Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Bruno Sampaio de Oliveira

Utilização do programa Maxima no ensino de sistemas de equações lineares

Juiz de Fora

2013

Bruno Sampaio de Oliveira

Utilização do programa Maxima no ensino de sistemas de equações lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática .

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2013

Oliveira, Bruno Sampaio.

Utilização do programa Maxima no ensino de sistemas de equações lineares
Bruno Sampaio de Oliveira. - 2013.
52f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Ensino. 2. Equações Lineares. 3. Maxima.
I. Título.

CDU 51

Bruno Sampaio de Oliveira

Utilização do programa Maxima no ensino de sistemas de equações lineares

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rogério Casagrande
PROFMAT
UFJF

Prof^{a}. Dr^{a}. Margareth da Silva Alves
Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 25 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar força nos momentos de dificuldades. Aos meus pais, familiares e amigos que sempre me apoiaram em todos os momentos de sacrifícios e privações. À CAPES pelo apoio financeiro recebido. Aos professores, que nos deram todo o suporte e fundamentação para que concluíssemos com êxito mais este objetivo. E, aos colegas de curso, que foram verdadeiros companheiros ao longo desta caminhada.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor a implementação do *software* MAXIMA no ensino de sistemas de equações lineares 2 x 2 em turma do 8º ano do Ensino Fundamental e de sistemas de equações lineares 3 x 3 em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Além de destacar a importância da utilização de recursos tecnológicos nos dias atuais, o autor sugere algumas atividades e formas de abordar o tema com a utilização do programa.

Palavras-Chave: Ensino. Equações Lineares. Maxima.

ABSTRACT

The objective of this work is to propose the implementation of software MAXIMA in teaching systems of linear equations 2 x 2 in the 8th grade class of elementary school and systems of linear equations in 3 x 3 classes of 2nd year of high school. In addition to highlighting the importance of using technological resources nowadays, the author suggests some activities and ways of approaching the topic using the program.

Key-words: Teaching. Linear Equations. Maxima.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, a relação ensino-aprendizagem da Matemática em nossas escolas passa por um período de muita dificuldade. E essa dificuldade é consequência de vários fatores, dentre eles a falta de motivação dos alunos e o despreparo de alguns professores. Os dois fatores supracitados norteiam o objetivo deste trabalho que é destacar a importância da utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática. Este está disposto em seis capítulos, como veremos adiante.

No capítulo 1, destacaremos a importância da utilização desses recursos, bem como seus fatores potencializadores e suas possíveis limitações.

No segundo capítulo, apresentaremos o *software* MAXIMA ao leitor, destacando suas ferramentas básicas e, principalmente, as utilizadas neste trabalho.

O capítulo 3 dá início ao real objetivo deste estudo e destaca a importância da utilização do programa para a potencialização do ensino de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas para turmas do segundo segmento do Ensino Fundamental. Nele, será tratada a estreita relação entre as abordagens algébricas e geométricas, e como a consonância entre essas abordagens pode facilitar o processo de aprendizagem.

No quarto capítulo, descrevemos e comentamos a aplicação de uma atividade, com a utilização do MAXIMA, em uma turma de uma escola da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, na qual leciona o autor deste trabalho.

No capítulo 5, a relação entre as abordagens algébricas e geométricas continua sendo priorizada e é estendida ao plano tridimensional no estudo de sistemas de equações lineares com três equações e três incógnitas.

No 6º e último capítulo analisamos as respostas de quatro professores da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro ao questionário(vide Anexo C) desenvolvido pelo autor sobre o tema do capítulo anterior.

1 A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Atualmente, o desenvolvimento da informática fez com que o computador passasse a fazer parte do cotidiano das pessoas, e este, passou a atuar incisivamente em todas as áreas do conhecimento, não podendo a educação ficar alheia a todo esse processo de desenvolvimento. Em nossos estabelecimentos de ensino, vemos professores utilizando apenas os recursos tradicionais, que não tem atraído a atenção e o interesse desses jovens e crianças que já nasceram inseridos em um "mundo tecnológico". Diante desse quadro, verificamos que a inserção da informática nas escolas passa a ser indispensável para a formação de um novo perfil de aluno e cidadão. Borba [2] defende que o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica. Tal alfabetização deve ser vista não como um curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Porém, devemos ressaltar que a presença de recursos tecnológicos em nossas escolas requer das instituições de ensino e, principalmente, do professor, novas posturas frente ao processo de ensino-aprendizagem. Este, deixará de ser o "detentor do conhecimento" e passará a ser um mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem.

A revolução tecnológica produz uma geração de alunos que cresce em ambientes ricos em multimídia, com expectativas e visão de mundo diferentes das gerações anteriores. Logo, a revisão das práticas educacionais é condição necessária para que possamos moldar um ambiente de aprendizagem significativa. O computador precisa ser visto como mais uma possibilidade de representar o conhecimento e buscar alternativas e estratégias para a compreensão da realidade. É necessário, com o auxílio da tecnologia, que se crie diferentes formas de aprendizagem e ensino baseada numa proposta pedagógica que tenha o aluno e suas necessidades de aprendizado como foco central.

Valente [12] afirma que o uso do computador na educação tem como objetivo a sua integração no processo de aprendizagem em todas as modalidades e níveis de ensino, desempenhando um papel de facilitador entre o aluno e a construção do conhecimento. Destaca, também, a necessidade do professor se atentar para os potenciais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades não-informatizadas de ensino-aprendizagem e outras que possam ser realizadas mediante a utilização desses recursos tecnológicos. Além disso, existe a necessidade dos docentes estarem preparados para realizar atividades computadorizadas com seus alunos, pontuando as estratégias de ensino que utilizarão, conhecendo as possíveis restrições que esses recursos podem apresentar e ter bem claro os objetivos a serem alcançados com as tarefas executadas. O uso desmedido e sem um planejamento adequado desses recursos tecnológicos pode dificultar, consideravelmente, o processo de ensino-aprendizagem de qualquer disciplina e, principalmente, da matemática.

Diante dessas dificuldades, sabemos que não há uma receita previamente definida para solucioná-las, cabendo ao docente o seu planejamento, implementação e avaliação dos resultados. A informática, bem como todos os outros recursos tecnológicos, vem para complementar e não substituir todo o sistema educacional vigente, cabendo ao professor avaliar as suas potencialidades e discernir os momentos ideais para sua utilização, de modo a auxiliar a construção colaborativa do conhecimento de forma interativa e contextualizada. O objetivo desse trabalho é avaliar como o programa MAXIMA pode beneficiar o ensino de sistemas de equações lineares ao criar uma estreita relação entre suas representações algébrica e gráfica.

2 O *SOFTWARE* **MAXIMA**

2.1 HISTÓRICO

O MAXIMA é um *software* livre gratuito cuja instalação, exploração e distribuição não possui qualquer restrição. É derivado dos sistema Macsyma, um lendário sistema de álgebra computacional desenvolvido entre os anos de 1968 e 1982 pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). O MIT enviou uma cópia do código fonte do Macsyma para o Departamento de Energia em 1982, sendo que essa versão é agora conhecida como Macsyma DOE. Essa cópia foi mantida pelo professor Wilian F. Schelter da Universidade do Texas entre 1982 e 2001, ano em que faleceu.

Em 1998, Schelter obteve permissão do Departamento de Energia, para disponibilizar o código fonte do Macsyma DOE sob a licença pública GNU e em 2000, ele iniciou o projeto MAXIMA no SourceForge para manter e desenvolver o Macsyma DOE, agora chamado MAXIMA.

O MAXIMA é um sistema de computação algébrica que permite explorar e manipular expressões matemáticas de maneira simbólica e interativa. O usuário digitaliza na janela do programa algumas fórmulas e comandos e o sistema os avalia emitindo uma resposta que, posteriormente, pode continuar sendo manipulada, de acordo com o interesse do usuário.

O programa permite também obter soluções numéricas aproximadas e visualizações gráficas de funções matemáticas. Por se tratar de um *software* livre, com funcionalidades similares aos programas comercializados, o MAXIMA não estimula o uso de cópias não autorizadas. Para baixá-lo basta acessar o sítio eletrônico http://maxima.sourceforge.net/ onde se obtém mais informações sobre o programa. Após descarregar o programa, siga as recomendações apresentadas para sua instalação e escolha pelas interfaces WxMaxima ou xMAXIMA. Apesar de ambas produzirem os mesmos resultados, a interface WxMaxima se apresenta de forma mais interativa com o utilizador e, portanto, será a escolhida neste trabalho. Para maiores informações bata consultar a documentação do máxima [6], e para baixar a interface WxMaxima basta acessar o sítio eletrônico http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/.

2.2 FUNÇÕES ELEMENTARES DO MAXIMA

O MAXIMA é um sistema de computação algébrica que, assim como muitos outros, dispõe de ferramentas para a abordagem de uma ampla gama de conteúdos matemáticos, abrangendo todos os níveis de ensino. Porém, a utilização de tais ferramentas requer um certo conhecimento sobre sua linguagem de programação, que possui comandos e sintaxes próprias. Como a própria aprendizagem dessa linguagem constitui um processo gradual e lento, nesta seção apresentaremos apenas algumas funções elementares introdutórias e as funções necessárias para a abordagem do conteúdo proposto no trabalho. Para um aprofundamento do tema, podemos consultar Giraldo[8].

Após o término da instalação do MAXIMA, optando pela interface WxMaxima, obtemos uma janela com a seguinte apresentação, e qualquer comando pode ser digitado na parte branca da mesma.

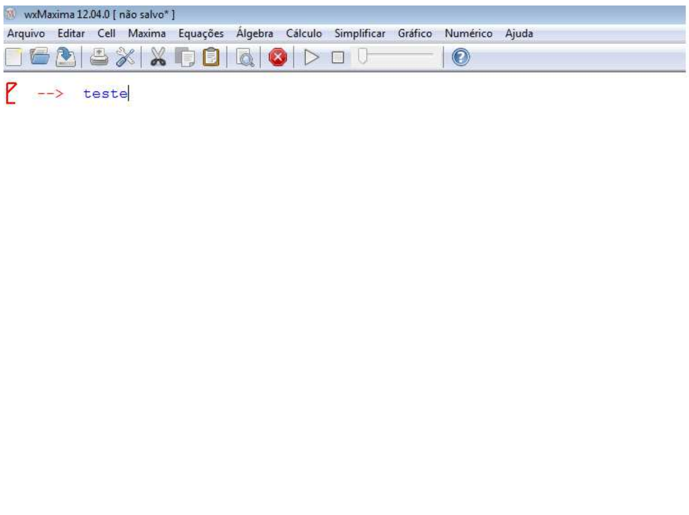


Figura 1: Ambiente inicial

O MAXIMA permite que se realize desde operações triviais até cálculos mais complexos. Para não perder o foco do trabalho, veremos adiante apenas uma restrita quantidade de suas funcionalidades para a ambientação e familiarização com o programa.

2.2.1 Operações Aritméticas Fundamentais

A tabela a seguir lista as operações aritméticas que podemos realizar nas expressões:

Operadores	Operações
+	Soma
-	Subtração
*	Multiplicação
/	Divisão
Acento circunflexo	Potenciação
sqrt	Radiciação

Tabela 1: Exemplo

Para resolver uma expressão aritmética simples, basta digitá-la e, posteriormente, apertar a tecla enter. Observemos o exemplo a seguir:

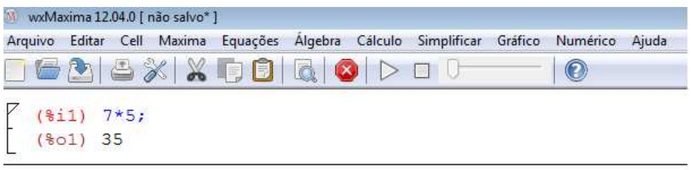


Figura 2: Operações básicas: multiplicação

Observemos que os termos "i" (input) e "o" (output) precedidos pelo símbolo percentual representam, respectivamente, a entrada (comando digitado) e a saída (resposta fornecida pelo programa). Outro exemplo que merece destaque é o cálculo de raízes não exatas, pois o programa, em um primeiro momento, fornece apenas o resultado na forma fatorada.

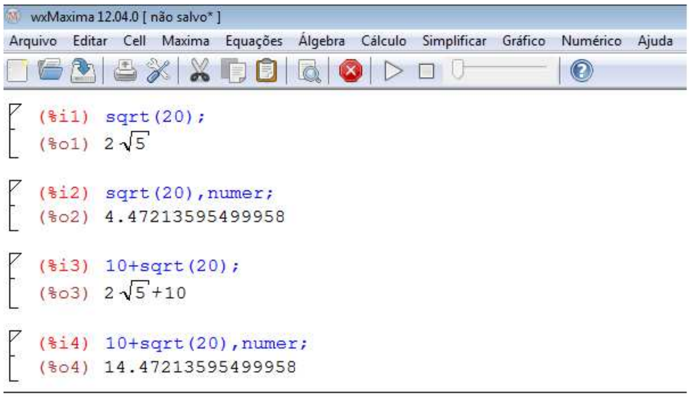


Figura 3: Operações aritméticas

Para obtermos o irracional aproximado, devemos acrescentar o termo "numer" separado por vírgula da expressão numérica. Podemos também, de forma alternativa, utilizar o comando "float" acrescido pelo seu índice de entrada ou saída.

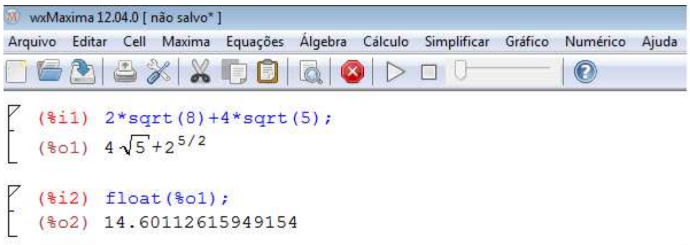


Figura 4: Operações aritméticas

2.2.2 Constantes e Variáveis

Outra ferramenta muito importante no MAXIMA é a possibilidade de atribuir e manipular variáveis, que são identificadores aos quais se atribuem valores numéricos. Para atribuir letras ou variáveis a constantes numéricas utilizamos a tecla dois pontos (:). Observemos:

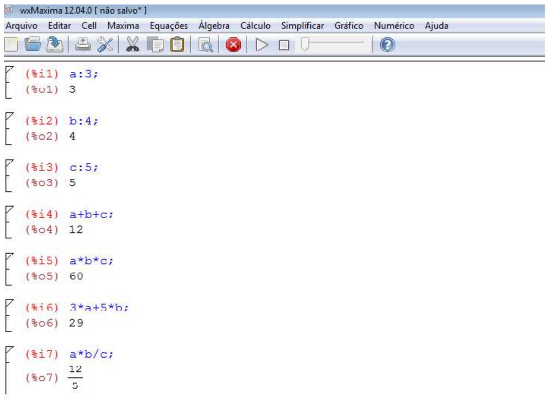


Figura 5: Constantes e variáveis: atribuindo valores numéricos

Ao definir-se a:3, b:4 e c:5 atribuimos valores reais a essas variáveis e a partir desses valores, definidos aleatoriamente, podemos manipular qualquer tipo de operação algébrica. Existem também representações específicas para algumas constantes matemáticas como os irracionais "pi" e "e". Para manipulá-los, basta precedê-los do símbolo percentual. Vejamos o exemplo:

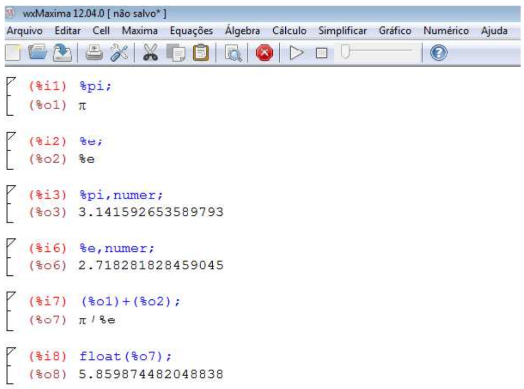


Figura 6: Constantes e variáveis: irracionais

2.2.3 Equações e Sistemas de Equações

O MAXIMA também permite que se encontre soluções para equações e sistemas de equações de uma maneira bastante simples. No caso das equações, o comando utilizado é "solve", bastando colocar a equação desejada entre parênteses e concluir com SHIFT + ENTER. Siga os exemplos:

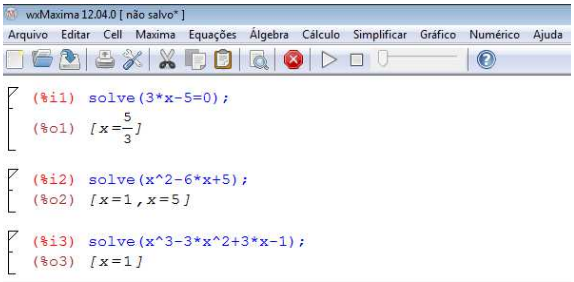


Figura 7: Resolvendo equações

Observemos que nos casos de equações com segundo membro da igualdade nulo, o zero e mais o sinal de igualdade não são comandos necessários.

Para resolver um sistema de equações, o comando "solve" também é utilizado, porém as equações devem vir separadas por vírgulas e ambas dentro de um mesmo colchete. Além disso, após as equações devemos digitar as incógnitas também separadas por vírgulas dentro de um mesmo colchete. Observemos:

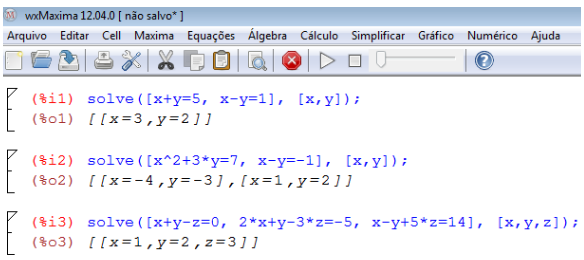


Figura 8: Resolvendo sistemas de equações

A interface WxMaxima permite também que se resolva equações e sistemas de equações sem que seja necessário memorizar todos esses comandos. Para isso, basta escolher no menu superior a opção "Equações" e, logo em seguida, escolher a opção desejada para a execução.

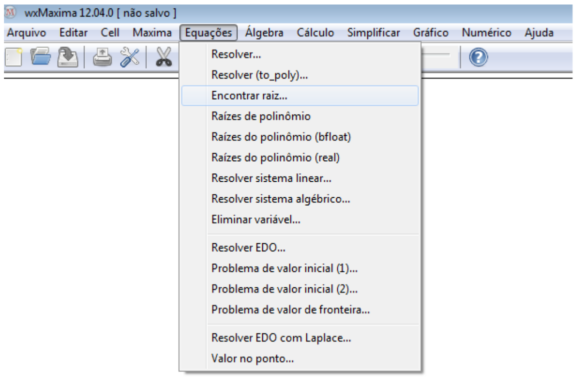


Figura 9: Resolvendo equações: modo alternativo

Por exemplo, para resolver um sistema de equações lineares com quatro equações e quatro incógnitas, basta clicarmos em "Equações" e, posteriormente, "Resolver sistema linear". Em seguida, irá aparecer uma pequena janela solicitando o número de equações e incógnitas desejadas, para em seguida uma nova janela solicitar que se identifique todas as equações e incógnitas.

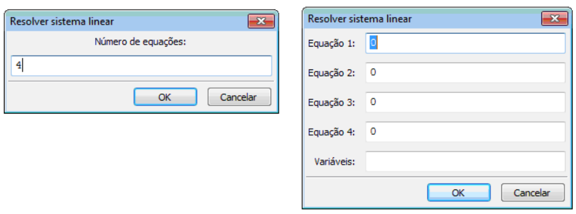


Figura 10: Resolvendo sistemas de equações: modo alternativo

Confirmada essa sequência de operações, o MAXIMA apresentará a solução desejada.

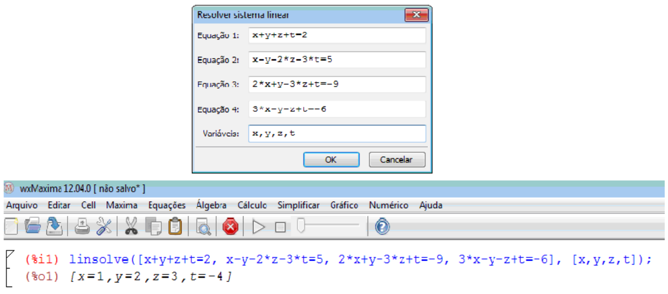


Figura 11: Resolvendo sistemas de equações: modo alternativo

2.2.4 Gráficos 2D e 3D

Dada uma equação com duas ou três incógnitas, o programa nos permite, através de uma pequena adequação para funções de uma ou duas variáveis, obter a sua representação gráfica a partir de alguns comandos bastantes simples.

Começando pelos gráficos de equações com duas incógnitas, o comando a ser utilizado é o "wxplot2d". Entretanto, para digitar a equação desejada, devemos compreendê-la como uma função de uma única variável, isolando uma das incógnitas. Por exemplo, para obter o gráfico da equação $x + y = 5$, devemos compreendê-la como a função $y = -x + 5$. Essa mudança deve-se ao fato de que o MAXIMA já compreende a variável dependente da função de forma implícita, sendo dispensável sua inserção na linha de comandos. Observemos:

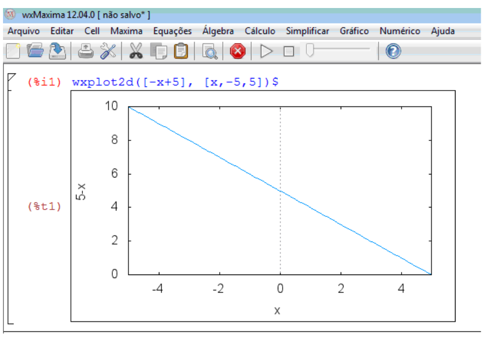


Figura 12: Gráfico da equação $x + y = 5$

Observe na figura anterior, que após o comando principal "wxplot2d", deve-se inserir, entre parênteses dois colchetes separados por vírgulas. O primeiro deve conter a função (com exceção da variável isolada), e o segundo, o intervalo desejado para a variável independente. Note, que no exemplo acima, a função foi definida em um intervalo com x variando de -5 a 5. É importante ressaltar que esse intervalo de variação é definido pelo próprio usuário.

Para exemplificar, construiremos o gráfico da equação 2x - y = 10 em um intervalo definido para a variável x de - 20 a 20. Observemos os comandos a seguir:

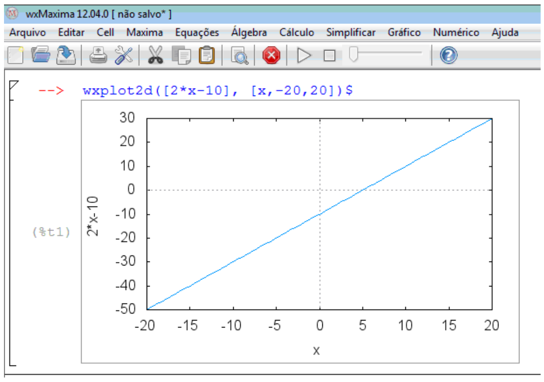


Figura 13: Gráfico da equação $2x - y = 10$

O *software* também permite que se construa gráficos de mais de uma equação, simultaneamente, o que será de real importância para a continuidade deste trabalho. Para isso, basta inserir no colchete que armazena as funções as demais funções desejadas separadas por vírgulas. Vejamos a seguir:

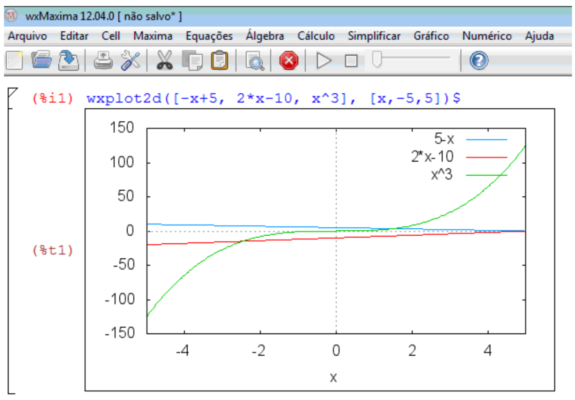


Figura 14: Gráfico simultâneo das equações

Pelo exemplo acima, podemos observar que o programa não se limita a funções que representam apenas equações lineares, pois a equação $x^3 - y = 0$ está perfeitamente representada.

Além disso, outro fator importante a que se deve atentar é a escolha do intervalo de variação escolhido. Este deve sempre estar consonante com o objetivo de cada atividade. Caso contrário, o gráfico poderá levar a uma interpretação equivocada sobre o real comportamento da função.

Assim como no item 2.2.3, a interface WxMáxima possui no menu superior a opção "Gráficos". Ao escolher essa opção, temos acesso direto aos gráficos 2D (bidimensionais) e 3D (tridimensionais). Escolhendo a opção "Gráfico 2d", aparecerá uma nova janela contendo espaços para digitar as expressões e os intervalos de variação desejados, além de outras opções irrelevantes para o momento. Vejamos a seguir:

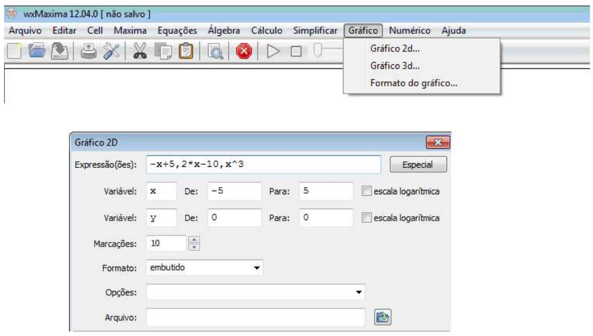


Figura 15: Gráficos: modo alternativo

Ao confirmar em "OK", poderemos observar que o resultado é idêntico ao obtido quando utilizada apenas a linha de comandos, sendo função do professor escolher a opção mais adequada a ser utilizada, de acordo com o seu planejamento prévio.

Para gráficos de equações com três incógnitas, ou seja, funções com duas variáveis, os comandos a serem utilizados são muito semelhantes aos dos gráficos bidimensionais. Porém, o comando inicial passa a ser "wxplot3d" e as variáveis independentes passam a ser x e y, enquanto a variável dependente z é implícita pelo programa e não é utilizada na linha de comandos.

Além disso, no caso de construção de um único gráfico, o colchete que continha a função é desprezado e um novo colchete surge para a escolha de um intervalo para a variável y. Vejamos um exemplo a seguir:

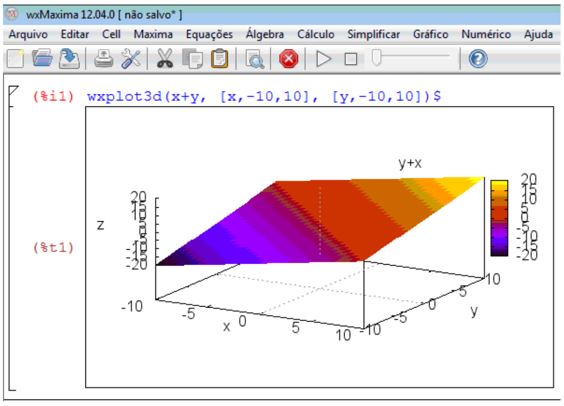


Figura 16: Gráfico da equação $x + y - z = 0$

No caso de gráficos simultâneos de funções, devemos acrescer um colchete contendo todos os comandos dentro dos parênteses já existentes. Observemos o exemplo a seguir:

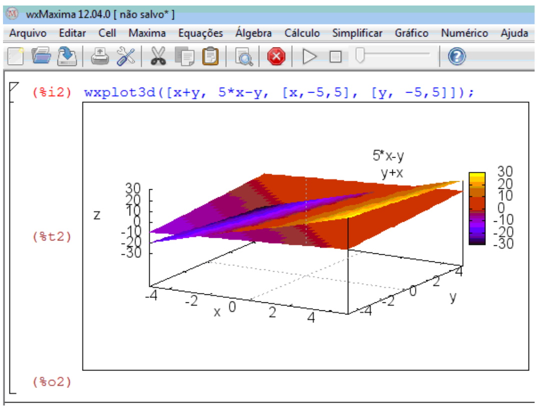


Figura 17: Gráfico simultâneo das equações

Para utilizar a função "Gráfico" no menu superior do *software* procedemos de maneira análoga à observada no caso dos gráficos bidimensionais.

3 EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 2 X 2

3.1 EQUAÇÃO DO 1º GRAU

No decorrer do 7º ano do Ensino Fundamental, o aluno tem o seu primeiro contato com a Álgebra no estudo de equações. Neste momento, ele objetiva encontrar, através de mecanismos operatórios, o valor numérico para seu valor desconhecido, também chamado de incógnita. Ao aprofundar o estudo e compreender o tema, ele verificará que, por mais complexas que sejam as equações, todas possuem solução única, ou seja, um único número real satisfará cada igualdade trabalhada.

Porém, um pouco adiante, o aluno se depara com equações do 1º grau com duas incógnitas. Acredita-se, neste trabalho, ser esse o momento ideal para a implementação do *software* MAXIMA, pois com uma abordagem adequada e bem planejada, o professor poderá despertar nos alunos o interesse pela busca de soluções para problemas diferentes do que ele havia acabado de se habituar.

Ressaltamos que o planejamento e a organização são fundamentais para a implementação do programa, pois este deve servir como instrumento potencializador e facilitador do processo de aprendizagem, sendo este, sempre mediado pelo professor. Sua utilização de forma inadequada e desmedida irá apenas dificultar o processo de construção do conhecimento.

Apresentaremos a seguir uma sugestão de como o professor poderia abordar o assunto de uma forma interativa e com a utilização do MAXIMA.

3.2 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O MAXIMA

Após habituar-se com os mecanismos e métodos de resolução de equações do 1º grau, o aluno certamente encontrará uma dificuldade ao se deparar com duas incógnitas distintas em uma mesma equação, já que os métodos aprendidos anteriormentes são insuficientes para a mesma. Nesse momento, cabe ao professor mediar a situação e propor novos métodos para a busca de soluções adequadas.

Inicialmente, sugerimos que o professor lance uma dessas equações como desafio aos alunos, por exempo, $x+y=15$. Posteriormente, esclareça aos mesmos que a "nova" equação busca apenas por dois números cuja soma resulta em 15. Rapidamente, aparecerão respostas das mais diversas, como os pares ordenados $(1,14)$, $(4,11)$, $(7,8)$, entre outras, o que já deixa explícito ao aluno que este novo tipo de equação, ao contrário das aprendidas anteriormente, não admite apenas uma única solução. Ao pedir que cada aluno dê uma solução diferente das apresentadas e destacando e exemplificando que o universo de soluções não se restringe apenas ao conjunto dos números naturais, o professor obtém dos alunos várias soluções distintas da mesma equação.

Dando prosseguimento, o professor poderá solicitar que cada aluno marque sua solução, em forma de par ordenado (x,y) em um plano cartesiano, em um lugar visível a todos. Se necessário, o professor poderá fazer uma breve revisão sobre coordenadas no plano cartesiano. Feito isso, provavelmente os alunos perceberão uma certa linearidade nos pontos marcados no plano e, nesse momento, o professor utilizará o MAXIMA para a plotagem da equação. Vejamos a figura a seguir:

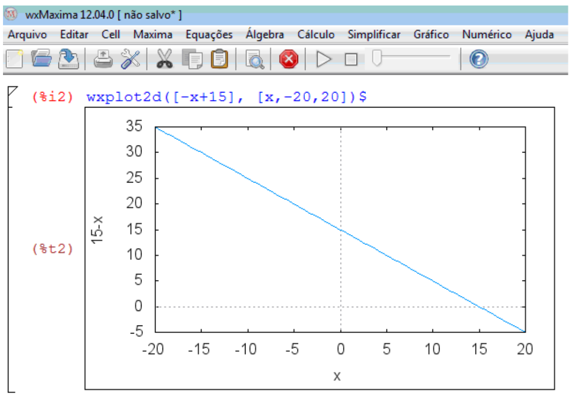


Figura 18: Gráfico da equação $x+y=15$

Ao virem a representação gráfica do programa, os alunos concluirão que a linearidade percebida por eles ao marcarem os pontos coincide com a reta apresentada pelo MAXIMA. Cabe ao professor, nesse momento, levá-los a concluir que a continuidade da reta se deve ao fato de que a equação, além das soluções apresentadas por eles, possui infinitas soluções pertencentes ao universo do conjuntos dos números reais.

Ressaltamos também que a atividade deve ser sempre mediada e, se necessário, corrigida pelo professor, já que um acúmulo de erros não permitiria o encadeamento de ideias pretendido pela atividade.

Em seguida, o professor poderá utilizar mais alguns exemplos de equações seguindo o mesmo roteiro anterior, para que através deles os alunos possam conjecturar acerca do tema. Ou ainda, pode pedir para que cada um dos alunos escreva uma equação diferente nos mesmos moldes das anteriores, ou seja, contendo duas incógnitas, para que possam visualizá-las no MAXIMA e concluir que todas as equações representam retas contínuas no plano cartesiano, alcançando o objetivo da atividade.

Para finalizar, o professor poderá definir as equações formalmente, fazendo as generalizações necessárias, pois nesse momento, provavelmente, os alunos já terão obtido uma fundamentação bastante adequada, facilitando a compreensão e associação entre suas representações algébricas e gráficas.

3.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 2 X 2

Após a compreensão e aprendizagem das equações lineares de duas incógnitas, o aluno será levado ao estudo dos sistemas de equações lineares com duas incógnitas. O primeiro passo para a sua compreensão é dado pelo professor, explicando-lhe o significado e objetivo do conteúdo a ser estudado, orientando a busca por possíveis soluções (pares ordenados) que satisfaçam ambas as equações, simultaneamente.

O objetivo deste trabalho é mostrar como a utilização do MAXIMA pode colaborar com a aprendizagem deste conteúdo, pois embora o tema possibilite uma ampla interpretação gráfica através do plano cartesiano, usualmente, verificamos a predominância das abordagens algébricas, com seus métodos de adição e substituição, como visto em [10] e [1]. Porém, tomaremos como base Dante [4], que introduz o assunto privilegiando a interpretação gráfica, além de classificar os sistemas quanto ao número de soluções.

O que se pretende é a utilização de recursos computacionais para a potencialização e complementação da aprendizagem de tal conteúdo, ou seja, utilizar o programa para a construção de representações geométricas de conceitos matemáticos tidos por eles, anteriormente, como puramente algébricos.

Devemos ressaltar que não se busca abolir a interpretação algébrica e muito menos diminuir a sua importância no processo de aprendizagem, e sim, proporcionar ao aluno múltiplas representações de um mesmo conceito matemático buscando uma apendizagem cada vez mais significativa.

Geralmente, seguindo uma abordagem tradicionalista, os professores introduzem o tema de maneira exclusivamente algébrica e utilizando apenas exemplos de sistemas de solução única, preterindo os casos de sistemas de múltiplas soluções e de solução inexistente. O autor deste trabalho propõe uma abordagem que trate, simultaneamente, de todos os casos, bem como uma interação entre as interpretações algébrica e geométrica de suas resoluções.

Sugerimos, inicialmente, que para a introdução do conteúdo o professor planeje e escolha, antecipadamente, três sistemas de equações lineares: um deles com solução única, outro sem solução e o terceiro deles com múltiplas soluções. Para esta introdução e para o bom desenvolvimento da atividade que será proposta, devemos priorizar a escolha de equações mais "simples", ou seja, cujas soluções mentais possam ser encontradas sem maiores dificuldades.

Consideremos o sistema de equações lineares a seguir, cuja solução é única:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 10 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

Ao apresentá-la aos alunos, o professor deve solicitar que um grupo de alunos procure soluções para a equação x + y = 10 e outro para a equação x - y = 2, certificando-se de que o par ordenado que representa a solução do sistema, previamente conhecido por ele, seja encontrado por ambos os grupos. Ao apresentarem suas soluções, imediatamente, os alunos perceberão que existe um único par ordenado comum aos grupos, sendo este uma solução do sistema de equações proposto. Entretanto, os alunos, provavelmente, utilizarão apenas números inteiros para buscarem as soluções desejadas, logo, cabe ao professor interpelá-los se existem outros números reais que sejam soluções do mesmo sistema.

Diante de tal questionamento, é possível que alguns dos alunos já comecem a fazer uma relação com a interpretação gráfica vista anteriormente, e associem a solução como o único ponto de interseção entre as retas que representam as equações. Logo, para que todos façam tal associação, utiliza-se MAXIMA para a plotagem das equações e verificação da interseção entre as retas.

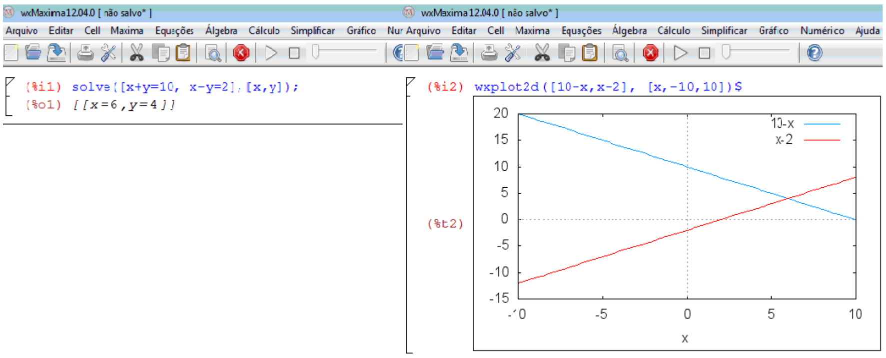


Figura 19: Sistema de solução única

Após a visualização da interseção entre as retas e sua relação com a solução do sistema proposto, o professor poderá repetir os procedimentos com o sistema de equações de solução inexistente. Logo, considerando o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 8 \\ 2x & - & 2y & = & 10 \end{array}\right.$$

e repetindo os procedimentos anteriores, os alunos verificarão que dentre as soluções apresentadas, não existe uma comum às equações. Consequentemente, a dúvida que restará é se a possível solução apenas não foi encontrada pelos grupos, ou se, realmente, ela inexiste. Novamente, o professor usará o *software* para solucionar esse problema. Vejamos:

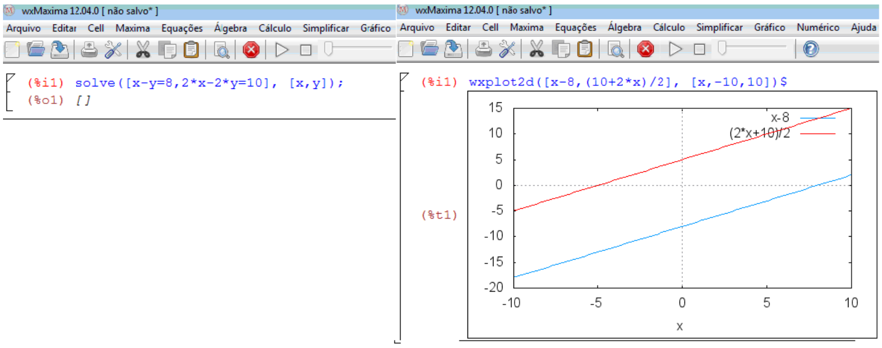


Figura 20: Sistema de solução inexistente

Ao perceberem, com a ajuda do MAXIMA, que as duas equações dão origem a um par de retas paralelas, os alunos concluirão que esse sistema de equações realmente não possui solução real. Caso seja necessário o intervalo de variação para x pode ser alterado para a conclusão do paralelismo.

E, concluindo os casos de possíveis soluções de um sistema de equações lineares, repetem-se os procedimentos com um sistema de equaçõs com múltiplas soluções, como por exemplo:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

Ao apresentarem suas soluções, os alunos verificarão que diversas respostas serão comuns às equações apresentadas, ou seja, o sistema possui mais de uma solução. O professor deverá destacar ainda que as soluções não comuns apresentadas pelos grupos servem também como soluções para a equação do grupo distinto.

Logo, plotando os gráficos no programa, os alunos verificarão que ambas as equações dão origem a uma mesma reta, ou seja, as retas apresentam infinitos pontos em comum, o que nos gera um sistema de equações com infinitas soluções. Vejamos a figura a seguir:

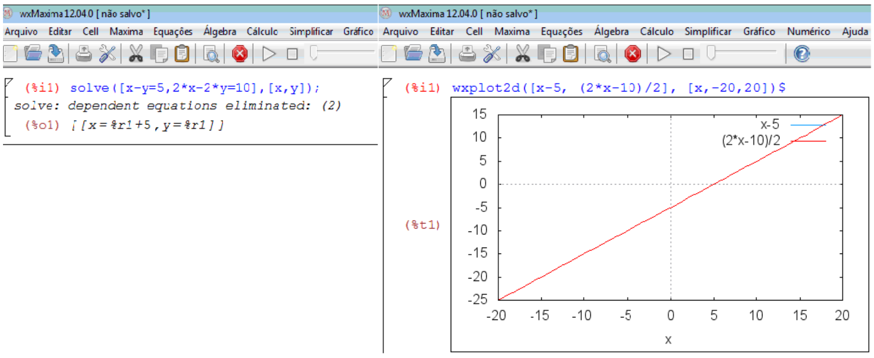


Figura 21: Sistema de infinitas soluções

Notemos que a solução algébrica dada pelo software se apresenta de maneira diferente das anteriores, definindo um parâmetro como solução de y e o mesmo parâmetro acrescido de 5 unidades como solução de x. Além disso, o professor poderá destacar também a multiplicidade entre as equações.

Após os três exemplos dados anteriormnte, os alunos terão uma visão geral do que representa um sistema de equações lineares, sendo clara a relação entre suas representações geométricas e o número de soluções possíveis. Acreditamos que após esta rápida e simples introdução, a abordagem algébrica e seus métodos de resolução serão bem mais fáceis de se compreender, pois já estarão amplamente fundamentados geometricamente.

4 APLICAÇÃO DO MAXIMA

Com o objetivo de avaliar a proposta descrita no capítulo, as atividades a seguir foram aplicadas pelo autor deste trabalho em uma turma do 8º Ano do Ensino Fundamental, da escola C.I.A. Monsenhor Tomás Tejerina de Prado da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, no município de Valença.

A atividade foi desenvolvida com uma turma de 20 alunos e teve duração aproximada de 3 horários de aula, com 50 minutos cada um. No primeiro horário, o professor fez uma comparação inicial entre equações lineares com uma incógnita e equações com duas incógnitas. Rapidamente, os alunos verificaram que os mecanismos matemáticos utilizados para resolver as equações de única incógnita já não eram mais suficientes para resolver o novo tipo de equação, logo, precisariam de outros procedimentos.

Inicialmente, o professor lançou como desafio aos alunos a equação $x + y = 7$, e apesar de não conhecerem mecanismos para tal resolução, vários alunos, mentalmente, deram soluções que satisfaziam à equação. Rapidamente verificaram que, ao contrário das equações lineares de única incógnita, esse tipo de equação admitia mais do que uma solução. Com as soluções encontradas e uma breve revisão de par ordenado e plano cartesiano, o professor utilizou o quadro para traçá-lo e, com a ajuda dos alunos, marcou todos os pontos referentes às soluções apresentadas por eles.

Observando a linearidade dos pontos marcados no gráfico, os alunos foram questionados se eles esgotavam todas as possibilidades de respostas para a equação, e a partir da negativa da resposta, começaram a surgir novas soluções compostas por números inteiros e racionais. A medida que novas soluções eram encontradas e marcadas no plano cartesiano, os alunos observavam que a linearidade dos pontos se aproximava de uma reta. Neste momento, o professor introduziu o *software* MAXIMA na aula, e com uma breve explicação do programa e suas funcionalidades, traçou o gráfico referente àquela equação. Ao vizualizarem a reta, com a ajuda do docente, os alunos concluíram que a equação possuía, no universo dos números reais, infinitas soluções, justificando a continuidade visualizada no MAXIMA.

Com mais alguns exemplos de equações e suas respectivas representações gráficas, concluíram também que cada equação linear com duas incógnitas era representada graficamente por uma reta no plano cartesiano.

Nos horários posteriores, o professor dividiu a turma em dois grupos, com dez alunos em cada grupo e aplicou-lhes duas atividades, que constam em anexo ao final deste trabalho. Para as atividades foram escolhidos três sistemas lineares 2 x 2 distintos entre si e também em relação ao número de soluções: solução única, solução inexistente e infinitas soluções. Como foi dito anteriormente, as equações foram escolhidas de forma a permitir que os alunos encontrassem mentalmente, sem maiores dificuldades, suas soluções.

Na primeira atividade, com duração de 15 minutos, cada grupo era responsável por encontrar e descrever o maior número de soluções possíveis de três equações lineares, cada uma retirada de cada um dos sistemas escolhidos previamente. Ou seja, cada grupo trabalhava com uma equaçao diferente de cada sistema. Ressaltamos que, durante a atividade, o professor acompanhou os grupos, fazendo as correções necessárias, além de garantir que ambos os grupos listassem o par ordenado $(6, 4)$, que representa a única solução do sistema que possui as equações $x + y = 10$ e $x - y = 2$. Ao término do tempo estipulado, o professor recolheu as atividades, listando no quadro as respectivas soluções.

Antes de começar a segunda atividade, que solicitava que fossem encontradas as soluções dos três sistemas lineares, foi necessário que o professor explicitasse o real objetivo de um sistema de equações lineares, ou seja, que deveriam buscar pares ordenados que fossem solução de ambas as equações, simultaneamente. Para esta atividade, com duração de 10 minutos, o professor sugeriu que a busca começasse pelos pares ordenados listados no quadro da atividade anterior, porém não se limitasse a eles.

Durante a atividade, muitos alunos se inquietaram diante da dificuldade em encontrar soluções para o sistema do item b (vide Anexo B), desconhecendo, obviamente, que este não possuía soluções reais. Logo, diante da solicitação de tempo adicional feita pelos alunos, foram concedidos mais 5 minutos como um incentivo pela busca da solução inalcançada. Ao término do tempo excedente, os grupos apresentaram suas respostas (vide Anexo B), que coincidiram nos itens "a" e "c". Observemos que, curiosamente, no item "b" o grupo 1 descreveu como solução do sistema a expressão "conjunto vazio", enquanto o grupo 2 deixou a questão sem resposta alguma. Percebendo a diferença, o professor perguntou a cada grupo o motivo da resposta ou ausência dela, e constatou que, enquanto o grupo 2 simplesmente achava não ter encontrado a resposta correta, mas considerava sua existência, o grupo 1 acreditava que ela, realmente, não existia.

Além da divergência nas respostas sobre o item "b", o professor lançou um outro questionamento sobre o item "c", pois ambos os grupos restringiram suas soluções aos pares ordenados comuns às equações no item "c". Questionando-os se haveriam outras soluções possíveis, ouviu de um aluno do grupo 2 que existiriam infinitas. Porém, ao questioná-lo sobre o motivo dessa existência, este afirmou não conhecê-lo. Neste momento, acredita-se que o aluno já percebera que todas as soluções apresentadas na atividade anterior satisfaziam às duas equações, porém ainda não possuía conhecimentos concretos para a formalização da resposta.

Então, restavam ainda duas conclusões pendentes: a existência de uma possível solução no item "b", e se existiriam mais soluções no item "c". Para resolver essas pendências, o professor utilizou o MAXIMA para plotar, simultaneamente, as duas equações de cada sistema. Após a vizualização gráfica do item "a" os alunos verificaram que a as retas que representavam cada equação se intersectavam em um único ponto e, rapidamente, alunos dos dois grupos observaram que o ponto de interseção coincidira com a solução encontrada por eles. Para confirmar, o professor novamente recorreu ao programa para resolver algebricamente o sistema e, como era esperado, o par ordenado (6, 4) foi apresentado pelo MAXIMA como única solução.

Durante a própria conclusão do item "a", um aluno, ao relacionar a solução única com o ponto de interseção das retas, concluiu que no item "b" as retas não se encontrariam, e ao ser questionado sobre a classificação dessas retas foi ajudado por uma colega que as classificou como paralelas. Logo, o professor utilizou o MAXIMA para a plotagem do gráfico e confirmar, graficamente, a hipótese do aluno com a vizualição de duas retas paralelas e, algebricamente, constatar o conjunto vazio como solução deste sistema.

Para concluir o item "c", o professor, inicialmente, sugeriu aos alunos que testassem os pares ordenados não comuns descritos na primeira atividade na equação do outro grupo. Ao fazê-lo, verificaram que todas as soluções listadas pelos dois grupos satisfaziam a ambas as equações e, com a ajuda do professor, concluíram que, se cada equação linear com duas incógnitas possui infinitas soluções, todas elas também seriam soluções do sistema. Diante das conclusões obtidas, o professor questionou os alunos sobre como se apresentaria o gráfico de retas que representam equações com infinitas soluções. Diante da ausência de respostas, utilizou o MAXIMA para obter a vizualição gráfica desejada e obter dos próprios alunos conclusões de que "uma estava em cima da outra" ou de que "ocupavam o mesmo lugar". Posteriormente, o professor confirmou que as retas ocupavam a mesma posição e as classificou como coincidentes. Para finalizar a atividade, o professor concluiu, com a ajuda dos próprios alunos, formalizando a classificação de sistemas lineares quanto ao número de soluções e suas possíveis representações gráficas no plano cartesiano.

5 *EQUAÇÕES LINEARES DE TRÊS INCÓGNITAS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 3 X 3*

O ensino de sistemas de equações lineares 3 x 3 está previsto, de acordo com a proposta curricular nacional, para o 2º ano do Ensino Médio da Educação Básica. Verificamos nos livros didáticos desse nível de ensino a predominância de abordagens estritamente algébricas, com ênfase nos métodos da adição, escalonamento e regra de Cramer, como observamos em [7]. Verificamos também a ausência de atividades que contemplem a interpretação gráfica desses sistemas de equações, cabendo ao professor, portanto, a busca por atividades que satisfaçam essa carência dos livros didáticos, pois acreditamos que o registro gráfico deveria ser melhor explorado, visto que ele poderia contribuir para que os alunos tenham maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando for necessário.

Além disso, sabemos da importância da abordagem de um mesmo conteúdo matemático de maneira diversificada, buscando propiciar ao aluno uma aprendizagem consistente e significativa. O próprio PCN [3] destaca que podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos simbólicos matemáticos: língua natural, desenhos, gráficos, tabelas, materiais concretos, entre outros. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos.

Diante desse quadro, é proposto neste trabalho a utilização do MAXIMA para a implementação de uma abordagem que privilegie a interação entre as interpretações algébricas e geométrica desses sistemas.

5.1 EQUAÇÕES LINEARES COM TRÊS INCÓGNITAS

De maneira análoga à introdução de sistemas de equações lineares 2 x 2, antes de introduzirmos a idéia de sistemas de equações lineares 3 x 3, é interessante que o aluno tenha um primeiro contato com equações lineares de três incógnitas e suas interpretações gráficas. Provavelmente, este será o seu primeiro contato com representações gráficas tridimensionais e será necessário uma breve abordagem sobre o tema no que diz respeito à marcação de pontos no espaço. Porém, como a marcação de pontos no espaço utilizando recursos tradicionais (quadro, giz, etc) limita uma visão tridimensional, o professor poderá introduzir o assunto utilizando o MAXIMA. Nesse momento, ele poderá destacar que a nova incógnita "z" representa o acréscimo de uma nova dimensão no gráfico. Vejamos os exemplos das equações a seguir:

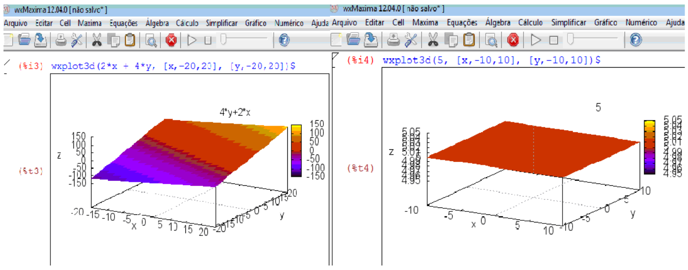


Figura 22: Gráficos de equações lineares com três incógnitas

Seguindo a mesma ideia das equações de duas incógnitas, o professor poderá aplicar mais alguns exemplos de equações fazendo com que o aluno associe cada uma delas como um plano no espaço tridimensional, estreitando a relação entre as representações algébricas e geométricas desses tipos de equações. A partir desse momento, o aluno estará apto à introdução dos sistemas de equações lineares 3 x 3.

5.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 3 X 3

Assim como no estudo dos sistemas de equações lineares 2 x 2, o objetivo principal nesse tipo de sistema também é a busca por soluções que satisfaçam às três equações, simultaneamente. A diferença se resume no fato de que, agora, busca-se um terno ordenado (x, y, z) como solução.

Se por um lado observamos nos livros didáticos de Ensino Médio uma diminuição na predileção por sistemas de soluções únicas, por outro, exacerba-se a preferência pela abordagem algébrica em detrimento das representações geométricas que, por vez ou outra, aparecem em algum apêndice ao final do capítulo ou do próprio livro, como podemos observar em [11] e [9]. Novamente, Dante [5] aprofunda um pouco mais a interpretação gráfica em sua obra do ensino médio listando as possíveis posições entre três planos no espaço, além de introduzir a idéia de vetores. Buscamos então, uma abordagem que privilegie ambas as representações objetivando, sempre, a aprendizagem efetiva e consistente dos alunos.

Ao introduzir o tema, o professor poderá questionar os alunos em relação às possíveis posições de três planos no espaço, e buscar elementos concretos para ilustrar essas representações. O próprio ambiente da sala de aula e suas regiões planas (paredes, solo, teto) já constituem exemplos que podem facilitar a visualização. A partir das respostas obtidas ele poderá compará-las de acordo com as interseções produzidas por essas posições e, neste momento, introduzir a classificação de sistemas quanto ao número de soluções.

Portanto, em relação às soluções, um sistema linear 3 x 3 pode ser classificado em: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Analisaremos, nas seções seguintes, cada um desses casos.

5.2.1 Sistema Possível e Determinado (SPD)

O sistema é classificado como possível e determinado quando possui solução única, ou seja, existe um único terno ordenado (x, y, z) que satizfaz às três equações, simultaneamente. Analogamente aos sistemas 2 x 2, é o mais utilizado nos livros didáticos por ser de fácil compreensão, e por ser facilmente contextualizado em diversas situações-problemas. Utilizando o MAXIMA, o professor poderar explicar, geometricamente, que existe um único ponto pertencente aos três planos, simultaneamente, sendo este a única solução do sistema proposto. Poderá ainda utilizar o programa para a verificação algébrica da unicidade desta solução, como visto no capítulo 2. Para uma melhor visualização e interação com o gráfico, optamos neste exemplo pelo formato gnuplot, que pode ser escolhido na opção Gráfico 3D. Neste formato, uma nova janela se abre, permitindo várias outras funções, dentre elas, a rotação do gráfico gerado, o que nos permite visualização mais clara da(s) possível(eis) interseção(ões) dos planos.

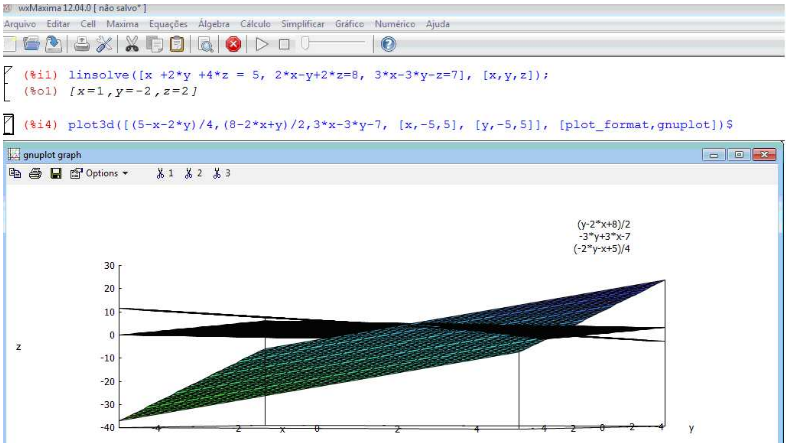
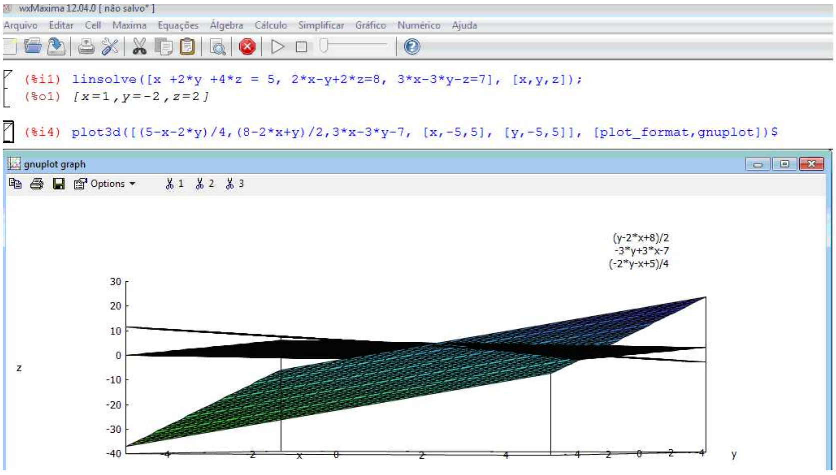


Figura 23: Sistema possível e determinado

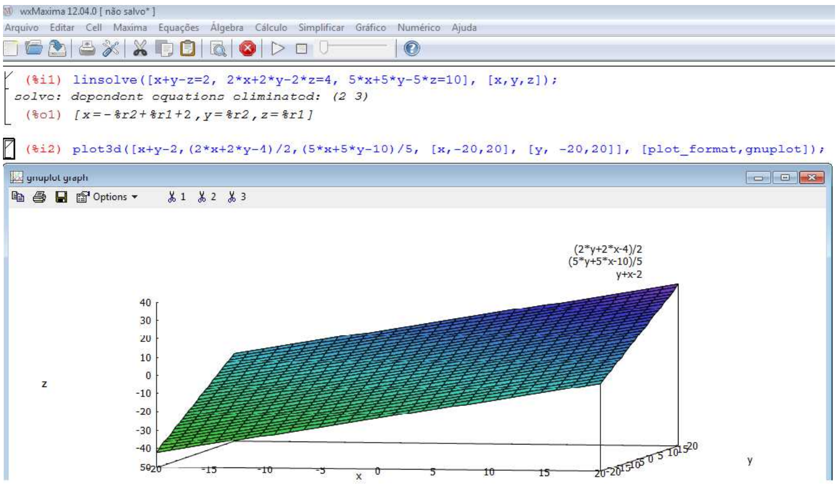
5.2.2 Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

Neste caso, o sistema admite infinitas soluções, ou seja, existe mais de um terno ordenado (x, y, z) que satisfaz as equações, simultaneamente. O professor poderá utilizar o programa para ilustrar, geometricamente, o fato de que existem três possíveis posições para os planos que se enquadram nesta classificação: três planos coincidentes, ou seja, sobrepostos; três planos se intersectando segundo uma reta; e dois planos coincidentes e o terceiro intersectando-os. Claramente, o aluno perceberá que, no primeiro caso, todos os pontos serão comuns e que, nos dois últimos, uma reta será comum aos planos. Logo, em todos os casos, existe uma infinidade de pontos que pertencem simultaneamente às três equações, gerando, portanto, infinitas soluções. Vejamos exemplos dos casos supracitados:

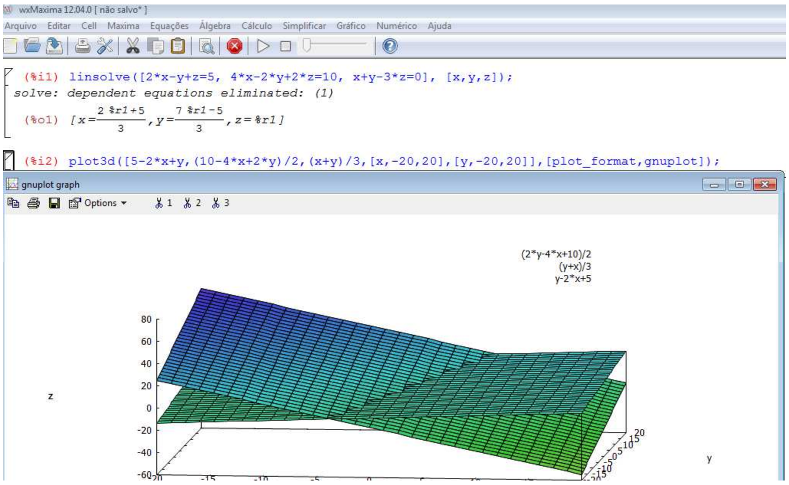
5.2.2.1 Três Planos se Intersectando Segundo uma Reta



5.2.2.2 Três Planos Coincidentes



5.2.2.3 Dois Planos Coincidentes e um Terceiro Secante a Eles



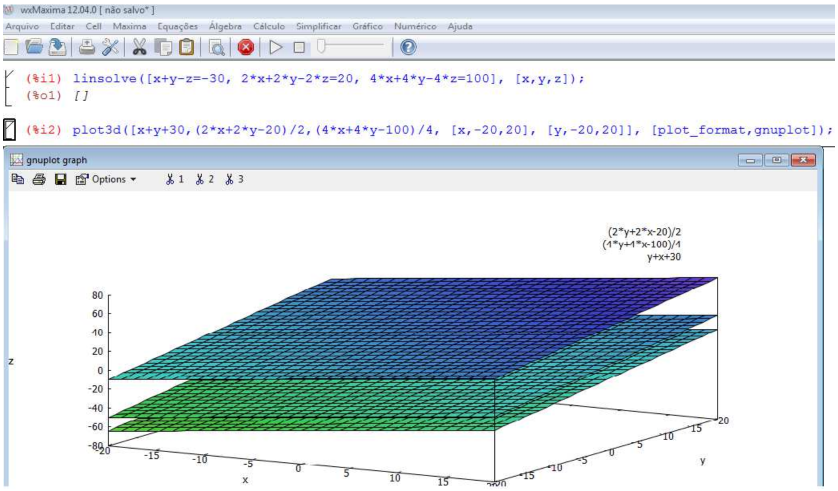
5.2.3 Sistema Impossível (SI)

Como o próprio nome já sugere, o sisteme impossível é aquele que não possui solução, ou seja, não existe nenhum terno ordenado (x, y, z) que satizfaça às três equações, simultaneamente. Neste caso, o MAXIMA também poderá colaborar consideravelmente com a compreensão geométrica deste tipo de sistema, pois existem 4 posições possíveis para esses planos: três planos paralelos; dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a eles ; dois planos paralelos e um terceiro concorrente a eles; e três planos se intersectando, dois a dois, segundo retas paralelas entre si.

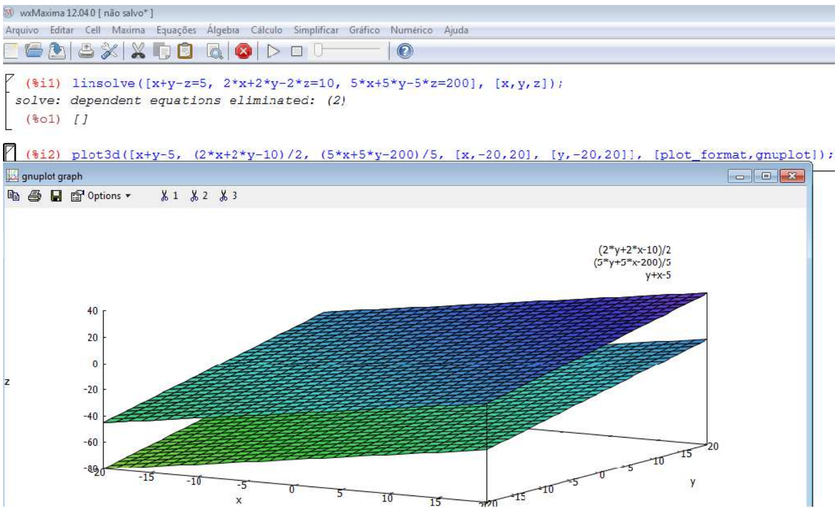
Com a visualização dos gráficos, o aluno perceberá que não existe nenhum ponto que pertença aos três planos simultaneamente, já que no primeiro caso sequer existe ponto de interseção; no segundo, existe um plano que não possui interseção com os outros dois; no terceiro, dois planos que não possuem pontos em comum são intersectados por um terceiro; e no último caso, cada reta de interseção formada é comum apenas a dois planos.

Observemos um exemplo de cada um dos casos:

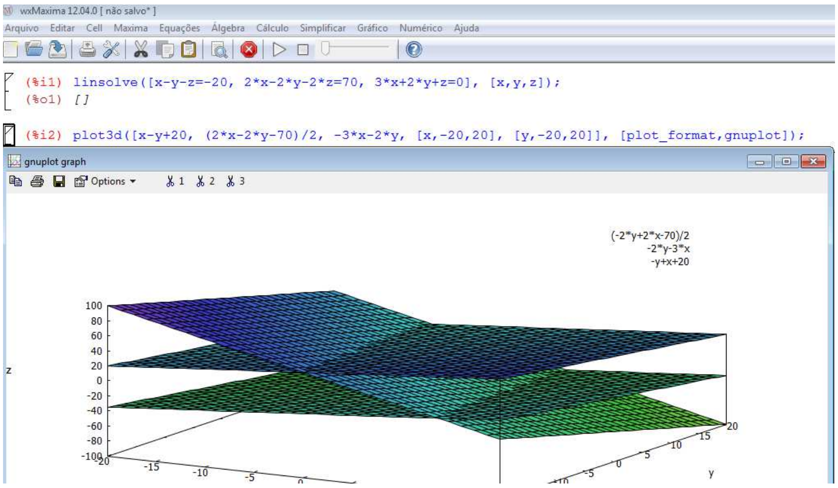
5.2.3.1 Três Planos Paralelos



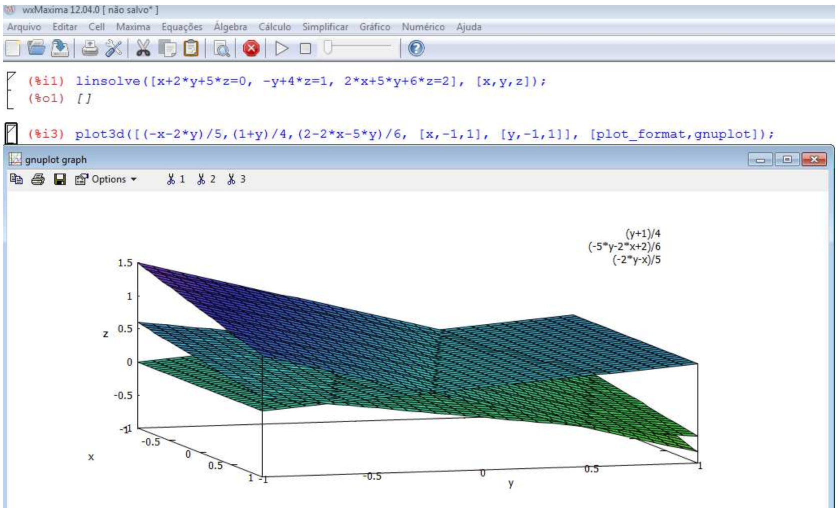
5.2.3.2 Dois Planos Coincidentes e um Terceiro Paralelo a Eles



5.2.3.3 Dois Planos Paralelos e um Terceiro Concorrente a Eles



5.2.3.4 Três Planos se Intersectando, Dois a Dois, Segundo Retas Paralelas entre Si



Acreditamos que este tipo de abordagem fundamenta e favorece a compreensão dos métodos algébricos de resolução que, não menos importantes, serão estudados posteriormente.

6 ANÁLISE DA SITUAÇÃO ATUAL DO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 3 X 3

De acordo com a proposta do capítulo anterior e da possibilidade de buscar novas estratégios que proporcionem aos alunos uma aprendizagem consistente e diversificada, o autor deste trabalho propõe um pequeno questionário que levanta algumas questões relacionadas ao ensino de sistemas lineares 3x3.

O questionário, que se encontra em anexo neste trabalho, consta de três perguntas sobre o tema proposto e foi enviado a quatro professores das redes pública e privada de ensino, todos alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

A primeira pergunta foi motivada pela aparente ausência nos livros didáticos de abordagens que privilegiem a interação entre as representações algébricas e geométricas de sistemas lineares 3x3, conforme já foi comentado anteriormente. Ausência que se confirma na visão de todos os professores que responderam ao questionário, pois nenhum deles, nos últimos três anos, trabalhou com livros didáticos que possuíssem esse tipo de abordagem.

A segunda pergunta tem como objetivo analisar a postura do professor perante a ausência desse tipo de abordagem nos livros didáticos. O autor defende que a visualização geométrica e a compreensão das relações entre as posições dos planos no espaço fundamenta uma aprendizagem consistente do conteúdo, propiciando ao aluno uma maior segurança na hora de classificá-los, discutí-los e resolvê-los. Com relação às respostas obtidas pelos professores, nenhum deles fez uso de nenhum recurso que privilegiasse uma abordagem geométrica deste conteúdo, mesmo um deles afirmando que costuma utilizar em suas aulas exemplos concretos, e outro já tendo utilizado esses recursos no ensino de sistemas lineares 2x2. Ou seja, mesmo sabendo da importância de uma diversificação nas abordagens de um mesmo conteúdo para uma aprendizagem significativa, existem alguns fatores que os levam a não utilizar esse tipo de abordagem.

E, concluindo, a terceira pergunta analisa as possíveis dificuldades a serem encontradas numa possível implementação desse tipo de abordagem nas escolas. De acordo com as respostas dos professores, a falta de uma infraestrutura adequada e recursos tecnológicos são fatores que podem inviabilizar esse processo. Além disso, um deles destaca o próprio desconhecimento do tema por parte de alguns docentes e a falta de domínio sobre os recursos tecnológicos. Dois deles também criticam como inadequada a sequência a ser seguida pelos professores de acordo com o currículo básico.

Resumindo, concluimos que mesmo diante de uma grande procura por um desenvolvimento tecnológico dentro da educação, encontramos ainda um bom número de fatores que dificultam uma abordagem diferenciada e inovadora que se alicerça na utilização de recursos tecnológicos. Acreditamos ser papel do professor a busca constante pela superação dessas dificuldades de modo que possa proporcionar aos seus alunos, que já nasceram em ambientes informatizados, diferentes e interativas maneiras de se construir uma aprendizagem significativa.

CONCLUSÃO

Ao término deste trabalho, concluimos que a utilização do MAXIMA no ensino de sistemas de equações lineares é de extrema relevância, pois além de caracterizar-se como um instrumento potencializador no processo de construção do conhecimento, fornece ao aluno maneiras diversificadas de tratamento e interpretação de um mesmo conteúdo fazendo com que ele associe expressões puramente algébricas às suas representações gráficas no plano e no espaço.

Ressaltamos também que o uso do computador em sala de aula passa a ser imprescindível nos dias de hoje, cabendo ao docente capacitar-se para este fim e discernir os momentos adequados para sua utilização que, quando feita dentro de um planejamento adequado só irá contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, além de tornar as aulas mais dinâmicas, interativas e interessantes.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Novo Praticando Matemática 7ª série.* São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

[2] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* São Paulo: Editora Autêntica, 2003.

[3] BRASIL. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998a.

[4] DANTE, L. R. *Tudo é Matemática 8º Ano.* São Paulo: Ática, 2011.

[5] DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações 2.* São Paulo: Ática, 2008.

[6] Documentação do MAXIMA. HTTP://maxima.sourceforge.net/documentation.html. Data de acesso: 16 de março de 2013.

[7] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. *Matemática Fundamental Uma Nova Abordagem.* São Paulo: FTD, 2002.

[8] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática Ciências e Aplicações Vol. 2.* São Paulo: Atual, 2006.

[10] IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática Paratodos.Vol. 7.* São Paulo: Scipione, 2006.

[11] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio 2.* São Paulo: Saraiva, 2003.

[12] VALENTE, J. A. *Diferentes Usos do Computador na Educação.* Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1999.

ANEXOS

ANEXO A: ATIVIDADE 1

C.I.A. Monsenhor Tomás Tejerina de Prado

Professor Bruno Sampaio

Grupo 1

Atividade 1

Encontre e liste soluções para as equações lineares a seguir:

$a) x + y = 10$ $b) x + y = 8$ $c) x - y = 5$

C.I.A. Monsenhor Tomás Tejerina de Prado
Professor Bruno Sampaio
Grupo 2

Atividade 1
Encontre e liste soluções para as equações lineares a seguir:

$a) x - y = 2$ $\quad$ $b) x + y = 7$ $\quad$ $c) 2x - 2y = 10$

ANEXO B: ATIVIDADE 2

C.I.A. Monsenhor Tomás Tejerina de Prado

Professor Bruno Sampaio

Grupo:

Atividade 2

Observando as soluções encontradas pelos grupos na atividade anterior, determine as soluções dos sistemas de equações a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

ANEXO C: QUESTIONÁRIOS

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando: Bruno Sampaio de Oliveira
Professor A - Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro

Questionário para Docentes em Turmas do 2º Ano do Ensino Médio

1) Nos últimos 3 anos você trabalhou com algum livro didático que abordasse a interpretação geométrica da resolução de sistemas de equações lineares 3 x 3?

Professor A: Não usei nenhum livro didático do ensino médio que tratasse da interpretação geométrica de sistemas lineares 3x3.

2) O autor deste trabalho propõe a utilização da abordagem geométrica, através da posição relativa entre os planos, para a compreensão efetiva das soluções de um sistema de equações lineares, principalmente em casos de soluções inexistentes e infinitas soluções. Nos últimos 3 anos, ao introduzir tal assunto em suas turmas, você fez uso de algum tipo de recurso para a introdução desse tipo de abordagem?

Professor A: Não utilizei. Fiz o uso de retas no plano cartesiano em sistemas lineares 2x2. No caso de sistemas lineares 3x3 , tratei somente da abordagem algébrica.

3) Como você avalia a viabilidade da implementação desse tipo de abordagem? Cite alguns fatores que, na sua opinião, dificultariam esse processo.

Professor A: Como professor da rede estadual de ensino do estado do Rio de Janeiro, penso que é possível que se faça uma interpretação geométrica objetivando a solução de um sistema linear 3x3. Alguns fatores podem dificultar tal implementação: sequência inadequada na elaboração do currículo básico a ser seguido pelos professores e material didático, digo livros, que tratam tal assunto no ensino médio, com uma interpretação geométrica para sistemas lineares 3x3.

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando: Bruno Sampaio de Oliveira
Professor B - Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro e Rede Privada

Questionário para Docentes em Turmas do 2º Ano do Ensino Médio

1) Nos últimos 3 anos você trabalhou com algum livro didático que abordasse a interpretação geométrica da resolução de sistemas de equações lineares 3 x 3?

Professor B: Não.

2) O autor deste trabalho propõe a utilização da abordagem geométrica, através da posição relativa entre os planos, para a compreensão efetiva das soluções de um sistema de equações lineares, principalmente em casos de soluções inexistentes e infinitas soluções. Nos últimos 3 anos, ao introduzir tal assunto em suas turmas, você fez uso de algum tipo de recurso para a introdução desse tipo de abordagem?

Professor B: Na introdução de minhas aulas sempre procurei usar exemplos concretos, mas não usei o recurso geométrico.

3) Como você avalia a viabilidade da implementação desse tipo de abordagem? Cite alguns fatores que, na sua opinião, dificultariam esse processo.

Professor B: Uma abordagem geométrica pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem, entretanto representar vários planos no quadro negro é complicado. Essa abordagem torna-se viável com o auxílio de alguma técnica que facilite a representação.

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando: Bruno Sampaio de Oliveira
Professor C - Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro

Questionário para Docentes em Turmas do 2º Ano do Ensino Médio

1) Nos últimos 3 anos você trabalhou com algum livro didático que abordasse a interpretação geométrica da resolução de sistemas de equações lineares 3 x 3?

Professor C: Não.

2) O autor deste trabalho propõe a utilização da abordagem geométrica, através da posição relativa entre os planos, para a compreensão efetiva das soluções de um sistema de equações lineares, principalmente em casos de soluções inexistentes e infinitas soluções. Nos últimos 3 anos, ao introduzir tal assunto em suas turmas, você fez uso de algum tipo de recurso para a introdução desse tipo de abordagem?

Professor C: Não.

3) Como você avalia a viabilidade da implementação desse tipo de abordagem? Cite alguns fatores que, na sua opinião, dificultariam esse processo.

Professor C: Acredito que, com os recursos necessários, a implementação desse tipo de abordagem seria bastante interessante. Porém, muitas das escolas ainda não possuem o mínimo necessário de recursos para a implementação desse tipo de abordagem (*datashow*, laboratório, etc.), além de grande parte dos professores não conhecerem tal abordagem ou não estarem aptos a lidarem com os recursos.

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando: Bruno Sampaio de Oliveira
Professor D - Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro

Questionário para Docentes em Turmas do 2º Ano do Ensino Médio

1) Nos últimos 3 anos você trabalhou com algum livro didático que abordasse a interpretação geométrica da resolução de sistemas de equações lineares 3 x 3?

Professor D: Não.

2) O autor deste trabalho propõe a utilização da abordagem geométrica, através da posição relativa entre os planos, para a compreensão efetiva das soluções de um sistema de equações lineares, principalmente em casos de soluções inexistentes e infinitas soluções. Nos últimos 3 anos, ao introduzir tal assunto em suas turmas, você fez uso de algum tipo de recurso para a introdução desse tipo de abordagem?

Professor D: Somente uso de situações-problema que eram interpretadas por um sistema e que, evidentemente, apresentavam infinitas soluções ou nenhuma.

3) Como você avalia a viabilidade da implementação desse tipo de abordagem? Cite alguns fatores que, na sua opinião, dificultariam esse processo.

Professor D: Acredito que o tempo seria uma dificuldade para aplicação dessa abordagem, pois, inicialmente, o aluno do ensino médio, por exemplo, precisaria já ter o conhecimento de ponto, reta e plano em um sistema de três coordenadas. Porém, a geometria analítica ensinada é somente a plana. De geometria espacial temos somente a geometria de posição e a de cálculo de áreas e volumes. Penso, portanto, que esse pré-requisito é necessário, além do uso de um programa de computador para que o aluno possa visualizar uma simulação de planos no espaço com variação de parâmetros (coeficientes da equação) e de modo a acostumar-se com a relação entre equações lineares de três variáveis e planos no espaço.