

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Bianca Maria Costa Araújo

**ARITMÉTICAS INTERVALARES APLICADAS À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
FLUXO DE POTÊNCIA VIA EQUAÇÕES DE INJEÇÃO DE CORRENTE**

Juiz de Fora
2016

Bianca Maria Costa Araújo

**ARITMÉTICAS INTERVALARES APLICADAS À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
FLUXO DE POTÊNCIA VIA EQUAÇÕES DE INJEÇÃO DE CORRENTE**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Vander Menengoy da Costa, D. Sc.

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Araújo, Bianca Maria Costa.

Aritméticas Intervalares Aplicadas à Solução do Problema de Fluxo de Potência via Equações de Injeção de Corrente / Bianca Maria Costa Araújo. -- 2016.

144 f. : il.

Orientador: Vander Menengoy da Costa

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2016.

1. Aritmética Afim. 2. Aritmética Intervalar. 3. Fluxo de Potência. 4. Incertezas. 5. Sistemas Elétricos de Potência. I. da Costa, Vander Menengoy, orient. II. Título.

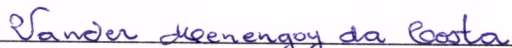
Bianca Maria Costa Araújo

**ARITMÉTICAS INTERVALARES APLICADAS À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
FLUXO DE POTÊNCIA VIA EQUAÇÕES DE INJEÇÃO DE CORRENTE**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

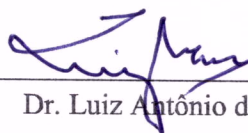
Aprovada em 03 de fevereiro de 2016

BANCA EXAMINADORA



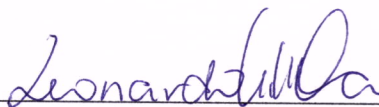
Dr. Vander Menengoy da Costa - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora



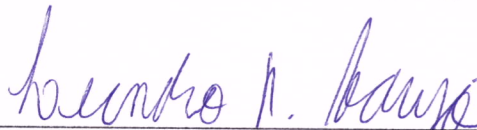
Dr. Luiz Antônio da Fonseca Manso

Universidade Federal de São João Del Rei



Dr. Leonardo Willer de Oliveira

Universidade Federal de Juiz de Fora



Dr. Leandro Ramos de Araújo

Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho aos meus pais e a todos os amigos que sempre me incentivaram nessa jornada em busca do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, presença incontestável e demonstração de amor gratuito e infinito.

Ao professor Vander Menengoy da Costa, pela orientação, confiança, dedicação e amizade durante toda a realização deste trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais Adir e Elizete e minha irmã Thayane, que tanto me apoiaram em toda a minha trajetória acadêmica e em todos os momentos importantes da minha vida.

A todos os amigos que, de alguma forma, contribuíram ou fizeram parte de mais esta importante etapa da minha vida.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

*“O sucesso nasce do querer, da determinação
e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e
vence obstáculos, no mínimo fará coisas
admiráveis”.*

(José de Alencar)

RESUMO

Estudos de fluxo de potência são tipicamente utilizados para determinar as condições de operação em estado permanente de um sistema de energia elétrica, avaliadas para um determinado conjunto de valores de geração e carga. Quando os dados de entrada são incertos, vários cenários precisam ser analisados para cobrir a faixa de incerteza. Sob tais condições, torna-se necessária a utilização de algoritmos que incorporem o efeito da incerteza dos dados de geração e carga na análise do fluxo de potência. Como uma alternativa para este problema, um novo método de solução é proposto com base na utilização da aritmética afim, que é um modelo melhorado para análise numérica de auto-validação. Nesta aritmética, as quantidades de interesse são representadas como combinações afim de certas variáveis primitivas, que representam as fontes de incerteza nos dados ou aproximações feitas durante o cálculo. Esta técnica é incorporada ao fluxo de potência expresso em termos das equações de injeção de corrente, com as tensões escritas na forma retangular. Posteriormente, os resultados obtidos aplicando-se a aritmética intervalar e a Simulação de Monte Carlo na resolução do problema de incertezas no fluxo de potência em redes de energia elétrica são comparados.

Palavras-chave: Aritmética Afim, Aritmética Intervalar, Fluxo de Potência, Incertezas, Sistemas Elétricos de Potência.

ABSTRACT

Power flow analysis typically uses a given set of generation and loading profiles to determine steady state operating conditions of electric power systems. When the input data are imprecise, several scenarios need to be analysed to cover the range of uncertainties. Under these conditions, it is necessary to utilise algorithms to incorporate the effect of the uncertainties within the power flow analysis. As an alternative solution to this issue, a new method has been proposed, based on the use of affine arithmetic. This alternative technique has been developed to improve the self-validated numerical analysis. Within affine arithmetic, the quantities of interest are represented by affine combinations of certain primitive variables. The affine combinations can signify both the source of the uncertainties in the data and the approximations during calculations. This technique is incorporated at the power flow which is expressed in terms of current injection equations, with the voltages represented in the rectangular form. The proposed results are later compared with the Monte Carlo Simulation and interval arithmetic, both of which solve the same issue: uncertainties in the power flow analysis of electric power grids.

Keywords: Affine Arithmetic, Interval Arithmetic, Power Flow, Uncertainties, Power Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Faixa comum de (x,y) [28]	21
Figura 3.1 - Faixas do Módulo da Tensão - Sistema 3 Barras.....	53
Figura 3.2 - Faixas da Fase da Tensão - Sistema 3 Barras	54
Figura 3.3 - Faixas da Geração Ativa da Barra V θ - Sistema 3 Barras.....	54
Figura 3.4 - Faixas da Geração Reativa da Barra V θ - Sistema 3 Barras	55
Figura 3.5 - Faixas da Geração Reativa da Barra PV - Sistema 3 Barras	55
Figura 3.6 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P _{km}) - Sistema 3 Barras	56
Figura 3.7 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q _{km}) - Sistema 3 Barras	56
Figura 3.8 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P _{mk}) - Sistema 3 Barras	56
Figura 3.9 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q _{mk}) - Sistema 3 Barras	57
Figura 3.10 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema 3 Barras	57
Figura 3.11 - Faixas das Perdas Reativas - Sistemas 3 Barras	58
Figura 4.1 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 1 a 3) - Sistema IEEE 14 Barras	60
Figura 4.2 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 4 a 6) - Sistema IEEE 14 Barras	60
Figura 4.3 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 7 a 9) - Sistema IEEE 14 Barras	61
Figura 4.4 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 10 a 12) - Sistema IEEE 14 Barras	61
Figura 4.5 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 13 e 14) - Sistema IEEE 14 Barras	61
Figura 4.6 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 1 a 3) - Sistema IEEE 14 Barras.....	62
Figura 4.7 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 4 a 6) - Sistema IEEE 14 Barras.....	63
Figura 4.8 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 7 a 9) - Sistema IEEE 14 Barras.....	63
Figura 4.9 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 10 a 12) - Sistema IEEE 14 Barras.....	63
Figura 4.10 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 13 e 14) - Sistema IEEE 14 Barras.....	64
Figura 4.11 - Faixas da Geração Ativa da Barra V θ - Sistema IEEE 14 Barras	64

Figura 4.12 - Faixas da Geração Reativa da Barra $V\theta$ - Sistema IEEE 14 Barras	65
Figura 4.13 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV - Sistema IEEE 14 Barras.....	65
Figura 4.14 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{km}) - Sistema IEEE 14 Barras.....	66
Figura 4.15 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{km}) - Sistema IEEE 14 Barras.....	66
Figura 4.16 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{mk}) - Sistema IEEE 14 Barras.....	67
Figura 4.17 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{mk}) - Sistema IEEE 14 Barras.....	67
Figura 4.18 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema IEEE 14 Barras	68
Figura 4.19 - Faixas das Perdas Reativas - Sistema IEEE 14 Barras	68
Figura 4.20 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 1 a 4) - Sistema IEEE 30 Barras	69
Figura 4.21 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 5 a 8) - Sistema IEEE 30 Barras	69
Figura 4.22 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 9 a 12) - Sistema IEEE 30 Barras	70
Figura 4.23 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 13 a 16) - Sistema IEEE 30 Barras	70
Figura 4.24 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 17 a 20) - Sistema IEEE 30 Barras	70
Figura 4.25 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 21 a 24) - Sistema IEEE 30 Barras	71
Figura 4.26 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 25 a 27) - Sistema IEEE 30 Barras	71
Figura 4.27 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 28 a 30) - Sistema IEEE 30 Barras	71
Figura 4.28 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 1 a 4) - Sistema IEEE 30 Barras.....	72
Figura 4.29 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 5 a 8) - Sistema IEEE 30 Barras.....	73
Figura 4.30 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 9 a 12) - Sistema IEEE 30 Barras.....	73
Figura 4.31 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 13 a 16) - Sistema IEEE 30 Barras.....	73
Figura 4.32 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 17 a 20) - Sistema IEEE 30 Barras.....	74
Figura 4.33 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 21 a 24) - Sistema IEEE 30 Barras.....	74
Figura 4.34 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 25 a 27) - Sistema IEEE 30 Barras.....	74
Figura 4.35 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 28 a 30) - Sistema IEEE 30 Barras.....	75
Figura 4.36 - Faixas da Geração Ativa da Barra $V\theta$ - Sistema IEEE 30 Barras	75

Figura 4.37 - Faixas da Geração Reativa da Barra $V\theta$ - Sistema IEEE 30 Barras.....	76
Figura 4.38 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV (2, 5 e 8) - Sistema IEEE 30 Barras	76
Figura 4.39 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV (11 e 13) - Sistema IEEE 30 Barras	76
Figura 4.40 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{km}) - Sistema IEEE 30 Barras.....	77
Figura 4.41 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{km}) - Sistema IEEE 30 Barras.....	78
Figura 4.42 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{mk}) - Sistema IEEE 30 Barras.....	78
Figura 4.43 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{mk}) - Sistema IEEE 30 Barras.....	78
Figura 4.44 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema IEEE 30 Barras	79
Figura 4.45 - Faixas das Perdas Reativas - Sistema IEEE 30 Barras	79
Figura E.1 - Diagrama Unifilar do Sistema IEEE 14 Barras.....	120
Figura F.1 - Diagrama Unifilar do Sistema IEEE 30 Barras	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Sistema 3 Barras - Dados de Barra.....	42
Tabela 3.2 - Sistema 3 Barras - Dados de Linha	43
Tabela 3.3 - Sistema 3 Barras - Tensão Nodal	43
Tabela 3.4 - Sistema 3 Barras - Geração da Barra de Referência ($V\theta$).....	43
Tabela 3.5 - Sistema 3 Barras - Geração Reativa da Barra PV	43
Tabela 3.6 - Sistema 3 Barras - Fluxo de Potência nas Linhas	43
Tabela 3.7 - Sistema 3 Barras - Perdas de Potência nas Linhas	44
Tabela 3.8 - Sistema 3 Barras - Demandas Intervalares.....	44
Tabela 3.9 - Sistema 3 Barras - Potências Intervalares Geradas	45
Tabela 4.1 - Resultados para o Módulo da Tensão.....	82
Tabela 4.2 - Resultados para a Fase da Tensão	82
Tabela 4.3 - Resultados para as Gerações da Barra de Referência ($V\theta$).....	83
Tabela 4.4 - Resultados para a Geração Reativa das Barras PV	83
Tabela 4.5 - Resultados para os Fluxos Ativos	84
Tabela 4.6 - Resultados para os Fluxos Reativos	84
Tabela 4.7 - Resultados para as Perdas Ativas	85
Tabela 4.8 - Resultados para as Perdas Reativas.....	85
Tabela B.1 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 1	101
Tabela B.2 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 2	103
Tabela B.3 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 3	105
Tabela C.1 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 1.....	109
Tabela C.2 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 2.....	111
Tabela C.3 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 3.....	113

Tabela E.1 - Sistema IEEE 14 Barras - Dados de Barra.....	121
Tabela E.2 - Sistema IEEE 14 Barras - Dados de Linha	122
Tabela F.1 - Sistema IEEE 30 Barras - Dados de Barra.....	124
Tabela F.2 - Sistema IEEE 30 Barras - Dados de Linha	125

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

A	Número aleatório uniforme
AA	Aritmética Afim
AI	Aritmética Intervalar
B	Matriz susceptância nodal
b_{k-m}	Susceptância da linha $k-m$
C	Matriz de pré-condicionamento
$diam(X)$	Diâmetro do intervalo X
ε_i	Símbolo de ruído da forma afim \hat{x}
G	Matriz condutância nodal
g	Variável depende funcional correspondente ao ramo $k-m$
h	Iteração
ΔI_{r_k}	Resíduo da componente real da corrente na barra k
ΔI_{m_k}	Resíduo da componente imaginária da corrente na barra k
$I_{r_k} + jI_{m_k}$	Corrente complexa da barra k
Id	Matriz Identidade
J_i	Matriz Jacobiana Injeção
K	Operador Krawczyk
k	Barra genérica
m	Barra genérica
MC	Monte Carlo
N	Operador de Newton Intervalar
n	Número de barras do sistema

P_k	Potência líquida ativa da barra k
Q_k	Potência líquida reativa da barra k
$P_{d_k} + jQ_{d_k}$	Demanda complexa da barra k
$P_{g_k} + jQ_{g_k}$	Geração complexa da barra k
$P_{calc_k} + jQ_{calc_k}$	Potência complexa calculada da barra k
[]	Conjunto vazio
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
R_{k-m}	Resistência da linha $k-m$
$ V_k \angle \theta_k$	Tensão polar da barra k
$V_{r_k} + jV_{m_k}$	Tensão retangular da barra k
\hat{x}	Forma afim da quantidade x
\bar{x}	Intervalo x
x_i	Desvios parciais da forma afim \hat{x}
x_0	Valor central da forma afim \hat{x}
X	Vetor de intervalos
X_{MC}	Diâmetro do intervalo obtido nas simulações tipo Monte Carlo
X_{MET}	Diâmetro do intervalo obtido pelo método em análise
X_{k-m}	Reatância da linha $k-m$
α_{G_k}	Variação percentual da geração ativa da barra k
α_{P_k}	Variação percentual da demanda ativa da barra k
α_{Q_k}	Variação percentual da demanda reativa da barra k
Ω_k	Conjunto de barras vizinhas à barra k mais a própria barra k

Os sobrescritos i e d denotam, respectivamente, quantidades intervalares e determinísticas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Breve Revisão Bibliográfica: Matemática Intervalar Aplicada ao Problema de Fluxo de Potência.....	3
1.2	Objetivos.....	6
1.3	Publicações	7
1.4	Estrutura do Trabalho.....	7
2	MATEMÁTICA INTERVALAR.....	9
2.1	Aproximações Computacionais.....	9
2.2	Fundamentos da Aritmética Intervalar Ordinária	10
2.2.1	Conceitos Básicos	10
2.2.2	Operações de Aritmética Intervalar (AI)	12
2.2.3	Propriedades Algébricas da Aritmética Intervalar	14
2.2.4	Intervalos Simétricos	16
2.2.5	Funções Intervalares	16
2.2.6	Extensões Intervalares de Funções de Valor Real	18
2.2.7	O problema da Explosão de Erro	19
2.3	Fundamentos da Aritmética Intervalar Afim.....	19
2.3.1	O Invariante Fundamental da Aritmética Afim	20
2.3.2	Faixa Comum das Formas Afim	21
2.3.3	Operações Afim	22
2.3.4	Operações Não-afim	23
2.3.5	Multiplicação	24
2.3.6	Divisão Afim.....	26
3	APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA INTERVALAR AFIM NO ESTUDO DE FLUXO DE POTÊNCIA	27
3.1	Considerações Iniciais.....	27
3.1.1	Breve Histórico sobre o Método Injeção de Corrente.....	27
3.1.2	Fluxo de Potência via Equações de Injeção de Corrente ([39], [54])	31
3.2	Apresentação do Modelo.....	34
3.2.1	Inicialização do Processo Iterativo	34
3.2.2	Processo Iterativo.....	37

3.2.3	Algoritmo de Solução	40
3.3	Validação da Metodologia Proposta	40
3.3.1	Processo de Simulação	40
3.4	Aplicação Prática.....	42
3.4.1	Validação dos Resultados	52
3.4.2	Análise dos Resultados	58
4	RESULTADOS	59
4.1	Introdução.....	59
4.2	Sistema IEEE 14 Barras	60
4.3	Sistema IEEE 30 Barras	69
4.4	Testes Complementares	80
4.4.1	Avaliação do Comportamento das Aritméticas próximo ao Ponto de Máximo Carregamento (PMC)	80
4.4.2	Avaliação do Intervalo de Solução Inicial	81
5	CONCLUSÃO.....	88
5.1	Considerações Finais.....	88
5.2	Proposta para Trabalhos Futuros.....	89
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICE A OPERAÇÕES INTERVALARES	95
A.1	Matrizes Intervalares	95
A.1.1	Norma, Diâmetro e Ponto Médio de uma Matriz Intervalar	95
A.1.2	Inversa de uma Matriz Intervalar	96
	APÊNDICE B MÉTODO DE NEWTON INTERVALAR.....	98
B.1	Desenvolvimento do Método de Newton Intervalar.....	98
B.2	Aplicações Práticas do Método de Newton	99
B.2.1	Aplicação 1	99
B.2.2	Aplicação 2	101
B.2.3	Aplicação 3	103
	APÊNDICE C MÉTODO DE KRAWCZYK	106
C.1	Aplicações Práticas do Método de Krawczyk	107
C.1.1	Aplicação 1	107
C.1.2	Aplicação 2	109
C.1.3	Aplicação 3	111

APÊNDICE D DERIVADAS DAS EQUAÇÕES DAS VARIÁVEIS DEPENDENTES FUNCIONAIS [54]	115
D.1 Cálculo do Fluxo de Potência nas Linhas [58]	115
D.2 Cálculo da Geração Ativa e Reativa [58]	117
D.3 Cálculo das Perdas [58].....	118
APÊNDICE E SISTEMA IEEE 14 BARRAS	120
APÊNDICE F SISTEMA IEEE 30 BARRAS	123

1 INTRODUÇÃO

A avaliação do desempenho das redes de energia elétrica em condições de regime permanente senoidal é de grande importância, tanto na operação em tempo real do sistema quanto no planejamento da operação e expansão. “O cálculo do fluxo de carga (ou fluxo de potência) em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de interesse” [1]. A modelagem do sistema é realizada, em geral, de maneira estática. Portanto, a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas, que podem ser expressas em termos das coordenadas polares ou retangulares da tensão.

No cálculo convencional do fluxo de potência, considera-se que as demandas de potência ativa e reativa nas barras não sofrem alterações, sendo tratadas como variáveis determinísticas. Desse modo, as tensões complexas nas barras, os fluxos de potência nas linhas e as perdas são calculadas como valores únicos para um dado perfil de geração e carga. Contudo, existem muitas incertezas associadas aos dados dos sistemas elétricos de potência, como [2]: mudanças nas condições de operação devido a variações nas cargas/geração em função da demanda solicitada pelos consumidores; alterações na topologia; inserção de compensação em derivação, diferentes condições de distúrbios ou de faltas; incertezas provocadas pelo mercado de energia; informações imprecisas fornecidas pelos operadores envolvidos no planejamento, administração, operação e controle de sistemas de potência; entre outros fatores.

Apesar da existência dessas imprecisões, é citado em [3] que a alternativa comumente aplicada na avaliação dos sistemas de potência baseia-se no conhecimento e na experiência dos operadores, os quais fazem estimativas dos dados do sistema, de modo que possam ser considerados como conhecidos de forma precisa e, assim, aplicados aos chamados métodos determinísticos (convencionais) nas simulações de fluxo de potência. Os resultados dessas simulações fornecem então a operação instantânea do sistema, que é válida somente para as condições de operação consideradas, já que na prática o sistema é dinâmico, ou seja, passa por constantes alterações ao longo do tempo.

A partir das informações citadas, é possível observar que o cálculo do fluxo de potência determinístico não condiz com a realidade do sistema de potência. Para prever todos

os possíveis pontos de operação, seria necessário realizar um conjunto exaustivo de estudos, que abrangesse todas as combinações possíveis dessas diversas variações a que o sistema está sujeito. Isso resultaria num elevado esforço computacional e em resultados de difícil parecer conclusivo, caracterizando-se como uma prática não trivial tanto do ponto de vista computacional, quanto do ponto de vista de análise e síntese de resultados.

Neste cenário, é mais eficiente aplicar métodos que permitam o tratamento e inclusão de incertezas nas simulações dos problemas de fluxo de potência, de forma que as gerações e cargas sejam passíveis de variação, sendo, portanto, representadas por uma faixa de possíveis valores, o que permite uma avaliação dos resultados muito mais realista.

Dentre as diversas ferramentas que incorporam as incertezas presentes nos dados de entrada, os métodos mais citados na literatura levam em consideração três abordagens distintas: modelagem probabilística, métodos baseados na teoria dos conjuntos *Fuzzy* e Matemática Intervalar.

A modelagem probabilística surgiu na década de 70, sendo apresentada pela primeira vez em 1974 por Borkowska [4]. De modo geral, o fluxo de potência probabilístico [5]-[14] é uma técnica que reconhece a natureza probabilística dos parâmetros de entrada e leva em conta as incertezas e as variações aleatórias de geração e carga. Contudo, por se basear em repetições de eventos ou em dados experimentais, torna-se incapaz de representar tais informações integralmente. Como pode ser verificado na literatura, diversas formulações foram apresentadas e discutidas para implementar esta técnica, que, em sua grande maioria, utiliza um modelo linear para a representação das equações de fluxo de potência.

Na modelagem baseada na teoria dos conjuntos *Fuzzy* [15]-[20], as cargas e gerações são consideradas como números *Fuzzy* e os resultados são obtidos como distribuições de possibilidade para os valores de ângulos de tensão, módulos de tensão, fluxos, perdas e gerações. Os cálculos envolvidos no fluxo de potência *Fuzzy* são considerados mais simples que no caso probabilístico, no entanto, ainda há dificuldades de aplicação no modelo completo dos sistemas. Com isso, modelos linearizados são geralmente utilizados e os resultados obtidos também são aproximados.

Por fim, a modelagem do fluxo de potência por matemática intervalar surgiu na década de 90, através do trabalho proposto pelos pesquisadores Fernando L. Alvarado e Zian Wang [21]. Com a utilização da aritmética intervalar, tornou-se possível representar intervalos de variação das demandas e gerações e obter, através de um fluxo de potência intervalar [22]-

[26], o perfil das tensões nodais, as distribuições de fluxo de potência nos ramos e as perdas também na forma intervalar. Assim, pode-se realizar uma análise detalhada e completa do comportamento da rede frente às variações em estudo.

Um novo ramo da matemática intervalar, conhecido como aritmética afim, vem ganhando destaque na literatura. É um modelo melhorado para análise numérica de auto-validação, no qual as quantidades de interesse são representadas como combinações afim de certas variáveis primitivas que representam as fontes de incerteza nos dados ou aproximações feitas durante o cálculo [27]-[34].

1.1 Breve Revisão Bibliográfica: Matemática Intervalar Aplicada ao Problema de Fluxo de Potência

O primeiro trabalho encontrado na literatura [21] aplica os conceitos da matemática intervalar na resolução do problema de fluxo de potência. Os resultados são obtidos através de três métodos (fluxo de potência intervalar, simulação de Monte Carlo e fluxo de potência probabilístico), considerando incertezas nos dados de demanda do sistema. No fluxo de potência intervalar, é utilizado o operador de Newton para resolução do sistema de equações não lineares e, para cada iteração do método de Newton, o método de Gauss-Seidel é usado para resolver as equações intervalares lineares. Na simulação de Monte Carlo, mil diferentes valores de injeções de potência são selecionados dentro do intervalo especificado e para cada um desses valores é executado um fluxo de potência convencional. No método de fluxo de potência probabilístico, uma função de distribuição de probabilidade normal é utilizada para modelar as injeções de potência do sistema. Os resultados mostram que o desvio entre os métodos é bem pequeno, com uma vantagem em relação ao ganho computacional para o método intervalar.

A referência [22] propõe uma técnica de análise de fluxo de potência, baseada na aritmética intervalar, para sistemas de distribuição radiais equilibrados, nos quais são consideradas incertezas nos parâmetros das cargas. O método de cálculo aplicado é *Backward/Forward Sweep* e as condições iniciais para as tensões nodais são admitidas como *flat start*. Os resultados são comparados com aqueles obtidos através da repetição das simulações do fluxo de potência determinístico.

A referência [23] propõe um método para a solução do problema do fluxo de potência em redes de energia elétrica nos quais os dados referentes à carga são incertos, devido aos erros de medição nos instrumentos utilizados nas subestações. Para manipular estas incertezas, técnicas da Matemática Intervalar são aplicadas. O algoritmo utiliza a versão intervalar do método de Newton para a solução do sistema de equações não-lineares geradas pelo problema. A implementação computacional é realizada em ambiente MATLAB usando a toolbox INTLAB. Para verificar o desempenho do método proposto, o algoritmo é aplicado a sistemas de energia elétrica hipotéticos. O artigo apresenta os resultados obtidos para um sistema de três barras.

A referência [24] propõe uma modelagem do fluxo de potência através da aritmética intervalar utilizando a biblioteca C-XSC para a implementação computacional. As equações de potência são representadas na forma de coordenadas retangulares e o método de Krawczyk é utilizado para resolução do fluxo de potência intervalar. Na validação do método proposto, resultados para um sistema teste do IEEE e um sistema real representando a região Sul e Sudeste do Brasil são apresentados. Um comparativo de resultados obtidos com INTLAB, para o ambiente MATLAB, também é realizado.

Na referência [25], a aritmética intervalar é aplicada na resolução do problema de fluxo de potência via equações de injeção de corrente. São consideradas incertezas nas demandas do sistema e nos parâmetros de linha. O método de Krawczyk é utilizado na solução das equações não-lineares e a implementação computacional é feita no ambiente MATLAB utilizando a ferramenta INTLAB. A simulação de Monte Carlo é utilizada para validar a metodologia proposta.

Na referência [26], a aritmética intervalar é aplicada no cálculo do ponto de máximo carregamento em sistemas elétricos de potência considerando a incerteza nos dados das cargas. O sistema de equações não lineares é solucionado usando o método de Krawczyk e a implementação computacional é realizada em ambiente MATLAB utilizando a ferramenta INTLAB. A simulação de Monte Carlo é utilizada para validar a metodologia.

Na referência [27], um método de computação numérica, denominado pelos autores de aritmética afim (AA), é descrito. O modelo é similar à norma de aritmética intervalar, na medida em que controla automaticamente os erros de arredondamento e truncamento para cada valor calculado. Contudo, uma vez que considera as correlações entre os operandos e subfórmulas, a AA é capaz de fornecer limites mais estreitos para as quantidades computadas,

com erros que são aproximadamente quadráticos na incerteza das variáveis de entrada. São descritas aplicações de AA para problemas de computação gráfica.

A referência [28] apresenta uma visão geral sobre o campo de valores numéricos de auto-validação, que são modelos computacionais em que os resultados aproximados são fornecidos automaticamente com limites de erro garantidos. O foco do trabalho, em particular, é apresentar as principais características da aritmética intervalar e da aritmética afim.

A referência [29] apresenta um método baseado na aritmética afim para representação das incertezas presentes nos dados de geração e carga. Os valores centrais das variáveis de estado são determinados através da solução do problema de fluxo de potência convencional para os valores nominais de carga e geração (sem a consideração das incertezas). Os desvios parciais da forma afim são definidos a partir das sensibilidades das variáveis de estado em função das injeções de potência ativa e reativa nominais. As incertezas relacionadas à injeção de potência são determinadas a partir da solução de um problema de otimização linear. Os resultados obtidos são comparados com a aritmética intervalar e com a simulação de Monte Carlo.

A referência [30] propõe um método para solucionar o problema do fluxo de potência estocástico baseado em aritmética afim. Um modelo baseado em otimização do problema do fluxo de potência, que utiliza condições complementares para representar de forma apropriada os controles de tensão nas barras de geração, é utilizado para resolver o problema do fluxo de potência estocástico, de modo a obter os intervalos operacionais para as variáveis do fluxo de potência. A representação das incertezas nas demandas de potência ativa e reativa é baseada na aritmética afim. Os resultados obtidos são comparados com a simulação de Monte Carlo.

A referência [31] apresenta uma estrutura para resolver problemas de fluxo de potência cujos dados de entrada são especificados dentro de intervalos compactos reais. Os limites do intervalo de confiança são calculados para o problema de fluxo de potência, que é representado como um modelo de otimização com restrições complementares para representar adequadamente os controles de tensão em barras de geração, incluindo limites de potência reativa e processos de reestabelecimento de tensão. É demonstrado que os limites inferiores e superiores das soluções do fluxo de potência podem ser obtidos através da resolução de dois problemas de otimização. Vários resultados numéricos são apresentados e discutidos, demonstrando a eficácia do método proposto.

A referência [32] apresenta um método baseado em aritmética afim (AA) para a avaliação da estabilidade de tensão em sistemas de potência, considerando as incertezas associadas às condições de operação, que podem ser atribuídas a fontes de geração intermitentes, tais como eólica e solar. O método proposto reduz a carga computacional quando comparado com a simulação de Monte Carlo, e também melhora a precisão em relação a algumas abordagens analíticas. O método proposto é testado usando dois estudos de caso: em primeiro lugar, um sistema teste de 5 barras é usado para ilustrar, em detalhes, a técnica proposta, e, posteriormente, um sistema teste de 2383 barras é utilizado para demonstrar sua aplicação prática. Os resultados são comparados com aqueles obtidos usando simulações de Monte Carlo para verificar a exatidão e a carga computacional do método proposto baseado em aritmética afim.

A referência [33] propõe um método baseado na aritmética afim para solucionar o problema do fluxo de potência ótimo com incertezas. Dessa forma, todas as variáveis de estado e de controle são tratadas de forma afim. O método proposto é usado para determinar as margens de operação de geradores térmicos em sistemas com incertezas no despacho de usinas solares e eólicas. A validação do método proposto é feita em comparação com a simulação de Monte Carlo.

A referência [34] propõe um modelo de fluxo de potência trifásico desequilibrado *Forward-Backward Sweep* baseado na aritmética afim para estudar o impacto das incertezas em sistemas de distribuição trifásicos desequilibrados. Um índice de influência relativa das variáveis de incerteza nos resultados é proposto, para quantificar o impacto dos fatores individuais de incerteza no fluxo de potência e tensão nas barras.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho consiste na modelagem de um método de solução do fluxo de potência na forma intervalar, utilizando a aritmética afim, considerando incertezas nos dados de geração e carga. Uma abordagem de solução de fluxo de potência intervalar, baseada nas equações básicas de corrente expressas em termos das coordenadas retangulares das tensões nas barras, é desenvolvida e apresentada.

A partir dos resultados intervalares obtidos pelo fluxo de potência para módulos das tensões e ângulos de fase, são calculados, também na forma intervalar, as gerações de

potência ativa e reativa, fluxos e perdas de potência ativa e reativa nas linhas. Durante o cálculo do fluxo de potência, são considerados os limites de potência reativa nas barras PV.

O sistema de equações intervalar não-linear resultante é resolvido pelo método de Krawczyk [35]. A metodologia proposta é implementada em ambiente MATLAB usando a toolbox INTLAB [36], que realiza todas as operações afim. A toolbox INTLAB, desenvolvida pela Hamburg University of Technology na Alemanha, só aceita a representação na forma afim para números reais, além de não realizar a inversão de matrizes na forma afim. As divisões são permitidas apenas por denominadores escalares. A aferição dos resultados intervalares, calculados pela aritmética afim, é feita através da simulação de Monte Carlo.

A contribuição do trabalho, portanto, é desenvolver uma ferramenta adicional ao estudo do problema de fluxo de potência, sujeito às incertezas nos dados de geração ativa das barras PV e nos dados de demanda ativa e reativa nas barras. Com tal ferramenta, o operador do sistema de energia elétrica tem conhecimento das faixas de valores que todas as variáveis associadas ao fluxo de potência podem assumir, o que lhe fornece plenas condições de tomar as ações e medidas mais corretas visando ao bom desempenho do sistema.

Dois sistemas teste do IEEE (14 e 30 barras) são utilizados na simulação e validação dos modelos. De forma a avaliar o desempenho da aritmética afim, também são apresentados os resultados obtidos ao se aplicar a aritmética intervalar ordinária na resolução destes sistemas.

1.3 Publicações

Durante o desenvolvimento da pesquisa relacionada a esta dissertação, o artigo “Uma Nova Metodologia de Fluxo de Potência Utilizando a Matemática Intervalar” foi apresentado no XI Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission “Bioenergy for Electricity Generation” and “Ecological Issues in Power Plants.” CLAGTEE 2015.

1.4 Estrutura do Trabalho

O trabalho está dividido em cinco capítulos e seis apêndices, os quais estão descritos a seguir.

O Capítulo 2 apresenta os principais conceitos e definições básicas relacionadas à aritmética intervalar e à aritmética afim.

O Capítulo 3 apresenta as formulações dos fluxos de potência determinístico e intervalar via equações de injeção de corrente, bem como o método da simulação de Monte Carlo.

O Capítulo 4 apresenta os resultados para dois sistemas elétricos, com análises e explicações sobre os resultados obtidos.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões sobre este trabalho e propõe possíveis estudos futuros.

O Apêndice A apresenta alguns conceitos e definições básicas relacionadas às operações intervalares.

O Apêndice B apresenta o método de Newton Intervalar.

O Apêndice C apresenta o método de Krawczyk Intervalar.

O Apêndice D apresenta as relações matemáticas referentes às variáveis dependentes funcionais expressas em termos das coordenadas retangulares das tensões nas barras.

O Apêndice E apresenta os dados de barra e de linha do sistema IEEE 14 barras.

O Apêndice F apresenta os dados de barra e de linha do sistema IEEE 30 barras.

2 MATEMÁTICA INTERVALAR

2.1 Aproximações Computacionais

Diversas aplicações atuais envolvem a utilização de números que não podem ser representados por uma quantidade exata. Um exemplo trivial é quando uma operação aritmética resulta num número irracional. Qualquer arredondamento ou truncamento acarreta em erros que se propagam ao longo das operações matemáticas realizadas.

Grande parte dos problemas matemáticos é resolvido por meio de uma rotina de cálculo executada em alguma ferramenta computacional, onde os números são representados em aritmética de ponto flutuante (binário ou decimal). Os números em pontos flutuantes apresentam distribuição não uniforme, sendo dispostos em escala logarítmica. Para a realização de cálculos, o sistema computacional converte a entrada decimal em um número binário. Contudo, a menos que este valor possa ser computado como uma fração cujo denominador seja representado como potência de 2, a sua conversão não é realizada de modo exato. Portanto, o número convertido pode ser maior ou menor que o correspondente número decimal.

Uma vez que nem todo número real pode ser representado em ponto flutuante, para qualquer número real, que ocupe uma posição entre dois números em ponto flutuante, existe a necessidade de se escolher um desses dois números adjacentes, em ponto flutuante, para representá-lo. Essa escolha é conhecida como arredondamento e o erro cometido ao efetuar-la é chamado de erro de arredondamento [28]. Erro pode ser entendido como a diferença entre o valor computado e o valor real da quantidade correspondente.

Como não é possível representar com precisão números fracionários em aritmética de ponto flutuante, existe um erro intrínseco associado à sua utilização. Já que o sistema numérico flutuante permite representar apenas um conjunto finito de números, podem ocorrer os fenômenos de *overflow* ou *underflow*. O primeiro ocorre, de acordo com [28], quando números reais são muito grandes em valores absolutos para serem representados, enquanto o segundo ocorre quando os números reais são muito pequenos em valor absoluto.

Existem ainda as fontes de erro externas, como no caso da aquisição de dados por meio de equipamentos de medição, onde as entradas podem ter sido contaminadas por erro de

medição ou perda de dados, fazendo com que haja imprecisão em muitos dos valores iniciais de um problema.

Diante desse cenário, surgiram técnicas de análises intervalares do tipo computação de auto-validação, também chamadas de verificação automática dos resultados, como a aritmética intervalar [37]-[38] e a aritmética afim [27]. Estas técnicas buscam fazer cálculos dentro de um limite inferior e superior para a quantidade computada. Assim, o resultado encontrado também é dado na forma intervalar, com a garantia de que o valor exato está contemplado no intervalo. Na aritmética intervalar, após a realização de determinado cálculo, há uma convenção em se arredondar o limite inferior para baixo e o limite superior para cima, de modo a garantir que o resultado correto esteja dentro dos limites encontrados. Este procedimento não pode ser adotado para a aritmética afim.

A análise intervalar utiliza intervalos fechados para representar as grandezas utilizadas. Contudo, é importante ressaltar que o grau de satisfação da solução é diretamente dependente do diâmetro do intervalo obtido.

Um fato curioso de ser comentado, e apresentado em [28], é que a repetição de um cálculo com aritmética de alta precisão e a obtenção de valores bem próximos não significa necessariamente que o mesmo esteja correto. Pode acontecer do número não poder ser representado de maneira exata em aritmética de ponto flutuante, ainda que seja utilizado um vasto número de casas decimais. Desse modo, é muito difícil estabelecer o número de casas decimais que devem ser computadas, de forma a garantir a precisão requerida nos resultados.

2.2 Fundamentos da Aritmética Intervalar Ordinária

A aritmética intervalar é um modelo numérico simples e eficiente. Também conhecida como análise intervalar, é um modelo baseado em faixas para computação numérica onde cada quantidade real x é representada por um intervalo \bar{x} de números em pontos flutuantes. Os intervalos são adicionados, subtraídos e multiplicados, de tal modo que cada intervalo computado \bar{x} contém o valor desconhecido da correspondente quantidade real x [28].

2.2.1 Conceitos Básicos

Um intervalo fechado $[a, b]$ corresponde a um conjunto de números reais dados por:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\} \quad (2.1)$$

Para que dois intervalos $X = [\underline{X}, \bar{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ sejam iguais, obrigatoriamente, deve-se ter $\underline{X} = \underline{Y}$ e $\bar{X} = \bar{Y}$.

Um intervalo pode ainda ser degenerado, desde que seus limites inferior e superior sejam iguais. Dessa forma, um número real x pode ser representado como um intervalo degenerado: $x = [x, x]$.

2.2.1.1 Interseção, União e União Convexa

Dados $X = [\underline{X}, \bar{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$, a interseção destes intervalos pode ser definida como:

$$X \cap Y = [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\bar{X}, \bar{Y}\}] \quad (2.2)$$

Contudo, caso $\bar{Y} < \underline{X}$ ou $\bar{X} < \underline{Y}$ diz-se que a interseção entre os intervalos é vazia, ou seja, não há pontos em comum, sendo representada por:

$$X \cap Y = \emptyset \quad (2.3)$$

A união destes mesmos conjuntos X e Y pode ser definida por:

$$X \cup Y = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\bar{X}, \bar{Y}\}] \text{ para } X \cap Y \neq \emptyset \quad (2.4)$$

Geralmente, a união de dois intervalos quaisquer não é um intervalo único. Contudo, pode-se usar em computações intervalares a união convexa, que é o menor intervalo que contém a união de ambos intervalos, definido por:

$$X \underline{\cup} Y = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\bar{X}, \bar{Y}\}] \quad (2.5)$$

Sabe-se também que para quaisquer intervalos X e Y , aplica-se:

$$X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y \quad (2.6)$$

Ainda que informações sejam perdidas com a utilização da união convexa para a representação da união de intervalos disjuntos, isto não é crítico e apresenta-se como a maneira mais fácil de trabalhar computacionalmente.

2.2.1.2 Diâmetro, Raio, Ponto Médio e Valor Absoluto de um Intervalo

O diâmetro de um intervalo $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ pode ser definido por:

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X} \quad (2.7)$$

O raio de um intervalo $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ pode ser definido por:

$$r(X) = \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X}) \quad (2.8)$$

o qual será zero se, e somente se, o intervalo é vazio ou contém um único ponto.

O ponto médio de X é dado por:

$$m(X) = \frac{1}{2}(\overline{X} + \underline{X}) \quad (2.9)$$

Já o valor absoluto de X ($|X|$) consiste no valor absoluto máximo dos limites do intervalo que o definem:

$$|X| = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\} \quad (2.10)$$

2.2.2 Operações de Aritmética Intervalar (AI)

De modo geral, as quatro operações fundamentais entre conjuntos são descritas por:

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X, y \in Y\} \quad (2.11)$$

onde \odot representa qualquer uma das operações fundamentais (+, -, ·, /), $x \in X$ significa que $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ e $y \in Y$ significa que $\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$.

Então, as operações aritméticas entre intervalos considerando $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ podem ser realizadas da seguinte forma:

- Adição

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}; \overline{X} + \overline{Y}] \quad (2.12)$$

Para ilustrar, se $X = [1; 2]$ e $Y = [3; 7]$, então $X + Y = [1 + 3; 2 + 7] = [4; 9]$.

- Subtração

Primeiramente define-se o pseudo inverso aditivo por:

$$-X = [-\overline{X}; -\underline{X}] \quad (2.13)$$

Para ilustrar, se $X = [-1; 2]$ então $-X = [-2; -(-1)] = [-2; 1]$.

Com isso, a subtração é definida por:

$$X - Y = [\underline{X} - \overline{Y}; \overline{X} - \underline{Y}] \quad (2.14)$$

Para ilustrar, se $X = [-1; 7]$ e $Y = [2; 9]$, então $X - Y = [-1 - 9; 7 - 2] = [-10; 5]$.

É importante ressaltar que a expressão intervalar $X - X$ não resulta em zero, uma vez que é computado o conjunto de todas as diferenças reais $x - y$ quando x e y são independentes ao longo do intervalo fechado $X = [\underline{X}; \overline{X}]$.

Para ilustrar, se $X = [-1; 3]$ então $X - X = [-1 - 3; 3 - (-1)] = [-4; 4]$.

- Multiplicação

$$X \cdot Y = [\min S; \max S], \text{ onde } S = \{\underline{X} \cdot \underline{Y}, \underline{X} \cdot \overline{Y}, \overline{X} \cdot \underline{Y}, \overline{X} \cdot \overline{Y}\} \quad (2.15)$$

Para ilustrar, se $X = [-2; 5]$ e $Y = [3; 6]$, então: $S = \{-6; -12; 15; 30\}$. Logo, $X \cdot Y = \{\min S; \max S\} = [-12; 30]$.

- Divisão

Primeiramente, se $0 \notin X$, define-se o pseudo inverso multiplicativo por:

$$X^{-1} = \frac{1}{X} = \left[\frac{1}{\overline{X}}; \frac{1}{\underline{X}} \right] \quad (2.16)$$

Para ilustrar, se $X = [2 ; 5]$ então $X^{-1} = [\frac{1}{5} ; \frac{1}{2}]$.

Com isso, a divisão é definida por:

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \left(\frac{1}{Y}\right) \quad (2.17)$$

onde:

$$\frac{1}{Y} = \left\{y : \frac{1}{y} \in Y\right\} = [1/\bar{Y} ; 1/\underline{Y}] \quad (2.18)$$

assumindo que $0 \notin Y$.

Portanto, se $X = [3 ; 5]$ e $Y = [2 ; 4]$, então $X/Y = X \cdot \left(\frac{1}{Y}\right) = [3 ; 5] \cdot \left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$. Nesse ponto, $S = \{3/4 ; 3/2 ; 5/4 ; 5/2\}$. Logo, $X \cdot (1/Y) = \{\min S ; \max S\} = [3/4 ; 5/2]$.

No caso da solução de equações do tipo $ax = b$, onde os coeficientes a e b são conhecidos dentro dos limites de certos intervalos A e B , respectivamente, não se pode afirmar que $A * \left(\frac{B}{A}\right) = B$.

Outra questão relevante é que duas expressões equivalentes em aritmética ordinária podem não ser equivalentes em aritmética intervalar.

2.2.3 Propriedades Algébricas da Aritmética Intervalar

2.2.3.1 Comutatividade e Associatividade

As operações de adição e multiplicação intervalares são comutativas e associativas para quaisquer três intervalos X, Y e Z :

$$X + Y = Y + X \quad (2.19)$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z \quad (2.20)$$

$$XY = YX \quad (2.21)$$

$$X(YZ) = (XY)Z \quad (2.22)$$

2.2.3.2 Elementos Neutros da Adição e da Multiplicação

Os intervalos degenerados 0 e 1 são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação nos sistemas intervalares para qualquer X :

$$0 + X = X + 0 = X \quad (2.23)$$

$$1 \cdot X = X \cdot 1 = X \quad (2.24)$$

$$0 \cdot X = X \cdot 0 = 0 \quad (2.25)$$

2.2.3.3 Elementos Inversos

Ao se tratar de aritmética intervalar, não existem elementos inversos na adição nem na multiplicação, exceto para intervalos degenerados. Porém é sempre possível observar que são válidas as inclusões $0 \in (X - X)$ e $1 \in (X/X)$.

$$X + (-X) = [\underline{X}, \overline{X}] + [-\overline{X}, -\underline{X}] \quad (2.26)$$

$$\frac{X}{\underline{X}} = \{[\underline{X}/\overline{X}, \overline{X}/\underline{X}] \text{ se } 0 < \underline{X}\} \quad (2.27)$$

$$\frac{X}{\overline{X}} = \{[\overline{X}/\underline{X}, \underline{X}/\overline{X}] \text{ se } \overline{X} < 0\} \quad (2.28)$$

2.2.3.4 Distributividade

A lei distributiva da aritmética ordinária não é válida para a aritmética intervalar, uma vez que geram resultados distintos. Contudo, a subdistributividade é válida, onde:

$$X(Y + Z) \subseteq XY + XZ \quad (2.29)$$

Caso x seja um número real qualquer ou os intervalos Y e Z sejam todos positivos ou todos negativos torna-se possível aplicar a propriedade distributiva de forma completa:

$$x(Y + Z) = xY + xZ \quad (2.30)$$

$$X(Y + Z) = XY + XZ \text{ desde que } YZ > 0 \quad (2.31)$$

2.2.3.5 Cancelamento

Quando se trata de adição intervalar, garante-se a lei de cancelamento, onde:

$$X + Z = Y + Z \rightarrow X = Y \quad (2.32)$$

Para as demais operações não se pode garantir a propriedade do cancelamento.

2.2.4 Intervalos Simétricos

Um intervalo $X = [\underline{X}, \bar{X}]$ é dito simétrico se $\underline{X} = -\bar{X}$, apresentando ponto médio igual a zero, como por exemplo: $[-1; 1]$ e $[-\pi; \pi]$.

Se X é simétrico, $|X| = 1/2 \cdot w(X)$ e $X = |X|[-1; 1]$.

Então, qualquer intervalo X pode ser expresso como a soma de um número real (intervalo degenerado) e um intervalo simétrico:

$$X = m + W, \text{ onde } m = m(X) \text{ e } W = \frac{1}{2} \cdot w(X) \cdot [-1; 1] \quad (2.33)$$

$$X = [\underline{X}; \bar{X}] = \frac{1}{2} \cdot (\bar{X} + \underline{X}) + \frac{1}{2} \cdot (\bar{X} - \underline{X}) \cdot [-1; 1] \quad (2.34)$$

Para ilustrar, o intervalo $X = [-1; 5]$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} X = m + W &= \frac{1}{2} \cdot [5 + (-1)] + \frac{1}{2} \cdot [5 - (-1)] \cdot [-1; 1] = \frac{1}{2} \cdot (4) + \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot [-1; 1] \\ &= 2 + 3 \cdot [-1; 1] = 2 + [-3; 3] = [-1; 5]. \end{aligned}$$

2.2.5 Funções Intervalares

Em aritmética intervalar, o cálculo da função $f(x) = x^2$ com $x \in \mathbb{R}$ apresenta resultado diferente caso seja computada como $x \cdot x$.

Para $X = [\underline{X}; \bar{X}]$ o conjunto $f(X) = \{x^2; x \in X\}$ pode ser expresso por:

$$f(X) = \begin{cases} [\underline{X}^2; \overline{X}^2] & \text{se } 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \\ [\overline{X}^2; \underline{X}^2] & \text{se } \underline{X} \leq \overline{X} \leq 0 \\ [0; \max\{\underline{X}^2; \overline{X}^2\}] & \text{se } \underline{X} \leq 0 \leq \overline{X} \end{cases} \quad (2.35)$$

Como exemplo, se $X = [-1; 1]$, então $X^2 = [-1; 1]^2 = [0; 1]$ (terceiro caso da equação (2.35)). Por outro lado, $X \cdot X = [-1; 1] \cdot [-1; 1] = [-1; 1]$.

Ocorre uma superestimação para este segundo caso devido ao fenômeno da dependência intervalar. Ou seja, na definição de produto intervalar, é assumido que os valores no primeiro e no segundo fator variam de forma independente, ainda que representem o mesmo intervalo. Essa dependência intervalar deve ser avaliada de forma cuidadosa ao se utilizar computação intervalar, uma vez que as faixas dos intervalos podem ser muito amplas, fazendo com que seus limites divirjam muito do valor real.

2.2.5.1 Uso de Funções Monotônicas

Funções monotônicas são aquelas funções que crescem ou decrescem com o aumento de x , como, por exemplo, as funções exponenciais e logarítmicas. Considerando que x varie através do intervalo $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, então:

$$\exp(X) = [\exp(\underline{X}); \exp(\overline{X})] \quad \text{para } X \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

$$\log(X) = [\log(\underline{X}); \log(\overline{X})] \quad \text{para } X > 0 \quad (2.37)$$

Ao se tratar de funções decrescentes, deve-se atentar para o ordenamento dos limites dos intervalos:

$$\exp(-X) = [\exp(-\overline{X}); \exp(-\underline{X})] \quad \text{para } X \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

É importante observar que algumas funções não monotônicas, como $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, podem se comportar como uma função monotônica quando seu domínio é restringido de forma apropriada. Para o caso citado, desde que o domínio D esteja restrito ao conjunto $D = [-\pi/2; \pi/2]$, a função seno é monotônica crescente, podendo ser representada por:

$$\text{sen}(X) = [(\text{sen } \underline{X}; \text{sen } \overline{X}) \text{ para } X \subseteq [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad (2.39)$$

Entretanto, de modo geral, o seno e o cosseno do intervalo X podem ser definidos, respectivamente, por:

$$\text{sen}(X) = [\min\{\text{sen}(\underline{X}); \text{sen}(\overline{X})\}; \max\{\text{sen}(\underline{X}); \text{sen}(\overline{X})\}] \quad (2.40)$$

$$\text{cos}(X) = [\min\{\text{cos}(\underline{X}); \text{cos}(\overline{X})\}; \max\{\text{cos}(\underline{X}); \text{cos}(\overline{X})\}] \quad (2.41)$$

2.2.6 Extensões Intervalares de Funções de Valor Real

Uma função F é dita uma extensão intervalar de f se, para argumentos intervalares degenerados, F concorda com f , ou seja:

$$F([x, x]) = f(x) \quad (2.42)$$

Contudo, definir uma extensão intervalar para determinada função nem sempre é uma tarefa trivial. Considere, por exemplo, a função abaixo:

$$f(x) = x(1 - x) \quad x \in [0; 1]$$

Que também pode ser representada em aritmética real ordinária por:

$$g(x) = x - x^2 \quad x \in [0; 1]$$

Nesse caso, $f([0; 1]) = g([0; 1]) = [0; \frac{1}{4}]$.

As extensões intervalares de $f(x)$ e $g(x)$ podem ser representadas por:

$$F(x) = X(1 - X) \quad X = [0; 1]$$

$$G(x) = X - X^2 \quad X = [0; 1]$$

Porém, $F([0; 1]) = [0; 1]$ e $G([0; 1]) = [-1; 1]$, ou seja, são diferentes entre si e nenhuma delas mapeia o intervalo $[0; 1]$ no intervalo $[0; \frac{1}{4}]$. Percebe-se que, embora as duas expressões sejam equivalentes em aritmética real, são diferentes em aritmética intervalar. A

razão disso está vinculada à falta das propriedades de distributividade e inversos aditivos e multiplicativos na aritmética intervalar.

2.2.7 O problema da Explosão de Erro

De acordo com [28], a principal deficiência da aritmética intervalar consiste no fato de seus resultados serem muito conservadores, fazendo com que o intervalo computado possa ser muito amplo. Este problema é grave quando os intervalos computados são utilizados como entradas para um próximo estágio em cadeias de computação longa. Pode-se atribuir como causa desse conservadorismo o fato de que os valores desconhecidos dos argumentos podem variar de maneira independente sobre um intervalo dado. Um caso extremo é a avaliação da expressão $x - x$, que não resulta em $[0 ; 0]$ quando avaliada com aritmética intervalar. Isso porque a rotina de subtração não considera que os dois intervalos dados representam a mesma quantidade, uma vez que podem denotar duas quantidades independentes com o mesmo intervalo de variação.

De forma a evitar a explosão de erro, deve-se tentar minimizar o número de ocorrências de uma variável em determinada expressão, uma vez que isso resulta em estimativas mais estreitas para a faixa. Segundo [28], se cada variável ocorre somente uma vez, então a faixa estimada produzida pela aritmética intervalar é exata.

2.3 Fundamentos da Aritmética Intervalar Afim

O modelo de aritmética afim é mais caro e complexo que a aritmética intervalar ordinária, porém fornece limites mais estreitos para as quantidades computadas, com erros que são aproximadamente quadráticos na incerteza das variáveis de entrada. Portanto, deve ser utilizada em aplicações onde se requer que os resultados sejam melhores que os obtidos com aritmética intervalar, como, por exemplo, em análises numéricas, computação gráfica, modelo geométrico e otimização global, de forma que o custo adicional seja compensado pela sua mais alta precisão.

Em aritmética afim, a quantidade x , parcialmente desconhecida, é representada por um polinômio de primeiro grau na forma afim \hat{x} [28]:

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \quad (2.43)$$

Os coeficientes x_i , definidos como números finitos em pontos flutuantes, fornecem a magnitude de cada componente. ε_i são variáveis reais simbólicas cujos valores, ainda que desconhecidos, são considerados como pertencentes ao intervalo $\mathbf{U} = [-1; +1]$. Cada ε_i representa um componente independente da incerteza total da quantidade x . A variável x_0 é definida como o valor central da forma afim \hat{x} , os coeficientes x_i são desvios parciais e ε_i são símbolos de ruído.

As fontes de incerteza podem ser internas ou externas. As primeiras são originadas pela aritmética de arredondamento, truncamento de séries, aproximação de funções e outros erros cometidos na computação de \hat{x} . As últimas são oriundas principalmente de erros na medida original, indeterminação ou aproximação numérica que afeta alguma quantidade na entrada.

Cada forma afim pode ser convertida para uma forma intervalar, adicionando ou subtraindo, a partir do valor central x_0 , o somatório dos valores absolutos de todos os desvios parciais, a fim de determinar os limites inferior e superior do intervalo, como segue [33]:

$$[\bar{x}] = \left[x_0 - \sum_i |x_i| ; x_0 + \sum_i |x_i| \right] \quad (2.44)$$

onde $\sum_i |x_i|$ é chamado de desvio total da forma afim \hat{x} .

2.3.1 O Invariante Fundamental da Aritmética Afim

A semântica das formas afim é formalizada pelo invariante fundamental da aritmética afim:

Em qualquer instante estável em uma computação em aritmética afim, há uma única atribuição de valores de \mathbf{U} para cada uma das variáveis de ruído em uso no momento em que o valor de toda forma afim é feito igual ao correspondente valor da quantidade em computação ideal [28].

Deve-se entender por instante estável qualquer momento em que os algoritmos não estejam realizando uma operação afim.

Existem fórmulas que permitem a conversão de aritmética afim para aritmética intervalar e vice-versa, contudo os dois modelos não são exatamente equivalentes.

2.3.2 Faixa Comum das Formas Afim

No modelo de aritmética afim, o mesmo símbolo de ruído pode contribuir com a incerteza de duas ou mais quantidades computadas (entradas, saídas ou resultados intermediários) decorrente da avaliação de uma expressão [28].

Desse modo, se duas formas afim \hat{x} e \hat{y} compartilham um mesmo símbolo de ruído ε_i , significa que há uma dependência parcial entre as quantidades x e y . A magnitude e o sinal dessa dependência são determinados pelos coeficientes x_i e y_i , onde seus sinais correspondentes definem a direção da correlação.

Para ilustrar, considere as quantidades x e y representadas pelas formas afim [28]:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 10 + 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 && - 1\varepsilon_4 \\ \hat{y} &= 20 - 3\varepsilon_1 && + 1\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4\end{aligned}$$

De (2.44), é possível afirmar que x pertence ao intervalo $\hat{x} = [6 \dots 14]$ e que y pertence ao intervalo $\hat{y} = [12 \dots 28]$. Contudo, como \hat{x} e \hat{y} incluem as mesmas variáveis de ruído ε_1 e ε_4 , com coeficientes diferentes de zero, não são inteiramente independentes um do outro. De fato, o par (x, y) está forçado a pertencer à região cinza escuro de \mathbb{R}^2 , mostrado na Figura 2.1.

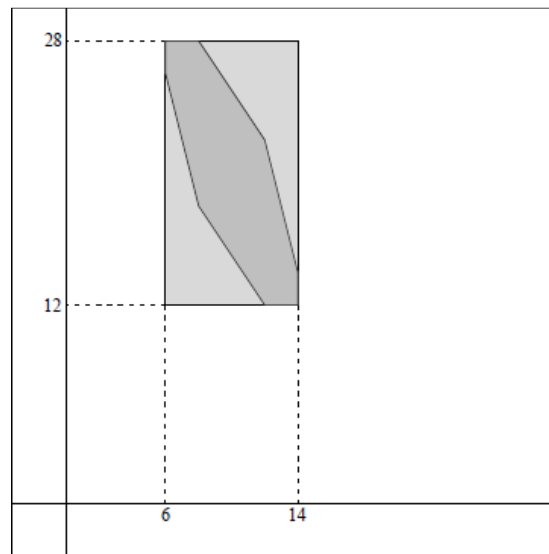


Figura 2.1 - Faixa comum de (x,y) [28]

Obviamente, essa informação de dependência será perdida se as formas afim \hat{x} e \hat{y} forem substituídas pelos intervalos \bar{x} e \bar{y} . Dados de maneira individual, estes intervalos codificam precisamente as mesmas faixas de valores que as formas afim. Dados de maneira conjunta, contudo, apenas informam que o par (x, y) está no retângulo $\bar{x} \times \bar{y} = [6 \dots 14] \times [12 \dots 28]$ mostrado em cinza claro na Figura 2.1 [28].

2.3.3 Operações Afim

Sejam x e y valores definidos por:

$$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i \quad (2.45)$$

$$y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n = y_0 + \sum_{i=1}^n y_i\varepsilon_i \quad (2.46)$$

para alguns valores desconhecidos de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in U^n$.

Seja $z = f(x, y)$:

$$z = (x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n) \quad (2.47)$$

Se a operação f sobre si mesma for uma função afim de seus argumentos x e y , então z pode ser escrita como uma combinação afim de símbolos de ruído ε_i . Para qualquer $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}$,

$$\hat{x} + \hat{y} = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n + y_n)\varepsilon_n \quad (2.48)$$

$$\hat{x} - \hat{y} = (x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n - y_n)\varepsilon_n \quad (2.49)$$

$$\alpha\hat{x} = (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \dots + (\alpha x_n)\varepsilon_n \quad (2.50)$$

$$\hat{x} \pm \zeta = (x_0 \pm \zeta) + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n \quad (2.51)$$

É possível perceber, de acordo com as equações (2.48) a (2.51), que a diferença $\hat{x} - \hat{x}$ entre uma forma afim e ela mesma é zero. A razão disso é que os operandos compartilham os mesmos símbolos de ruído com os mesmos coeficientes, deixando claro que se trata da mesma quantidade. Contudo, quando os operandos não compartilham os mesmos símbolos de

ruído, os resultados obtidos para a adição (equação (2.48)) e subtração de intervalos (equação (2.49)), multiplicação de um intervalo por um escalar (equação (2.50)) e adição ou subtração de um intervalo com um escalar (equação (2.51)) são idênticos aos da aritmética intervalar ordinária.

Em aritmética afim, não há uma direção segura de arredondamento para o desvio parcial z_i . Se a variável de ruído ε_i ocorre em alguma outra forma afim \hat{w} , então qualquer mudança em z_i - em qualquer direção - pode implicar numa diferente correlação entre as quantidades z e w , o que violaria o fundamental invariante da aritmética afim. Portanto, sempre que um coeficiente computado z_i diferir de seu valor por alguma quantidade d , este erro é considerado pela adição de um termo extra $d\varepsilon_r$, onde ε_r é um símbolo de ruído que não ocorre em nenhuma outra forma afim [28].

Uma operação afim deve considerar a possibilidade de operações com $[]$ e \mathbb{R} . Se qualquer coeficiente resulta em *overflow*, \mathbb{R} deve ser retornado como resultado da operação.

2.3.4 Operações Não-afim

Seja z uma função de $f(x, y)$, onde as variáveis x e y são descritas por sua forma afim \hat{x} e \hat{y} . Desse modo, é possível descrever z por meio da fórmula [28]:

$$\begin{aligned} z &= f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n) \\ z &= f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n), \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde f^* é uma função de U^n em \mathbb{R} . Se f^* não é afim, então z não pode ser expresso exatamente como uma combinação afim de símbolos de ruído ε_i . Neste caso, deve-se escolher alguma função afim de ε_i ,

$$f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \dots + z_n\varepsilon_n \tag{2.53}$$

que aproxima $f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ razoavelmente bem sobre o domínio U^n , e então, adicionar um termo extra $z_k\varepsilon_k$ de modo a representar o erro introduzido por esta aproximação. Deste modo:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + z_k\varepsilon_k \\ \hat{z} &= z_0 + z_1\varepsilon_1 + \dots + z_n\varepsilon_n + z_k\varepsilon_k \end{aligned} \tag{2.54}$$

É possível observar que o termo $z_k \varepsilon_k$ representa o resíduo ou erro de aproximação:

$$e^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) - f^a(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n), \quad (2.55)$$

O símbolo de ruído ε_k deve ser distinto de todos os outros símbolos de ruído que já apareceram na mesma computação, e o coeficiente z_k deve ser um limite superior na magnitude absoluta de e^* , isto é:

$$|z_k| \geq \max \{|e^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)| : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in U\} \quad (2.56)$$

A escolha de uma aproximação afim para f^a tem grau de liberdade $n+1$ e envolve muitos objetivos. A precisão dos resultados é um fator importante a ser avaliado, contudo, não é único. Frequentemente se opta por uma solução menos precisa em troca de eficiência, código simplificado ou outros critérios práticos. A forma mais simples e ainda eficiente consiste em se escolher combinações afim das próprias entradas \hat{x} e \hat{y} , isto é:

$$f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \zeta \quad (2.57)$$

que resulta na determinação de apenas 3 parâmetros.

As principais aproximações utilizadas são *Chebyshev (minimax)* e *Min-Range*, que são diferentes métodos de linearização para funções e operações não-lineares. A teoria de aproximação *Chebyshev* é utilizada para minimizar o máximo erro absoluto, apresentando um campo bem desenvolvido com muitos resultados não triviais e vasta literatura. O método de linearização *Min-Range* abrange a verdadeira faixa da função, consistindo numa aproximação mais fácil de computar e que preserva menos informações entre as dependências envolvidas. Contudo, esta perda de informação só se torna relevante para intervalos largos, nos quais a dependência é principalmente não-linear. Ao se tratar de intervalos pequenos, ainda preserva um erro quadrático.

2.3.5 Multiplicação

O produto de formas afim é um polinômio quadrático $f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ em símbolos de ruído. Logo, a função $z = f(x, y) = xy$, dadas as formas afim \hat{x} e \hat{y} para os operandos x e y , pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}
f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) &= \hat{x} \cdot \hat{y} \\
f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) &= \left(x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right) \cdot \left(y_0 + \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i \right) \\
f^*(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) &= x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n (x_0 y_i + y_0 x_i) \varepsilon_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i \right)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

2.3.5.1 Exemplo de Multiplicação

Como ilustração, considere a expressão [28]:

$$z = (10 + x + r) \cdot (10 - x + s)$$

para $x \in [-2, 2]$, $r \in [-1, 1]$ e $s \in [-1, 1]$.

Para realizar a multiplicação afim, o intervalo ordinário é primeiramente convertido para a forma afim. De [28], para um intervalo $\bar{x} = [a, b]$ representando alguma quantidade x em aritmética intervalar, uma forma afim equivalente para a mesma quantidade é dada por $\hat{x} = x_0 + x_k \varepsilon_k$, onde:

$$x_0 = \frac{b+a}{2} \quad e \quad x_k = \frac{b-a}{2}$$

O símbolo de ruído ε_k , desde que o intervalo não tenha nenhuma possível relação entre o valor de x e de outras variáveis, deve ser distinto de todos os outros símbolos de ruído usados até então na mesma computação.

Logo:

$$\hat{x} = 0 + 2\varepsilon_1, \quad \hat{r} = 0 + 1\varepsilon_2, \quad \hat{s} = 0 + 1\varepsilon_3$$

Desse modo:

$$10 + \hat{x} + \hat{r} = 10 + 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2$$

$$10 - \hat{x} + \hat{s} = 10 - 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3$$

$$\hat{z} = (10 + \hat{x} + \hat{r}) \cdot (10 - \hat{x} + \hat{s})$$

$$\hat{z} = 100 + 10\varepsilon_2 + 10\varepsilon_3 + (2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)(-2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)$$

No termo quadrático, cada fator, considerado independentemente, tem uma faixa de $[-3; 3]$. Portanto, uma rápida estimativa para a faixa deste termo é:

$$\bar{Q} = [-(3 \cdot 3); +(3 \cdot 3)] = [-9; 9]$$

Usando esta estimativa, a forma afim para z é dada por:

$$\hat{z} = 100 + 10\varepsilon_2 + 10\varepsilon_3 + 9\varepsilon_4$$

A faixa de z implícita na forma afim é:

$$[100 - 29; 100 + 29] = [71; 129]$$

Uma análise mais precisa, na qual é considerada uma melhor aproximação afim para o termo quadrático \bar{Q} , revela que sua faixa verdadeira, considerando os símbolos de ruído de entrada $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3$ independentes, é $[-9; 1]$; e \hat{z} é $[71; 121]$. A precisão relativa desta computação em aritmética afim é, portanto, $(129 - 71)/(121 - 71) = 1,16$. Em comparação, a norma de aritmética intervalar retorna:

$$[7, 13] \cdot [7, 13] = [49; 169]$$

cuja precisão relativa é $(169 - 49)/(121 - 71) = 2,4$. Em outras palavras, o diâmetro do intervalo obtido pela aritmética intervalar é superior ao dobro do diâmetro do intervalo correto, enquanto o diâmetro do intervalo obtido pela aritmética afim é apenas 16% maior [28].

2.3.6 Divisão Afim

A maneira mais simples de computar a forma afim \hat{z} para o quociente \hat{x}/\hat{y} é simplesmente reescrevê-la como um produto $\hat{x} \cdot (1/\hat{y})$.

3 Aplicação da Matemática Intervalar Afim no Estudo de Fluxo de Potência

3.1 Considerações Iniciais

O objetivo deste capítulo é desenvolver um modelo matemático do fluxo de potência intervalar decorrente da aplicação da matemática intervalar afim às equações básicas do fluxo de potência, via equações de injeção de corrente, escritas em termos das coordenadas retangulares das tensões nas barras.

Primeiramente, um breve histórico sobre o método injeção de corrente será apresentado, mostrando a sua aplicabilidade na resolução de diversos problemas de fluxo de potência.

3.1.1 Breve Histórico sobre o Método Injeção de Corrente

A referência [39] descreve, pela primeira vez, uma formulação esparsa do método de Newton Raphson para a solução do problema de fluxo de potência, compreendendo $2n$ equações de injeção de corrente escritas em coordenadas retangulares das tensões nas barras. A matriz Jacobiana tem a mesma estrutura da matriz admitância nodal ($2n \times 2n$), em que cada ramo da rede é representado por um bloco (2×2). Excetuando-se as barras PV, os blocos (2×2) fora da diagonal da matriz Jacobiana são iguais aos blocos correspondentes da matriz admitância nodal. Os resultados mostram que o método proposto converge para a solução do fluxo de potência substancialmente mais rápido que a formulação convencional do método de Newton, expressa em termos de resíduos de potência e escrita em coordenadas polares das tensões nas barras.

A referência [40] apresenta uma formulação esparsa para a solução de sistemas de potência trifásicos desequilibrados utilizando o método de Newton-Raphson. As equações trifásicas de injeção de corrente são escritas em coordenadas retangulares, resultando num sistema de equações de ordem $6n$. A matriz Jacobiana é composta de blocos de matrizes $6n \times 6n$ e mantém a mesma estrutura da matriz admitância nodal. Sistemas de distribuição

práticos são usados para testar o método e para comparar a sua robustez com o método *Backward/Forward Sweep*.

A referência [41] aborda algumas questões importantes sobre o problema da modelagem do fluxo de potência e análise para sistemas de distribuição. O método de injeção de corrente, baseado na referência trifásica, é brevemente descrito, mostrando sua potencialidade para modelar centrais de cogeração (barras PV ou PQV). A representação de sistemas de subtransmissão e dispositivos de controle FACTS também são apresentados. A técnica proposta mostrou-se mais robusta, convergindo com menos iterações que o método *Backward/Forward Sweep*, principalmente em sistemas muito carregados.

A referência [42] apresenta uma formulação para a solução do fluxo de potência, baseada no método de injeção de corrente utilizando o algoritmo de Newton-Raphson. As equações de injeção de corrente são escritas em coordenadas retangulares das tensões nas barras e em termos de componentes simétricas. Atenção especial é dada na flexibilidade para representação de diferentes cargas PQ e elementos em derivação. A forma utilizada para a representação das barras de geração fornece uma estrutura mais homogênea da matriz Jacobiana.

A referência [43] apresenta um procedimento para a solução do problema de fluxo de potência, utilizando as equações de injeção de corrente escritas em coordenadas retangulares das tensões nas barras. A partir desta formulação, segundo os autores, é possível obter as mesmas características de convergência do fluxo de potência convencional expresso em termos dos resíduos de potência escritos em coordenadas polares das tensões nas barras. Utilizando este método, também é obtida uma formulação aumentada, altamente esparsa, adequada para a incorporação de dispositivos FACTS e controle de qualquer tipo. Os resultados apresentados validam o método proposto.

A referência [44] apresenta um método genérico de representação de dispositivos de controle no problema de fluxo de potência, utilizando uma formulação Newton Raphson esparsa, expressa em termos de equações de injeção de corrente em coordenadas retangulares das tensões nas barras. Outro mérito a se destacar está no fato de que a inclusão das equações referentes aos dispositivos de controle não altera os elementos e a estrutura da matriz Jacobiana original. Desta forma, há grande facilidade e flexibilidade na incorporação e retirada das equações de controle durante o processo iterativo. Além disso, permite a inclusão

de modelagens mais realísticas dos componentes utilizados nos sistemas de potência. Os resultados validam a metodologia proposta.

A referência [45] propõe um estudo do fluxo de potência continuado utilizando a formulação de injeção de corrente em coordenadas retangulares das tensões nas barras. As principais vantagens desta formulação, frente ao método polar convencional, são decorrentes da estrutura e da montagem da matriz Jacobiana, formada basicamente pelos elementos da matriz admitância nodal. As simulações realizadas em diversos sistemas testes, de diferentes portes e características, validam a metodologia proposta e apresentam uma grande redução no esforço computacional. Tendo em vista a importância do fluxo de potência continuado nas áreas de planejamento e de operação, o método proposto constitui-se numa ferramenta de grande valia na análise dos problemas concernentes à estabilidade de tensão dos sistemas elétricos de potência.

A referência [46] descreve uma formulação esparsa ($4n \times 4n$) para a solução do problema de fluxo de potência, composto por $2n$ equações de injeção de corrente escritas em coordenadas retangulares das tensões nas barras, mais o conjunto de equações de controle. Esta formulação tem as mesmas características de convergência do fluxo de potência de Newton convencional, expresso em termos de resíduos de potência escritos em coordenadas polares das tensões nas barras, podendo ainda ser reduzida para uma formulação ($2n \times 2n$) mais as equações de controle. Funções de controle complexas, definidas pelo usuário, podem ser diretamente introduzidas no problema de fluxo de potência. Os resultados apresentados validam o método proposto.

Na referência [47] os autores discorrem sobre a aplicação do Método de Injeção de Corrente a Quatro Condutores – MICQ, cujo objetivo é a representação do quarto condutor (neutro), possibilitando obter de forma direta as tensões e correntes nos condutores de fase e condutor neutro. Tal método possui aplicações tanto para sistemas de distribuição radiais, quanto para sistemas reticulados. A modelagem matemática do sistema consiste em inserir modificações nas equações básicas do Método de Injeção de Corrente Trifásico. O avanço conquistado pelo MICQ foi alcançado com a representação de aterramentos e neutros.

A referência [48] apresenta um método de fluxo de potência de segunda ordem, utilizando equações de injeção de corrente expressas em coordenadas retangulares da tensão nas barras. Os resultados apresentados mostram que o método proposto conduz a uma solução do fluxo de potência de segunda ordem substancialmente mais rápida, quando comparada com

o método convencional expresso em termos dos resíduos de potência escritos em coordenadas retangulares. A fim de avaliar o desempenho do método proposto, diferentes sistemas muito carregados e sobrecarregados, bem como sistemas de distribuição mal condicionados foram testados. Estes resultados mostram a viabilidade de empregar este método como uma ferramenta adicional para estudos de fluxo de potência.

A referência [49] propõe um fator de otimização do tamanho do passo a ser usado em problemas de fluxo de potência por injeção de corrente, para sistemas de distribuição trifásicos desequilibrados. Este fator de otimização melhora o desempenho do processo iterativo, notadamente em nível mais alto de carga e razão R/X. Além disso, também propõe estender o conceito deste fator de otimização para calcular as soluções múltiplas dos fluxos de potência trifásicos desequilibrados. A fim de verificar a eficácia dos métodos propostos, um sistema teste prático de distribuição brasileiro e uma rede de potência mal condicionada são utilizados.

Na referência [50], os autores dão continuidade ao trabalho anterior [47] e apresentam uma formulação para o problema de fluxo de potência, com representação explícita dos condutores neutro e de aterramento. O método de Newton-Raphson é aplicado para resolver o conjunto de equações não-lineares de injeção de corrente usando as coordenadas de fase. O algoritmo proposto pode ser usado para analisar sistemas equilibrados e desequilibrados, malhados ou radiais, com controles e geração distribuída. A eficiência computacional do método proposto é comparada com o método *Backward-Forward Sweep*, mostrando-se muito eficiente e robusto para sistemas de grande porte.

A referência [51] aborda um método para a análise de sistemas elétricos a n -condutores em regime permanente, de modo a representar as características da rede, bem como dos componentes presentes no sistema elétrico de potência. A metodologia, baseada no Método de Injeção de Corrente em coordenadas retangulares, definida diretamente em coordenadas de fase, usa o método de Newton-Raphson no processo de solução. Aplica-se a um vasto campo, incluindo sistemas equilibrados ou não, radiais ou malhados, transmissão, subtransmissão, distribuição ou sistema industrial, incluindo sistemas de grande porte.

A referência [52] apresenta uma implementação direta para o compensador série síncrono estático (SSSC) na análise de fluxo de potência baseado em resíduos de injeção de corrente. O modelo SSSC proposto é implementado sem modificação na matriz Jacobiana de Newton Raphson. O SSSC é representado por impedâncias série e duas injeções de corrente

nos nós terminais. Estas injeções de corrente são calculadas a cada iteração e combinadas com a injeção de corrente equivalente da carga. Esta abordagem é compatível com os resíduos de injeção de corrente do método de fluxo de potência. Também não requer qualquer atualização ou mudanças na matriz Jacobiana. O modelo SSSC proposto é capaz de controlar a potência ativa e reativa em conjunto ou individualmente, sendo validado e testado utilizando os dados IEEE. Os resultados mostram sua eficácia para redes contendo dispositivos SSSC únicos ou múltiplos.

A referência [53] afirma que o fluxo de potência baseado em resíduos de injeção de corrente (MIC) utilizando Newton Raphson é muito eficiente quando todas as barras são do tipo PQ. No entanto, quando existem barras PV, o desempenho do método é afetado. É descrita uma representação para os nós PV, utilizando uma formulação de fluxo de potência híbrida usando resíduos de corrente e potência. As equações de corrente e potência são escritas em coordenadas retangulares das tensões nas barras. A matriz Jacobiana ($2n \times 2n$) tem a mesma estrutura da matriz admitância nodal. As equações para as barras PQ são desenvolvidas com base nos resíduos de corrente, enquanto as equações para as barras PV são baseadas em resíduos de potência. Neste método, apenas é necessário uma equação para cada barra PV. Os resultados iniciais mostram que o algoritmo oferece um bom desempenho quando comparado com o método MIC e com o método convencional Newton Raphson.

3.1.2 Fluxo de Potência via Equações de Injeção de Corrente ([39], [54])

De forma a relembrar os principais conceitos e equações, uma rápida revisão dessa técnica empregada para a solução do fluxo de potência será apresentada.

3.1.2.1 Representação das barras tipo PQ

Esta formulação utiliza um conjunto de $2n$ equações de injeção de corrente, escritas em coordenadas retangulares das tensões. As equações básicas são dadas por [39]:

$$I_{r_k} = \sum_{i \in \Omega_k} (G_{k_i} V_{r_i} - B_{k_i} V_{m_i}) - \frac{V_{r_k} P_k + V_{m_k} Q_k}{V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2} \quad (3.1)$$

$$I_{m_k} = \sum_{i \in \Omega_k} (G_{ki} V_{m_i} + B_{ki} V_{r_i}) - \frac{V_{m_k} P_k - V_{r_k} Q_k}{V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2} \quad (3.2)$$

Linearizando-se as equações (3.1) e (3.2), por intermédio da série de Taylor, obtém-se o seguinte sistema de equações a ser resolvido a cada iteração do método de Newton Raphson:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{m_1} \\ \Delta I_{r_1} \\ \Delta I_{m_2} \\ \Delta I_{r_2} \\ \vdots \\ \Delta I_{m_n} \\ \Delta I_{r_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & G'_{11} & B_{12} & G_{12} & \cdots & B_{1n} & G_{1n} \\ G'_{11} & B'_{11} & G_{12} & -B_{12} & \cdots & G_{1n} & -B_{1n} \\ \hline B_{21} & G_{21} & B'_{22} & G'_{22} & \cdots & B_{2n} & G_{2n} \\ G_{21} & -B_{21} & G'_{22} & B'_{22} & \cdots & G_{2n} & -B_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{n1} & G_{n1} & B_{n2} & G_{n2} & \cdots & B'_{nn} & G'_{nn} \\ G_{n1} & -B_{n1} & G_{n2} & -B_{n2} & \cdots & G''_{nn} & B''_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r_1} \\ \Delta V_{m_1} \\ \Delta V_{r_2} \\ \Delta V_{m_2} \\ \vdots \\ \Delta V_{r_n} \\ \Delta V_{m_n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde, de [39]:

$$B'_{kk} = \frac{\partial I_{m_k}}{\partial V_{r_k}} = B_{kk} - a_k \quad (3.4)$$

$$G'_{kk} = \frac{\partial I_{m_k}}{\partial V_{m_k}} = G_{kk} - b_k \quad (3.5)$$

$$G''_{kk} = \frac{\partial I_{r_k}}{\partial V_{r_k}} = G_{kk} - c_k \quad (3.6)$$

$$B''_{kk} = \frac{\partial I_{r_k}}{\partial V_{m_k}} - B_{kk} - d_k \quad (3.7)$$

Os parâmetros a_k , b_k , c_k e d_k são calculados em função do modelo de carga adotado. Para modelo de carga do tipo potência constante, tais parâmetros são dados por [39]:

$$a_k = d_k = \frac{Q_k (V_{r_k}^2 - V_{m_k}^2) - 2V_{r_k} V_{m_k} P_k}{V_k^4} \quad (3.8)$$

$$b_k = -c_k = \frac{P_k (V_{r_k}^2 - V_{m_k}^2) + 2V_{r_k} V_{m_k} Q_k}{V_k^4} \quad (3.9)$$

3.1.2.2 Inclusão das barras tipo PV

Para uma barra do tipo PV, o resíduo de potência reativa é desconhecido, sendo tratado, portanto, como uma nova variável de estado. Com a inserção dessa nova variável, uma equação adicional deve também ser introduzida. A equação (3.10) é utilizada para impor a restrição de tensão em uma barra k , do tipo PV.

$$\Delta V_k^2 = 2V_{r_k} \Delta V_{r_k} + 2V_{m_k} \Delta V_{m_k} \quad (3.10)$$

Assim, o sistema de equações linearizado a ser resolvido a cada iteração do método de Newton-Raphson, considerando-se a barra k do tipo PV, é dado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{m_1} \\ \Delta I_{r_1} \\ \Delta I_{m_2} \\ \Delta I_{r_2} \\ \vdots \\ \Delta I_{m_k} \\ \Delta I_{r_k} \\ \vdots \\ \Delta I_{m_n} \\ \Delta I_{r_n} \\ (\Delta V_k)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & G'_{11} & B_{12} & G_{12} & \cdots & B_{1k} & G_{1k} & \cdots & B_{1n} & G_{1n} & 0 \\ G''_{11} & B''_{11} & G_{12} & -B_{12} & \cdots & G_{1k} & -B_{1k} & \cdots & G_{1n} & -B_{1n} & 0 \\ B_{21} & G_{21} & B'_{22} & G'_{22} & \cdots & B_{2k} & G_{2k} & \cdots & B_{2n} & G_{2n} & 0 \\ G_{21} & -B_{21} & G'_{22} & B'_{22} & \cdots & G_{2k} & -B_{2k} & \cdots & G_{2n} & -B_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{k1} & G_{k1} & B_{k2} & G_{k2} & \cdots & B'_{kk} & G'_{kk} & \cdots & B_{kn} & G_{kn} & \frac{V_k}{V_k^2} \\ G_{k1} & -B_{k1} & G_{k2} & -B_{k2} & \cdots & G''_{kk} & B''_{kk} & \cdots & G_{kn} & -B_{kn} & \frac{-V_{m_k}}{V_k^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & G_{n1} & B_{n2} & G_{n2} & \cdots & B_{nk} & G_{nk} & \cdots & B'_{nn} & G'_{nn} & 0 \\ G_{n1} & -B_{n1} & G_{n2} & -B_{n2} & \cdots & G_{nk} & -B_{nk} & \cdots & G''_{nn} & B''_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2V_{r_k} & 2V_{m_k} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r_1} \\ \Delta V_{m_1} \\ \Delta V_{r_2} \\ \Delta V_{m_2} \\ \vdots \\ \Delta V_k \\ \Delta V_{m_k} \\ \vdots \\ \Delta V_{r_n} \\ \Delta V_{m_n} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A matriz apresentada na equação (3.11) é denominada matriz Jacobiana injeção de corrente (J_i). Conforme pode ser observado, os blocos (2x2) fora da diagonal são constituídos por elementos da matriz admitância nodal, permanecendo constantes durante todo o processo iterativo. Essa é uma das características mais importantes do método de injeção de corrente. Por outro lado, os elementos dos blocos diagonais (2x2) devem ser atualizados a cada iteração, segundo as equações (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7).

3.1.2.3 Atualização das tensões

Após o cálculo dos incrementos das tensões das barras através de (3.11), a atualização das tensões em coordenadas retangulares, em uma iteração genérica, $(h+1)$, é feita conforme as equações (3.12) e (3.13).

$$V_r^{(h+1)} = V_r^{(h)} + \Delta V_r^{(h)} \quad (3.12)$$

$$V_m^{(h+1)} = V_m^{(h)} + \Delta V_m^{(h)} \quad (3.13)$$

3.2 Apresentação do Modelo

Esta seção apresenta a inicialização proposta das variáveis para o fluxo de potência intervalar. Posteriormente, o processo iterativo utilizando o método de Krawczyk e a forma de atualização das variáveis a cada iteração são apresentados. Finalmente, um método para cálculo das variáveis dependentes funcionais (fluxos de potência, perdas, dentre outros) na forma intervalar é apresentado.

Cumpramos ressaltar que a sequência de cálculos descrita no parágrafo anterior foi desenvolvida em [54], utilizando a aritmética intervalar ordinária como meio de obtenção dos intervalos associados tanto às variáveis de estado do fluxo de potência, quanto às variáveis dependentes funcionais. O objetivo básico deste trabalho é readequar toda esta sequência de cálculos, principalmente em termos computacionais, no sentido de utilizar agora a aritmética intervalar afim como modo de geração dos intervalos associados a cada uma das variáveis do fluxo de potência. Tais readequações serão apresentadas no decorrer do trabalho.

3.2.1 Inicialização do Processo Iterativo

Para que o fluxo de potência intervalar possa ser inicializado, primeiramente deve-se executar um fluxo de potência determinístico. Os valores pontuais então encontrados para os módulos da tensão e ângulos de fase são utilizados como ponto médio das formas intervalares. Fica evidente, portanto, que caso não haja convergência no fluxo de potência convencional, o processo intervalar não pode ser executado. A falta de convergência indica que o conjunto de

equações não-lineares não apresenta solução e, nesse caso, é impossível a obtenção de um ponto de operação factível para a rede.

Os valores das demandas intervalares são definidos aplicando-se uma variação percentual nos valores determinísticos dessas variáveis, que serão utilizados como ponto médio do intervalo, da seguinte forma:

$$\hat{P}_{d_k}^i = [P_{d_k}^d \cdot (1 - \alpha_{P_k}), P_{d_k}^d \cdot (1 + \alpha_{P_k})] \quad (3.14)$$

$$\hat{Q}_{d_k}^i = [Q_{d_k}^d \cdot (1 - \alpha_{Q_k}), Q_{d_k}^d \cdot (1 + \alpha_{Q_k})] \quad (3.15)$$

onde α_{P_k} e α_{Q_k} são fatores que indicam, respectivamente, variações de carga ativa e carga reativa.

As equações (3.14) e (3.15) escritas na forma afim, ou seja, em função do valor central x_0 , dos desvios parciais x_i e dos símbolos de ruído ε_i são respectivamente:

$$\hat{P}_{d_k}^i = P_{d_k}^d + (\alpha_{P_k} P_{d_k}^d) \varepsilon_{Pd_i} \quad (3.16)$$

$$\hat{Q}_{d_k}^i = Q_{d_k}^d + (\alpha_{Q_k} Q_{d_k}^d) \varepsilon_{Qd_i} \quad (3.17)$$

Para a inicialização da tensão intervalar, dada uma barra genérica k , os resíduos intervalares de corrente são calculados, conforme as equações (3.18) e (3.19).

$$\Delta \hat{I}_{r_k}^i = I_{r_k}^d - \frac{(\hat{P}_{g_k}^i - \hat{P}_{d_k}^i) \cdot V_{r_k}^d + (\hat{Q}_{g_k}^i - \hat{Q}_{d_k}^i) \cdot V_{m_k}^d}{(V_k^d)^2} \quad (3.18)$$

$$\Delta \hat{I}_{m_k}^i = I_{m_k}^d - \frac{(\hat{P}_{g_k}^i - \hat{P}_{d_k}^i) \cdot V_{r_k}^d - (\hat{Q}_{g_k}^i - \hat{Q}_{d_k}^i) \cdot V_{r_k}^d}{(V_k^d)^2} \quad (3.19)$$

onde V_k é o módulo da tensão. $\Delta \hat{I}_{r_k}^i + j \Delta \hat{I}_{m_k}^i$ é o valor complexo do resíduo intervalar de corrente. $I_{r_k}^d + j I_{m_k}^d$ é o valor complexo da corrente na barra calculado pelas equações (3.20) e (3.21).

$$I_r^d = G \cdot V_r - B \cdot V_m \quad (3.20)$$

$$I_m^d = B \cdot V_r + G \cdot V_m \quad (3.21)$$

Nessa etapa de inicialização, $\hat{P}_{g_k}^i$ é um intervalo com ponto médio no valor determinístico da potência ativa gerada e $\hat{Q}_{g_k}^i$ é um intervalo degenerado com valor igual à potência reativa determinística gerada. A forma afim dessas variáveis pode ser visualizada através das equações (3.22) e (3.23).

$$\hat{P}_{g_k}^i = P_{g_k}^d + (\alpha_{G_k} P_{g_k}^d) \varepsilon_{P_{g_i}} \quad (3.22)$$

$$\hat{Q}_{g_k}^i = Q_{g_k}^d \quad (3.23)$$

Já as equações (3.18) e (3.19) podem ser representadas na forma afim por:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{I}_{r_k}^i &= \left\{ I_{r_k}^d - \frac{[(P_{g_k}^d - P_{d_k}^d) \cdot V_{r_k}^d + (Q_{g_k}^d - Q_{d_k}^d) \cdot V_{m_k}^d]}{(V_k^d)^2} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{[(-\alpha_{G_k} P_{g_k}^d) \varepsilon_{P_{g_i}} + (\alpha_{P_k} P_{d_k}^d) \varepsilon_{P_{d_i}}] \cdot V_{r_k}^d}{(V_k^d)^2} + \frac{[(\alpha_{Q_k} Q_{d_k}^d) \varepsilon_{Q_{d_i}}] \cdot V_{m_k}^d}{(V_k^d)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{I}_{m_k}^i &= \left\{ I_{m_k}^d - \frac{[(P_{g_k}^d - P_{d_k}^d) \cdot V_{m_k}^d - (Q_{g_k}^d - Q_{d_k}^d) \cdot V_{r_k}^d]}{(V_k^d)^2} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{[(-\alpha_{G_k} P_{g_k}^d) \varepsilon_{P_{g_i}} + (\alpha_{P_k} P_{d_k}^d) \varepsilon_{P_{d_i}}] \cdot V_{m_k}^d}{(V_k^d)^2} + \frac{[(-\alpha_{Q_k} Q_{d_k}^d) \varepsilon_{Q_{d_i}}] \cdot V_{r_k}^d}{(V_k^d)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

O raio das tensões intervalares é então calculado por (3.26).

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{V}_r^i \\ \Delta \hat{V}_m^i \end{bmatrix} = (J_i^d)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \hat{I}_m^i \\ \Delta \hat{I}_r^i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde J_i^d é a matriz Jacobiana determinística calculada no ponto de convergência do fluxo de potência determinístico segundo as equações de injeção de corrente.

Por questões de facilidade e de simplicidade no texto, a equação (3.26) não será representada na forma afim. Contudo, a ideia básica segue os mesmos princípios apresentados nas equações (3.24) e (3.25).

A atualização das tensões é feita de acordo com as equações (3.27) e (3.28).

$$\hat{V}_{r_k}^i = V_{r_k}^d + \Delta \hat{V}_{r_k}^i \quad (3.27)$$

$$\hat{V}_{m_k}^i = V_{m_k}^d + \Delta \hat{V}_{m_k}^i \quad (3.28)$$

3.2.2 Processo Iterativo

Uma vez calculados os valores das tensões intervalares, o próximo passo é a aplicação do método de Krawczyk [35], apresentado no Apêndice C, através do operador de Krawczyk (equação (C.4)). O cálculo da matriz Jacobiana intervalar é realizado utilizando as tensões intervalares e a matriz admitância. A matriz de condicionamento C corresponde à matriz inversa do ponto médio da matriz Jacobiana intervalar. O valor de $f(x)$ corresponde aos resíduos intervalares de corrente ($f(x) = [\Delta \hat{I}_m^i \Delta \hat{I}_r^i]^t$). O vetor x corresponde às componentes real e imaginária da tensão em coordenadas retangulares ($x = [V_r^d V_m^d]^t$). O termo X corresponde à solução intervalar do fluxo de potência. O sobrescrito t denota vetor transposto.

Após a aplicação do método de Krawczyk, as tensões intervalares são atualizadas da seguinte maneira:

$$\hat{V}_r^{h+1} = \hat{V}_r^h \cap \hat{K}(x^h, X^h) \quad (3.29)$$

$$\hat{V}_m^{h+1} = \hat{V}_m^h \cap \hat{K}(x^h, X^h) \quad (3.30)$$

O teste de convergência é realizado com o auxílio da equação (3.31):

$$\frac{|diam(X^{h-1}) - diam(X^h)|}{2} \leq Tolerância \quad (3.31)$$

Se a convergência não for alcançada, o método de Krawczyk é aplicado para o cálculo do novo perfil de tensões intervalares, repetindo-se o procedimento anteriormente descrito até que os resíduos intervalares atendam a tolerância especificada. Caso contrário, calcula-se a geração intervalar de potência reativa nas barras PV, conforme descrito na seção 3.2.2.1.

3.2.2.1 Cálculo intervalar das variáveis dependentes funcionais [54], [55]

O cálculo dos fluxos de potência, perdas nas linhas e gerações de potência ativa e reativa na forma intervalar pode ser realizado após a convergência do fluxo de potência intervalar. Seja g a denotação de qualquer variável dependente funcional correspondente ao ramo k - m em análise. Em coordenadas retangulares, a função g pode ser representada da seguinte forma:

$$g = g_1(V_{r_k}, V_{m_k}, V_{r_m}, V_{m_m}) \quad (3.32)$$

O acréscimo correspondente a g pode ser expresso como funções não lineares das componentes real e imaginária da tensão nas barras k e m . Como consequência, é possível linearizar (3.32) usando a série de Taylor, em torno das variáveis de estado correspondentes calculadas pelo fluxo de potência determinístico. Assim:

$$\Delta g = \frac{\partial g_1}{\partial V_{r_k}} \cdot \Delta V_{r_k} + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_k}} \cdot \Delta V_{m_k} + \frac{\partial g_1}{\partial V_{r_m}} \cdot \Delta V_{r_m} + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_m}} \cdot \Delta V_{m_m} \quad (3.33)$$

Portanto, o incremento intervalar Δg^i na equação (3.33) é dado por:

$$\Delta \hat{g}^i = \frac{\partial g_1}{\partial V_{r_k}} \cdot \Delta \hat{V}_{r_k}^i + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_k}} \cdot \Delta \hat{V}_{m_k}^i + \frac{\partial g_1}{\partial V_{r_m}} \cdot \Delta \hat{V}_{r_m}^i + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_m}} \cdot \Delta \hat{V}_{m_m}^i \quad (3.34)$$

Para o cálculo das gerações ativa e reativa em uma barra k , deve-se incluir na equação (3.34) as parcelas correspondentes às derivadas parciais de todas as barras adjacentes à barra em análise, bem como adicionar uma parcela referente à derivada parcial da potência ativa/reativa gerada em relação à potência ativa/reativa demandada.

A substituição direta das parcelas correspondentes às variações das componentes reais e imaginárias da tensão na equação (3.34) implica num diâmetro impreciso de $\hat{\Delta g}^i$ por envolver muitas operações intervalares. Uma solução alternativa consiste em expressar (3.34) em função dos resíduos intervalares de corrente calculados a partir dos dados de entrada do fluxo de potência. Esse procedimento é baseado numa análise de sensibilidade, a qual considera que para pequenas variações na carga é possível obter as respectivas alterações nas tensões utilizando a matriz Jacobiana convergida do fluxo de potência determinístico.

Para o fluxo de potência intervalar injeção de corrente, as variações nas componentes reais e imaginárias da tensão podem ser calculadas diretamente da equação (3.26), que para esta aplicação será reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta \hat{V}_{r_k}^i \\ \Delta \hat{V}_{r_m}^i \\ \vdots \\ \Delta \hat{V}_{m_k}^i \\ \Delta \hat{V}_{m_m}^i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ X_I \\ Y_I \\ \vdots \\ Z_I \\ W_I \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \hat{I}_m^i \\ \Delta \hat{I}_r^i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Os vetores X, Y, Z e W correspondem às linhas da respectiva matriz Jacobiana inversa avaliada após a convergência do fluxo de potência determinístico.

Substituindo (3.35) em (3.34), obtém-se:

$$\Delta \hat{g}^i = \left[\frac{\partial g_1}{\partial V_{r_k}} \cdot X_I + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_k}} \cdot Z_I + \frac{\partial g_1}{\partial V_{r_m}} \cdot Y_I + \frac{\partial g_1}{\partial V_{m_m}} \cdot W_I \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \hat{I}_m^i \\ \Delta \hat{I}_r^i \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

O intervalo correspondente de g é então calculado por (3.37).

$$\hat{g}^i = g^d + \Delta \hat{g}^i \quad (3.37)$$

Cabe ressaltar, contudo, de acordo com [55], que a forma de cálculo baseada na equação (3.36) não é satisfatória para alguns casos específicos, tais como em linhas levemente carregadas, pois podem ocorrer erros grosseiros no processo de linearização.

O Apêndice D apresenta as derivadas contidas na equação (3.36), em coordenadas retangulares, para diversas variáveis dependentes funcionais.

3.2.2.2 Limite de geração de reativos em barras PV

Seja $Q_k^i = [Q_k^a, Q_k^b]$ a geração reativa intervalar em uma barra PV. Se algum dos seus limites é violado, ou seja, $Q_k^a < Q_k^{min}$ ou $Q_k^b > Q_k^{max}$, a barra é convertida de PV para PQ com a potência reativa intervalar especificada no limite violado.

3.2.3 Algoritmo de Solução

Os passos a serem executados para o cálculo do fluxo de potência intervalar são resumidos por:

Passo 1: Obter o perfil de tensões pontuais do sistema elétrico em estudo através de um fluxo de potência convencional.

Passo 2: Definir as variações percentuais das demandas e calcular os valores intervalares utilizando as equações (3.14) e (3.15).

Passo 3: Inicializar o perfil das tensões intervalares utilizando as equações (3.27) e (3.28).

Passo 4: Aplicar o operador de Krawczyk definido em (C.4).

Passo 5: Obter o novo perfil das tensões intervalares utilizando (C.6).

Passo 6: Testar a convergência utilizando (3.31). Em caso positivo, proceder para a próxima etapa. Não havendo convergência, retornar ao Passo 4.

Passo 7: Calcular as gerações reativas das barras PV de acordo com as informações descritas na seção 3.2.2.1.

Passo 8: Testar os limites de geração reativa de acordo com os procedimentos descritos na seção 3.2.2.2. Se algum limite for violado, deve-se retornar ao Passo 4. Nesse caso, o vetor de resíduos deve ser recalculado utilizando Q_g^i da barra violada igual ao valor redefinido. Caso contrário, segue-se para o próximo passo.

Passo 9: Calcular a potência ativa e reativa intervalar na barra de referência, os fluxos e as perdas de potência intervalar nas linhas de acordo com os procedimentos descritos na seção 3.2.2.1.

3.3 Validação da Metodologia Proposta

3.3.1 Processo de Simulação

A simulação de Monte Carlo foi introduzida por John Von Neumann (1903-1957) e Stanislaw Ulam (1909-1984), durante a Segunda Guerra Mundial, período em que foi

ferramenta de pesquisa para o desenvolvimento da bomba atômica. Pode ser entendida como uma técnica de simulação para problemas que tem base probabilística ou estocástica, na qual as variáveis que influenciam no comportamento do sistema são simuladas por meio de amostragem aleatória.

Esta metodologia de avaliação tem sido largamente utilizada devido a sua flexibilidade para representação precisa de modelos de componentes e condições operativas do sistema, além da sua capacidade de representação de fenômenos complexos e eventos severos. Possui duas abordagens básicas, a sequencial e a não-sequencial, que se diferenciam pelo tratamento dado aos aspectos cronológicos da simulação [56]. Na primeira, os estados amostrados preservam as características cronológicas do sistema, existindo a preocupação de se amostrar corretamente os estados consecutivos do sistema, sendo empregado em problemas onde o tempo de duração de cada estado dos componentes possui relevância sobre os índices de confiabilidade obtidos. Na simulação não-sequencial os estados do sistema são selecionados por amostragem do espaço de estados, não se preocupando com a cronologia dos eventos.

Como o tempo individual dos estados dos componentes não possui relevância para o método de cálculo de fluxo de potência, o método de simulação de Monte Carlo não-sequencial será utilizado neste trabalho.

De forma geral, a Simulação de Monte Carlo é muito empregada para simular as incertezas dos componentes dos sistemas elétricos, sendo tomada como referência para validar os resultados do fluxo de potência baseado na análise de incertezas. Desse modo, todas as variáveis de interesse são representadas por funções de densidade de probabilidade, que geram números aleatórios uniformes designados pela letra A, os quais devem cumprir com as propriedades de uniformidade e independência. A cada estado gerado, um fluxo de potência convencional é executado para determinar as condições em regime permanente.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho, para realizar a simulação de Monte Carlo, executa os seguintes passos:

Passo 1: Determinação do número de simulações de Monte Carlo que serão executadas. Ao se elevar a quantidade de simulações, tende-se a diminuir o erro no resultado final, contudo, deve-se avaliar o esforço computacional envolvido.

Passo 2: Determinação, a partir do caso base, das variações aleatórias adotadas para as demandas de potência ativa e reativa.

Passo 3: Sorteio de um número (A) entre 0 e 1, com o auxílio de uma função de distribuição uniforme, para cada valor de demanda ativa e reativa das barras.

Passo 4: Cálculo dos novos valores das demandas utilizando as equações (3.38) e (3.39):

$$P_d = P_{d_{Inferior}} + A(P_{d_{Superior}} - P_{d_{Inferior}}) \quad (3.38)$$

$$Q_d = Q_{d_{Inferior}} + A(Q_{d_{Superior}} - Q_{d_{Inferior}}) \quad (3.39)$$

Passo 5: Execução de um fluxo de potência determinístico com os valores calculados no Passo 4.

Passo 6: Comparação dos resultados obtidos no Passo 5 com os resultados armazenados, caso existam, de forma a se manter armazenado somente os maiores e os menores resultados de cada variável resultante do fluxo de potência.

Passo 7: Se o número de simulações determinado no Passo 1 for atingido, encerrar o processo. Caso contrário, retornar ao Passo 3.

De forma a calcular a relação, para cada variável em análise, entre os valores dos diâmetros dos intervalos gerados pelo método proposto, comparativamente ao método de Monte Carlo, utiliza-se a expressão (3.40).

$$R_D = \left(\frac{X_{MET}}{X_{MC}} \right) \quad (3.40)$$

3.4 Aplicação Prática

Considere como caso base o sistema de 3 barras descrito em [1], cujos dados de barra e de linha estão reproduzidos, respectivamente, nas Tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1 - Sistema 3 Barras - Dados de Barra

Barra	Tipo	V(pu)	θ (°)	P (MW)	Q(MVAr)
1	V θ	1,000000	0,000000	-	-
2	PQ	-	-	-5,000000	-2,000000
3	PV	0,980000	-	-15,000000	-

Tabela 3.2 - Sistema 3 Barras - Dados de Linha

De	Para	R_{k-m} (pu)	X_{k-m} (pu)	B_{k-m} (pu)
1	2	0,100000	1,000000	0,010000
1	3	0,200000	2,000000	0,020000
2	3	0,100000	1,000000	0,010000

Para o sistema em análise, serão executados todos os passos do algoritmo descrito na seção 3.2.3. Os limites mínimo e máximo de geração de potência reativa na barra PV estão liberados.

Passo 1: Obter o perfil de tensões pontuais do sistema elétrico em estudo através de um fluxo de potência convencional.

Executando um fluxo de potência determinístico com limite de geração de reativos em aberto e adotando-se uma tolerância de 10^{-6} pu, os resultados mostrados nas Tabelas 3.3 a 3.8 são obtidos para o sistema:

Tabela 3.3 - Sistema 3 Barras - Tensão Nodal

Barra	V (pu)	θ (°)	θ (rad)	V_r (pu)	V_m (pu)
1	1,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
2	0,982735	-6,605495	-0,115288	0,976212	-0,113046
3	0,980000	-10,363031	-0,180869	0,964014	-0,176287

Tabela 3.4 - Sistema 3 Barras - Geração da Barra de Referência ($V\theta$)

P (MW)	Q (MVar)
20,333461	-0,855207

Tabela 3.5 - Sistema 3 Barras - Geração Reativa da Barra PV

Barra	Q (MVar)
3	-1,622924

Tabela 3.6 - Sistema 3 Barras - Fluxo de Potência nas Linhas

Linha	P_{km} (MW)	Q_{km} (MVar)	P_{mk} (MW)	Q_{mk} (MVar)
1-2	11,428243	0,236014	-11,296111	-0,880458
1-3	8,905217	-1,091221	-8,744960	-1,227003
2-3	6,296111	-1,119542	-6,255040	-0,395921

Tabela 3.7 - Sistema 3 Barras - Perdas de Potência nas Linhas

Linha	P_{km} (MW)	Q_{km} (MVar)
1-2	0,132132	-0,644444
1-3	0,160258	-2,318225
2-3	0,041071	-1,515463

De posse do resultado do fluxo de potência determinístico:

$$x_{Retangular} = \begin{bmatrix} V_r^d \\ V_m^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000000 \\ 0,976212 \\ 0,964014 \\ 0,000000 \\ -0,113046 \\ -0,176287 \end{bmatrix}$$

Os cálculos apresentados a seguir foram realizados com o auxílio da biblioteca INTLAB.

Passo 2: Definir as variações percentuais das demandas e calcular os valores intervalares utilizando as equações (3.14) e (3.15).

Os valores intervalares estão mostrados na Tabela 3.8 para uma variação de $\pm 5\%$ nas demandas ativas e $\pm 2\%$ para as demandas reativas.

Tabela 3.8 - Sistema 3 Barras - Demandas Intervalares

Barra	$Pd_{Inferior}$ (MW)	$Pd_{Superior}$ (MW)	$Qd_{Inferior}$ (MVar)	$Qd_{Superior}$ (MVar)
2	4,750000	5,250000	1,960000	2,040000
3	14,250000	15,750000	0,000000	0,000000

Os valores, em pu, das demandas ativa e reativa intervalares, na forma afim, são dadas por:

$$\hat{P}_{d_2}^i = 0,050000 + 0,002500\varepsilon_1$$

$$\hat{Q}_{d_2}^i = 0,020000 + 0,000400\varepsilon_2$$

$$\hat{P}_{d_3}^i = 0,150000 + 0,007500\varepsilon_3$$

$$\hat{Q}_{d_3}^i = 0,000000$$

Passo 3: Inicializar o perfil das tensões intervalares utilizando as equações (3.27) e (3.28).

Adotou-se uma variação inicial aleatória de $\pm 1\%$ para a potência ativa gerada de todas as barras de geração. A Tabela 3.9 apresenta os valores intervalares obtidos:

Tabela 3.9 - Sistema 3 Barras - Potências Intervalares Geradas

Barra	$P_{gInferior}$ (MW)	$P_{gSuperior}$ (MW)	$Q_{gInferior}$ (MVar)	$Q_{gSuperior}$ (MVar)
1	20,130126	20,536795	-0,855207	-0,855207
3	-	-	-1,622924	-1,622924

Os valores, em pu, das gerações ativa e reativa intervalares, na forma afim, são dadas por:

$$\hat{P}_{g_1}^i = 0,203335 + 0,002033\varepsilon_4$$

$$\hat{Q}_{g_1}^i = -0,008552$$

$$\hat{P}_{g_3}^i = 0,000000$$

$$\hat{Q}_{g_3}^i = -0,016229$$

Os valores das componentes real e imaginária da corrente determinística em cada barra podem ser calculados pelas equações (3.20) e (3.21):

$$I_r^d = \begin{bmatrix} 0,203335 \\ -0,048200 \\ -0,147585 \end{bmatrix} \quad I_m^d = \begin{bmatrix} 0,008552 \\ 0,026069 \\ 0,043824 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se os valores das correntes e tensões determinísticas em coordenadas retangulares e os valores intervalares das potências ativas e reativas, os valores dos resíduos de corrente são calculados então, em pu, de acordo com as equações (3.18) e (3.19). Os resíduos de corrente da barra de referência ($V\theta$) foram adotados como zero.

$$\Delta \hat{I}_r^i = \begin{bmatrix} [0,000000; 0,000000] \\ [-0,002574; 0,002574] \\ [-0,007528; 0,007528] \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{I}_m^i = \begin{bmatrix} [0,000000; 0,000000] \\ [-0,000697; 0,000697] \\ [-0,001377; 0,001377] \end{bmatrix}$$

Na forma afim, os resíduos $\Delta \hat{I}_r^i$ e $\Delta \hat{I}_m^i$ são escritos por:

$$\Delta \hat{I}_r^i = \begin{bmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 + 0,002527\varepsilon_1 - 0,000047\varepsilon_2 \\ 0,000000 + 0,007528\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{I}_m^i = \begin{bmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 - 0,000293\varepsilon_1 - 0,000404\varepsilon_2 \\ 0,000000 - 0,001377\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Com os valores de $\Delta \hat{I}_r^i$ e $\Delta \hat{I}_m^i$, obtém-se o vetor $f(\hat{x})$:

$$f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{I}_m^i \\ \Delta \hat{I}_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,000000; 0,000000] \\ [-0,000697; 0,000697] \\ [-0,001377; 0,001377] \\ [0,000000; 0,000000] \\ [-0,002574; 0,002574] \\ [-0,007528; 0,007528] \end{bmatrix}$$

Na forma afim é representado por:

$$f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{I}_m^i \\ \Delta \hat{I}_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 - 0,000293\varepsilon_1 - 0,000404\varepsilon_2 \\ 0,000000 - 0,001377\varepsilon_3 \\ 0,000000 \\ 0,000000 + 0,002527\varepsilon_1 - 0,000047\varepsilon_2 \\ 0,000000 + 0,007528\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

De (3.26) é possível obter o raio das tensões intervalares, que aplicado às equações (3.27) e (3.28) permite calcular o vetor \hat{X}^0 :

$$\hat{X}^0 = \begin{bmatrix} \hat{V}_r^0 \\ \hat{V}_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,000000; 1,000000] \\ [0,974729; 0,977694] \\ [0,962334; 0,965694] \\ [0,000000; 0,000000] \\ [-0,118886; -0,107207] \\ [-0,185473; -0,167101] \end{bmatrix}$$

Para a barra de referência ($V\theta$), os valores de \hat{V}_r^0 e \hat{V}_m^0 assumiram variação igual a zero.

Na forma afim, \hat{X}^0 é representado por:

$$\hat{X}^0 = \begin{bmatrix} \hat{V}_r^0 \\ \hat{V}_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000000 \\ 0,976212 + 0,000447\varepsilon_1 + 0,000207\varepsilon_2 + 0,000829\varepsilon_3 \\ 0,964014 + 0,000239\varepsilon_1 + 0,000004\varepsilon_2 + 0,001437\varepsilon_3 \\ 0,000000 \\ -0,113046 + 0,001897\varepsilon_1 - 0,000029\varepsilon_2 + 0,003913\varepsilon_3 \\ -0,176287 + 0,001309\varepsilon_1 + 0,000019\varepsilon_2 + 0,007857\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

A partir do próximo passo, devido ao elevado número de termos de erro ε_i , não serão apresentadas as formas afim das variáveis. Desse modo, estas serão calculadas utilizando a aritmética afim, mas a exibição dos resultados será na forma de intervalos.

Passo 4: Aplicar o operador de Krawczyk definido em (C.4):

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} [1,000000; 1,000000] \\ [0,974728; 0,977695] \\ [0,962334; 0,965694] \\ [0,000000; 0,000000] \\ [-0,118887; -0,107206] \\ [-0,185475; -0,167098] \end{bmatrix}$$

Passo 5: Obter o novo perfil das tensões intervalares utilizando (C.6):

$$\hat{X}^1 = \begin{bmatrix} \hat{V}_r^1 \\ \hat{V}_m^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,000000; 1,000000] \\ [0,974729; 0,977694] \\ [0,962334; 0,965694] \\ [0,000000; 0,000000] \\ [-0,118886; -0,107207] \\ [-0,185473; -0,167101] \end{bmatrix}$$

Passo 6: Testar a convergência através da equação (3.31):

$$\frac{|diam(\hat{X}^0) - diam(\hat{X}^1)|}{2} = \begin{bmatrix} [0,000000] \\ [0,000000] \\ [0,000000] \\ [0,000000] \\ [0,000000] \\ [0,000000] \end{bmatrix} \leq Tolerância$$

Uma vez que a tolerância é satisfeita, o processo iterativo é encerrado. Nesse momento, o módulo da tensão da barra PV é forçado a ser igual ao valor especificado e os valores intervalares de \hat{V}_r e \hat{V}_m dessa barra são recalculados. Dessa forma, o vetor convergido de tensões intervalares é dado por:

$$\hat{X}^1 = \begin{bmatrix} \hat{V}_r^1 \\ \hat{V}_m^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,000000; 1,000000] \\ [0,974729; 0,977694] \\ [0,962291; 0,965650] \\ [0,000000; 0,000000] \\ [-0,118886; -0,107207] \\ [-0,185464; -0,167093] \end{bmatrix}$$

Passo 7: Calcular as gerações reativas das barras PV.

Seguindo o procedimento descrito na seção 3.2.2.1, primeiramente são calculadas as derivadas parciais (equações (D.28) a (D.31)) para a potência reativa gerada na barra PV em relação às componentes real e imaginária da tensão da própria barra, bem como em relação às componentes real e imaginária da tensão das barras adjacentes (no caso, barras 1 e 2). Observe que no cálculo das derivadas são utilizados os valores determinísticos:

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{r_1}} = V_{m_3} G_{31} - V_{r_3} B_{31} = -0,468508$$

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{m_1}} = -V_{m_3} B_{31} - V_{r_3} G_{31} = 0,134994$$

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{r_2}} = V_{m_3} G_{32} - V_{r_3} B_{32} = -0,937015$$

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{m_2}} = -V_{m_3} B_{32} - V_{r_3} G_{32} = 0,269988$$

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{r_3}} = -V_{r_3} B_{33} + V_{m_3} G_{33} - I_{m_3} = 1,332779$$

$$\frac{\partial Q_{g_3}}{\partial V_{m_3}} = -V_{r_3} G_{33} - V_{m_3} B_{33} + I_{r_3} = -0,547279$$

Aplicando os valores das derivadas na equação (3.36), obtém-se:

$$\Delta \hat{Q}_{g_3}^i = [-0,468508; 0,520501; 0,049483; 0,134994; -0,060170; -0,270596] \cdot f(\hat{x})$$

$$\Delta \hat{Q}_{g_3}^i = [-0,002617; 0,002617]$$

No cálculo de $\Delta\hat{Q}_{g_3}^i$ ainda é necessário adicionar uma parcela referente à derivada da potência reativa gerada em relação à potência reativa demandada. Dessa forma:

$$\Delta\hat{Q}_{g_3}^i = [-0,002617 ; 0,002617] + \Delta\hat{Q}_{d_3}$$

onde $\Delta\hat{Q}_{d_3} = \hat{Q}_{d_3}^i - Q_{d_3}^d$.

Então:

$$\Delta\hat{Q}_{g_3}^i = [-0,002617 ; 0,002617] + 0 = [-0,002617 ; 0,002617]$$

De (3.37):

$$\hat{Q}_{g_3}^i = (Q_{g_3}^d + \Delta\hat{Q}_{g_3}^i) \cdot 100 = [-1,884647; -1,361201] \text{ MVar}$$

Passo 8: Testar os limites de geração reativa de acordo com os procedimentos descritos na seção 3.2.2.2. Se algum limite for violado deve-se retornar ao Passo 4. Nesse caso, o vetor de resíduos deve ser recalculado utilizando \hat{Q}_g^i da barra violada igual ao valor redefinido. Caso contrário, segue-se para o próximo passo.

Como o limite mínimo e máximo de geração de potência reativa na barra PV está liberado, não ocorre violação dos limites. Desse modo, deve-se prosseguir para o Passo 9.

Passo 9: Calcular a potência ativa e reativa intervalar na barra de referência, os fluxos e as perdas de potência intervalar nas linhas.

Para o cálculo das variáveis dependentes funcionais deve-se seguir os passos descritos na seção 3.2.2.1. Serão ilustrados apenas alguns cálculos.

Com relação ao fluxo de potência ativa intervalar na linha 1-3, as equações (D.2) a (D.5) são utilizadas para a obtenção das derivadas.

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial V_{r_1}} = -a_{13}[g_{13}V_{r_3} - b_{13}V_{m_3}] + 2V_{r_1}a_{13}^2g_{13} = 0,138557$$

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial V_{m_1}} = -a_{13}[g_{13}V_{m_3} + b_{13}V_{r_3}] + 2V_{m_1}a_{13}^2g_{13} = 0,485962$$

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial V_{r_3}} = -a_{13}[g_{13}V_{r_1} + b_{13}V_{m_1}] = -0,049505$$

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial V_{m_3}} = -a_{13}[g_{13}V_{m_1} - b_{13}V_{r_1}] = -0,495050$$

Aplicando os valores das derivadas na equação (3.36), obtém-se:

$$\Delta \hat{P}_{13}^i = [0,138557; 0,053798; 0,093096; 0,485962; -0,254966; -0,509088] \cdot f(\hat{x})$$

$$\Delta \hat{P}_{13}^i = [-0,004631; 0,004631]$$

De (3.37):

$$\hat{P}_{13}^i = (P_{13}^d + \Delta \hat{P}_{13}^i) * 100 = [8,442162; 9,368273] \text{ MW}$$

Para o fluxo de potência reativa intervalar na linha 1-3, as equações (D.7) a (D.10) são utilizadas para a obtenção das derivadas.

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial V_{r_1}} = a_{13}[g_{13}V_{m_3} + b_{13}V_{r_3}] - 2V_{r_1}a_{13}^2(b_{13} + b_{13}^{sh}) = 0,464137$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial V_{m_1}} = a_{13}[-g_{13}V_{r_3} + b_{13}V_{m_3}] - 2V_{m_1}a_{13}^2(b_{13} + b_{13}^{sh}) = 0,039547$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial V_{r_3}} = a_{13}[-g_{13}V_{m_1} + b_{13}V_{r_1}] = -0,495050$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial V_{m_3}} = a_{13}[g_{13}V_{r_1} + b_{13}V_{m_1}] = 0,049505$$

Aplicando os valores das derivadas na equação (3.36), obtém-se:

$$\Delta \hat{Q}_{13}^i = [0,464137; 0,004378; 0,007576; 0,039547; -0,020749; -0,041429] \cdot f(\hat{x})$$

$$\Delta \hat{Q}_{13}^i = [-0,000377; 0,000377]$$

De (3.37):

$$\hat{Q}_{13}^i = (Q_{13}^d + \Delta\hat{Q}_{13}^i) * 100 = [-1,128904; -1,053538] \text{ MVar}$$

Para a geração de potência ativa intervalar da barra de referência, as equações (D.22) a (D.25) são utilizadas para a obtenção das derivadas.

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{r_1}} = V_{r_1} G_{11} + V_{m_1} B_{11} + I_{r_1} = 0,351849$$

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{m_1}} = -V_{r_1} B_{11} + V_{m_1} G_{11} + I_{m_1} = 1,463701$$

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{r_2}} = V_{r_1} G_{12} + V_{m_1} B_{12} = -0,099010$$

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{m_2}} = -V_{r_1} B_{12} + V_{m_1} G_{12} = -0,990099$$

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{r_3}} = V_{r_1} G_{13} + V_{m_1} B_{13} = -0,049505$$

$$\frac{\partial P_{g_1}}{\partial V_{m_3}} = -V_{r_1} B_{13} + V_{m_1} G_{13} = -0,495050$$

Aplicando os valores das derivadas na equação (3.36), obtém-se:

$$\Delta\hat{P}_{g_1}^i = [0,351849; 0,119499; 0,186085; 1,463701; -1,008093; -1,017593] \cdot f(\hat{x})$$

$$\Delta\hat{P}_{g_1}^i = [-0,010500; 0,010500]$$

No cálculo de $\Delta\hat{P}_{g_1}$ ainda é necessário adicionar uma parcela referente à derivada da potência ativa gerada em relação à potência ativa demandada. Dessa forma:

$$\Delta\hat{P}_{g_1}^i = [-0,010500; 0,010500] + \Delta\hat{P}_{d_1}$$

onde $\Delta\hat{P}_{d_1} = \hat{P}_{d_1}^i - P_{d_1}^d$.

Então:

$$\Delta \hat{P}_{g_1}^i = [-0,010500; 0,010500] + 0 = [-0,010500; 0,010500]$$

De (3.37):

$$\hat{P}_{g_1}^i = (P_{g_1}^d + \Delta \hat{P}_{g_1}^i) \cdot 100 = [19,283419; 21,383502] \text{ MW}$$

Para a perda ativa intervalar da linha 1-2, as equações (D.34) a (D.37) são utilizadas para a obtenção das derivadas.

$$\frac{\partial P_{12}^{Perdas}}{\partial V_{r_1}} = -2a_{12}g_{12}V_{r_2} + 2g_{12}a_{12}^2V_{r_1} = 0,004711$$

$$\frac{\partial P_{12}^{Perdas}}{\partial V_{m_1}} = -2a_{12}g_{12}V_{m_2} + 2g_{12}a_{12}^2V_{m_1} = 0,022385$$

$$\frac{\partial P_{12}^{Perdas}}{\partial V_{r_2}} = -2a_{12}g_{12}V_{r_1} + 2g_{12}V_{r_2} = -0,004711$$

$$\frac{\partial P_{12}^{Perdas}}{\partial V_{m_2}} = -2a_{12}g_{12}V_{m_1} + 2g_{12}V_{m_2} = -0,022385$$

Aplicando os valores das derivadas na equação (3.36), obtém-se:

$$\Delta \hat{P}_{12}^{Perdas^i} = [0,004711; 0,002783; 0,002151; 0,022385; -0,017315; -0,011760] \cdot f(\hat{x})$$

$$\Delta \hat{P}_{12}^{Perdas^i} = [-0,000136; 0,000136]$$

De (3.37):

$$\hat{P}_{12}^{Perdas^i} = \left(P_{12}^{Perdas^d} + \Delta \hat{P}_{12}^{Perdas^i} \right) \cdot 100 = [0,118495; 0,145770] \text{ MW}$$

3.4.1 Validação dos Resultados

Para o sistema elétrico de 3 barras, descrito na seção 3.4, são executados 100 mil sorteios de Monte Carlo, de modo a analisar os resultados do fluxo de potência intervalar,

expresso em termos das equações de injeção de corrente com as tensões expressas na forma retangular.

Para o cálculo da relação entre os diâmetros foi utilizada a equação (3.40). Os resultados são apresentados de forma gráfica para cada método testado. As siglas contidas nas legendas das Figuras 3.1 a 3.11, para cada variável analisada, devem ser entendidas como:

- Inf MC: Limite inferior para o método de Monte Carlo;
- Inf AI: Limite inferior para o método aritmética intervalar ordinária;
- Inf AA: Limite inferior para o método aritmética intervalar afim;
- Sup MC: Limite superior para o método de Monte Carlo;
- Sup AI: Limite superior para o método aritmética intervalar ordinária;
- Sup AA: Limite superior para o método aritmética intervalar afim.

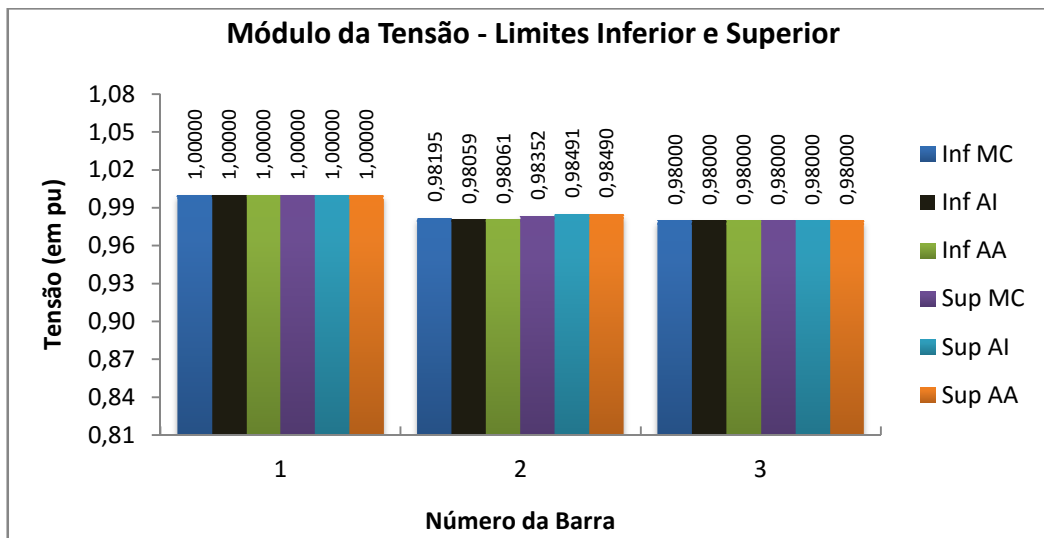


Figura 3.1 - Faixas do Módulo da Tensão - Sistema 3 Barras

Conforme mostrado na Figura 3.1, a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária para o módulo da tensão na barra PQ (barra 2), sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior de ambas. Para a barra 2, a relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é de 2,75412 para a aritmética intervalar ordinária e de 2,73867 para a aritmética afim. Devido à pequena extensão dos diâmetros dos intervalos gerados, principalmente na Simulação de Monte Carlo, a relação entre eles tende a ser elevada, contudo, o erro relativo entre seus limites é pequeno.

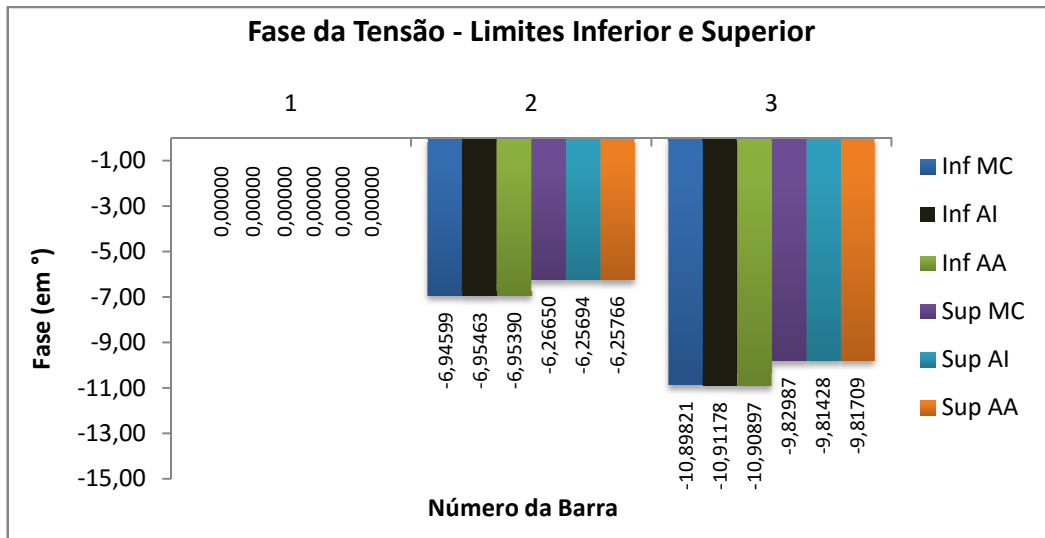


Figura 3.2 - Faixas da Fase da Tensão - Sistema 3 Barras

Conforme mostrado na Figura 3.2, a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária para as barras PV (barra 3) e PQ (barra 2), sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior destas. Para a barra 2, a relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é de 1,02679 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,02467 para a aritmética afim. Já para a barra 3, a relação é de 1,02729 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,02202 para a aritmética afim.

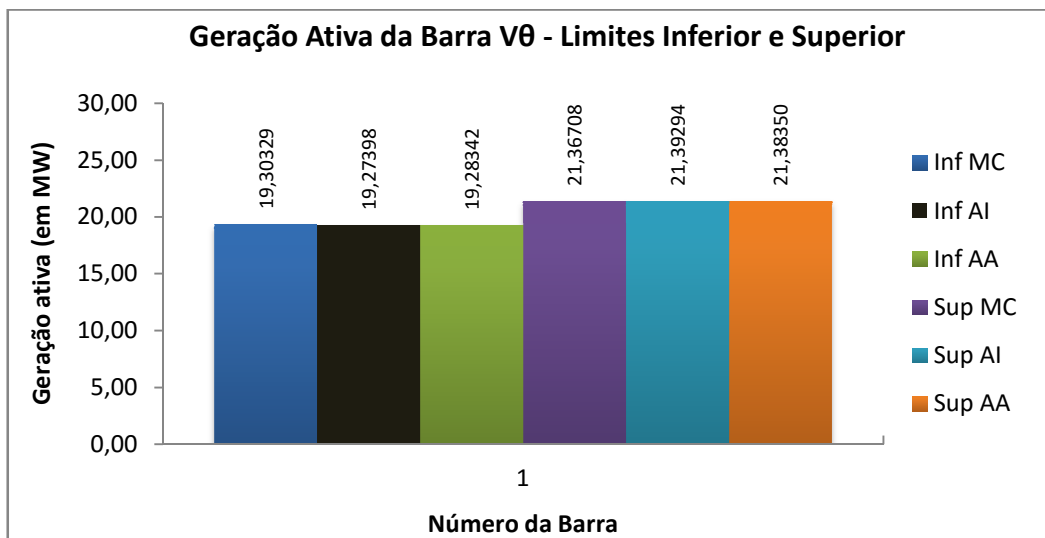


Figura 3.3 - Faixas da Geração Ativa da Barra V θ - Sistema 3 Barras

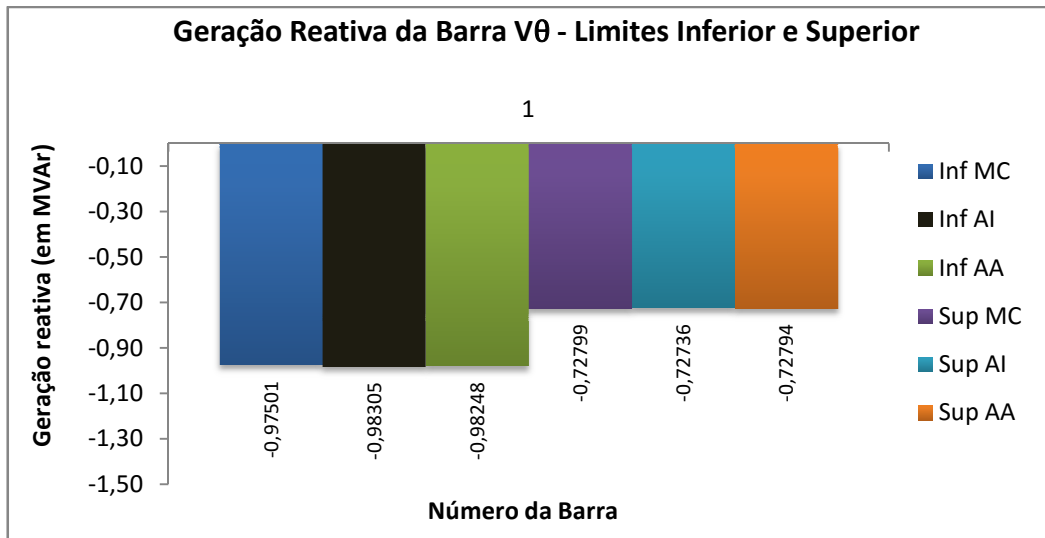


Figura 3.4 - Faixas da Geração Reativa da Barra V θ - Sistema 3 Barras

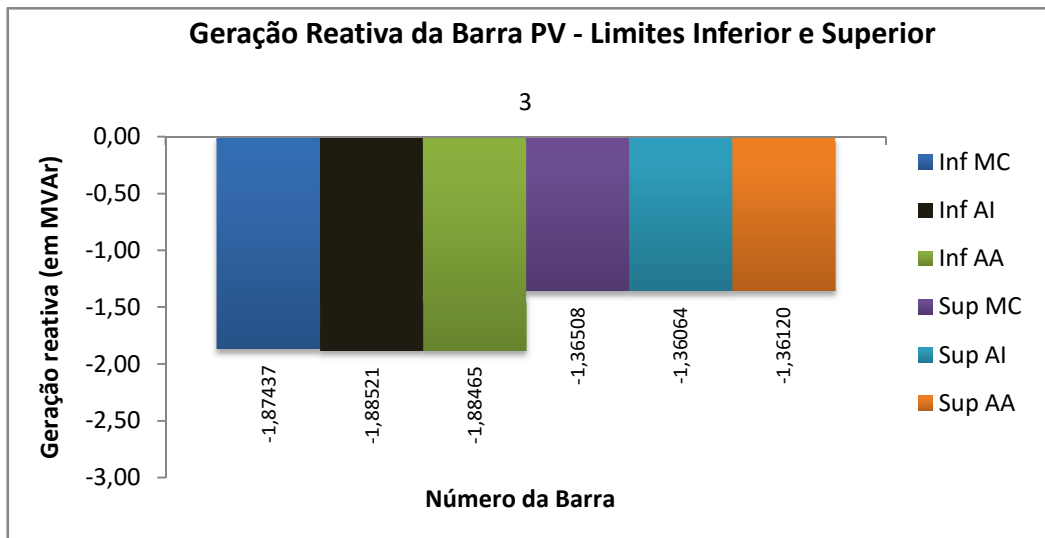


Figura 3.5 - Faixas da Geração Reativa da Barra PV - Sistema 3 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 3.3. a 3.5, as faixas das gerações ativa e reativa da barra de referência V θ (barra 1) e geração reativa da barra PV (barra 3) também apresentam-se mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, estando contidas na faixa obtida para a aritmética intervalar afim, que por sua vez, está contida na faixa da aritmética intervalar ordinária. Para a geração ativa, a relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é de 1,02673 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,01758 para a aritmética afim. Para a geração reativa da barra de referência a relação é de 1,03512 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,03045 para a aritmética afim. Por fim, para a geração reativa da barra PV, a relação é 1,03001 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,02780 para a aritmética afim.

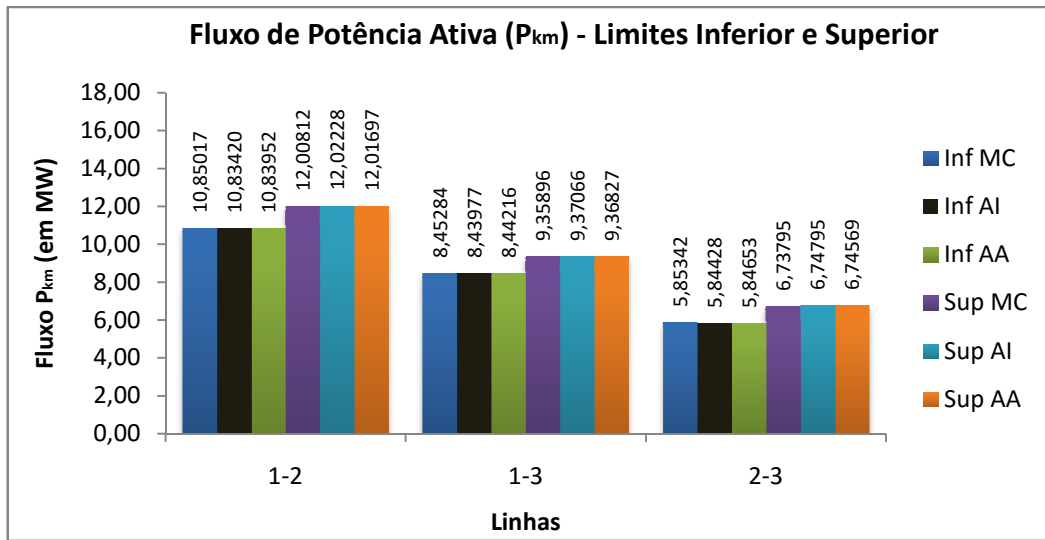


Figura 3.6 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{km}) - Sistema 3 Barras

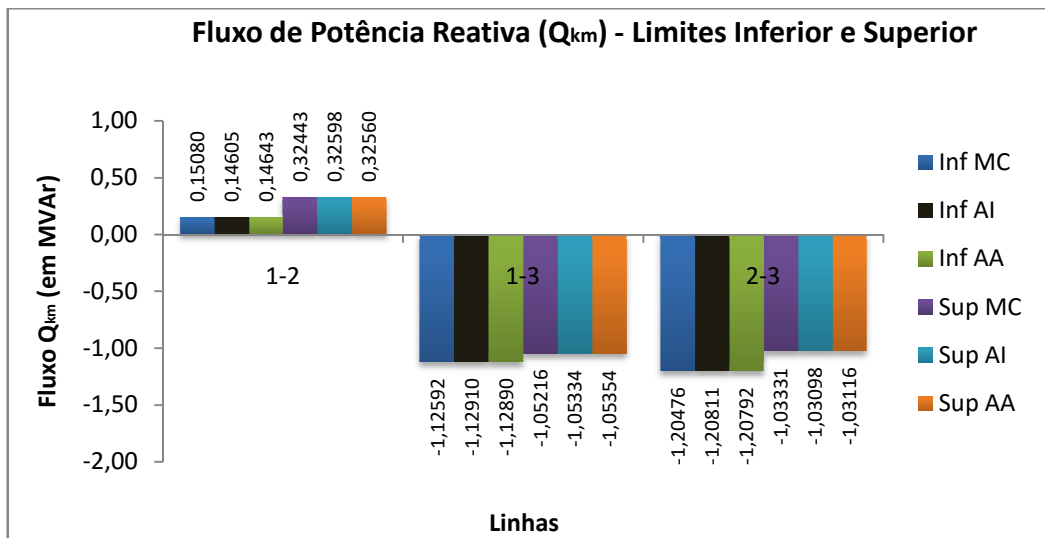


Figura 3.7 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{km}) - Sistema 3 Barras

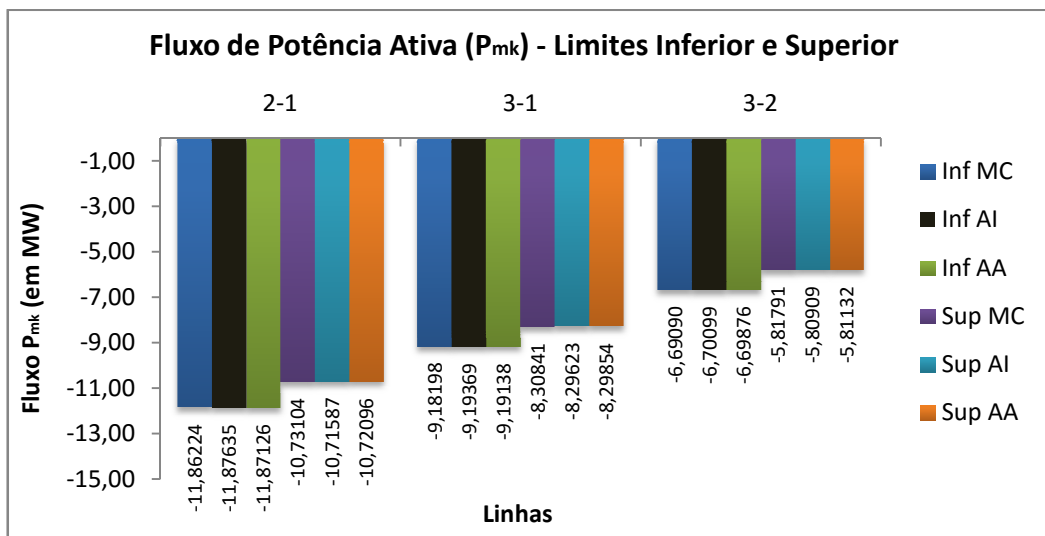


Figura 3.8 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{mk}) - Sistema 3 Barras

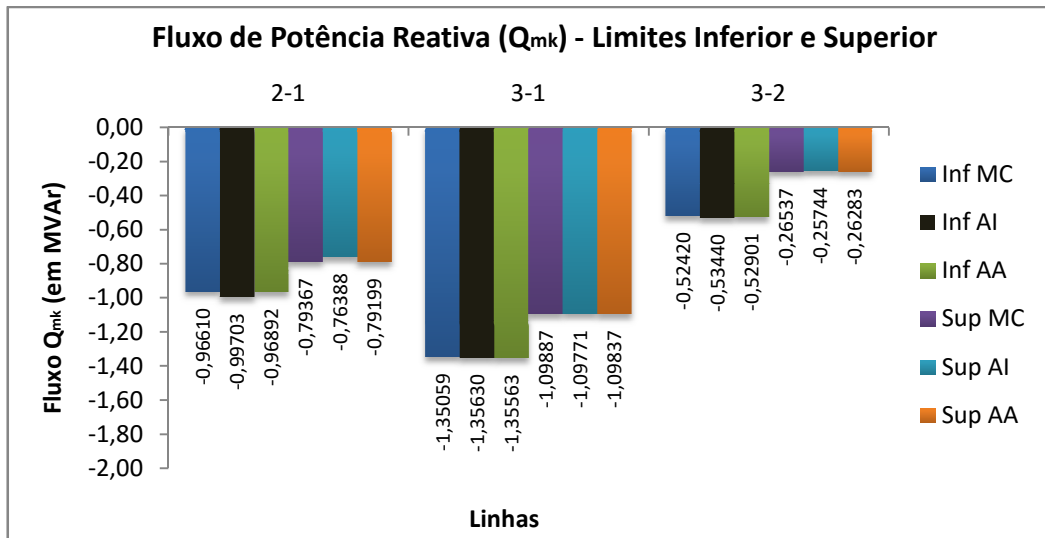


Figura 3.9 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{mk}) - Sistema 3 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 3.6 a 3.9, as faixas dos fluxos de potência ativa e reativa (P_{km} , Q_{km} , P_{mk} e Q_{mk}) apresentam-se mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e da aritmética intervalar ordinária. A maior relação entre os diâmetros da aritmética intervalar ordinária e da Simulação de Monte Carlo é de 1,35221 para o fluxo Q_{21} , que apresenta o valor de 1,02615 para a aritmética afim. Já para esta aritmética, a maior relação verificada é de 1,03185 para o fluxo Q_{12} , que apresenta o valor de 1,03626 para a aritmética intervalar ordinária.

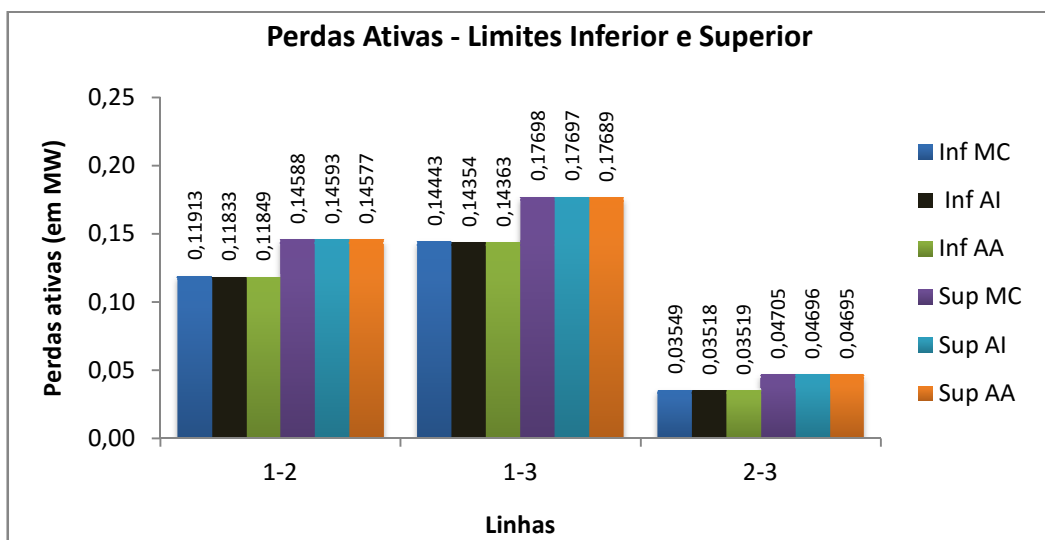


Figura 3.10 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema 3 Barras

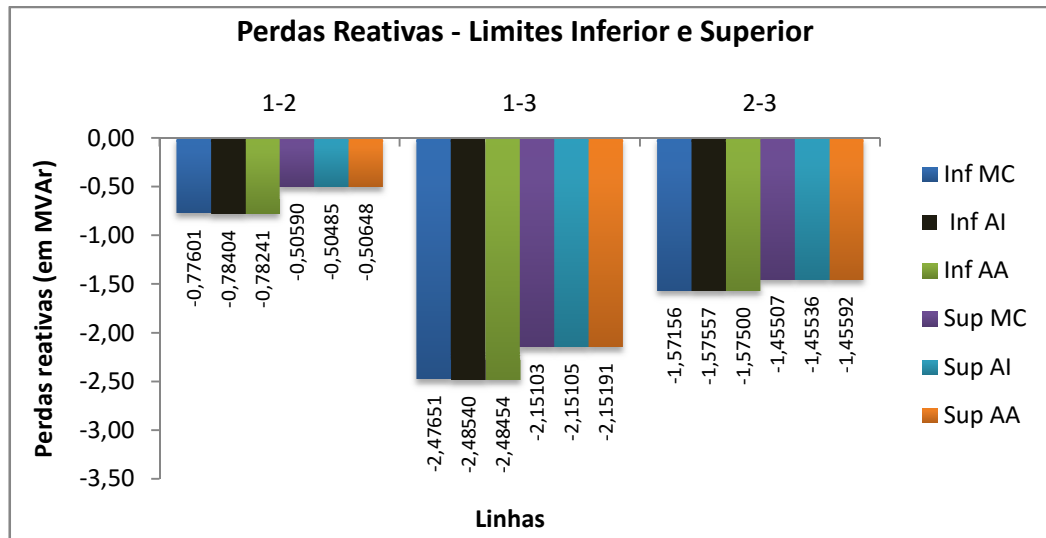


Figura 3.11 - Faixas das Perdas Reativas - Sistemas 3 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 3.10 e 3.11, as faixas das perdas ativas e reativas também se apresentam mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e da aritmética intervalar ordinária. A maior relação entre os diâmetros da aritmética intervalar ordinária e da Simulação de Monte Carlo é de 1,03359 para as perdas reativas na linha 1-2, que apresenta o valor de 1,02154 para a aritmética afim. Já para esta aritmética, a maior relação verificada é de 1,02224 para as perdas reativas na linha 2-3, que apresenta o valor de 1,03192 para a aritmética intervalar ordinária.

3.4.2 Análise dos Resultados

A análise dos resultados obtidos mostra que a aritmética intervalar afim (AA) apresenta limites mais estreitos que a aritmética intervalar ordinária (AI). A razão disso é que a AI não considera a existência de correlação entre as variáveis. Já a Simulação de Monte Carlo encontra-se quase sempre no interior das faixas de valores obtidas para as duas aritméticas testadas. Seus intervalos são mais estreitos e considerados como “corretos”, ao passo que as outras aritméticas são mais conservadoras. Contudo, não são significativas as diferenças obtidas.

O fluxo de potência determinístico convergiu em 3 iterações e ambos fluxos intervalares convergiram em 1 iteração. A rápida convergência está associada à boa estimativa inicial proporcionada pelo método de inicialização das tensões descrita na seção 3.2.1.

4 Resultados

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo proposto para dois sistemas elétricos: IEEE 14 barras e IEEE 30 barras. Os Apêndices E e F apresentam, respectivamente, os dados de barra e de linha desses sistemas. O método foi desenvolvido no ambiente MATLAB utilizando a biblioteca INTLAB. A tolerância adotada para a convergência dos fluxos determinístico e intervalar é de 10^{-6} pu.

São consideradas variações nas gerações de potência ativa, nas demandas ativas e nas demandas reativas das barras. São apresentados, de forma gráfica, os resultados de todas as barras para o módulo e ângulo de fase da tensão. São apresentados também os resultados para a geração ativa e reativa da barra de referência e geração reativa de todas as barras de geração, mesmo aquelas que ao longo do processo iterativo tornaram-se barras PQ. Para as demais variáveis funcionais são apresentados os resultados de três linhas aleatórias, porém com transmissões de potência ativa similar. A variação aleatória adotada para as gerações ativa é de $\pm 1\%$ para todas as barras de geração dos sistemas teste.

É analisada uma variação aleatória de $\pm 7\%$ nas demandas ativas e $\pm 3\%$ nas demandas reativas de todas as barras do sistema IEEE 14 barras. Para o sistema IEEE 30 barras é analisada uma variação aleatória de $\pm 3\%$ nas demandas ativas e $\pm 1\%$ nas demandas reativas de todas as barras.

Para cada sistema simulado, os resultados obtidos pelo método proposto são comparados com aqueles obtidos via aritmética intervalar ordinária e simulação de Monte Carlo.

De forma a se determinar, para cada sistema, o número de sorteios a ser realizado na simulação de Monte Carlo, os resultados obtidos, para cada variável, ao se efetuar 50 mil, 100 mil e 1 milhão de sorteios, foram então comparados. Uma vez que a variação observada não foi significativa, optou-se por realizar 100 mil sorteios para cada sistema.

4.2 Sistema IEEE 14 Barras

O sistema IEEE 14 barras convergiu em 2 iterações para o fluxo determinístico, em 1 iteração para o fluxo intervalar afim e em 3 iterações para o fluxo intervalar ordinário. As Figuras 4.1 a 4.19 apresentam as faixas de valores obtidas para as variáveis desse sistema.

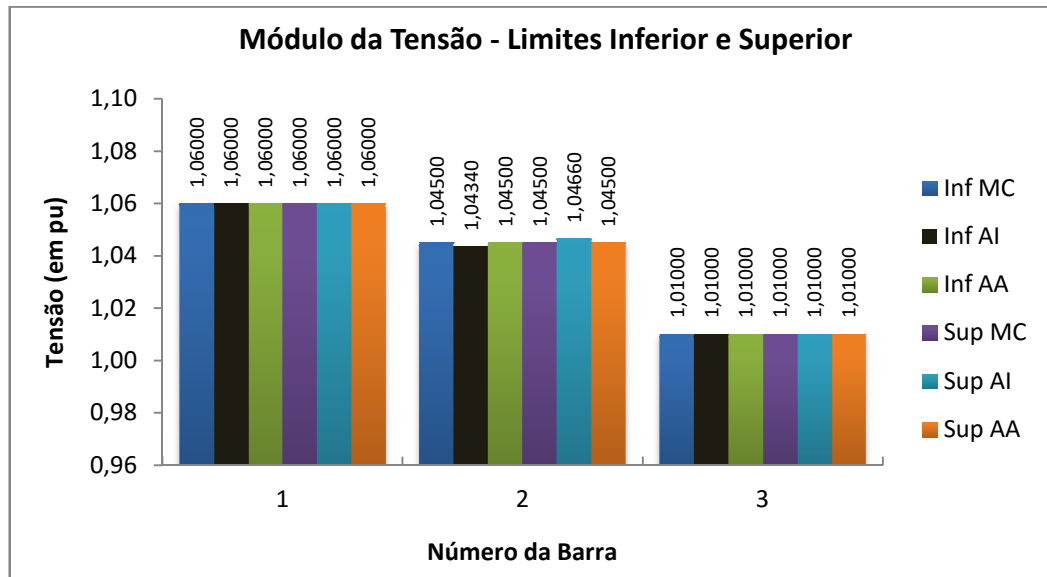


Figura 4.1 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 1 a 3) - Sistema IEEE 14 Barras

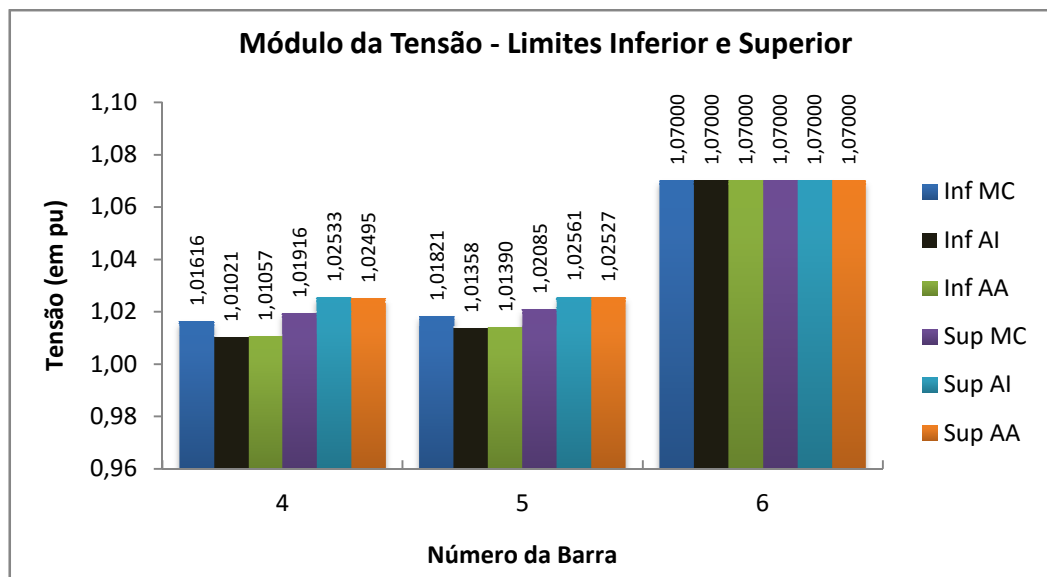


Figura 4.2 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 4 a 6) - Sistema IEEE 14 Barras

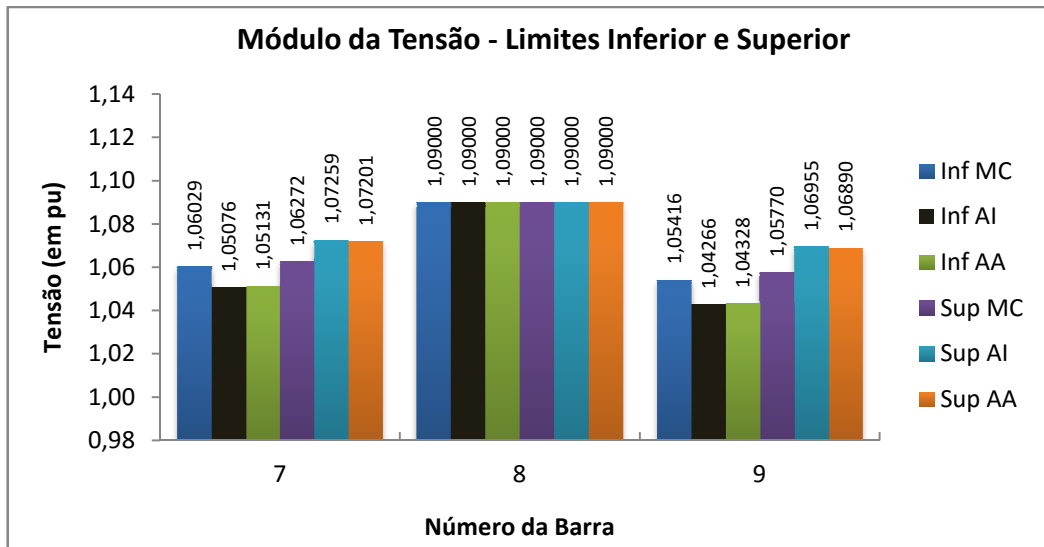


Figura 4.3 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 7 a 9) - Sistema IEEE 14 Barras

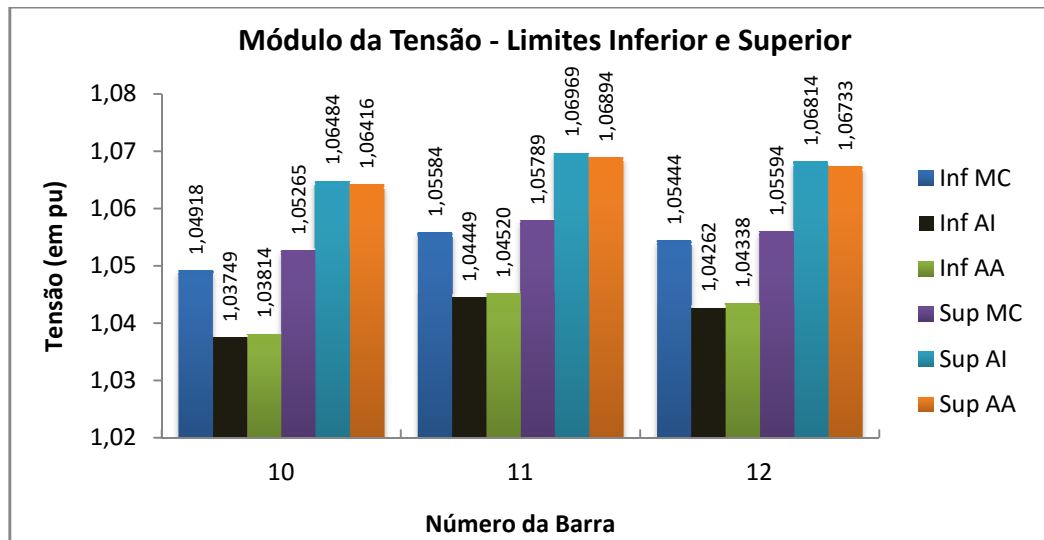


Figura 4.4 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 10 a 12) - Sistema IEEE 14 Barras

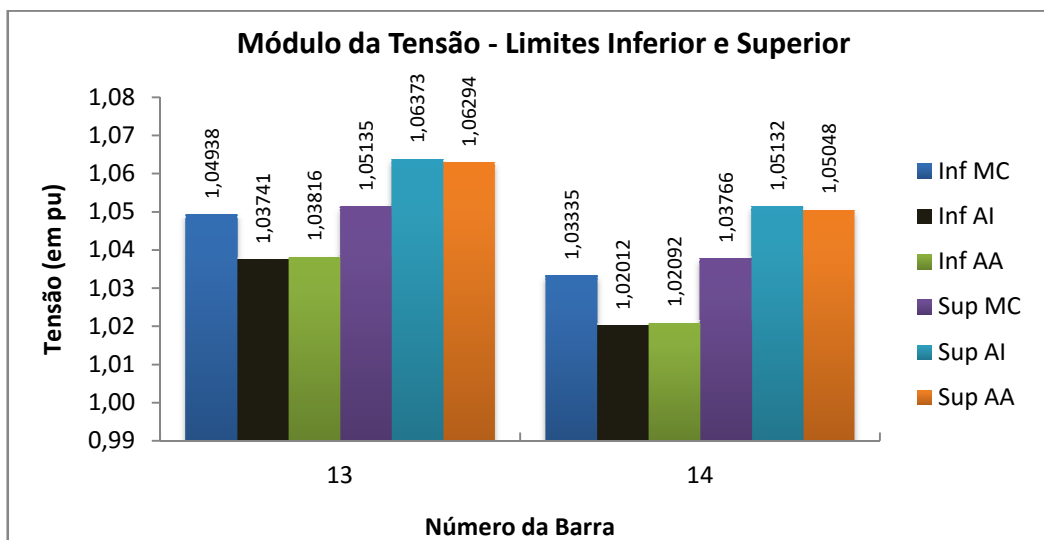


Figura 4.5 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 13 e 14) - Sistema IEEE 14 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.1 a 4.5, as faixas dos módulos intervalares das tensões nas barras PV (barras 3, 6 e 8) têm o mesmo alcance para os três métodos. Para a barra de geração 2, verifica-se que o módulo da tensão diminui, em relação ao valor especificado (1,045 pu), para o fluxo de potência intervalar ordinário. Isto acontece porque essa barra viola os limites de geração de potência reativa, sendo convertida de PV para PQ. Assim, o seu limite superior de geração reativa é especificado no valor violado e permite-se que seu módulo da tensão varie. Para as barras PQ observa-se que a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária, sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior de ambas. A maior relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é verificado para a barra 12, no valor de 17,00049 para a aritmética intervalar ordinária e de 15,95167 para a aritmética afim. Devido à pequena extensão dos diâmetros dos intervalos gerados, principalmente na Simulação de Monte Carlo, a relação entre eles tende a ser elevada, contudo, o erro relativo entre seus limites é pequeno.

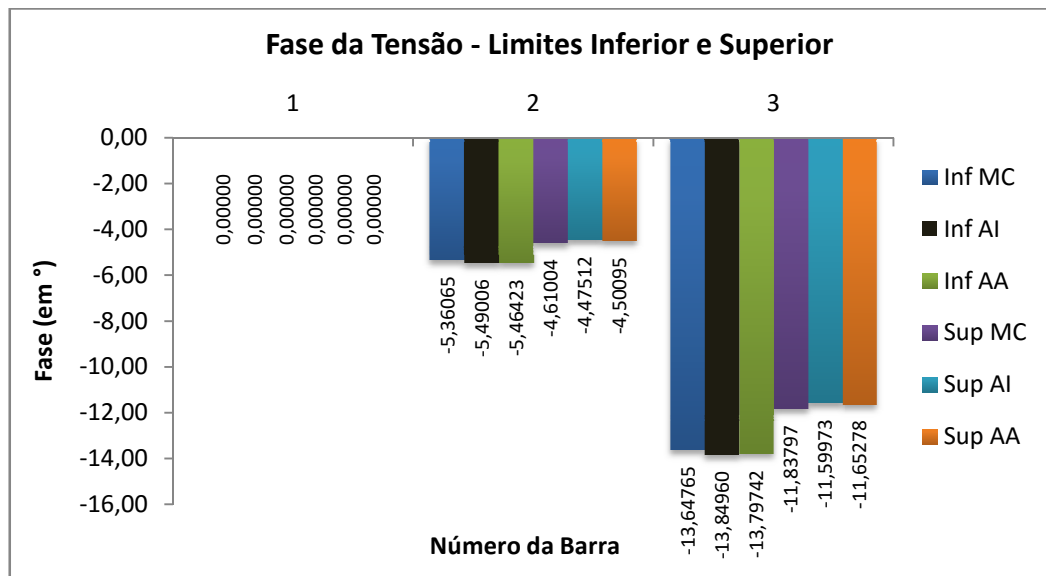


Figura 4.6 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 1 a 3) - Sistema IEEE 14 Barras

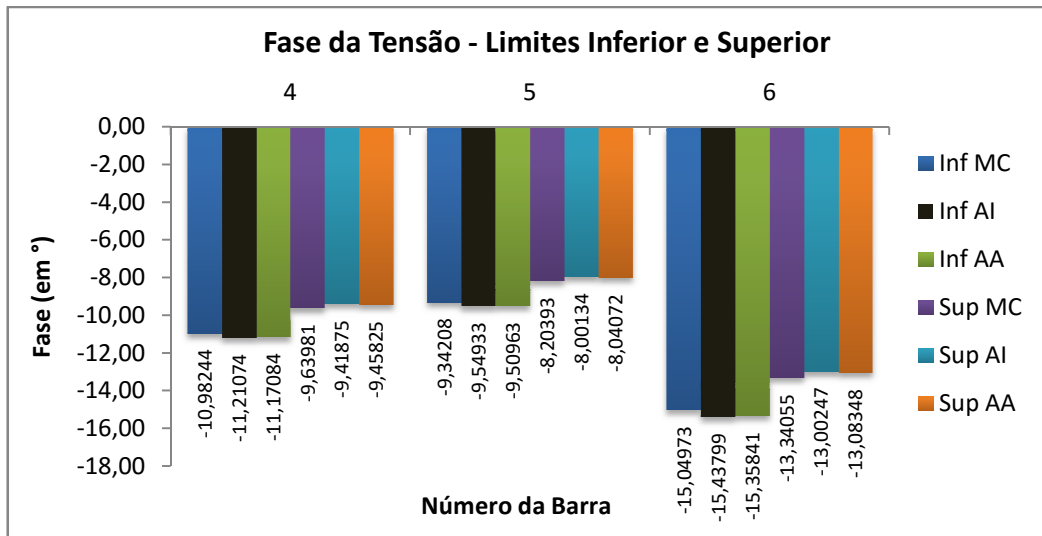


Figura 4.7 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 4 a 6) - Sistema IEEE 14 Barras

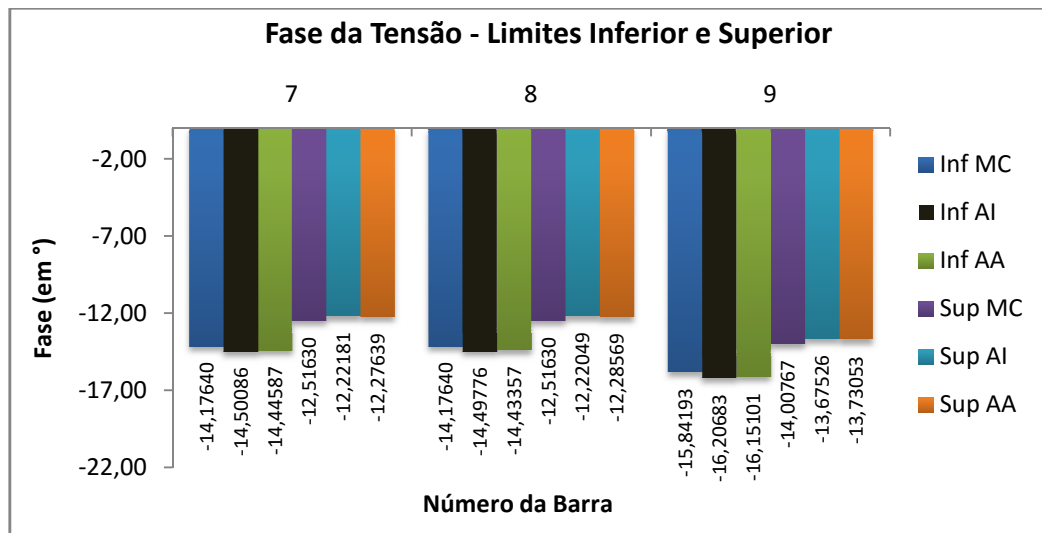


Figura 4.8 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 7 a 9) - Sistema IEEE 14 Barras

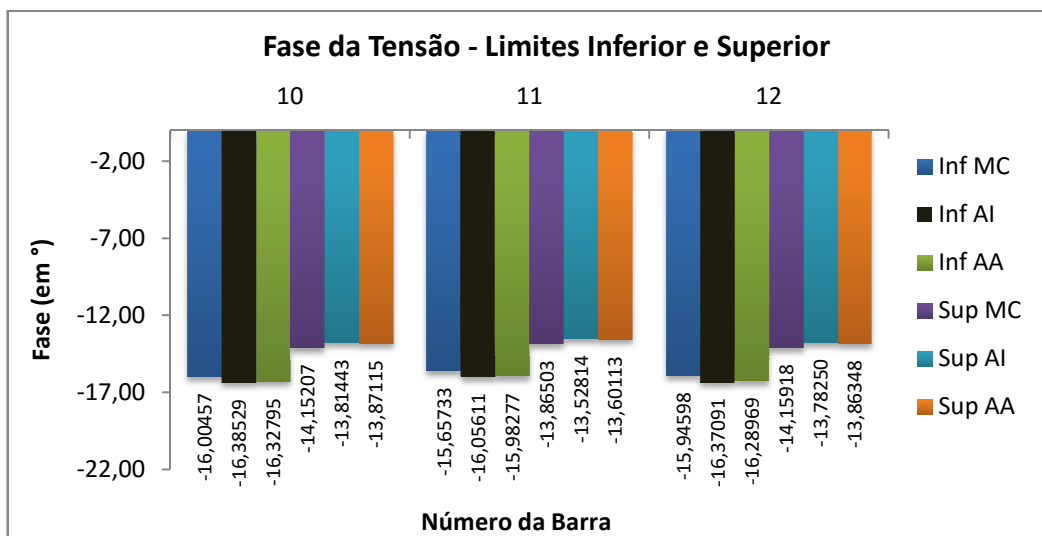


Figura 4.9 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 10 a 12) - Sistema IEEE 14 Barras

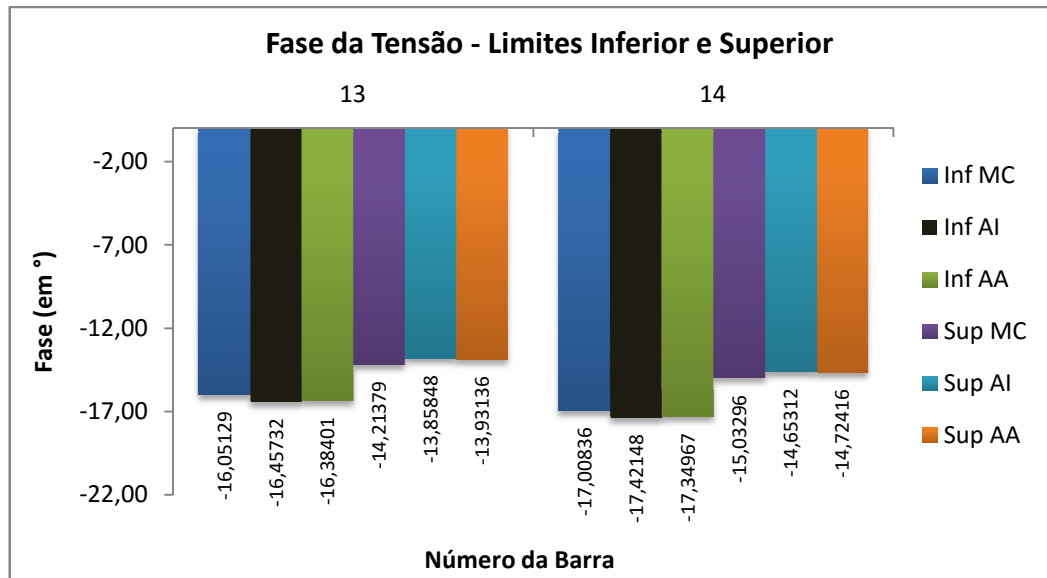


Figura 4.10 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 13 e 14) - Sistema IEEE 14 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.6 a 4.10, para as barras PV e PQ observa-se que a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária, sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior destas. A maior relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é verificada para a barra 12, no valor de 1,44863 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,35785 para a aritmética afim.

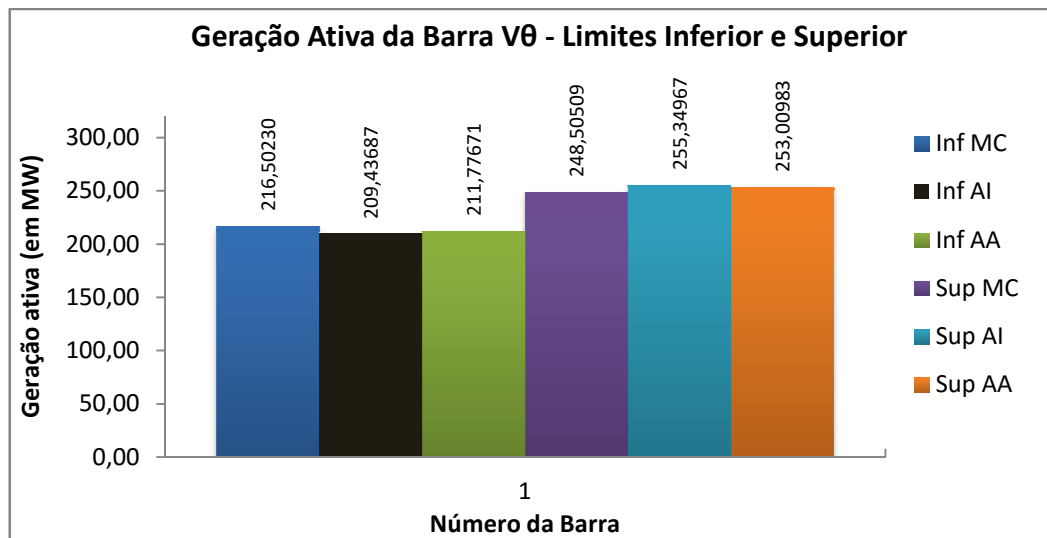


Figura 4.11 - Faixas da Geração Ativa da Barra V0 - Sistema IEEE 14 Barras

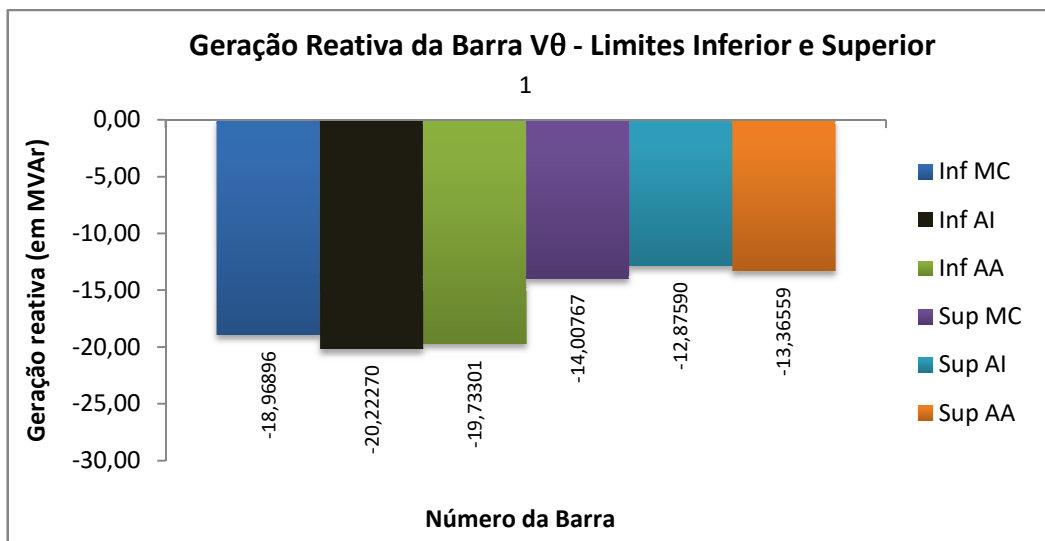


Figura 4.12 - Faixas da Geração Reativa da Barra V θ - Sistema IEEE 14 Barras

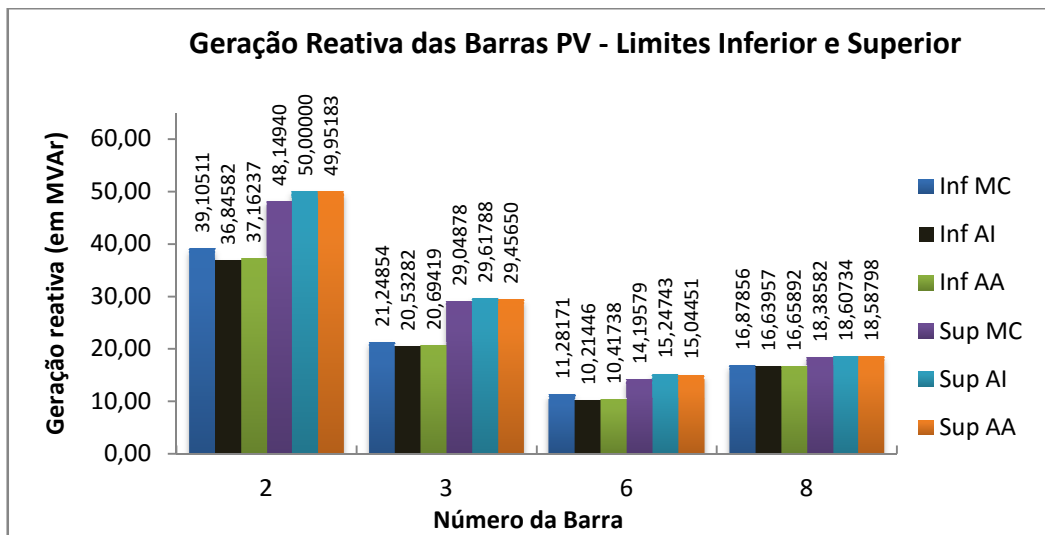


Figura 4.13 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV - Sistema IEEE 14 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.11 a 4.13, as faixas das gerações ativa e reativa da barra de referência V θ (barra 1) e geração reativa das barras PV (barras 2, 3, 6 e 8) também se apresentam mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, estando contidas na faixa obtida para a aritmética intervalar afim, que por sua vez, está contida na faixa da aritmética intervalar ordinária. Para a geração ativa, a relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é de 1,43465 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,28842 para a aritmética afim. Para a geração reativa da barra de referência, a relação é de 1,48082 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,28342 para a aritmética afim. Para as barras PV, a maior relação é verificada na barra 6, no valor de 1,72712 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,58786 para a aritmética afim. Para a barra de geração 2, como já mencionado,

é violado o limite de geração reativa para a aritmética intervalar ordinária, o que resulta numa variação de tensão na barra e no maior número de iterações até a convergência.

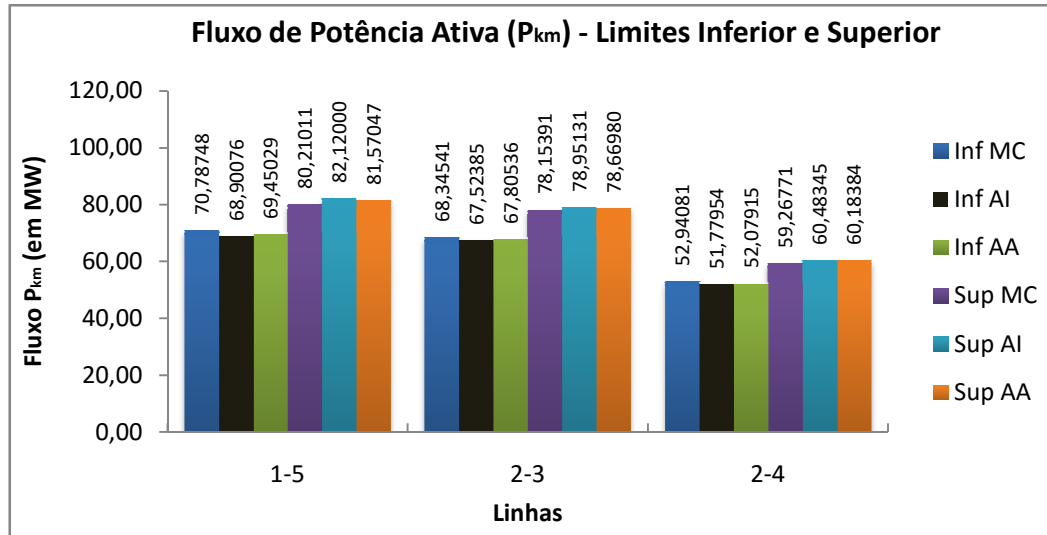


Figura 4.14 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{km}) - Sistema IEEE 14 Barras

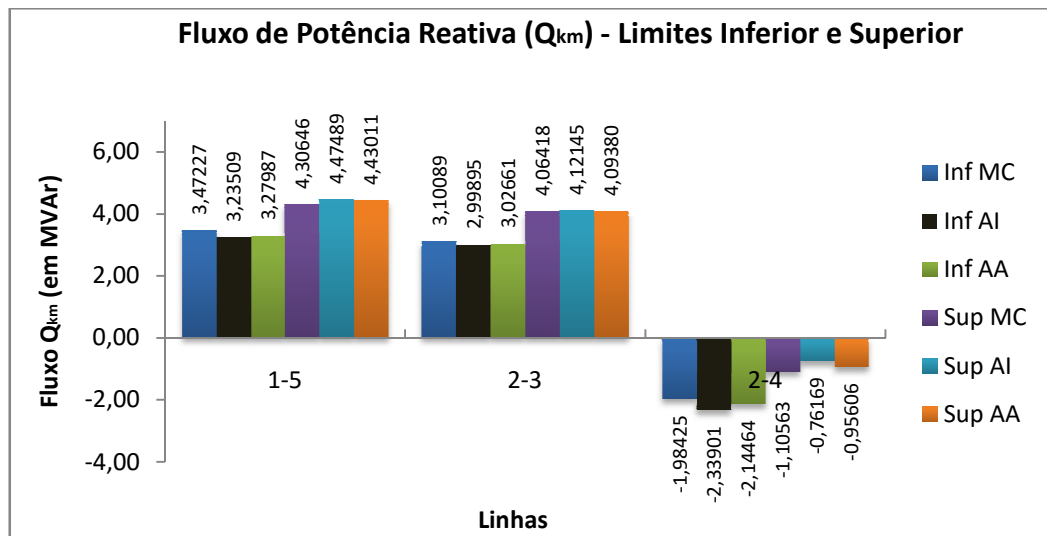


Figura 4.15 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{km}) - Sistema IEEE 14 Barras

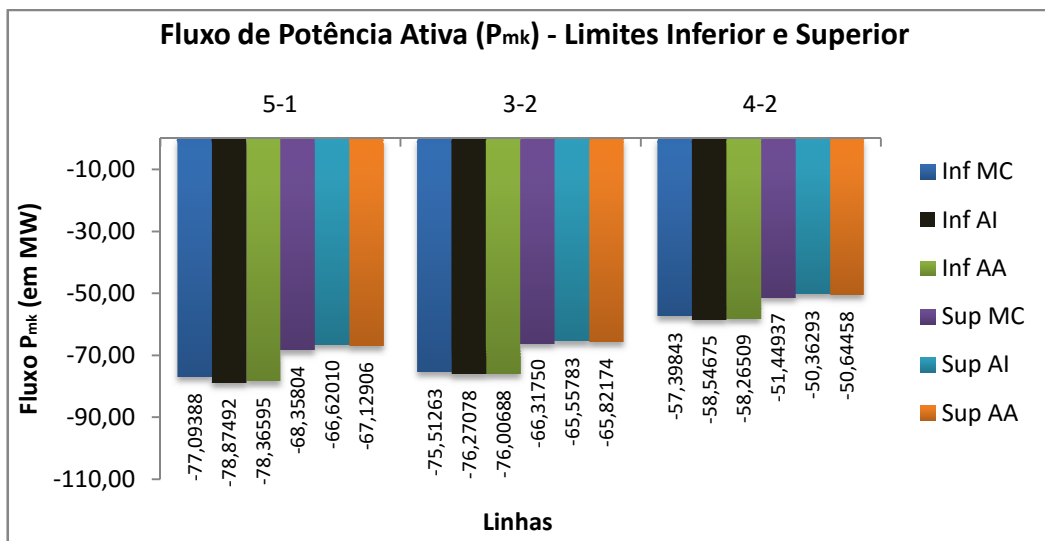


Figura 4.16 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{mk}) - Sistema IEEE 14 Barras

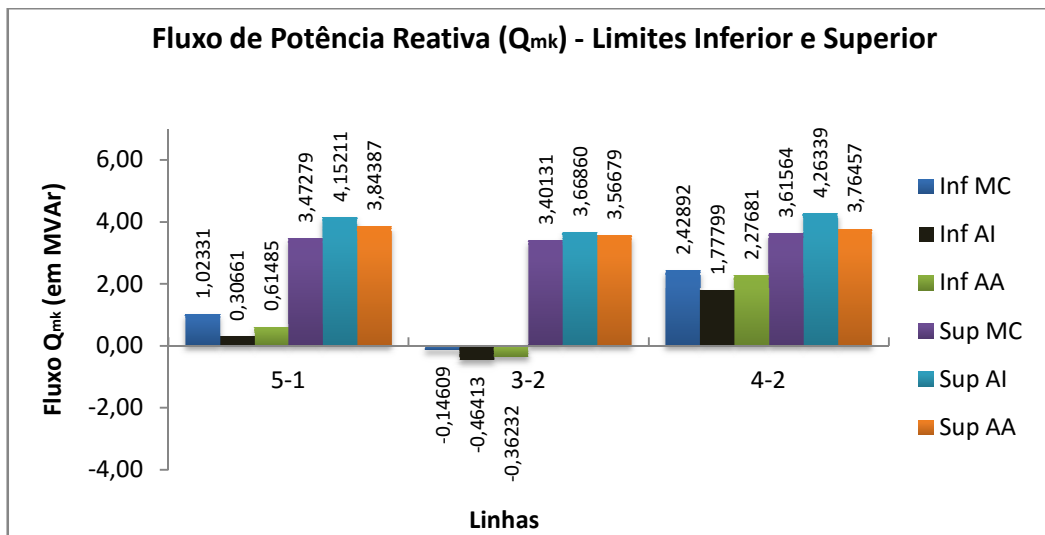


Figura 4.17 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{mk}) - Sistema IEEE 14 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.14 a 4.17, as faixas dos fluxos de potência ativa e reativa (P_{km} , Q_{km} , P_{mk} e Q_{mk}) apresentam-se mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e aritmética intervalar ordinária. A maior relação entre os diâmetros da aritmética intervalar ordinária e da Simulação de Monte Carlo é de 3,47745 para o fluxo Q_{13-6} , que apresenta o valor de 1,41811 para a aritmética afim. Já para esta aritmética, a maior relação verificada é de 1,47695 para o fluxo Q_{7-4} , que apresenta o valor de 2,23287 para a aritmética intervalar ordinária.

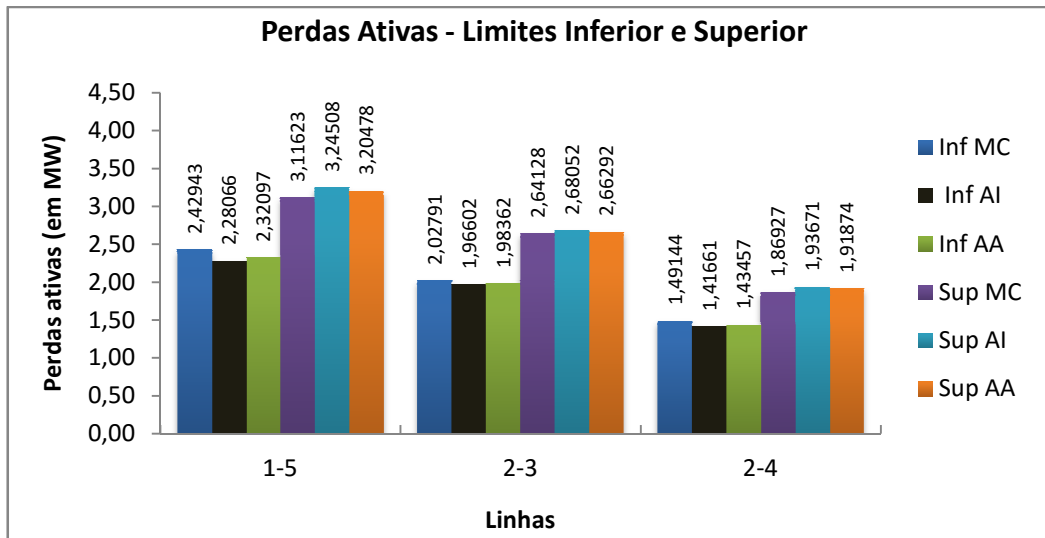


Figura 4.18 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema IEEE 14 Barras

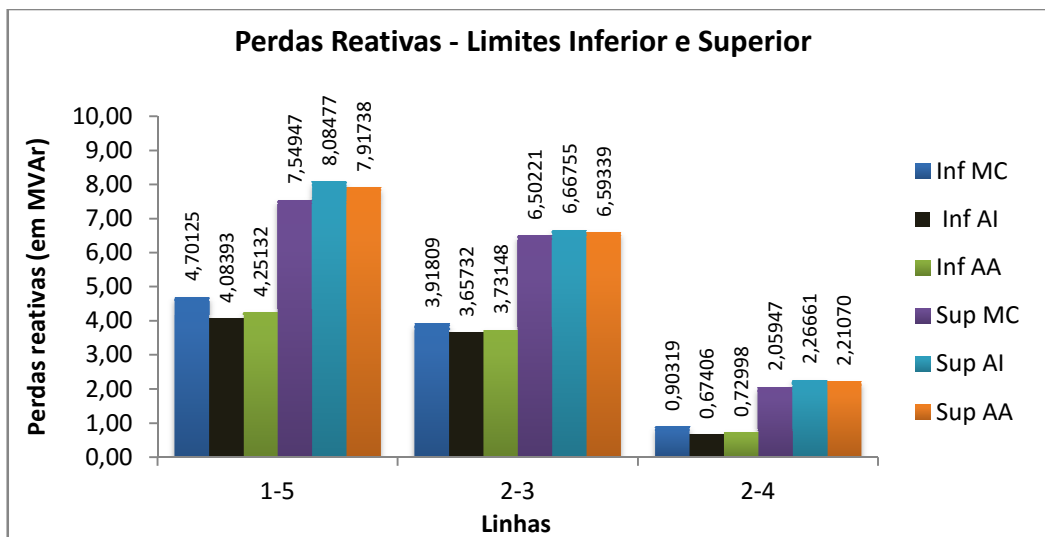


Figura 4.19 - Faixas das Perdas Reativas - Sistema IEEE 14 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.18 e 4.19, as faixas das perdas ativas e reativas também se apresentam mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e aritmética intervalar ordinária. A maior relação entre os diâmetros da aritmética intervalar ordinária e da Simulação de Monte Carlo é de 1,50785 para as perdas reativas na linha 2-5, que apresenta o valor de 1,37755 para a aritmética afim. Já para esta aritmética, a maior relação verificada é de 1,38704 para as perdas reativas na linha 10-11, que apresenta o valor de 1,49538 para a aritmética intervalar ordinária.

4.3 Sistema IEEE 30 Barras

O sistema IEEE 30 barras convergiu em 2 iterações para o fluxo determinístico, em 3 iterações para o fluxo intervalar afim e em 3 iterações para o fluxo intervalar ordinário. As Figuras 4.20 a 4.45 apresentam as faixas de valores obtidas para as variáveis desse sistema.

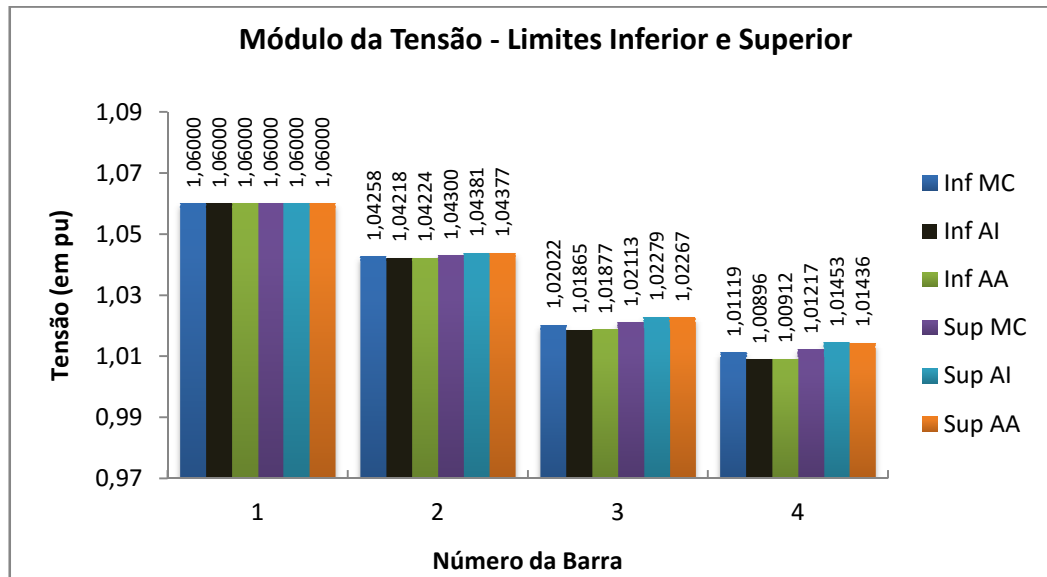


Figura 4.20 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 1 a 4) - Sistema IEEE 30 Barras

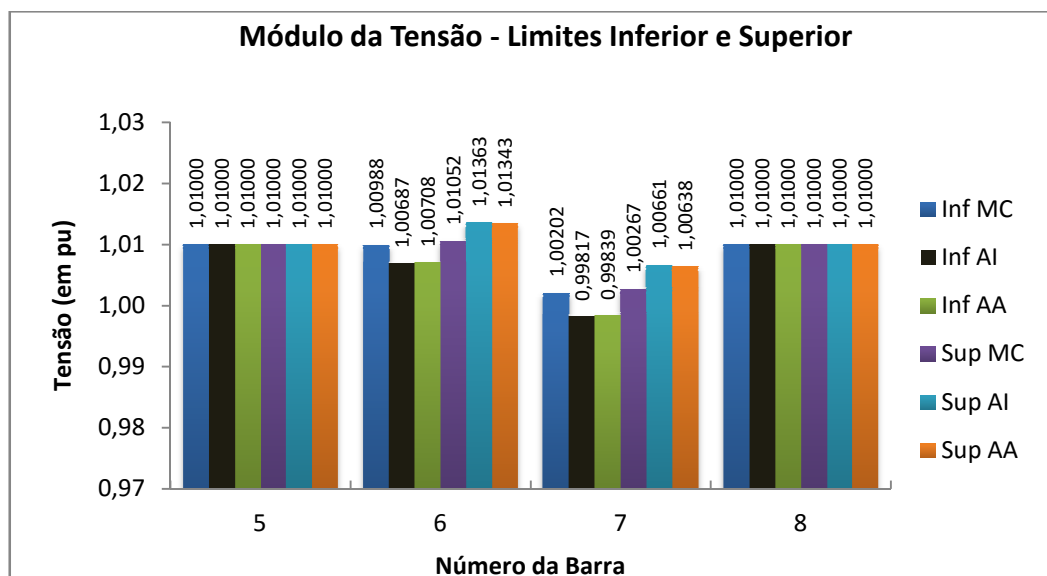


Figura 4.21 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 5 a 8) - Sistema IEEE 30 Barras

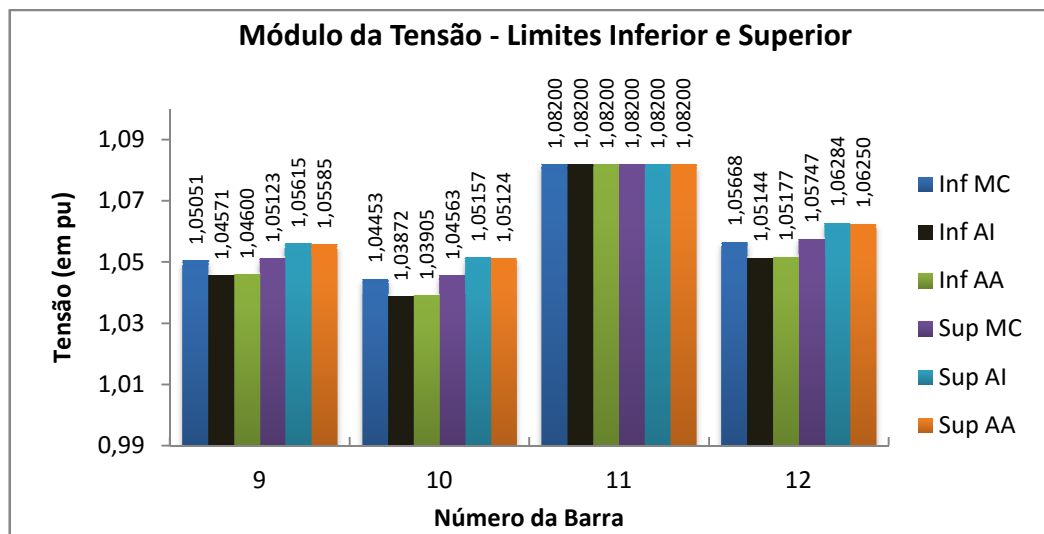


Figura 4.22 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 9 a 12) - Sistema IEEE 30 Barras

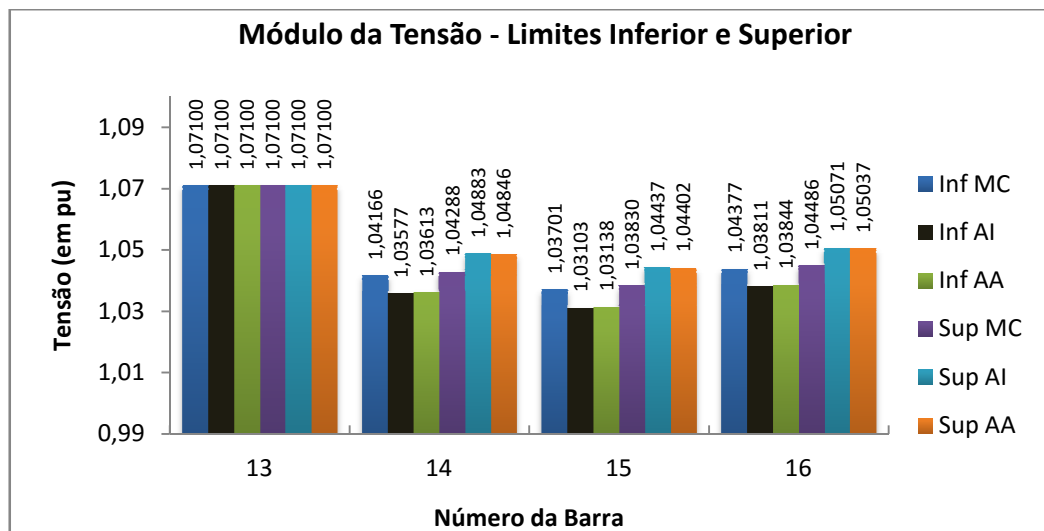


Figura 4.23 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 13 a 16) - Sistema IEEE 30 Barras

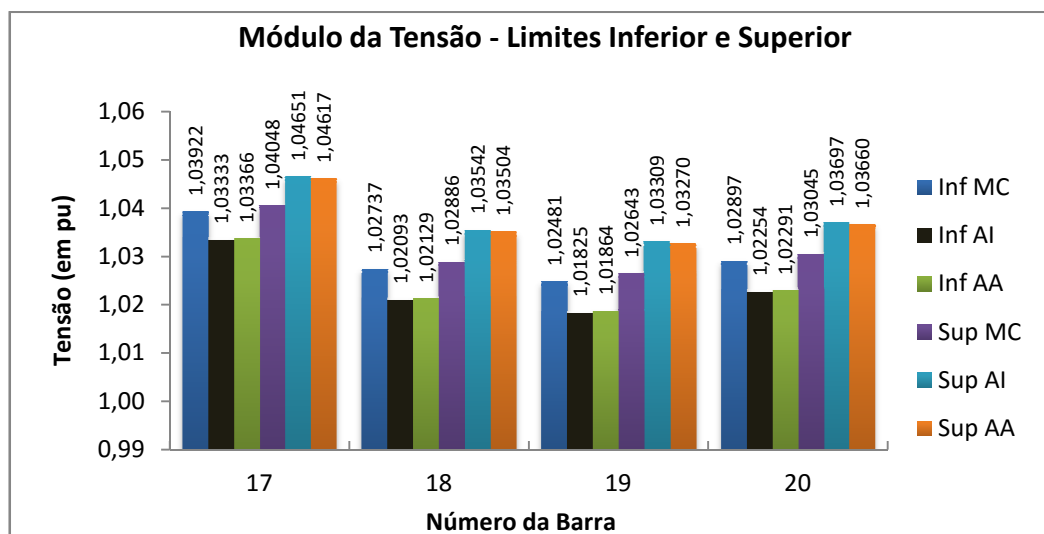


Figura 4.24 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 17 a 20) - Sistema IEEE 30 Barras

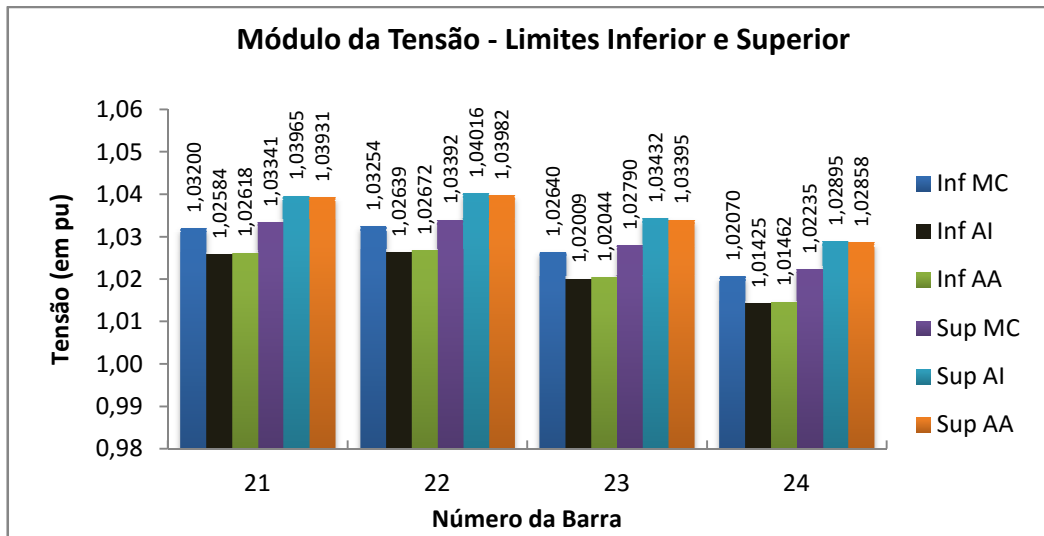


Figura 4.25 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 21 a 24) - Sistema IEEE 30 Barras

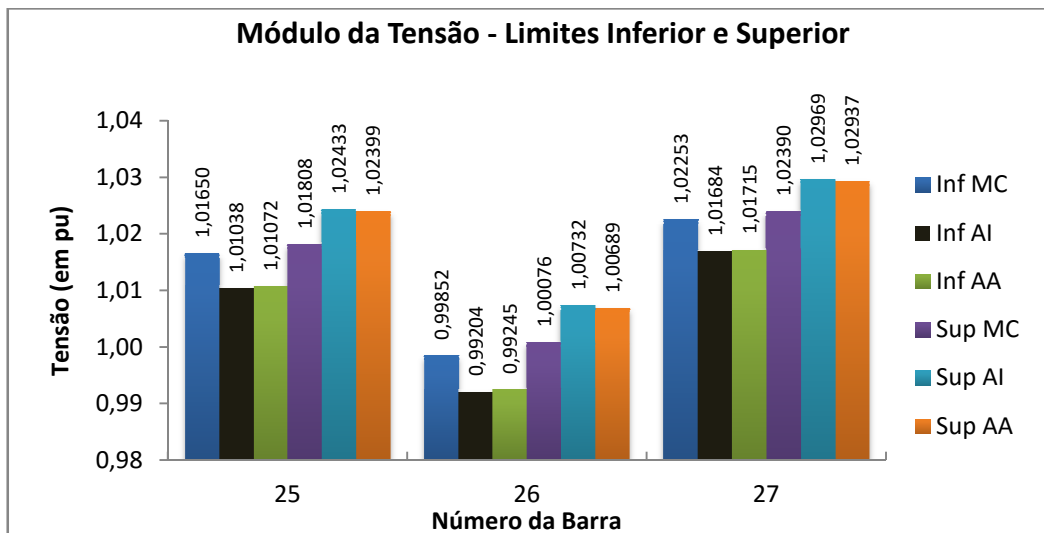


Figura 4.26 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 25 a 27) - Sistema IEEE 30 Barras

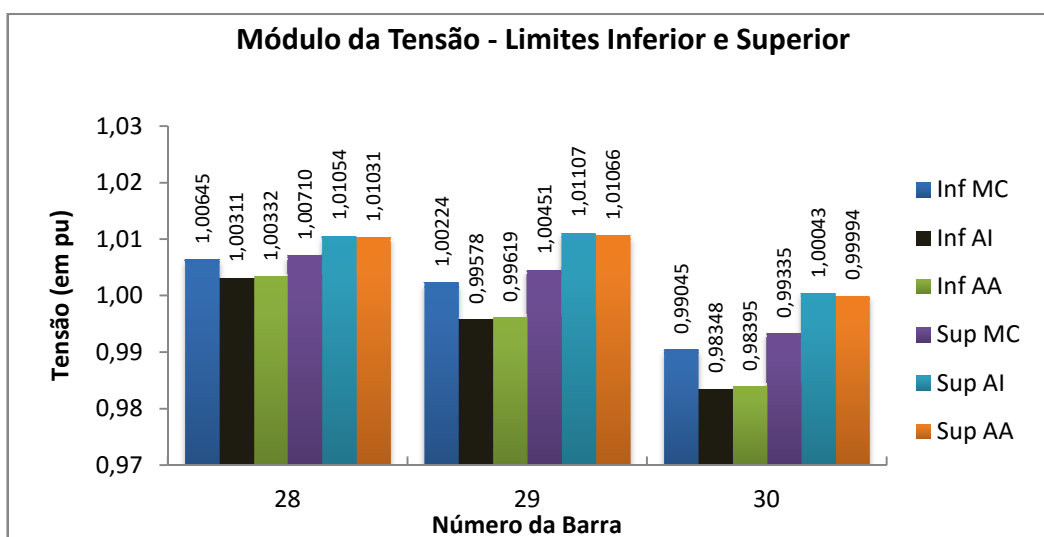


Figura 4.27 - Faixas do Módulo da Tensão (Barras 28 a 30) - Sistema IEEE 30 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.20 a 4.27, as faixas dos módulos intervalares das tensões nas barras PV (barras 5, 8, 11 e 13) têm o mesmo alcance para os três métodos. Para a barra de geração 2, verifica-se que o módulo da tensão varia, em relação ao valor especificado (1,043 pu), para os três métodos. Isto acontece porque essa barra viola os limites de geração de potência reativa, sendo convertida de PV para PQ. Assim, o seu limite superior de geração reativa é especificado no valor violado e permite-se que seu módulo da tensão varie. Para as barras PQ observa-se que a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária, sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior de ambas. A maior relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo, para a aritmética intervalar ordinária, é verificada na barra 12, no valor de 14,40001, que corresponde a uma relação de 13,56257 em aritmética afim. Para esta aritmética, a maior relação é verificada na barra 9, no valor de 13,57301, que corresponde a uma relação de 14,39673 em aritmética intervalar ordinária. Devido à pequena extensão dos diâmetros dos intervalos gerados, principalmente na Simulação de Monte Carlo, a relação entre eles tende a ser elevada, contudo, o erro relativo entre seus limites é pequeno.

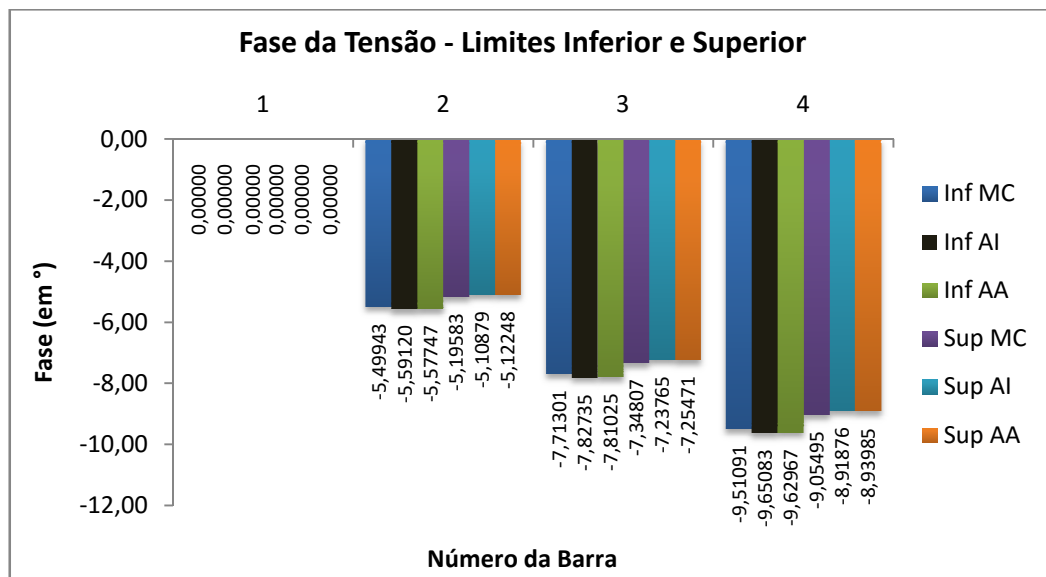


Figura 4.28 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 1 a 4) - Sistema IEEE 30 Barras

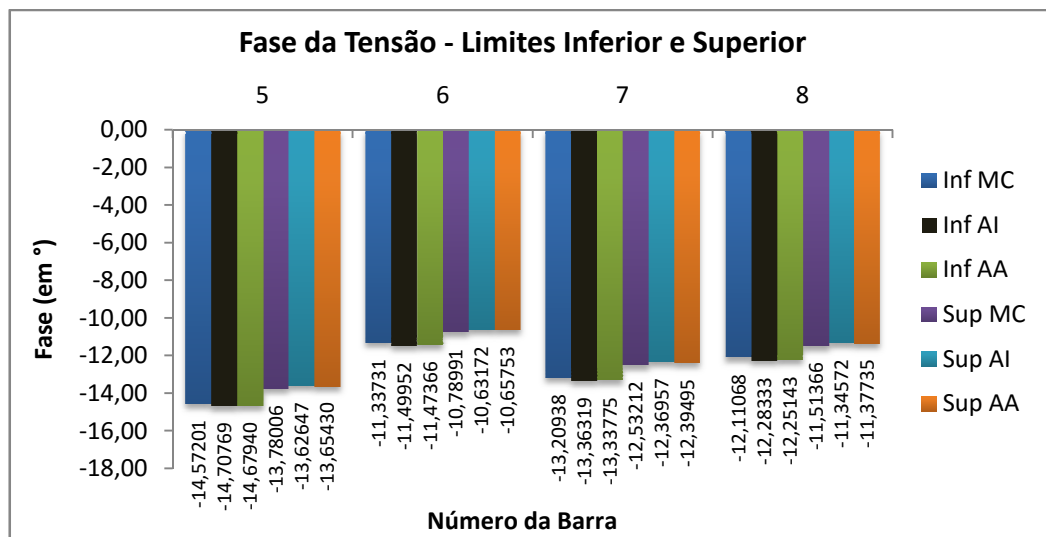


Figura 4.29 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 5 a 8) - Sistema IEEE 30 Barras

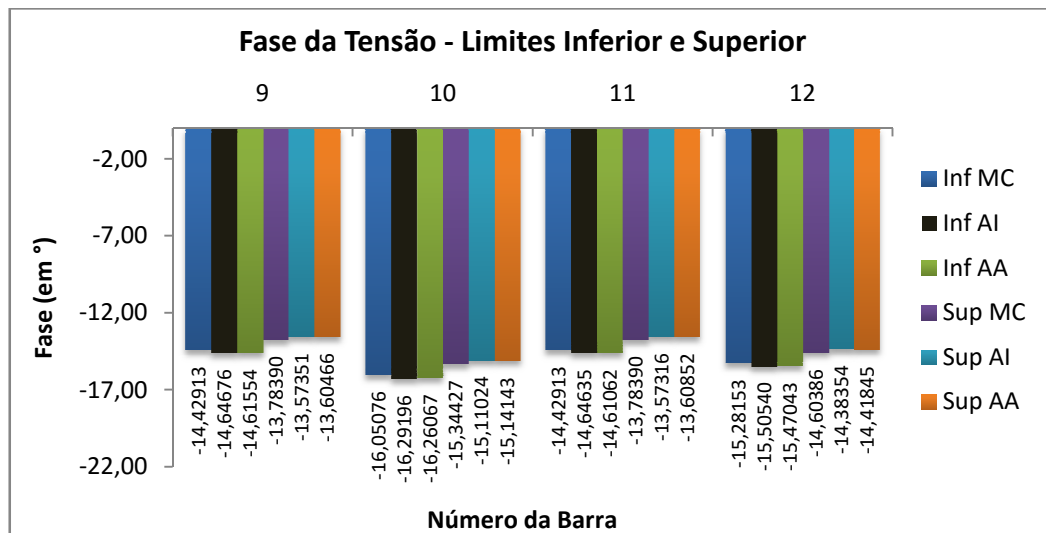


Figura 4.30 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 9 a 12) - Sistema IEEE 30 Barras

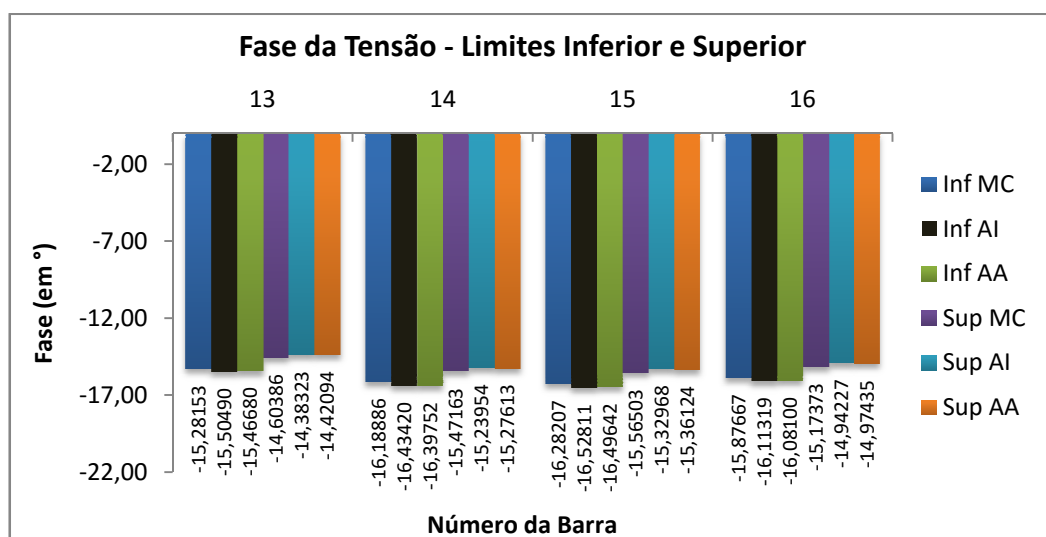


Figura 4.31 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 13 a 16) - Sistema IEEE 30 Barras

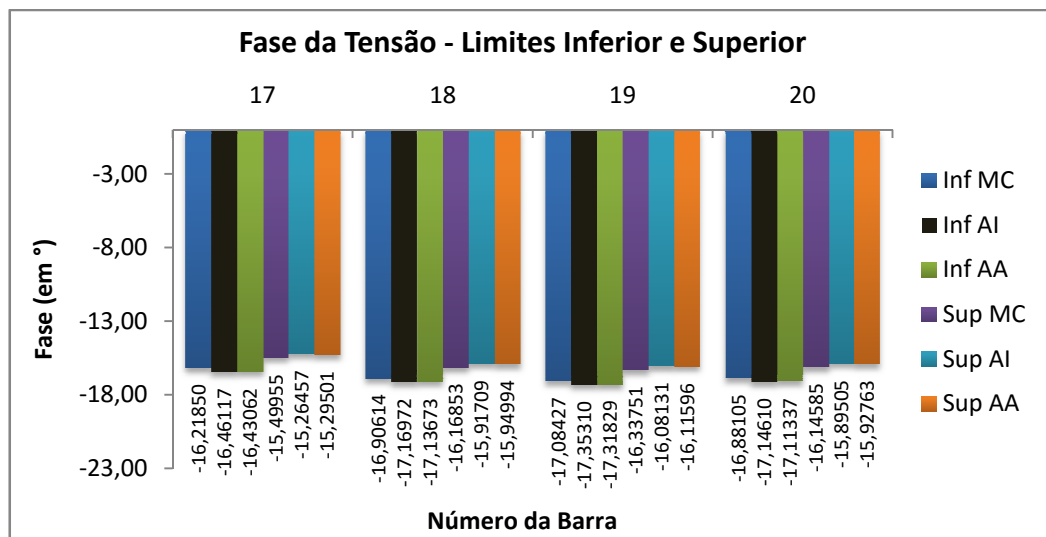


Figura 4.32 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 17 a 20) - Sistema IEEE 30 Barras

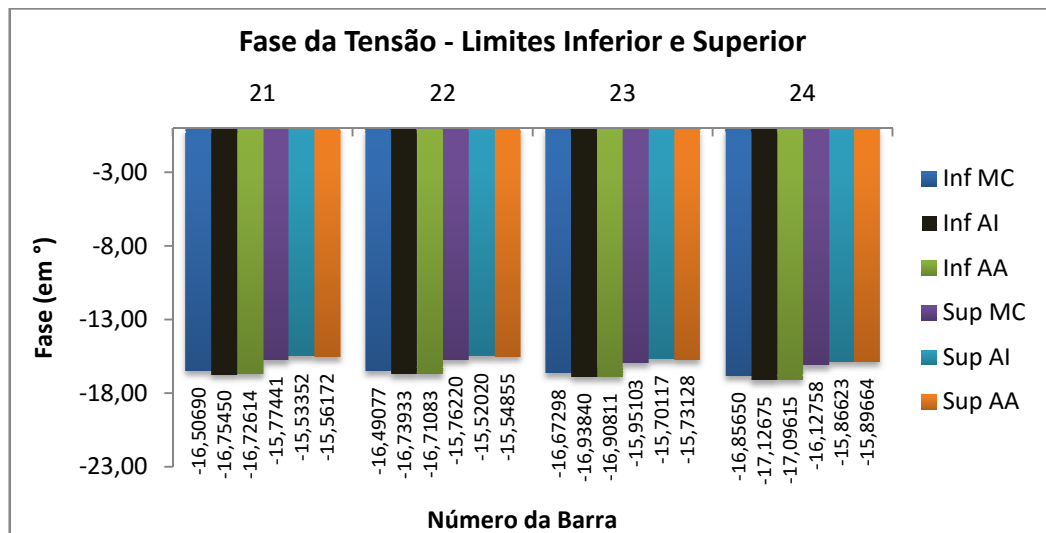


Figura 4.33 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 21 a 24) - Sistema IEEE 30 Barras

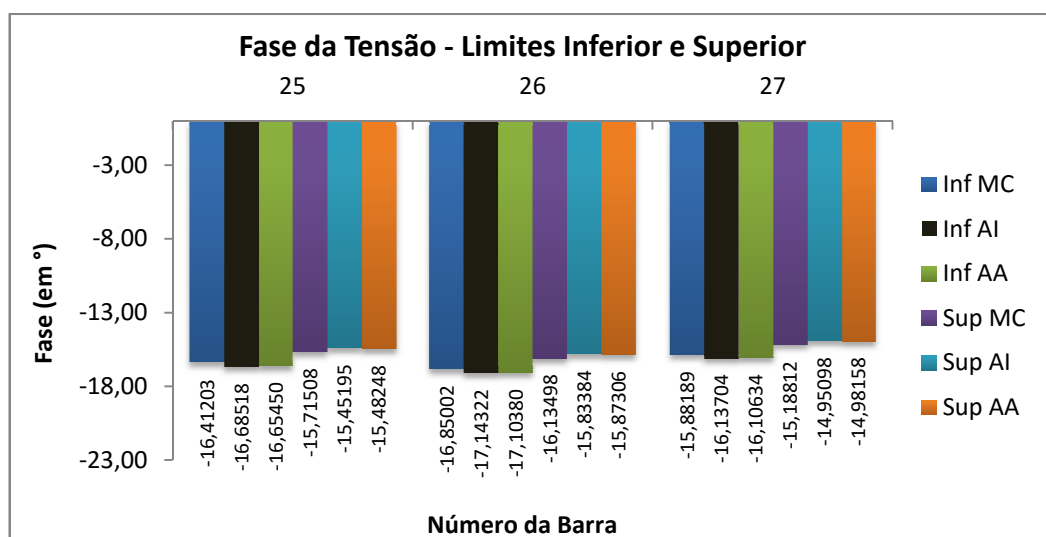


Figura 4.34 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 25 a 27) - Sistema IEEE 30 Barras

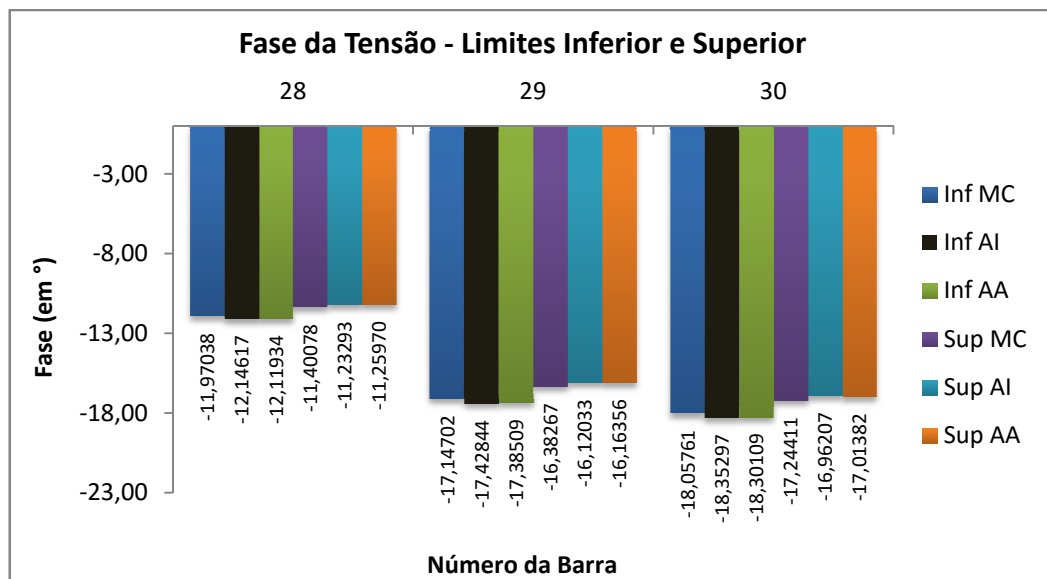


Figura 4.35 - Faixas da Fase da Tensão (Barras 28 a 30) - Sistema IEEE 30 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.28 a 4.35, para as barras PV e PQ observa-se que a aritmética intervalar afim apresenta uma faixa mais estreita que a aritmética intervalar ordinária, sendo que o alcance da primeira está contido no alcance da segunda. A Simulação de Monte Carlo resulta numa faixa ainda mais estreita que ambas as aritméticas testadas e seu alcance está contido no interior destas. A maior relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é verificada para a barra 26, no valor de 1,83121 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,72122 para a aritmética afim.

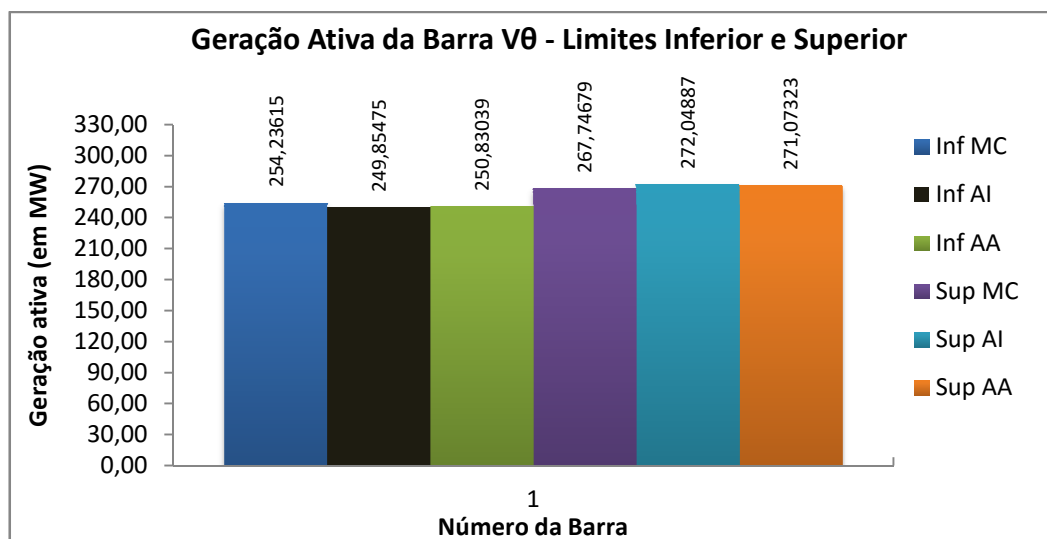


Figura 4.36 - Faixas da Geração Ativa da Barra V0 - Sistema IEEE 30 Barras

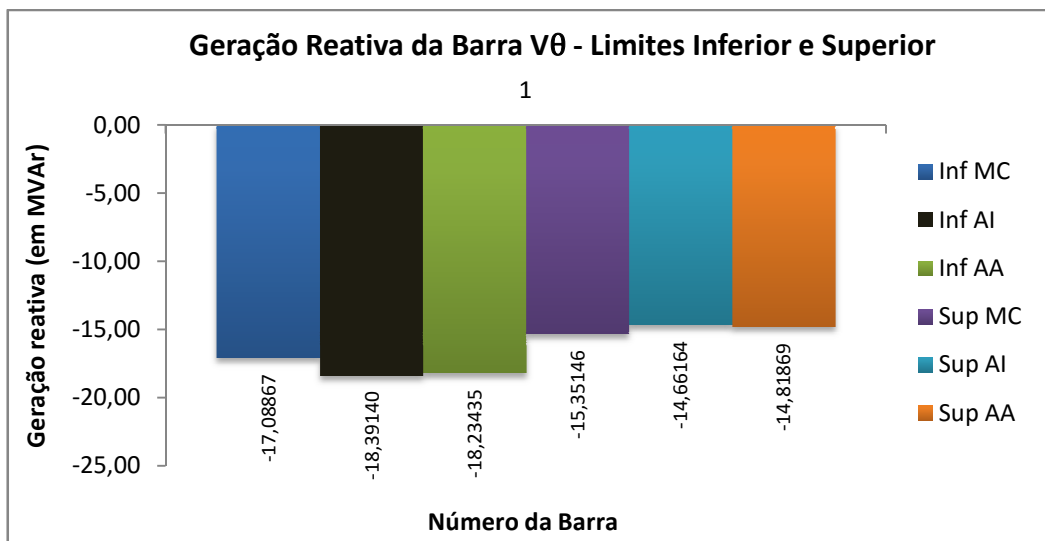


Figura 4.37 - Faixas da Geração Reativa da Barra V θ - Sistema IEEE 30 Barras

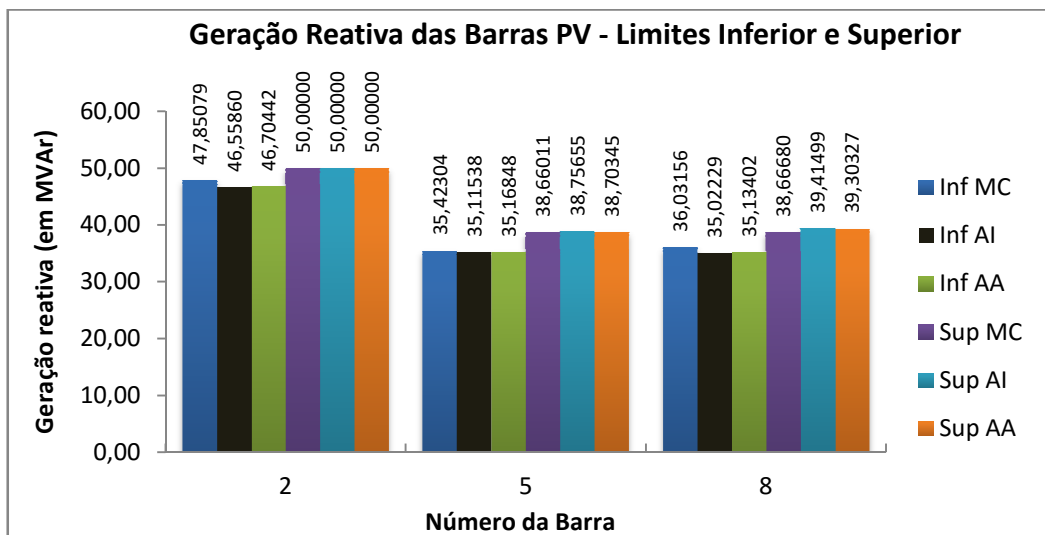


Figura 4.38 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV (2, 5 e 8) - Sistema IEEE 30 Barras

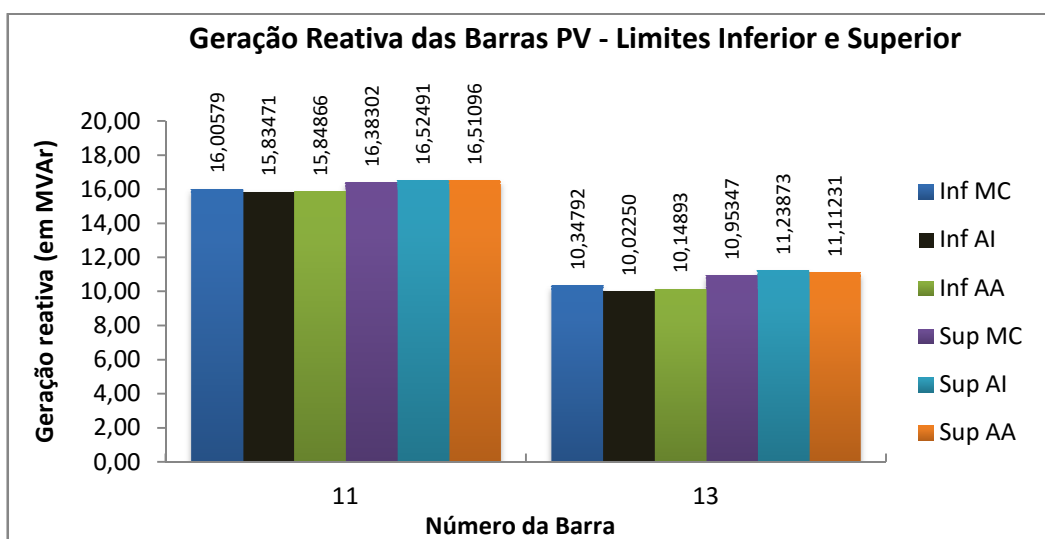


Figura 4.39 - Faixas da Geração Reativa das Barras PV (11 e 13) - Sistema IEEE 30 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.36 a 4.39, as faixas das gerações ativa e reativa da barra de referência $V\theta$ (barra 1) e geração reativa das barras PV (barras 2, 5, 8, 11 e 13) também apresentam-se mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, estando contidas na faixa obtida para a aritmética intervalar afim, que por sua vez, está contida na faixa da aritmética intervalar ordinária. Para a geração ativa, a relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é de 1,64271 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,49829 para a aritmética afim. Para a geração reativa da barra de referência, a relação é de 2,14697 para a aritmética intervalar ordinária e de 1,96616 para a aritmética afim. Para as barras PV, a maior relação é verificada na barra 13, no valor de 2,00845 para a aritmética intervalar ordinária, que corresponde a 1,59091 em aritmética afim. Para esta aritmética, a maior relação entre os diâmetros é verificada na barra 11, no valor de 1,75569, que corresponde a 1,82964 em aritmética intervalar ordinária. Para a barra de geração 2, como já mencionado, é violado o limite de geração reativa, o que resulta numa variação de tensão na barra e no maior número de iterações até a convergência.

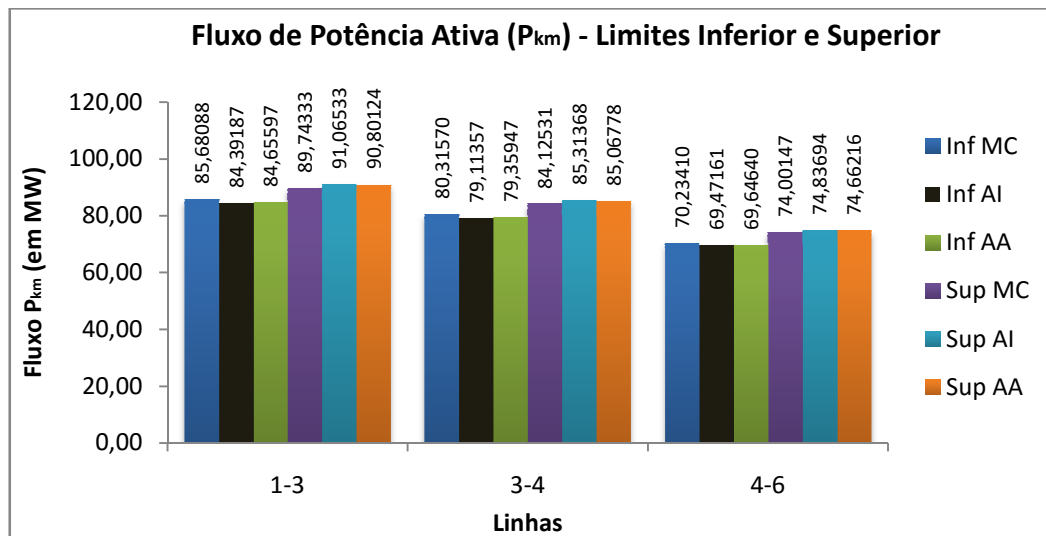


Figura 4.40 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{km}) - Sistema IEEE 30 Barras

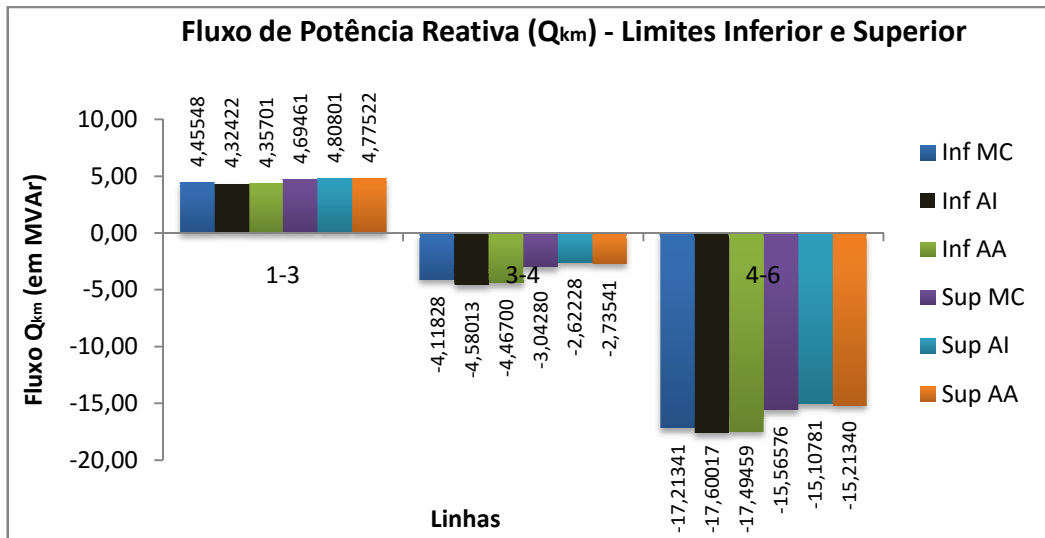


Figura 4.41 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{km}) - Sistema IEEE 30 Barras

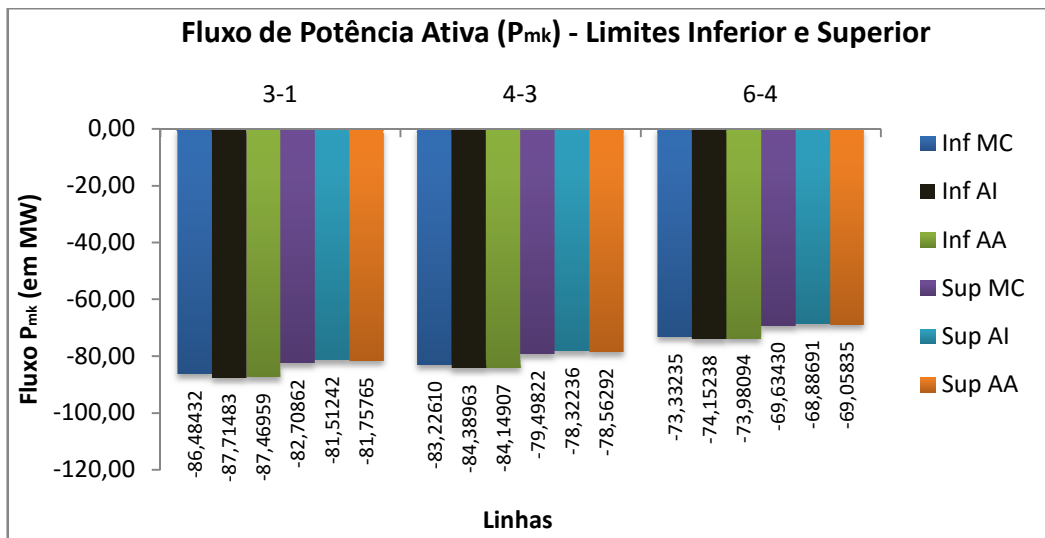


Figura 4.42 - Faixas do Fluxo de Potência Ativa (P_{mk}) - Sistema IEEE 30 Barras

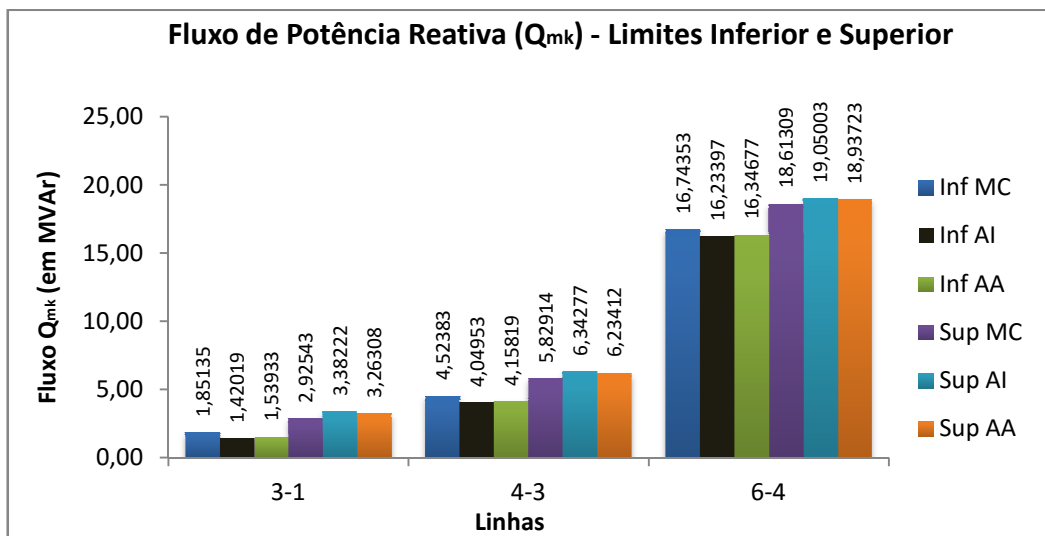


Figura 4.43 - Faixas do Fluxo de Potência Reativa (Q_{mk}) - Sistema IEEE 30 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.40 a 4.43, as faixas dos fluxos de potência ativa e reativa (P_{km} , Q_{km} , P_{mk} e Q_{mk}) apresentam-se, para a maioria das variáveis, mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e aritmética intervalar ordinária. Contudo, há linhas em que o diâmetro da Simulação de Monte Carlo é muito pouco maior que o diâmetro obtido para as aritméticas intervalares ordinária (Q_{2-5}) e afim (Q_{2-5} e Q_{2-6}). Há casos também que o diâmetro da Simulação de Monte Carlo é igual ao diâmetro da aritmética intervalar afim (P_{26-25} e Q_{26-25}). A maior relação entre os diâmetros da aritmética intervalar ordinária e da Simulação de Monte Carlo é de 9,41044 para o fluxo Q_{30-27} , que apresenta o valor de 1,02645 para a aritmética afim. Já para esta aritmética, a maior relação verificada é de 2,03750 para o fluxo Q_{1-2} , que apresenta o valor de 2,24183 para a aritmética intervalar ordinária.

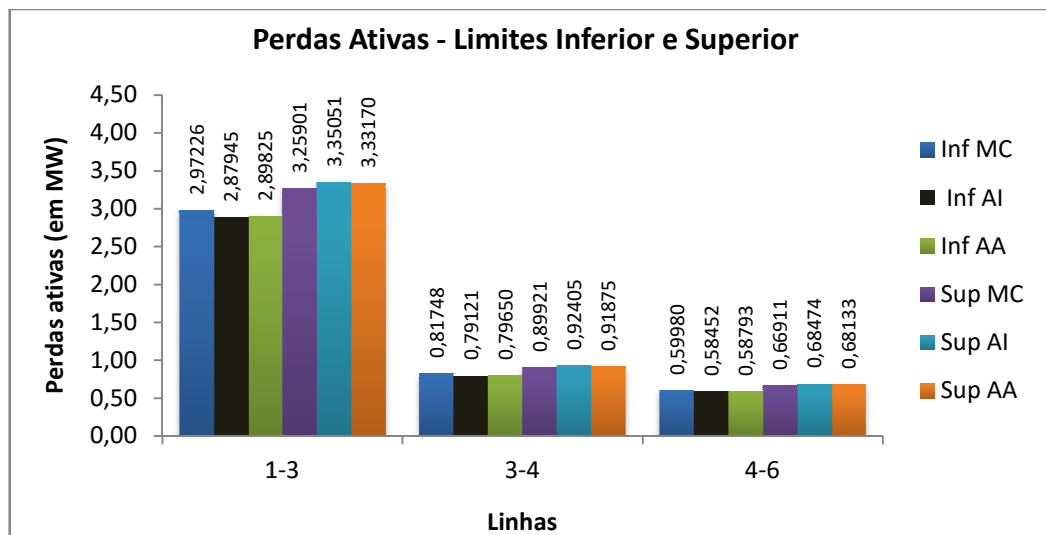


Figura 4.44 - Faixas das Perdas Ativas - Sistema IEEE 30 Barras

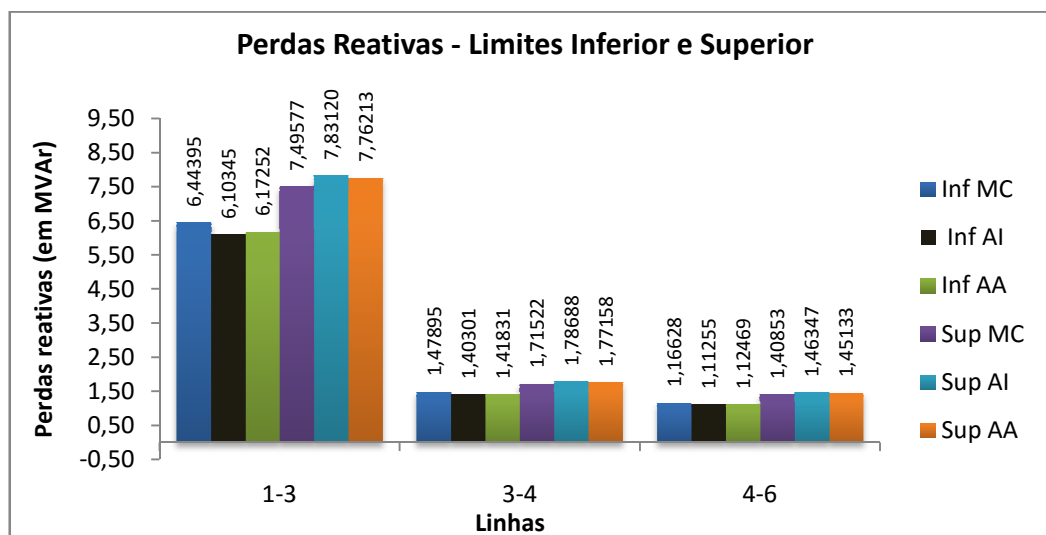


Figura 4.45 - Faixas das Perdas Reativas - Sistema IEEE 30 Barras

Conforme mostrado nas Figuras 4.44 e 4.45, as faixas das perdas ativas e reativas também se apresentam mais estreitas para a Simulação de Monte Carlo, seguidas das faixas obtidas para a aritmética intervalar afim e aritmética intervalar ordinária. A maior relação entre os diâmetros dos métodos testados e da Simulação de Monte Carlo é verificado para as perdas ativas e reativas na linha 24-25, correspondendo ao valor de 2,22775 em aritmética intervalar ordinária e 1,72627 em aritmética afim.

4.4 Testes Complementares

4.4.1 Avaliação do Comportamento das Aritméticas próximo ao Ponto de Máximo Carregamento (PMC)

De forma a avaliar o comportamento da aritmética afim e da aritmética intervalar ordinária quando ocorre uma variação no carregamento de um sistema (cargas ativas e reativas de todas as barras), mantendo-se constante o fator de potência, investigou-se o sistema IEEE 30 barras operando próximo ao ponto de máximo carregamento. Para isso, com o auxílio do software ANAREDE, foi calculado o ponto de máximo carregamento do sistema, considerando que o carregamento extra seria absorvido pela barra de referência. Adotou-se ainda o controle de reativos em barras de geração. O resultado obtido mostrou que a relação entre as cargas no ponto de máximo carregamento e em operação nominal era de 1,536.

A partir disso, as demandas ativas e reativas de todas as barras são aumentadas em 45% em relação ao valor nominal e, para o cálculo do fluxo de potência intervalar, é aplicada uma variação de $\pm 3\%$ nas demandas ativas e $\pm 1\%$ nas demandas reativas. O sistema, que no ponto nominal converge em 2 iterações para o fluxo de potência determinístico e em 3 iterações, tanto para o fluxo de potência intervalar afim quanto para o fluxo de potência intervalar ordinário, passou a convergir em 7 iterações para o fluxo determinístico e em 1 iteração para o fluxo de potência intervalar afim e intervalar ordinário.

É verificado, na totalidade dos casos, o mesmo comportamento observado para o ponto de operação nominal, ou seja, o intervalo obtido para a Simulação de Monte Carlo encontra-se contido no intervalo obtido para a aritmética afim que, por sua vez, está contido no intervalo obtido para a aritmética intervalar. Excluindo-se as barras de geração, as quais tornaram-se barras de carga já no fluxo determinístico e, portanto, não foram calculadas na forma intervalar, a relação entre os diâmetros do método de Monte Carlo e das aritméticas em

análise diminuem significativamente para o módulo da tensão. Por exemplo, no ponto de operação nominal, a relação entre o diâmetro da aritmética afim e da Simulação de Monte Carlo para o módulo da tensão na barra 9 (pior caso) era de 13,57301, passando para 2,19523 no novo ponto em análise. Para a aritmética intervalar, o valor passa de 14,39673 para 2,29438. A maior relação entre os diâmetros é agora verificada na barra 13, no valor de 2,39766 para a aritmética afim e 2,52356 para a aritmética intervalar. Para a fase das tensões nas barras é observado um aumento pouco significativo na relação entre os diâmetros para as duas aritméticas, quando comparadas ao ponto de operação nominal.

Para os fluxos de potência reativa de algumas linhas fica evidenciado um melhor comportamento da aritmética afim quando comparado com o desempenho da aritmética intervalar ordinária. Por exemplo, no fluxo Q_{19-20} , a relação entre os diâmetros é de 8,48119 para a aritmética intervalar e de 1,77878 para a aritmética afim; no fluxo Q_{18-15} , a relação é de 8,42159 para a aritmética intervalar e de 1,74954 para a aritmética afim.

4.4.2 Avaliação do Intervalo de Solução Inicial

A inicialização do processo iterativo intervalar, via aritmética afim, é investigada utilizando o sistema IEEE 14 barras. Variações de $\pm 7\%$ nas demandas ativas e $\pm 3\%$ nas demandas reativas, em todas as barras, são consideradas. Em função dessas variações, as componentes real e imaginária, ambas intervalares, das tensões iniciais em todas as barras são calculadas através das equações (3.27) e (3.28). De modo a investigar o desempenho do método proposto, variações de $\pm 1\%$ a $\pm 10\%$ nas componentes real e imaginária calculadas anteriormente são consideradas. Os resultados obtidos em termos do número de iterações, da maior e menor relação entre diâmetros para diversas variáveis e dos respectivos desvios dos intervalos em relação aos limites inferior e superior obtidos pela Simulação de Monte Carlo (SMC) são apresentados nas Tabelas 4.1 a 4.8. A variação 0% corresponde às componentes real e imaginária, ambas intervalares, calculadas através de (3.27) e (3.28).

Tabela 4.1 - Resultados para o Módulo da Tensão

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Módulo da tensão na barra 12)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Módulo da tensão na barra 12	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Módulo da tensão na barra 12	Menor relação entre diâmetros (Módulo da tensão na barra 5)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Módulo da tensão na barra 5	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Módulo da tensão na barra 5
±0%	1	15,95167	1,04853	1,07866	4,31446	0,42379	0,43306
±1%	3	15,02607	0,99210	1,00343	4,14216	0,40503	0,40729
±2%	3	14,06762	0,93267	0,92650	3,95999	0,38476	0,38047
±3%	3	13,11094	0,87274	0,85033	3,77825	0,36432	0,35393
±4%	3	12,15606	0,81231	0,77492	3,59695	0,34371	0,32768
±5%	3	11,20299	0,75137	0,70027	3,41609	0,32293	0,30171
±6%	3	10,25174	0,68993	0,62639	3,23566	0,30197	0,27603
±7%	3	9,30233	0,62798	0,55327	3,05566	0,28084	0,25063
±8%	3	8,77354	0,59552	0,51050	2,87634	0,25957	0,22555
±9%	3	9,72119	0,66817	0,57269	3,01071	0,27882	0,24104
±10%	4	10,66812	0,74013	0,63546	3,19018	0,30370	0,26256

Tabela 4.2 - Resultados para a Fase da Tensão

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Fase da tensão na barra 12)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Fase da tensão na barra 12	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Fase da tensão na barra 12	Menor relação entre diâmetros (Fase da tensão na barra 3)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Fase da tensão na barra 3	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Fase da tensão na barra 3
±0%	1	1,35785	2,15550	2,08839	1,18510	1,09743	1,56437
±1%	3	1,19725	1,18947	1,14966	1,04923	0,12531	0,60809
±2%	3	1,03619	0,21941	0,20958	0,91320	0,84882	0,34829
±3%	3	0,87508	0,75211	0,72936	0,77715	1,82402	1,30387
±4%	3	0,71394	1,72507	1,66717	0,64107	2,80029	2,25864
±5%	3	0,55276	2,69946	2,60383	0,50496	3,77762	3,21259
±6%	3	0,39154	3,67529	3,53933	0,36883	4,75600	4,16571
±7%	3	0,23029	4,65253	4,47366	0,23267	5,73541	5,11801
±8%	3	0,14027	5,22964	4,95971	0,09649	6,71585	6,06945
±9%	3	0,30145	4,39262	3,86836	0,15398	6,40825	5,54526
±10%	4	0,46267	3,55661	2,77540	0,29012	5,57807	4,42117

Tabela 4.3 - Resultados para as Gerações da Barra de Referência (V θ)

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Geração ativa da barra V θ)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Geração ativa da barra V θ	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Geração ativa da barra V θ	Menor relação entre diâmetros (Geração reativa da barra V θ)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Geração reativa da barra V θ	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Geração reativa da barra V θ
±0%	1	1,28842	2,18270	1,81274	1,28342	4,02787	4,58374
±1%	3	1,28844	2,18279	1,81282	1,28343	4,02801	4,58393
±2%	3	1,28846	2,18295	1,81295	1,28344	4,02815	4,58413
±3%	3	1,28848	2,18309	1,81308	1,28345	4,02829	4,58431
±4%	3	1,28849	2,18323	1,81320	1,28346	4,02842	4,58449
±5%	3	1,28851	2,18336	1,81331	1,28347	4,02854	4,58464
±6%	3	1,28853	2,18347	1,81341	1,28348	4,02865	4,58479
±7%	3	1,28854	2,18357	1,81350	1,28348	4,02874	4,58492
±8%	3	1,28855	2,18367	1,81358	1,28349	4,02883	4,58504
±9%	3	1,28856	2,18375	1,81365	1,28350	4,02891	4,58515
±10%	4	1,28857	2,18382	1,81371	1,28350	4,02898	4,58525

Tabela 4.4 - Resultados para a Geração Reativa das Barras PV

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Geração reativa da barra 6)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Geração reativa da barra 6	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Geração reativa da barra 6	Menor relação entre diâmetros (Geração reativa da barra 3)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Geração reativa da barra 3	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Geração reativa da barra 3
±0%	1	1,58786	7,66140	5,97871	1,12334	2,60885	1,40360
±1%	3	1,58788	7,66170	5,97896	1,12336	2,60918	1,40384
±2%	3	1,58805	7,66394	5,98073	1,12338	2,60967	1,40420
±3%	3	1,58821	7,66601	5,98238	1,12341	2,61013	1,40453
±4%	3	1,58836	7,66792	5,98390	1,12343	2,61056	1,40484
±5%	3	1,58850	7,66967	5,98529	1,12345	2,61095	1,40513
±6%	3	1,58862	7,67126	5,98656	1,12347	2,61130	1,40539
±7%	3	1,58873	7,67270	5,98769	1,12349	2,61162	1,40562
±8%	3	1,58883	7,67397	5,98871	1,12351	2,61191	1,40583
±9%	3	1,58892	7,67508	5,98959	1,12352	2,61217	1,40602
±10%	4	1,58899	7,67604	5,99035	1,12353	2,61239	1,40618

Tabela 4.5 - Resultados para os Fluxos Ativos

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Fluxo ativo P ₂₋₅)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Fluxo ativo P ₂₋₅	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Fluxo ativo P ₂₋₅	Menor relação entre diâmetros (Fluxo ativo P ₂₋₃)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Fluxo ativo P ₂₋₃	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Fluxo ativo P ₂₋₃
±0%	1	1,37361	2,05761	1,90310	1,10765	0,79017	0,66009
±1%	3	1,37362	2,05765	1,90313	1,10767	0,79028	0,66018
±2%	3	1,37364	2,05778	1,90325	1,10769	0,79041	0,66030
±3%	3	1,37366	2,05790	1,90335	1,10771	0,79054	0,66041
±4%	3	1,37368	2,05800	1,90345	1,10772	0,79065	0,66051
±5%	3	1,37370	2,05810	1,90354	1,10774	0,79076	0,66060
±6%	3	1,37371	2,05819	1,90362	1,10775	0,79086	0,66069
±7%	3	1,37373	2,05827	1,90369	1,10776	0,79094	0,66076
±8%	3	1,37374	2,05834	1,90375	1,10777	0,79102	0,66083
±9%	3	1,37375	2,05841	1,90381	1,10778	0,79109	0,66090
±10%	4	1,37376	2,05846	1,90386	1,10779	0,79115	0,66095

Tabela 4.6 - Resultados para os Fluxos Reativos

Variação adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Fluxo reativo Q ₇₋₄)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Fluxo reativo Q ₇₋₄	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Fluxo reativo Q ₇₋₄	Menor relação entre diâmetros (Fluxo reativo Q ₂₋₃)	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior do Fluxo reativo Q ₂₋₃	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior do Fluxo reativo Q ₂₋₃
±0%	1	1,47695	1,96424	1,65068	1,10787	2,39573	0,72884
±1%	3	1,47696	1,96430	1,65073	1,10787	2,39595	0,72901
±2%	3	1,47690	1,96405	1,65051	1,10787	2,39624	0,72924
±3%	3	1,47684	1,96383	1,65030	1,10787	2,39651	0,72944
±4%	3	1,47679	1,96362	1,65010	1,10787	2,39676	0,72963
±5%	3	1,47674	1,96343	1,64993	1,10787	2,39699	0,72981
±6%	3	1,47670	1,96325	1,64977	1,10787	2,39720	0,72997
±7%	3	1,47666	1,96310	1,64962	1,10787	2,39740	0,73012
±8%	3	1,47662	1,96296	1,64949	1,10787	2,39757	0,73025
±9%	3	1,47659	1,96284	1,64938	1,10787	2,39772	0,73036
±10%	4	1,47657	1,96274	1,64929	1,10787	2,39785	0,73046

Tabela 4.7 - Resultados para as Perdas Ativas

Varição adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Perda ativa P_{10-11})	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Perda ativa P_{10-11}	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Perda ativa P_{10-11}	Menor relação entre diâmetros (Perda ativa P_{2-3})	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Perda ativa P_{2-3}	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Perda ativa P_{2-3}
±0%	1	1,38704	32,45483	7,66099	1,10750	2,18424	0,81944
±1%	3	1,38705	32,45521	7,66116	1,10752	2,18446	0,81961
±2%	3	1,38708	32,45693	7,66190	1,10754	2,18474	0,81983
±3%	3	1,38710	32,45852	7,66260	1,10755	2,18500	0,82003
±4%	3	1,38712	32,45999	7,66324	1,10757	2,18525	0,82022
±5%	3	1,38714	32,46134	7,66383	1,10758	2,18547	0,82039
±6%	3	1,38716	32,46256	7,66436	1,10760	2,18568	0,82055
±7%	3	1,38718	32,46366	7,66484	1,10761	2,18586	0,82069
±8%	3	1,38720	32,46464	7,66527	1,10762	2,18603	0,82082
±9%	3	1,38721	32,46550	7,66564	1,10763	2,18618	0,82093
±10%	4	1,38722	32,46623	7,66596	1,10764	2,18631	0,82103

Tabela 4.8 - Resultados para as Perdas Reativas

Varição adotada	Número de Iterações	Maior relação entre diâmetros (Perda reativa Q_{10-11})	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Perda reativa Q_{10-11}	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Perda reativa Q_{10-11}	Menor relação entre diâmetros (Perda reativa Q_{2-3})	Desvio (%) em relação a SMC para o limite inferior da Perda reativa Q_{2-3}	Desvio (%) em relação a SMC para o limite superior da Perda reativa Q_{2-3}
±0%	1	1,38704	32,45483	7,66099	1,10750	4,76287	1,40238
±1%	3	1,38705	32,45521	7,66116	1,10752	4,76335	1,40267
±2%	3	1,38708	32,45693	7,66190	1,10754	4,76396	1,40304
±3%	3	1,38710	32,45852	7,66260	1,10755	4,76454	1,40338
±4%	3	1,38712	32,45999	7,66324	1,10757	4,76507	1,40370
±5%	3	1,38714	32,46134	7,66383	1,10758	4,76556	1,40400
±6%	3	1,38716	32,46256	7,66436	1,10760	4,76601	1,40427
±7%	3	1,38718	32,46366	7,66484	1,10761	4,76641	1,40451
±8%	3	1,38720	32,46464	7,66527	1,10762	4,76678	1,40473
±9%	3	1,38721	32,46550	7,66564	1,10763	4,76710	1,40493
±10%	4	1,38722	32,46623	7,66596	1,10764	4,76738	1,40510

Conforme mostrado nas Tabelas 4.1 a 4.8 e como esperado, o aumento da variação nas componentes real e imaginária intervalares iniciais implicou no aumento do número de iterações necessária à convergência do fluxo de potência intervalar proposto.

Com relação ao módulo da tensão intervalar, Tabela 4.1, o aumento da variação nas componentes real e imaginária intervalares iniciais implica na redução dos seguintes parâmetros: maior relação entre diâmetros (barra 12), menor relação entre diâmetros (barra 5), desvio do limite inferior do módulo da tensão e desvio do limite superior do módulo da tensão. Isso significa uma melhoria na qualidade do módulo da tensão intervalar calculado pelo método proposto, tomando-se a Simulação de Monte Carlo como referência. Por outro lado, a partir de $\pm 8\%$ de variação, um crescimento nos parâmetros anteriormente citados pode ser observado, significando que $\pm 8\%$ pode ser considerado um limite entre uma estimativa inicial adequada ou não para o cálculo do módulo da tensão, para o sistema teste em estudo.

Com relação à fase da tensão intervalar, Tabela 4.2, o aumento da variação nas componentes real e imaginária intervalares iniciais implica na redução dos seguintes parâmetros: maior relação entre diâmetros (barra 12) e menor relação entre diâmetros (barra 3). Os desvios dos limites inferior e superior da fase da tensão variam de forma aleatória, ou seja, aumentando e diminuindo. Além disso, para variação de $\pm 3\%$ a $\pm 10\%$, os diâmetros das fases nas barras 3 e 12 obtidos pelo método proposto são menores que aqueles gerados pela simulação de Monte Carlo, o que significa uma solução otimista, contudo indesejável aos objetivos do estudo.

Com relação às outras variáveis dependentes funcionais, Tabelas 4.3 a 4.8, o aumento da variação nas componentes real e imaginária intervalares iniciais não implica em qualquer alteração significativa nos resultados, ou seja, os resultados para 0% praticamente se repetem até $\pm 10\%$ de variação, em cada tabela. Essa constatação sugere duas linhas futuras de pesquisa, ou seja, num primeiro plano investigar mais profundamente o pacote da aritmética afim utilizado neste trabalho. Num segundo estágio, investigar a possibilidade ou não de utilizar um procedimento alternativo para o cálculo das variáveis dependentes, que não consista, única e exclusivamente das Equações (3.34) a (3.37).

Essa gama de resultados, Tabelas 4.1 a 4.8, mostra o quanto é difícil e, sobretudo, importante a escolha de uma estimativa inicial adequada. É possível concluir que o processo de inicialização proposto neste trabalho (0% de variação) é uma boa escolha inicial.

Tudo que foi dito nesta seção a respeito da aritmética afim pode ser verificado quando da utilização da aritmética intervalar ordinária.

5 Conclusão

5.1 Considerações Finais

Este trabalho apresenta um método para cálculo do fluxo de potência intervalar baseado na aritmética afim. Como processo de solução do fluxo de potência, equações de injeção de corrente escritas em termos das coordenadas retangulares da tensão são utilizadas. A inicialização das tensões intervalares é realizada a partir da matriz Jacobiana convergida do fluxo de potência determinístico. No processo de solução, limites de geração de potência reativa em barras de geração são considerados. Para a resolução dos sistemas não-lineares intervalares utilizou-se o método de Krawczyk, que apresenta como maior vantagem a não necessidade de realizar a inversão de matrizes para obter o conjunto solução.

As incertezas consideradas no trabalho referem-se às demandas ativa e reativa das barras. Diante disso, as variáveis de saída do fluxo de potência também devem ser calculadas na forma intervalar. Todas as operações matemáticas foram realizadas com o auxílio da ferramenta INTLAB. Para a aritmética afim, optou-se por mostrar os resultados na forma intervalar, de modo que fosse possível realizar a comparação entre os resultados obtidos com a aplicação da aritmética intervalar ordinária e com a Simulação de Monte Carlo. Esta foi utilizada para a validação do método proposto e, para isso, procurou-se executar um número expressivo de simulações, de modo a obter resultados os mais corretos possíveis.

A matemática intervalar é uma ferramenta muito útil quando os dados de entrada variam dentro de intervalos relativamente pequenos, pois apresenta resultados que incluem todas as soluções possíveis. Nesse contexto, foi mostrado que os resultados obtidos pela aplicação da aritmética intervalar afim apresentam intervalos mais estreitos, em torno do ponto de solução do fluxo determinístico, que a aritmética intervalar ordinária. A razão disso é que a aritmética afim considera a correlação entre as variáveis. Observou-se também que a relação entre os diâmetros do método testado e da Simulação de Monte Carlo tendem a ser maiores para os fluxos de potência reativa.

A contribuição deste trabalho é o cálculo das condições de operação do sistema na forma intervalar utilizando a aritmética afim. Estes resultados são muito importantes, pois

permitem que o operador conheça a faixa de possíveis valores que determinada variável pode assumir, em especial a tensão e os fluxos de potência ativa.

A aritmética afim apresenta resultados mais próximos aos obtidos pela Simulação de Monte Carlo com um tempo de processamento muito inferior, justificando seu uso. Acredita-se que quanto maior o sistema, mais visível fique as vantagens do uso da aritmética afim quando comparada com a aritmética intervalar ordinária. A razão disso é que as correlações entre as variáveis aumentam, tocando no ponto chave desta aritmética.

5.2 Proposta para Trabalhos Futuros

Visando dar continuidade à pesquisa iniciada no presente trabalho, são apresentadas, a seguir, algumas possíveis sugestões para o desenvolvimento do Fluxo de Potência Intervalar Afim, dentre as quais destacam-se:

- Utilizar a aritmética afim em conjunto com a aritmética intervalar na solução do fluxo de potência com dados incertos;
- Comparar a eficiência computacional e os resultados do Fluxo de Potência Intervalar com outros métodos, como o Fluxo de Potência *Fuzzy* e o Fluxo de Potência Probabilístico;
- Inserir outras formas de controle no Fluxo de Potência Intervalar.
- Testar o método para os fluxos de potência escritos em termos das injeções de potência, tanto na forma polar quanto na forma retangular.
- Calcular as gerações reativas intervalares das barras de geração utilizando a matriz Jacobiana injeção de correntes e um processo iterativo, da mesma forma em que são calculados os módulos e as fases da tensão, ambos intervalares.
- Investigar as possíveis razões pelas quais os fluxos de potência reativa e a perda reativa apresentam, em algumas situações, as maiores relações entre diâmetros, comparativamente à Simulação de Monte Carlo.

Referências

- [1] Monticelli, A. J., “Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica”, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1983.
- [2] Cavalcante, P. L., “Fluxo de Carga Trifásico com Modelagem de Incertezas via Função de Pertinência Sinusoidal”, Dissertação, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – UNICAMP, Campinas, 2010.
- [3] Pereira, M. A., Murari, C. A. F., “Electrical Distribution System Fuzzy Load Estimation”, ISAP, Rio de Janeiro, pp. 370-375, 1999.
- [4] Borkowska, B., “Probabilistic Load Flow”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-93, no. 6, pp. 752-755, 1974.
- [5] Allan, R. N., Borkowska, B., Griff, C. H., “Probabilistic Analysis of Power Flows”, IEEE Proceedings, vol. 121, no. 12, pp. 1551-1556, December 1974.
- [6] Allan, R. N., Al-Shakarchi, M. R. G., “Probabilistic A.C. Load Flow”, IEEE Proceedings, vol. 123, no. 6, pp. 531-536, June 1976.
- [7] Allan, R. N., Leite da Silva, A. M., Burchett, R. C., “Evaluation Methods and Accuracy in Probabilistic Load Flow Solutions”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, no. 5, pp. 2539-2546, May 1981.
- [8] Allan, R. N., Leite da Silva, A. M., “Probabilistic Load Flow using Multilinearizations”, IEEE Proceedings, vol. 128, pp. 280-287, September 1981.
- [9] Leite da Silva, A. M., Arienti, V. L., “Probabilistic Load Flow by a Multilinear Simulation Algorithm”, IEEE Proceedings, vol. 137, pp. 276-282, July 1990.
- [10] Meliopoulos, A. P., Cokkinides, G. J., Chao, X. Y., “A New Probabilistic Power Analysis Method”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 5, pp. 182-190, February 1990.
- [11] Stefopoulos, G. K., Meliopoulos, A. P.; Cokkinides, G. J., “Probabilistic Power Flow With Non-conforming Electric Loads”, International Journal of Electrical Power and Energy System, vol. 27, no. 9, pp. 627-634, December 2005.
- [12] Su, C. L., “Probabilistic Load Flow Computation Using Point Estimate Method”, IEEE Transactions on Power System, vol. 20, no. 4, pp. 1843-1851, November 2005.
- [13] Hu, Z.; Wang, X., “A Probabilistic Load Flow Method Considering Branch Outages”, IEEE Transactions on Power System, vol. 21, no. 2, pp. 507-514, May 2006.

- [14] Usaola, J., “Probabilistic Load Flow with Wind Production Uncertainty using Cumulants and Cornish-Fisher Expansion”, *International Journal of Electrical Power and Energy System*, vol. 31, no. 9, pp. 474-481, October 2009.
- [15] Lima, M. M. P., “Nova Conceção para Fluxo de Carga *Fuzzy* Incorporando Função de Pertinência Sinusoidal”, Dissertação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [16] Lima, M. M. P., Murari, C. A. F., “Uma Nova Metodologia para Fluxos de Carga *Fuzzy*”, *Revista Controle & Automação*, vol. 14, no. 1, pp. 69-75, 2003.
- [17] Ramaswamy, M.; Nayar, K. R., “On Line Estimation of Bus Voltages Based on Fuzzy Logic”, *International Journal of Electrical Power and Energy System*, vol. 26, no. 3, pp. 681-684, 2004.
- [18] Bijwe, P. R., Hanmandlu, M., Pande, V. N., “Fuzzy Power Flow Solutions with Reactive Limits and Multiple Uncertainties”, *Electric Power Systems Research*, vol. 76, no. 3, pp. 145-152, 2005.
- [19] Cortés-Carmona, M., Palma-Behnke, R., Jimenez-Estévez, G., “Fuzzy Arithmetic for the DC Load Flow”, *IEEE Transactions on Power System*, vol. 25, no. 1, pp. 206-214, 2010.
- [20] Kalesar, B. M., Seife, A. R., “Fuzzy Load Flow in Balanced and Unbalanced Radial Distribution Systems Incorporating Composite Load Model”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 348-355, 2010.
- [21] Wang, Z., Alvarado, F. L., “Interval Arithmetic in Power Flow Analysis”, *Transactions on Power Systems*, vol. 7, no. 3, pp. 1341-1349, 1992.
- [22] Das, B., “Radial Distribution System Power Flow using Interval Arithmetic”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 24, no. 10, pp. 827-836, 2002.
- [23] Barboza, L., Dimuro, G., Reiser, R., “Power Flow with Load Uncertainty”, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, vol. 5, no. 1, pp. 27-36, 2004.
- [24] Barboza, L., Dimuro, G., Reiser, R., “Incerteza de Dados em Fluxo de Potência: uma Abordagem com a Matemática Intervalar do C-XSC”, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, vol. 9, no. 3, pp. 491-502, 2008.
- [25] Pereira, L. E. S., da Costa, V. M., Rosa, A. L. S., “Interval Arithmetic in Current Injection Power Flow Analysis”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 43, no. 1, pp. 1106-1113, 2012.

- [26] Pereira, L. E. S., da Costa, V. M., “Interval Analysis Applied to the Maximum Loading Point of Electric Power Systems Considering Load Data Uncertainties”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 54, pp. 334-340, 2014.
- [27] Comba, J. L. D., Stolfi, J., “Affine Arithmetic and its Applications to Computer Graphics”, *Anais do VII Sibgrapi*, 1993.
- [28] Figueiredo, L. H., Stolfi, J., “Self-validated Numerical Methods and Applications,” *Proc. Brazilian Mathematics Colloq. Monograph*, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 1997.
- [29] Vaccaro, A., Cañizares, C. A., Villacci, D., “An Affine Arithmetic-Based Methodology for Reliable Power Flow Analysis in the Presence of Data Uncertainty,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 25, no. 2, May 2010.
- [30] Pirnia, M., Cañizares, C. A., Bhattacharya, K., “An Affine Arithmetic Method to Solve the Stochastic Power Flow Problem Based on a Mixed Complementarity Formulation”, *IEEE General Meeting*, 2012.
- [31] Vaccaro, A., Cañizares, C. A., Bhattacharya, K., “A Range Arithmetic-Based Optimization Model for Power Flow Analysis Under Interval Uncertainty”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28, no. 2, May 2013.
- [32] Muñoz, M., Cañizares, C. A., Bhattacharya, K., Vaccaro, A., “An Affine Arithmetic-Based Method for Voltage Stability Assessment of Power Systems With Intermittent Generation Sources”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28, no. 4, november 2013.
- [33] Pirnia, M., Cañizares, C. A., Bhattacharya, K., Vaccaro, A., “A Novel Affine Arithmetic Method to Solve Optimal Power Flow Problems with Uncertainties”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 29, no. 6, November 2014.
- [34] Wang, S., Han, L., Wu, L., “Uncertainty Tracing of Distributed Generations via Complex Affine Arithmetic Based Unbalanced Three-Phase Power Flow”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 30, no. 6, November 2015.
- [35] Mori, H., Yuihara, A. “Calculation of Multiple Power Flow Solutions with the Krawczyk Method”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, no. 6, pp. 1141-1149, 1997.
- [36] Rump, S.M., INTLAB - INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, pages 77-104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [37] Moore, R. E. “Interval Analysis”. Prentice-Hall, 1966.
- [38] Moore, R. E., Kearfott, R. Baker, Cloud, Michael J. “Introduction to Interval Analysis” – Society for Industrial and Applied Mathematics (Siam), 2009.

- [39] da Costa, V. M., Martins, N., Pereira, J. L. R., “Developments in the Newton Raphson Power Flow Formulation based on Current Injections”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14, pp. 1320-1326, 1999.
- [40] Garcia, P. A. N., Pereira, J. L. R., Carneiro Jr., S., da Costa, V. M., Martins, N., “Three-Phase Power Flow Calculations Using the Current Injection Method”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, pp. 508-514, no. 2, May 2000.
- [41] Carneiro Jr., S., Pereira, J. L. R.; Garcia, P. A. N. “Unbalanced Distribution System Power Flow Using the Current Injection Method”, *IEEE Power Engineering Society Winter Meeting*, vol. 2, pp. 946-950, 2000.
- [42] Mayordomo, J. G., Izzeddine, M., Martinez, S., Asensi, R., “A Contribution for Three-phase Power Flows Using the Current Injection Method”, *Harmonics and Quality of Power. Proceedings. Ninth International Conference on*, vol. 1, pp. 295-300, 2000.
- [43] da Costa, V. M., Pereira, J. L. R., Martins, N., “An Augmented Newton Raphson Power Flow Formulation based on Current Injections”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 305-312, 2001.
- [44] Variz, A. M., da Costa, V. M., “Novos Desenvolvimentos numa Formulação de Injeção de Corrente para Solução de Fluxo de Potência”, *Revista da Sociedade Brasileira de Automática, Brasil*, vol. 13, no. 3, pp. 298-306, 2002.
- [45] Leite, L. C. G., da Costa, V. M., “Fluxo de Potência Continuado via Equações de Injeção de Corrente”, *Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, 2003.
- [46] Variz, A. M., da Costa, V. M., Pereira, J. L. R., Martins, N., “Improved Representation of Control Adjustments into the Newton Raphson Power Flow”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2003.
- [47] Penido, D.R.R., Araujo, L.R., Pereira, J. L. R.; Garcia, P. A. N.; Carneiro, S., “Four Wire Newton-Raphson Power Flow based on the Current Injection Method”, *IEEE Power System Conference and Exposition.*, vol. 1, pp. 239-242, October 2004.
- [48] Ferreira, C. A., da Costa, V. M., “A Second Order Power Flow based on Current Injection Equations”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 27, pp. 254-263, 2005.
- [49] da Costa, V. M., Oliveira, M. L., Guedes, M. R., “Developments in the Analysis of Unbalanced Three-Phase Power Flow Solutions”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 29, pp. 175-182, 2007.

- [50] Penido, D. R. R., Araujo, L. R., Carneiro, S., Pereira, J. L. R. and Garcia, P. A. N., “Three-Phase Power Flow Based on Four-Conductor Current Injection Method for Unbalanced Distribution Networks”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, pp. 494-503, 2008.
- [51] Araujo, D. R. R. P., Araujo, L. R.; Carneiro Jr, S.; Pereira, J. L. R., “Metodologia para Análise de Sistemas Elétricos a N Condutores pelo Método de Injeção de Correntes”, Revista Controle e Automação (Impresso), vol. 21, pp. 308-321, 2010.
- [52] Kamel, S., Abdel-Akher, M., El-Nemr, M. K., “Implementation of SSSC Model in the Newton-Raphson Power Flow Formulation Using Current Injections”, Universities Power Engineering Conference (UPEC), 45th International, pp. 1-5, 2010.
- [53] Kamel, S., Abdel-Akher, M., El-Nemr, M.K., " A New Technique to Improve Voltage Controlled Nodes (PV nodes) in the Current Injection Newton-Raphson Power-Flow Analysis”, Universities Power Engineering Conference (UPEC), 45th International, pp. 1-4, 2010.
- [54] Pereira, L. E. S., “Metodologia Intervalar para Tratamento de Incertezas em Problemas de Fluxo de Potência”, Dissertação, UFJF, Juiz de Fora, 2011.
- [55] Santos, M. J., “Modelagem de Incertezas no Problema de Fluxo de Potência”, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.
- [56] Dias, J. A. S., “Avaliação da Confiabilidade Composta baseada em Simulação de Monte Carlo com representação de Geração Eólica”, Dissertação, Rio de Janeiro, 2008.
- [57] Moore, R. E., “Methods and Applications of Interval Analysis”, SIAM, Stud. Appl.Math. 2, Philadelphia, 1979.
- [58] da Costa, V. M., “Uma Formulação Alternativa para o Problema de Fluxo de Potência”, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.

Apêndice A Operações Intervalares

A.1 Matrizes Intervalares

Matrizes intervalares são matrizes cujos elementos constituem-se de intervalos numéricos, como por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1; 3] & [-1; 2] \\ [0; 2] & [6; 9] \end{bmatrix}$$

A.1.1 Norma, Diâmetro e Ponto Médio de uma Matriz Intervalar

Para uma matriz intervalar A são aplicadas as seguintes definições:

Norma: é uma extensão intervalar da maior soma absoluta das linhas para matrizes reais.

$$\|A\| = \max_i \sum_j |A_{ij}| \quad (\text{A.1})$$

Para a matriz A:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max\{|[1; 3]| + |[-1; 2]|; |[0; 2]| + |[6; 9]|\} \\ &= \max\{3 + 2; 2 + 9\} = 11 \end{aligned}$$

Diâmetro: é a maior largura obtida ao se avaliar cada elemento da matriz intervalar de forma independente:

$$w(A) = \max_{i,j} w(A_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

Para a matriz A:

$$\begin{aligned} w(A) &= \max\{w([1; 3]), w([-1; 2]), w([0; 2]), w([6; 9])\} \\ &= \max\{2; 3; 2; 3\} = 3 \end{aligned}$$

Ponto Médio: é uma matriz real cujos elementos são os pontos médios dos correspondentes elementos de A, que obviamente pertencem à matriz A.

$$(m(A))_{ij} = m(A_{ij}) \quad (\text{A.3})$$

Para a matriz A:

$$m(A) = \begin{pmatrix} m([1; 3]) & m([-1; 2]) \\ m([0; 2]) & m([6; 9]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 1 & 7,5 \end{pmatrix}$$

A.1.2 Inversa de uma Matriz Intervalar

Seja A uma matriz intervalar 2x2 inversível, representada em aritmética intervalar ordinária:

$$A = \begin{pmatrix} [7,0000; 9,0000] & [3,0000; 5,0000] \\ [2,0000; 3,0000] & [4,0000; 7,0000] \end{pmatrix}$$

Para realizar a inversão dessa matriz A será utilizada a biblioteca INTLAB:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [0,0158; 0,3077] & [-0,3847; 0,1494] \\ [-0,2308; 0,0838] & [-0,0679; 0,5385] \end{pmatrix}$$

A matriz identidade pode ser obtida efetuando-se o produto entre a matriz A e sua inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} [-1,3349; 3,3349] & [-4,2715; 4,2715] \\ [-1,7297; 1,7297] & [-2,3349; 4,3349] \end{pmatrix}$$

De onde é possível obter a seguinte matriz ponto médio:

$$med(I) = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

A matriz ponto médio de A é dada por:

$$B = med(A) = \begin{pmatrix} 8,0000 & 4,0000 \\ 2,5000 & 5,5000 \end{pmatrix}$$

Com o auxílio da biblioteca INTLAB é calculada a matriz inversa de B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1618 & -0,1176 \\ -0,0735 & 0,2353 \end{pmatrix}$$

A matriz ponto médio de A^{-1} é:

$$\text{med}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 0,1618 & -0,1176 \\ -0,0735 & 0,2353 \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz inversa da matriz ponto médio de A é igual a matriz ponto médio da matriz inversa de A, ou seja, $B^{-1} = \text{med}(A^{-1})$.

Desse modo, pode-se concluir que o cálculo da inversa de uma matriz intervalar, em aritmética intervalar ordinária, é realizado do mesmo modo que o cálculo da inversa de uma matriz pontual.

Caso a matriz A seja definida em aritmética intervalar afim, a ferramenta INTLAB não é capaz de realizar a sua inversa.

Apêndice B Método de Newton Intervalar

Uma distinção fundamental entre o método de Newton Intervalar e o método de Newton Ordinário é que o primeiro usa computação com conjuntos em vez de computação com pontos. Isso permite encontrar todos os zeros da função em dado intervalo inicial. Enquanto o método de Newton ordinário é propenso a um comportamento errado, a versão intervalar praticamente sempre converge [38]. A diferença de desempenho entre os dois métodos pode ser drástica e exemplos específicos podem ser consultados em [57].

É importante aplicar testes de convergência para o intervalo inicial escolhido, de forma a garantir a convergência do resultado de um sistema não linear. Detalhes sobre estes testes podem ser vistos em [38].

B.1 Desenvolvimento do Método de Newton Intervalar

Seja f uma função de valor real de uma variável real x . Suponha também que f seja continuamente diferenciável. Aplicando-se o teorema do valor médio, e considerando s entre x e y , obtém-se:

$$f(y) = f(x) + f'(s)(y - x) \quad (\text{B.1})$$

Considere $[a, b]$ um intervalo no qual busca-se uma solução para a equação $f(y) = 0$. Caso esta solução exista, deverá satisfazer:

$$f(x) + f'(s)(y - x) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Definindo o intervalo $[x; y] \in X$, e fazendo $f'(s) = J(X)$ pode-se reescrever a equação (B.2), como:

$$J(X)(X - x) = -f(x) \quad (\text{B.3})$$

Pode-se definir o operador de Newton intervalar como $N(x, X)$, o qual fornece o intervalo solução X da equação (B.3).

$$N(x, X) = x - J^{-1}(X)f(x) \quad (\text{B.4})$$

O método de Newton Intervalar é definido pela equação (B.4), onde x é o ponto médio do intervalo X . Ao se introduzir a iteração h nesta equação obtém-se:

$$\underline{N}(x^h, X^h) = x^h - J^{-1}(X^h)f(x^h) \quad (\text{B.5})$$

$$\underline{X}^{h+1} = \underline{X}^h \cap \underline{N}(x^h, X^h) \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.6) mostra que o método de Newton intervalar reduz as soluções candidatas através da interseção de dois intervalos. Caso esta seja vazia, não há zeros de f em X^h . Além disso, o método de Newton Intervalar resolve a equação linear intervalar (B.5) a cada iteração h [54].

B.2 Aplicações Práticas do Método de Newton

Os cálculos realizados nas Aplicações 1, 2 e 3, a seguir, foram realizados utilizando a aritmética intervalar ordinária com o auxílio da biblioteca INTLAB.

B.2.1 Aplicação 1

Calcule a solução para a função intervalar $f(X)$ no intervalo $X^0 = [0 ; 8]$ com tolerância de 10^{-4} .

$$f(X) = X^2 + 2X - [9 ; 11] = 0$$

Seguindo os passos da seção B.1, calcula-se a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[0 ; 8] + [2 ; 2] = [0 ; 16] + [2 ; 2] = [2 ; 18]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [4 ; 4]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [9; 11]$$

$$f(x^0) = ([4; 4]^2) + 2[4; 4] - [9; 11] = [13; 15]$$

O Operador de Newton é calculado de acordo com a equação (B.5):

$$N(x^0, X^0) = x^0 - J^{-1}(X^0)f(x^0) = [4; 4] - \left[\frac{1}{18}; \frac{1}{2} \right] \cdot [13; 15]$$

$$N(x^0, X^0) = [4; 4] - [13/18; 15/2] = [-3,5000; 3,2778]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $N(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap N(x^0, X^0) = [0; 8] \cap [-3,5000; 3,2778] = [0; 3,2778]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se atende a tolerância especificada:

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{8 - 3,2778}{2} \right) = 2,3611 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo calculando-se $J(X^1)$, x^1 e um novo intervalo X^2 .

$$J(X^1) = \frac{df(X)}{dX^1} = 2X^1 + 2 = 2[0; 3,2778] + [2; 2] = [2; 8,5556]$$

$$x^1 = \text{med}(X^1) = [1,6388; 1,6388]$$

$$f(x^1) = ([1,6388; 1,6388]^2) + 2[1,6388; 1,6388] - [9; 11] = [-5,0363; -3,0362]$$

$$\begin{aligned} N(x^1, X^1) &= x^1 - J^{-1}(X^1)f(x^1) = [1,6388; 1,6388] - \left[\frac{1}{8,5556}; \frac{1}{2} \right] \cdot [-5,0363; -3,0362] \\ &= [1,9937; 4,1571] \end{aligned}$$

$$X^2 = X^1 \cap N(x^1, X^1) = [0; 3,2778] \cap [1,9937; 4,1571] = [1,9937; 3,2778]$$

Teste de Convergência:

$$\frac{\text{diam}(X^1) - \text{diam}(X^2)}{2} = \left(\frac{3,2778 - 1,2840}{2} \right) = 0,9969 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo até que $\frac{\text{diam}(X^h) - \text{diam}(X^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela B.1 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela B.1 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 1

Iteração	X
0	[0,0000 ; 8,0000]
1	[0,0000 ; 3,2778]
2	[1,9937 ; 3,2778]
3	[2,0981 ; 2,4934]
4	[2,1566 ; 2,4795]
5	[2,1581 ; 2,4750]
6	[2,1583 ; 2,4750]

B.2.2 Aplicação 2

Para a mesma função intervalar $f(X) = X^2 + 2X - [9 ; 11]$, definida em B.2.1, será buscada uma solução no intervalo $X^0 = [2 ; 3]$ mantendo-se a tolerância de 10^{-4} .

Seguindo a mesma sequência de passos, primeiramente é calculada a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[2 ; 3] + [2 ; 2] = [4 ; 6] + [2 ; 2] = [6 ; 8]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [2,50 ; 2,50]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [9 ; 11] =$$

$$f(x^0) = ([2,50 ; 2,50]^2) + 2[2,50 ; 2,50] - [9 ; 11] = [0,25 ; 2,25]$$

O Operador de Newton é calculado de acordo com a equação (B.5):

$$N(x^0, X^0) = x^0 - J^{-1}(X^0)f(x^0) = [2,50 ; 2,50] - \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{6}\right] \cdot [0,25 ; 2,25]$$

$$N(x^0, X^0) = [2,1250 ; 2,4688]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $N(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap N(x^0, X^0) = [2 ; 3] \cap [2,1250 ; 2,4688] = [2,1250 ; 2,4688]$$

Na seqüência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se atende a tolerância especificada.

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{1 - 0,3438}{2}\right) = 0,3281 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo calculando-se $J(X^1)$, x^1 e um novo intervalo X^2 .

$$J(X^1) = \frac{df(X)}{dX^1} = 2X^1 + 2 = 2[2,1250 ; 2,4688] + [2 ; 2] = [6,2500 ; 6,9376]$$

$$x^1 = \text{med}(X^1) = [2,2968 ; 2,2968]$$

$$f(x^1) = ([2,2968 ; 2,2968]^2) + 2[2,2968 ; 2,2968] - [9 ; 11] = [-1,1307 ; 0,8694]$$

$$N(x^1, X^1) = x^1 - J^{-1}(X^1)f(x^1) = [2,1577 ; 2,4778]$$

$$X^2 = X^1 \cap N(x^1, X^1) = [2,1577 ; 2,4688]$$

Teste de Convergência:

$$\frac{\text{diam}(X^1) - \text{diam}(X^2)}{2} = 0,0164 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo até que $\frac{\text{diam}(x^h) - \text{diam}(x^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela B.2 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela B.2 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 2

Iteração	X
0	[2,0000 ; 3,0000]
1	[2,1250 ; 2,4688]
2	[2,1577 ; 2,4688]
3	[2,1584 ; 2,4688]
4	[2,1584 ; 2,4688]

O diâmetro inicial do intervalo X na aplicação 2 é menor do que o diâmetro inicial do intervalo X na aplicação 1, resultando num menor número de iterações até a convergência. Contudo, deve ser observado que a escolha do diâmetro inicial de X influencia no resultado obtido na convergência, podendo até convergir de forma bastante incorreta, como será observado na próxima aplicação.

B.2.3 Aplicação 3

Calcule a solução para a função intervalar $f(X)$ no intervalo $X^0 = [1,5 ; 2,5]$ com tolerância de 10^{-4} .

$$f(X) = X^2 + 2X - [5 ; 13] = 0$$

Seguindo os passos da seção B.2 , calcula-se a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[1,5 ; 2,5] + [2 ; 2] = [3 ; 5] + [2 ; 2] = [5 ; 7]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = med(X^0) = [2 ; 2]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [5 ; 13] =$$

$$f(x^0) = ([2 ; 2]^2) + 2[2 ; 2] - [5 ; 13] = [-5 ; 3]$$

O Operador de Newton é calculado de acordo com a equação (B.5):

$$N(x^0, X^0) = x^0 - J^{-1}(X^0)f(x^0) = [2; 2] - \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{5} \right] \cdot [-5; 3]$$

$$N(x^0, X^0) = [1,3999; 3,001]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $N(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap N(x^0, X^0) = [1,5; 2,5] \cap [1,3999; 3,001] = [1,5; 2,5]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência de modo a verificar se atende a tolerância especificada.

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{1,00 - 1,00}{2} \right) = 0 < \text{Tolerância}$$

Como a tolerância é satisfeita, o processo é encerrado na primeira iteração. Escolhendo-se um diâmetro maior para o intervalo inicial, $X^0 = [1; 3]$, a matriz Jacobiana é dada por:

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[1; 3] + [2; 2] = [2; 6] + [2; 2] = [4; 8]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [2; 2]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [5; 13] =$$

$$f(x^0) = ([2; 2]^2) + 2[2; 2] - [5; 13] = [-5; 3]$$

O Operador de Newton é calculado de acordo com a equação (B.5):

$$N(x^0, X^0) = x^0 - J^{-1}(X^0)f(x^0) = [2; 2] - \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right] \cdot [-5; 3]$$

$$N(x^0, X^0) = [1,2499; 3,2501]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $N(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap N(x^0, X^0) = [1 ; 3] \cap [1,2499 ; 3,2501] = [1,2499 ; 3,0000]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se atende a tolerância especificada.

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{2,0000 - 1,7500}{2} \right) = 0,1250 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, o processo é repetido até que $\frac{\text{diam}(X^h) - \text{diam}(X^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela B.3 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela B.3 - Resultados do Método de Newton - Aplicação 3

Iteração	X
0	[1,0000 ; 3,0000]
1	[1,2499 ; 3,0000]
2	[1,2881 ; 3,0000]
3	[1,2950 ; 3,0000]
4	[1,2963 ; 3,0000]
5	[1,2966 ; 3,0000]
6	[1,2966 ; 3,0000]

O valor convergido de X , em nenhum dos dois casos, corresponde ao valor correto [1,4495 ; 2,7417] para o intervalo. No primeiro caso, o intervalo inicial de X não contém o conjunto solução, mas assim mesmo o processo convergiu para a solução [1,5 ; 2,5]. No segundo caso, apesar da solução correta estar contida no intervalo X inicial, o resultado convergido apresenta um desvio significativo em relação ao valor correto. Dessa forma, fica evidente que a variação intervalar assumida no problema pode interferir na exatidão do processo iterativo e até mesmo em seu processo de convergência.

Apêndice C Método de Krawczyk

O método de Krawczyk foi desenvolvido a partir do método de Newton, sendo um dos métodos mais utilizados na matemática intervalar para a resolução de sistemas não-lineares. Uma das razões consiste no fato da solução do sistema ser realizada somente por produto de matrizes.

Substituindo $f'(s)$ por $J(x)$ na equação (B.2) e adicionando o termo $(x - y)$ em ambos os membros, obtém-se:

$$[Id - J(X)](x - y) = -f(x) + x - y \quad (C.1)$$

A equação (B.3) pode ser reescrita como:

$$\Delta y = x - f(x) + (Id - J(X))(y - x) \quad (C.2)$$

Uma vez que $[x ; y] \in X$, substituindo-se y pelo intervalo X , resulta:

$$K(x, X) = x - f(x) + (Id - J(X))(X - x) \quad (C.3)$$

$K(x, X)$, denominado operador Krawczyk, é responsável por propiciar o intervalo de solução da equação (C.2). De forma a introduzir uma matriz de pré-condicionamento e a iteração h na equação (C.3), obtém-se [54]:

$$\underline{K}(x^h, X^h) = \underline{x}^h - C \underline{f}(x^h) + (I - CJ(X^h))(\underline{X}^h - \underline{x}^h) \quad (C.4)$$

$$C = (\text{med}(J(X^h)))^{-1} \quad (C.5)$$

$$\underline{X}^{h+1} = \underline{X}^h \cap \underline{K}(x^h, X^h) \quad (C.6)$$

Na equação (C.4), C é a matriz de pré-condicionamento, que é numericamente igual à matriz inversa do ponto médio de $J(X^h)$. Diferentemente do método de Newton Intervalar, no método de Krawczyk não se faz necessário o cálculo da inversa da matriz Jacobiana Intervalar.

C.1 Aplicações Práticas do Método de Krawczyk

Os cálculos realizados nas Aplicações 1, 2 e 3, a seguir, foram realizados utilizando a aritmética intervalar ordinária com o auxílio da biblioteca INTLAB.

C.1.1 Aplicação 1

Calcule a solução para a função intervalar $f(X)$ no intervalo $X^0 = [0; 8]$ com tolerância de 10^{-4} .

$$f(X) = X^2 + 2X - [9; 11] = 0$$

De forma análoga ao método de Newton, calcula-se a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[0; 8] + [2; 2] = [0; 16] + [2; 2] = [2; 18]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [4; 4]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$\begin{aligned} f(X) &= X^2 + 2X - [9; 11] = \\ f(x^0) &= ([4; 4]^2) + 2[4; 4] - [9; 11] = [13; 15] \end{aligned}$$

O Operador de Krawczyk (K) é calculado de acordo com a equação (C.4):

$$\text{med}(J(X^0)) = \text{med}([2; 18]) = \frac{2 + 18}{2} = 10$$

$$C = (\text{med}(J(X^0)))^{-1} = \frac{1}{\text{med}(J(X^0))} = 1/10$$

$$\begin{aligned} K(x^0, X^0) &= x^0 - Cf(x^0) + (I - CJ(X^0))(X^0 - x^0) \\ &= [4; 4] - \frac{1}{10} \cdot [13; 15] + \left([1; 1] - \frac{1}{10} \cdot [2; 18] \right) \cdot ([0; 8] - [4; 4]) = [-0,7; 5,9] \end{aligned}$$

Fazendo a interseção de X^0 e $K(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap K(x^0, X^0) = [0; 8] \cap [-0,7; 5,9] = [0; 5,9]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se a tolerância especificada é atendida:

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{8 - 5,9}{2} \right) = 1,05 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo calculando-se $J(X^1)$, x^1 e um novo intervalo X^2 .

$$J(X^1) = \frac{df(X)}{dX^1} = 2X^1 + 2 = 2[0; 5,9] + [2; 2] = [2; 13,8]$$

$$x^1 = \text{med}(X^1) = [2,95; 2,95]$$

$$f(x^1) = ([2,95; 2,95]^2) + 2[2,95; 2,95] - [9; 11] = [3,6025; 5,6026]$$

$$K(x^1, X^1) = x^1 - Cf(x^1) + (I - CJ(X^1))(X^1 - x^1) = [0,0376; 4,6972]$$

Fazendo a interseção de X^1 e $K(x^1, X^1)$ obtém-se X^2 :

$$X^2 = X^1 \cap K(x^1, X^1) = [0,0376; 4,6972]$$

Teste de Convergência:

$$\frac{\text{diam}(X^1) - \text{diam}(X^2)}{2} = 0,6203 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo até que $\frac{\text{diam}(X^h) - \text{diam}(X^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela C.1 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela C.1 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 1

Iteração	X
0	[0,0000 ; 8,0000]
1	[0,0000 ; 5,9000]
2	[0,0376 ; 4,6972]
3	[0,5566; 4,0774]
4	[1,2316 ; 3,4016]
5	[1,8109 ; 2,8223]
6	[2,0887 ; 2,5445]
7	[2,1502 ; 2,4831]
8	[2,1575 ; 2,4758]
9	[2,1582 ; 2,4751]
10	[2,1583 ; 2,4750]

C.1.2 Aplicação 2

Para a mesma função intervalar $f(X) = X^2 + 2X - [9 ; 11]$ será buscada uma solução no intervalo $X^0 = [2 ; 3]$ mantendo-se a tolerância de 10^{-4} .

Seguindo a mesma sequência de passos, calcula-se a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[2 ; 3] + [2 ; 2] = [4 ; 6] + [2 ; 2] = [6 ; 8]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = med(X^0) = [2,50 ; 2,50]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [9 ; 11] =$$

$$f(x^0) = ([2,50 ; 2,50]^2) + 2[2,50 ; 2,50] - [9 ; 11] = [0,2499 ; 2,2501]$$

O Operador de Krawczyk (K) é calculado de acordo com a equação (C.4):

$$\text{med}(J(X^0)) = \text{med}([6; 8]) = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$C = (\text{med}(J(X^0)))^{-1} = \frac{1}{\text{med}(J(X^0))} = 1/7$$

$$K(x^0, X^0) = x^0 - Cf(x^0) + (I - CJ(X^0))(X^0 - x^0) = [2,1071 ; 2,5358]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $K(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap K(x^0, X^0) = [2; 3] \cap [2,1071 ; 2,5358] = [2,1071 ; 2,5358]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se tolerância especificada é atendida.

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = 0,2857 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo calculando-se $J(X^1)$, x^1 e um novo intervalo X^2 .

$$J(X^1) = \frac{df(X)}{dX^1} = 2X^1 + 2 = 2[2,1071 ; 2,5358] + [2; 2] = [6,2142 ; 7,0715]$$

$$x^1 = \text{med}(X^1) = [2,3214 ; 2,3214]$$

$$f(x^1) = ([2,3214 ; 2,3214]^2) + 2[2,3214 ; 2,3214] - [9; 11] = [-0,9682 ; 1,0319]$$

$$K(x^1, X^1) = x^1 - Cf(x^1) + (I - CJ(X^1))(X^1 - x^1) = [2,1522 ; 2,4810]$$

$$X^2 = X^1 \cap N(x^1, X^1) = [2,1522 ; 2,4810]$$

Teste de Convergência:

$$\frac{\text{diam}(X^1) - \text{diam}(X^2)}{2} = 0,0499 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo até que $\frac{\text{diam}(X^h) - \text{diam}(X^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela C.2 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela C.2 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 2

Iteração	X
0	[2,0000 ; 3,0000]
1	[2,1071 ; 2,5358]
2	[2,1522 ; 2,4810]
3	[2,1577 ; 2,4756]
4	[2,1582 ; 2,4750]
5	[2,1583 ; 2,4750]

O diâmetro inicial do intervalo X na aplicação 2 é menor do que o diâmetro inicial do intervalo X na aplicação 1, resultando em menor número de iterações até a convergência.

C.1.3 Aplicação 3

Calcule a solução para a função intervalar $f(X)$ no intervalo $X^0 = [1,5 ; 2,5]$ com tolerância de 10^{-4} .

$$f(X) = X^2 + 2X - [5 ; 13] = 0$$

Seguindo os mesmos passos da seção B.1 , calcula-se a matriz Jacobiana no ponto X^0 :

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[1,5 ; 2,5] + [2 ; 2] = [3 ; 5] + [2 ; 2] = [5 ; 7]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = med(X^0) = [2 ; 2]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$f(X) = X^2 + 2X - [5 ; 13] =$$

$$f(x^0) = ([2 ; 2]^2) + 2[2 ; 2] - [5 ; 13] = [-5 ; -3]$$

O Operador de Krawczyk é calculado de acordo com a equação (C.4):

$$\text{med}(J(X^0)) = \text{med}([6; 8]) = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

$$C = (\text{med}(J(X^0)))^{-1} = \frac{1}{\text{med}(J(X^0))} = 1/6$$

$$K(x^0, X^0) = x^0 - Cf(x^0) + (I - CJ(X^0))(X^0 - x^0) = [1,4166; 2,9167]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $K(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap K(x^0, X^0) = [1,5; 2,5] \cap [1,4166; 2,9167] = [1,5; 2,5]$$

Na sequência é realizado o teste de convergência, de modo a verificar se atende a tolerância especificada.

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{1,0000 - 1,0000}{2} \right) = 0 < \text{Tolerância}$$

Como a tolerância é satisfeita, o processo é encerrado na primeira iteração. Escolhendo-se um diâmetro maior para o intervalo inicial, $X^0 = [1; 3]$, a matriz Jacobiana é dada por:

$$J(X^0) = \frac{df(X)}{dX^0} = 2X^0 + 2 = 2[1; 3] + [2; 2] = [4; 8]$$

Um ponto específico $x^0 \in X^0$ é selecionado tomando-se o ponto médio de X^0 como um intervalo degenerado:

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [2; 2]$$

Calcula-se agora a função $f(X)$ no ponto x^0 :

$$x^0 = \text{med}(X^0) = [2; 2]$$

$$f(x^0) = ([2; 2]^2) + 2[2; 2] - [5; 13] = [-5; -3]$$

O Operador de Krawczyk é calculado de acordo com a equação (C.4):

$$\text{med}(J(X^0)) = \text{med}([4; 8]) = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

$$C = (\text{med}(J(X^0)))^{-1} = \frac{1}{\text{med}(J(X^0))} = 1/6$$

$$K(x^0, X^0) = x^0 - Cf(x^0) + (I - CJ(X^0))(X^0 - x^0) = [1,1666; 3,1667]$$

Fazendo a interseção de X^0 e $K(x^0, X^0)$ obtém-se X^1 :

$$X^1 = X^0 \cap K(x^0, X^0) = [1; 3] \cap [1,1666; 3,1667] = [1,1666; 3,0000]$$

Teste de Convergência:

$$\frac{\text{diam}(X^0) - \text{diam}(X^1)}{2} = \left(\frac{2 - 1,8333}{2} \right) = 0,0833 > \text{Tolerância}$$

Como a tolerância não é satisfeita, deve-se repetir o processo até que $\frac{\text{diam}(X^h) - \text{diam}(X^{h+1})}{2} \leq \text{Tolerância}$.

A Tabela C.3 apresenta os resultados de X , para cada iteração, até a convergência.

Tabela C.3 - Resultados do Método de Krawczyk - Aplicação 3

Iteração	X
0	[1,0000 ; 3,0000]
1	[1,1666 ; 3,0000]
2	[1,2421 ; 3,0000]
3	[1,2742 ; 3,0000]
4	[1,2875 ; 3,0000]
5	[1,2929 ; 3,0000]
6	[1,2951 ; 3,0000]
7	[1,2960 ; 3,0000]
8	[1,2964 ; 3,0000]
9	[1,2965 ; 3,0000]

O valor convergido de X , em nenhum dos dois casos, corresponde ao valor correto [1,4495 ; 2,7417] para o intervalo. No primeiro caso, o intervalo inicial de X não contém o

conjunto solução, mas assim mesmo o processo convergiu para a solução $[1,5 ; 2,5]$. No segundo caso, apesar da solução correta estar contida no intervalo X inicial, o resultado convergido apresenta um desvio significativo em relação ao valor correto. Dessa forma, fica evidente que a variação intervalar assumida no problema pode interferir na exatidão do processo iterativo e até mesmo em seu processo de convergência.

Apêndice D Derivadas das Equações das Variáveis Dependentes Funcionais [54]

Este apêndice apresenta as equações e as respectivas derivadas das variáveis funcionais g , descritas por (3.33) utilizadas nesta dissertação.

D.1 Cálculo do Fluxo de Potência nas Linhas [58]

O fluxo de potência ativa no ramo k - m é dado por:

$$P_{km} = -a_{km} [g_{km} (V_{r_k} V_{r_m} + V_{m_k} V_{m_m}) + b_{km} (V_{m_k} V_{r_m} - V_{r_k} V_{m_m})] + a_{km}^2 g_{km} (V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2) \quad (D.1)$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_{r_k}} = -a_{km} [g_{km} V_{r_m} - b_{km} V_{m_m}] + 2V_{r_k} a_{km}^2 g_{km} \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_{r_m}} = -a_{km} [g_{km} V_{r_k} + b_{km} V_{m_k}] \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_{m_k}} = -a_{km} [g_{km} V_{m_m} + b_{km} V_{r_m}] + 2V_{m_k} a_{km}^2 g_{km} \quad (D.4)$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_{m_m}} = -a_{km} [g_{km} V_{m_k} - b_{km} V_{r_k}] \quad (D.5)$$

O fluxo de potência reativa no ramo k - m é dado por:

$$Q_{km} = a_{km} [-g_{km} (-V_{r_k} V_{m_m} + V_{m_k} V_{r_m}) + b_{km} (V_{r_k} V_{r_m} + V_{m_k} V_{m_m})] - a_{km}^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) (V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2) \quad (D.6)$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_{r_k}} = a_{km} [g_{km} V_{m_m} + b_{km} V_{r_m}] - 2V_{r_k} a_{km}^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.7)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_{r_m}} = a_{km} [-g_{km} V_{m_k} + b_{km} V_{r_k}] \quad (D.8)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_{m_k}} = a_{km} [-g_{km} V_{r_m} + b_{km} V_{m_m}] - 2V_{m_k} a_{km}^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.9)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_{m_m}} = a_{km} [g_{km} V_{r_k} + b_{km} V_{m_k}] \quad (D.10)$$

O fluxo de potência ativa no ramo m - k é dado por:

$$P_{mk} = a_{km} [-g_{km} (V_{r_k} V_{r_m} + V_{m_k} V_{m_m}) + b_{km} (V_{m_k} V_{r_m} - V_{r_k} V_{m_m})] + g_{km} (V_{r_m}^2 + V_{m_m}^2) \quad (D.11)$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial V_{r_k}} = a_{km} [-g_{km} V_{r_m} - b_{km} V_{m_m}] \quad (D.12)$$

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial V_{r_m}} = a_{km} [-g_{km} V_{r_k} + b_{km} V_{m_k}] + 2g_{km} V_{r_m} \quad (D.13)$$

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial V_{m_k}} = a_{km} [-g_{km} V_{m_m} + b_{km} V_{r_m}] \quad (D.14)$$

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial V_{m_m}} = a_{km} [-g_{km} V_{m_k} - b_{km} V_{r_k}] + 2g_{km} V_{m_m} \quad (D.15)$$

O fluxo de potência reativa no ramo m - k é dado por:

$$Q_{m_k} = a_{km} [g_{km} (V_{m_k} V_{r_m} - V_{r_k} V_{m_m}) + b_{km} (V_{r_k} V_{r_m} + V_{m_k} V_{m_m})] - (b_{km} + b_{km}^{sh}) (V_{r_m}^2 + V_{m_m}^2) \quad (D.16)$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial V_{r_k}} = a_{km}[-g_{km}V_{m_m} + b_{km}V_{r_m}] \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial V_{r_m}} = a_{km}[g_{km}V_{m_k} + b_{km}V_{r_k}] - 2V_{r_m}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial V_{m_k}} = a_{km}[g_{km}V_{r_m} + b_{km}V_{m_m}] \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial V_{m_m}} = a_{km}[-g_{km}V_{r_k} + b_{km}V_{m_k}] - 2V_{m_m}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (\text{D.20})$$

D.2 Cálculo da Geração Ativa e Reativa [58]

A geração ativa da barra k é dada por:

$$P_{g_k} = \sum_{m \in \Omega_k} V_{r_k}(G_{km}V_{r_m} - B_{km}V_{m_m}) + V_{m_k}(G_{km}V_{m_m} + B_{km}V_{r_m}) + P_{d_k} \quad (\text{D.21})$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial P_{g_k}}{\partial V_{r_k}} = V_{r_k}G_{kk} + V_{m_k}B_{kk} + I_{r_k} \quad (\text{D.22})$$

$$\frac{\partial P_{g_k}}{\partial V_{r_m}} = V_{r_k}G_{km} + V_{m_k}B_{km} \quad (\text{D.23})$$

$$\frac{\partial P_{g_k}}{\partial V_{m_k}} = -V_{r_k}B_{kk} + V_{m_k}G_{kk} + I_{m_k} \quad (\text{D.24})$$

$$\frac{\partial P_{g_k}}{\partial V_{m_m}} = -V_{r_k}B_{km} + V_{m_k}G_{km} \quad (\text{D.25})$$

$$\frac{\partial P_{g_k}}{\partial P_{d_k}} = 1 \quad (\text{D.26})$$

A geração reativa da barra k é dada por:

$$Q_{gk} = \sum_{m \in \Omega_k} V_{m_k} (G_{km} V_{r_m} - B_{km} V_{m_m}) - V_{r_k} (G_{km} V_{m_m} + B_{km} V_{r_m}) + Q_{d_k} \quad (\text{D.27})$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{gk}}{\partial V_{r_k}} = -V_{r_k} B_{kk} + V_{m_k} G_{kk} - I_{m_k} \quad (\text{D.28})$$

$$\frac{\partial Q_{gk}}{\partial V_{r_m}} = V_{m_k} G_{km} - V_{r_k} B_{km} \quad (\text{D.29})$$

$$\frac{\partial Q_{gk}}{\partial V_{m_k}} = -V_{r_k} G_{kk} - V_{m_k} B_{kk} + I_{r_k} \quad (\text{D.30})$$

$$\frac{\partial Q_{gk}}{\partial V_{m_m}} = -V_{m_k} B_{km} - V_{r_k} G_{km} \quad (\text{D.31})$$

$$\frac{\partial Q_{gk}}{\partial Q_{d_k}} = 1 \quad (\text{D.32})$$

D.3 Cálculo das Perdas [58]

A perda de potência ativa no ramo k - m é dada por:

$$P_{km}^{Perdas} = -2a_{km}g_{km}(V_{r_k}V_{r_m} + V_{m_k}V_{m_m}) + g_{km}((a_{km}V_{r_k})^2 + V_{r_m}^2 + (a_{km}V_{m_k})^2 + V_{m_m}^2) \quad (\text{D.33})$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial P_{km}^{Perdas}}{\partial V_{r_k}} = -2a_{km}g_{km}V_{r_m} + 2g_{km}a_{km}^2V_{r_k} \quad (\text{D.34})$$

$$\frac{\partial P_{km}^{Perdas}}{\partial V_{r_m}} = -2a_{km}g_{km}V_{r_k} + 2g_{km}V_{r_m} \quad (\text{D.35})$$

$$\frac{\partial P_{km}^{Perdas}}{\partial V_{m_k}} = -2a_{km}g_{km}V_{m_m} + 2g_{km}a_{km}^2V_{m_k} \quad (\text{D.36})$$

$$\frac{\partial P_{km}^{Perdas}}{\partial V_{m_m}} = -2a_{km}g_{km}V_{m_k} + 2g_{km}V_{m_m} \quad (D.37)$$

A perda reativa no ramo k - m é dada por:

$$Q_{km}^{Perdas} = 2a_{km}b_{km}(V_{r_k}V_{r_m} + V_{m_k}V_{m_m}) - (b_{km} + b_{km}^{sh})((a_{km}V_{r_k})^2 + V_{r_m}^2 + (a_{km}V_{m_k})^2 + V_{m_m}^2) \quad (D.38)$$

As derivadas associadas são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{km}^{Perdas}}{\partial V_{r_k}} = 2a_{km}b_{km}V_{r_m} - 2a_{km}^2V_{r_k}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.39)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^{Perdas}}{\partial V_{r_m}} = 2a_{km}b_{km}V_{r_k} - 2V_{r_m}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.40)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^{Perdas}}{\partial V_{m_k}} = 2a_{km}b_{km}V_{m_m} - 2a_{km}^2V_{m_k}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.41)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^{Perdas}}{\partial V_{m_m}} = 2a_{km}b_{km}V_{m_k} - 2V_{m_m}(b_{km} + b_{km}^{sh}) \quad (D.42)$$

Apêndice E Sistema IEEE 14 Barras

Neste apêndice são apresentados os dados de barra e de linha do sistema IEEE 14 Barras. A Figura E.1 apresenta o diagrama unifilar e as Tabelas E.1 e E.2 apresentam os dados de barra e de linha do sistema.

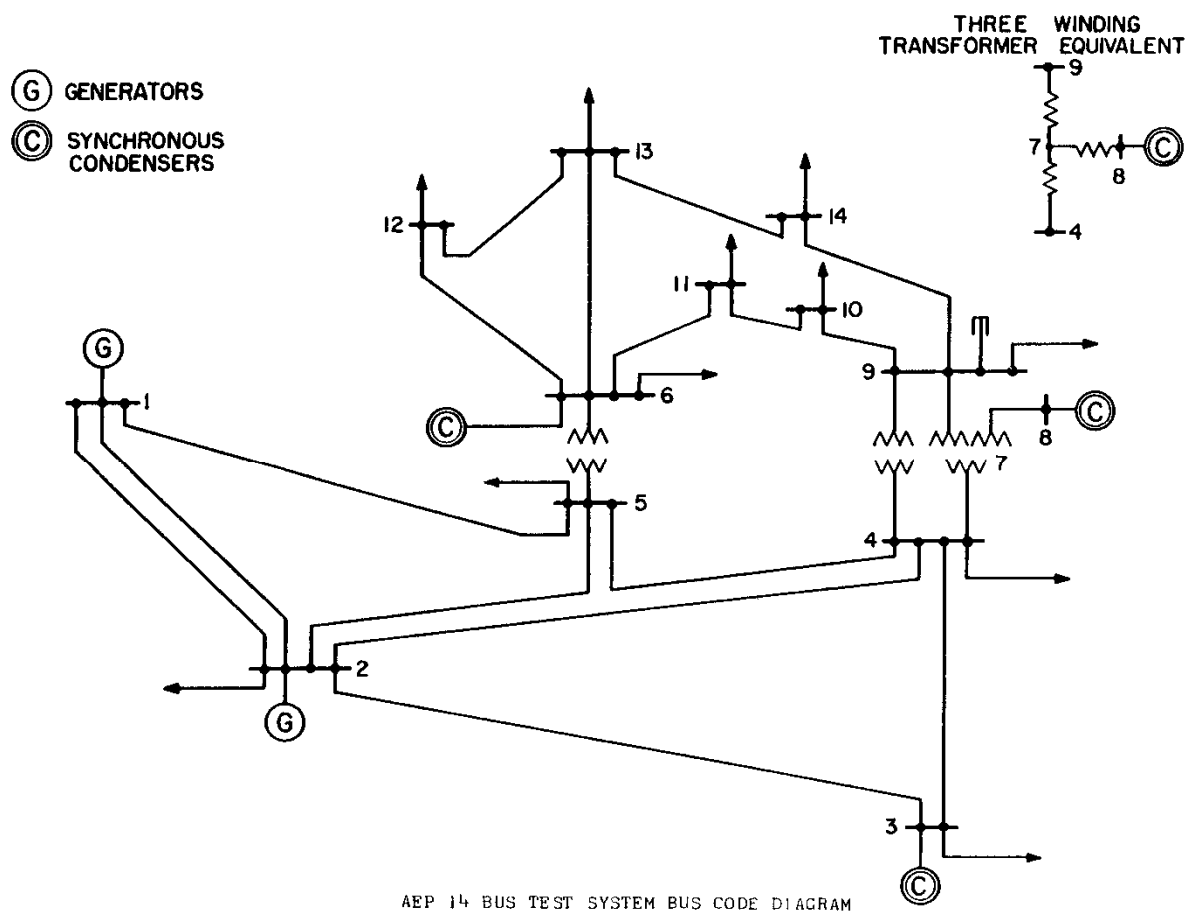


Figura E.1 - Diagrama Unifilar do Sistema IEEE 14 Barras

Tabela E.1 - Sistema IEEE 14 Barras - Dados de Barra

Barra	Tipo	Carga		Geração		Limites (MVar)		Shunt (pu)
		MW	MVAr	MW	MVAr	Max	Min	
1	V θ	-	-	232,4	-16,9	-	-	-
2	PV	21,7	12,7	40,0	42,4	50,0	-40,0	-
3	PV	94,2	19,0	-	23,4	40,0	0,0	-
4	PQ	47,8	-3,9	-	-	-	-	-
5	PQ	7,6	1,6	-	-	-	-	-
6	PV	11,2	7,5	-	12,2	24,0	-6,0	-
7	PQ	-	-	-	-	-	-	-
8	PV	-	-	-	17,4	24,0	-6,0	-
9	PQ	29,5	16,6	-	-	-	-	0,19
10	PQ	9,0	5,8	-	-	-	-	-
11	PQ	3,5	1,8	-	-	-	-	-
12	PQ	6,1	1,6	-	-	-	-	-
13	PQ	13,5	5,8	-	-	-	-	-
14	PQ	14,9	5,0	-	-	-	-	-

Tabela E.2 - Sistema IEEE 14 Barras - Dados de Linha

De	Para	Circuito	R (pu)	X (pu)	B (pu)	Tap
1	2	1	0,01938	0,05917	0,0528	-
1	5	1	0,05403	0,22304	0,0492	-
2	3	1	0,04699	0,19797	0,0438	-
2	4	1	0,05811	0,17632	0,0340	-
2	5	1	0,05695	0,17388	0,0346	-
3	4	1	0,06701	0,17103	0,0128	-
4	5	1	0,01335	0,04211	-	-
4	7	1	-	0,20912	-	0,978
4	9	1	-	0,55618	-	0,969
5	6	1	-	0,25202	-	0,932
6	11	1	0,09498	0,19890	-	-
6	12	1	0,12291	0,25581	-	-
6	13	1	0,06615	0,13027	-	-
7	8	1	-	0,17615	-	-
7	9	1	-	0,11001	-	-
9	10	1	0,03181	0,08450	-	-
9	14	1	0,12711	0,27038	-	-
10	11	1	0,08205	0,19207	-	-
12	13	1	0,22092	0,19988	-	-
13	14	1	0,17093	0,34802	-	-

Apêndice F Sistema IEEE 30 Barras

Neste apêndice são apresentados os dados de barra e de linha do sistema IEEE 30 Barras. A Figura F.1 apresenta o diagrama unifilar e as Tabelas F.1 e F.2 apresentam os dados de barra e de linha do sistema.

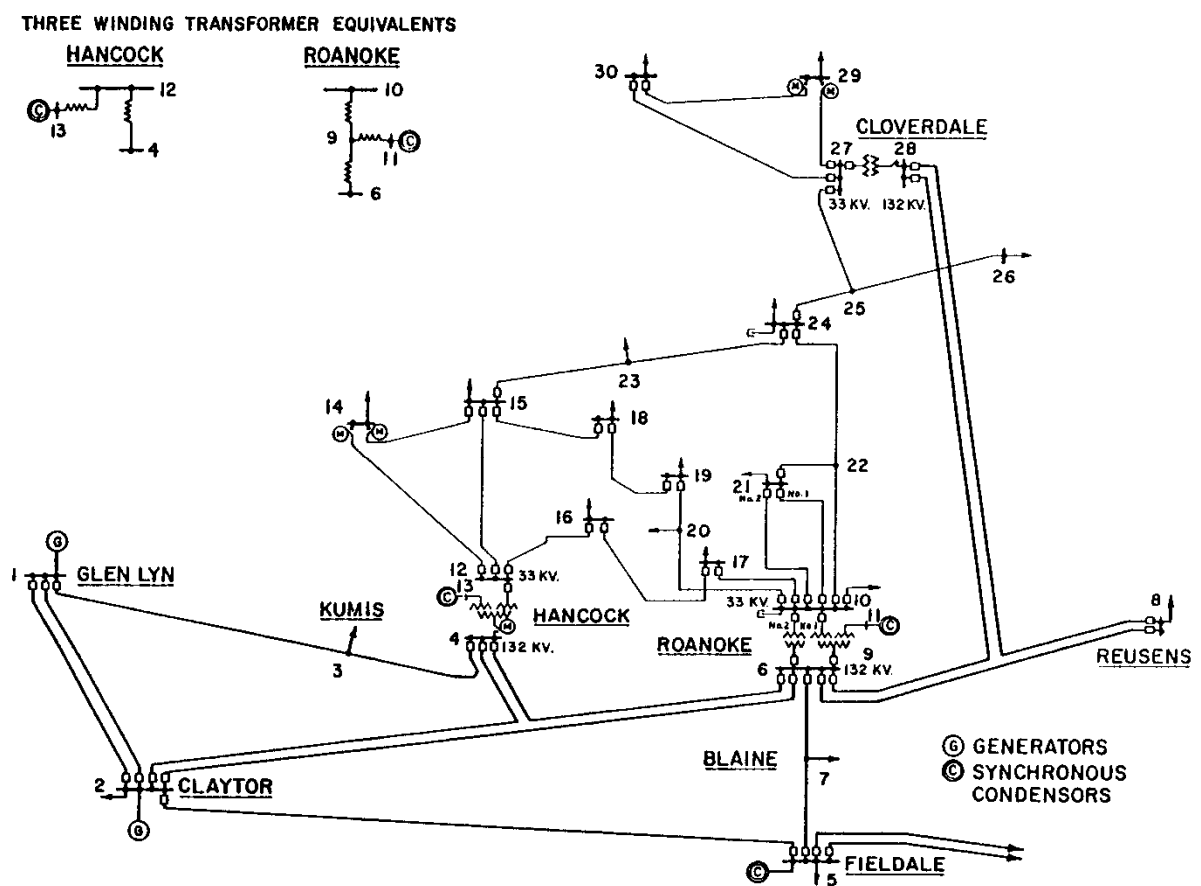


Figura F.1 - Diagrama Unifilar do Sistema IEEE 30 Barras

Tabela F.1 - Sistema IEEE 30 Barras - Dados de Barra

Barra	Tipo	Carga		Geração		Limites (MVar)		Shunt (pu)
		MW	MVAr	MW	MVAr	Max	Min	
1	V θ	-	-	260,2	-16,1	-	-	-
2	PV	21,7	12,7	40,0	50,0	50,0	-40,0	-
3	PQ	2,4	1,2	-	-	-	-	-
4	PQ	7,6	1,6	-	-	-	-	-
5	PV	94,2	19,0		37,0	40,0	-40,0	
6	PQ	-	-	-	-	-	-	-
7	PQ	22,8	10,9	-	-	-	-	-
8	PV	30,0	30,0	-	37,3	40,0	-10,0	-
9	PQ	-	-	-	-	-	-	-
10	PQ	5,8	2,0	-	-	-	-	0,19
11	PV	-	-	-	16,2	24,0	-6,0	-
12	PQ	11,2	7,5	-	-	-	-	-
13	PV	-	-	-	10,6	24,0	-6,0	-
14	PQ	6,2	1,6	-	-	-	-	-
15	PQ	8,2	2,5	-	-	-	-	-
16	PQ	3,5	1,8	-	-	-	-	-
17	PQ	9,0	5,8	-	-	-	-	-
18	PQ	3,2	0,9	-	-	-	-	-
19	PQ	9,5	3,4	-	-	-	-	-
20	PQ	2,2	0,7	-	-	-	-	-
21	PQ	17,5	11,2	-	-	-	-	-
22	PQ			-	-	-	-	-
23	PQ	3,2	1,6	-	-	-	-	-
24	PQ	8,7	6,7	-	-	-	-	0,043
25	PQ	-	-	-	-	-	-	-
26	PQ	3,5	2,3	-	-	-	-	-
27	PQ	-	-	-	-	-	-	-
28	PQ	-	-	-	-	-	-	-
29	PQ	2,4	0,9	-	-	-	-	-
30	PQ	10,6	1,9					

Tabela F.2 - Sistema IEEE 30 Barras - Dados de Linha

De	Para	Circuito	R (pu)	X (pu)	B (pu)	Tap
1	2	1	0,0192	0,0575	0,0528	-
1	3	1	0,0452	0,1652	0,0408	-
2	4	1	0,0570	0,1737	0,0368	-
3	4	1	0,0132	0,0379	0,0084	-
2	5	1	0,0472	0,1983	0,0418	-
2	6	1	0,0581	0,1763	0,0374	-
4	6	1	0,0119	0,0414	0,0090	-
5	7	1	0,0460	0,1160	0,0204	-
6	7	1	0,0267	0,0820	0,0170	-
6	8	1	0,0120	0,0420	0,0090	-
6	9	1	-	0,2080	-	0,978
6	10	1	-	0,5560	-	0,969
9	11	1	-	0,2080	-	-
9	10	1	-	0,1100	-	-
4	12	1	-	0,2560	-	0,932
12	13	1	-	0,1400	-	-
12	14	1	0,1231	0,2559	-	-
12	15	1	0,0662	0,1304	-	-
12	16	1	0,0945	0,1987	-	-
14	15	1	0,2210	0,1997	-	-
16	17	1	0,0524	0,1923	-	-
15	18	1	0,1073	0,2185	-	-
18	19	1	0,0639	0,1292	-	-
19	20	1	0,0340	0,0680	-	-
10	20	1	0,0936	0,2090	-	-
10	17	1	0,0324	0,0845	-	-
10	21	1	0,0348	0,0749	-	-
10	22	1	0,0727	0,1499	-	-
21	22	1	0,0116	0,0236	-	-
15	23	1	0,1000	0,2020	-	-
22	24	1	0,1150	0,1790	-	-
23	24	1	0,1320	0,2700	-	-
24	25	1	0,1885	0,3292	-	-
25	26	1	0,2544	0,3800	-	-
25	27	1	0,1093	0,2087	-	-
28	27	1		0,3960	-	0,968
27	29	1	0,2198	0,4153	-	-
27	30	1	0,3202	0,6027	-	-
29	30	1	0,2399	0,4533	-	-
8	28	1	0,0636	0,2000	0,0428	-
6	28	1	0,0169	0,0599	0,0130	-