, 82]. Posteriormente, aplicamos o procedimento de quantização de Dirac para sistemas com vínculos [56], impondo a condição de vínculo do super-Hamiltoniano no nível quântico, o que conduz à equação de WDW do modelo. Introduzimos também uma deformação NC no setor dos momentos canônicos do minisuperspaço, o que modifica a equação de WDW e gera um potencial efetivo dependente do parâmetro NC ε . A partir dessa formulação estudamos o processo de tunelamento por meio de duas abordagens complementares: a aproximação WKB, baseada em soluções estacionárias da equação de WDW, e a solução numérica dessa equação para descrever a evolução do pacote de onda em relação ao tempo definido pelo fluido de radiação. Como o fator de escala a não pode assumir valores negativos, introduzimos uma parede de potencial infinita em $a = 0$, o que impõe a condição de fronteira $\Psi(0) = 0$ para a função de onda do Universo [67, 71, 72, 83]. Nesse contexto, a probabilidade de tunelamento depende não apenas da energia do fluido radiativo E e da constante cosmológica Λ , mas também do parâmetro NC ε , o que permite investigar como a não comutatividade no minisuperspaço modifica as condições iniciais mais prováveis para a evolução clássica do Universo. Em particular, analisamos a dependência da probabilidade de tunelamento em relação a ε para valores fixos de Λ e E , tomando como referência o caso limite comutativo ($\varepsilon = 0$) [77].

A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 apresentamos os fundamentos da cosmologia relativista e a motivação para o estudo de modelos anisotrópicos. No Capítulo 3 desenvolvemos os formalismos ADM e de Schutz para a formulação hamiltoniana. No Capítulo 4 introduzimos a quantização canônica, a equação de WDW e a não comutatividade no espaço de fases do minisuperspaço. No Capítulo 5 estudamos os modelos não comutativos de Bianchi I e III na era da radiação, incluindo a formulação hamiltoniana, a análise numérica da dinâmica e a estimativa do parâmetro γ . No Capítulo 6 analisamos o tunelamento quântico na cosmologia NC por meio de abordagens semiclássicas e numéricas, investigando a dependência da probabilidade de tunelamento dos parâmetros do modelo. Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos as conclusões e perspectivas deste trabalho.

2 ALGUNS ELEMENTOS DA COSMOLOGIA RELATIVISTA E MODELOS ANISOTRÓPICOS

Estabelecemos neste capítulo os fundamentos conceituais e geométricos que sustentam a análise cosmológica desenvolvida nesta tese. Inicialmente, apresentamos a Relatividade Geral aplicada à cosmologia, introduzindo as equações de Einstein, o princípio cosmológico e a métrica de FLRW, a partir dos quais derivamos as equações de Friedmann e discutimos a evolução das principais componentes do conteúdo material do Universo, tais como matéria, radiação e energia do vácuo. Em seguida, discutimos a motivação de considerar modelos cosmológicos anisotrópicos, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional, destacando o seu papel na investigação de possíveis desvios em relação ao cenário isotrópico padrão e na compreensão dos mecanismos de isotropização em tempos tardios. Desse modo, este capítulo fornece a base física e matemática necessária para a formulação dos modelos anisotrópicos não comutativos estudados nos capítulos seguintes.

2.1 ALGUNS ELEMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL APLICADA À COSMOLOGIA

2.1.1 Equações de Einstein em Cosmologia

Para iniciar o estudo da cosmologia, adotamos uma perspectiva essencialmente cinemática, na qual, para distâncias superiores a 100 megaparsecs, homogeneidade e a isotropia restringem a estrutura geométrica do Universo. No entanto, para descrever a evolução dinâmica do Universo, é necessário introduzir a lei fundamental que governa a gravidade em escalas cosmológicas. As equações de campo de Einstein codificam essa lei de forma precisa, as quais estabelecem uma relação direta e rigorosa entre a geometria do espaço-tempo e o seu conteúdo de matéria e energia [15, 84]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Nessa equação, $G_{\mu\nu}$ representa o tensor de Einstein; Λ é a constante cosmológica; $g_{\mu\nu}$ denota o tensor métrico; G é a constante de gravitação universal; c corresponde à velocidade da luz; e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Dessa forma, a distribuição de matéria e energia determina a curvatura do espaço-tempo, enquanto a geometria resultante condiciona o movimento e a evolução da matéria [85]. Nesta seção utilizamos explicitamente a velocidade da luz c e a constante de gravitação universal G .

Para compreender com maior detalhe a estrutura da Eq. (2.1), é necessário examinar a quantidade geométrica $G_{\mu\nu}$ que aparece em seu lado esquerdo, à qual damos o nome de tensor de Einstein, definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ corresponde à curvatura escalar. O tensor de Ricci, por sua vez, resulta da contração do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} . \quad (2.3)$$

A conexão de Levi-Civita determina completamente o tensor de Riemann em modelos sem torção, cujos símbolos de Christoffel dependem exclusivamente da métrica

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) , \quad g_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \partial_\gamma g_{\alpha\beta} . \quad (2.4)$$

Empregando a notação de vírgula para derivadas parciais, obtemos a expressão explícita do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\rho{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} , \quad \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\beta} \equiv \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} . \quad (2.5)$$

Essa formulação evidencia que a curvatura emerge tanto das derivadas da conexão quanto de combinações não lineares de seus componentes, o que manifesta o caráter intrinsecamente geométrico e não linear da Relatividade Geral.

Por outro lado, o lado direito da Eq. (2.1) é determinado pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que descreve a densidade e o fluxo de energia e momento em cada ponto do espaço-tempo [86]. Em cosmologia, o postulado de Weyl exige que a matéria seja modelada como um fluido perfeito [87], caracterizado por densidade de energia ρc^2 , pressão isotrópica p e quadrivelocidade U^μ . Nessas condições, o tensor energia-momento assume a forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} , \quad (2.6)$$

que constitui a fonte dinâmica da gravidade em modelos cosmológicos e garante a compatibilidade entre a simetria cosmológica e as equações da Relatividade Geral.

2.1.2 O princípio cosmológico

Dois pressupostos fundamentais determinam a estrutura geométrica do Universo: a homogeneidade espacial e a isotropia. Em conjunto, esses pressupostos definem o Princípio Cosmológico, que estabelece que, em escalas suficientemente grandes (centenas de megaparsecs e além), o Universo se apresenta estatisticamente igual a partir de qualquer localização e em todas as direções. O elevado grau de isotropia do fundo cósmico de micro-ondas (CMB, *cosmic microwave background*) sustenta fortemente esse princípio [88], cujas flutuações de temperatura são da ordem de 10^{-5} , bem como pelos levantamentos de galáxias e aglomerados em grande escala, que não exibem nenhuma direção ou posição preferencial [15, 89].

Do ponto de vista matemático, a homogeneidade espacial e a isotropia restringem a forma da métrica do espaço-tempo que resolve as equações de campo de Einstein. Um teorema da geometria diferencial estabelece que as únicas variedades riemannianas

tridimensionais que possuem essas simetrias são espaços de curvatura constante [14]. A curvatura pode ser positiva, nula ou negativa, correspondendo, respectivamente, a uma geometria esférica, plana ou hiperbólica.

2.1.3 O modelo homogêneo e isotrópico: métrica FLRW

Como consequência direta das simetrias de homogeneidade e isotropia impostas pelo princípio cosmológico, o elemento de linha mais geral compatível com tais propriedades corresponde à métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW),

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.7)$$

onde o fator de escala $a(t)$ caracteriza a expansão relativa do Universo, k denota a constante de curvatura espacial, c é a velocidade da luz, e (r, θ, ϕ) são coordenadas espaciais comóveis.

- $k > 0$ corresponde a um Universo fechado, com seções espaciais esféricas;
- $k = 0$ a um Universo espacialmente plano (euclidiano); e
- $k < 0$ a um Universo aberto, de geometria hiperbólica.

O fator de escala introduz uma dependência temporal intrínseca na geometria espacial. Ele descreve como as distâncias entre pontos comóveis variam com o tempo cósmico t . O fator de escala admite uma normalização arbitrária; por convenção, fixamos $a(t_0) = 1$ na época presente t_0 .

O parâmetro de Hubble quantifica a taxa com a qual o fator de escala evolui e é dado por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.8)$$

onde $\dot{a}(t) \equiv da/dt$ é a derivada do fator de escala com respeito ao tempo cósmico. O parâmetro de Hubble quantifica a taxa instantânea de expansão do Universo, e o seu valor atual H_0 é conhecido como a constante de Hubble.

2.1.3.1 Tempo conforme

Em certos casos, a componente radial da métrica em (2.7) pode ser inconveniente para análises analíticas ou numéricas, pois contém o fator $(1 - kr^2)^{-1}$ na parte espacial. Para simplificar a expressão, é útil introduzir uma coordenada radial normalizada pela curvatura χ , definida por

$$d\chi \equiv \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.9)$$

Essa mudança de variável absorve o termo de curvatura na nova coordenada, permitindo que a métrica assuma uma forma mais simples e geometricamente mais transparente,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.10)$$

onde a função $S_k(\chi)$ codifica a curvatura espacial e assume a forma

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = +1, \\ \chi & k = 0, \\ \sinh\chi & k = -1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Nessa representação, todas as hipersuperfícies espaciais, fechadas, planas ou abertas, são descritas pela mesma forma funcional, enquanto a informação sobre a curvatura está inteiramente contida em $S_k(\chi)$. Esse tratamento unificado da geometria é particularmente útil ao introduzir novas coordenadas temporais que simplificam a análise da propagação da luz e da estrutura causal. Em particular, introduzimos o tempo conforme η , que definimos por

$$d\eta \equiv \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.12)$$

Assim, reescrevemos (2.10) na forma conforme

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.13)$$

Nessa representação, a métrica apresenta um componente espacial estático multiplicado por um fator conforme dependente do tempo $a(\eta)$. Essa estrutura conforme é particularmente útil ao estudar a propagação da luz e de outros campos sem massa, pois, para geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), o comportamento causal torna-se equivalente ao do espaço-tempo plano, à exceção do fator de escala global $a(\eta)$.

2.1.3.2 Desvio para o vermelho

Como o espaço-tempo é isotrópico, podemos sempre escolher coordenadas tais que a luz se propague puramente na direção radial. Nesse caso, as coordenadas angulares permanecem constantes, $d\theta = d\phi = 0$, e os fótons seguem geodésicas nulas que satisfazem $ds^2 = 0$. Utilizando a parametrização (2.13), reduzimos a métrica a um elemento de linha bidimensional,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + d\chi^2 \right] = 0. \quad (2.14)$$

Dessa relação, obtemos

$$d\chi = \pm c d\eta. \quad (2.15)$$

O sinal positivo corresponde a fótons que se afastam do observador (trajetórias de saída), enquanto o sinal negativo refere-se a fótons que se propagam em direção ao observador

(trajetórias de chegada). Consequentemente, a diferença no tempo conforme entre os eventos de emissão e recepção determina a distância comóvel até uma determinada fonte. No caso específico de fótons que chegam ao nosso telescópio, temos que

$$c(\eta_0 - \eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_0} c \, d\eta = \int_{\text{trajetória}} d\chi, \quad (2.16)$$

onde η_1 denota o tempo conforme na emissão (pela galáxia distante) e η_0 o tempo conforme na observação.

Consideremos agora duas frentes de onda sucessivas emitidas pela mesma fonte nos tempos conformes η_1 e $\eta_1 + \delta\eta_1$, e recebidas por um observador em η_0 e $\eta_0 + \delta\eta_0$. Ambas as frentes de onda satisfazem (2.16), de modo que o intervalo conforme entre emissor e observador é o mesmo para ambas:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} c \, d\eta = \int_{\eta_1 + \delta\eta_1}^{\eta_0 + \delta\eta_0} c \, d\eta. \quad (2.17)$$

Subtraindo as duas expressões, obtemos

$$\delta\eta_1 = \delta\eta_0. \quad (2.18)$$

Utilizando a definição de tempo conforme em (2.12), essa condição implica

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.19)$$

Se δt denota o período da onda luminosa, então a luz é emitida com comprimento de onda $\lambda_1 = c \delta t_1$ e observada com $\lambda_0 = c \delta t_0$, de modo que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.20)$$

Definimos o desvio para o vermelho como a variação fracionária do comprimento de onda,

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (2.21)$$

Substituindo essa definição em (2.20), e normalizando o fator de escala atual à unidade ($a(t_0) \equiv 1$), a expressão para o desvio para o vermelho assume a forma

$$z + 1 = \frac{1}{a(t_1)}. \quad (2.22)$$

Isso mostra que o desvio cosmológico para o vermelho mede diretamente o quanto o Universo se expandiu desde que a luz foi emitida: quanto maior o valor observado de z , menor era o fator de escala no momento da emissão. Na prática, essa relação permite aos astrônomos inferir a distância e o tempo de retrovisão (*look-back time*) de galáxias e quasares por meio da medição do deslocamento de linhas espectrais conhecidas em seus espectros observados [89–91].

2.1.4 Equações de Friedmann

Consideramos a métrica FLRW (2.7) e o tensor energia-momento de um fluido perfeito (2.6), e calculamos o tensor de Einstein (2.2) associado a essa geometria. Ao exigir que a métrica e o conteúdo material satisfaçam as equações de Einstein (2.1), obtemos um sistema de equações diferenciais que governa a evolução dinâmica do fator de escala $a(t)$. Esse sistema, conhecido como as equações de Friedmann, descreve a expansão (ou contração) do Universo em função do seu conteúdo material [15, 85, 92].

A componente temporal $(\mu, \nu) = (0, 0)$ das equações de Einstein conduz à primeira equação de Friedmann, que assume a forma

$$H^2(t) \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (2.23)$$

onde $H(t)$ denota o parâmetro de Hubble definido em (2.8), ρ representa a densidade do fluido, c é a velocidade da luz, k é a constante de curvatura espacial e Λ é a constante cosmológica.

Os componentes espaciais $(\mu, \nu) = (i, i)$ das equações de Einstein conduzem à segunda equação de Friedmann, que assume a forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (2.24)$$

onde p representa a pressão total do fluido material. Essa expressão mostra que a matéria e a radiação ordinárias $\left(\rho + \frac{3p}{c^2} > 0\right)$ tendem a desacelerar a expansão do Universo, enquanto uma constante cosmológica positiva atua como uma contribuição repulsiva que induz aceleração cósmica [93, 94].

As equações (2.23) e (2.24) não são independentes. A identidade de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ garante a sua consistência e conduz à conservação covariante do tensor energia-momento [86, 95],

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Em um Universo FLRW preenchido por um fluido perfeito, essa condição conduz diretamente à equação de continuidade

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (2.26)$$

a qual expressa a conservação de energia em um volume comóvel em expansão.

Ao integrar a equação de continuidade (2.26) para o fluido cosmológico, assumindo que ele obedece a uma equação de estado barotrópica $p = \alpha(\rho c^2)$, obtemos a relação de escala

$$\rho(a) \propto a^{-3(1+\alpha)}. \quad (2.27)$$

Essa relação permite distinguir dois casos de especial interesse cosmológico, correspondentes à matéria não relativística e à radiação, de acordo com o valor do parâmetro barotrópico α , como discutido a seguir.

2.1.4.1 Matéria e radiação

Quando $\alpha = 0$, a equação de estado é $p = 0$, que descreve um fluido não relativístico cuja pressão é muito menor do que sua densidade de energia. Nesse caso, a relação de escala (2.27) reduz-se a $\rho(a) \propto a^{-3}$, refletindo uma diluição puramente volumétrica associada à expansão do espaço, enquanto a energia dentro dessa região permanece constante. Esse comportamento caracteriza as eras cosmológicas dominadas por componentes como a matéria bariônica (núcleos e elétrons), a matéria escura fria (CDM, *Cold Dark Matter*) e os neutrinos massivos após entrarem no regime não relativístico [14, 85, 96].

No caso da radiação ou de fluidos ultrarrelativísticos, a equação de estado assume a forma $p = \frac{1}{3}\rho c^2$, correspondente ao parâmetro barotrópico $\alpha = 1/3$. Nesse caso, a relação de escala (2.27) reduz-se a $\rho(a) \propto a^{-4}$, o que indica que, além da diluição volumétrica associada à expansão do espaço, a expansão cosmológica produz uma perda adicional de energia vinculada ao desvio para o vermelho das partículas ultrarrelativísticas (fótons, neutrinos relativísticos e outras partículas ultraleves), cuja energia individual decresce inversamente com o fator de escala [85, 95, 96]. Em consequência, a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente do que a da matéria não relativística, o que implica que a radiação domina a dinâmica do Universo em épocas iniciais, enquanto a matéria passa a ser relevante em etapas posteriores da evolução cosmológica [14].

2.1.4.2 Energia do vácuo

Além da matéria e da radiação, as equações de Friedmann admitem a presença de uma contribuição associada à energia do vácuo, que modelamos fenomenologicamente por meio da constante cosmológica Λ . Do ponto de vista dinâmico, podemos interpretar essa contribuição como um fluido perfeito com densidade de energia constante $\rho_\Lambda c^2$ e pressão negativa, que se relacionam pela equação de estado

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (2.28)$$

o que corresponde ao valor do parâmetro barotrópico $\alpha = -1$ [85, 93, 96]. Ao substituir esse valor na relação de escala (2.27), obtemos

$$\rho_\Lambda(a) = \text{constante}, \quad (2.29)$$

o que reflete que a densidade de energia do vácuo não se dilui com a expansão do Universo. Em consequência, enquanto as densidades de matéria e radiação decrescem com o fator de escala, a contribuição associada a Λ permanece invariante e acaba dominando a dinâmica cosmológica em épocas suficientemente tardias, em concordância com a descrição que o modelo cosmológico padrão (Λ CDM, *Lambda Cold Dark Matter*) fornece [14, 96, 97].

Essa propriedade manifesta explicitamente na segunda equação de Friedmann (2.24), onde a energia do vácuo atua como uma fonte efetiva de aceleração cósmica. Em

particular, dado que $\rho_\Lambda + 3p_\Lambda/c^2 = -2\rho_\Lambda < 0$, uma constante cosmológica positiva induz uma expansão acelerada, em contraste com os efeitos desaceleradores produzidos pela matéria e pela radiação ordinárias [93, 94].

2.1.4.3 Densidade crítica e parâmetros de densidade

Definimos a densidade crítica como o valor de referência da densidade que corresponde a um Universo espacialmente plano [14, 85]. Introduzimos esse conceito de forma natural a partir da primeira equação de Friedmann (2.23). Ao avaliar essa equação na época atual t_0 e considerar o caso de curvatura espacial nula ($k = 0$), obtemos

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (2.30)$$

onde $H_0 \equiv H(t_0)$ é o valor presente do parâmetro de Hubble e ρ_0 denota a densidade atual de matéria e radiação (com $\rho_0 = \rho_{m,0} + \rho_{r,0}$). Por convenção, fixamos o fator de escala atual como $a_0 \equiv a(t_0) = 1$, conforme mencionado na subseção anterior.

Podemos interpretar a constante cosmológica como uma contribuição equivalente à densidade do fluido cosmológico, conforme discutido em detalhe na Ref. [96], introduzindo a densidade equivalente

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.31)$$

Com essa identificação, reescrevemos a equação de Friedmann avaliada na época atual na forma mais compacta como

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_0 + \rho_\Lambda). \quad (2.32)$$

Desse modo, definimos a densidade crítica atual $\rho_{0,c}$ como o valor de referência da densidade total que satisfaz

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{0,c}, \quad (2.33)$$

de onde obtemos explicitamente

$$\rho_{0,c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.34)$$

Em um Universo espacialmente plano, a densidade total efetiva do conteúdo cosmológico satisfaz a relação $\rho_0 + \rho_\Lambda = \rho_{0,c}$ [14, 15]. Essa quantidade fixa a escala característica de densidade do Universo na época atual.

Para quantificar de forma adimensional a contribuição relativa de cada componente do conteúdo cosmológico na época atual, introduzimos os parâmetros de densidade cosmológicos [14, 96], definidos em relação à densidade crítica atual como $\Omega_{i,0} \equiv \rho_{i,0}/\rho_{0,c}$, onde ρ_i representa a densidade associada a uma componente específica do fluido cosmológico, como matéria, radiação ou energia do vácuo. Na época atual t_0 , os parâmetros de densidade correspondentes às principais componentes do Universo são definidos explicitamente como

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0}, \quad \Omega_{r,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r,0}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (2.35)$$

Aqui, o subscrito “m” denota a contribuição da matéria total (bariônica e matéria escura fria), o subscrito “r” corresponde à radiação, e o subscrito “ Λ ” representa a contribuição associada à energia do vácuo modelada por meio da constante cosmológica.

Além das componentes materiais e da energia do vácuo, introduzimos um parâmetro de densidade associado à curvatura espacial [15, 96]. A partir da primeira equação de Friedmann (2.23), avaliada na época atual, definimos esse parâmetro como

$$\Omega_{k,0} \equiv -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.36)$$

Como por convenção fixamos $a_0 = 1$, essa expressão quantifica diretamente a contribuição efetiva da curvatura espacial para a dinâmica do Universo atual.

Em termos dos parâmetros de densidade introduzidos anteriormente, a primeira equação de Friedmann avaliada na época atual (t_0) é escrita em forma adimensional dividindo todos os seus termos por H_0^2 . Desse modo, obtemos a relação de fechamento

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1. \quad (2.37)$$

Essa relação expressa o balanço global entre as contribuições normalizadas da matéria, da radiação, da energia do vácuo e da curvatura espacial, constituindo uma restrição algébrica direta imposta pela equação de Friedmann. Uma análise detalhada dos parâmetros de densidade cosmológicos e de sua interpretação observacional pode ser encontrada na Ref. [97], capítulo 4.

2.1.4.4 Idade do Universo

Uma vez especificada a dinâmica cosmológica por meio das equações de Friedmann, é natural introduzir uma expressão geral para o tempo cosmológico em função do fator de escala. A partir da definição do parâmetro de Hubble, $H \equiv \dot{a}/a$, escrevemos a relação diferencial

$$dt = \frac{da}{a H(a)}. \quad (2.38)$$

Integrando essa expressão desde a origem da expansão ($a = 0$) até um valor arbitrário do fator de escala a , obtemos o tempo cosmológico decorrido até esse instante,

$$t(a) = \int_0^a \frac{da'}{a' H(a')}. \quad (2.39)$$

Expressando a primeira equação de Friedmann em termos dos parâmetros de densidade descritos anteriormente, escrevemos a função de Hubble como

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \right]. \quad (2.40)$$

Ao substituir essa expressão em (2.39), obtemos uma forma explícita para o tempo cosmológico em função do fator de escala,

$$t(a) = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{a' \left[\Omega_{r,0} a'^{-4} + \Omega_{m,0} a'^{-3} + \Omega_{k,0} a'^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}}. \quad (2.41)$$

Essa expressão constitui o resultado geral para o tempo cosmológico no âmbito da cosmologia FLRW e permite determinar a idade do Universo em qualquer época caracterizada por um valor dado do fator de escala. Na Seção 5.4, essa relação desempenhará um papel central na estimativa do parâmetro não comutativo do modelo. Em particular, obtemos a idade atual do Universo avaliando (2.41) em $a = 1$,

$$t_0 = t(a = 1). \quad (2.42)$$

Como exemplo, consideramos um Universo aberto ($k = -1$) sem constante cosmológica nem radiação, isto é, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ e $\Omega_{r,0} = 0$. Nesse cenário, a dinâmica cosmológica é governada apenas pela matéria e pela curvatura espacial, de modo que $\Omega_{k,0} > 0$. Consequentemente, a relação de fechamento reduz-se a $\Omega_{m,0} + \Omega_{k,0} = 1$, o que implica $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0}$. Ao impor essas condições na expressão geral (2.41), e avaliar a integral até $a = 1$, correspondente à época atual, podemos resolver a integral de forma analítica. Desse modo, obtemos a seguinte expressão para a idade atual do Universo aberto,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1 - \Omega_{m,0}} \left[1 - \frac{\Omega_{m,0}}{2\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m,0}}}{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \right) \right]. \quad (2.43)$$

Para valores observacionais típicos, $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$, essa expressão conduz a uma idade atual $t_0 \simeq 11.3 \text{ Gyr}$. Esse valor é significativamente menor do que a idade inferida no modelo cosmológico padrão ΛCDM , $t_0 \simeq 13.8 \text{ Gyr}$, o que evidencia que, na ausência de energia do vácuo, ainda que a curvatura espacial contribua para a taxa de expansão, a dinâmica cosmológica permanece globalmente desacelerada. No modelo ΛCDM , a expansão do Universo começa de forma desacelerada devido ao domínio da matéria, mas entra em uma fase acelerada em tempos tardios quando a constante cosmológica passa a dominar a dinâmica, o que prolonga a história de expansão e conduz a uma idade maior do Universo para um mesmo valor do parâmetro de Hubble atual.

Na maioria dos modelos cosmológicos realistas, a integral (2.41) não admite solução analítica e devemos avaliá-la numericamente. No entanto, existem casos particulares de interesse físico nos quais a integral admite solução exata. Por exemplo, Peter Schneider deriva uma solução analítica para um Universo plano sem constante cosmológica em seu livro *Extragalactic Astronomy and Cosmology* (capítulo 5, págs. 185-186) [97]. Da mesma forma, Daniel Baumann obtém uma expressão analítica para a idade atual do Universo em um modelo espacialmente plano dominado por matéria e energia do vácuo em seu livro *Cosmology* (capítulo 2) [96]. Um tratamento pedagógico semelhante, que inclui soluções analíticas para Universos dominados por matéria e energia do vácuo, pode ser encontrado no capítulo 8 do livro de Andrew Liddle *An Introduction to Modern Cosmology* [98].

2.2 MOTIVAÇÃO FÍSICA PARA MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS

O modelo cosmológico padrão, baseado na métrica FLRW e complementado pelo cenário inflacionário, descreve com grande sucesso a evolução do Universo em larga escala. Em particular, a inflação, caracterizada por um breve período de expansão acelerada no Universo primordial, fornece um mecanismo para solucionar problemas fundamentais do modelo do Big Bang, como os problemas do horizonte, da planitude e da abundância de monopolos magnéticos, além de explicar a origem das flutuações primordiais que deram origem às estruturas observadas atualmente [96, 98].

Embora o princípio cosmológico, baseado na homogeneidade e na isotropia em grande escala, tenha sido extraordinariamente bem-sucedido na descrição do Universo observável, não existe uma razão fundamental que garanta que a isotropia tenha sido uma propriedade exata do espaço-tempo em todas as etapas da evolução cósmica. Em particular, no Universo primordial, onde efeitos quânticos da gravidade, condições iniciais não triviais ou campos fundamentais com direções preferenciais podem ter sido relevantes, é natural considerar extensões do arcabouço FLRW que relaxem a condição de isotropia espacial, mantendo apenas a homogeneidade [99, 100].

2.2.1 Aspectos teóricos e isotropização

Do ponto de vista teórico, podemos interpretar a isotropia espacial em grande escala observada na atualidade como o resultado de um processo dinâmico de isotropização. Em modelos cosmológicos homogêneos, porém anisotrópicos, como os Universos de Bianchi, a expansão cósmica, especialmente na presença de matéria ordinária ou de uma constante cosmológica positiva, tende a diluir as anisotropias iniciais, conduzindo assintoticamente a um estado quase isotrópico [21, 101]. Nesse sentido, os modelos anisotrópicos permitem analisar se um Universo que parte de condições iniciais anisotrópicas evolui dinamicamente para o cenário FLRW, fornecendo assim um arcabouço natural para avaliar a estabilidade desse cenário e a validade do princípio cosmológico.

2.2.2 Evidências observacionais e anomalias no CMB

Do ponto de vista observacional, embora o Universo seja altamente isotrópico em grande escala, especialmente segundo as observações do fundo cósmico de micro-ondas (CMB), diversas análises identificaram anomalias em grandes escalas angulares, tais como assimetrias hemisféricas de potência, alinhamentos entre os multipolos de baixa ordem (quadrupolo e octopolo) e outras características direcionais que podem sugerir direções preferenciais nos dados do CMB [102, 103]. Embora essas anomalias não constituam evidência conclusiva de anisotropia cosmológica, uma vez que o modelo Λ CDM continua consistente com a maioria dos dados, elas motivam o estudo de modelos mais gerais que

permitam quantificar e impor limites a possíveis desvios em relação à isotropia estatística exata.

2.2.3 Panorama geométrico dos modelos anisotrópicos

Geometricamente, grande parte dos modelos cosmológicos homogêneos anisotrópicos é descrita pela classificação de Bianchi, que agrupa as soluções das equações de Einstein com seções espaciais homogêneas sem impor isotropia, permitindo que as taxas de expansão dependam da direção espacial [100, 104]. Embora essa classificação abarque a maioria dos Universos homogêneos anisotrópicos de interesse físico, existe outro modelo homogêneo anisotrópico, o de Kantowski-Sachs [63], cuja estrutura de simetria é distinta daquela dos modelos de Bianchi. Tanto na classificação de Bianchi quanto no modelo de Kantowski-Sachs, recuperamos o Universo FLRW isotrópico quando as taxas de expansão direcionais coincidem, o que fornece um arcabouço natural para descrever a transição de um estado inicialmente anisotrópico para a isotropia observada na atualidade. No Capítulo 3, concentraremos nossa análise em Universos anisotrópicos em sua versão com localmente rotacionalmente simétrico (LRS, *locally rotationally symmetric*), a qual combina simplicidade formal com suficiente riqueza física para capturar os efeitos essenciais da anisotropia.

3 FORMALISMO ADM E FORMALISMO DE SCHUTZ

Apresentamos neste capítulo os dois elementos formais fundamentais que sustentam a formulação hamiltoniana empregada ao longo desta tese. Primeiramente, apresentamos o formalismo ADM, que permite reescrever a Relatividade Geral em uma forma canônica, em termos de variáveis dinâmicas. Em seguida, introduzimos o formalismo de Schutz para fluidos perfeitos, essencial para incorporar o conteúdo material e identificar uma variável temporal interna no contexto cosmológico.

3.1 FORMALISMO ADM

O formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) tem como propósito dotar a Relatividade Geral (RG) de uma descrição hamiltoniana que permita formulá-la como um problema de evolução temporal [105, 106]. Para alcançar esse objetivo, devemos reescrever as equações de Einstein como um sistema de valores iniciais ou problema de Cauchy. No entanto, não podemos realizar isso diretamente a partir de sua formulação covariante, na qual espaço e tempo são tratados de maneira completamente simétrica, o que dificulta a identificação explícita de variáveis dinâmicas e parâmetros de evolução. Dirac realizou a primeira análise sistemática da estrutura canônica da gravitação na década de 1950, ao estudar as restrições em teorias de campos com simetrias de calibre, incluindo a própria RG [107, 108].

Inspirados por essa abordagem, R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner desenvolveram uma reinterpretação geométrica da teoria que deu origem ao formalismo que leva suas iniciais. A decomposição ADM, também conhecida como foliação 3+1, consiste em separar explicitamente a coordenada temporal das espaciais, entendendo o espaço-tempo como uma família de hipersuperfícies espaciais que evoluem no tempo [86, 109]. Essa separação permite reescrever as equações de Einstein distinguindo claramente as equações de evolução temporal das variáveis dinâmicas e as equações de restrição associadas aos vínculos do sistema. Com isso, podemos tratar a Relatividade Geral como uma teoria dinâmica formulada sobre seções espaciais tridimensionais [86, 106].

3.1.1 Decomposição 3+1 do espaço-tempo e métrica induzida

Para formular o problema de valores iniciais na RG, devemos reinterpretar o espaço-tempo como uma coleção ordenada de hipersuperfícies espaciais que representam instantes de tempo. Formalmente, consideramos uma variedade lorentziana quadridimensional $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ que pode ser decomposta como o produto topológico $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ é uma variedade tridimensional espacial e $\mathbb{R}$ corresponde ao parâmetro temporal que indexa a família de hipersuperfícies [86, 109]. A cada valor de $t \in \mathbb{R}$ associamos uma hipersuperfície

espacial Σ_t , imersa em $\mathcal{M}$, que representa o espaço físico no instante t . Essa família $\{\Sigma_t\}$ constitui uma foliação do espaço-tempo [105].

A partir dessa construção, podemos interpretar o espaço-tempo como uma família de folhas espaciais Σ_t , cada uma dotada de uma métrica riemanniana tridimensional $h_{ij}(t, x^k)$ que mede distâncias puramente espaciais. O parâmetro t desempenha aqui o papel de coordenada temporal e permite reinterpretar a RG como uma teoria de evolução geométrica. No entanto, para relacionar duas hipersuperfícies consecutivas Σ_t e Σ_{t+dt} , devemos introduzir um mecanismo que descreva como um ponto da folha inicial evolui para um ponto correspondente na folha seguinte.

Consideremos, então, duas hipersuperfícies da foliação, Σ_t no instante t e Σ_{t+dt} no instante $t + dt$. Cada uma delas está dotada de uma métrica espacial tridimensional h_{ij} . Essa métrica descreve a geometria de cada folha e permite medir distâncias puramente espaciais entre pontos que pertencem à mesma hipersuperfície. Em particular, para dois pontos vizinhos sobre Σ_t , a distância infinitesimal assume a forma

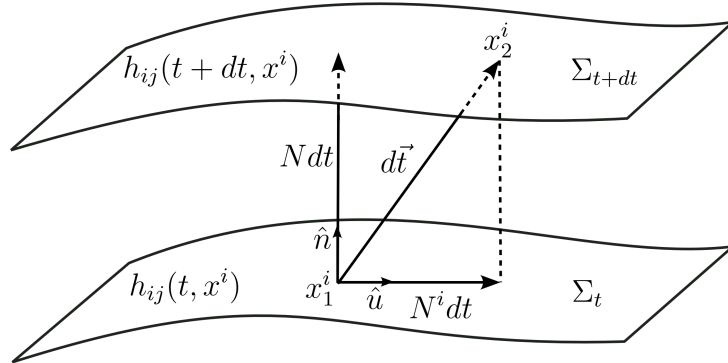
$$d\ell^2 = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

Suponhamos que cada ponto da hipersuperfície Σ_t seja levado à hipersuperfície Σ_{t+dt} seguindo a ação de um campo vetorial $d\vec{t}$. Esse campo vetorial possui projeções nas direções normal $\hat{n}$ e tangencial $\hat{u}$ à hipersuperfície Σ_t , como ilustrado na Fig. 1. Essas projeções assumem, respectivamente, os valores

$$\begin{aligned} \hat{n} &\rightarrow N dt \\ \hat{u} &\rightarrow N^i dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde N recebe o nome de lapso e N^i é o vector deslocamento, que descreve o deslocamento tangencial à hipersuperfície Σ_t . Ambos são conhecidos como parâmetros de evolução.

Figura 1 – Campo vetorial $d\vec{t}$ que evolui da hipersuperfície Σ_t até a hipersuperfície Σ_{t+dt} .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Com essa decomposição, podemos calcular o intervalo espaço-temporal entre os eventos $x_1^i(\Sigma_t)$ e $x_2^i(\Sigma_{t+dt})$ de duas maneiras. Primeiro, expressamos o intervalo em termos

das quantidades h_{ij} , N e N^i . Em seguida, calculamos o mesmo intervalo utilizando a métrica $g_{\alpha\beta}$. Ao comparar ambos os resultados, obtemos a relação entre $g_{\alpha\beta}$ e as quantidades h_{ij} , N e N^i , isto é, a forma explícita dos componentes de $g_{\alpha\beta}$ na decomposição 3+1.

Seguindo essa ideia, consideramos primeiramente a separação entre x_1^i e x_2^i na direção normal $\hat{n}$. Um deslocamento infinitesimal nessa direção corresponde a um intervalo puramente temporal, de modo que o tempo próprio entre Σ_t e Σ_{t+dt} assume a forma

$$d\tau^2 = N^2 dt^2. \quad (3.3)$$

Por outro lado, a separação entre x_1^i e a projeção $P(x_2^i)$ sobre a superfície Σ_t determina a distância própria. Assim, escrevemos a projeção $P(x_2^i)$ como

$$P(x_2^i) = x_1^i + dx_1^i + N^i dt, \quad (3.4)$$

onde dx_1^i representa a liberdade de adicionar um deslocamento infinitesimal sobre Σ_t . Reescrevendo a expressão anterior, obtemos

$$P(x_2^i) - x_1^i = dx_1^i + N^i dt. \quad (3.5)$$

Usando esse deslocamento infinitesimal, a distância própria entre os dois pontos sobre Σ_t assume a forma

$$de^2 = h_{ij}(dx_1^i + N^i dt)(dx_1^j + N^j dt). \quad (3.6)$$

Finalmente, para obter o intervalo entre os eventos x_1^i e x_2^i , utilizamos o teorema de Pitágoras no espaço-tempo quadridimensional com assinatura lorentziana,

$$ds^2 = de^2 - d\tau^2. \quad (3.7)$$

Substituindo as expressões (3.3) e (3.6) em (3.7), e omitindo os subíndices em x_1^i para simplificar a notação, obtemos

$$ds^2 = h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2. \quad (3.8)$$

Ao expandir a expressão anterior e reagrupar adequadamente os termos, obtemos a forma explícita do intervalo no formalismo 3+1,

$$ds^2 = (h_{ij}N^iN^j - N^2)dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j + 2N_i dx^i dt. \quad (3.9)$$

A partir dessa expressão, identificamos os componentes do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ em termos do lapso N , do deslocamento N^i e da métrica espacial h_{ij} .

Considerando agora a métrica quadridimensional $g_{\alpha\beta}$, o intervalo entre os pontos x_1^i e x_2^i assume a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.10)$$

Além disso, expandimos essa expressão explicitamente em coordenadas adaptadas à foliação, $(x^\alpha) = (t, x^i)$, como

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.11)$$

Comparando os elementos de linha ds^2 das expressões (3.9) e (3.11), podemos identificar termo a termo os coeficientes que acompanham dt^2 , $dt dx^i$ e $dx^i dx^j$. Dessa comparação obtemos as igualdades

$$g_{00} = h_{ij} N^i N^j - N^2 = - (N^2 - N_i N^i), \quad (3.12)$$

$$g_{0i} = N_i, \quad (3.13)$$

$$g_{ij} = h_{ij}. \quad (3.14)$$

Aqui utilizamos a relação $N_i = h_{ij} N^j$ para abaixar o índice do deslocamento. Dessa forma, a métrica quadridimensional assume a forma matricial característica do formalismo 3 + 1:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(N^2 - N_i N^i) & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Da mesma forma, a métrica inversa assume a forma

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A derivação explícita da métrica inversa $g^{\alpha\beta}$ a partir de (3.15) pode ser consultada no Apêndice A.

As expressões (3.15) e (3.16) resumem a decomposição ADM da métrica em termos dos parâmetros de evolução: o lapso N , o deslocamento N^i e a métrica induzida h_{ij} , que corresponde aos componentes puramente espaciais da métrica projetada sobre cada hipersuperfície Σ_t . Neste trabalho, tal formalismo será essencial para a construção da hamiltoniana do sistema, fornecendo as variáveis canônicas necessárias para o estudo da cosmologia clássica e quântica.

3.1.2 Curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais

A foliação do espaço-tempo em hipersuperfícies espaciais permite descrever a evolução geométrica dessas folhas à medida que o parâmetro temporal t varia [85]. Para caracterizar como cada folha está imersa no espaço-tempo quadridimensional, devemos introduzir a noção de curvatura extrínseca [110]. A congruência definida pelo vetor normal unitário n^μ permite identificar pontos correspondentes em hipersuperfícies espaciais sucessivas. Essa quantidade mede quão rapidamente a métrica h_{ij} varia quando evolui ao longo da congruência [106, 111].

Consideremos o vetor normal unitário n^μ associado a cada hipersuperfície Σ_t , definido por $n_\mu n^\mu = -1$. Embora, em coordenadas adaptadas à foliação, as componentes espaciais satisfaçam $n_i = 0$, sua derivada covariante $n_{i;j}$ não se anula necessariamente, pois envolve a conexão do espaço-tempo [85, 106]. Em particular, um deslocamento infinitesimal tangencial dx^j dentro da hipersuperfície produz uma variação do vetor normal dada por

$$\delta n_i = n_{i;j} dx^j. \quad (3.17)$$

Essa variação é puramente espacial, pois a condição de normalização $n_\mu n^\mu = -1$ implica $(n^\mu n_\mu)_{;j} = n_\mu n^\mu_{;j} + n^\mu n_{\mu;j} = 0$. Utilizando a compatibilidade métrica $(g_{\mu\nu})_{;j} = 0$ e a relação $n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu$, obtemos $n_{\mu;j} = g_{\mu\nu} n^\nu_{;j}$. Substituindo na expressão anterior, verificamos que os dois termos são idênticos, de modo que $2 n_\mu n^\mu_{;j} = 0 \Rightarrow n_\mu n^\mu_{;j} = 0$. Assim, interpretamos δn_i como um vetor tangencial a Σ_t , que quantifica como a direção do normal varia ao deslocar-se sobre a hipersuperfície [109].

Definimos a curvatura extrínseca K_{ij} precisamente a partir dessa variação. Adotando a convenção padrão no formalismo ADM, introduzimos

$$n_{i;j} = -K_{ij}, \quad (3.18)$$

de modo que a equação (3.17) assume a forma

$$\delta n_i = -K_{ij} dx^j. \quad (3.19)$$

Dessa forma, K_{ij} caracteriza completamente a variação do vetor normal ao longo da hipersuperfície e descreve como a folha Σ_t está embebida no espaço-tempo.

Empregamos agora a decomposição 3+1 da métrica (3.16) para expressar explicitamente K_{ij} em termos do lapso N , do deslocamento N^i e da métrica espacial h_{ij} . Partimos da expressão geral da derivada covariante do vetor normal

$$n_{i;j} = \frac{\partial n_i}{\partial x^j} - \Gamma^\sigma_{ij} n_\sigma \quad (3.20)$$

Aqui, $n_i = 0$ para todo índice espacial, de modo que o primeiro termo do lado direito anula-se identicamente. Além disso, n_σ possui apenas componente temporal distinta de zero, isto é, $n_0 = -N$. Portanto, apenas o termo com $\sigma = 0$ contribui, e obtemos

$$\begin{aligned} n_{i;j} &= -\Gamma^0_{ij} n_0 \\ &= N (g^{0\sigma} \Gamma_{\sigma ij}) \\ &= N (g^{00} \Gamma_{0ij} + g^{0m} \Gamma_{mij}). \end{aligned}$$

Agora, substituímos os componentes da métrica quadridimensional dados em (3.16) e obtemos

$$\begin{aligned} n_{i;j} &= N \left(-\frac{1}{N^2} \Gamma_{0ij} + \frac{N^m}{N^2} \Gamma_{mij} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(-\underbrace{\Gamma_{0ij}}_{(I)} + N^m \Gamma_{mij} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I) \quad \Gamma_{0ij} &= g_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{ij} = g_{0\alpha} \left[\frac{g^{\alpha\beta}}{2} (g_{\beta i,j} + g_{\beta j,i} - g_{ij,\beta}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \delta_0^\beta (g_{\beta i,j} + g_{\beta j,i} - g_{ij,\beta}) , \quad \text{usando (3.15), resulta} \\
&= \frac{1}{2} (N_{i,j} + N_{j,i} - h_{ij,0}) .
\end{aligned}$$

Em seguida, substituímos o valor obtido em (I) na expressão anterior e obtemos

$$\begin{aligned}
n_{i,j} &= \frac{1}{N} \left[-\frac{1}{2} (N_{i,j} + N_{j,i} - h_{ij,0}) + N^m \Gamma_{mij} \right] \\
n_{i,j} &= -\frac{1}{2N} \left[(N_{i,j} - N_m \Gamma^m_{ij}) + (N_{j,i} - N_m \Gamma^m_{ij}) - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right] \\
n_{i,j} &= -\frac{1}{2N} \left[N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right] , \tag{3.21}
\end{aligned}$$

onde o símbolo $|$ denota a derivada covariante associada à métrica espacial tridimensional h_{ij} .

A partir das equações (3.18) e (3.21), obtemos finalmente a expressão da curvatura extrínseca,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right] . \tag{3.22}$$

Essa expressão mostra que K_{ij} depende unicamente do lapso N , do deslocamento N^i e da métrica espacial h_{ij} , isto é, das funções que fixam a foliação $3 + 1$ do espaço-tempo.

Após esse resultado, o passo seguinte consiste em reescrever a curvatura quadridimensional, isto é, o tensor de Riemann ${}^{(4)}R^\mu_{\nu\alpha\beta}$, em termos da curvatura intrínseca ${}^{(3)}R^i_{jkl}$ da hipersuperfície Σ_t e da curvatura extrínseca K_{ij} . Podemos obter isso por meio das equações de Gauss-Codazzi, que derivamos ao projetar o tensor de Riemann quadridimensional sobre uma base adaptada à foliação, formada por vetores tangentes às hipersuperfícies espaciais e pelo vetor normal n^μ [109, 112]. A derivação detalhada dessas identidades pode ser consultada na referência [106]

$${}^{(4)}R^m_{ijk} = {}^{(3)}R^m_{ijk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij} K_k^m - K_{ik} K_j^m) \tag{3.23}$$

$${}^{(4)}R^n_{ijk} = \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} {}^{(4)}R_{nijk} = -\frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij|k} - K_{ik|j}) . \tag{3.24}$$

Na literatura também se apresenta a equação [86],

$${}^{(4)}R^{in}_{in} = \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} [K^2 - K_{ij} K^{ij}] - (n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} + (n^\alpha n^\beta_{;\alpha})_{;\beta} , \tag{3.25}$$

onde $K = g^{ij} K_{ij} = K^i_i$ é o traço da curvatura extrínseca e o índice n está associado à coordenada t .

Com isso, estabelecemos a relação entre a curvatura do espaço-tempo e a geometria associada a cada hipersuperfície tridimensional [112]. Desse modo, as equações (3.23), (3.24) e (3.25) estabelecem a ponte geométrica fundamental que permite formular a Relatividade Geral na estrutura 3 + 1 do formalismo ADM, como veremos mais adiante.

3.1.3 Lagrangiano e Hamiltoniano ADM

Utilizando as equações (3.23)-(3.25), reescreveremos a ação de Einstein-Hilbert em termos da curvatura intrínseca ${}^{(3)}R^m_{ijk}$ da hipersuperfície Σ_t e da curvatura extrínseca K_{ij} . Recordemos que a ação gravitacional é dada por

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} {}^{(4)}R \quad (3.26)$$

onde ${}^{(4)}R$ é o escalar de Ricci quadridimensional e g é o determinante da métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$.

Para aplicar as equações de Gauss-Codazzi (3.23)-(3.25), começamos expandindo explicitamente o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R^\mu_{\alpha\mu\beta} = R^{\mu\beta}_{\mu\beta} \\ &= R^{00}_{00} + R^{0i}_{0i} + R^{i0}_{i0} + R^{ij}_{ij} \\ &= 2 R^{0i}_{0i} + R^{ij}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nessa expressão, o termo R^{00}_{00} se anula devido à antissimetria do tensor de Riemann nos dois últimos índices, da qual segue que $R_{\alpha\beta 00} = 0$ e, conseqüentemente, $R^{00}_{00} = 0$. Além disso, por definição, $R^{0i}_{0i} = g^{0\alpha} g^{i\beta} R_{\alpha\beta 0i}$. Utilizamos a simetria por troca de pares do tensor de Riemann, $R_{\alpha\beta 0i} = R_{0i\alpha\beta}$, e, em seguida, a antissimetria em cada par de índices, $R_{0i\alpha\beta} = -R_{i0\alpha\beta}$, $R_{i0\alpha\beta} = -R_{i0\beta\alpha}$. Combinando essas propriedades, obtemos diretamente $R^{0i}_{0i} = R^{i0}_{i0}$. Esses resultados justificam a última igualdade em (3.27).

O passo seguinte consiste em expressar o termo R^{ij}_{ij} em função da curvatura intrínseca e extrínseca. Para isso, elevamos o segundo índice “ i ” na equação de Gauss-Codazzi (3.23), obtendo

$${}^{(4)}R^{mi}_{jk} = {}^{(3)}R^{mi}_{jk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left(K^i_j K^m_k - K^i_k K^m_j \right). \quad (3.28)$$

Em seguida, realizando a troca de índices nessa expressão ($m \rightarrow i$, $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$, $k \rightarrow j$) e combinando com (3.25), podemos reescrever ${}^{(4)}R$ da equação (3.27), resultando

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R &= \frac{2}{n_\alpha n^\alpha} \left[K^2 - K_{ij} K^{ij} \right] - 2 \left(n^\alpha n^\beta_{;\beta} \right)_{;\alpha} + 2 \left(n^\alpha n^\beta_{;\alpha} \right)_{;\beta} \\ &\quad + {}^{(3)}R^{ij}_{ij} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left(K^j_i K^i_j - K^j_j K^i_i \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

Observamos que $K^j_i K_j^i = K_{ij} K^{ij}$ e que $K^j_j = K$ corresponde ao traço da curvatura extrínseca. Além disso, a contração ${}^{(3)}R^{ij}_{ij}$ com a métrica espacial h_{ij} produz o escalar de Ricci tridimensional ($R^{kj}_{kj} = h^{ij} R^k_{ikj} = h^{ij} R_{ij} = {}^{(3)}R$). Com essas identidades e simplificando termos redundantes, obtemos finalmente

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} [K_{ij} K^{ij} - K^2] - 2 (n^\alpha n^\beta)_{;\beta}{}_{;\alpha} + 2 (n^\alpha n^\beta)_{;\alpha}{}_{;\beta} . \quad (3.30)$$

Essa decomposição do escalar de Ricci expressa ${}^{(4)}R$ em termos de quantidades definidas sobre a hipersuperfície espacial e de sua imersão no espaço-tempo. Para incorporá-la na ação gravitacional, substituímos a expressão (3.30) na ação de Einstein-Hilbert (3.26), obtendo

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left[{}^{(3)}R - \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij} K^{ij} - K^2) \right] N \sqrt{h} dt d^3x - \frac{1}{8\pi} \int (n^\alpha n^\beta)_{;\beta}{}_{;\alpha} N \sqrt{h} dt d^3x + \frac{1}{8\pi} \int (n^\alpha n^\beta)_{;\alpha}{}_{;\beta} N \sqrt{h} dt d^3x , \quad (3.31)$$

onde utilizamos $\sqrt{-g} d^4x = N \sqrt{h} dt d^3x$, com $g = \det(g_{\alpha\beta})$ o determinante da métrica quadridimensional e $h = \det(h_{ij})$ o determinante da métrica induzida em cada hipersuperfície espacial. A demonstração detalhada da relação entre os elementos de volume quadridimensional e tridimensional, é apresentada no Apêndice B.

Os dois últimos termos na equação (3.31) são divergências totais que, ao serem integradas sobre o espaço-tempo, tornam-se contribuições avaliadas apenas na fronteira do domínio de integração. Sob condições físicas razoáveis, por exemplo, supondo que as hipersuperfícies espaciais sejam compactas ou que os campos decaíam suficientemente rápido no infinito, essas contribuições de fronteira se anulam e, portanto, não influenciam a dinâmica do interior do espaço-tempo [109, 112].

A partir dessa consideração, escrevemos a ação gravitacional (3.31) exclusivamente em termos da geometria intrínseca h_{ij} e da curvatura extrínseca K_{ij} . Eliminando as divergências totais e usando $n_\alpha n^\alpha = -1$, obtemos a ação no formalismo ADM

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int [{}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2] N \sqrt{h} dt d^3x . \quad (3.32)$$

Essa expressão constitui o ponto de partida para a formulação lagrangiana e hamiltoniana da Relatividade Geral. Em primeiro lugar, identificamos a densidade lagrangiana gravitacional correspondente a (3.32),

$$\mathcal{L}_G = N h^{1/2} [{}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2] . \quad (3.33)$$

No entanto, nosso objetivo é obter a formulação hamiltoniana, a qual requer identificar o espaço de fase associado à teoria. Para isso, devemos determinar os momentos canonicamente conjugados às variáveis de configuração do sistema. No formalismo ADM, as

variáveis dinâmicas fundamentais são as componentes da métrica espacial h_{ij} , enquanto o lapso N e o deslocamento N^i não evoluem dinamicamente: eles atuam como multiplicadores de Lagrange, o que se reflete no fato de que a lagrangiana não depende de suas derivadas temporais, isto é, $\partial\mathcal{L}_G/\partial\dot{N} = 0$, $\partial\mathcal{L}_G/\partial\dot{N}^i = 0$, conforme discutido em [86].

Portanto, o espaço de fase gravitacional é constituído pelos pares (h_{ij}, Π^{ij}) , onde definimos os momentos canônicos conjugados a h_{ij} da maneira usual por

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\dot{h}_{ij}}. \quad (3.34)$$

O cálculo explícito de $\partial\mathcal{L}_G/\partial\dot{h}_{ij}$ requer manipular a expressão da curvatura extrínseca K_{ij} em termos de $\dot{h}_{ij}$, o que pode ser extenso; a derivação completa é apresentada no Apêndice C. O resultado final é

$$\Pi^{ij} = \sqrt{h} \left[h^{ij} K - K^{ij} \right], \quad (3.35)$$

o qual relaciona diretamente a curvatura extrínseca com os momentos canônicos do campo gravitacional.

Com as relações (3.33) e (3.35) em mãos, já podemos construir a densidade hamiltoniana gravitacional. Recordemos que a passagem da formulação lagrangiana para a formulação hamiltoniana é realizada por meio da transformação de Legendre, a qual define a densidade hamiltoniana como

$$\mathcal{H}_G = \Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_G. \quad (3.36)$$

Após reescrever $\dot{h}_{ij}$ e os termos envolvendo K_{ij} na densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_G$, Eq. (3.33), em termos dos momentos canônicos Π_{ij} Eq. (3.34), obtemos finalmente a densidade hamiltoniana gravitacional. A dedução passo a passo é apresentada no Apêndice D. O resultado é

$$\mathcal{H}_G = N \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2) - \sqrt{h} {}^{(3)}R \right] - 2N_i (\Pi^{ij}{}_{|j}), \quad (3.37)$$

onde $\Pi = h_{ij}\Pi^{ij}$ é o traço do momento canônico, Π^{ij} é um tensor simétrico, e a barra vertical $|$ denota a derivada covariante associada à métrica espacial h_{ij} .

Um aspecto essencial do formalismo hamiltoniano é identificar a estrutura geométrica que serve de base à teoria. Nesse contexto, introduzimos a métrica do superespaço, que caracteriza a geometria do espaço das métricas tridimensionais h_{ij} [113]. DeWitt propôs originalmente sua definição como [67],

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left[h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl} \right], \quad (3.38)$$

e satisfaz as simetrias

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \mathcal{G}_{jikl} = \mathcal{G}_{ijlk} = \mathcal{G}_{klij}. \quad (3.39)$$

Essa métrica expressa a parte cinética do Hamiltoniano gravitacional. De fato, ao contrair $\mathcal{G}_{ijkl}$ com os momentos canônicos, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} &= \frac{1}{2} h^{-1/2} \left(h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl} \right) \Pi^{ij} \Pi^{kl} \\
&= \frac{1}{2} h^{-1/2} \left(h_{ik} h_{jl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} + h_{il} h_{jk} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h_{ij} h_{kl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} \right) \\
&= \frac{1}{2} h^{-1/2} \left(\Pi^{ij} \Pi_{ij} + \Pi^{ij} \Pi_{ji} - \Pi^2 \right) \quad (\text{por simetria, } \Pi_{ji} = \Pi_{ij}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij} \Pi^{ij} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Esse resultado reproduz exatamente o termo cinético presente em (3.37). Portanto, podemos reescrever a densidade hamiltoniana gravitacional como

$$\mathcal{H}_G = N \left[\mathcal{G}_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R \right] - 2N_i (\Pi^{ij}{}_{|j}). \tag{3.41}$$

A partir dessa expressão, introduzimos naturalmente as funções $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^i$, que agrupam os termos que multiplicam o lapso N e o deslocamento N^i , respectivamente

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R, \quad \mathcal{H}^i = -2(\Pi^{ij}{}_{|j}), \tag{3.42}$$

o que nos permite escrever a densidade hamiltoniana de forma compacta como

$$\mathcal{H}_G = N \mathcal{H} + N_i \mathcal{H}^i. \tag{3.43}$$

Aqui, $\mathcal{H}$ recebe o nome de super-hamiltoniano, enquanto $\mathcal{H}^i$ é conhecido como supermomento.

Isolando $\mathcal{L}_G$ na expressão (3.36) e substituindo-a em (3.32), podemos escrever a ação gravitacional fazendo uso de (3.42) da seguinte forma

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left(\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} - N \mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i \right) dt d^3x. \tag{3.44}$$

Ao variar essa ação gravitacional com respeito ao lapso N e ao deslocamento N^i , impondo estacionariedade sob variações arbitrárias δN e δN^i , obtemos:

$$\frac{\delta S_G}{\delta N} = 0 \implies \mathcal{H} = 0, \tag{3.45}$$

$$\frac{\delta S_G}{\delta N_i} = 0 \implies \mathcal{H}^i = 0, \tag{3.46}$$

onde a condição $\mathcal{H} = 0$ corresponde ao vínculo do super-hamiltoniano, enquanto a condição $\mathcal{H}^i = 0$ corresponde ao vínculo do supermomento. Essas equações são análogas, respectivamente, às componentes $G_{00} = 0$ e $G_{0i} = 0$ das equações de Einstein.

De maneira semelhante, ao variar a ação gravitacional com respeito ao momento canônico Π^{ij} e à métrica h_{ij} , impondo estacionariedade sob variações arbitrárias $\delta\Pi^{ij}$ e δh_{ij} , obtemos

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\delta S_G}{\delta \Pi^{ij}} = 2h^{-1/2}N \left(\Pi_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\Pi \right) + 2N_{(j|i} \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ij} = & -\frac{\delta S_G}{\delta h_{ij}} = -Nh^{-1/2} \left({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2}{}^{(3)}R h^{ij} \right) + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ij} \left(\Pi_{kl}\Pi^{kl} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) \\ & - 2Nh^{-1/2} \left(\Pi^{ik}\Pi_k{}^j - \frac{1}{2}\Pi\Pi^{ij} \right) + h^{1/2} \left(N^{[i|j} - h^{ij}N_{|k}{}^{k]} \right) \\ & + h^{1/2} \left(h^{-1/2}N^k\Pi^{ij} \right)_{|k} - 2\Pi^{k(i}N^{j)}_{|k}, \end{aligned} \quad (3.47b)$$

onde os parênteses sobre os índices indicam “()” simetrização.

As equações de evolução ($\dot{h}_{ij}$, $\dot{\Pi}_{ij}$) em (3.47a) e (3.47b) constituem o análogo hamiltoniano das equações espaciais de Einstein, isto é, correspondem dinamicamente a $G_{ij} = 0$. Em conjunto com as condições de vínculo $\mathcal{H} = 0$ e $\mathcal{H}^i = 0$, formam o sistema completo de equações do formalismo ADM.

3.2 FLUIDO PERFEITO NO FORMALISMO DE SCHUTZ

O formalismo variacional de Schutz, desenvolvido por B. F. Schutz no início da década de 1970 [81], permite descrever um fluido perfeito por meio de potenciais escalares, de modo que, na formulação hamiltoniana, o sistema admite uma variável interna que pode desempenhar o papel de tempo no contexto quântico [114].

Tomamos como ponto de partida a ação do fluido perfeito escrita em termos da pressão,

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} p, \quad (3.48)$$

onde p denota a pressão do fluido e $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica quadridimensional. No formalismo ADM, essa ação assume a forma

$$S_M = \int dt d^3x N \sqrt{h} p, \quad (3.49)$$

onde N é a função lapso e $h = \det(h_{ij})$ corresponde ao determinante da métrica sobre a hipersuperfície espacial.

No formalismo de Schutz, é necessário introduzir certas relações termodinâmicas que permitem reescrever a ação (3.49) de forma mais adequada. Em particular, a descrição do fluido baseia-se na introdução de potenciais termodinâmicos, a partir dos quais se define a quadrivelocidade do fluido [81],

$$U_\mu = \frac{1}{\lambda} (\varphi_{,\mu} + \eta \zeta_{,\mu} + \vartheta s_{,\mu}), \quad (3.50)$$

onde λ é a entalpia, φ é o potencial de velocidade, s é a entropia, ϑ é o potencial conjugado à entropia, enquanto η e ζ estão associados aos graus de liberdade vorticosos do fluido. A quadrivelocidade satisfaz a condição de normalização

$$U_\mu U^\mu = -1. \quad (3.51)$$

Neste trabalho, por simplicidade, consideramos um fluido sem vorticidade, de modo que os termos η e ζ não são levados em conta na expressão (3.50). Ao substituir a definição da quadrivelocidade na condição de normalização, obtemos

$$\lambda^2 = -g^{\mu\nu} (\varphi_{,\mu} + \vartheta s_{,\mu}) (\varphi_{,\nu} + \vartheta s_{,\nu}). \quad (3.52)$$

Para modelos de Universo homogêneo, como por exemplo FLRW, as quantidades físicas dependem apenas do tempo, e os potenciais termodinâmicos são funções temporais. Nesse caso, a equação (3.52) reduz-se a

$$\lambda^2 = -g^{00} (\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s})^2. \quad (3.53)$$

Utilizando a relação $g^{00} = -1/N^2$ da decomposição ADM, a expressão anterior resulta em

$$\lambda = \frac{1}{N} (\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}), \quad (3.54)$$

que representa a entalpia do fluido relativístico expressa em termos dos potenciais de Schutz sob condições de homogeneidade e ausência de vorticidade.

Além disso, a pressão do fluido pode ser expressa como uma função das variáveis termodinâmicas, em particular da entalpia e da entropia. Obtemos essa relação a partir da primeira lei da termodinâmica relativística, juntamente com a equação de estado, e sua dedução detalhada é apresentada no Apêndice E. O resultado final permite escrever a pressão diretamente como

$$p(\lambda, s) = \alpha \left(\frac{\lambda}{1 + \alpha} \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}. \quad (3.55)$$

Em consequência, ao substituir a expressão da pressão (3.55) na ação (3.49), e utilizando a relação (3.54) para a entalpia, obtemos finalmente uma expressão explícita da ação de matéria em função dos potenciais de Schutz,

$$S_M = \int dt \, d^3x \, N \sqrt{h} \, \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{N(1 + \alpha)} \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}. \quad (3.56)$$

Essa expressão constitui o ponto de partida para a formulação hamiltoniana do fluido perfeito e será empregada nas seções seguintes para identificar as variáveis canônicas e analisar a dinâmica do sistema tanto em nível clássico quanto quântico.

4 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA E NÃO COMUTATIVIDADE NO ESPAÇO DE FASE

Desenvolvemos neste capítulo a formulação quântica do modelo cosmológico no contexto da quantização canônica e não comutativa. Apresentamos a estrutura de parênteses de Poisson, a quantização de Dirac e a equação de WDW. Em seguida, introduzimos a quantização por deformação como uma abordagem para incorporar a não comutatividade no espaço de fase. Por fim, discutimos as principais dificuldades conceituais da quantização da gravidade e as estratégias adotadas nesta tese para tratá-las.

4.1 PARÊNTESES DE POISSON E QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Na mecânica clássica, os parênteses de Poisson constituem uma operação binária $\{\cdot, \cdot\}$ definida sobre o espaço de funções suaves. Essa operação associa a dois observáveis clássicos f e g outra função $\{f, g\}$ e codifica simultaneamente a estrutura algébrica do espaço de observáveis e a dinâmica hamiltoniana do sistema [115–117].

Para funções suaves $f(q_i, p_i)$ e $g(q_i, p_i)$ definidas sobre o espaço de fase canônico, com coordenadas canônicas (q_i, p_i) , os parênteses de Poisson são definidos explicitamente como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (4.1)$$

onde q_i representam as coordenadas generalizadas e p_i seus momentos canonicamente conjugados.

Em particular, ao aplicar a definição anterior (4.1) às variáveis canônicas, obtemos as relações fundamentais

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que vale 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. Essas relações caracterizam a estrutura canônica do espaço de fase e constituem o ponto de partida do procedimento de quantização canônica [118, 119].

De maneira formal, a quantização canônica é um procedimento para passar de um sistema clássico a um sistema quântico. Nesse enfoque, os observáveis clássicos definidos como funções sobre o espaço de fase são promovidos a operadores lineares que atuam sobre um espaço de Hilbert, enquanto os parênteses de Poisson são substituídos por comutadores de operadores, de acordo com a regra [119]

$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (4.3)$$

onde $\hat{f}$ e $\hat{g}$ são os operadores associados aos observáveis clássicos f e g , respectivamente, e $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ denota o comutador, i é a unidade imaginária e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

Aplicando essa regra às variáveis canônicas do sistema, as relações fundamentais de Poisson (4.2) traduzem-se nas relações de comutação canônicas

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (4.4)$$

Essas relações de comutação refletem a estrutura quântica dos observáveis, em contraste com a descrição clássica baseada em funções contínuas sobre o espaço de fase e nos parênteses de Poisson.

4.2 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA E EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT

Para proceder à quantização da Relatividade Geral no formalismo ADM, recorreremos à quantização hamiltoniana de sistemas vinculados. De fato, a Relatividade Geral constitui uma teoria vinculada, o que se manifesta explicitamente na presença dos vínculos, obtidos ao variar a ação gravitacional em relação à função lapso N (3.45) e ao vetor deslocamento N^i (3.46), respectivamente.

Dirac desenvolveu originalmente o procedimento para a quantização desse tipo de sistemas. Esse formalismo fornece um conjunto bem definido de regras para promover as variáveis canônicas a operadores quânticos e impor os vínculos clássicos como condições sobre os estados físicos [107, 108, 120]. No que segue, adaptaremos esse procedimento ao caso particular do Hamiltoniano gravitacional na formulação ADM, o que nos conduzirá naturalmente à equação de Wheeler–DeWitt (WDW).

- i) Tomamos como variáveis canônicas a métrica espacial $h_{ij}(\mathbf{x})$ e seu momento canônico conjugado $\Pi^{ij}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} \equiv (x^i)$, $i = 1, 2, 3$, denota as coordenadas espaciais sobre a hipersuperfície. Ao promover essas variáveis a operadores quânticos, impomos as relações de comutação canônicas usuais:

$$[\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{h}_{kl}(\mathbf{x}')] = 0, \quad (4.5a)$$

$$[\hat{\Pi}^{ij}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}^{kl}(\mathbf{x}')] = 0, \quad (4.5b)$$

$$[\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}^{kl}(\mathbf{x}')] = \frac{i}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.5c)$$

- ii) Escolhemos a representação na qual os estados quânticos são funcionais das variáveis de configuração do sistema. Nessa representação, promovemos o momento canônico conjugado à métrica espacial a um operador diferencial funcional em relação a $h_{ij}(\mathbf{x})$. Desse modo, tem-se

$$\hat{\Pi}^{kl}(\mathbf{x}) \longrightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{kl}(\mathbf{x})}. \quad (4.6)$$

- iii) Descrevemos o estado quântico do sistema por um funcional definido no espaço de configurações, o qual depende da métrica espacial $h_{ij}(\mathbf{x})$,

$$\Psi = \Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]. \quad (4.7)$$

- iv) Promovemos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^i$ em (3.42) a operadores quânticos e impostos como condições sobre os estados físicos do sistema. Ao substituir as expressões operatoriais da variável de configuração canônica e de seu momento canônico nesses vínculos, obtemos as equações funcionais:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0 \implies -\mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ij}(\mathbf{x}) \delta h_{kl}(\mathbf{x})} - h^{1/2} {}^{(3)}R\Psi = 0, \quad (4.8a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^i\Psi = 0 \implies \left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}(\mathbf{x})} \right)_{|j} = 0. \quad (4.8b)$$

Essas duas equações constituem a descrição quântica canônica da Relatividade Geral no formalismo ADM. Em particular, a equação (4.8a) corresponde à imposição quântica do vínculo hamiltoniano e é conhecida como a equação de Wheeler–DeWitt, enquanto a equação (4.8b) expressa a imposição do vínculo de momento, garantindo a invariância do estado quântico sob difeomorfismos espaciais tridimensionais [67, 121, 122]. Podemos compreender seu conteúdo físico analisando separadamente o significado de cada vínculo.

No caso do vínculo superhamiltoniano, é importante salientar que sua presença reflete, já no nível clássico, a invariância da RG na formulação ADM sob reparametrizações do parâmetro temporal [107, 121, 123]. Em consequência, a dinâmica do sistema não é formulada como uma evolução em relação a um tempo externo privilegiado, mas fica expressa como uma condição de vínculo (3.45) sobre as variáveis canônicas [67, 124]. Ao aplicar o procedimento de quantização de Dirac, essa propriedade se traduz na equação de WDW, a qual atua como uma equação funcional sobre o estado quântico $\Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]$, e não como uma equação de evolução temporal no sentido usual [123]. Desse ponto de vista, devemos entender a equação de WDW como uma condição fundamental que seleciona os estados físicos admissíveis [125]. Em geral, essa equação admite um conjunto infinito de soluções, de modo que é necessário impor condições adicionais, como condições de contorno, para especificar um estado físico particular. Além disso, a promoção dos momentos canônicos a operadores funcionais introduz ambiguidades de ordenamento, cuja fixação requer um critério físico ou matemático apropriado, como o proposto originalmente por DeWitt [67]. Existem ainda outras dificuldades técnicas e conceituais na quantização canônica da gravidade, tais como a definição do produto interno e a regularização de operadores funcionais [67, 124, 126], que não abordaremos neste trabalho.

Por outro lado, a condição de vínculo associada ao supermomento (3.46) implica, no nível clássico, que a descrição da RG no formalismo ADM é invariante sob transformações de coordenadas definidas sobre as hipersuperfícies espaciais. Nesse sentido, as variáveis fisicamente relevantes não são dadas pelas métricas espaciais individuais $h_{ij}(\mathbf{x})$, mas por suas classes de equivalência sob difeomorfismos espaciais tridimensionais [86, 105]. No nível quântico, a imposição do vínculo de supermomento traduz-se na exigência de que o

estado quântico do sistema seja invariante sob essas transformações de coordenadas sobre as hipersuperfícies espaciais [67, 123].

4.3 QUANTIZAÇÃO POR DEFORMAÇÃO E PRODUTO ESTRELA

Uma alternativa conceitualmente distinta à quantização canônica é a quantização por deformação, na qual não promovemos os observáveis clássicos a operadores que atuam sobre um espaço de Hilbert. Em seu lugar, preservamos o espaço clássico de observáveis e deforma-se o produto pontual entre funções por meio de um produto não comutativo, denominado produto estrela ($\star$) [118, 127–129].

Nesse enfoque, os observáveis quânticos continuam sendo representados como funções suaves sobre o espaço de fase, enquanto a informação quântica é codificada na lei de composição [118]. Em particular, para um espaço de fase em que os parênteses de Poisson são constantes, podemos escrever explicitamente o produto estrela como [130, 131],

$$(f \star g)(\xi) = \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \omega^{ab} \frac{\partial}{\partial \xi_1^a} \frac{\partial}{\partial \xi_2^b}\right) f(\xi_1) g(\xi_2) \Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (4.9)$$

onde ξ^a é o conjunto de coordenadas do espaço de fase, e ξ é um ponto no espaço de fase; ω^{ab} é a inversa da forma simplética ω_{ab} ,

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ij} \\ -\delta^{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

satisfazendo $\omega^{ac}\omega_{cb} = \delta^a_b$, onde $a, b = 1, \dots, 2n$ e $i, j = 1, \dots, n$.

Ao expandir a exponencial do produto estrela utilizando a expansão de Taylor na equação (4.9), obtemos

$$f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \omega^{ab} \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b} + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (4.11)$$

onde o termo linear em $\hbar$ coincide exatamente com o parêntese de Poisson (4.1),

$$\omega^{ab} \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b} = \{f, g\}. \quad (4.12)$$

A notação $\mathcal{O}(\hbar^2)$ agrupa todas as correções quânticas de ordem quadrática e superior em $\hbar$, que não são escritas explicitamente.

Em consequência da expressão (4.11), no limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$ recuperamos o produto clássico usual, $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f \star g = fg$. Além disso, considerando a parte antissimétrica do produto estrela, definida pelo comutador $f \star g - g \star f$, reproduzimos o parêntese de Poisson,

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} (f \star g - g \star f) = \{f, g\}. \quad (4.13)$$

Em um contexto não comutativo (NC) no espaço de fase, a estrutura simplética dada em (4.10) é deformada, introduzindo não comutatividade tanto entre as coordenadas quanto entre os momentos. Codificamos essa deformação em uma estrutura Ω^{ab} , de modo que o produto estrela assume a forma [131],

$$(f \star g)(\xi) = \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \Omega^{ab} \frac{\partial}{\partial \xi_1^a} \frac{\partial}{\partial \xi_2^b}\right) f(\xi_1) g(\xi_2) \Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (4.14)$$

onde Ω^{ab} é a inversa da forma simplética deformada e pode ser escrita, em uma parametrização geral, como

$$\Omega^{ab} = \begin{pmatrix} \theta^{ij} & \delta^{ij} \\ -\delta^{ij} & \eta^{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Nessa expressão, os parâmetros θ^{ij} e η^{ij} controlam a não comutatividade entre coordenadas e entre momentos, respectivamente, e caracterizam a deformação NC do espaço de fase.

Para obter explicitamente as relações de comutação induzidas por essa estrutura, escolhamos $f(\xi) = \xi^a$ e $g(\xi) = \xi^b$ e os substituimos na definição do produto estrela (4.14). Ao expandir a exponencial em potências de $\hbar$, de maneira análoga ao procedimento utilizado para obter (4.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \xi^a \star \xi^b &= \xi^a \xi^b + \frac{i\hbar}{2} \Omega^{cd} \delta^a_c \delta^b_d + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= \xi^a \xi^b + \frac{i\hbar}{2} \Omega^{ab} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

A partir desse resultado, o comutador estrela entre as coordenadas do espaço de fase é dado por

$$\begin{aligned} [\xi^a, \xi^b]_\star &= \xi^a \star \xi^b - \xi^b \star \xi^a \\ &= (\xi^a \xi^b - \xi^b \xi^a) + \frac{i\hbar}{2} (\Omega^{ab} - \Omega^{ba}) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= i\hbar \Omega^{ab} + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde utilizamos que o produto pontual é comutativo, $\xi^a \xi^b = \xi^b \xi^a$, e que Ω^{ab} é antissimétrica. Além disso, os termos de ordem $\mathcal{O}(\hbar^2)$ correspondem a correções de ordem superior, que se anulam no limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$ ou podem ser desprezados ao trabalhar a primeira ordem em $\hbar$.

No caso particular em que se adota a forma explícita de Ω^{ab} dada em (4.15), e se identificam as coordenadas do espaço de fase como $\xi^a = (q_i, p_i)$, a relação geral $[\xi^a, \xi^b]_\star = i\hbar \Omega^{ab}$ (4.17) conduz diretamente às relações de comutação fundamentais entre coordenadas e momentos,

$$[q_i, q_j]_\star = i\hbar \theta^{ij}, \quad [q_i, p_j]_\star = i\hbar \delta^{ij}, \quad [p_i, p_j]_\star = i\hbar \eta^{ij}. \quad (4.18)$$

Essas relações mostram que a estrutura do espaço de fase fica completamente determinada por Ω^{ab} . Em particular, o bloco θ^{ij} codifica a não comutatividade do espaço de configurações, o bloco η^{ij} introduz uma deformação na estrutura dinâmica do espaço de momentos, enquanto o bloco δ^{ij} preserva o acoplamento canônico entre coordenadas e momentos [131, 132].

4.4 PROBLEMAS DE INTERPRETAÇÃO NA QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA GRAVIDADE

A quantização canônica da gravidade, por meio do formalismo ADM e do procedimento de Dirac, conduz à equação de WDW, cuja forma $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ revela profundas dificuldades interpretativas [4, 67]. Em particular, a ausência de uma derivada temporal explícita dá origem ao denominado problema do tempo, que impede uma interpretação evolutiva padrão da função de onda do Universo [4, 124]. A isso se soma a dificuldade de definir um produto escalar positivo e conservado, devido à estrutura da equação do tipo Klein–Gordon, assim como a ausência de um observador externo, uma vez que o sistema em estudo é o Universo em sua totalidade [4]. Essas limitações tornam inaplicável a interpretação de Copenhague na cosmologia quântica, motivando a busca por abordagens alternativas capazes de descrever sistemas fechados sem recorrer ao colapso da função de onda. Nesse contexto, o formalismo de Schutz permite introduzir uma noção de tempo associada aos graus de liberdade do fluido, fornecendo um caminho para recuperar uma descrição dinâmica [82].

Uma das alternativas conceituais mais relevantes corresponde à interpretação de muitos mundos, proposta por Hugh Everett III, que postula que todos os resultados possíveis de um processo quântico se realizam em diferentes ramos do Universo, sem a necessidade de introduzir o colapso da função de onda [133]. Sob essa perspectiva, existe uma função de onda universal que descreve simultaneamente todos os graus de liberdade, e o processo de medição é interpretado como uma correlação entre subsistemas, eliminando a distinção fundamental entre sistema e observador [134]. Essa formulação é particularmente adequada na cosmologia quântica, onde não é possível definir um observador externo. Ainda assim, persiste o problema de selecionar soluções fisicamente relevantes da equação de WDW, o que conduz a propostas como a função de onda de Hartle–Hawking [74]. Esta se baseia no formalismo da integral de caminho desenvolvido por Feynman [135], no qual a função de onda do Universo é obtida como uma soma sobre histórias possíveis, fornecendo uma generalização natural da mecânica quântica e um quadro consistente para abordar a nucleação quântica do Universo.

5 MODELOS NÃO COMUTATIVOS DE BIANCHI I E III NA ERA DA RADIAÇÃO: DINÂMICA E ESTIMATIVA DE γ

Estudamos neste capítulo a dinâmica de modelos cosmológicos homogêneos e anisotrópicos do tipo Bianchi I e III no contexto de uma extensão não comutativa do espaço de fase. Utilizando o formalismo hamiltoniano ADM e a descrição de fluidos perfeitos via formalismo de Schutz, construímos a dinâmica clássica dos modelos LRS e introduzimos correções não comutativas parametrizadas pelo parâmetro γ . Nosso objetivo é analisar de que maneira tais correções afetam a expansão, a anisotropia e o processo de isotropização do Universo na era dominada por radiação, bem como estabelecer possíveis conexões com estimativas cosmológicas do parâmetro não comutativo γ . Uma outra motivação importante é a possibilidade que a NC possa descrever a expansão acelerada do universo, ao invés do uso de algum tipo de matéria exótica.

5.1 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO MODELO COSMOLÓGICO LRS

O elemento de linha localmente rotacionalmente simétrico (LRS, *locally rotationally symmetric*), que abrange os espaços-tempos de Bianchi I (BI), Kantowski-Sachs (KS) e Bianchi III (BIII) [63, 64, 136–138], fornece uma descrição unificada desses Universos homogêneos e anisotrópicos. Inspirados na parametrização de Misner [139], escrevemos o elemento de linha LRS na forma [140],

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 e^{-\beta(t)} dr^2 + a(t)^2 e^{\beta(t)} (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\phi^2). \quad (5.1)$$

Aqui, $a(t)$ representa o fator de escala isotrópico, $\beta(t)$ descreve o grau de anisotropia, $N(t)$ é a função lapso, e $f(\theta)$ assume as formas específicas $f(\theta) = \theta$, $\sin(\theta)$, $\sinh(\theta)$ para os espaços-tempos BI, KS e BIII, respectivamente.

No presente capítulo, utilizamos inicialmente as unidades geometrizadas, introduzidas pela primeira vez na Ref. [106]. Nessas unidades, a velocidade da luz c , a constante gravitacional de Newton $8\pi G$ e a constante de Boltzmann κ são todas iguais à unidade. A unidade padrão, em termos da qual tudo é medido neste capítulo, é o centímetro. Caso desejemos recuperar as unidades usuais, devemos multiplicar ou dividir a grandeza pelo fator de conversão correspondente. Por exemplo, se temos um intervalo de tempo expresso em unidades geometrizadas e desejamos convertê-lo para segundos, dividimos esse valor pelo fator de conversão $1.0 = c = 2.997930 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$. Para uma lista completa dos fatores de unidade, ver a Ref. [106]. Entretanto, na Seção 5.4 utilizamos unidades convencionais para estimar o parâmetro NC γ . A principal motivação para o uso das unidades geometrizadas é que elas permitem empregar escalas de tempo e valores de parâmetros que viabilizam os cálculos numéricos e a produção de gráficos nos quais o comportamento das funções é facilmente visualizado.

Na métrica (5.1), a anisotropia depende do parâmetro $\beta(t)$, que produz diferenças nas taxas de expansão ao longo de diferentes direções espaciais. Espera-se que $\beta(t) \rightarrow$ constante ou zero em tempos tardios, implicando que o Universo, embora inicialmente anisotrópico, evolui em direção a um estado isotrópico do tipo FRW. É conhecido na literatura que os espaços-tempos de Bianchi I e Kantowski-Sachs tendem ao espaço-tempo FRW em tempos tardios. No entanto, o espaço-tempo de Bianchi III não alcança um espaço-tempo FRW exato em tempos tardios. Ainda assim, ele se torna muito semelhante a um espaço-tempo FRW durante um período de sua evolução [141]. Neste capítulo, estudaremos as condições sob as quais o espaço-tempo de Bianchi III se torna muito semelhante a um espaço-tempo FRW.

Para desenvolver a formulação dinâmica do modelo, é conveniente expressar a métrica (5.1) no formalismo ADM. Nesse formalismo, escrevemos o elemento de linha geral como

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + h_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad (5.2)$$

onde $N(t)$ é a função lapso e h_{ij} representa a métrica induzida nas hipersuperfícies espaciais. Para o caso LRS considerado, não há termos de deslocamento espacial (*shift*), isto é, $N^i = 0$, em concordância com a homogeneidade do modelo. Comparando as Eqs. (5.1) e (5.2), identificamos a métrica espacial induzida como

$$h_{ij} = \text{diag}\left(a(t)^2 e^{-\beta(t)}, a(t)^2 e^{\beta(t)}, a(t)^2 e^{\beta(t)} f(\theta)^2\right), \quad (5.3)$$

onde os índices espaciais i, j correspondem às coordenadas (r, θ, ϕ) . O determinante da métrica espacial é dado por

$$h \equiv \det(h_{ij}) = a(t)^6 e^{\beta(t)} f(\theta)^2, \quad (5.4)$$

mostrando que o determinante da métrica espacial depende do fator de escala isotrópico $a(t)$ e da parametrização anisotrópica $\beta(t)$. O elemento de volume tridimensional é dado por $dV = \sqrt{h} d^3x$, sendo que o grau de liberdade volumétrico está associado exclusivamente ao fator de escala, enquanto $\beta(t)$ descreve anisotropias de forma.

A curvatura extrínseca associado à hipersuperfície espacial é definida em (3.22) e, para este caso, assume a forma

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \dot{h}_{ij}, \quad (5.5)$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo coordenado t . A partir dessa definição, pode-se calcular o escalar de curvatura extrínseca $K = h^{ij} K_{ij}$ e a combinação quadrática $K_{ij} K^{ij}$, que entram explicitamente na ação gravitacional.

A ação de Einstein-Hilbert no formalismo ADM, descrita na expressão (3.32), em unidades geometrizadas, assume a forma

$$S_G = \frac{1}{2} \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R \right), \quad (5.6)$$

onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura associado à métrica espacial h_{ij} . No caso dos modelos LRS considerados, ${}^{(3)}R$ depende da função $f(\theta)$, que caracteriza a geometria do espaço homogêneo, permitindo distinguir os casos de Bianchi I, Kantowski-Sachs e Bianchi III.

Para a métrica LRS dada em (5.3), a curvatura extrínseca (5.5) é diagonal, e obtemos diretamente seus componentes não nulos a partir das derivadas temporais das componentes da métrica espacial. Com isso, podemos escrever a combinação que aparece na ação gravitacional, após manipulações algébricas, como

$$K_{ij}K^{ij} - K^2 = \frac{1}{N^2} \left[-6\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \right]. \quad (5.7)$$

A dedução completa desta expressão, incluindo o cálculo detalhado dos componentes da curvatura extrínseca e das combinações $K_{ij}K^{ij}$ e K^2 , é apresentada no Apêndice F.

Por sua vez, o escalar de curvatura tridimensional associado à métrica espacial (5.3) assume a forma

$${}^{(3)}R = -\frac{2e^{-\beta(t)}}{a(t)^2} \frac{f''(\theta)}{f(\theta)}, \quad (5.8)$$

mostrando explicitamente que a dependência espacial da curvatura tridimensional ${}^{(3)}R$ é determinada pela função $f(\theta)$, enquanto os fatores $a(t)$ e $\beta(t)$ atuam como reescalas temporais. Para os modelos LRS considerados, a razão $\frac{f''(\theta)}{f(\theta)}$ é constante e pode ser escrita como $\frac{f''(\theta)}{f(\theta)} = -\kappa$, onde $\kappa = 0$ corresponde ao modelo de Bianchi I, $\kappa = -1$ ao modelo de Bianchi III e $\kappa = 1$ ao espaço-tempo de Kantowski-Sachs.

Para as escolhas específicas de $f(\theta)$ correspondentes aos diferentes espaços-tempos homogêneos considerados, obtemos os seguintes resultados:

$${}^{(3)}R = \begin{cases} 0, & \text{Bianchi I } (f(\theta) = \theta), \\ \frac{2e^{-\beta}}{a^2}, & \text{Kantowski-Sachs } (f(\theta) = \sin \theta), \\ -\frac{2e^{-\beta}}{a^2}, & \text{Bianchi III } (f(\theta) = \sinh \theta). \end{cases} \quad (5.9)$$

Esses resultados evidenciam que o escalar de curvatura tridimensional distingue de forma inequívoca os três espaços-tempos homogêneos considerados, sendo nulo no caso de Bianchi I, positivo para Kantowski-Sachs e negativo para Bianchi III. A dedução completa da expressão geral (5.8), bem como a obtenção explícita dos casos particulares apresentados em (5.9), é apresentada no Apêndice G.

Em seguida, introduzimos o conteúdo energético do Universo, que é modelado por meio de um fluido perfeito. A quadrivelocidade desse fluido, usualmente escrita como $U^\mu = N(t)\delta_0^\mu$, define um sistema de referência comóvel no qual a matéria não apresenta movimento espacial e evolui unicamente no tempo. Essa escolha é consistente com a homogeneidade dos modelos cosmológicos considerados e simplifica de maneira significativa

a formulação dinâmica do sistema. Nesse contexto, o tensor energia-momento do fluido perfeito assume a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

onde ρ representa a densidade de energia, p a pressão e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo. Assumimos uma equação de estado do tipo barotrópico,

$$p = \alpha \rho, \quad (5.11)$$

onde α é um parâmetro constante que caracteriza o tipo de fluido considerado.

Com o objetivo de introduzirmos a não comutatividade como uma deformação da álgebra de Poisson entre as variáveis do espaço de fases do modelo, escrevemos explicitamente os Hamiltonianos gravitacional e de matéria. Para o setor material, adotamos o formalismo variacional de Schutz [81], que fornece uma descrição canônica consistente de um fluido perfeito com equação de estado (5.11) e permite a construção do Hamiltoniano correspondente. Nesse formalismo, a ação da matéria, escrita no contexto ADM e discutida no Capítulo 3, é dada pela seguinte expressão

$$S_M = \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{N(1 + \alpha)} \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}, \quad (5.12)$$

onde φ e ϑ são potenciais escalares introduzidos no formalismo de Schutz que participam da descrição canônica do fluido perfeito e permitem a identificação de variáveis canônicas adequadas para sua formulação hamiltoniana. Aqui, s representa a entropia específica e o ponto denota derivada com respeito ao tempo t .

Desse modo, a dinâmica completa do modelo cosmológico LRS fica descrita pela soma dos setores gravitacional e material. Substituindo explicitamente as expressões (5.7) e (5.8) na ação gravitacional (5.6), e somando a contribuição de matéria (5.12), obtemos a ação total S do sistema (geometria + matéria)

$$\begin{aligned} S = S_G + S_M = & \frac{1}{2} \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \left[\frac{1}{N^2} \left(-6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \right) + \frac{2e^{-\beta}}{a^2} \kappa \right] \\ & + \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{N(1 + \alpha)} \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Em seguida, consideramos a integral tridimensional $\int d^3x \sqrt{h} = a^3 e^{\beta/2} \int dr d\theta d\phi f(\theta)$, onde toda a dependência espacial fica contida na integral $V_0 \equiv \int dr d\theta d\phi f(\theta)$, que define um volume constante. Esse volume pode ser adotado como unitário, sem perda de generalidade, sendo absorvido na ação. Dessa forma, reescrevemos a ação (5.13) de modo equivalente como

$$S = \int \left[a N \kappa e^{-\frac{\beta}{2}} - \frac{a^2 \dot{a} \dot{\beta} e^{\frac{\beta}{2}}}{N} - \frac{3a \dot{a}^2 e^{\frac{\beta}{2}}}{N} + \frac{a^3 \dot{\beta}^2 e^{\frac{\beta}{2}}}{4N} + \alpha a^3 N e^{\frac{\beta}{2} - \frac{s}{\alpha}} \left(\frac{\vartheta \dot{s} + \dot{\varphi}}{N(\alpha + 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha} + 1} \right] dt. \quad (5.14)$$

A expressão (5.14) tem a forma $S = \int \mathcal{L} dt$, na qual identificamos diretamente o lagrangiano como o integrando da ação. Em consequência, obtemos o lagrangiano total do sistema

$$\mathcal{L} = aN\kappa e^{-\frac{\beta}{2}} - \frac{a^2\dot{a}\dot{\beta}e^{\frac{\beta}{2}}}{N} - \frac{3a\dot{a}^2e^{\frac{\beta}{2}}}{N} + \frac{a^3\dot{\beta}^2e^{\frac{\beta}{2}}}{4N} + \alpha a^3Ne^{\frac{\beta}{2}-\frac{s}{\alpha}} \left(\frac{\vartheta\dot{s} + \dot{\varphi}}{N(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}+1}. \quad (5.15)$$

Com o lagrangiano $\mathcal{L}$ já identificado, passamos à formulação hamiltoniana do sistema. Para isso, calculamos os momentos canônicos conjugados às variáveis dinâmicas $a(t)$, $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $s(t)$, $N(t)$ e $\vartheta(t)$. Os momentos resultantes são:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{e^{\beta/2}}{N} (a^2\dot{\beta} + 6a\dot{a}), \quad (5.16a)$$

$$p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = \frac{e^{\beta/2}}{N} \left(\frac{a^3}{2}\dot{\beta} - a^2\dot{a} \right), \quad (5.16b)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = a^3e^{\beta/2-s/\alpha} \left(\frac{\vartheta\dot{s} + \dot{\varphi}}{N(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (5.16c)$$

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \vartheta p_\varphi, \quad p_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = 0 \quad (5.16d)$$

As condições $p_N = 0$ e $p_\vartheta = 0$ mostram que o lapso e o potencial ϑ atuam como multiplicadores de Lagrange.

Em seguida, a partir das definições dos momentos canônicos (5.16), o próximo passo consiste em expressar as velocidades em termos dos momentos. Esse procedimento nos permite realizar a transformação de Legendre e formular a descrição hamiltoniana do sistema. Obtemos as seguintes expressões para as velocidades:

$$\dot{a} = -Ne^{-\beta/2} \left(\frac{p_a}{8a} + \frac{p_\beta}{4a^2} \right), \quad (5.17a)$$

$$\dot{\beta} = -Ne^{-\beta/2} \left(\frac{p_a}{4a^2} - \frac{3p_\beta}{2a^3} \right), \quad (5.17b)$$

$$\vartheta\dot{s} + \dot{\varphi} = N(\alpha+1) \left(\frac{p_\varphi}{a^3} \right)^\alpha e^{s-\frac{\alpha\beta}{2}}. \quad (5.17c)$$

Com todas as velocidades expressas em termos dos momentos e das variáveis canônicas, realizamos a transformação de Legendre e obtemos o Hamiltoniano canônico na forma $H = N\mathcal{H}$, onde o vínculo hamiltoniano $\mathcal{H}$ assume a forma

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-\beta/2}}{16a^3} \left(-16a^4\kappa - a^2p_a^2 - 4ap_ap_\beta + 12p_\beta^2 \right) + \left(\frac{p_\varphi^{\alpha+1}}{a^{3\alpha}} \right) e^{s-\frac{\alpha\beta}{2}}. \quad (5.18)$$

Com o objetivo de simplificar a estrutura de $\mathcal{H}$ (5.18) e isolar de maneira explícita a variável que pode desempenhar o papel de um tempo, introduzimos a seguir uma transformação canônica adequada no termo de matéria. Em particular, consideramos as

seguintes transformações canônicas [83, 142]:

$$T = -p_s e^{-s} p_\varphi^{-(\alpha+1)}, \quad p_T = p_\varphi^{\alpha+1} e^s, \quad \bar{\varphi} = \varphi - (\alpha - 1) \frac{p_s}{p_\varphi}, \quad \bar{p}_\varphi = p_\varphi. \quad (5.19)$$

Essas transformações preservam a estrutura canônica do espaço de fases e permitem reescrever o setor material do hamiltoniano exclusivamente em termos do novo par canônico (T, p_T) . Ao substituir as transformações (5.19) no termo de matéria do vínculo hamiltoniano (5.18), obtemos uma expressão para o Hamiltoniano com forma consideravelmente mais simples, dada por

$$H = e^{-\beta/2} \left(-\kappa a - \frac{p_a^2}{16a} - \frac{p_a p_\beta}{4a^2} + \frac{3p_\beta^2}{4a^3} \right) + a^{-3\alpha} e^{-\alpha\beta/2} p_T. \quad (5.20)$$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, adotamos o calibre $N = 1$, de modo que a dinâmica do sistema passa a ser completamente governada pelo vínculo hamiltoniano $\mathcal{H}$.

5.2 DINÂMICA HAMILTONIANA NÃO COMUTATIVA DO MODELO LRS

Consideramos que o Hamiltoniano NC possui a mesma forma funcional do Hamiltoniano comutativo (5.20). Adotamos essa escolha por razões de simplicidade estrutural, pois a introdução de termos adicionais não presentes no Hamiltoniano comutativo, seria de difícil justificativa física. Reescrevemos o Hamiltoniano acrescentando o índice nc às variáveis comutativas, que passamos a denominar variáveis NC. Portanto, escrevemos

$$H_{nc} = e^{-\beta_{nc}/2} \left(-\kappa a_{nc} - \frac{p_{a_{nc}}^2}{16a_{nc}} - \frac{p_{a_{nc}} p_{\beta_{nc}}}{4a_{nc}^2} + \frac{3p_{\beta_{nc}}^2}{4a_{nc}^3} \right) + a_{nc}^{-3\alpha} e^{-\beta_{nc}\alpha/2} p_{T_{nc}}. \quad (5.21)$$

Aqui, $p_{a_{nc}}, p_{\beta_{nc}}, p_{T_{nc}}$ são, respectivamente, os momentos canonicamente conjugados às coordenadas $a_{nc}, \beta_{nc}, T_{nc}$ no modelo NC.

O modelo NC é particularmente relevante para explorar o Universo primordial, onde efeitos de gravidade quântica podem ser significativos [143]. Na cosmologia NC, postulamos que algumas variáveis clássicas do espaço de fase não comutam, o que introduz uma álgebra deformada nesse espaço [53, 55, 57, 59]. Para o presente modelo, introduzimos os seguintes parênteses de Poisson (PBs, “Poisson Brackets”):

$$\{a_{nc}, T_{nc}\} = \{\beta_{nc}, T_{nc}\} = \{p_{a_{nc}}, p_{T_{nc}}\} = \{p_{\beta_{nc}}, p_{T_{nc}}\} = 0 \quad (5.22)$$

$$\{a_{nc}, \beta_{nc}\} = \{a_{nc}, p_{\beta_{nc}}\} = \{\beta_{nc}, p_{a_{nc}}\} = \{p_{a_{nc}}, p_{\beta_{nc}}\} = 0$$

$$\{a_{nc}, p_{a_{nc}}\} = \{\beta_{nc}, p_{\beta_{nc}}\} = \{T_{nc}, p_{T_{nc}}\} = 1 \quad (5.23)$$

$$\{a_{nc}, p_{T_{nc}}\} = \{\beta_{nc}, p_{T_{nc}}\} = \{T_{nc}, p_{a_{nc}}\} = \{T_{nc}, p_{\beta_{nc}}\} = \gamma. \quad (5.24)$$

Aqui, γ é o parâmetro NC, que deve ser uma quantidade pequena e adimensional no Universo atual. Todos os efeitos resultantes da não comutatividade estão concentrados

nesse parâmetro. Neste capítulo, assumimos que γ é pequeno e, por essa razão, todos os cálculos serão realizados apenas até primeira ordem em γ .

De um ponto de vista geral, a álgebra deformada de parênteses de Poisson introduz uma modificação no espaço de fase da teoria. Em particular, como as Eqs. (5.24) correspondem a parênteses de Poisson entre variáveis geométricas e de matéria do espaço de fase e seus respectivos momentos, essa estrutura implica modificações na dinâmica tanto do setor geométrico quanto do setor material. No presente capítulo, investigamos as modificações introduzidas na dinâmica do modelo devido à presença do parâmetro NC γ . Mais precisamente, analisamos como a expansão do Universo é influenciada pela estrutura NC. A principal motivação para nossa escolha das relações de comutação na Eq. (5.24) é uma extensão de uma escolha anterior feita na Ref. [61] ao modelo cosmológico de Bianchi I. Essa escolha permite introduzir novos efeitos associados a não comutatividade e, ao mesmo tempo, facilita a comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e aqueles apresentados na Ref. [61].

Agora, em vez de trabalhar diretamente com as variáveis físicas NC do Hamiltoniano (5.21), por simplicidade introduzimos novas variáveis canônicas auxiliares $(a_c, \beta_c, T_c, p_{a_c}, p_{\beta_c}, p_{T_c})$, definidas como

$$\begin{aligned} a_{nc} &\rightarrow a_c + (\gamma/2)T_c, & p_{a_{nc}} &\rightarrow p_{a_c} + (\gamma/2)p_{T_c}, \\ T_{nc} &\rightarrow T_c + (\gamma/2)a_c, & p_{T_{nc}} &\rightarrow p_{T_c} + (\gamma/2)p_{a_c}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\beta_{nc} \rightarrow \beta_c, \quad p_{\beta_{nc}} \rightarrow p_{\beta_c}.$$

Aqui, (a_c, β_c, T_c) e $(p_{a_c}, p_{\beta_c}, p_{T_c})$ são novas coordenadas e momentos auxiliares em um espaço de fase comutativo. Eles satisfazem os parênteses de Poisson usuais: $\{a_c, p_{a_c}\} = \{\beta_c, p_{\beta_c}\} = \{T_c, p_{T_c}\} = 1$ e todos os demais parênteses de Poisson são nulos. É possível mostrar que as novas expressões das variáveis NC, dadas em termos das variáveis comutativas e de γ nas Eqs. (5.25), satisfazem completamente os parênteses de Poisson (5.22)-(5.24), até primeira ordem em γ . Essas transformações, Eqs. (5.25), são também conhecidas como deslocamentos de Bopp [144]. Essa técnica de transformações do tipo Bopp é particularmente significativa em cosmologia, pois fornece um método para incorporar a não comutatividade em sistemas clássicos por meio da modificação das coordenadas do espaço de fase [53, 57].

Com o auxílio das transformações (5.25), podemos reescrever o Hamiltoniano (5.21)

em termos das novas coordenadas e momentos, até primeira ordem em γ , o que nos fornece

$$H_c = e^{-\frac{\beta_c}{2}} \left(-\kappa \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right) - \frac{\left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2} p_{T_c} \right)^2}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} - \frac{\left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2} p_{T_c} \right) p_{\beta_c}}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} + \frac{3p_{\beta_c}^2}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} \right) + \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha} e^{-\frac{1}{2}\beta_c\alpha} \left(p_{T_c} + \frac{\gamma}{2} p_{a_c} \right). \quad (5.26)$$

Aqui, H_c representa o Hamiltoniano NC expresso em termos das variáveis comutativas auxiliares, denotadas pelo índice c .

O formalismo hamiltoniano descreve a evolução temporal do sistema por meio das equações de Hamilton. Utilizando o hamiltoniano H_c (5.26), obtemos as equações de movimento para os modelos BI, KS e BIII:

$$\dot{a}_c = \{a_c, H_c\} = -\frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} - \frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{T_c}}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} + \frac{1}{2} \gamma e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{a_c} = \{p_{a_c}, H_c\} = & -\frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c} p_{\beta_c}}{2 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c} p_{T_c}}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} - \frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}^2}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} \\ & + \frac{3}{2} \alpha \gamma p_{a_c} e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha-1} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c} p_{T_c}}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} \\ & + \frac{9e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}^2}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^4} + 3\alpha p_{T_c} e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha-1} + \kappa e^{-\frac{\beta_c}{2}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\dot{\beta}_c = \{\beta_c, H_c\} = -\frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} + \frac{3e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}}{2 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{T_c}}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2}, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\beta_c} = \{p_{\beta_c}, H_c\} = & -\frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c} p_{\beta_c}}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c} p_{T_c}}{32 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} + \frac{1}{4} \alpha \gamma p_{a_c} e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha} \\ & - \frac{e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}^2}{32 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c} p_{T_c}}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} + \frac{3e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}^2}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} \\ & + \frac{1}{2} \alpha p_{T_c} e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha} - \frac{1}{2} \kappa a_c e^{-\frac{\beta_c}{2}} - \frac{1}{4} \kappa \gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} T_c, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\dot{T}_c = \{T_c, H_c\} = -\frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}}{16 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha}, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{T_c} = \{p_{T_c}, H_c\} = & -\frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c} p_{\beta_c}}{4 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{a_c}^2}{32 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^2} + \frac{9\gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}} p_{\beta_c}^2}{8 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^4} \\ & + \frac{3}{2} \alpha \gamma p_{T_c} e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\alpha-1} + \frac{1}{2} \kappa \gamma e^{-\frac{\beta_c}{2}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para analisar a evolução do Universo, resolvemos as equações associadas às variáveis a_c , β_c e T_c , as quais se relacionam com as variáveis físicas a_{nc} e β_{nc} conforme discutido anteriormente. Com esse propósito, reescrevemos as equações de movimento derivadas do hamiltoniano H_c exclusivamente em termos dessas variáveis e de suas derivadas temporais, eliminando explicitamente as dependências dos momentos conjugados. Essa abordagem simplifica a descrição da dinâmica do sistema e facilita a análise do impacto das correções em γ sobre a evolução das variáveis dinâmicas.

Observamos que $\dot{p}_{T_c}$ na Eq. (5.32) é proporcional a $\dot{p}_{a_c}$ na Eq. (5.28), com um fator $\gamma/2$. Isso implica que $\dot{p}_{T_c} = \frac{\gamma}{2}\dot{p}_{a_c}$. Integrando essa equação, obtemos a seguinte expressão para o momento canônico,

$$p_{T_c} = \frac{\gamma}{2}p_{a_c} + C. \quad (5.33)$$

onde C é uma constante de integração positiva. Essa constante representa a densidade de energia inicial do fluido e permanece conservada ao longo da evolução dinâmica do sistema, sendo fixada pelas condições iniciais.

Selecionamos as Eqs. (5.27) e (5.29) e, utilizando a relação (5.33), resolvemos o sistema para os momentos canônicos p_{a_c} e p_{β_c} . Obtemos então as expressões

$$p_{a_c} = -3\gamma e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{a}_c - 6a_c e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{a}_c - \gamma a_c e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{\beta}_c - a_c^2 e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{\beta}_c + 3\gamma e^{\frac{\beta_c}{2} - \frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c \right)^{1-3\alpha} - \frac{C\gamma}{2}, \quad (5.34)$$

$$p_{\beta_c} = -\gamma a_c e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{a}_c - a_c^2 e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{a}_c + \frac{3}{4}\gamma a_c^2 e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{\beta}_c + \frac{1}{2}a_c^3 e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{\beta}_c + \frac{1}{2}\gamma e^{\frac{\beta_c}{2} - \frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c \right)^{2-3\alpha}. \quad (5.35)$$

Essas equações expressam os momentos canônicos p_{a_c} e p_{β_c} em termos das variáveis a_c , β_c , T_c e de suas derivadas temporais.

Agora, substituindo os momentos canônicos p_{T_c} , p_{a_c} e p_{β_c} das Eqs. (5.33), (5.34) e (5.35) na evolução temporal da variável associada à matéria, Eq. (5.31), obtemos a seguinte expressão para $\dot{T}_c$,

$$\dot{T}_c = \frac{1}{2}\gamma \dot{a}_c + e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c} \left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c \right)^{-3\alpha}. \quad (5.36)$$

Essa expressão mostra explicitamente que a variável de tempo interna sofre uma correção linear proporcional a $\gamma \dot{a}_c$, além do termo comutativo usual.

Derivamos agora as equações (5.27) e (5.29) em relação ao tempo; em seguida, substituímos as expressões para os momentos (5.33, 5.34 e 5.35) e suas derivadas temporais (5.28, 5.30 e 5.32) por expressões em termos das coordenadas e velocidades generalizadas (a_c , $\dot{a}_c$, β_c e $\dot{\beta}_c$). Esse procedimento permite obter equações diferenciais de segunda ordem, o que é fundamental para descrever completamente a evolução temporal das variáveis do sistema. As equações diferenciais fornecem informações detalhadas sobre como a_c e β_c evoluem no tempo. Além disso, a derivação dessas expressões garante uma descrição física

consistente, alinhada com as condições iniciais e os vínculos do sistema. Essas segundas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c = & -\frac{3}{4}\gamma\dot{a}_ce^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha-1} + \frac{3}{2}\alpha\gamma\dot{a}_ce^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha-1} - \\ & \frac{\dot{a}_c^2}{2\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)} + \frac{1}{8}\gamma e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\dot{\beta}_c\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha} + \frac{1}{4}\alpha\gamma e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\dot{\beta}_c\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha} \\ & - \frac{1}{8}\dot{\beta}_c^2\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right) - \frac{1}{2}\alpha C e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c - \frac{\beta_c}{2}}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha-2} - \frac{\kappa e^{-\beta_c}}{8\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)} \\ & + \frac{\kappa a_c e^{-\beta_c}}{8\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^2} + \frac{\gamma\kappa e^{-\beta_c}T_c}{16\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^2} \end{aligned} \quad (5.37)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_c = & -\frac{3\dot{a}_c\dot{\beta}_c}{a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c} + \frac{3}{2}\gamma\dot{a}_ce^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha-2} - \frac{\kappa e^{-\beta_c}}{4\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^2} - \frac{1}{2}\dot{\beta}_c^2 \\ & - \frac{5}{4}\gamma e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\dot{\beta}_c\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha-1} - \frac{3\kappa a_c e^{-\beta_c}}{4\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^3} - \frac{3\gamma\kappa e^{-\beta_c}T_c}{8\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^3} \end{aligned} \quad (5.38)$$

O hamiltoniano H_c atua como vínculo do sistema e deve satisfazer a condição $H_c = 0$, conforme se vê na equação (3.45). Essa restrição garante que as trajetórias dinâmicas obtidas das equações de movimento permaneçam consistentes com a estrutura hamiltoniana da teoria. Substituímos as expressões dos momentos canônicos nas equações (5.34), (5.33) e (5.35) na forma NC em termos das variáveis comutativas do Hamiltoniano (5.26) e obtemos a seguinte condição de vínculo:

$$\begin{aligned} 0 = & -e^{\frac{\beta_c}{2}}\dot{a}_c\dot{\beta}_c\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^2 - 3e^{\frac{\beta_c}{2}}\dot{a}_c^2\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right) + \frac{1}{4}e^{\frac{\beta_c}{2}}\dot{\beta}_c^2\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^3 \\ & - \frac{1}{2}\gamma e^{\frac{\beta_c}{2} - \frac{1}{2}\alpha\beta_c}\dot{\beta}_c\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{2-3\alpha} - 3\gamma\dot{a}_ce^{\frac{\beta_c}{2} - \frac{1}{2}\alpha\beta_c}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{1-3\alpha} \\ & + Ce^{-\frac{1}{2}\alpha\beta_c}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right)^{-3\alpha} - \kappa e^{-\frac{\beta_c}{2}}\left(a_c + \frac{1}{2}\gamma T_c\right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Essa expressão constitui a generalização não comutativa da equação de Friedmann para o modelo LRS e incorpora simultaneamente os efeitos da curvatura espacial κ e da deformação do espaço de fase parametrizada por γ .

5.3 EVOLUÇÃO DO MODELO LRS NÃO COMUTATIVO DOMINADO POR RADIAÇÃO: ANÁLISE NUMÉRICA

A partir de agora, restringimos nossa atenção ao caso de um fluido perfeito de radiação, no qual $\alpha = 1/3$. A solução analítica do sistema acoplado de equações (5.36)-(5.39) torna-se inviável devido à forte não linearidade dos termos quando $\alpha = 1/3$. Consequentemente, adotamos uma abordagem numérica para resolver o sistema dinâmico.

Além disso, considerando que $\gamma \ll 1$, aplicamos uma expansão de Taylor de primeira ordem, utilizando a aproximação $(1 + \gamma x)^{-1} \approx 1 - \gamma x$. Essa expansão permite reescrever os termos originalmente presentes no denominador em forma perturbativa, mantendo apenas contribuições até primeira ordem em γ . Dessa maneira, isolamos explicitamente os efeitos lineares associados à estrutura NC do modelo. Assim, obtemos:

$$\ddot{a}_c = -\frac{\dot{a}_c^2}{2a_c} - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} \dot{a}_c}{4a_c^2} + \frac{\gamma T_c \dot{a}_c^2}{4a_c^2} + \frac{5\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} \dot{\beta}_c}{24a_c} - \frac{1}{8} a_c \dot{\beta}_c^2 + \frac{C\gamma e^{-\frac{1}{3}(2\beta_c)} T_c}{4a_c^4} - \frac{C e^{-\frac{1}{3}(2\beta_c)}}{6a_c^3} - \frac{1}{16} \gamma T_c \dot{\beta}_c^2, \quad (5.40)$$

$$\ddot{\beta}_c = -\frac{3\dot{a}_c \dot{\beta}_c}{a_c} + \frac{3\gamma T_c \dot{a}_c \dot{\beta}_c}{2a_c^2} + \frac{3\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} \dot{a}_c}{2a_c^3} - \frac{5\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} \dot{\beta}_c}{4a_c^2} - \frac{\kappa e^{-\beta_c}}{a_c^2} + \frac{\gamma \kappa e^{-\beta_c} T_c}{a_c^3} - \frac{1}{2} \dot{\beta}_c^2, \quad (5.41)$$

$$\dot{T}_c = \frac{e^{-\frac{\beta_c}{6}}}{a_c} + \frac{1}{2} \gamma \dot{a}_c - \frac{\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} T_c}{2a_c^2}, \quad (5.42)$$

e o vínculo ($H_c = 0$) é dado por:

$$0 = -a_c^2 e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{a}_c \dot{\beta}_c - \gamma a_c e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{a}_c \dot{\beta}_c - 3\gamma e^{\frac{\beta_c}{3}} \dot{a}_c - \frac{3}{2} \gamma e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{a}_c^2 - 3a_c e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{a}_c^2 - \frac{1}{2} \gamma a_c e^{\frac{\beta_c}{3}} \dot{\beta}_c + \frac{3}{8} \gamma a_c^2 e^{\frac{\beta_c}{2}} T_c \dot{\beta}_c^2 + \frac{1}{4} a_c^3 e^{\frac{\beta_c}{2}} \dot{\beta}_c^2 - \frac{C\gamma e^{-\frac{\beta_c}{6}} T_c}{2a_c^2} + \frac{C e^{-\frac{\beta_c}{6}}}{a_c} - \kappa a_c e^{-\frac{\beta_c}{2}} - \frac{1}{2} \gamma \kappa e^{-\frac{\beta_c}{2}} T_c. \quad (5.43)$$

O sistema acima descreve a evolução temporal das variáveis comutativas $a_c(t)$, $\beta_c(t)$ e $T_c(t)$. Essas variáveis estão relacionadas às variáveis físicas, o fator de escala $a_{nc}(t)$ e o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, de acordo com as transformações nas Eqs. (5.25). Além disso, as equações são fortemente acopladas e não lineares, com a presença de termos envolvendo γ , que modulam os efeitos da anisotropia e as correções à expansão do Universo. O vínculo $H_c = 0$ atua como condição de consistência dinâmica e deve ser satisfeito ao longo de toda a evolução temporal.

Nesta seção, resolvemos numericamente as Eqs. (5.40)-(5.43) para diversos valores dos parâmetros γ e C . Também testamos diferentes condições iniciais e deixamos o sistema evoluir no tempo, tanto para $\kappa = -1$ quanto para $\kappa = 0$. Os resultados apresentados nas Figuras e Tabelas a seguir constituem exemplos representativos que ilustram de forma clara os efeitos dinâmicos induzidos pela não comutatividade no modelo LRS dominado por radiação.

5.3.1 Para o caso $\kappa = -1$

O sistema de equações (5.40)-(5.43), correspondente ao caso $\kappa = -1$, que representa um modelo cosmológico BIII com curvatura espacial aberta, é resolvido numericamente devido à complexidade intrínseca das expressões envolvidas. Para esse fim, especificamos as

condições iniciais $a_c(0)$, $\dot{a}_c(0)$, $\beta_c(0)$, $\dot{\beta}_c(0)$ e $T_c(0)$, juntamente com os valores do parâmetro NC γ e da constante de integração C . Em seguida, verificamos que esses valores iniciais satisfazem o vínculo $H_c = 0$, conforme exigido pelo formalismo hamiltoniano na RG. Esse vínculo deve permanecer satisfeito para todo instante t , garantindo a consistência da evolução do sistema no âmbito do formalismo canônico.

Na prática, realizamos o procedimento tratando $\dot{\beta}_c(0)$ como uma variável livre, mantendo os demais parâmetros fixos (condições iniciais), e ajustando seu valor de modo que a equação (5.43) fosse satisfeita. Alternativamente, caso $\dot{\beta}_c(0)$ fosse escolhido como fixo (condição inicial), determinávamos então a constante C na condição de vínculo (5.43). A escolha entre considerar C ou $\dot{\beta}_c(0)$ como o parâmetro ajustável é arbitrária e não afeta a validade nem a generalidade da solução numérica obtida.

As soluções numéricas para as variáveis $a_c(t)$, $\beta_c(t)$ e $T_c(t)$ permitem reconstruir as variáveis físicas por meio das transformações definidas em (5.25). Estas são o fator de escala $a_{nc}(t) = a_c + (\gamma/2)T_c$, que caracteriza a expansão do Universo, e o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t) = \beta_c$, que codifica as características anisotrópicas presentes nas fases iniciais da evolução cósmica. O comportamento dessas variáveis físicas será discutido em detalhes nos tópicos seguintes. Os gráficos que apresentaremos ilustram de forma clara o comportamento geral das soluções. Nesses exemplos, escolhemos convenientemente as condições iniciais e as constantes apenas para melhor visualização e análise do comportamento do sistema (Universo).

5.3.1.1 Variação do parâmetro NC γ

Na Figura 2, iniciamos uma análise do efeito do parâmetro NC γ sobre a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ e do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$. Na Tabela 1, apresentamos dados numéricos referentes ao seu comportamento em diferentes instantes de tempo, evidenciando como os distintos valores de γ influenciam a expansão do Universo e a estabilização da anisotropia em tempos tardios.

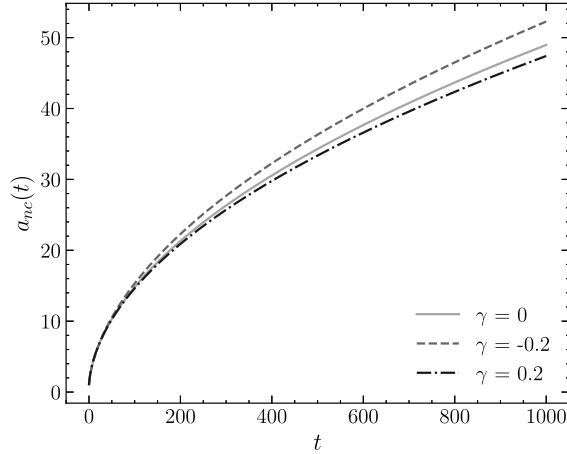
Com respeito à evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$, observamos na Figura 2(a) que as soluções são sempre expansivas. Por outro lado, dependendo do valor do parâmetro NC γ , identificamos um efeito sutil, porém perceptível. A partir da Tabela 1, observamos que: para $t = 1000000$, o fator de escala atinge o valor 1580.69526 quando $\gamma = 0$, 1770.407126 quando $\gamma = -0.2$, e 1491.83381 quando $\gamma = 0.2$. Esses resultados indicam que um valor negativo de γ aumenta levemente a expansão, enquanto um valor positivo de γ a reduz ligeiramente. Com relação ao parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, observamos na Figura 2(b) que esse parâmetro apresenta crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de aproximação a um regime assintótico dependente de γ . A partir da Tabela 1, verificamos que, para $t = 1000000$, os valores obtidos são 12.89924 para $\gamma = 0$, 12.67621 para $\gamma = -0.2$ e 13.04239 para $\gamma = 0.2$, evidenciando que valores positivos de γ aumentam

a anisotropia, enquanto valores negativos a reduzem. Além disso, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ diminui progressivamente ao longo do tempo em todos os casos, o que indica que a evolução da anisotropia converge para um regime isotrópico em períodos de tempo longos, independentemente do valor do parâmetro de não comutatividade γ .

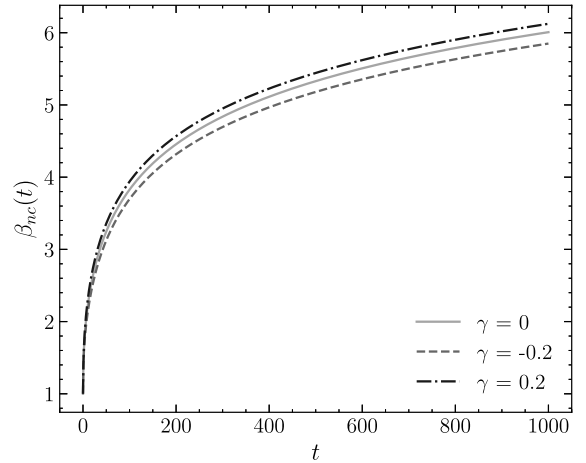
A escolha de diferentes tempos máximos nas tabelas está relacionada à importância de analisar adequadamente os efeitos do parâmetro NC γ e da constante C . Para os casos $\kappa = -1$ e $\kappa = 0$, a convergência para o regime isotrópico pode ser observada com maior precisão nos resultados numéricos quando se consideram tempos mais longos, o que motivou a extensão das integrações até $t = 1000000$ para evidenciar de maneira mais clara esse comportamento em tempos tardios. Nos demais casos, as simulações apresentadas nas tabelas foram realizadas até $t = 100000$, não devido a alguma restrição física particular, mas porque esse intervalo temporal já permite identificar os principais efeitos associados à dinâmica do modelo. Isso não significa, contudo, que a evolução não possa ser estendida para tempos maiores.

Figura 2 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e $T_c(0) = 0$. Para cada valor selecionado de $\gamma = \{0, -0.2, 0.2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.58747, 5.43337, 7.74158\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

Tabela 1 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 2, para diferentes instantes de tempo t , com $\gamma = 0$ na parte superior, $\gamma = -0.2$ na parte central e $\gamma = 0.2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	129.164429	7.90581	0.000147
10946	164.586699	8.386061	0.000091
17711	209.632437	8.866669	0.000056
28657	266.918407	9.347501	0.000035
46368	339.773622	9.828475	0.000022
75025	432.432997	10.309537	0.000013
100000	499.374086	10.596825	0.000010
1000000	1580.695261	12.89924	9.999802×10^{-7}
0	1	1	1
6765	140.504186	7.724368	0.000146
10946	179.714842	8.199524	0.00009
17711	229.709761	8.675289	0.000056
28657	293.446562	9.151532	0.000035
46368	374.692907	9.628163	0.000021
75025	478.247856	10.10512	0.000013
100000	553.180714	10.390063	0.000010
1000000	1770.407126	12.676214	9.937651×10^{-7}
0	1	1	1
6765	123.850819	8.030033	0.000148
10946	157.475065	8.51284	0.000092
17711	200.172186	8.995896	0.000057
28657	254.398652	9.479035	0.000035
46368	323.278445	9.962151	0.000022
75025	410.784542	10.445179	0.000013
100000	473.952318	10.733554	0.000010
1000000	1491.833819	13.042393	1.000000×10^{-6}

Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

5.3.1.2 Variação de C

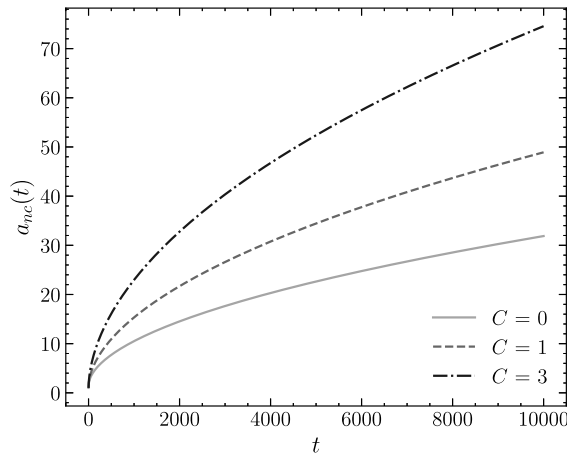
Em seguida, analisamos o efeito da variação da densidade de energia C . Como mostramos em Figura 3(a), um aumento em C conduz a um maior crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$, indicando que uma maior densidade de energia no sistema influencia significativamente a taxa de expansão do Universo. Esse efeito torna-se particularmente evidente em tempos tardios, evidenciando uma forte dependência da expansão em relação ao valor de C . No que diz respeito à evolução da anisotropia $\beta_{nc}(t)$, observamos na Figura 3(b) que esse parâmetro apresenta um crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido por uma estabilização progressiva em regime assintótico. Além disso, à medida que C aumenta, o valor da anisotropia diminui.

Na Tabela 2, apresentamos a análise numérica que mostra que, para $t = 1000000$,

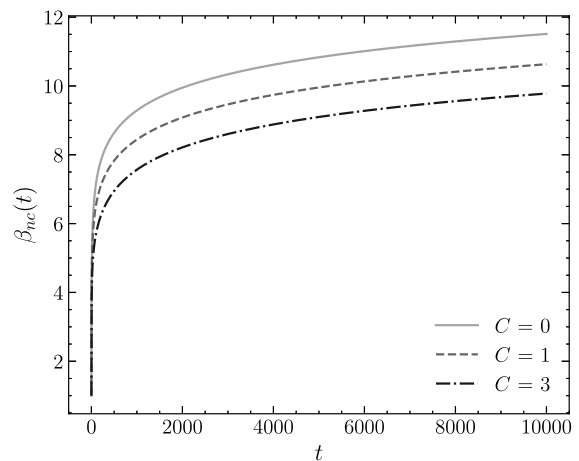
o fator de escala atinge o valor de 321.13463 quando $C = 0$ e 757.84961 quando $C = 3$, confirmando que valores mais elevados de C intensificam significativamente a expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ tende a estabilizar-se em valores finitos de 16.0780 para $C = 0$ e 14.3663 para $C = 3$, indicando que a anisotropia não desaparece, mas sua magnitude se reduz à medida que a densidade de energia aumenta. Além disso, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce rapidamente ao longo do tempo, alcançando valores da ordem de 1.0×10^{-7} em ambos os casos, o que sugere que a anisotropia tende a um estado de equilíbrio à medida que o tempo avança, embora o valor no qual se estabiliza dependa de C .

Figura 3 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $C = \{0, 1, 3\}$, o valor correspondente de $\dot{\beta}_c(0) = \{5.78536, 5.50429, 4.8607\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

Tabela 2 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 3, para diferentes instantes de tempo t , com $C = 0$ na parte superior e $C = 3$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	5.785361
6765	26.27245	11.128413	0.000144
10946	33.34535	11.599695	0.00009
17711	42.381682	12.073095	0.000056
28657	53.915827	12.548111	0.000034
46368	68.627935	13.024344	0.000021
75025	87.383781	13.501489	0.000013
100000	100.955147	13.786749	0.00001
1000000	321.134636	16.078007	9.964379×10^{-7}
0	1	1	4.860701
6765	61.116958	9.394866	0.000145
10946	78.064725	9.868631	0.00009
17711	99.641000	10.344768	0.000056
28657	127.100693	10.822483	0.000035
46368	162.041345	11.301244	0.000021
75025	206.496301	11.7807	0.000013
100000	238.619806	12.067232	0.00001
1000000	757.849614	14.366261	9.990592×10^{-7}

Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

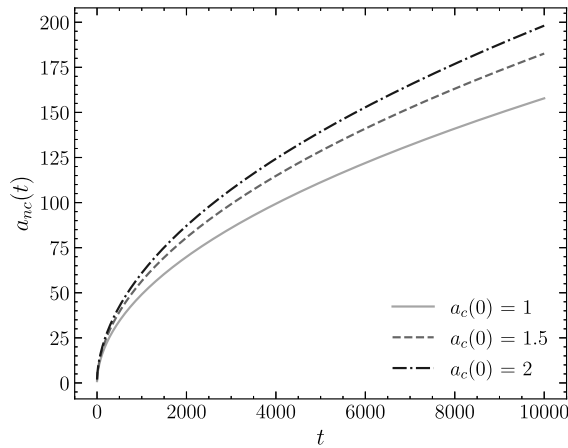
5.3.1.3 Variação de $a_c(0)$

Aqui, examinamos o efeito da variação da condição inicial $a_c(0)$ sobre a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ e do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$. Como mostramos na Figura 4, a influência de $a_c(0)$ sobre ambas as variáveis é ilustrada para os valores $a_c(0) = 1, 1.5$ e 2 . Os resultados indicam que o aumento de $a_c(0)$ conduz a um maior crescimento do fator de escala, implicando uma expansão mais pronunciada do Universo em intervalos de tempo iguais. No que se refere ao parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, sua evolução apresenta crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de uma estabilização progressiva em valores finitos; além disso, à medida que $a_c(0)$ aumenta, o valor assintótico de $\beta_{nc}(t)$ diminui.

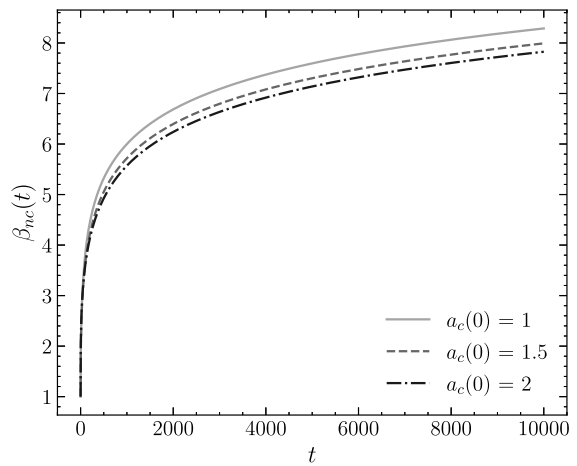
Na Tabela 3, apresentamos a análise numérica que mostra que, para $t = 100000$, o fator de escala atinge o valor de 501.4288 quando $a_c(0) = 1$ e 632.0084 quando $a_c(0) = 2$, confirmando que a taxa de expansão aumenta com valores iniciais mais elevados de $a_c(0)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ apresenta uma estabilização progressiva em tempos tardios, permanecendo em valores finitos cujo valor final depende sensivelmente da condição inicial, aproximando-se de 10.5 para $a_c(0) = 1$ e 10.1 para $a_c(0) = 2$. Além disso, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ diminui significativamente ao longo do tempo em ambos os casos, alcançando valores da ordem de 1.0×10^{-5} , sugerindo que a anisotropia evolui para um estado de equilíbrio no qual sua variação se torna praticamente constante.

Figura 4 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $a_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 15.5508, 28.1657\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 3 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 4, para diferentes instantes de tempo t , com $a_c(0) = 1$ na parte superior e $a_c(0) = 2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	129.593091	7.89773	0.000147
10946	165.160251	8.377767	0.000091
17711	210.395436	8.858171	0.000056
28657	267.928457	9.338811	0.000035
46368	341.105088	9.819604	0.000022
75025	434.181749	10.300497	0.000013
100000	501.428814	10.58769	0.000010
0	2	1	1
6765	162.470187	7.438364	0.000147
10946	207.389223	7.916107	0.000091
17711	264.520029	8.395069	0.000056
28657	337.178437	8.874812	0.000035
46368	429.584201	9.355054	0.000022
75025	547.106591	9.835616	0.000013
100000	632.008434	10.122679	0.000010

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

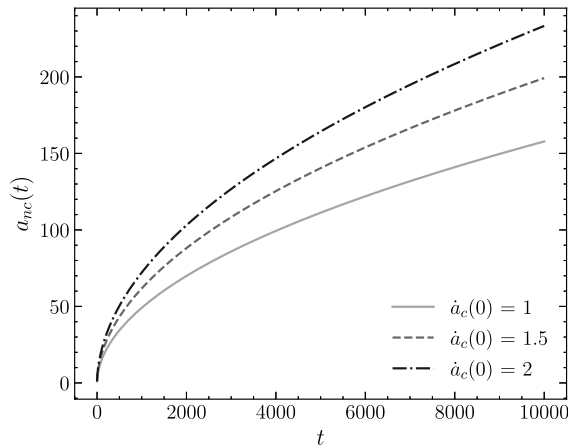
5.3.1.4 Variação de $\dot{a}_c(0)$

Prosseguindo com a análise das condições iniciais, examinamos o efeito da variação de $\dot{a}_c(0)$ sobre a evolução do sistema. Como mostramos na Figura 5, os resultados indicam que valores iniciais mais elevados de $\dot{a}_c(0)$ conduzem a um maior crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$. Quanto ao comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, sua evolução caracteriza-se por um aumento acentuado nos estágios iniciais, seguido de uma tendência à estabilização assintótica em valores finitos. Além disso, à medida que $\dot{a}_c(0)$ aumenta, esse valor assintótico diminui, sugerindo que maiores velocidades iniciais de expansão podem favorecer uma isotropização mais eficiente em tempos tardios.

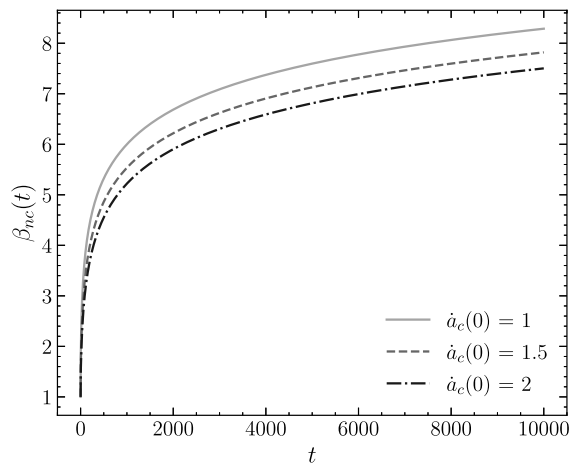
Na Tabela 4, apresentamos os resultados numéricos que mostram que, para $t = 100000$, o fator de escala atinge o valor de 501.4288 quando $\dot{a}_c(0) = 1$, e 742.3190 quando $\dot{a}_c(0) = 2$, confirmando que valores iniciais mais elevados de $\dot{a}_c(0)$ aumentam a taxa de expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, a anisotropia $\beta_{nc}(t)$, no mesmo instante, tende a valores de 10.6 para $\dot{a}_c(0) = 1$ e 9.8 para $\dot{a}_c(0) = 2$, indicando uma redução da anisotropia seguida de estabilização em valores finitos. De maneira semelhante, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ diminui rapidamente ao longo do tempo, alcançando valores da ordem de 1.0×10^{-5} , o que indica que a anisotropia tende a um processo de isotropização em tempos tardios.

Figura 5 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{a}_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 14.7829, 25.9576\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 4 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 5, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{a}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{a}_c(0) = 2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	129.593091	7.89773	0.000147
10946	165.160251	8.377767	0.000091
17711	210.395436	8.858171	0.000056
28657	267.928457	9.338811	0.000035
46368	341.105088	9.819604	0.000022
75025	434.181749	10.300497	0.000013
100000	501.428814	10.58769	0.000010
0	1	1	1
6765	191.503249	7.113079	0.000147
10946	244.210567	7.592824	0.000091
17711	311.234571	8.073087	0.000056
28657	396.468117	8.553675	0.000035
46368	504.864111	9.034466	0.000022
75025	642.723662	9.515387	0.000013
100000	742.319000	9.802604	0.000010

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

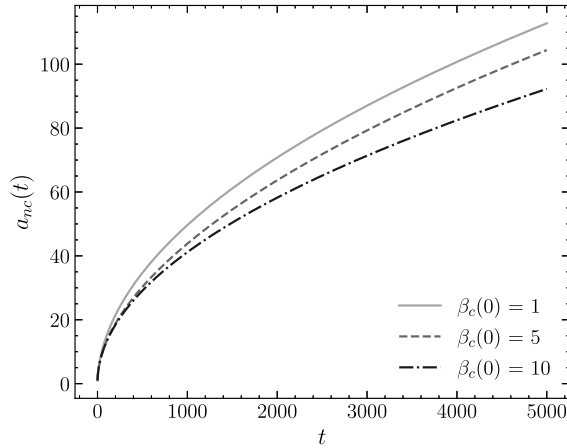
5.3.1.5 Variação de $\beta_c(0)$

Em seguida, avaliamos a influência da condição inicial $\beta_c(0)$ na dinâmica do sistema. Como mostramos em Figura 6, os resultados revelam que um aumento em $\beta_c(0)$ conduz a um menor crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$, sugerindo que uma anisotropia inicial mais elevada atua como uma fonte de resistência geométrica à expansão do Universo. Por outro lado, a anisotropia $\beta_{nc}(t)$ apresenta crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de uma transição suave para um regime assintótico. Além disso, valores mais altos de $\beta_c(0)$ levam a uma anisotropia residual mais pronunciada, refletindo a persistência das condições anisotrópicas iniciais na geometria do Universo em tempos tardios.

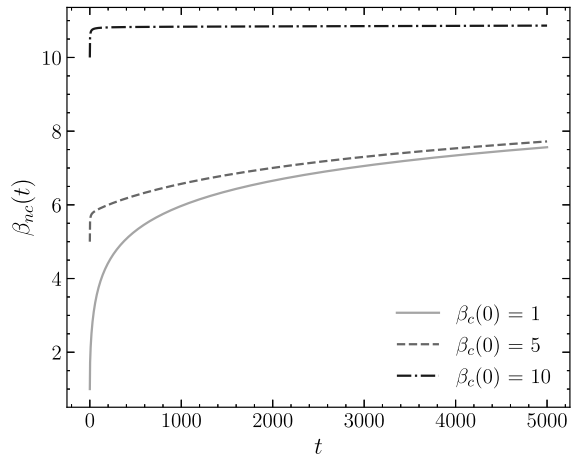
Na Tabela 5, confirmamos numericamente essas observações. Para $t = 100000$, o fator de escala atinge o valor de 510.3366 quando $\beta_c(0) = 1$, mas apenas 431.0322 quando $\beta_c(0) = 10$, evidenciando uma diminuição e destacando o efeito inibidor da anisotropia inicial sobre a expansão. Por outro lado, $\beta_{nc}(t)$ aproxima-se de valores de 10.54 para $\beta_c(0) = 1$ e 11.39 para $\beta_c(0) = 10$, indicando que seu valor final depende diretamente das condições iniciais. Adicionalmente, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ diminui significativamente ao longo do tempo, e alcança valores da ordem de 1.0×10^{-5} e 4.0×10^{-6} , respectivamente, para os mesmos valores de $\beta_c(0)$. Isso significa que o sistema evolui para um estado isotrópico em largos períodos de tempo.

Figura 6 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.05$. Para cada valor selecionado de $\beta_c(0) = \{1, 5, 10\}$, o valor correspondente de $C = \{6.2990, 102.7980, 2920.6400\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 5 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 6, para diferentes instantes de tempo t , com $\beta_c(0) = 1$ na parte superior e $\beta_c(0) = 10$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	131.455764	7.864127	0.000147
10946	167.650833	8.34325	0.000091
17711	213.70686	8.822787	0.000056
28657	272.310198	9.302609	0.000035
46368	346.87927	9.782633	0.000022
75025	441.763773	10.262806	0.000013
100000	510.336552	10.54959	0.00001
0	1	10	1
6765	107.443484	10.877028	0.000007
10946	137.053759	10.905822	0.000007
17711	175.07236	10.951388	0.000007
28657	224.079603	11.021804	0.000006
46368	287.549835	11.127043	0.000006
75025	370.138952	11.277662	0.000005
100000	431.032171	11.39297	0.000004

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

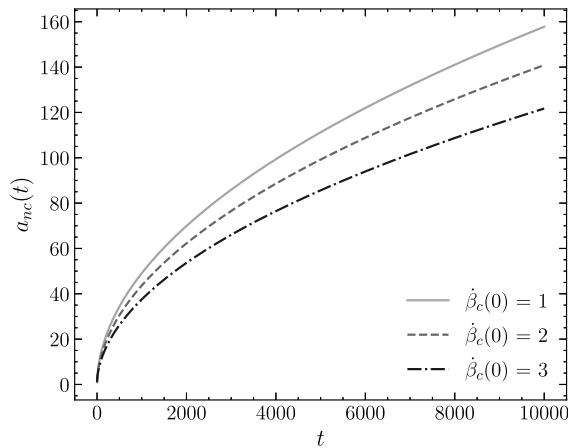
5.3.1.6 Variação de $\dot{\beta}_c(0)$

Finalmente, analisamos o papel da taxa inicial de variação da anisotropia $\dot{\beta}_c(0)$. Como mostramos em Figura 7, um valor mais elevado de $\dot{\beta}_c(0)$ desacelera o crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$, embora não altere seu caráter globalmente expansivo. Esse comportamento sugere que uma variação anisotrópica inicial mais intensa atua como uma resistência efetiva à expansão do Universo. Quanto à evolução do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, observamos um aumento abrupto nos estágios iniciais, seguido por uma estabilização suave que conduz a um regime assintótico. Além disso, à medida que $\dot{\beta}_c(0)$ aumenta, esse valor assintótico também se eleva.

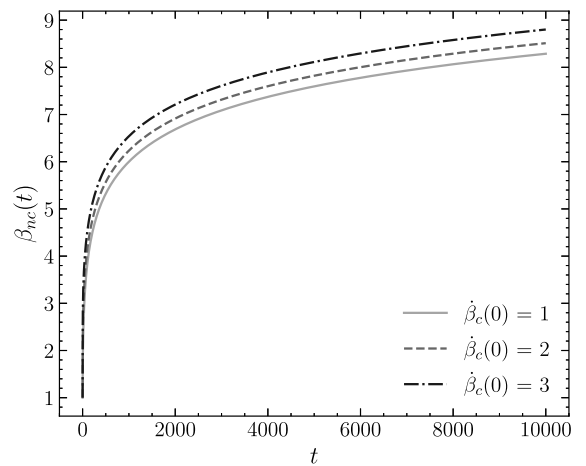
A partir dos resultados numéricos apresentados na Tabela 6, observamos que, para $t = 100000$, o fator de escala atinge o valor de 501.4288 quando $\dot{\beta}_c(0) = 1$, e 388.0892 quando $\dot{\beta}_c(0) = 3$. Isso confirma que valores mais altos de $\dot{\beta}_c(0)$ reduzem a taxa de expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, a anisotropia $\beta_{nc}(t)$ tende a estabilizar-se aproximadamente em 10.58 para $\dot{\beta}_c(0) = 1.0$ e 11.10 para $\dot{\beta}_c(0) = 3$. Ademais, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ diminui significativamente ao longo do tempo e alcança valores da ordem de 1.0×10^{-5} em ambos os casos. Isso confirma que a anisotropia evolui para um estado de isotropia em tempos tardios.

Figura 7 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{\beta}_c(0) = \{1, 2, 3\}$, o valor correspondente de $C = \{6.5298, 7.0085, 6.51328\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 6 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 7, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{\beta}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{\beta}_c(0) = 3$ na parte inferior.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	129.593091	7.89773	0.000147
10946	165.160251	8.377767	0.000091
17711	210.395436	8.858171	0.000056
28657	267.928457	9.338811	0.000035
46368	341.105088	9.819604	0.000022
75025	434.181749	10.300497	0.000013
100000	501.428814	10.58769	0.00001
0	1	3	3
6765	99.858193	8.41316	0.000147
10946	127.423054	8.891245	0.000091
17711	162.485774	9.370362	0.000056
28657	207.083575	9.850146	0.000035
46368	263.808942	10.330363	0.000022
75025	335.96054	10.810861	0.000013
100000	388.089198	11.097877	0.00001

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

5.3.2 Para o caso $\kappa = 0$

Neste caso, resolvemos o sistema de equações (5.40)-(5.43) para um modelo de Universo sem curvatura espacial, isto é, com $\kappa = 0$, empregando a mesma metodologia adotada na subseção anterior. Especificamos as condições iniciais $a_c(0)$, $\dot{a}_c(0)$, $\beta_c(0)$, $\dot{\beta}_c(0)$ e $T_c(0)$, juntamente com os valores dos parâmetros C e γ . Em seguida, verificamos explicitamente que esses valores satisfaziam o vínculo imposto pela equação (5.43). Tal como no caso $\kappa = -1$, esse vínculo deve ser satisfeito para todo instante t , garantindo a consistência da evolução do sistema no âmbito da dinâmica canônica. A partir das soluções numéricas obtidas para as variáveis comutativas $a_c(t)$, $\beta_c(t)$ e $T_c(t)$, reconstruímos as variáveis físicas correspondentes por meio das transformações definidas em (5.25). Em particular, calculamos o fator de escala físico $a_{nc}(t) = a_c + \frac{\gamma}{2}T_c$, que descreve a expansão do Universo, e o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t) = \beta_c$, que caracteriza as propriedades anisotrópicas do modelo. Posteriormente, analisamos detalhadamente o comportamento temporal dessas variáveis físicas.

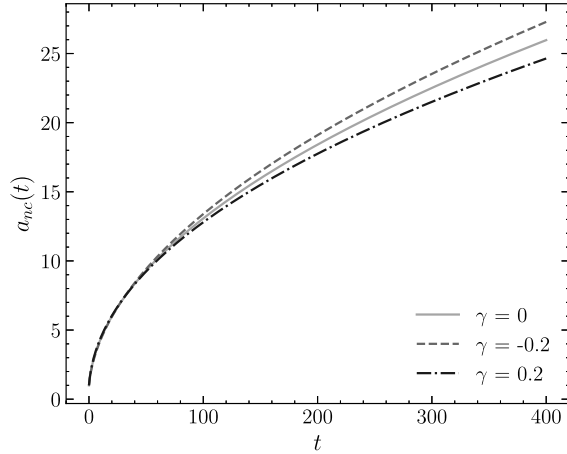
5.3.2.1 Variação do parâmetro NC γ

Para iniciar a análise do modelo plano ($\kappa = 0$), estudamos o impacto do parâmetro NC γ na evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ e do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, como mostramos na Figura 8, juntamente com os resultados numéricos apresentados na Tabela 7. Esses resultados ilustram como diferentes valores de γ influenciam tanto a taxa de expansão do Universo quanto a estabilização das anisotropias em tempos tardios.

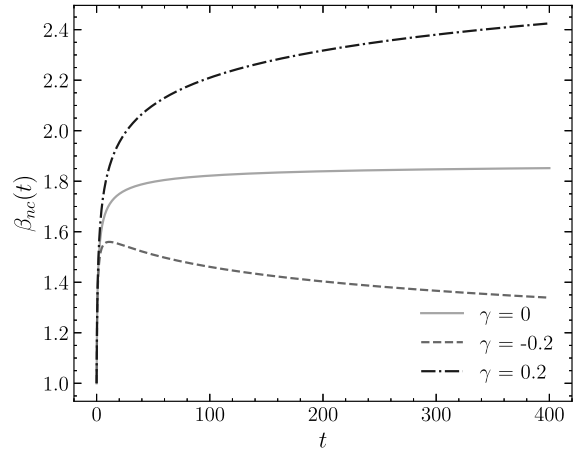
No que se refere à evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$, observamos que a presença do parâmetro NC γ modifica a dinâmica de expansão do Universo. Embora todos os casos apresentem crescimento desacelerado, a expansão é maior para valores negativos do parâmetro NC ($\gamma = -0.2$), padrão que também se repete no caso de curvatura aberta. Como exemplo, para $t = 1000000$, o fator de escala assume os valores 1291.12363 quando $\gamma = 0$, 1564.7220 para $\gamma = -0.2$ e 986.04263 para $\gamma = 0.2$, o que mostra claramente que valores negativos de γ aumentam a taxa de expansão, enquanto valores positivos tendem a reduzi-la. Quanto ao parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, observamos que seu comportamento apresenta crescimento rápido nas etapas iniciais, seguido por uma estabilização que conduz a um valor assintótico. Para $t = 1000000$, obtemos aproximadamente 1.8810 para $\gamma = 0$, 0.51375 para $\gamma = -0.2$ e 3.7579 para $\gamma = 0.2$, evidenciando maior anisotropia para valores positivos de γ e maior isotropização para valores negativos. A derivada temporal $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce em todos os casos e assume os valores 2.990×10^{-10} , -1.0379×10^{-7} e 1.9129×10^{-7} para $\gamma = 0$, -0.2 e 0.2 , respectivamente, indicando estabilização tardia da anisotropia.

Figura 8 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e $T_c(0) = 0$. Para cada valor selecionado de $\gamma = \{0, -0.2, 0.2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.3040, 6.1499, 8.4581\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

Tabela 7 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 8, para diferentes instantes de tempo t , com $\gamma = 0$ na parte superior, $\gamma = -0.2$ na parte central e $\gamma = 0.2$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	106.317581	1.874408	5.374146×10^{-7}
10946	135.200635	1.875963	2.611264×10^{-7}
17711	171.940933	1.877186	1.268772×10^{-7}
28657	218.675703	1.878147	6.164690×10^{-8}
46368	278.123559	1.878902	2.995266×10^{-8}
75025	353.742648	1.879496	1.455317×10^{-8}
100000	408.37842	1.879789	9.457318×10^{-9}
1000000	1291.12363	1.881082	2.990694×10^{-10}
0	1	1	1
6765	117.819141	1.044834	-0.000016
10946	151.162392	0.993182	-0.00001
17711	193.944185	0.941453	-0.000006
28657	248.83271	0.889743	-0.000004
46368	319.249579	0.838128	-0.000002
75025	409.58232	0.786664	-0.000001
100000	475.281318	0.756025	-0.000001
1000000	1564.721984	0.513759	-1.037937×10^{-7}
0	1	1	1
6765	93.959956	2.87317	0.000024
10946	117.941041	2.952831	0.000015
17711	148.018844	3.033553	0.00001
28657	185.734984	3.115385	0.000006
46368	233.018627	3.198372	0.000004
75025	292.283231	3.282557	0.000002
100000	334.60206	3.333415	0.000002
1000000	986.042635	3.757939	1.912922×10^{-7}

Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

5.3.2.2 Variação de C

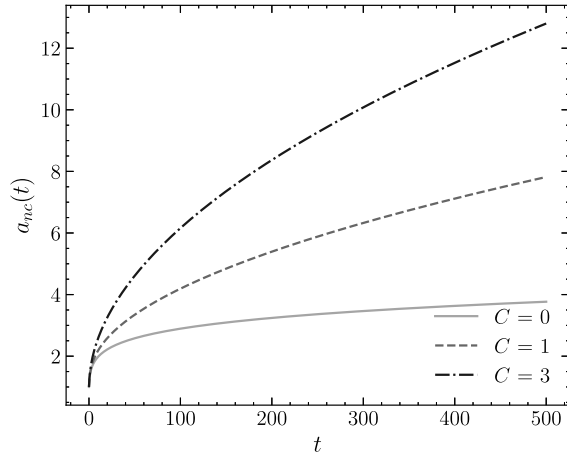
Uma vez explorado o efeito do parâmetro γ , examinamos o impacto do parâmetro de densidade de energia C sobre a dinâmica do sistema. Como mostramos na Figura 9, um valor mais elevado de C aumenta o crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$, indicando que a densidade de energia do sistema influencia significativamente a taxa de expansão do Universo. No que se refere à evolução do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$, observamos crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de estabilização em direção a um valor assintótico, indicando que o Universo evolui para um regime mais estável em tempos tardios. Além disso, à medida que C aumenta, o valor assintótico de $\beta_{nc}(t)$ diminui.

Na Tabela 8, confirmamos numericamente esses resultados. Para $t = 1000000$, o fator de escala assume o valor 38.00039 quando $C = 0$ e 555.7012 quando $C = 3$,

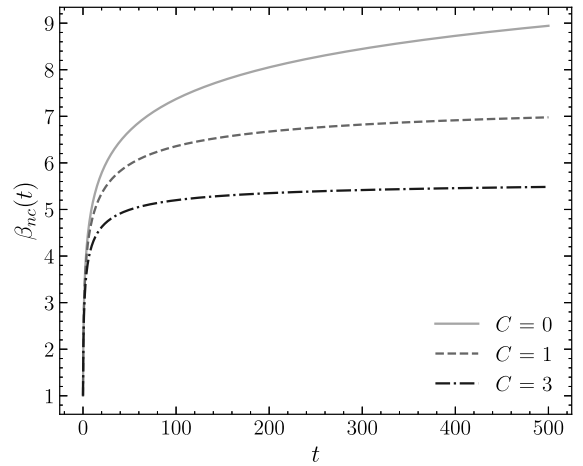
confirmando que valores mais elevados de C conduzem a uma expansão mais pronunciada de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ aproxima-se de valores assintóticos de 12.0953 para $C = 0$ e 5.6048 para $C = 3$, evidenciando a influência da densidade de energia na evolução da anisotropia. Esse comportamento indica que converge para valores finitos no regime assintótico. Ademais, a derivada temporal do parâmetro de anisotropia, $\dot{\beta}_{nc}(t)$, decresce rapidamente com o tempo e assume valores da ordem de -2.8540×10^{-7} para $C = 0$ e -1.5636×10^{-8} para $C = 3$. Esses resultados indicam que uma maior densidade de energia acelera o processo de isotropização do modelo.

Figura 9 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $C = \{0, 1, 3\}$, o valor correspondente de $\dot{\beta}_c(0) = \{5.9746, 5.70785, 5.1066\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

Tabela 8 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 9, para diferentes instantes de tempo t , com $C = 0$ na parte superior e $C = 3$ na parte inferior. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	5.974579
6765	5.825437	11.297205	0.000116
10946	6.396436	11.654721	0.000063
17711	7.129517	11.96011	0.000032
28657	8.128739	12.198249	0.000015
46368	9.52243	12.359923	0.000006
75025	11.441132	12.446524	0.000001
100000	12.890687	12.466424	3.213368×10^{-7}
1000000	38.00039	12.095334	-2.854031×10^{-7}
0	1	1	5.1066
6765	45.551467	5.630641	0.000003
10946	57.857077	5.63739	9.368731×10^{-7}
17711	73.537506	5.640777	2.296734×10^{-7}
28657	93.51662	5.641516	-2.801714×10^{-8}
46368	118.971422	5.640171	-9.993480×10^{-8}
75025	151.401387	5.637187	-1.018942×10^{-7}
100000	174.860954	5.634773	-9.124810×10^{-8}
1000000	555.70117	5.604837	-1.563588×10^{-8}

Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

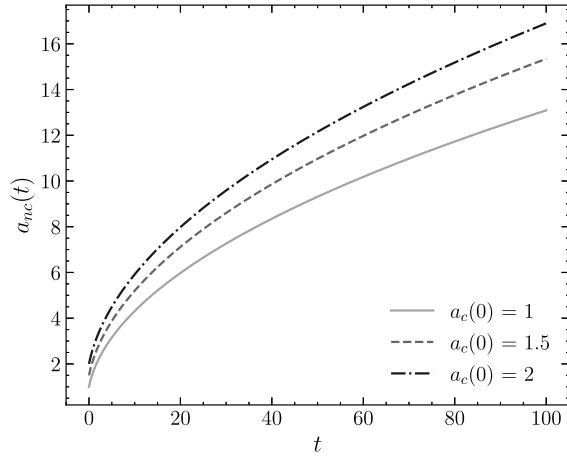
5.3.2.3 Variação de $a_c(0)$

Prosseguindo com o estudo das condições iniciais, analisamos o efeito da variação da condição inicial $a_c(0)$ sobre a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ e do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$. Como mostramos na Figura 10, o aumento do valor inicial de $a_c(0)$ acelera o crescimento de $a_{nc}(t)$, conduzindo a uma expansão mais rápida do Universo. No que diz respeito à evolução de $\beta_{nc}(t)$, observamos crescimento rápido nas etapas iniciais, seguido de uma estabilização progressiva até um valor assintótico. Além disso, à medida que $a_c(0)$ aumenta, esse valor assintótico também cresce, seu valor final depende das condições iniciais.

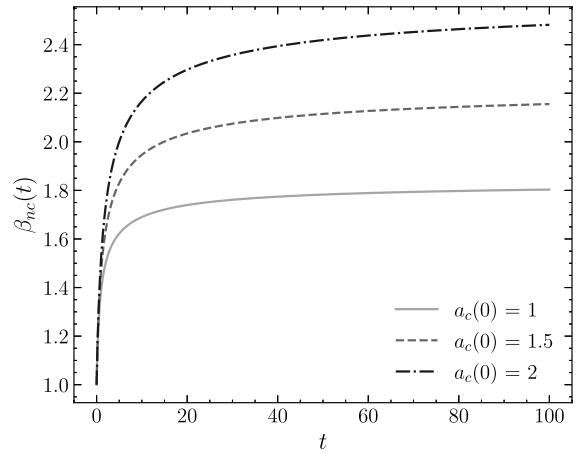
Na Tabela 9, confirmamos numericamente esses resultados. Para $t = 100000$, o fator de escala assume o valor 411.8081 quando $a_c(0) = 1$ e 518.8301 quando $a_c(0) = 2$, confirmando que valores iniciais mais elevados de $a_c(0)$ aumentam a taxa de expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ aproxima-se de valores assintóticos de 1.81 para $a_c(0) = 1$ e 2.61 para $a_c(0) = 2$, indicando que se estabiliza em valores finitos. Por outro lado, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce rapidamente com o tempo e assume valores da ordem de -5.5161×10^{-8} para $a_c(0) = 1$ e -1.01017×10^{-8} para $a_c(0) = 2$. Esses resultados indicam que, para valores mais elevados de $a_c(0)$, o sistema atinge o regime assintótico de forma mais rápida.

Figura 10 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $a_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 17.163, 31.0318\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 9 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 10, para diferentes instantes de tempo t , com $a_c(0) = 1$ na parte superior e $a_c(0) = 2$ na parte inferior.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	106.900259	1.829763	-4.087872×10^{-7}
10946	136.011788	1.828233	-3.253992×10^{-7}
17711	173.061979	1.826362	-2.364353×10^{-7}
28657	220.215454	1.824224	-1.632731×10^{-7}
46368	280.2271	1.821876	-1.092286×10^{-7}
75025	356.603021	1.819363	-7.154188×10^{-8}
100000	411.808141	1.817799	-5.516069×10^{-8}
0	2	1	1
6765	135.076439	2.608498	9.339918×10^{-7}
10946	171.738679	2.611008	3.838477×10^{-7}
17711	218.389065	2.612614	1.432207×10^{-7}
28657	277.74788	2.613507	4.282327×10^{-8}
46368	353.276429	2.613839	4.261344×10^{-9}
75025	449.378883	2.613732	-8.156041×10^{-9}
100000	518.830117	2.613498	-1.010171×10^{-8}

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

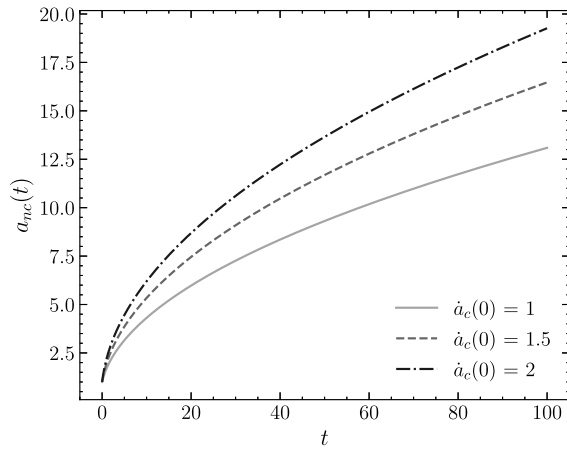
5.3.2.4 Variação de $\dot{a}_c(0)$

Exploramos o impacto da variação da condição inicial $\dot{a}_c(0)$ sobre a evolução de $a_{nc}(t)$ e $\beta_{nc}(t)$. Como mostramos na Figura 11, o aumento do valor inicial de $\dot{a}_c(0)$ aumenta o crescimento do fator de escala, promovendo uma expansão mais rápida do Universo. Paralelamente, observamos que a evolução de $\beta_{nc}(t)$ apresenta crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de estabilização em um valor assintótico. Além disso, à medida que $\dot{a}_c(0)$ aumenta, esse valor assintótico diminui, indicando que, seu valor final depende das condições iniciais.

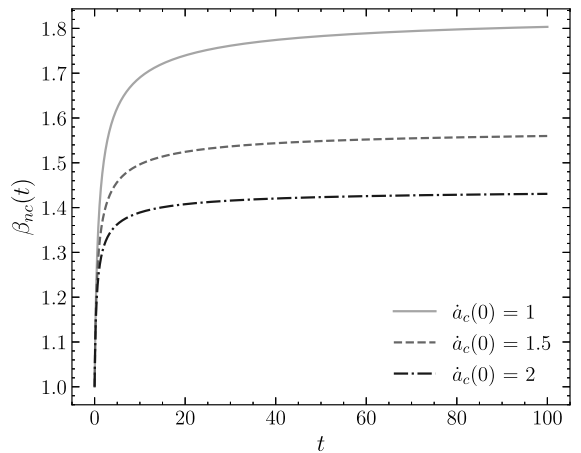
Na Tabela 10, confirmamos numericamente esses resultados. Para $t = 100000$, o fator de escala assume o valor 411.8081 quando $\dot{a}_c(0) = 1$ e 608.4003 quando $\dot{a}_c(0) = 2$, confirmando que valores iniciais mais elevados de $\dot{a}_c(0)$ aumentam a taxa de expansão do fator de escala. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ aproxima-se de valores assintóticos de 1.81 para $\dot{a}_c(0) = 1$ e 1.43 para $\dot{a}_c(0) = 2$, o que indica que o aumento de $\dot{a}_c(0)$ reduz a anisotropia em tempos tardios. Ademais, a taxa de variação $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce rapidamente com o tempo e assume valores da ordem de -5.5161×10^{-8} para $\dot{a}_c(0) = 1$ e -2.8178×10^{-8} para $\dot{a}_c(0) = 2$. Esses resultados indicam que, à medida que $\dot{a}_c(0)$ aumenta, a anisotropia evolui mais rapidamente para um regime assintótico, característico de um Universo isotrópico.

Figura 11 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{a}_c(0) = \{1, 1.5, 2\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 15.4994, 26.6742\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 10 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 11, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{a}_c(0) = 1$ na parte superior e $\dot{a}_c(0) = 2$ na parte inferior.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	106.900259	1.829763	-4.087872×10^{-7}
10946	136.011788	1.828233	-3.253992×10^{-7}
17711	173.061979	1.826362	-2.364353×10^{-7}
28657	220.215454	1.824224	-1.632731×10^{-7}
46368	280.2271	1.821876	-1.092286×10^{-7}
75025	356.603021	1.819363	-7.154188×10^{-8}
100000	411.808141	1.817799	-5.516069×10^{-8}
0	1	1	1
6765	158.07382	1.437434	-2.638631×10^{-7}
10946	201.102897	1.436501	-1.903795×10^{-7}
17711	255.851007	1.435439	-1.309204×10^{-7}
28657	325.509696	1.434277	-8.735122×10^{-8}
46368	414.139718	1.433036	-5.711106×10^{-8}
75025	526.907757	1.431733	-3.681300×10^{-8}
100000	608.400371	1.430932	-2.817795×10^{-8}

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

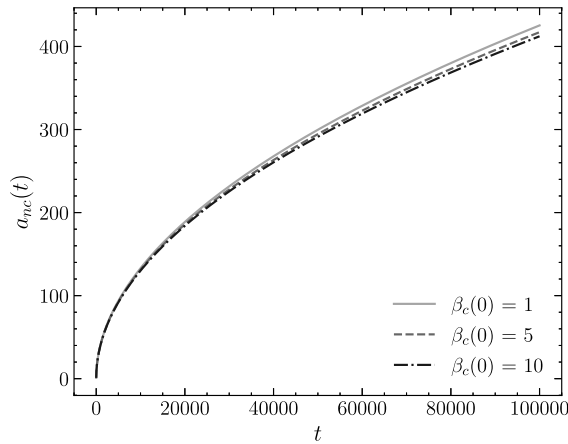
5.3.2.5 Variação de $\beta_c(0)$

Aqui, examinamos o efeito da variação da condição inicial $\beta_c(0)$ sobre a evolução do sistema. Conforme mostrado na Figura 12, o aumento do valor inicial de $\beta_c(0)$, decresce o fator de escala $a_{nc}(t)$. No que se refere à dinâmica de $\beta_{nc}(t)$, observa-se crescimento rápido nos estágios iniciais, seguido de estabilização em direção a um valor assintótico. Além disso, à medida que $\beta_c(0)$ aumenta, o valor dessa assíntota também cresce, sugerindo que o Universo tende a um regime isotrópico em tempos tardios.

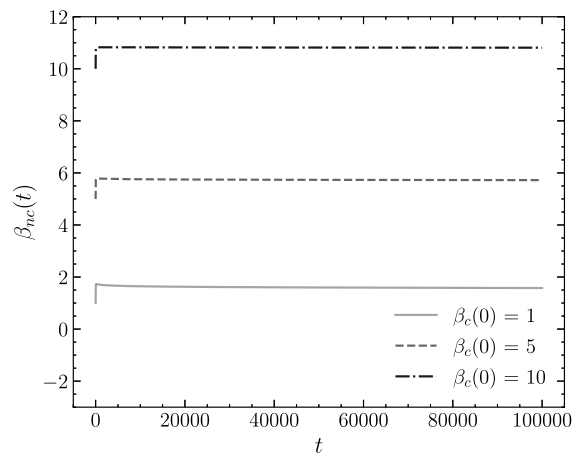
A análise numérica correspondente, apresentada na Tabela 11, indica que, para $t = 100000$, o fator de escala atinge o valor 425.3489 quando $\beta_c(0) = 1$ e 412.2760 quando $\beta_c(0) = 10$, confirmando que uma anisotropia inicial menor decresce em menor grau a expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ tende a valores assintóticos de 1.5 para $\beta_c(0) = 1$ e 10.8 para $\beta_c(0) = 10$, indicando que se estabiliza em valores finitos. Finalmente, a derivada temporal $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce rapidamente, atingindo valores da ordem de -2.9841×10^{-7} para $\beta_c(0) = 1$ e -6.2611×10^{-8} para $\beta_c(0) = 10$, o que indica que, à medida que o valor de $\beta_c(0)$ aumenta, o processo de isotropização torna-se mais rápido.

Figura 12 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.05$. Para cada valor selecionado de $\beta_c(0) = \{1, 5, 10\}$, o valor correspondente de $C = \{7.0155, 102.9870, 2920.6700\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 11 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 12, para diferentes instantes de tempo t , com $\beta_c(0) = 1$ na parte superior e $\beta_c(0) = 10$ na parte inferior.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	109.209163	1.655316	-0.000004
10946	139.22317	1.642023	-0.000003
17711	177.496848	1.628388	-0.000002
28657	226.302709	1.614493	-0.000001
46368	288.538477	1.600401	-6.352428×10^{-7}
75025	367.899073	1.58616	-3.961225×10^{-7}
100000	425.348972	1.577602	-2.984159×10^{-7}
0	1	10	1
6765	106.986231	10.825374	-5.154552×10^{-7}
10946	136.129134	10.823495	-3.919271×10^{-7}
17711	173.221495	10.821273	-2.778525×10^{-7}
28657	220.431491	10.818781	-1.890187×10^{-7}
46368	280.5187	10.816077	-1.252127×10^{-7}
75025	356.995411	10.813207	-8.145552×10^{-8}
100000	412.276005	10.811429	-6.261101×10^{-8}

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

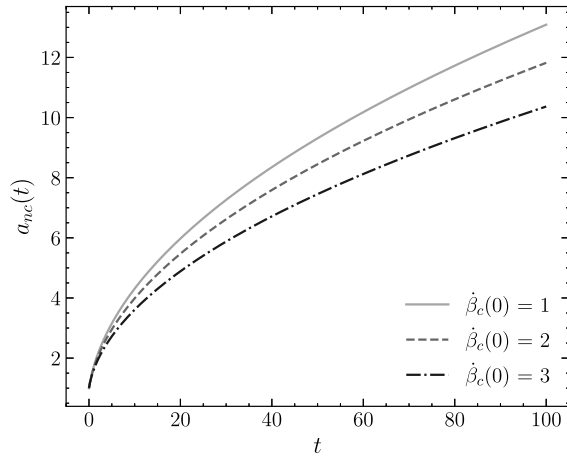
5.3.2.6 Variação de $\dot{\beta}_c(0)$

Os efeitos da variação da condição inicial $\dot{\beta}_c(0)$ sobre a evolução do sistema são analisados na Figura 13. Observamos que, quanto maior o valor de $\dot{\beta}_c(0)$, menor é a expansão do fator de escala $a_{nc}(t)$. No que se refere à evolução do parâmetro $\beta_{nc}(t)$, verificamos crescimento rápido nos instantes iniciais, seguido de estabilização progressiva até um valor assintótico. Além disso, constatamos que, à medida que $\dot{\beta}_c(0)$ aumenta, o valor dessa assíntota também cresce.

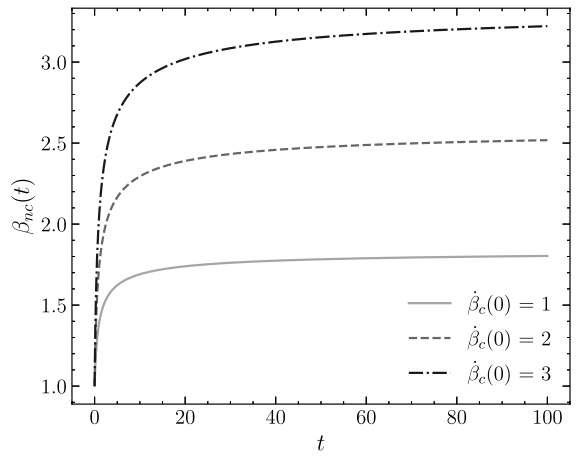
Na Tabela 12, confirmamos numericamente esses resultados. Para $t = 100000$, o fator de escala assume o valor 411.8081 quando $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e 319.3483 quando $\dot{\beta}_c(0) = 3$, confirmando que valores iniciais mais elevados de $\dot{\beta}_c(0)$ reduzem a taxa de expansão de $a_{nc}(t)$. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ aproxima-se de valores assintóticos de 1.8 para $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e 3.3 para $\dot{\beta}_c(0) = 3$, indicando que se estabiliza em valores finitos em tempos tardios. Nesse sentido, a derivada temporal $\dot{\beta}_{nc}(t)$ decresce rapidamente com o tempo e assume valores da ordem de -5.5161×10^{-8} para $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e -5.4447×10^{-8} para $\dot{\beta}_c(0) = 3$, o que indica que o sistema tende a um regime isotrópico em tempos tardios.

Figura 13 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.01$. Para cada valor selecionado de $\dot{\beta}_c(0) = \{1, 2, 3\}$, o valor correspondente de $C = \{7.2463, 7.7250, 7.2298\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as demais condições iniciais fixas.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Tabela 12 – Resultados das variáveis físicas mostradas na Figura 13, para diferentes instantes de tempo t , com $\dot{\beta}(0) = 1$ na parte superior e $\dot{\beta}(0) = 3$ na parte inferior.

t	$a_{nc}(t)$	$\beta_{nc}(t)$	$\dot{\beta}_{nc}(t)$
0	1	1	1
6765	106.900259	1.829763	-4.087872×10^{-7}
10946	136.011788	1.828233	-3.253992×10^{-7}
17711	173.061979	1.826362	-2.364353×10^{-7}
28657	220.215454	1.824224	-1.632731×10^{-7}
46368	280.2271	1.821876	-1.092286×10^{-7}
75025	356.603021	1.819363	-7.154188×10^{-8}
100000	411.808141	1.817799	-5.516069×10^{-8}
0	1	3	3
6765	82.988003	3.346053	4.132038×10^{-7}
10946	105.54412	3.346802	3.778496×10^{-8}
17711	134.256229	3.346532	-8.239524×10^{-8}
28657	170.803925	3.345462	-1.023013×10^{-7}
46368	217.325147	3.343761	-8.818094×10^{-8}
75025	276.541235	3.341566	-6.661610×10^{-8}
100000	319.348258	3.340064	-5.444791×10^{-8}

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

5.3.3 Para o caso $\kappa = 1$

Em contraste com as soluções do sistema de equações (5.40)-(5.43) para $\kappa = 0$ e $\kappa = -1$, correspondentes aos modelos cosmológicos BI e BIII, respectivamente, a solução para $\kappa = 1$, associada ao modelo cosmológico de Kantowski-Sachs, apresenta dinâmica caracterizada por colapso gravitacional. Em particular, esse modelo não exibe comportamento expansivo sustentado no fator de escala, e o parâmetro de anisotropia não evolui para um regime isotrópico assintótico durante a era dominada por radiação. Dado que o presente trabalho se concentra na análise de modelos que evoluem para um regime expansivo e isotrópico em tempos tardios, não consideramos a análise numérica detalhada do caso $\kappa = 1$. A exclusão desse caso decorre, portanto, da ausência de um regime expansivo estável compatível com os objetivos físicos e cosmológicos desta investigação.

5.3.4 Influência da curvatura espacial na dinâmica NC

Nesta subseção, comparamos como diferentes curvaturas espaciais, especificamente as geometrias plana ($\kappa = 0$) e aberta ($\kappa = -1$), afetam a evolução do Universo sob a influência do parâmetro NC γ . São considerados tanto valores positivos quanto negativos para este parâmetro.

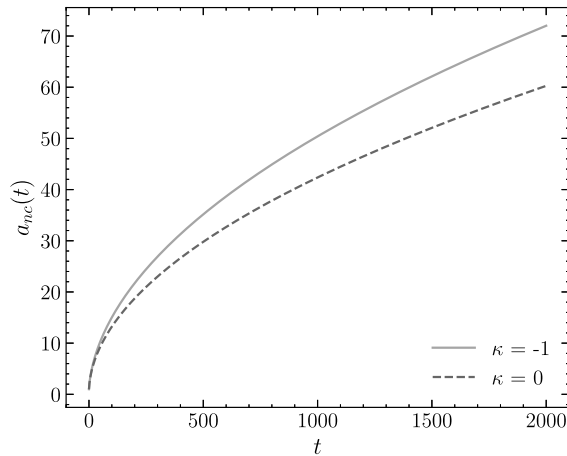
5.3.4.1 Caso do parâmetro NC negativo ($\gamma < 0$)

Após analisar detalhadamente os casos com $\kappa = -1$ e $\kappa = 0$, discutidos nas subseções 5.3.1 e 5.3.2, procedemos agora a uma comparação direta entre ambos os cenários. Concentramos essa comparação no regime $\gamma < 0$, com o objetivo de evidenciar de forma clara as diferenças dinâmicas induzidas pela curvatura espacial. Em particular, avaliamos conjuntamente a evolução do fator de escala e do parâmetro de anisotropia.

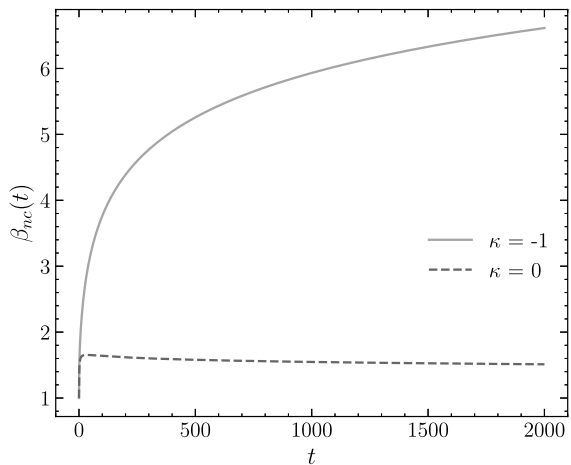
Na Figura 14, mostramos que a inclusão de curvatura negativa intensifica a expansão do Universo e modifica substancialmente o comportamento anisotrópico. O fator de escala $a_{nc}(t)$ apresenta crescimento desacelerado em ambos os casos; contudo, a taxa de expansão é significativamente maior quando $\kappa = -1$, indicando que a curvatura aberta amplifica o efeito expansivo gerado pela não comutatividade. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ tende rapidamente a um valor constante no caso de curvatura plana, enquanto, no cenário com curvatura aberta, a anisotropia persiste por um intervalo de tempo mais amplo. Esse comportamento indica que a geometria aberta não apenas favorece a expansão, mas também retarda o processo de isotropização, prolongando a presença de anisotropias no regime $\gamma < 0$.

Figura 14 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e o parâmetro NC $\gamma = -0.1$. Para as geometrias negativa ($\kappa = -1$) e plana ($\kappa = 0$), o valor correspondente de $C = \{6.0104, 6.7269\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

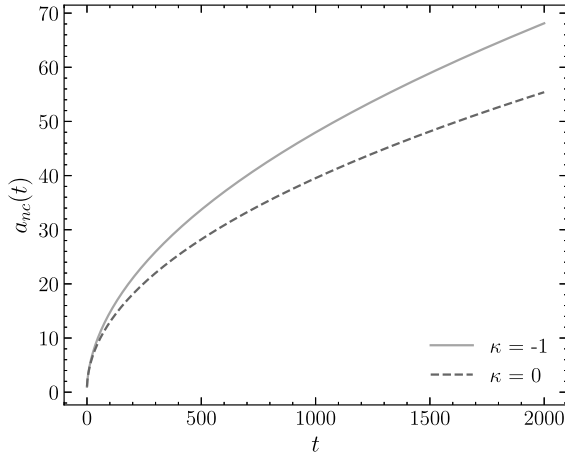
Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

5.3.4.2 Caso do parâmetro NC positivo ($\gamma > 0$)

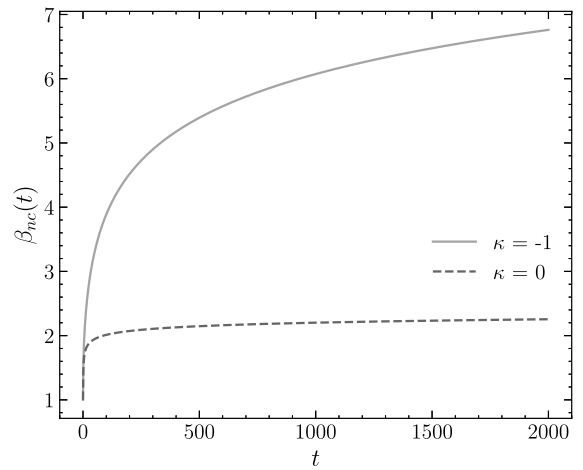
Após analisar o comportamento dinâmico do modelo no regime $\gamma > 0$ veja-se as subseções 5.3.1 e 5.3.2, comparamos diretamente os casos $\kappa = 0$ e $\kappa = -1$, conforme mostramos na Figura 15. Verificamos que a inclusão de curvatura espacial negativa ($\kappa = -1$) exerce um efeito amplificador sobre a expansão do Universo, embora com menor intensidade do que no regime $\gamma < 0$. O fator de escala $a_{nc}(t)$ cresce em ambos os cenários; contudo, atinge valores significativamente mais elevados na presença de curvatura negativa, indicando que esse tipo de geometria favorece a taxa de expansão mesmo quando o parâmetro NC positivo tende a reduzi-la. Por outro lado, o parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ apresenta comportamento claramente distinto em cada caso. No modelo plano ($\kappa = 0$), a anisotropia se estabiliza em tempos tardios (convergência para a isotropia); por outro lado, no caso $\kappa = -1$, ela continua a crescer, alcançando valores substancialmente mais elevados. Esse resultado indica que a combinação de geometria aberta e não comutatividade com $\gamma > 0$ dificulta o processo de isotropização, prolongando a presença de anisotropias no Universo ao longo da evolução temporal.

Figura 15 – Os gráficos (a) e (b) mostram as soluções numéricas obtidas sob as condições iniciais: $a_c(0) = 1$, $\dot{a}_c(0) = 1$, $\beta_c(0) = 1$, $T_c(0) = 0$, $\dot{\beta}_c(0) = 1$ e o parâmetro NC $\gamma = 0.1$. Para as geometrias negativa ($\kappa = -1$) e plana ($\kappa = 0$), o valor correspondente de $C = \{7.1645, 7.8811\}$ foi calculado a partir do vínculo $H_c = 0$, mantendo as condições iniciais fixas. Devido às unidades geometrizadas, t é medido em centímetros.

(a) Evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t .



(b) Comportamento do parâmetro de anisotropia $\beta_{nc}(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Nota: Figura distribuída sob licença Creative Commons CC BY 4.0.

5.4 EVOLUÇÃO DO FATOR DE ESCALA NC E ESTIMATIVA COSMOLÓGICA DO PARÂMETRO γ

5.4.1 Formulação dinâmica e evolução do fator de escala NC

Nesta seção, estimamos o valor do parâmetro γ a partir de parâmetros cosmológicos observacionais atuais. Adotamos essa estratégia porque é mais viável obter estimativas cosmológicas confiáveis no Universo atual do que no regime primordial, especialmente para as grandezas necessárias à determinação de γ . Por essa razão, realizamos a estimativa durante a fase dominada por matéria, regime no qual também podemos assumir que o processo de isotropização já ocorreu em grande escala, o que implica $\beta_{nc} \rightarrow \text{constante}$ e momento canônico $p_{\beta_{nc}} \rightarrow 0$. Nesse regime efetivamente isotrópico, estudamos se a contribuição associada ao parâmetro γ pode desempenhar papel relevante na dinâmica de expansão observada. Sob essas condições, o Hamiltoniano NC do modelo (5.21) reduz-se a

$$H_{nc} = -\kappa c^2 a_{nc} - \frac{p_{a_{nc}}^2}{16a_{nc}} + a_{nc}^{-3\alpha} p_{T_{nc}}. \quad (5.44)$$

onde c é a velocidade da luz e κ é o parâmetro que define a geometria do Universo (5.8). Nesta seção usamos as variáveis NC e os parêntese de Poisson deformados nos cálculos e não as variáveis comutativas definidas nas equações (5.25).

Partindo do Hamiltoniano NC na equação (5.44), calculamos as equações dinâmicas utilizando os PBs deformados descritos nas equações (5.22)-(5.24). Esses parênteses permitem obter a evolução temporal das variáveis do sistema sob a influência da não comutatividade. As equações dinâmicas resultantes são:

$$\dot{a}_{nc} = \{a_{nc}, H_{nc}\} = -\frac{p_{a_{nc}}}{8a_{nc}} + \gamma a_{nc}^{-3\alpha}, \quad (5.45)$$

$$\dot{p}_{a_{nc}} = \{p_{a_{nc}}, H_{nc}\} = 3\alpha p_{T_{nc}} a_{nc}^{-3\alpha-1} - \frac{p_{a_{nc}}^2}{16a_{nc}^2} + \kappa c^2, \quad (5.46)$$

$$\dot{T}_{nc} = \{T_{nc}, H_{nc}\} = a_{nc}^{-3\alpha} - \frac{\gamma p_{a_{nc}}}{8a_{nc}}, \quad (5.47)$$

$$\dot{p}_{T_{nc}} = \{p_{T_{nc}}, H_{nc}\} = 3\alpha \gamma p_{T_{nc}} a_{nc}^{-3\alpha-1} - \frac{\gamma p_{a_{nc}}^2}{16a_{nc}^2} + \kappa c^2 \gamma. \quad (5.48)$$

Observamos que as equações (5.46) e (5.48) estão relacionadas proporcionalmente por meio do parâmetro γ . Essa relação é dada por

$$\dot{p}_{T_{nc}} = \gamma \dot{p}_{a_{nc}}. \quad (5.49)$$

Essa expressão pode ser facilmente integrada, resultando em

$$p_{T_{nc}} = \gamma p_{a_{nc}} + C_f, \quad (5.50)$$

onde C_f é uma constante relacionada à densidade de energia do fluido inicial.

Como estamos interessados em obter uma equação dinâmica para o fator de escala a_{nc} , podemos utilizar a equação (5.45) para isolar $p_{a_{nc}}$, o que nos conduz a

$$p_{a_{nc}} = -8a_{nc} \left(\dot{a}_{nc} - \gamma a_{nc}^{-3\alpha} \right). \quad (5.51)$$

Por outro lado, ao impormos a condição de vínculo $H_{nc} = 0$ (ver equação 3.45), reduzimos a expressão (5.44) à forma

$$-c^2 \kappa a_{nc} - \frac{p_{a_{nc}}^2}{16a_{nc}} + a_{nc}^{-3\alpha} p_{T_{nc}} = 0. \quad (5.52)$$

Em seguida, ao substituirmos nesta equação os valores de $p_{T_{nc}}$ e $p_{a_{nc}}$, dados nas equações (5.50) e (5.51), obtemos

$$4\gamma^2 a_{nc}^{1-6\alpha} + C_f a_{nc}^{-3\alpha} - 4a_{nc} \dot{a}_{nc}^2 - \kappa c^2 a_{nc} = 0. \quad (5.53)$$

Além disso, na fase dominada por matéria temos $\alpha = 0$, de modo que a expansão acelerada fica inteiramente associada à presença do parâmetro NC γ . Nesse caso, ao isolarmos $\dot{a}_{nc}$ na equação anterior, obtemos uma equação do tipo Friedmann:

$$\dot{a}_{nc} = \left(\frac{C_f}{4a_{nc}} - \frac{\kappa c^2}{4} + \gamma^2 \right)^{1/2}. \quad (5.54)$$

Para simplificar a notação, definimos

$$A = C_f/4, \quad g = -\frac{\kappa c^2}{4} + \gamma^2. \quad (5.55)$$

Com essas definições, a equação diferencial (5.54) assume a forma

$$\dot{a}_{nc} = \left(\frac{A}{a_{nc}} + g \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{A + ga_{nc}}}{\sqrt{a_{nc}}}. \quad (5.56)$$

A partir desta equação, estabelecemos uma relação explícita entre o fator de escala NC e o tempo cósmico por meio da separação de variáveis. Em seguida, Integramos essa expressão entre os limites físicos (a_{nc}^{eq}, t^{eq}) e (a_{nc}, t) , onde t^{eq} e a_{nc}^{eq} representam, respectivamente, a idade do Universo e o fator de escala no instante de *igualdade entre matéria e radiação*. Obtemos então

$$\int_{t^{eq}}^t dt = \int_{a_{nc}^{eq}}^{a_{nc}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A + ga}} da. \quad (5.57)$$

A partir desta relação integral, avaliamos ambas as integrais e aplicamos seus limites de integração. Como a integral do lado esquerdo é imediata e a do lado direito admite solução analítica, obtemos uma expressão para o tempo cósmico em função do fator de escala NC. Assim, escrevemos

$$t = g^{-3/2} F(a_{nc}, C_f, \gamma) - g^{-3/2} F(a_{nc}^{eq}, C_f, \gamma) + t^{eq}, \quad (5.58)$$

onde definimos a função auxiliar

$$F(a_{nc}, C_f, \gamma) = \sqrt{A + g a_{nc}} \sqrt{g a_{nc}} - A \ln \left(\frac{\sqrt{g a_{nc}} + \sqrt{A + g a_{nc}}}{\sqrt{A}} \right). \quad (5.59)$$

Essa expressão estabelece a dependência explícita entre o fator de escala não comutativo e o tempo cósmico na era dominada por matéria. Observamos que o parâmetro $g = -\frac{\kappa c^2}{4} + \gamma^2$ combina os efeitos da curvatura espacial e da não comutatividade, de modo que a contribuição proporcional a γ^2 modifica a dinâmica de expansão ao atuar como um termo adicional efetivo na equação de Friedmann.

5.4.2 Estimativas numéricas de γ com dados cosmológicos

Ao comparar a função de Hubble no modelo cosmológico padrão de FLRW (veja a equação 2.40), aqui reescrita em uma forma conveniente para a comparação, $\dot{a} = H_0 (\Omega_m/a - \kappa c^2/H_0^2)^{1/2}$, com a equação (5.54), estabelecemos diretamente as seguintes correspondências entre os parâmetros dos dois modelos: $C_f = 4\Omega_m H_0^2$ e $g = \Omega_k H_0^2/4 + \gamma^2$, com $\Omega_k \equiv -\kappa c^2/H_0^2$, onde c é a velocidade da luz.

Utilizamos os valores cosmológicos reportados pela colaboração Planck 2018 [145], adotando $\Omega_m = 0.315$ para a densidade de matéria, $\Omega_k = 0.001$ para o parâmetro de curvatura, $h = 0.674$, e $H_0 = (100 h) \text{ km/s/Mpc} = 67.4 \text{ km/s/Mpc}$. Entretanto, medições locais produzem valores mais elevados para a constante de Hubble [146], discrepância amplamente conhecida como tensão de Hubble. Com o objetivo de avaliar a sensibilidade das estimativas do parâmetro não comutativo γ a essa tensão observacional, consideramos também o valor $h = 0.733$, correspondente a $H_0 = 73.3 \text{ km/s/Mpc}$ [146]. A adoção desses dois valores distintos de H_0 permite investigar quantitativamente o grau de dependência das estimativas de γ em relação à constante de Hubble, fornecendo, assim, uma medida explícita da robustez do parâmetro NC frente às incertezas observacionais atuais. Para estimar o valor do parâmetro NC γ , especificamos ainda o valor do fator de escala na época de igualdade entre matéria e radiação, $a_{nc}^{eq} = 4.15 \times 10^{-5}/(\Omega_m h^2) = 2.90 \times 10^{-4}$, bem como a idade do Universo correspondente, $t^{eq} = 50.9 \text{ Kyr}$ [84]. Esses valores caracterizam o instante em que as densidades de matéria e radiação eram iguais.

Além desse ponto de referência inicial, fornecemos o valor do fator de escala em outro instante da história do Universo, a_{nc} , juntamente com a idade correspondente $t(a_{nc})$. Determinamos esses valores por meio de uma calculadora cosmológica para um Universo descrito por um modelo FLRW com curvatura aberta ($k = -1$) [147], a qual computa a idade do Universo para valores dados de H_0 , Ω_m e do desvio para o vermelho z (*redshift*) ou, de forma equivalente, do fator de escala (2.22). A adoção de um espaço-tempo com curvatura aberta, em contraste com o caso plano, conduz a idades menores do Universo para um mesmo fator de escala. Em particular, para $a_{nc} = 1$ (ou $z = 0$), a calculadora fornece $t_1 = 11.659 \text{ Gyr}$ (para $H_0 = 67.4 \text{ km/s/Mpc}$) e $t_2 = 10.721 \text{ Gyr}$ (para

$H_0 = 73.3 \text{ km/s/Mpc}$), em contraste com o valor $t(a_{nc} = 1) = 13.791 \text{ Gyr}$ que se obteria, nas mesmas condições, a partir da equação de Friedmann em um modelo FLRW plano. Por fim, ao substituírmos esses valores na equação (5.58), obtemos a estimativa do parâmetro NC para o modelo considerado, cujos resultados numéricos são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Valores numéricos do fator de escala a_{nc} , da idade cósmica t e do parâmetro NC γ . Os pares (t_1, γ_1) e (t_2, γ_2) correspondem a $H_0 = 67.4 \text{ km/s/Mpc}$ [145] e $H_0 = 73.3 \text{ km/s/Mpc}$ [146], respectivamente. A comparação ilustra a sensibilidade do parâmetro NC à escolha de H_0 e seu comportamento ao longo de diferentes épocas da evolução cósmica.

a_{nc}	t_1 (anos)	γ_1	t_2 (anos)	γ_2
1.00	11.659×10^9	5.7064×10^{-11}	10.721×10^9	6.2099×10^{-11}
0.90	10.220×10^9	5.7073×10^{-11}	9.398×10^9	6.2110×10^{-11}
0.80	8.808×10^9	5.7084×10^{-11}	8.100×10^9	6.2120×10^{-11}
0.70	7.428×10^9	5.7100×10^{-11}	6.831×10^9	6.2142×10^{-11}
0.60	6.087×10^9	5.7119×10^{-11}	5.598×10^9	6.2164×10^{-11}
0.50	4.794×10^9	5.7152×10^{-11}	4.409×10^9	6.2205×10^{-11}
0.40	3.563×10^9	5.7170×10^{-11}	3.276×10^9	6.2289×10^{-11}
0.30	2.412×10^9	5.7275×10^{-11}	2.218×10^9	6.2405×10^{-11}
0.20	1.374×10^9	5.7627×10^{-11}	1.264×10^9	6.2717×10^{-11}
0.10	0.511×10^9	5.8943×10^{-11}	0.470×10^9	6.4321×10^{-11}
0.05	0.185×10^9	6.5073×10^{-11}	0.171×10^9	6.6517×10^{-11}

Fonte: Reproduzida de Oliveira Neto e Soncco Apaza (2025).

Na Tabela 13, verificamos que, à medida que o fator de escala assume valores menores, a idade correspondente do Universo também diminui, como esperado no contexto da expansão cosmológica. De forma consistente, o parâmetro γ aumenta progressivamente à medida que a_{nc} e a idade do Universo t diminuem. Esse comportamento indica que os efeitos não comutativos, tornam-se mais relevantes nas fases iniciais da evolução cosmológica e perdem importância relativa à medida que o Universo se expande. Tal tendência está em plena concordância com a interpretação física de que possíveis correções geométricas de natureza fundamental devem manifestar-se de forma mais intensa em regimes de alta densidade e pequenas distâncias, podendo ser qualitativamente comparada com resultados previamente reportados na literatura [59–62]. Além disso, a partir da Tabela 13, constatamos que os valores estimados de γ aumentam quando consideramos valores mais elevados de H_0 , refletindo a sensibilidade do parâmetro NC à taxa de expansão atual do Universo e evidenciando que a tensão de Hubble exerce impacto direto nas estimativas obtidas para γ .

6 EFEITO TÚNEL QUÂNTICO EM COSMOLOGIA NÃO COMUTATIVA COM MATÉRIA E CONSTANTE COSMOLÓGICA

Analizamos neste capítulo o nascimento do Universo em um modelo cosmológico por meio do mecanismo de tunelamento quântico. Consideramos um modelo com métrica FLRW fechada (curvatura positiva, $k = 1$), constante cosmológica Λ e um fluido perfeito, no contexto de um minisuperespaço não comutativo. Nosso principal objetivo é investigar como a introdução da não comutatividade (NC), implementada no setor dos momentos canônicos, modifica a equação de Wheeler–DeWitt (WDW) e, em particular, o potencial efetivo associado ao processo de nucleação quântica do Universo. Em outras palavras, estamos interessados em compreender de que maneira a NC altera a probabilidade de tunelamento e, conseqüentemente, influencia o nascimento do Universo. Para esse fim, desenvolvemos a formulação hamiltoniana no formalismo ADM com um fluido descrito pelo formalismo de Schutz, realizamos a quantização canônica do modelo e estudamos a probabilidade de tunelamento por meio de abordagens WKB e numérica. Além disso, é importante destacar que a versão comutativa desse modelo já foi estudada na literatura [77], o que nos permite comparar diretamente os efeitos introduzidos pela deformação não comutativa.

6.1 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO MODELO Λ -FLRW COM FLUIDO PERFEITO

Para descrever a geometria do Universo, neste capítulo adotamos a métrica FLRW, que incorpora as condições de homogeneidade e isotropia espaciais [148, 149] e constitui o cenário geométrico de partida para a análise dos efeitos da não comutatividade no tunelamento quântico cosmológico, cujo elemento de linha escrevemos como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (6.1)$$

onde N é a função lapso introduzida no formalismo ADM, a o fator de escala e k o parâmetro de curvatura espacial, cujos valores $k = 0$, $k = +1$ e $k = -1$ descrevem, respectivamente, espaços planos, curvaturas fechadas e curvaturas abertas, enquanto (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas. Ao longo deste capítulo adotamos unidades naturais tais que $c = k_B = \hbar = 1$ e $8\pi G = 1$.

Para desenvolver a formulação dinâmica do modelo, tal como fizemos no capítulo anterior, reescrevemos a métrica (6.1) no formalismo ADM (veja a Eq. (3.15)), onde o elemento de linha assume a forma

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + h_{ij}(t) dx^i dx^j. \quad (6.2)$$

Nesta decomposição, h_{ij} é a métrica induzida sobre as hipersuperfícies espaciais. Neste

caso em particular, os termos de deslocamento espacial (*shift*) são nulos, $N^i = 0$, como consequência direta das simetrias de homogeneidade e isotropia.

Ao comparar as equações (6.1) e (6.2), identificamos diretamente o bloco espacial como a métrica induzida sobre as hipersuperfícies espaciais,

$$h_{ij} = a(t)^2 \text{diag}\left(\frac{1}{1 - kr^2}, r^2, r^2 \sin^2 \theta\right), \quad (6.3)$$

onde os índices espaciais i, j correspondem às coordenadas (r, θ, ϕ) . Ao calcular seu determinante, obtemos

$$h \equiv \det(h_{ij}) = \frac{a(t)^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (6.4)$$

Esse resultado mostra que o grau de liberdade dinâmico associado ao volume espacial fica completamente determinado pelo fator de escala $a(t)$. Em consequência, o elemento de volume tridimensional assume a forma $\sqrt{h} d^3x = a(t)^3 r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - kr^2} dr d\theta d\phi$, onde a dependência em (r, θ, ϕ) descreve a métrica espacial de curvatura constante das hipersuperfícies Σ_t , cujo sinal de curvatura é fixado pelo parâmetro k .

Uma vez estabelecida a decomposição 3+1 do espaço-tempo, procedemos a construir a formulação dinâmica do modelo a partir da ação gravitacional no formalismo ADM. Escrevemos a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica como

$$S_G = \frac{1}{2} \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right), \quad (6.5)$$

onde ${}^{(3)}R$ representa o escalar de curvatura tridimensional associado à métrica espacial h_{ij} , Λ denota a constante cosmológica, K_{ij} corresponde ao tensor de curvatura extrínseca e $K = h^{ij} K_{ij}$ define seu traço (veja a Eq. 3.22).

Para o caso do modelo homogêneo e isotrópico (métrica (6.1)), a curvatura extrínseca assume a forma

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \dot{h}_{ij}, \quad (6.6)$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo coordenado t . Para determinar explicitamente a ação (6.5), avaliamos a contribuição da curvatura extrínseca para a métrica (6.3). Dado que o cálculo detalhado é extenso, apresentamos a derivação completa da combinação $K_{ij} K^{ij} - K^2$ no Apêndice H. O resultado obtido é

$$K_{ij} K^{ij} - K^2 = -\frac{6}{N^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (6.7)$$

Do mesmo modo, calculamos o escalar de Ricci tridimensional associado à métrica induzida (6.3), cuja dedução completa encontra-se no Apêndice I. O resultado obtido é

$${}^{(3)}R = \frac{6k}{a^2}. \quad (6.8)$$

Para completar a descrição dinâmica do modelo cosmológico, incorporamos um setor material que atua como fonte nas equações de campo e permite introduzir uma variável

temporal interna no hamiltoniano. Modelamos a matéria como um fluido perfeito comóvel caracterizado por uma equação de estado barotrópica e descrevemos sua dinâmica por meio do formalismo variacional de Schutz, o qual admite uma formulação canônica consistente e permite escrever a ação de matéria no contexto ADM. Dado que essa construção foi desenvolvida detalhadamente na Seção 3.2, adotamo-la aqui diretamente para acoplá-la ao setor gravitacional.

Desse modo, a dinâmica completa do modelo cosmológico FLRW fica descrita pela soma dos setores gravitacional e material. Substituímos explicitamente as equações (6.7) e (6.8) na ação gravitacional (6.5) e adicionamos a contribuição de matéria (3.56), obtendo assim a ação total S do sistema (geometria + matéria).

$$S = S_G + S_M = \frac{1}{2} \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \left[\frac{1}{N^2} \left(-6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{6k}{a^2} - 2\Lambda \right] + \int dt \int d^3x N \sqrt{h} \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{N(1+\alpha)} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}. \quad (6.9)$$

Em seguida, integramos explicitamente a parte espacial da ação. Utilizando a expressão do determinante dada em (6.4), como $\int d^3x \sqrt{h} = a^3 \int (r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - kr^2}) dr d\theta d\phi$, onde toda a dependência espacial fica contida na integral $V_0 \equiv \int (r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - kr^2}) dr d\theta d\phi$, a qual define um volume constante. Podemos considerar esse volume como $V_0 = 1$ sem perda de generalidade, ficando absorvido na ação; dessa forma, reescrevemos a ação (6.9) como

$$S = \int dt \left[-3 \frac{a \dot{a}^2}{N} + 3kNa - Na^3 \Lambda + N^{-1/\alpha} a^3 \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{1+\alpha} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha} \right]. \quad (6.10)$$

A expressão (6.10) assume a forma $S = \int \mathcal{L} dt$, a partir da qual identificamos diretamente o lagrangiano como o integrando da ação. Em consequência, obtemos o lagrangiano total do sistema dado por

$$\mathcal{L} = -3 \frac{a \dot{a}^2}{N} + 3kNa - Na^3 \Lambda + N^{-1/\alpha} a^3 \alpha \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{1+\alpha} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha} \quad (6.11)$$

Com esse lagrangiano, calculamos os momentos canônicos conjugados associados às variáveis dinâmicas $a(t)$, $\varphi(t)$, $s(t)$, $N(t)$ e $\vartheta(t)$, obtendo:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -6 \frac{a \dot{a}}{N}, \quad (6.12a)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = N^{-1/\alpha} a^3 e^{-s/\alpha} \left(\frac{\dot{\varphi} + \vartheta \dot{s}}{\alpha + 1} \right)^{1/\alpha}, \quad (6.12b)$$

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \vartheta p_\varphi, \quad p_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = 0 \quad (6.12c)$$

onde $p_N = 0$ e $p_\vartheta = 0$ indicam que a função lapso e o potencial ϑ atuam como multiplicadores de Lagrange. Utilizando os momentos canônicos em (6.12), expressamos as

velocidades em função dos momentos

$$\dot{a} = -\frac{Np_a}{6a}, \quad (6.13a)$$

$$\vartheta \dot{s} + \dot{\varphi} = N(\alpha + 1) \left(\frac{p_\varphi}{a^3} \right)^\alpha e^s. \quad (6.13b)$$

Uma vez expressas todas as velocidades em função das variáveis e dos momentos canônicos, a passagem para o formalismo hamiltoniano completa-se mediante a transformação de Legendre, o que nos conduz à expressão $N\mathcal{H}$, com o vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{12a} - 3ka + a^3\Lambda + \left(\frac{p_\varphi^{\alpha+1}}{a^{3\alpha}} \right) e^s. \quad (6.14)$$

Com o propósito de expressar $N\mathcal{H}$ unicamente em termos de variáveis canônicas, introduzimos as transformações canônicas [83, 142]

$$T = -p_s e^{-s} p_\varphi^{-(\alpha+1)}, \quad p_T = p_\varphi^{\alpha+1} e^s, \quad \bar{\Phi} = \varphi - (\alpha + 1) p_s / p_\varphi, \quad \bar{p}_\varphi = p_\varphi. \quad (6.15)$$

Desse modo, o hamiltoniano total do sistema pode ser reescrito em termos das novas variáveis (6.15), de tal maneira que, ao adotar o calibre conforme $N = a$, o super-Hamiltoniano assume a forma

$$N\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{12} - 3a^2 + \Lambda a^4 + p_T. \quad (6.16)$$

Esse resultado corresponde a um modelo de Universo fechado ($k = 1$) com radiação ($\alpha = 1/3$), onde p_a denota o momento canônico conjugado ao fator de escala a , enquanto p_T é o momento canônico associado à variável do fluido T [81–83].

6.2 FORMULAÇÃO QUÂNTICA NÃO COMUTATIVA DO MODELO

Agora, procedemos a quantizar o modelo seguindo o formalismo de Dirac para sistemas com vínculos [107, 108, 120], onde tomamos como variáveis de fase os pares canônicos (a, p_a) e (T, p_T) , os quais satisfazem as relações de Poisson usuais. No processo de quantização, promovemos essas variáveis a operadores que atuam sobre a função de onda, a qual depende das variáveis a e T ,

$$\Psi = \Psi(a, T). \quad (6.17)$$

Ao trabalhar na representação de Schrödinger [4], os operadores $\hat{a}$ e $\hat{T}$ atuam por multiplicação sobre a função de onda, enquanto seus momentos conjugados são representados por operadores diferenciais, dados por:

$$\hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad \hat{p}_T = -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (6.18)$$

Essas definições satisfazem as relações de comutação,

$$[\hat{a}, \hat{p}_a] = i, \quad [\hat{T}, \hat{p}_T] = i, \quad (6.19)$$

com os demais comutadores sendo nulos.

De acordo com o formalismo de Dirac para sistemas com vínculos, impomos a condição de vínculo do super-hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$ no nível quântico como uma condição de operador sobre os estados físicos, o que conduz à equação $N\hat{\mathcal{H}}\Psi(a, T) = 0$, que corresponde à equação de Wheeler–DeWitt (WDW) [67]. Ao trabalhar no calibre conforme $N = a$, escrevemos essa equação na forma

$$\left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 3a^2 + \Lambda a^4 \right) \Psi(a, \tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau). \quad (6.20)$$

onde definimos a nova variável $\tau = -T$. Essa expressão assume uma forma análoga à de uma equação de Schrödinger. A solução numérica da equação (6.20) foi estudada com grande detalhe na Ref. [77].

O operador $N\hat{\mathcal{H}}$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno [150],

$$(\Psi, \Phi) = \int_0^\infty da \Psi^*(a, \tau) \Phi(a, \tau), \quad (6.21)$$

desde que a função de onda seja restringida a um domínio adequado por meio de condições de fronteira em $a = 0$. Em particular, obtemos um operador autoadjunto ao impor condições de Dirichlet, $\Psi(0, \tau) = 0$, ou ainda condições de Neumann, $\partial_a \Psi(0, \tau) = 0$, as quais definem distintas extensões auto-adjuntas do operador. Além disso, para garantir uma norma finita, requeremos que $\Psi(a, \tau)$ decaia suficientemente rápido quando $a \rightarrow \infty$, o que implica $\Psi(a, \tau) \rightarrow 0$ nesse limite [67, 151, 152].

Neste capítulo, para introduzir a não comutatividade no presente modelo, modificamos a prescrição empregada nas Refs. [54, 57, 69, 153]. Nesses trabalhos, os autores implementaram a não comutatividade por meio de um comutador diferente de zero entre os operadores associados às variáveis canônicas a e T . Na presente análise adotamos uma implementação alternativa da não comutatividade, na qual a deformação é introduzida no setor dos momentos canônicos p_a e p_T [70], seguindo a relação

$$[\check{p}_a, \check{p}_T] = i\varepsilon \quad (6.22)$$

Aqui, $\check{p}_a$ e $\check{p}_T$ denotam os operadores de momento em sua versão NC, enquanto ε é o parâmetro que caracteriza a não comutatividade. Neste trabalho, consideramos ε como um parâmetro pequeno, de modo que as equações são mantidas apenas até primeira ordem nesse parâmetro. Interpretamos essa relação como a realização quântica da estrutura NC introduzida em nível clássico na Ref. [154]. Esta não comutatividade entre os operadores de momento pode ser estendida a funções das variáveis não comutativas mediante o produto

estrela de Moyal [10, 118, 130, 143, 155]. Em particular, para duas funções $f(\check{a}, \check{T})$ e $g(\check{a}, \check{T})$, definimos o produto de Moyal como

$$f(\check{a}, \check{T}) \star g(\check{a}, \check{T}) = f(\check{a}, \check{T}) \exp \left[\frac{i\varepsilon}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_{\check{a}} \overrightarrow{\partial}_{\check{T}} - \overleftarrow{\partial}_{\check{T}} \overrightarrow{\partial}_{\check{a}} \right) \right] g(\check{a}, \check{T}). \quad (6.23)$$

Com essa definição do produto estrela de Moyal, escrevemos a equação de WDW para a versão NC do modelo clássico (6.20) por meio da expressão

$$\left(-\frac{1}{12} \check{p}_a^2 - 3\check{a}^2 + \Lambda \check{a}^4 + \check{p}_T \right) \star \Phi(\check{a}, \check{T}) = 0. \quad (6.24)$$

onde $\Phi(\check{a}, \check{T})$ é a função de onda.

Expressamos a equação de WDW (6.24) de maneira equivalente em termos de operadores comutativos $\hat{p}_a$ e $\hat{p}_T$, juntamente com o produto ordinário de funções. Para isso, seguindo o esquema proposto na Ref. [70], introduzimos as transformações dos operadores não comutativos em termos de operadores comutativos, como segue:

$$\check{p}_a = \hat{p}_a + \varepsilon \hat{T}, \quad (6.25)$$

$$\check{p}_T = \hat{p}_T, \quad (6.26)$$

enquanto as transformações dos operadores $\check{a} = \hat{a}$ e $\check{T} = \hat{T}$ permanecem inalteradas.

Em seguida, escrevemos a versão comutativa da equação de WDW (6.24) a primeira ordem no parâmetro NC ε na representação de Schrödinger como

$$\left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{i\varepsilon}{6} \tau \frac{\partial}{\partial a} - 3a^2 + \Lambda a^4 \right) \Phi(a, \tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(a, \tau), \quad (6.27)$$

onde, por conveniência, introduzimos a nova variável $\tau = -T$. Observamos que, para $\varepsilon = 0$, a equação anterior se reduz diretamente à equação de tipo Schrödinger (6.20), discutida previamente.

O termo acoplado $\varepsilon \tau \frac{\partial}{\partial a}$ na equação (6.27) é eliminado por meio de uma transformação unitária de fase da função de onda, a qual não altera a interpretação probabilística do sistema,

$$\Phi(a, \tau) = e^{i\varepsilon a \tau} \Psi(a, \tau). \quad (6.28)$$

Ao substituir essa relação em (6.27), reescrevemos a equação de forma equivalente como uma equação de tipo Schrödinger associada a um potencial efetivo,

$$\left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 3a^2 + \Lambda a^4 - \varepsilon a \right) \Psi(a, \tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau). \quad (6.29)$$

Aqui, o termo linear εa faz parte do potencial efetivo (V_{eff}) e corresponde à manifestação escalar do acoplamento induzido pela não comutatividade, obtida após eliminar o termo acoplado por meio de uma transformação unitária de fase [55, 156]. Definimos, portanto, o potencial efetivo como

$$V_{\text{eff}}(a) = 3a^2 - \Lambda a^4 + \varepsilon a. \quad (6.30)$$

Ao longo do texto, denotamos o potencial efetivo indistintamente como V_{eff} ou $V_{\text{eff}}(a)$, dependendo do contexto.

6.3 TRATAMENTO SEMICLÁSSICO E NUMÉRICO DO EFEITO TÚNEL QUÂNTICO

6.3.1 Solução semiclássica WKB

Dado que o hamiltoniano não depende explicitamente do tempo τ , a equação (6.29) pode ser resolvida por separação de variáveis, introduzindo o ansatz $\Psi(a, \tau) = \psi(a)e^{-iE\tau}$. Isso conduz a uma equação estacionária do tipo Schrödinger para $\psi(a)$ com potencial efetivo $V_{\text{eff}}(a)$ definido em (6.30),

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} + 12[E - V_{\text{eff}}(a)]\psi(a) = 0, \quad (6.31)$$

onde E é a constante de separação associada à energia do fluido de radiação.

Para resolver a equação (6.31) dentro da aproximação WKB [157–160], buscamos soluções da forma $\psi(a) = A(a)e^{i\varphi(a)}$. Ao substituirmos essa expressão na equação diferencial, obtemos um sistema acoplado de equações diferenciais para a amplitude $A(a)$ e a fase $\varphi(a)$. Nessa aproximação assumimos que a amplitude varia lentamente, de modo que o termo d^2A/da^2 é desprezível frente a $A(d\varphi/da)^2$. Sob essa aproximação, escrevemos a solução geral como:

i) Região permitida ($E > V_{\text{eff}}$),

$$\psi(a) = \frac{C_1}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(\pm i \int k(a) da\right), \quad k(a) = \sqrt{12[E - V_{\text{eff}}(a)]}. \quad (6.32)$$

ii) Região proibida ($E < V_{\text{eff}}$),

$$\psi(a) = \frac{C_2}{\sqrt{k'(a)}} \exp\left(\pm \int k'(a) da\right), \quad k'(a) = \sqrt{12[V_{\text{eff}}(a) - E]}. \quad (6.33)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. O procedimento detalhado para a obtenção dessas soluções, passo a passo, é apresentado no Apêndice J.

6.3.2 Probabilidade de tunelamento WKB

Quando a energia E é menor que o valor máximo do potencial $V_{\text{eff}}^{\text{max}}(a)$, estabelecemos a condição física que permite estudar o tunelamento quântico associado ao nascimento do Universo através da barreira de potencial $V_{\text{eff}}(a)$. Essa barreira é delimitada pelos pontos de retorno esquerdo (a_{ltp}) e direito (a_{rtp}), determinados por $E = V_{\text{eff}}(a)$. Esses pontos de retorno dividem o eixo a em três regiões: Região I ($0 < a < a_{\text{ltp}}$), zona classicamente permitida à esquerda; Região II ($a_{\text{ltp}} < a < a_{\text{rtp}}$), zona classicamente proibida; Região III ($a_{\text{rtp}} < a < \infty$), zona classicamente permitida à direita. Sob essas condições, escrevemos a solução da equação do tipo Schrödinger utilizando as expressões (6.32) e (6.33) para cada

uma das regiões [161, 162],

$$\psi(a) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(i \int_a^{a_{\text{ltp}}} k(a) da\right) + \frac{B}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(-i \int_a^{a_{\text{ltp}}} k(a) da\right), & 0 \leq a \leq a_{\text{ltp}}, \\ \frac{C}{\sqrt{k'(a)}} \exp\left(-\int_{a_{\text{ltp}}}^a k'(a) da\right) + \frac{D}{\sqrt{k'(a)}} \exp\left(\int_{a_{\text{ltp}}}^a k'(a) da\right), & a_{\text{ltp}} \leq a \leq a_{\text{rtp}}, \\ \frac{F}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(i \int_{a_{\text{rtp}}}^a k(a) da\right) + \frac{G}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(-i \int_{a_{\text{rtp}}}^a k(a) da\right), & a_{\text{rtp}} \leq a < \infty. \end{cases} \quad (6.34)$$

onde A, B, C, D, F e G são amplitudes constantes das soluções WKB.

Aplicando as fórmulas de conexão nos pontos de retorno a_{ltp} e a_{rtp} [161], obtemos as relações lineares entre os coeficientes das regiões permitidas (I e III). Expressamos o resultado por meio de uma matriz de conexão que vincula (A, B) a (F, G) ,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\theta + \frac{1}{2\theta} & i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) \\ -i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) & 2\theta + \frac{1}{2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

onde o parâmetro

$$\theta = \exp\left(\int_{a_{\text{ltp}}}^{a_{\text{rtp}}} \sqrt{12(3a^2 - \Lambda a^4 + \varepsilon a - E)} da\right), \quad (6.36)$$

mede a altura e a espessura da barreira de potencial como função da energia.

A partir das soluções na Eq. (6.34), identificamos na Região I o coeficiente A como a amplitude da onda incidente que se propaga em direção à barreira, enquanto na Região III o coeficiente F descreve a componente transmitida. Para o cenário de nascimento do Universo impomos a condição $G = 0$, uma vez que não existe componente incidente proveniente de $a \rightarrow \infty$. Dessa forma, obtemos a probabilidade de tunelamento [161, 162] mediante a expressão,

$$TP_{\text{WKB}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2}. \quad (6.37)$$

Esse resultado será utilizado posteriormente para comparar com a probabilidade de tunelamento obtida numericamente.

6.3.3 Solução numérica da equação de Wheeler-DeWitt

6.3.3.1 Condições inicial e de fronteira

O tratamento numérico do processo de tunelamento requer a definição prévia de uma condição inicial fisicamente adequada [77]. Nesse contexto, adotamos como condição inicial um pacote do tipo gaussiano, modulado pelo fator a , localizado em uma vizinhança da origem $a = 0$, que se anula nesse ponto e satisfaz a condição de normalização. Essa escolha

é compatível com a condição de contorno imposta na origem e garante a integrabilidade quadrática do estado no semieixo $a \geq 0$. Escrevemos a função inicial como

$$\Psi(a, 0) = \left(\frac{8192E^3}{\pi} \right)^{1/4} a e^{-4Ea^2}, \quad (6.38)$$

onde o parâmetro E caracteriza a energia média associada ao estado inicial [77]. Impondo a condição de normalização, exigimos que

$$\int_0^\infty |\Psi(a, 0)|^2 da = 1, \quad (6.39)$$

o que determina o fator de normalização que aparece na Eq. (6.38).

Além da condição de fronteira do tipo Dirichlet $\Psi(0, \tau) = 0$, exigimos que a função de onda seja de quadrado integrável no domínio $a \in [0, \infty)$. Para satisfazer essa condição, o comportamento assintótico do estado deve decair suficientemente quando $a \rightarrow \infty$, de modo que

$$\Psi(a, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad a \rightarrow \infty,$$

de tal forma que a integral $\int_0^\infty |\Psi(a, \tau)|^2 da$ seja finita, o que garante consistência com a interpretação probabilística do estado.

6.3.3.2 Método de Crank-Nicolson e formulação numérica

Uma vez especificadas as condições iniciais e de fronteira, procedemos a resolver numericamente a equação de WDW em sua forma do tipo Schrödinger, dada pela Eq. (6.29). Para isso, discretizamos o domínio espacial $a \in [0, a_{\max}]$ por meio de um esquema de diferenças finitas e empregamos o método implícito de Crank-Nicolson (CN) [163–165], o qual é particularmente adequado para equações de evolução como a considerada neste capítulo, devido à sua estabilidade incondicional e precisão de segunda ordem no tempo.

Introduzimos uma malha temporal uniforme definida por

$$\tau_n = n \Delta\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

onde $\Delta\tau$ representa o passo temporal e τ_M corresponde ao último instante da evolução numérica. Em cada instante discreto denotamos a função de onda como

$$\Psi(a, \tau_n) \equiv \Psi^n(a). \quad (6.40)$$

De modo análogo, dividimos o domínio espacial $a \in [0, a_{\max}]$ em uma malha uniforme

$$a_j = j \Delta a, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

onde $\Delta a = a_{\max}/N$ e $a_N = a_{\max}$. Avaliando a função de onda nos nós espaciais definimos

$$\Psi_j^n \equiv \Psi(a_j, \tau_n), \quad (6.41)$$

que representa o valor discreto da função de onda no ponto a_j e no instante τ_n .

Partimos da Eq. (6.29), a qual já possui a estrutura de uma equação do tipo Schrödinger em relação à variável τ . Com o objetivo de isolar explicitamente a derivada temporal e expressar a equação em sua forma padrão de evolução, multiplicamos ambos os lados por $-i$ e utilizamos a definição do potencial efetivo (6.30). Desse modo obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau) = -i \hat{H} \Psi(a, \tau), \quad (6.42)$$

onde o operador $\hat{H}$ fica definido como

$$\hat{H} = -\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + V_{\text{eff}}(a). \quad (6.43)$$

Procedemos a integrar a Eq. (6.42) em relação à variável temporal τ no intervalo finito $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, definido pela discretização temporal $\tau_{n+1} = \tau_n + \Delta\tau$, com o objetivo de formular um esquema de avanço temporal entre passos consecutivos.

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\tau = -i \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \hat{H} \Psi d\tau. \quad (6.44)$$

O lado esquerdo é avaliado de forma exata pelo Teorema Fundamental do Cálculo, enquanto no lado direito aplicamos a regra do trapézio, característica do método de Crank-Nicolson [163, 164], o que nos conduz à seguinte discretização

$$\begin{aligned} \Psi^{n+1} - \Psi^n &= -\frac{i\Delta\tau}{2} [\hat{H}\Psi^n + \hat{H}\Psi^{n+1}] \\ &= -\frac{i\Delta\tau}{2} \hat{H} (\Psi^n + \Psi^{n+1}). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Para discretizar a segunda derivada espacial do $\hat{H}$ (6.43), utilizamos o esquema de diferenças centradas obtido da expansão de Taylor em torno do ponto a_j ,

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} \right|_{a_j} \approx \frac{\Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1}}{(\Delta a)^2}. \quad (6.46)$$

Substituindo essa aproximação no operador $\hat{H}$, definimos o operador discreto H_d como

$$(H_d \Psi)_j = -\frac{1}{12} \frac{\Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1}}{(\Delta a)^2} + V_j \Psi_j, \quad (6.47)$$

onde $V_j = V_{\text{eff}}(a_j)$. Definindo $\alpha = 1/[12(\Delta a)^2]$, o operador H_d assume a forma matricial tridiagonal real e simétrica

$$H_d = \begin{pmatrix} 2\alpha + V_1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 2\alpha + V_2 & -\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha + V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 2\alpha + V_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Sob condições de fronteira de Dirichlet, $\Psi_0^n = \Psi_N^n = 0$, a matriz atua sobre o subespaço interior $j = 1, \dots, N - 1$. A expressão $(H_d\Psi)_j$ denota a componente j -ésima do vetor obtido ao aplicar o operador discreto H_d sobre Ψ , isto é, $(H_d\Psi)_j = \sum_k (H_d)_{jk} \Psi_k$.

Substituindo $\hat{H}$ por H_d na Eq. (6.45) e reorganizando os termos de modo que as quantidades avaliadas em τ_{n+1} fiquem no lado esquerdo, obtemos finalmente

$$\left(I + \frac{i\Delta\tau}{2} H_d\right) \Psi^{n+1} = \left(I - \frac{i\Delta\tau}{2} H_d\right) \Psi^n. \quad (6.49)$$

Nessa expressão, I denota a matriz identidade de dimensão $(N - 1) \times (N - 1)$. A equação (6.49) define, a cada instante discreto, um sistema linear tridiagonal cuja resolução implementamos numericamente conforme descrevemos a seguir.

Implementamos a resolução numérica do sistema em `Python` por meio de rotinas de álgebra linear esparsa disponíveis em `SciPy` [166, 167]. Dado que a matriz do lado esquerdo é tridiagonal, armazenamos as matrizes em formato esparsa e realizamos uma fatoração LU inicial, que posteriormente utilizamos para resolver o sistema linear ao longo da evolução temporal.

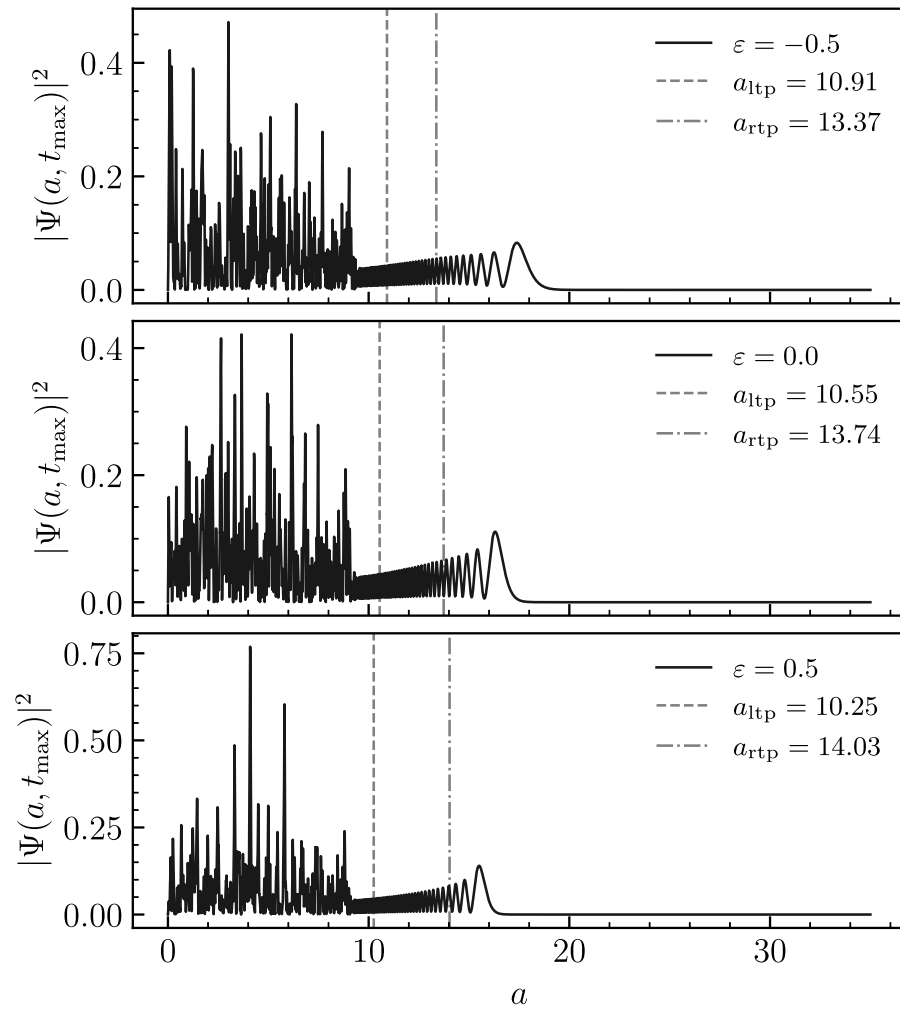
Tomamos o passo espacial $\Delta a = 0.00819$, suficientemente pequeno para resolver adequadamente a dinâmica na região da barreira do potencial efetivo V_{eff} , no regime em que a energia E é menor que o valor máximo dessa barreira, e o passo temporal $\Delta\tau = 0.05$, o que garante uma adequada precisão temporal; verificamos, além disso, a conservação da norma discreta $\sum_j |\Psi_j^n|^2 \Delta a$ durante toda a evolução, em concordância com o caráter unitário do esquema de CN.

6.3.3.3 Densidade de probabilidade em função do fator de escala

Para ilustrar o efeito do parâmetro NC ε , plotamos a densidade de probabilidade $|\Psi(a, t_{\text{max}})|^2$ em função de a , como se mostra na Figura 16. No instante t_{max} , quando o pacote de ondas atinge $a = 35$, valor que é tomado como uma aproximação numérica da condição $a \rightarrow \infty$. O exemplo corresponde a $\Lambda = 0.01$ e energia $E = 210$, mantidos fixos, para três valores de ε . Em geral, para valores pequenos de a , observa-se a presença de interferência entre as componentes incidente e refletida, enquanto a componente transmitida é um pacote de ondas que se desloca em direção a ∞ com amplitude decrescente, a qual tende a zero quando $a \rightarrow \infty$. As linhas verticais indicam os pontos de retorno clássicos esquerdo (a_{ltp}) e direito (a_{rtp}), definidos pelas raízes positivas da equação $V_{\text{eff}}(a) = E$, os quais delimitam a região classicamente proibida. Para $\varepsilon = -0.5$, obtemos $(a_{\text{ltp}}, a_{\text{rtp}}) = (10.91, 13.37)$; para $\varepsilon = 0$, $(10.55, 13.74)$; e para $\varepsilon = 0.5$, $(10.25, 14.03)$. Esses valores mostram de maneira explícita que, para $\varepsilon > 0$, o ponto de retorno esquerdo se desloca para menores valores de a , enquanto o ponto de retorno direito se move para valores maiores, o que implica um alargamento progressivo da região classicamente proibida. Por outro lado, para $\varepsilon < 0$ essa região se estreita. Além disso, os valores máximos do potencial efetivo são

$V_{\max}^{\varepsilon=-0.5} = 218.89$, $V_{\max}^{\varepsilon=0} = 225$ e $V_{\max}^{\varepsilon=0.5} = 231.13$. Esses valores mostram que, para $\varepsilon < 0$, a barreira de potencial se reduz, enquanto para $\varepsilon > 0$ ela aumenta, como observado na Figura 17. Portanto, o termo εa no potencial efetivo modifica tanto a altura quanto a largura da barreira de potencial. Essa modificação tem implicações diretas na probabilidade de tunelamento, como será mostrado mais adiante na Tabela 14. É importante destacar que os valores de Λ , E e ε foram escolhidos apenas com fins ilustrativos, para facilitar a visualização das propriedades do sistema.

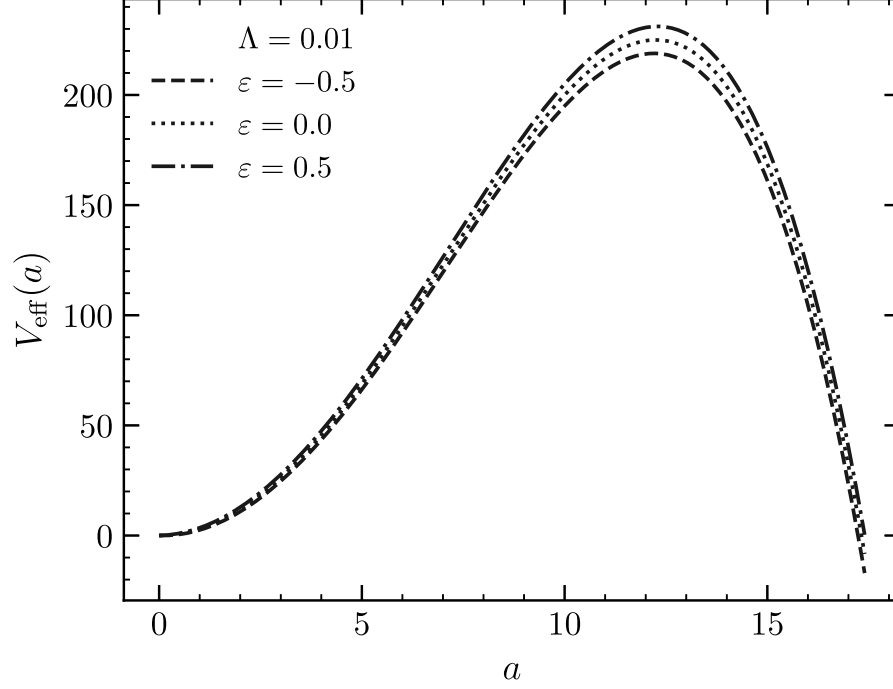
Figura 16 – Densidade de probabilidade $|\Psi(a, t_{\max})|^2$ como função do fator de escala a para diferentes valores de ε , $\Lambda = 0.01$ e $E = 210$, no instante $t_{\max}$, quando Ψ atinge $a = 35$, valor que é adotado como uma aproximação numérica de $a \rightarrow \infty$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

Figura 17 – Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(a)$ como função de a para diferentes valores de ε .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

6.3.4 Probabilidade de tunelamento numérica

Na análise baseada na resolução numérica da equação (6.29), definimos a probabilidade de tunelamento, denotada por TP_{int} , como a probabilidade de encontrar o sistema na região $a > a_{\text{rtp}}$ no instante t_{max} . Essa região é classicamente inacessível quando a energia E é menor que o valor máximo da barreira de potencial e, portanto, somente pode ser alcançada por meio do efeito túnel [77, 168, 169]. Em termos da função de onda, essa quantidade é dada por

$$TP_{\text{int}} = \frac{\int_{a_{\text{rtp}}}^{\infty} |\Psi(a, t_{\text{max}})|^2 da}{\int_0^{\infty} |\Psi(a, t_{\text{max}})|^2 da}. \quad (6.50)$$

Nessa expressão, o limite superior de integração ∞ é substituído, para fins numéricos, por um valor suficientemente grande do fator de escala. Neste trabalho adotamos $a_{\text{max}} = 35$, conforme indicado anteriormente. Além disso, como a função de onda está normalizada, o denominador da expressão anterior representa a probabilidade total e é igual à unidade.

6.3.5 Contraste entre as probabilidades de tunelamento WKB e integrada

Na aproximação semiclassica, obtemos a probabilidade de transmissão TP_{WKB} ao analisar a interação da onda incidente Ψ_{inc} com a barreira de potencial ao alcançar

o ponto de retorno a_{ltp} . Nesse ponto, a onda se separa em uma componente refletida Ψ_{ref} , que retorna para $a < a_{\text{ltp}}$, e uma componente que atravessa a região de túnel e se manifesta em $a > a_{\text{rtp}}$ como a onda transmitida Ψ_{trans} . Em contraste, a probabilidade integrada TP_{int} é obtida a partir da evolução dinâmica da função de onda no domínio $a \geq 0$. Nesse caso, interpretamos a fronteira $a = 0$ como uma parede de potencial infinita que reflete completamente a componente refletida do pacote de onda de volta para a barreira de potencial. Como consequência, o pacote refletido gera novos eventos de incidência sobre a região de túnel, produzindo sucessivas contribuições transmitidas para $a > a_{\text{rtp}}$ se deixarmos que o sistema evolua durante um longo período de tempo, o que se traduz em múltiplas contribuições para TP_{int} . Portanto, a comparação entre TP_{int} e TP_{WKB} é válida desde que o sistema evolua em um intervalo de tempo tal que a componente refletida em $a = 0$ ainda não tenha retornado à barreira de potencial, como discutido na Ref. [77].

Para ilustrar essa situação consideremos o seguinte exemplo. Fixamos os parâmetros $\varepsilon = -0.5$, $E = 218$ e $\Lambda = 0.01$, para os quais o potencial efetivo atinge um valor máximo $V_{\text{eff}}^{\text{max}} = 218.8867$. Os pontos de retorno são obtidos resolvendo a equação $V_{\text{eff}}(a) - E = 0$, o que produz $a_{\text{ltp}} = 11.8128$ e $a_{\text{rtp}} = 12.5860$. Usando esses valores na Eq. (6.37), obtém-se $TP_{\text{WKB}} = 1.8855 \times 10^{-2}$. Tomando esse resultado como referência, avaliamos a Eq. (6.50) para os mesmos parâmetros e obtemos $TP_{\text{int}} = 1.8624 \times 10^{-2}$ no instante $t_{\text{max}} = 87.3$, que corresponde ao tempo máximo de evolução considerado antes que a componente refletida do pacote de onda alcance a parede de potencial infinita em $a = 0$. Observamos que TP_{WKB} e TP_{int} concordam bem para um intervalo de tempo apropriado. Esse exemplo será utilizado posteriormente como referência para construir a Tabela 14 e a Tabela 16.

6.3.6 Probabilidade de tunelamento e parâmetros do modelo

6.3.6.1 Dependência da probabilidade de tunelamento com ε

Começamos estudando como a probabilidade de tunelamento depende do parâmetro NC ε . Para esse propósito fixamos uma energia inicial E da radiação e uma constante cosmológica Λ . Em seguida calculamos TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de ε . Consideramos o regime em que a energia E é menor que o valor máximo da barreira de potencial ($V_{\text{eff}}^{\text{max}}$). Para ilustrar essa dependência, consideremos o seguinte exemplo. Escolhemos $E = 218$, $\Lambda = 0.01$ e 21 diferentes valores de ε , de modo que o valor máximo do potencial efetivo seja maior que 218. Os valores de TP_{int} para um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$, bem como TP_{WKB} , $V_{\text{eff}}^{\text{max}}$, a_{ltp} , a_{rtp} e ε , encontram-se na Tabela 14. Usando esses valores construímos $\ln(TP_{\text{int}})$ versus ε , mostrada na Figura 18. Devido aos valores muito pequenos da probabilidade de tunelamento (TP), representamos os logaritmos naturais de TP como função de ε . Observamos que $\ln(TP)$ apresenta uma dependência aproximadamente linear com ε . Ou seja, ao aumentar ε de -0.5 até 0.5 , $\ln(TP)$ assume valores cada vez mais negativos (a probabilidade de tunelamento diminui).

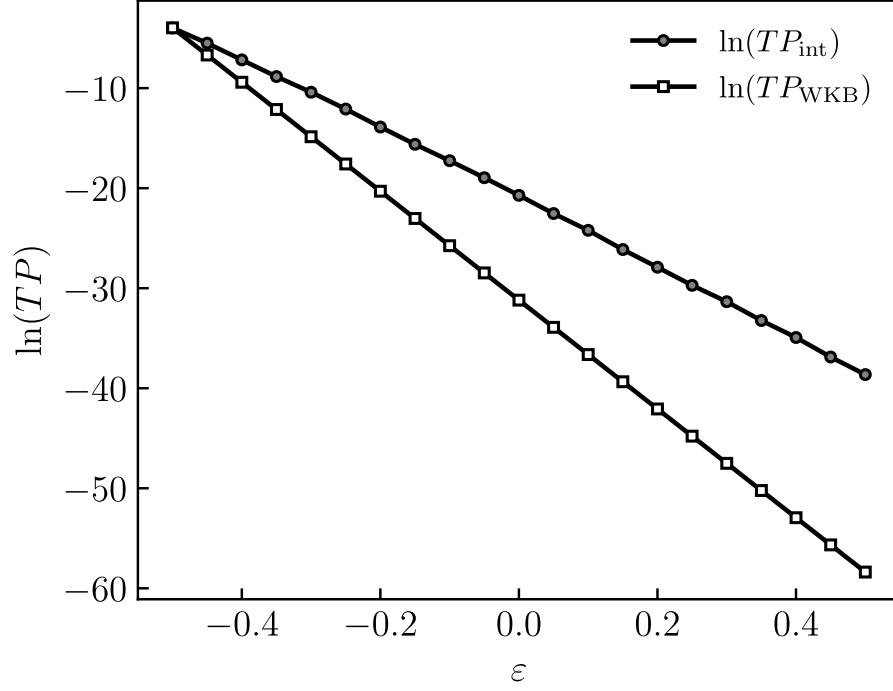
Isso indica que a nucleação do Universo é favorecida para $\varepsilon < 0$, intensificando-se à medida que sua magnitude aumenta. Por essa razão, ao analisar os demais parâmetros do modelo (E e Λ), consideraremos somente valores negativos de ε .

Tabela 14 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de ε , com $E = 218$ e $\Lambda = 0.01$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$.

ε	TP_{int}	TP_{WKB}	$V_{\text{eff}}^{\text{max}}$	a_{ltp}	a_{rtp}
-0.50	1.8624×10^{-2}	1.8855×10^{-2}	218.8867	11.8128	12.5860
-0.45	4.0725×10^{-3}	1.2467×10^{-3}	219.4971	11.6971	12.7017
-0.40	7.6579×10^{-4}	8.1790×10^{-5}	220.1077	11.6035	12.7952
-0.35	1.4416×10^{-4}	5.3654×10^{-6}	220.7185	11.5228	12.8760
-0.30	3.0156×10^{-5}	3.5212×10^{-7}	221.3295	11.4507	12.9480
-0.25	5.5977×10^{-6}	2.3120×10^{-8}	221.9407	11.3850	13.0137
-0.20	9.3070×10^{-7}	1.5187×10^{-9}	222.5522	11.3243	13.0744
-0.15	1.6506×10^{-7}	9.9813×10^{-11}	223.1638	11.2675	13.1312
-0.10	3.2099×10^{-8}	6.5628×10^{-12}	223.7757	11.2140	13.1847
-0.05	5.8577×10^{-9}	4.3172×10^{-13}	224.3877	11.1633	13.2354
0.00	1.0063×10^{-9}	2.8413×10^{-14}	225.0000	11.1150	13.2837
0.05	1.6322×10^{-10}	1.8708×10^{-15}	225.6124	11.0687	13.3300
0.10	3.0431×10^{-11}	1.2324×10^{-16}	226.2250	11.0243	13.3744
0.15	4.4555×10^{-12}	8.1223×10^{-18}	226.8377	10.9815	13.4172
0.20	7.5998×10^{-13}	5.3556×10^{-19}	227.4505	10.9402	13.4585
0.25	1.2456×10^{-13}	3.5330×10^{-20}	228.0635	10.9002	13.4985
0.30	2.4247×10^{-14}	2.3317×10^{-21}	228.6766	10.8615	13.5373
0.35	3.6984×10^{-15}	1.5396×10^{-22}	229.2899	10.8238	13.5750
0.40	6.7626×10^{-16}	1.0171×10^{-23}	229.9033	10.7871	13.6116
0.45	9.6429×10^{-17}	6.7223×10^{-25}	230.5169	10.7514	13.6474
0.50	1.6625×10^{-17}	4.4450×10^{-26}	231.1306	10.7166	13.6822

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 18 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função do parâmetro NC ε , para $E = 218$ e $\Lambda = 0.01$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

6.3.6.2 Dependência da probabilidade de tunelamento com Λ

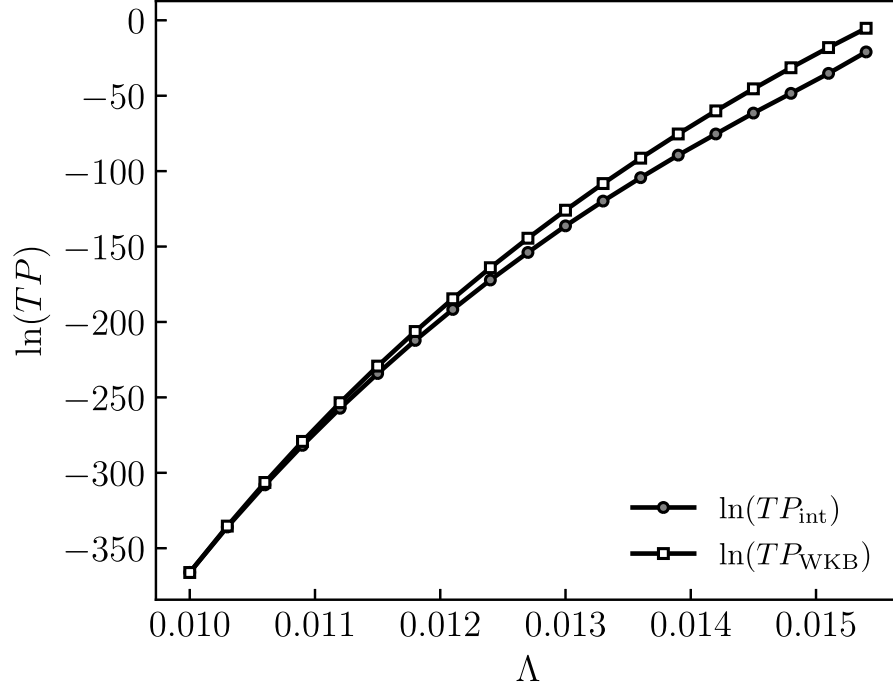
Agora analisamos como a constante cosmológica Λ influencia a probabilidade de tunelamento quântico. Para esse estudo, mantemos fixo o parâmetro NC ε e a energia inicial E da radiação. Em seguida, calculamos TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de Λ . Para esses cálculos adotamos o cenário em que a energia E é menor que o valor máximo do potencial efetivo. Para ilustrar esse comportamento, consideremos o seguinte exemplo, escolhemos $E = 140$, $\varepsilon = -0.5$, de modo que o valor máximo da barreira de potencial seja maior que 140. Os resultados de TP_{int} para um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 31.85$, TP_{WKB} , $V_{\text{eff}}^{\text{max}}$, a_{ltp} , a_{rtp} e Λ encontram-se na Tabela 15. Dado que os valores obtidos de TP apresentam ordens de grandeza extremamente baixas, optamos por representar os logaritmos naturais de TP como função de Λ , mostrados na Figura 19. Observamos que TP aumenta significativamente à medida que a constante cosmológica aumenta. Isso significa que é mais provável que o Universo tenha tunelado com um valor maior da constante cosmológica. Além disso, sob a interpretação de que a constante cosmológica Λ está associada à energia do vácuo, esse resultado indica que valores maiores de energia do vácuo favorecem a criação quântica do Universo, uma vez que aumentam a probabilidade de tunelamento quântico [71–73].

Tabela 15 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de Λ , com $\varepsilon = -0.5$ e $E = 140$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 31.85$.

Λ	TP_{int}	TP_{WKB}	$V_{\text{eff}}^{\text{max}}$	a_{ltp}	a_{rtp}
0.0100	1.0974×10^{-159}	1.0142×10^{-159}	218.8867	7.7413	15.4244
0.0103	1.2899×10^{-146}	2.3334×10^{-146}	212.4232	7.7815	15.1192
0.0106	1.7132×10^{-134}	8.4668×10^{-134}	206.3267	7.8235	14.8232
0.0109	4.0811×10^{-123}	5.6617×10^{-122}	200.5670	7.8676	14.5356
0.0112	1.9260×10^{-112}	8.0159×10^{-111}	195.1169	7.9139	14.2553
0.0115	1.9764×10^{-102}	2.7207×10^{-100}	189.9522	7.9627	13.9816
0.0118	6.5794×10^{-93}	2.4747×10^{-90}	185.0511	8.0143	13.7134
0.0121	5.4929×10^{-84}	6.6680×10^{-81}	180.3938	8.0691	13.4500
0.0124	1.6704×10^{-75}	5.8262×10^{-72}	175.9628	8.1276	13.1904
0.0127	1.4217×10^{-67}	1.7914×10^{-63}	171.7419	8.1903	12.9335
0.0130	6.4508×10^{-60}	2.0875×10^{-55}	167.7165	8.2581	12.6782
0.0133	8.7617×10^{-53}	9.8614×10^{-48}	163.8734	8.3319	12.4231
0.0136	4.9008×10^{-46}	2.0080×10^{-40}	160.2006	8.4131	12.1664
0.0139	1.4951×10^{-39}	1.8638×10^{-33}	156.6869	8.5036	11.9060
0.0142	1.8467×10^{-33}	8.3000×10^{-27}	153.3222	8.6064	11.6387
0.0145	1.9402×10^{-27}	1.8585×10^{-20}	150.0974	8.7261	11.3594
0.0148	9.1625×10^{-22}	2.1844×10^{-14}	147.0038	8.8715	11.0591
0.0151	5.1933×10^{-16}	1.4021×10^{-8}	144.0337	9.0621	10.7182
0.0154	7.7627×10^{-10}	5.0838×10^{-3}	141.1797	9.3704	10.2639

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 19 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função de Λ , para $E = 140$ e $\varepsilon = -0.5$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

6.3.6.3 Dependência da probabilidade de tunelamento com E

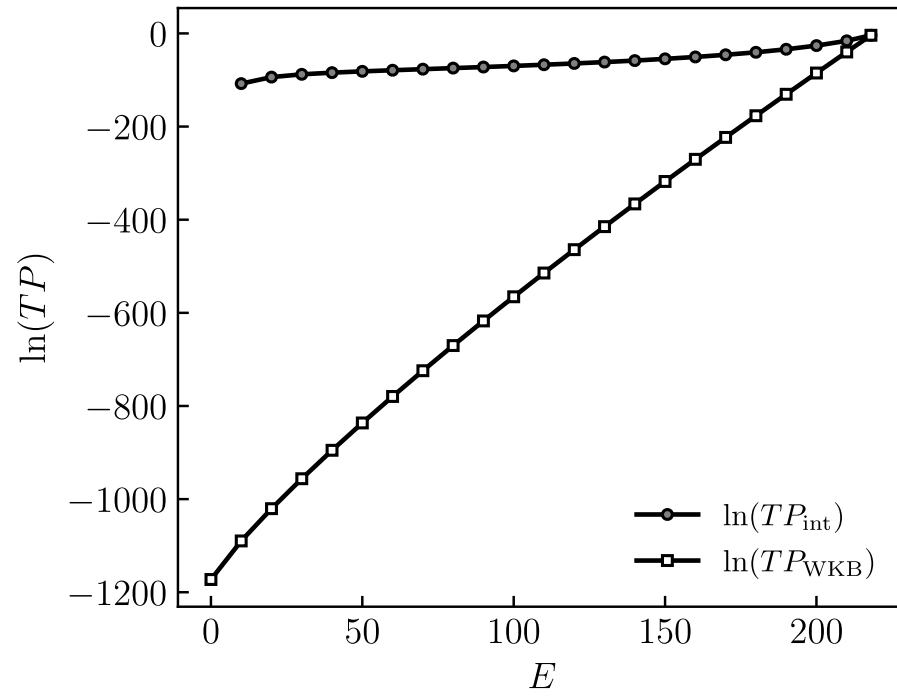
Finalmente, analisamos os efeitos da energia inicial de radiação E na probabilidade de tunelamento quântico. Com esse objetivo, fixamos o parâmetro não comutativo ε e a constante cosmológica Λ . Em seguida calculamos TP_{int} e TP_{WKB} para diversos valores de E . Nesses cálculos consideramos o regime em que a energia E é menor que o valor máximo da barreira de potencial. Para ilustrar esse comportamento, escolhemos $\Lambda = 0.01$ e $\varepsilon = -0.5$, sob a restrição de que o pico do potencial efetivo seja $V_{\text{eff}}^{\text{max}} = 218.8867$. Na Tabela 16 apresentamos os resultados obtidos para TP_{int} , considerando um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$, bem como os valores de TP_{WKB} , a_{ltp} , a_{rtp} e E . Dado que os valores de TP resultam extremamente pequenos, representamos os logaritmos naturais de TP como função de E , tal como mostrado na Figura 20. A partir dessa figura observa-se que TP aumenta exponencialmente à medida que a energia de radiação E aumenta. Esse resultado indica que o Universo possui maior probabilidade de nucleação para valores mais elevados de energia. Tal comportamento é consistente com resultados reportados previamente em [77, 170, 171].

Tabela 16 – TP_{int} e TP_{WKB} para diferentes valores de E , com $\varepsilon = -0.5$ e $\Lambda = 0.01$. O cálculo numérico utiliza um tempo máximo de evolução $t_{\text{max}} = 87.3$.

E	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
0	0.0000	5.7147×10^{-510}	0.1667	17.2366
10	1.5427×10^{-47}	5.0277×10^{-474}	1.9234	17.1370
20	1.7795×10^{-41}	6.3003×10^{-444}	2.7008	17.0344
30	7.0426×10^{-39}	5.2311×10^{-416}	3.3093	16.9286
40	2.5598×10^{-37}	1.7461×10^{-389}	3.8330	16.8193
50	4.2025×10^{-36}	5.4904×10^{-364}	4.3045	16.7060
60	4.5498×10^{-35}	2.6786×10^{-339}	4.7406	16.5886
70	4.4948×10^{-34}	2.8149×10^{-315}	5.1517	16.4666
80	4.5308×10^{-33}	8.0367×10^{-292}	5.5444	16.3394
90	4.3906×10^{-32}	7.4094×10^{-269}	5.9239	16.2064
100	4.8235×10^{-31}	2.5210×10^{-246}	6.2939	16.0671
110	6.2167×10^{-30}	3.5203×10^{-224}	6.6577	15.9204
120	9.6674×10^{-29}	2.1998×10^{-202}	7.0184	15.7654
130	1.8584×10^{-27}	6.6092×10^{-181}	7.3786	15.6007
140	4.5107×10^{-26}	1.0142×10^{-159}	7.7413	15.4244
150	1.9263×10^{-24}	8.3701×10^{-139}	8.1099	15.2344
160	1.0964×10^{-22}	3.8843×10^{-118}	8.4885	15.0273
170	1.1708×10^{-20}	1.0538×10^{-97}	8.8823	14.7984
180	2.3974×10^{-18}	1.7294×10^{-77}	9.2994	14.5404
190	1.5736×10^{-15}	1.7695×10^{-57}	9.7527	14.2408
200	4.2982×10^{-12}	1.1598×10^{-37}	10.2678	13.8744
210	1.1755×10^{-7}	4.9887×10^{-18}	10.9137	13.3729
218	1.8624×10^{-2}	1.8855×10^{-2}	11.8128	12.5860

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 20 – $\ln(TP_{\text{int}})$ e $\ln(TP_{\text{WKB}})$ como função de E , para $\varepsilon = -0.5$ e $\Lambda = 0.01$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: Resultados obtidos via simulação numérica.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, investigamos o papel da não comutatividade em dois problemas cosmológicos em universos primitivos: a evolução clássica de modelos anisotrópicos homogêneos e a nucleação quântica do Universo. Em ambos os casos, o objetivo central consiste em analisar de que maneira uma deformação NC da estrutura canônica do minisuperspaço pode modificar a dinâmica cosmológica, tanto no regime clássico, por meio da expansão e isotropização de Universos anisotrópicos, ou no regime quântico, mediante sua influência sobre a equação de WDW e a probabilidade de tunelamento associada ao “nascimento” do Universo. Desse modo, o trabalho permite abordar, dentro de um mesmo marco conceitual, dois aspectos complementares da física cosmológica primordial.

Na parte clássica estudamos a evolução dinâmica dos modelos cosmológicos não comutativos LRS de Bianchi I e Bianchi III acoplados a um fluido de radiação. A não comutatividade foi introduzida por meio de uma deformação da álgebra de Poisson caracterizada pelo parâmetro γ . Os resultados mostram que esse parâmetro modifica significativamente a dinâmica de expansão do Universo: para $\gamma < 0$ a expansão aumenta em relação ao caso comutativo, enquanto para $\gamma > 0$ a expansão se reduz. Esse efeito tem origem na correção que a estrutura NC introduz no fator de escala efetivo (a_{nc}), alterando assim a evolução dinâmica do modelo. A análise da anisotropia mostrou, além disso, que a influência de γ depende da geometria espacial. No modelo de Bianchi I a não comutatividade favorece o processo de isotropização. Em contrapartida, no modelo de Bianchi III a anisotropia persiste durante intervalos de tempo mais longos, o que sugere que a curvatura espacial negativa tende a retardar o processo de isotropização mesmo na presença do parâmetro NC. Além disso, ao estimar o parâmetro γ sob a hipótese de um Universo atualmente homogêneo e isotrópico, encontramos que seus valores na época presente são relativamente pequenos, enquanto em etapas mais iniciais da evolução do Universo obtêm-se valores maiores, o que sugere que os efeitos da não comutatividade teriam sido mais relevantes no Universo primitivo. Esse comportamento é consistente com a expectativa de que os efeitos não comutativos se tornem mais relevantes em regimes de alta densidade e pequenas distâncias, em concordância com estimativas reportadas em estudos prévios [59–62]. Também observamos que os valores estimados de γ aumentam ao se incrementar H_0 , o que sugere que a estimativa do parâmetro não comutativo pode ser afetada pelas diferentes determinações observacionais do parâmetro de Hubble.

Estendendo a análise ao regime quântico, analisamos o problema da nucleação quântica do Universo em um modelo FLRW, com curvatura espacial positiva, constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$) e um fluido de radiação descrito por meio do formalismo de Schutz [82]. Nesse contexto, aplicamos a quantização canônica do modelo e introduzimos uma deformação NC no setor de momentos do minisuperspaço, caracterizada pelo parâmetro ε . Por meio de uma transformação unitária de fase, reformulamos a versão NC da

equação de WDW como uma equação do tipo Schrödinger com tempo e um potencial efetivo dependente de ε , além dos parâmetros cosmológicos do modelo. Essa reformulação permitiu tornar explícito o efeito da não comutatividade sobre a barreira de potencial responsável pelo processo de tunelamento.

A probabilidade de tunelamento $TP(E, \Lambda, \varepsilon)$ foi analisada por meio de duas abordagens complementares: a aproximação semiclássica WKB e a probabilidade integrada obtida a partir da evolução numérica completa da função de onda. A comparação entre ambas mostrou que a dinâmica temporal do pacote de onda contém efeitos que não são capturados pela aproximação WKB em sua forma padrão. De fato, enquanto a TP_{WKB} descreve essencialmente um único evento de transmissão através da barreira, a TP_{int} obtida a partir da evolução dinâmica da função de onda incorpora a condição de contorno refletora em $a = 0$, o que permite que componentes refletidos do pacote de onda retornem à região da barreira e gerem contribuições transmitidas adicionais. Para comparar ambas as abordagens, tomamos como referência um tempo de evolução no qual o pacote de onda refletido ainda não teve tempo suficiente para interagir com a barreira infinita em $a = 0$, de modo que TP_{int} e TP_{WKB} apresentam valores semelhantes. Isso nos permitiu analisar os efeitos do parâmetro NC sobre a nucleação do Universo a partir de ambas as perspectivas.

Nesse contexto, os resultados mostram que valores negativos do parâmetro de não comutatividade, favorecem o processo de tunelamento. Ao aumentar ε de valores negativos para valores positivos, a probabilidade de tunelamento diminui de maneira monótona. Esse comportamento indica que a nucleação quântica do Universo torna-se mais provável para $\varepsilon < 0$, uma vez que nesse regime a barreira efetiva se reduz tanto em altura quanto em largura, facilitando assim a nucleação do Universo em direção à fase de expansão clássica. Em contraste, para $\varepsilon > 0$ a barreira se eleva e se alarga, suprimindo de maneira significativa a probabilidade de tunelamento. Além disso, o aumento da energia de radiação E e da constante cosmológica positiva Λ também contribui para o aumento da probabilidade de tunelamento, em concordância com resultados prévios [71, 72, 77].

Em conjunto, os resultados obtidos indicam que a não comutatividade influencia de maneira significativa a dinâmica clássica e quântica dos modelos cosmológicos considerados neste trabalho. No regime clássico, afeta a expansão e a isotropização de Universos anisotrópicos, enquanto no regime quântico, modifica a barreira efetiva e modula a probabilidade de nucleação do Universo. Esses resultados sugerem que as deformações não comutativas do minisuperspaço constituem uma ferramenta promissora para explorar possíveis correções à física do Universo primordial e abrem perspectivas para investigações futuras, como a possível conexão entre parâmetros não comutativos e observáveis cosmológicos.

Como perspectiva futura, seria interessante estudar modelos anisotrópicos não comutativos em nível quântico. Uma investigação desse tipo permitiria analisar os efeitos da não comutatividade sobre a probabilidade de tunelamento.

REFERÊNCIAS

- 1 PENROSE, Roger. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. **Physical Review Letters**, APS, v. 14, n. 3, p. 57–59, 1965.
- 2 HAWKING, Stephen W.; ELLIS, George F. R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- 3 ROVELLI, Carlo. **Quantum Gravity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521837330.
- 4 KIEFER, Claus. **Quantum Gravity**. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- 5 WHEELER, John Archibald. **Geometrodynamics and the issue of the final state**. [S. l.]: Gordon e Breach, 1964.
- 6 WITTEN, Edward. String Theory Dynamics in Various Dimensions. **Nuclear Physics B**, v. 443, n. 1-2, p. 85–126, 1995.
- 7 BANKS, Tom *et al.* M Theory as a Matrix Model: A Conjecture. **Physical Review D**, v. 55, p. 5112–5128, 1997.
- 8 ASHTEKAR, Abhay; LEWANDOWSKI, Jerzy. Quantum Theory of Geometry: I. Area Operators. **Classical and Quantum Gravity**, v. 14, 1A, a55–a81, 1997.
- 9 BOJOWALD, Martin. Absence of a Singularity in Loop Quantum Cosmology. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 23, p. 5227–5230, 2001.
- 10 SEIBERG, Nathan; WITTEN, Edward. String theory and noncommutative geometry. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 1999, n. 09, p. 032, 1999.
- 11 CHU, Chong-Sun; HO, Pei-Ming. Noncommutative Open String and D-Brane. **Nuclear Physics B**, v. 550, n. 1, p. 151–168, 1999.
- 12 SNYDER, Hartland S. Quantized Space-Time. **Physical Review**, v. 71, n. 1, p. 38–41, 1947.
- 13 CONNES, Alain. **Noncommutative Geometry**. San Diego: Academic Press, 1994.
- 14 MUKHANOV, Viatcheslav F. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- 15 WEINBERG, Steven. **Cosmology**. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- 16 MISNER, Charles W. Mixmaster Universe. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 22, n. 20, p. 1071–1074, maio 1969.
- 17 BELINSKII, V. A.; KHALATNIKOV, I. M.; LIFSHITZ, E. M. Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 19, n. 80, p. 525–573, 1970.

- 18 ELLIS, George F. R.; MACCALLUM, Malcolm A. H. A Class of Homogeneous Cosmological Models. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 12, n. 2, p. 108–141, jun. 1969.
- 19 BIANCHI, Luigi. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. **Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze**, v. 11, p. 267–352, 1898.
- 20 JACOBS, Kenneth C. Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 153, p. 661–678, ago. 1968.
- 21 WALD, Robert M. Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant. **Physical Review D**, APS, v. 28, n. 8, p. 2118, 1983.
- 22 REIS, Simpliciano Castardelli dos; SHAPIRO, Ilya L. Cosmic anisotropy with reduced relativistic gas. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, n. 145, 2018.
- 23 BARROW, John D.; KODAMA, Hideo. The Isotropy of Compact Universes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 18, n. 9, p. 1753–1766, maio 2001.
- 24 WAINWRIGHT, John; ELLIS, George F. R. **Dynamical Systems in Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521572736.
- 25 HEINZLE, J. Mark; RÖHR, Niklas; UGGLA, Claes. Matter and Dynamics in Closed Cosmologies. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 71, n. 8, p. 083506, abr. 2005.
- 26 BENNETT, C. L. *et al.* First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Foreground Emission. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 148, n. 1, p. 97–117, set. 2003.
- 27 BERERA, Arjun; BUNIY, Roman V.; KEPHART, Thomas W. The Eccentric Universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2004, n. 10, p. 016, out. 2004.
- 28 GURZADYAN, V. G. *et al.* Large Scale Plane-Mirroring in the Cosmic Microwave Background WMAP5 Maps. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 490, n. 3, p. 929–932, 2008.
- 29 GURZADYAN, V. G. *et al.* Plane-Mirroring Anomaly in the Cosmic Microwave Background Maps. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 498, n. 1, p. 11–13, 2009.
- 30 CAMPANELLI, L. *et al.* Anisotropic Dark Energy and Ellipsoidal Universe. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 20, n. 06, p. 1153–1166, 2011.
- 31 RUSSELL, Esra; KILINÇ, Can Battal; PASHAEV, Oktay K. Bianchi I Model: An Alternative Way to Model the Present-Day Universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 442, n. 3, p. 2331–2341, ago. 2014.

- 32 SCHWARZ, Dominik J. *et al.* CMB Anomalies after Planck. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 33, n. 18, p. 184001, set. 2016.
- 33 BUCHERT, Thomas *et al.* Observational Challenges for the Standard FLRW Model. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 25, n. 03, p. 1630007, fev. 2016.
- 34 TEDESCO, Luigi. Ellipsoidal Expansion of the Universe, Cosmic Shear, Acceleration and Jerk Parameter. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 133, n. 5, p. 188, maio 2018.
- 35 AKARSU, Özgür *et al.* Constraints on a Bianchi Type I Spacetime Extension of the Standard Λ CDM Model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 100, n. 2, p. 023532, jul. 2019.
- 36 O'DWYER, Ian J. *et al.* The Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum from the BEAST Experiment. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 158, n. 1, p. 93–100, maio 2005.
- 37 PONTZEN, Andrew; CHALLINOR, Anthony. Bianchi Model CMB Polarization and Its Implications for CMB Anomalies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 380, n. 4, p. 1387–1398, set. 2007.
- 38 BANERJEE, A.; DUTTACHOUDHURY, S. B.; SANYAL, Abhik Kumar. Bianchi Type I Cosmological Model with a Viscous Fluid. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 26, n. 12, p. 3010–3015, 1985.
- 39 BALAKIN, Alexander B.; ZIMDAHL, Winfried. Anisotropic Cosmological Models with Nonminimally Coupled Magnetic Field. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 71, n. 12, p. 124014, jun. 2005.
- 40 CANFORA, Fabrizio; GIACOMINI, Alex; PAVLUCHENKO, Sergey A. Cosmological Dynamics of Gravitating Hadron Matter. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 90, n. 4, p. 043516, ago. 2014.
- 41 KAMENSHCHIK, Alexander Yu. *et al.* Induced Gravity and Minimally and Conformally Coupled Scalar Fields in Bianchi-I Cosmological Models. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 97, n. 2, p. 023536, jan. 2018.
- 42 CASADIO, Roberto *et al.* Bianchi Cosmologies, Magnetic Fields, and Singularities. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 108, n. 8, p. 084059, out. 2023.
- 43 BYLAND, Samuel; SCIALOM, David. Evolution of the Bianchi Type I, Bianchi Type III, and the Kantowski-Sachs Universe: Isotropization and Inflation. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 57, n. 10, p. 6065–6074, maio 1998.
- 44 PRADHAN, Anirudh; AMIRHASHCHI, H. Dark Energy Model in Anisotropic Bianchi Type-III Space-Time with Variable EoS Parameter. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 332, n. 2, p. 441–448, abr. 2011.

- 45 MOLLAH, Mahbubur Rahman; SINGH, Kangujam Priyokumar; SINGH, Pheiroijam Suranjoy. Bianchi Type-III Cosmological Model with Quadratic EoS in Lyra Geometry. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific, v. 15, n. 11, p. 1850194, 2018.
- 46 SAHOO, P. K.; SAHU, S. K.; NATH, A. Anisotropic Bianchi-III Cosmological Model in $f(R, T)$ Gravity. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 131, p. 18, jan. 2016.
- 47 ASHTEKAR, Abhay; WILSON-EWING, Edward. Loop Quantum Cosmology of Bianchi Type I Models. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 79, n. 8, p. 083535, abr. 2009.
- 48 BOJOWALD, Martin. Loop Quantum Cosmology. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 11, n. 1, p. 4, 2008.
- 49 D'EATH, P. D. Quantization of the Supersymmetric Bianchi-I Model with a Cosmological Constant. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 320, n. 1-2, p. 12–15, jan. 1994.
- 50 ALVARENGA, F. G. *et al.* Troubles with Quantum Anisotropic Cosmological Models: Loss of Unitarity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 35, n. 9, p. 1659–1677, set. 2003.
- 51 GUZMÁN, W. *et al.* Non-commutative Bianchi Quantum Cosmology. **International Journal of Modern Physics D**, v. 16, n. 10, p. 1625–1632, 2007.
- 52 SOCORRO, J. *et al.* Scalar Field in the Bianchi I: Noncommutative Classical and Quantum Cosmology. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 48, n. 12, p. 3567–3585, 2009.
- 53 SOCORRO, J.; ROSALES, J. Juan; TOLEDO-SESMA, Leonel. Non-Commutative Classical and Quantum Fractionary Cosmology: FRW Case. **Universe**, MDPI, v. 10, n. 5, p. 192, 2024.
- 54 GARCIA-COMPEAN, H; OBREGON, O; RAMIREZ, C. Noncommutative quantum cosmology. **Physical review letters**, APS, v. 88, n. 16, p. 161301, 2002.
- 55 BASTOS, Catarina *et al.* Phase-space noncommutative quantum cosmology. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 78, n. 2, p. 023516, 2008.
- 56 DIRAC, P. A. M. **Lectures on Quantum Mechanics**. New York: Yeshiva University, 1964.
- 57 BARBOSA, GD; PINTO-NETO, N. Noncommutative geometry and cosmology. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 70, n. 10, p. 103512, 2004.
- 58 ORTIZ, C. *et al.* (Non)commutative Isotropization in Bianchi I with Barotropic Perfect Fluid and Λ Cosmological. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 47, n. 5, p. 1240–1251, maio 2008.

- 59 OLIVEIRA-NETO, G.; VAZ, A. R. Noncommutative Cosmological Model in the Presence of a Phantom Fluid. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 132, n. 3, p. 131, mar. 2017.
- 60 OLIVEIRA-NETO, G.; MARCON, L. Fazza; VAZ, A. R. Complete Noncommutativity in a Cosmological Model with Radiation. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 136, n. 5, p. 584, 2021.
- 61 OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. A Noncommutative Bianchi I Model with Radiation. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 33, 07n08, p. 2450032, 2024.
- 62 ABREU, T. M. *et al.* Noncommutative Effects in Bianchi I Cosmology with Reduced Relativistic Gas. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 42, n. 18, p. 185010, 2025.
- 63 KANTOWSKI, R.; SACHS, R. K. Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 7, n. 3, p. 443–446, 1966.
- 64 LORENZ, D. Kantowski–Sachs Cosmological Solution with Torsion. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 15, n. 9, p. 2809–2816, 1982.
- 65 SHARIF, M. Matter Collineations in Kantowski–Sachs, Bianchi Types I and III Spacetimes. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 35, n. 1, p. 97–109, 2003.
- 66 CAMCI, Uğur; KUCUKAKCA, Yusuf. Noether Symmetries of Bianchi I, Bianchi III, and Kantowski–Sachs Spacetimes in Scalar-Coupled Gravity Theories. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 76, n. 8, p. 084023, 2007.
- 67 DEWITT, Bryce S. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. **Physical Review**, v. 160, n. 5, p. 1113–1148, 1967.
- 68 MISNER, Charles W. Quantum Cosmology. I. **Physical Review**, v. 186, n. 5, p. 1319–1327, 1969.
- 69 BARBOSA, G. D. Noncommutative conformally coupled scalar field cosmology and its commutative counterpart. **Physical Review D**, v. 71, n. 6, p. 063511, 2005.
- 70 OLIVEIRA-NETO, G. *et al.* Noncommutativity in the Early Universe. **International Journal of Modern Physics D**, v. 26, n. 02, p. 1750011, 2017.
- 71 VILENKIN, Alexander. Creation of Universes from Nothing. **Physics Letters B**, v. 117, n. 1-2, p. 25–28, 1982.
- 72 VILENKIN, Alexander. Quantum Creation of Universes. **Physical Review D**, v. 30, n. 2, p. 509–511, 1984.
- 73 VILENKIN, Alexander. Boundary Conditions in Quantum Cosmology. **Physical Review D**, v. 33, n. 12, p. 3560–3569, 1986.

- 74 HARTLE, James B.; HAWKING, Stephen W. Wave Function of the Universe. **Physical Review D**, v. 28, n. 12, p. 2960–2975, 1983.
- 75 RUBAKOV, V. A. Quantum Mechanics in the Tunneling Universe. **Physics Letters B**, v. 148, n. 4-5, p. 280–286, 1984.
- 76 SILVA, E. V. C. *et al.* Symplectic method in quantum cosmology. **Physical Review D**, v. 80, n. 4, p. 047302, 2009.
- 77 BARROS, J. Acacio de *et al.* Tunneling Probability for the Birth of an Asymptotically de Sitter Universe. **Physical Review D**, v. 75, p. 104004, 2007.
- 78 OLIVEIRA-NETO, G.; CANEDO, D. L.; MONERAT, G. A. Tunneling probabilities for the birth of universes with radiation, cosmological constant and an ad hoc potential. **The European Physical Journal Plus**, v. 138, n. 5, p. 400, 2023.
- 79 MONERAT, G. A. *et al.* Non-singular Birth of the Universe: High-Performance Numerical Solutions of the Wheeler–DeWitt Equation. **Physics Letters B**, p. 139623, 2025.
- 80 GRISHCHUK, L. P.; ZEL'DOVICH, Ya. B. Complete Cosmological Theories. *In*: DEWITT, B. S.; STORA, R. (ed.). **Quantum Gravity**. Amsterdam: North-Holland, 1984. p. 71–85.
- 81 SCHUTZ JR, Bernard F. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. **Physical Review D**, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970.
- 82 SCHUTZ JR, Bernard F. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. **Physical Review D**, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971.
- 83 ALVARENGA, Flávio G *et al.* Quantum cosmological perfect fluid models. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 34, n. 5, p. 651–663, 2002.
- 84 DODELSON, Scott; SCHMIDT, Fabian. **Modern Cosmology**. 2. ed. London: Academic Press, 2020.
- 85 CARROLL, Sean M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- 86 WALD, Robert M. **General Relativity**. Chicago: University of Chicago Press, 1984.
- 87 D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- 88 LI, Ming-Hua; LIN, Hai-Nan. Testing the homogeneity of the Universe using gamma-ray bursts. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 582, a111, 2015.
- 89 RYDEN, Barbara. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- 90 HOGG, David W. Distance measures in cosmology. **arXiv preprint astro-ph/9905116**, 1999.

- 91 PEACOCK, John A. **Cosmological Physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- 92 FRIEDMANN, Alexander. On the Curvature of Space. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, p. 377–386, 1922.
- 93 WEINBERG, Steven. The cosmological constant problem. **Reviews of modern physics**, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989.
- 94 RIESS, Adam G.; FILIPPENKO, Alexei V.; KIRSHNER, Robert P. *et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998.
- 95 WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- 96 BAUMANN, Daniel. **Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- 97 SCHNEIDER, Peter. **Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction**. Berlin: Springer, 2006.
- 98 LIDDLE, Andrew R. **An Introduction to Modern Cosmology**. 3rd. Chichester: John Wiley & Sons, 2015.
- 99 BOJOWALD, Martin. **Quantum Cosmology**. New York: Springer, 2011. v. 835. (Lecture Notes in Physics).
- 100 MACCALLUM, Malcolm Angus Hugh; ELLIS, George FR. A class of homogeneous cosmological models: II. Observations. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 19, n. 1, p. 31–64, 1970.
- 101 BARROW, John D. Cosmological limits on slightly skew stresses. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 12, p. 7451, 1997.
- 102 ADE, PAR *et al.* Planck 2015 results-XVI. Isotropy and statistics of the CMB. **Astronomy & Astrophysics**, EDP sciences, v. 594, a16, 2016.
- 103 SCHWARZ, Dominik J *et al.* CMB anomalies after Planck. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 33, n. 18, p. 184001, 2016.
- 104 RYAN, Michael P.; SHEPLEY, Lawrence C. **Homogeneous Relativistic Cosmologies**. Princeton: Princeton University Press, 1975.
- 105 ARNOWITT, Richard; DESER, Stanley; MISNER, Charles W. Republication of: The dynamics of general relativity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, 2008.
- 106 MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

- 107 DIRAC, Paul Adrien Maurice. The theory of gravitation in Hamiltonian form. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 246, n. 1246, p. 333–343, 1958.
- 108 DIRAC, Paul Adrien Maurice. Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation. **Physical Review**, APS, v. 114, n. 3, p. 924, 1959.
- 109 GOURGOULHON, Éric. **3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity**. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. v. 846. (Lecture Notes in Physics).
- 110 CHOQUET-BRUHAT, Yvonne. Beginnings of the Cauchy Problem for Einstein's Field Equations. **Surveys in Differential Geometry**, v. 20, n. 1, p. 1–16, 2015.
- 111 POISSON, Eric. **A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- 112 ALCUBIERRE, Miguel. **Introduction to 3+1 Numerical Relativity**. Oxford: Oxford University Press, 2008. v. 140. (International Series of Monographs on Physics).
- 113 GIULINI, Domenico. What is the Geometry of Superspace? **Physical Review D**, v. 51, n. 10, p. 5630–5635, 1995. DOI: 10.1103/PhysRevD.51.5630.
- 114 LAPCHINSKII, V. G.; RUBAKOV, V. A. Canonical Quantization of Gravity and Quantum Field Theory in Curved Space-Time. **Acta Physica Polonica B**, v. 10, p. 1041–1048, 1979.
- 115 ARNOLD, Vladimir Igorevich. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. 2nd. New York: Springer, 1989. v. 60. (Graduate Texts in Mathematics).
- 116 GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles P.; SAFKO, John L. **Classical Mechanics**. 3rd. San Francisco: Addison-Wesley, 2001.
- 117 LANDAU, Lev D.; LIFSHITZ, Evgeny M. **Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory**. 3rd. Oxford: Pergamon Press, 1977. v. 3. (Course of Theoretical Physics).
- 118 BAYEN, François *et al.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 111, n. 1, p. 61–110, 1978.
- 119 DIRAC, Paul A. M. **The Principles of Quantum Mechanics**. 4th. Oxford: Oxford University Press, 1958.
- 120 DIRAC, Paul Adrien Maurice. Generalized hamiltonian dynamics. **Canadian journal of mathematics**, Cambridge University Press, v. 2, p. 129–148, 1950.
- 121 TEITELBOIM, Claudio. How commutators of constraints reflect the spacetime structure. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 542–557, 1973.
- 122 KUCHAR, Karel V. Time and interpretations of quantum gravity. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 20, supp01, p. 3–86, 2011.

- 123 KUCHARĚ, Karel V. Canonical Quantum Gravity. *In*: GLEISER, R. J.; KOZAMEH, C. N.; MORESCHI, O. M. (ed.). **General Relativity and Gravitation 1992**. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1993. p. 119–150.
- 124 ISHAM, Chris J. Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time. *In*: IBORT, L. A.; RODRÍGUEZ, M. A. (ed.). **Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories**. Dordrecht: Springer, 1993. v. 409. (NATO ASI Series C). p. 157–287.
- 125 HENNEAUX, Marc; TEITELBOIM, Claudio. **Quantization of Gauge Systems**. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- 126 KUCHARĚ, Karel. Canonical quantization of gravity. *In*: RELATIVITY, Astrophysics and Cosmology: Proceedings of the Summer School Held, 14–26 August, 1972 at the Banff Centre, Banff, Alberta. [*S. l.*]: Springer, 1973. p. 237–288.
- 127 VEY, Jacques. Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 50, n. 1, p. 421–454, 1975.
- 128 FLATO, Moshé; LICHNEROWICZ, André; STERNHEIMER, Daniel. Déformations 1-différentiables des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact. **Compositio Mathematica**, v. 31, n. 1, p. 47–82, 1975.
- 129 FLATO, Moshé; LICHNEROWICZ, André; STERNHEIMER, Daniel. Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 17, n. 9, p. 1754–1762, 1976.
- 130 MOYAL, José E. Quantum Mechanics as a Statistical Theory. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 45, n. 1, p. 99–124, 1949.
- 131 ZACHOS, Cosmas. Deformation quantization: quantum mechanics lives and works in phase-space. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 17, n. 03, p. 297–316, 2002.
- 132 BASTOS, C; DIAS, NC; PRATA, JN. Wigner measures in noncommutative quantum mechanics. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 299, n. 3, p. 709–740, 2010.
- 133 EVERETT, Hugh. “Relative State” Formulation of Quantum Mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 29, n. 3, p. 454–462, 1957.
- 134 DEWITT, B. S.; GRAHAM, N. (ed.). **The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics**. [*S. l.*]: Princeton UP, 1973.
- 135 FEYNMAN, R. P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 20, n. 2, p. 367–387, 1948.
- 136 DEMIANSKI, Marek. Physics of the expanding universe. **Physics of the Expanding Universe**, v. 109, 1979.

- 137 AKARSU, Özgür; KILINÇ, Can Battal. LRS Bianchi type I models with anisotropic dark energy and constant deceleration parameter. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 42, n. 1, p. 119, 2010.
- 138 CAMCI, U; YILDIRIM, A; OZ, I Basaran. New exact solutions of Bianchi I, Bianchi III and Kantowski–Sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories via Noether gauge symmetries. **Astroparticle Physics**, Elsevier, v. 76, p. 29–37, 2016.
- 139 MISNER, CW. Minisuperspace. In magic without magic. **JA Wheeler 60th Anniversary Volume**, p. 441–473, 1972.
- 140 OLIVEIRA-NETO, G; CANEDO, DL; MONERAT, GA. An anisotropic Kantowski–Sachs universe with radiation, dust and a phantom fluid. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 52, n. 4, p. 130, 2022.
- 141 AKARSU, Özgür; KILINÇ, Can Battal. Bianchi type III models with anisotropic dark energy. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 42, n. 4, p. 763–775, 2010.
- 142 LAPCHINSKII, VG; RUBAKOV, Valerii Anatol'evich. Quantum gravitation: Quantization of the Friedmann model. **Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian, v. 33, n. 3, p. 364–376, 1977.
- 143 DOUGLAS, Michael R; NEKRASOV, Nikita A. Noncommutative field theory. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 73, n. 4, p. 977, 2001.
- 144 DAS, Ashok *et al.* Non-commutative supersymmetric quantum mechanics. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 670, n. 4-5, p. 407–415, 2009.
- 145 AGHANIM, Nabila *et al.* Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP sciences, v. 641, a6, 2020.
- 146 WONG, Kenneth C *et al.* H0LiCOW–XIII. A 2.4 per cent measurement of H 0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early-and late-Universe probes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 498, n. 1, p. 1420–1439, 2020.
- 147 WRIGHT, Edward L. A cosmology calculator for the world wide web. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, The University of Chicago Press, v. 118, n. 850, p. 1711–1715, 2006.
- 148 BOJOWALD, Martin. **Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2010.
- 149 ROBERTSON, Howard Percy. Kinematics and world-structure. **Astrophysical Journal**, vol. 82, p. 284, v. 82, p. 284, 1935.
- 150 LEMOS, Nivaldo A. Radiation-dominated quantum Friedmann models. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 37, n. 3, p. 1449–1460, 1996.

- 151 KIEFER, Claus. Wave packets in quantum cosmology and the cosmological constant. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 341, n. 1, p. 273–293, 1990.
- 152 MAEDA, Hideki. Unitary evolution of the quantum Universe with a Brown–Kuchař dust. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 23, p. 235023, 2015.
- 153 OLIVEIRA-NETO, G *et al.* Quantum noncommutativity in quantum cosmology. **arXiv preprint arXiv:1206.5029**, 2012.
- 154 ABREU, EMC *et al.* Noncommutative cosmological models coupled to a perfect fluid and a cosmological constant. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2012, n. 5, p. 1–23, 2012.
- 155 ZACHOS, C. K.; FAIRLIE, D. B.; CURTRIGHT, T. L. **Quantum Mechanics in Phase Space: An Overview with Selected Papers**. Singapore: World Scientific, 2005.
- 156 DELDUC, Francois *et al.* Magnetic fields in noncommutative quantum mechanics. *In*: IOP PUBLISHING, 1. JOURNAL of Physics: Conference Series. [*S. l.*: *s. n.*], 2008. v. 103, p. 012020.
- 157 WENTZEL, Gregor. Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 38, n. 6, p. 518–529, 1926.
- 158 KRAMERS, Hendrik Anthony. Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 39, n. 10, p. 828–840, 1926.
- 159 BRILLOUIN, Léon. La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives. **CR Acad. Sci**, v. 183, n. 11, p. 24–26, 1926.
- 160 BENDER, Carl M; ORSZAG, Steven A. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013.
- 161 MERZBACHER, Eugen. **Quantum Mechanics**. 3rd. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- 162 GRIFFITHS, David J.; SCHROETER, Darrell F. **Introduction to Quantum Mechanics**. 3rd. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 2021.
- 163 CRANK, John; NICOLSON, Phyllis. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *In*: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1. MATHEMATICAL proceedings of the Cambridge philosophical society. [*S. l.*: *s. n.*], 1947. v. 43, p. 50–67.
- 164 PRESS, William H. *et al.* **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. 2nd. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- 165 LEVEQUE, Randall J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 2007. (Software, Environments, and Tools).

- 166 SAAD, Yousef. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2nd. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 2003.
- 167 VIRTANEN, Pauli *et al.* SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. **Nature methods**, Nature Publishing Group US New York, v. 17, n. 3, p. 261–272, 2020.
- 168 VILENKIN, Alexander. Interpretation of the wave function of the Universe. **Physical Review D**, APS, v. 39, n. 4, p. 1116, 1989.
- 169 MONERAT, GA *et al.* The effects of dark energy on the early Universe with radiation and an ad hoc potential. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 137, n. 1, p. 1–15, 2022.
- 170 MONERAT, G. A. *et al.* Tunneling probabilities for the birth of universes with radiation, cosmological constant and an ad hoc potential. **The European Physical Journal C**, v. 83, p. 400, 2023.
- 171 MONERAT, G. A. *et al.* The initial moments of a Hořava–Lifshitz cosmological model. **General Relativity and Gravitation**, v. 56, p. 125, 2024.
- 172 ZHANG, Fuzhen. **The Schur Complement and Its Applications**. New York: Springer, 2005. v. 4. (Numerical Methods and Algorithms).
- 173 BANACHIEWICZ, Tadeusz. Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf basierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen. **Acta Astronomica**, v. 3, p. 41–67, 1937.

APÊNDICE A – Inversa da métrica ADM por meio da fórmula de Banachiewicz

Neste apêndice derivamos a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ correspondente à decomposição ADM por meio da inversão de matrizes particionadas baseada no complemento de Schur (fórmula de Banachiewicz) [172].

Inversão de matrizes particionadas

Consideremos uma matriz não singular escrita em blocos como

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde S é não singular. Definimos o complemento de Schur de S em M como

$$M/S = P - QS^{-1}R.$$

A fórmula de Banachiewicz fornece explicitamente a inversa de uma matriz particionada na forma

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/S)^{-1} & -(M/S)^{-1}QS^{-1} \\ -S^{-1}R(M/S)^{-1} & S^{-1} + S^{-1}R(M/S)^{-1}QS^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Aplicação à métrica ADM

Podemos escrever a métrica ADM como uma matriz particionada:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}.$$

Ao comparar com a forma geral (A.1), identificamos os blocos como

$$P = -N^2 + N_k N^k, \quad Q = N_j, \quad R = (N_i)^T, \quad S = h_{ij}.$$

Cálculo do complemento de Schur

Avaliamos explicitamente o complemento de Schur:

$$\begin{aligned} M/S &= P - QS^{-1}R \\ &= -N^2 + N_k N^k - N_j h^{jk} N_k \\ &= -N^2 + N^k N_k - N^k N_k \\ &= -N^2. \end{aligned}$$

Desse resultado concluímos que

$$(M/S)^{-1} = -\frac{1}{N^2} = -N^{-2}.$$

Cálculo dos blocos de $g^{\mu\nu}$

Componente temporal

Obtemos diretamente

$$g^{00} = (M/S)^{-1} = -N^{-2}.$$

Componentes mistas

Para as componentes mistas, obtemos

$$g^{0j} = -(M/S)^{-1}QS^{-1} = -(-N^{-2})N_k h^{kj} = N^{-2}N^j,$$

e, por simetria,

$$g^{i0} = (g^{0i})^T = N^{-2}N^i.$$

Bloco espacial

Finalmente, obtemos o bloco espacial na forma

$$\begin{aligned} g^{ij} &= S^{-1} + S^{-1}R(M/S)^{-1}QS^{-1} \\ &= h^{ij} + h^{ik}N_k(-N^{-2})N_\ell h^{\ell j} \\ &= h^{ij} - N^{-2}N^iN^j. \end{aligned}$$

Resultado final

A métrica inversa ADM assume, portanto, a forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE B – Determinante da métrica ADM por meio da fórmula de Banachiewicz

Neste apêndice calculamos o determinante da métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$ na decomposição ADM, utilizando a teoria de matrizes particionadas baseada no complemento de Schur (fórmula de Banachiewicz) [172, 173].

Determinante de matrizes particionadas

Seja uma matriz não singular escrita em blocos como

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde P é não singular. O determinante de M assume a forma

$$\det(M) = \det(P) \det(S - RP^{-1}Q). \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, a métrica e a sua inversa satisfazem a identidade

$$\det(g_{\mu\nu}) \det(g^{\mu\nu}) = 1. \quad (\text{B.3})$$

Aplicação à métrica inversa ADM

A métrica inversa ADM pode ser escrita em forma matricial como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Ao comparar com a forma geral (B.1), identificamos os blocos como

$$P = -\frac{1}{N^2}, \quad Q = \frac{N^j}{N^2}, \quad R = \frac{N^i}{N^2}, \quad S = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}.$$

Cálculo do complemento de Schur

Em primeiro lugar, o inverso do bloco escalar é

$$P^{-1} = -N^2.$$

Aplicando o complemento de Schur, obtemos

$$\begin{aligned} S - RP^{-1}Q &= h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} - \left(\frac{N^i}{N^2} \right) (-N^2) \left(\frac{N^j}{N^2} \right) \\ &= h^{ij}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Por conseguinte,

$$\det(S - RP^{-1}Q) = \det(h^{ij}). \quad (\text{B.5})$$

Determinante de $g^{\mu\nu}$

Usando a expressão geral (B.2), obtemos

$$\det(g^{\mu\nu}) = \det(P) \det(h^{ij}) = \left(-\frac{1}{N^2}\right) \det(h^{ij}). \quad (\text{B.6})$$

Se definirmos

$$h \equiv \det(h_{ij}),$$

então

$$\det(h^{ij}) = \frac{1}{h}.$$

Portanto,

$$\det(g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{N^2 h}. \quad (\text{B.7})$$

Resultado final

A partir da identidade (B.3), obtemos diretamente

$$\det(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{\det(g^{\mu\nu})} = -N^2 h.$$

Em consequência,

$$\boxed{\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \sqrt{N^2 h} = N\sqrt{h}} \quad (\text{B.8})$$

APÊNDICE C – Momento canônico conjugado a h_{ab}

Neste apêndice calculamos explicitamente o momento canônico Π^{ab} associado à métrica espacial h_{ab} , partindo da densidade lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_G$ no formalismo ADM,

$$\mathcal{L}_G = N h^{1/2} \left[{}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right]. \quad (\text{C.1})$$

Definimos o momento canônico conjugado a h_{ab} como

$$\Pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}}. \quad (\text{C.2})$$

Dependência temporal por meio de K_{ij}

A densidade lagrangiana $\mathcal{L}_G$ depende das derivadas temporais $\dot{h}_{ij}$ unicamente por meio do tensor de curvatura extrínseca,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij}). \quad (\text{C.3})$$

Em particular, o escalar de curvatura tridimensional ${}^{(3)}R$ contém apenas derivadas espaciais de h_{ij} e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (N h^{1/2} {}^{(3)}R) = 0. \quad (\text{C.4})$$

A partir de (C.3), obtemos

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{h}_{ab}} = -\frac{1}{2N} \delta_i^a \delta_j^b. \quad (\text{C.5})$$

Além disso,

$$K^{ij} = h^{ik} h^{jl} K_{kl}, \quad K = h^{ij} K_{ij}. \quad (\text{C.6})$$

Ao derivar com respeito a $\dot{h}_{ab}$, mantemos fixos h_{ij} e h^{ij} , de modo que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K_{ij} K^{ij}) = 2K^{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{h}_{ab}} = 2K^{ij} \left(-\frac{1}{2N} \delta_i^a \delta_j^b \right) = -\frac{1}{N} K^{ab}, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{h}_{ab}} = h^{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{h}_{ab}} = h^{ij} \left(-\frac{1}{2N} \delta_i^a \delta_j^b \right) = -\frac{1}{2N} h^{ab}, \quad (\text{C.8})$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} = 2K \frac{\partial K}{\partial \dot{h}_{ab}} = 2K \left(-\frac{1}{2N} h^{ab} \right) = -\frac{1}{N} K h^{ab}. \quad (\text{C.9})$$

Cálculo de Π^{ab}

Utilizando as expressões anteriores, avaliamos o momento canônico definido em (C.2) como

$$\begin{aligned}
 \Pi^{ab} &= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} \left\{ N h^{1/2} \left[{}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right] \right\} \\
 &= N h^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K_{ij} K^{ij}) - \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K^2) \right] \\
 &= N h^{1/2} \left[-\frac{1}{N} K^{ab} - \left(-\frac{1}{N} K h^{ab} \right) \right] \\
 &= h^{1/2} (h^{ab} K - K^{ab}).
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Dessa forma, o momento canônico conjugado à métrica espacial h_{ab} assume finalmente a forma

$$\boxed{\Pi^{ab} = \sqrt{h} (h^{ab} K - K^{ab})} \tag{C.11}$$

APÊNDICE D – Obtenção da densidade hamiltoniana ADM em função do momento canônico Π^{ij}

Neste apêndice desenvolvemos a reescrita explícita da densidade hamiltoniana gravitacional $\mathcal{H}_G$ em termos do momento canônico Π^{ij} .

Densidade hamiltoniana

Definimos a densidade hamiltoniana como

$$\mathcal{H}_G = \Pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_G. \quad (\text{D.1})$$

As quantidades fundamentais são

$$\Pi^{ij} = \sqrt{h} \left(h^{ij} K - K^{ij} \right), \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{L}_G = N \sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right), \quad (\text{D.3})$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\dot{h}_{ij} + N_{i|j} + N_{j|i} \right). \quad (\text{D.4})$$

Cálculo de $\Pi^{ij} \dot{h}_{ij}$

Partimos da identidade (D.4), da qual isolamos

$$\dot{h}_{ij} = -2N K_{ij} + N_{i|j} + N_{j|i}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} \dot{h}_{ij} &= \Pi^{ij} \left(-2N K_{ij} + N_{i|j} + N_{j|i} \right) \\ &= -2N \Pi^{ij} K_{ij} + \Pi^{ij} (N_{i|j} + N_{j|i}). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Definimos

$$(\text{I}) = -2N \Pi^{ij} K_{ij}, \quad (\text{II}) = \Pi^{ij} (N_{i|j} + N_{j|i}).$$

Primeiro termo: $-2N \Pi^{ij} K_{ij}$

A partir de (D.2) isolamos

$$K_{ij} = h_{ij} K - \frac{1}{\sqrt{h}} \Pi_{ij}. \quad (\text{D.6})$$

Cálculo do traço K

Tomamos o traço e substituímos K_{ij} a partir de (D.6), obtendo

$$K = h^{ij} K_{ij} = h^{ij} \left(h_{ij} K - \frac{1}{\sqrt{h}} \Pi_{ij} \right) = 3K - \frac{1}{\sqrt{h}} \Pi,$$

onde $\Pi = h_{ij}\Pi^{ij}$.

Desse resultado obtemos

$$-2K = -\frac{1}{\sqrt{h}}\Pi \implies K = \frac{\Pi}{2\sqrt{h}}. \quad (\text{D.7})$$

Substituimos esse resultado em (D.6) e obtemos

$$K_{ij} = \frac{\Pi}{2\sqrt{h}}h_{ij} - \frac{1}{\sqrt{h}}\Pi_{ij}. \quad (\text{D.8})$$

Recolocando (D.8) em (I), encontramos

$$\begin{aligned} -2N\Pi^{ij}K_{ij} &= -\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\frac{\Pi}{2}\Pi^{ij}h_{ij} - \Pi^{ij}\Pi_{ij}\right) \\ &= \frac{N}{\sqrt{h}}\left(2\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \Pi^2\right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Segundo termo: $\Pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i})$

Partimos de

$$\Pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i}) = \Pi^{ij}N_{i|j} + \Pi^{ij}N_{j|i}.$$

No segundo termo trocamos $i \leftrightarrow j$ e, usando a simetria $\Pi^{ij} = \Pi^{ji}$, obtemos

$$\Pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i}) = 2\Pi^{ij}N_{i|j}. \quad (\text{D.10})$$

Aplicamos a regra do produto para a derivada covariante,

$$(\Pi^{ij}N_i)_{|j} = \Pi^{ij}(N_{i|j}) + N_i(\Pi^{ij}_{|j}),$$

e isolamos

$$\Pi^{ij}N_{i|j} = (\Pi^{ij}N_i)_{|j} - N_i(\Pi^{ij}_{|j}). \quad (\text{D.11})$$

Portanto,

$$\Pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i}) = 2(\Pi^{ij}N_i)_{|j} - 2N_i(\Pi^{ij}_{|j}). \quad (\text{D.12})$$

O primeiro termo corresponde a uma divergência total e gera um termo de fronteira, razão pela qual não é considerado. Em consequência,

$$\Pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i}) = -2N_i\Pi^{ij}_{|j}. \quad (\text{D.13})$$

Reunindo (I) e (II)

Substituindo (D.9) e (D.13) em (D.5), obtemos

$$\Pi^{ij}\dot{h}_{ij} = \frac{N}{\sqrt{h}}(2\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \Pi^2) - 2N_i\Pi^{ij}_{|j}. \quad (\text{D.14})$$

Expressão de $\mathcal{L}_G$ em termos de Π^{ij}

A partir de (D.8) e (D.7) obtemos

$$K_{ij}K^{ij} - K^2 = \frac{1}{h} \left(\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right). \quad (\text{D.15})$$

Substituímos esse resultado em (D.3) e escrevemos

$$\mathcal{L}_G = N\sqrt{h} {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right). \quad (\text{D.16})$$

Densidade hamiltoniana

Usando (D.14) e (D.16) em (D.1), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \frac{N}{\sqrt{h}} (2\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \Pi^2) - 2N_i(\Pi^{ij}{}_{|j}) \\ &\quad - \left[N\sqrt{h} {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{h}} (\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \tfrac{1}{2}\Pi^2) \right] \\ &= N \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \tfrac{1}{2}\Pi^2) - \sqrt{h} {}^{(3)}R \right] - 2N_i(\Pi^{ij}{}_{|j}). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Identificamos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{h}} (\Pi_{ij}\Pi^{ij} - \tfrac{1}{2}\Pi^2) - \sqrt{h} {}^{(3)}R, \quad \mathcal{H}^i = -2(\Pi^{ij}{}_{|j}).$$

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{H}_G = N \mathcal{H} + N_i \mathcal{H}^i} \quad (\text{D.18})$$

APÊNDICE E – Obtenção de $p(\mu, s)$ a partir da primeira lei da termodinâmica relativista

Neste apêndice deduzimos, passo a passo, a expressão da pressão do fluido perfeito em termos da entalpia específica μ e da entropia específica s , isto é, $p = p(\mu, s)$, a partir da primeira lei da termodinâmica relativista [81].

Primeira lei e derivadas termodinâmicas

Partimos da primeira lei da termodinâmica na forma

$$d\rho = \mu d\rho_0 + \rho_0 T ds, \quad (\text{E.1})$$

onde $\rho = \rho(\rho_0, s)$ é a densidade total de energia, ρ_0 a densidade de massa em repouso, T a temperatura, μ a entalpia específica e s a entropia específica.

Como ρ depende de (ρ_0, s) , escrevemos o seu diferencial total como

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \right)_s d\rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{\rho_0} ds. \quad (\text{E.2})$$

Ao comparar (E.2) com (E.1), identificamos diretamente as derivadas termodinâmicas

$$\mu = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \right)_s, \quad \rho_0 T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{\rho_0}. \quad (\text{E.3})$$

No que segue, utilizamos a primeira relação de (E.3).

Equação de estado e equação diferencial para $\rho(\rho_0, s)$

Definimos a entalpia específica relativista como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0}. \quad (\text{E.4})$$

Adotamos a equação de estado barotrópica

$$p = \alpha \rho, \quad (\text{E.5})$$

onde α é uma constante (por exemplo, $\alpha = 0$ poeira, $\alpha = \frac{1}{3}$ radiação, etc.).

Substituindo (E.5) em (E.4), obtemos

$$\mu = \frac{(1 + \alpha)\rho}{\rho_0} \implies \rho = \frac{\mu}{1 + \alpha} \rho_0. \quad (\text{E.6})$$

Agora utilizamos (E.3):

$$\mu = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \right)_s. \quad (\text{E.7})$$

Substituímos μ a partir de (E.6) em (E.7). De (E.6) obtemos $\mu = (1 + \alpha)\rho/\rho_0$, portanto

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}\right)_s = (1 + \alpha)\frac{\rho}{\rho_0}. \quad (\text{E.8})$$

Essa expressão constitui uma equação diferencial (a entropia fixa) para ρ como função de ρ_0 :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}\right)_s = (1 + \alpha)\frac{1}{\rho_0} \implies \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \rho_0}\right)_s = 1 + \alpha. \quad (\text{E.9})$$

Integramos com respeito a ρ_0 , mantendo s constante, e obtemos

$$\ln \rho = (1 + \alpha) \ln \rho_0 + \ln f(s), \quad (\text{E.10})$$

onde $\ln f(s)$ atua como constante de integração, podendo depender de s . Ao exponenciar,

$$\rho(\rho_0, s) = \rho_0^{1+\alpha} f(s). \quad (\text{E.11})$$

Escolha de normalização para $f(s)$

Aproveitamos a liberdade de reparametrização da entropia específica e fixamos a normalização

$$f(s) = e^s, \quad (\text{E.12})$$

de modo a escrever

$$\rho(\rho_0, s) = \rho_0^{1+\alpha} e^s. \quad (\text{E.13})$$

Expressão de μ e isolamento de $\rho_0(\mu, s)$

Usando (E.4)–(E.5) juntamente com (E.13), obtemos

$$\mu = \frac{(1 + \alpha)\rho}{\rho_0} = (1 + \alpha)\rho_0^\alpha e^s. \quad (\text{E.14})$$

A partir de (E.14), isolamos ρ_0 :

$$\rho_0^\alpha = \frac{\mu}{1 + \alpha} e^{-s} \implies \rho_0(\mu, s) = \left(\frac{\mu}{1 + \alpha}\right)^{1/\alpha} e^{-s/\alpha}. \quad (\text{E.15})$$

Pressão $p(\mu, s)$

Finalmente, partimos de $p = \alpha\rho$ e utilizamos (E.13) juntamente com (E.15):

$$\begin{aligned} p(\mu, s) &= \alpha \rho(\rho_0, s) = \alpha \rho_0^{1+\alpha} e^s \\ &= \alpha \left[\left(\frac{\mu}{1 + \alpha}\right)^{1/\alpha} e^{-s/\alpha} \right]^{1+\alpha} e^s \\ &= \alpha \left(\frac{\mu}{1 + \alpha}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-s/\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

APÊNDICE F – Cálculo explícito da combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica LRS

Neste apêndice calculamos de forma explícita a combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica localmente rotacionalmente simétrica (LRS) utilizada neste trabalho. Assumimos um deslocamento nulo ($N^i = 0$) e empregamos a definição padrão da curvatura extrínseca

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\dot{h}_{ij}. \quad (\text{F.1})$$

Métrica espacial e inversa

Partimos do elemento de linha

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 e^{-\beta(t)} dr^2 + a(t)^2 e^{\beta(t)} (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\phi^2), \quad (\text{F.2})$$

do qual obtemos uma métrica espacial induzida diagonal,

$$h_{ij} = \text{diag}(a^2 e^{-\beta}, a^2 e^{\beta}, a^2 e^{\beta} f(\theta)^2). \quad (\text{F.3})$$

Por ser diagonal, a sua inversa assume a forma

$$h^{ij} = \text{diag}(a^{-2} e^{\beta}, a^{-2} e^{-\beta}, a^{-2} e^{-\beta} f(\theta)^{-2}). \quad (\text{F.4})$$

Derivadas temporais de h_{ij}

Como $f(\theta)$ não depende do tempo, obtemos

$$\dot{h}_{rr} = a^2 e^{-\beta} \left(2\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\beta} \right), \quad (\text{F.5})$$

$$\dot{h}_{\theta\theta} = a^2 e^{\beta} \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\beta} \right), \quad (\text{F.6})$$

$$\dot{h}_{\phi\phi} = a^2 e^{\beta} f(\theta)^2 \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\beta} \right). \quad (\text{F.7})$$

Curvatura extrínseca K_{ij}

Usando a definição (F.1), obtemos as componentes não nulas de K_{ij} na forma

$$K_{rr} = -\frac{a^2 e^{-\beta}}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\beta}}{2} \right), \quad (\text{F.8})$$

$$K_{\theta\theta} = -\frac{a^2 e^{\beta}}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{2} \right), \quad (\text{F.9})$$

$$K_{\phi\phi} = -\frac{a^2 e^{\beta} f(\theta)^2}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{2} \right). \quad (\text{F.10})$$

Componentes mistas e traço

Calculamos mediante $K^i_j = h^{ik} K_{kj}$. Dado que a métrica é diagonal, obtemos

$$K^r_r = -\frac{1}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\beta}}{2} \right), \quad (\text{F.11})$$

$$K^\theta_\theta = K^\phi_\phi = -\frac{1}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{2} \right). \quad (\text{F.12})$$

O traço da curvatura extrínseca é dado por

$$K = K^i_i = -\frac{1}{N} \left(3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{2} \right). \quad (\text{F.13})$$

Cálculo de $K_{ij}K^{ij}$

Onde, $K_{ij}K^{ij} = K_{ij}h^{ik}h^{j\ell}K_{k\ell} = (h^{ik}K_{kj})(h^{j\ell}K_{\ell i}) = K^i_jK^j_i$, para um tensor diagonal, vale:

$$K_{ij}K^{ij} = (K^r_r)^2 + (K^\theta_\theta)^2 + (K^\phi_\phi)^2. \quad (\text{F.14})$$

Substituindo as expressões (F.11) e (F.12), obtemos

$$K_{ij}K^{ij} = \frac{1}{N^2} \left[3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\beta} + \frac{3}{4} \dot{\beta}^2 \right]. \quad (\text{F.15})$$

Cálculo de K^2

Elevando ao quadrado a expressão (F.13), obtemos

$$K^2 = \frac{1}{N^2} \left[9 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 \right]. \quad (\text{F.16})$$

Resultado final

Subtraindo (F.16) de (F.15), obtemos finalmente

$$\boxed{K_{ij}K^{ij} - K^2 = \frac{1}{N^2} \left(-6\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \right)}. \quad (\text{F.17})$$

APÊNDICE G – Cálculo explícito do escalar de curvatura tridimensional (³)R para a métrica LRS

Neste apêndice deduzimos de forma explícita o escalar de curvatura tridimensional (³)R para a métrica localmente rotacionalmente simétrica (LRS) utilizada neste trabalho.

Métrica espacial induzida

A 3-métrica induzida sobre Σ_t assume a forma

$$h_{ij} = \text{diag}\left(a^2 e^{-\beta}, a^2 e^{\beta}, a^2 e^{\beta} f(\theta)^2\right), \quad (i, j = r, \theta, \phi), \quad (\text{G.1})$$

onde $a(t)$ e $\beta(t)$ dependem apenas do tempo, e as derivadas espaciais atuam unicamente sobre a função $f(\theta)$.

Métrica inversa

Como a métrica (G.1) é diagonal, a sua inversa assume a forma

$$h^{ij} = \text{diag}\left(a^{-2} e^{\beta}, a^{-2} e^{-\beta}, a^{-2} e^{-\beta} f(\theta)^{-2}\right). \quad (\text{G.2})$$

Derivadas espaciais da métrica

A única componente de h_{ij} que depende explicitamente da coordenada θ é

$$h_{\phi\phi} = a^2 e^{\beta} f(\theta)^2.$$

Portanto,

$$\partial_{\theta} h_{\phi\phi} = 2a^2 e^{\beta} f(\theta) f'(\theta), \quad (\text{G.3})$$

onde $f'(\theta) = df/d\theta$. Todas as demais derivadas espaciais de h_{ij} são nulas.

Símbolos de Christoffel tridimensionais

Definimos os símbolos de Christoffel associados à métrica tridimensional como

$$({}^3)\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{i\ell} (\partial_j h_{\ell k} + \partial_k h_{\ell j} - \partial_{\ell} h_{jk}). \quad (\text{G.4})$$

Utilizando os resultados anteriores, obtemos como únicos símbolos não nulos

$$\begin{aligned} ({}^3)\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= \frac{1}{2} h^{\theta\theta} (-\partial_{\theta} h_{\phi\phi}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(a^{-2} e^{-\beta}\right) \left(2a^2 e^{\beta} f f'\right) = -f f', \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$\begin{aligned} ({}^3)\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= ({}^3)\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} h^{\phi\phi} \partial_{\theta} h_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{2} \left(a^{-2} e^{-\beta} f^{-2}\right) \left(2a^2 e^{\beta} f f'\right) = \frac{f'}{f}. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Tensor de Ricci tridimensional

O tensor de Ricci tridimensional assume a forma

$${}^{(3)}R_{ij} = \partial_k {}^{(3)}\Gamma^k_{ij} - \partial_j {}^{(3)}\Gamma^k_{ik} + {}^{(3)}\Gamma^k_{ij} {}^{(3)}\Gamma^\ell_{k\ell} - {}^{(3)}\Gamma^\ell_{ik} {}^{(3)}\Gamma^k_{j\ell}. \quad (\text{G.7})$$

Como existe dependência apenas em θ e os símbolos não nulos são os obtidos em (G.5) e (G.6), obtemos diretamente

$${}^{(3)}R_{rr} = 0, \quad {}^{(3)}R_{\theta\theta} = -\frac{f''(\theta)}{f(\theta)}, \quad {}^{(3)}R_{\phi\phi} = -f(\theta)f''(\theta), \quad (\text{G.8})$$

onde $f''(\theta) = d^2f/d\theta^2$.

Escalar de curvatura tridimensional

Definimos o escalar de curvatura tridimensional como

$${}^{(3)}R = h^{ij} {}^{(3)}R_{ij}. \quad (\text{G.9})$$

Substituindo (G.2) e (G.8), obtemos

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= h^{\theta\theta} {}^{(3)}R_{\theta\theta} + h^{\phi\phi} {}^{(3)}R_{\phi\phi} \\ &= (a^{-2}e^{-\beta}) \left(-\frac{f''}{f} \right) + (a^{-2}e^{-\beta}f^{-2}) (-ff'') \\ &= -\frac{2e^{-\beta}}{a^2} \frac{f''(\theta)}{f(\theta)}. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Casos particulares

De acordo com a escolha da função $f(\theta)$, a expressão de ${}^{(3)}R$ leva aos seguintes casos de interesse:

- **Bianchi I:** $f(\theta) = 1$, $f'' = 0$, de modo que

$${}^{(3)}R = 0.$$

- **Kantowski–Sachs:** $f(\theta) = \sin \theta$, $f'' = -\sin \theta$, e, portanto,

$${}^{(3)}R = \frac{2e^{-\beta}}{a^2}.$$

- **Bianchi III:** $f(\theta) = \sinh \theta$, $f'' = \sinh \theta$, o que conduz a

$${}^{(3)}R = -\frac{2e^{-\beta}}{a^2}.$$

APÊNDICE H – Cálculo explícito da combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica FLRW

Neste apêndice calculamos de forma explícita a combinação $K_{ij}K^{ij} - K^2$ para a métrica FLRW, assumindo $N^i = 0$ (homogêneo e isotrópico) e empregando a definição padrão da curvatura extrínseca.

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\dot{h}_{ij}. \quad (\text{H.1})$$

Métrica espacial e inversa

Partimos do elemento de linha

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (\text{H.2})$$

do qual obtemos a métrica espacial induzida diagonal

$$h_{ij} = a^2 \text{diag} \left(\frac{1}{1 - kr^2}, r^2, r^2 \sin^2\theta \right). \quad (\text{H.3})$$

Por ser diagonal, sua inversa assume a forma

$$h^{ij} = a^{-2} \text{diag} \left(1 - kr^2, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \right). \quad (\text{H.4})$$

Derivadas temporais de h_{ij}

Como os fatores espaciais não dependem do tempo, a dependência temporal provém exclusivamente do fator de escala $a(t)$. Obtemos então

$$\dot{h}_{rr} = 2a\dot{a} \frac{1}{1 - kr^2}, \quad (\text{H.5})$$

$$\dot{h}_{\theta\theta} = 2a\dot{a} r^2, \quad (\text{H.6})$$

$$\dot{h}_{\phi\phi} = 2a\dot{a} r^2 \sin^2\theta. \quad (\text{H.7})$$

Curvatura extrínseca K_{ij}

Substituindo (H.5)–(H.7) na definição (H.1), obtemos

$$K_{rr} = -\frac{a\dot{a}}{N} \frac{1}{1 - kr^2}, \quad (\text{H.8})$$

$$K_{\theta\theta} = -\frac{a\dot{a}}{N} r^2, \quad (\text{H.9})$$

$$K_{\phi\phi} = -\frac{a\dot{a}}{N} r^2 \sin^2\theta. \quad (\text{H.10})$$

Observamos que pode fatorizar-se a métrica espacial, o que permite escrever de maneira compacta

$$K_{ij} = -\frac{\dot{a}}{aN} h_{ij}. \quad (\text{H.11})$$

Componentes mistas e traço

Calculamos mediante $K^i_j = h^{ik} K_{kj}$. Dado que a métrica é diagonal, obtemos

$$K^r_r = K^\theta_\theta = K^\phi_\phi = -\frac{\dot{a}}{Na}. \quad (\text{H.12})$$

O traço resulta

$$K = K^i_i = K^r_r + K^\theta_\theta + K^\phi_\phi = -\frac{3\dot{a}}{Na}. \quad (\text{H.13})$$

Cálculo de $K_{ij}K^{ij}$

Onde, $K_{ij}K^{ij} = K_{ij}h^{ik}h^{j\ell}K_{k\ell} = (h^{ik}K_{kj})(h^{j\ell}K_{\ell i}) = K^i_jK^j_i$,
para um tensor diagonal, vale:

$$K_{ij}K^{ij} = (K^r_r)^2 + (K^\theta_\theta)^2 + (K^\phi_\phi)^2. \quad (\text{H.14})$$

Ao substituir (H.12) em (H.14), obtemos

$$K_{ij}K^{ij} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2. \quad (\text{H.15})$$

Cálculo de K^2

Elevando ao quadrado a expressão (H.13), obtemos

$$K^2 = 9 \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2. \quad (\text{H.16})$$

Resultado final

Subtraindo (H.16) de (H.15), obtemos finalmente

$$\boxed{K_{ij}K^{ij} - K^2 = -\frac{6}{N^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2}}. \quad (\text{H.17})$$

APÊNDICE I – Cálculo explícito de curvatura intrínseca ${}^{(3)}R$ para la métrica FLRW

Neste apêndice deduzimos de forma explícita a curvatura intrínseca ${}^{(3)}R$ associada à hipersuperfície espacial Σ_t da métrica FLRW.

Métrica espacial e inversa

A 3-métrica induzida sobre Σ_t assume a forma

$$h_{ij} = \text{diag}\left(\frac{a^2}{1 - kr^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2 \theta\right), \quad (i, j = r, \theta, \phi). \quad (\text{I.2})$$

Como h_{ij} é diagonal, sua inversa assume a forma

$$h^{ij} = \text{diag}\left(\frac{1 - kr^2}{a^2}, \frac{1}{a^2 r^2}, \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}\right). \quad (\text{I.3})$$

Derivadas espaciais não nulas de h_{ij}

Como $a = a(t)$ não depende de (r, θ, ϕ) , as derivadas espaciais atuam apenas sobre os fatores geométricos. Obtemos

$$\partial_r h_{rr} = \partial_r \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) = \frac{2a^2 kr}{(1 - kr^2)^2}, \quad (\text{I.4})$$

$$\partial_r h_{\theta\theta} = \partial_r (a^2 r^2) = 2a^2 r, \quad (\text{I.5})$$

$$\partial_r h_{\phi\phi} = \partial_r (a^2 r^2 \sin^2 \theta) = 2a^2 r \sin^2 \theta, \quad (\text{I.6})$$

$$\partial_\theta h_{\phi\phi} = \partial_\theta (a^2 r^2 \sin^2 \theta) = 2a^2 r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{I.7})$$

Não aparecem outras derivadas espaciais não nulas devido à diagonalidade de h_{ij} e à dependência explícita de $h_{\phi\phi}$ em θ .

Símbolos de Christoffel tridimensionais ${}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$

Definimos os símbolos de Christoffel associados a h_{ij} por

$${}^{(3)}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{i\ell} (\partial_j h_{\ell k} + \partial_k h_{\ell j} - \partial_\ell h_{jk}). \quad (\text{I.8})$$

A partir de (I.4)-(I.7), calculamos as componentes não nulas.

Componentes com índice superior r

Em primeiro lugar,

$${}^{(3)}\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} h^{rr} \partial_r h_{rr} = \frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{a^2} \frac{2a^2 kr}{(1 - kr^2)^2} = \frac{kr}{1 - kr^2}. \quad (\text{I.9})$$

Em seguida,

$${}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}h^{rr}\partial_r h_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{a^2}(2a^2r) = -r(1-kr^2), \quad (\text{I.10})$$

e de maneira análoga,

$${}^{(3)}\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}h^{rr}\partial_r h_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{a^2}(2a^2r\sin^2\theta) = -r(1-kr^2)\sin^2\theta. \quad (\text{I.11})$$

Componentes com índice superior θ

Calculamos

$${}^{(3)}\Gamma^\theta_{r\theta} = {}^{(3)}\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}\partial_r h_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}(2a^2r) = \frac{1}{r}, \quad (\text{I.12})$$

e também

$${}^{(3)}\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}h^{\theta\theta}\partial_\theta h_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}(2a^2r^2\sin\theta\cos\theta) = -\sin\theta\cos\theta. \quad (\text{I.13})$$

Componentes com índice superior ϕ

De (I.6) e (I.7) obtemos

$${}^{(3)}\Gamma^\phi_{r\phi} = {}^{(3)}\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}\partial_r h_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}(2a^2r\sin^2\theta) = \frac{1}{r}, \quad (\text{I.14})$$

e

$${}^{(3)}\Gamma^\phi_{\theta\phi} = {}^{(3)}\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}\partial_\theta h_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}(2a^2r^2\sin\theta\cos\theta) = \cot\theta. \quad (\text{I.15})$$

Estas são as únicas componentes não nulas de ${}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$.

Tensor de Ricci tridimensional ${}^{(3)}R_{ij}$

Usamos a definição

$${}^{(3)}R_{ij} = \partial_k {}^{(3)}\Gamma^k_{ij} - \partial_j {}^{(3)}\Gamma^k_{ik} + {}^{(3)}\Gamma^k_{ij} {}^{(3)}\Gamma^\ell_{k\ell} - {}^{(3)}\Gamma^\ell_{ik} {}^{(3)}\Gamma^k_{j\ell}. \quad (\text{I.16})$$

Como a métrica é diagonal (FLRW), basta determinar ${}^{(3)}R_{rr}$, ${}^{(3)}R_{\theta\theta}$ e ${}^{(3)}R_{\phi\phi}$.

Cálculo explícito de ${}^{(3)}R_{\theta\theta}$

Avaliamos cada termo de (I.16) para $(i, j) = (\theta, \theta)$.

(1) Termo $\partial_k {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta\theta}$. Somente contribui $k = r$ porque ${}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} \neq 0$. Assim,

$$\partial_k {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta\theta} = \partial_r {}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} = \partial_r(-r(1-kr^2)) = -1 + 3kr^2. \quad (\text{I.17})$$

(2) Termo $-\partial_\theta {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta k}$. Calculamos primeiro

$${}^{(3)}\Gamma^k_{\theta k} = {}^{(3)}\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta, \quad (\text{I.18})$$

e portanto

$$-\partial_\theta {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta k} = -\partial_\theta(\cot \theta) = +\csc^2 \theta. \quad (\text{I.19})$$

(3) Termo ${}^{(3)}\Gamma^k_{\theta\theta} {}^{(3)}\Gamma^\ell_{k\ell}$. Somente contribui $k = r$. Usamos

$${}^{(3)}\Gamma^\ell_{r\ell} = {}^{(3)}\Gamma^r_{rr} + {}^{(3)}\Gamma^\theta_{r\theta} + {}^{(3)}\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad (\text{I.20})$$

e então

$${}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} {}^{(3)}\Gamma^\ell_{r\ell} = -r(1 - kr^2) \left(\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{2}{r} \right) = -2 + kr^2. \quad (\text{I.21})$$

(4) Termo $-{}^{(3)}\Gamma^\ell_{\theta k} {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta\ell}$. As contribuições não nulas provêm de $(k, \ell) = (r, \theta)$ e $(k, \ell) = (\phi, \phi)$:

$$\begin{aligned} -{}^{(3)}\Gamma^\ell_{\theta k} {}^{(3)}\Gamma^k_{\theta\ell} &= -\left({}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} {}^{(3)}\Gamma^\theta_{\theta r} + {}^{(3)}\Gamma^\theta_{\theta r} {}^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} + {}^{(3)}\Gamma^\phi_{\theta\phi} {}^{(3)}\Gamma^\phi_{\theta\phi} \right) \\ &= 2(1 - kr^2) - \cot^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Somando (I.17), (I.19), (I.21) e (I.22), obtemos

$${}^{(3)}R_{\theta\theta} = (-1 + 3kr^2) + \csc^2 \theta + (-2 + kr^2) + (2(1 - kr^2) - \cot^2 \theta). \quad (\text{I.23})$$

Usando a identidade $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$, simplificamos (I.23) e obtemos

$$\boxed{{}^{(3)}R_{\theta\theta} = 2kr^2} \quad (\text{I.24})$$

Resultados para ${}^{(3)}R_{rr}$ *e* ${}^{(3)}R_{\phi\phi}$

Repetindo o procedimento anterior para as outras componentes diagonais, obtemos:

$$\boxed{{}^{(3)}R_{rr} = \frac{2k}{1 - kr^2}}, \quad \boxed{{}^{(3)}R_{\phi\phi} = 2kr^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{I.25})$$

Escalar de curvatura tridimensional ${}^{(3)}R$

Definimos o escalar tridimensional como a contração com h^{ij} :

$${}^{(3)}R = h^{ij} {}^{(3)}R_{ij} = h^{rr} {}^{(3)}R_{rr} + h^{\theta\theta} {}^{(3)}R_{\theta\theta} + h^{\phi\phi} {}^{(3)}R_{\phi\phi}. \quad (\text{I.26})$$

Substituímos (I.3), (I.24) e (I.25). Para cada termo obtemos:

$$h^{rr} {}^{(3)}R_{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2} \frac{2k}{1 - kr^2} = \frac{2k}{a^2}, \quad (\text{I.27})$$

$$h^{\theta\theta} {}^{(3)}R_{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 r^2} (2kr^2) = \frac{2k}{a^2}, \quad (\text{I.28})$$

$$h^{\phi\phi} {}^{(3)}R_{\phi\phi} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} (2kr^2 \sin^2 \theta) = \frac{2k}{a^2}. \quad (\text{I.29})$$

Somando (I.27)-(I.29) em (I.26), obtemos finalmente

$$\boxed{{}^{(3)}R = \frac{6k}{a(t)^2}} \quad (\text{I.30})$$

APÊNDICE J – Aproximação WKB para a equação de Wheeler-DeWitt

Neste apêndice desenvolvemos passo a passo a aproximação semiclassica WKB aplicada à equação de WDW escrita em forma tipo Schrödinger na variável de escala a .

Equação diferencial e potencial efetivo

Partimos da equação

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + 12(E - V_{\text{eff}}(a))\psi = 0, \quad (\text{J.1})$$

onde o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{eff}}(a) = 3a^2 - \Lambda a^4 + \varepsilon a. \quad (\text{J.2})$$

Ansatz WKB

Introduzimos o ansatz semiclassico

$$\psi(a) = A(a)e^{i\varphi(a)}. \quad (\text{J.3})$$

Calculamos as derivadas.

Primeira derivada:

$$\frac{d\psi(a)}{da} = A'e^{i\varphi} + iA\varphi'e^{i\varphi} = (A' + iA\varphi')e^{i\varphi} \quad (\text{J.4})$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(a)}{da^2} &= \frac{d}{da}(A' + iA\varphi')e^{i\varphi} + (A' + iA\varphi')\frac{d}{da}e^{i\varphi} \\ &= (A'' + iA'\varphi' + iA\varphi'')e^{i\varphi} + (A' + iA\varphi')(i)\varphi'e^{i\varphi} \\ &= (A'' + 2iA'\varphi' - A(\varphi')^2 + iA\varphi'')e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

Separação em parte real e imaginária

Substituímos (J.5) em (J.1) e fatoramos $e^{i\varphi}$:

$$A'' - A(\varphi')^2 + i(2A'\varphi' + A\varphi'') + 12(E - V_{\text{eff}})A = 0. \quad (\text{J.6})$$

Separando parte real e imaginária obtemos o sistema

$$A'' - A(\varphi')^2 + 12(E - V_{\text{eff}})A = 0, \quad (\text{J.7a})$$

$$2A'\varphi' + A\varphi'' = 0. \quad (\text{J.7b})$$

Aproximação semiclassica

No regime WKB supomos que a amplitude varia lentamente,

$$|A''| \ll |A(\varphi')^2|. \quad (\text{J.8})$$

Desprezando A'' em (J.7a) obtemos

$$(\varphi')^2 = 12(E - V_{\text{eff}}). \quad (\text{J.9})$$

Definimos o momento

$$k(a) = \sqrt{12(E - V_{\text{eff}}(a))}. \quad (\text{J.10})$$

Então

$$\varphi'(a) = \pm k(a), \quad \varphi(a) = \pm \int k(a) da. \quad (\text{J.11})$$

Determinação da amplitude

A equação imaginária (J.7b) pode ser escrita como

$$\frac{d}{da} (A^2 \varphi') = 0. \quad (\text{J.12})$$

Daqui obtemos, integrando,

$$A^2 \varphi' = C. \quad (\text{J.13})$$

Substituindo $\varphi' = k(a)$:

$$A(a) = \frac{C}{\sqrt{k(a)}}. \quad (\text{J.14})$$

Solução WKB

Substituindo (J.11) e (J.14) no ansatz (J.3) obtemos:

Na região classicamente permitida ($E > V_{\text{eff}}$):

$$\psi(a) = \frac{C_1}{\sqrt{k(a)}} \exp\left(\pm i \int k(a) da\right), \quad k(a) = \sqrt{12[E - V_{\text{eff}}(a)]}. \quad (\text{J.15})$$

Na região proibida ($E < V_{\text{eff}}$):

$$\psi(a) = \frac{C_2}{\sqrt{k'(a)}} \exp\left(\pm \int k'(a) da\right), \quad k'(a) = \sqrt{12[V_{\text{eff}}(a) - E]}. \quad (\text{J.16})$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.