Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANTONIO CARLOS OLIVEIRA DE MAGALHÃES

Utilizando Geogebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas

Juiz de Fora

2013

ANTONIO CARLOS OLIVEIRA DE MAGALHÃES

Utilizando Geogebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2013

Magalhães, Antonio Carlos Oliveira de.

Utilizando Geogebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas / Antonio Carlos Oliveira de Magalhães. - 2013.
55f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Ensino. 2. Transformações. 3. Gráficos de funções.
4. Geogebra. I. Título.

CDU 51

ANTONIO CARLOS OLIVEIRA DE MAGALHÃES

Utilizando Geogebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rogério Casagrande
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves
UFV

Juiz de Fora, 22 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

A Deus pois me deu forças para chegar até aqui.

À minha esposa Sayonara e meus filhos Kaio e Rafaella por todo amor e paciência que tiveram comigo nesta trajetória, eu amo vocês demais.

Aos meus pais que lutaram por mim.

Ao meu orientador Professor José Barbosa Gomes por sempre ter me incentivado e a todos os professores do curso que com certeza se dedicaram muito para nossa formação.

A todos os meus colegas pelos momentos de aprendizagem que tivemos.

Agradeço também à CAPES, pelas bolsas de estudo recebidas, que por acreditar em mim tornou este sonho possível.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um projeto desenvolvido para o Ensino Médio. Iremos mostrar no decorrer deste trabalho como as transformações de reflexão, translação e dilatação (compressão) afetam os gráficos das funções de uma maneira geral, até chegarmos ao estudo das funções trigonométricas. Todos os gráficos apresentados neste trabalho foram obtidos com o uso do programa Maxima e a atividade em sala de aula desenvolvida usando o programa Geogebra.

A ideia principal do nosso trabalho é fazer com que os alunos inicialmente façam as atividades em sala de aula e depois usando os recursos computacionais façam uma verificação dos resultados obtidos. Iremos dividir os alunos em grupos e acompanhar o rendimento de cada grupo.

Palavras-chave: Ensino, Transformações, Gráficos de funções, Geogebra.

ABSTRACT

In this work we will present a project developed for the High School. We will show in elapsing of this work as the reflection transformations, translation and dilation (compression) they affect the graphs of the functions in a general way, until we arrive to the study of the trigonometrical functions. All the graphs presented in this work were obtained with the use of the Maxima and the activity in classroom was developed using Geogebra. The main idea of our work is to do with that the students initially make the activities in classroom and later using the resources computacionais makes a verification of the obtained results, we will divide the students in groups and to accompany the income of each group.

Key-words: Teaching, Transformations, Graphs of Functions, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma experiência de aplicação de alguns recursos computacionais em sala de aula no estudo de algumas transformações gráficas. Apresentamos um embasamento Matemático de algumas transformações no plano, usamos os recursos computacionais para várias apresentações gráficas, principalmente no gráfico de funções trigonométricas, terminando com um trabalho em sala de aula com a respectiva apresentação dessas transformações, usando os recursos computacionais.

O público alvo deste trabalho é formado pelos professores de Matemática do Ensino Médio, os quais poderão melhorar o seu trabalho com o estudo de transformações, e os alunos de Matemática, que passam a contar com um novo recurso no auxílio de sua aprendizagem.

No capítulo 2 discutimos qual é o melhor momento da fase educacional em que vale a pena introduzir o uso de recursos computacionais no ensino de Matemática, onde nós apresentamos os recursos que serão utilizados neste trabalho.

No capítulo 3 introduzimos as definições Matemáticas necessárias ao entendimento das transformações nos gráficos de funções, que são, a reflexão, a translação e a dilatação (Compressão) explicando quando uma transformação é ou não é linear e analisando o comportamento do gráfico em cada caso.

No capítulo 4 apresentamos o comportamento do gráfico das funções de acordo com cada uma das transformações, analisando inclusive os aspectos relativos a crescimento e pontos de máximo local. Depois dessa análise, passamos então para o comportamento das funções trigonométricas diante destas transformações.

No capítulo 5 descrevemos o trabalho que foi desenvolvido na Escola Estadual Fernando Lobo com os alunos do terceiro ano do ensino médio noturno e no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões finais.

No Anexo A, que contém o mesmo texto entregue aos alunos, com a descrição da atividade, mostramos claramente quais são os procedimentos a serem adotados pelos alunos na execução da atividade.

O anexo B mostra as questões que foram respondidas pelos alunos no decorrer da execução da atividade.

O Anexo C é o questionário dirigido aos alunos com relação à atividade que eles acabaram de desenvolver.

O Anexo D contém algumas imagens relativas à atividade descrita com o uso do programa Geogebra.

2 A TECNOLOGIA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

2.1 Uso Correto da Tecnologia

A referência para esta seção é [10].

O Japão é um dos países do mundo onde o número de computadores por habitante é o mais alto. Entretanto, apesar dos esforços das autoridades, a utilização de computadores no ensino de Matemática nas escolas japonesas enfrentou resistência e demora, pois a maioria dos professores não estava preparada e relutava em preparar-se para mudar seus métodos tradicionais de ensino.

Essa demora, afinal de contas resultou benéfica pois hoje os japoneses parecem convencidos de que o uso de computadores no ensino da Matemática e de suas aplicações é muito mais eficiente para alunos a partir de 15 ou 16 anos, em cujos currículos tal uso realmente se justifica. Nos anos iniciais da escola é mais importante fortalecer os hábitos de auto-disciplina, trabalho, organização, esforço e imaginação, o que se faz melhor sem o uso de computadores e sem os problemas logísticos ligados à sua utilização pelos professores.

Este exemplo serve como advertência aos dirigentes de nosso país, os quais, na ânsia de uma modernidade ilusória e em busca de uma publicidade fácil, colocam a aquisição de máquinas acima do aperfeiçoamento, da melhoria das condições de trabalho e da remuneração adequada dos professores.

2.2 A Tecnologia e o Ensino de Matemática

Segundo [5], o mundo contemporâneo vive os efeitos de uma nova revolução tecnológica, a revolução da microeletrônica. A integração de telecomunicações com a informática vem criando cada vez mais facilidades de comunicação e redefinindo as bases para a democratização de informações. Estas mudanças em nosso comportamento pessoal e social se traduzem em mudanças em nosso dia a dia.

Muitos alunos atualmente possuem vários dispositivos modernos como celulares, *no-*

tebooks, *tablets* e têm acesso a uma gama muito grande de informações disponíveis, como por exemplo aquelas que podem ser obtidas na internet. No entanto, muitas vezes temos o professor como o centro das atenções e o aluno apenas como ouvinte.

Nosso objetivo com esse trabalho é apresentar algumas atividades que possam motivar e mostrar ao aluno que ele pode também aprender Matemática usando os recursos modernos da informática, especificamente o Máxima e o Geogebra.

Ainda, lembrando [5], atualmente não podemos ignorar a tecnologia e nem seu potencial nos processos que envolvem a aprendizagem. O uso do computador pode interferir e influenciar neste contexto, que é uma ferramenta de trabalho em que seu uso é, inclusive, recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs [2].

Portanto, com este trabalho queremos apresentar aplicações que sejam motivadoras no ambiente da sala de aula.

2.3 Sistemas de Computação Algébrica

Um sistema algébrico computacional (em inglês: *computer algebra system*, CAS) de acordo com [6] e também com [4], é um programa de computador que facilita o cálculo na Matemática simbólica. Normalmente, os sistemas disponíveis no mercado incluem:

- precisão aritmética arbitrária, possibilitando por exemplo a avaliação de π a 10.000 dígitos;
- motor de manipulação simbólica, para simplificar expressões algébricas, para diferenciar e para integrar funções e resolver equações;
- facilidades gráficas, para produzir gráficos de funções, normalmente a duas ou a três dimensões;
- um subsistema de álgebra linear, para permitir cálculo de matrizes e resolver sistemas de equações lineares;
- uma linguagem de programação de alto nível, permitindo aos utilizadores implementar os seus próprios algoritmos;
- um sistema de composição para expressões matemáticas.

Álgebra computacional ou computação algébrica é o nome da tecnologia para a manipulação de fórmulas matemáticas por computadores digitais. A Álgebra computacional, também conhecida pelo termo computação simbólica, pode ser definida ainda como uma computação com símbolos representando objetos matemáticos.

Ainda de acordo com [6], existem diversos sistemas de computação algébrica disponíveis, cujas sintaxes de programação podem diferir muito. Usaremos o Sistema de Computação Algébrica Maxima pelo fato de ser um programa com muitos recursos e também poder ser obtido gratuitamente na internet, o que facilitaria em muito a sua utilização em sala aula. Com o Maxima utilizaremos a sua interface gráfica WxMaxima.

3 TRANSFORMAÇÕES

Vamos revisar os conceitos de transformações de reflexão, translação e dilatação (compressão) em que as referências para este capítulo são [7] , [9] e [11].

As definições, teoremas e qualquer conteúdo a respeito de derivadas, como crescimento, decrescimento, ponto crítico podem ser consultados em [8].

3.1 Definições

Definição 3.1. Uma transformação T em um plano Π, que é um plano qualquer, que se for munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$, é uma função $T : \Pi \to \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado a imagem de P por T.

Definição 3.2.

1. Uma transformação T é injetiva se para $P \neq Q$ então $T(P) \neq T(Q)$ ou em outras palavras, se T(P)=T(Q) então P=Q.
2. Uma transformação $T : \Pi \to \Pi$ é sobrejetiva quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P, ou seja, para todo ponto P_1 em Π existe P em Π tal que T(P) = P_1.
3. Se uma transformação T é sobrejetiva e injetiva dizemos que ela é bijetiva. Neste caso, T possui inversa T^{-1}, tal que se $T(P) = P_1$ então $T^{-1}(P_1) = P$.
4. Se adotarmos um sistema de eixos ortogonais OXY podemos dizer que toda transformação $T : \Pi \to \Pi$ pode ser vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.3. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear se:

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ *para todo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
- $T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot (\vec{u})$ *para todo* $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ *e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação 3.4. Como consequência da definição 3.3, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, transforma o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ no vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $T(0) = 0$ ou $T(0,0) = (0,0)$. De fato,

$$0 = T(0) - T(0) = T(0) + (-1) \cdot T(0) = T(1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = T(0).$$

Porém, o fato de uma transformação T satisfazer $T(0) = 0$ ou $T(0,0) = (0,0)$ não implica que ela seja uma transformação linear.

3.2 Reflexão

3.2.1 Projeção Ortogonal

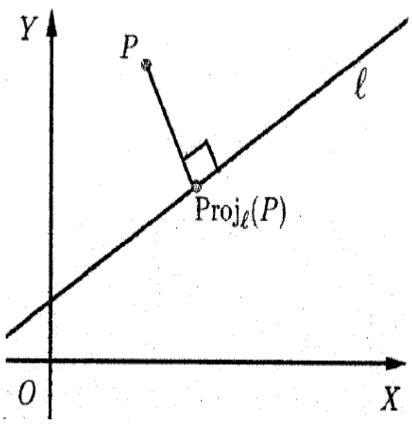


Figura 1: Projeção Ortogonal

A projeção ortogonal em relação a uma reta ℓ é a transformação que associa a cada ponto P não pertencente a reta ℓ o ponto $P_1 = Proj_\ell(P)$ em que ℓ é perpendicular ao segmento PP_1. Se ℓ faz um ângulo θ, no sentido positivo com o eixo OX, então $\vec{v} = (cos\theta, sen\theta)$ é um vetor paralelo a reta ℓ e $\vec{u} = (-sen\theta, cos\theta)$ é um vetor perpendicular a ℓ e assim $\ell := -sen\theta x + cos\theta y = c$ é a equação cartesina de ℓ para algum $c \in \mathbb{R}$. Se (x_0, y_0) são as coordenadas de P então $\ell^\perp := cos\theta x + sen\theta y = cos\theta x_0 + sen\theta y_0$ é a reta perpendicular a ℓ que passa pelo ponto P, e se $P_1 = Proj_\ell(P) = (x_1, y_1)$ temos que (x_1, y_1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} -sen\theta x_1 + cos\theta y_1 &= c \\ cos\theta x_1 + sen\theta y_1 &= cos\theta x_0 + sen\theta y_0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\begin{aligned} P_1 = Proj_\ell(P) = (x_1, y_1) & \\ &= (cos^2\theta x_0 + sen\theta cos\theta y_0 - sen\theta c, sen\theta cos\theta x_0 + sen^2\theta y_0 + c \cdot cos\theta) \\ &= (cos^2\theta x_0 + sen\theta cos\theta y_0, sen\theta cos\theta x_0 + sen^2\theta y_0) + c \cdot (-sen\theta, cos\theta) \end{aligned}$$

3.2.2 Reflexão em Relação a Reta

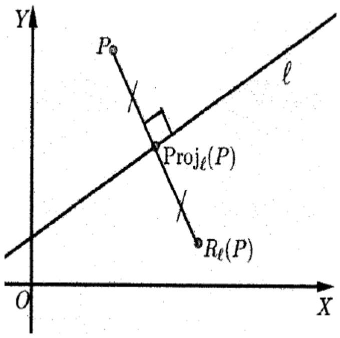


Figura 2: Reflexão

A relexão R_ℓ em relação a reta ℓ é a transformação que a cada ponto P do plano associa o ponto $P_1 = R_\ell(P)$ tal que a reta ℓ é a mediatriz do segmento PP_1, isto é, $Proj_\ell(P)$ é o ponto médio do segmento PP_1. Então se $P = (x, y)$ e $\ell := -sen\theta x + cos\theta y = c$ podemos concluir pelo item anterior que: $P_1 = R_\ell(x, y) = (x_1, y_1) = 2 \cdot Proj_\ell(x, y) - (x, y)$, ou seja:

$$R_\ell(x, y) = (2cos^2\theta x + 2sen\theta cos\theta y - 2csen\theta - x,$$
$$2sen\theta cos\theta x + 2sen^2\theta y + 2c \cdot cos\theta - y)$$
$$\iff R_\ell(x, y) = ((2cos^2\theta - 1)x + 2sen\theta cos\theta y - 2csen\theta,$$
$$2sen\theta cos\theta x + (2sen^2\theta - 1)y + 2c \cdot cos\theta)$$
$$\iff R_\ell(x, y) = (cos2\theta x + sen2\theta y, sen2\theta x - cos2\theta y) + 2c(-sen\theta, cos\theta)$$

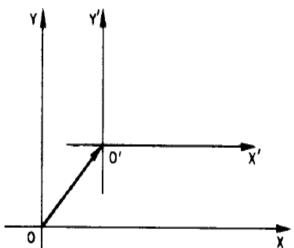
3.2.3 Reflexão em Relação aos Eixos

Na reflexão em relação ao eixo OX nós sabemos que $\theta = 0$ e assim temos que, $R_\ell(x, y) = (x, -y)$ onde notamos pela definição 3.3 que $R_\ell(x, y) = (x, -y)$ é uma transformação linear e de fato, dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ que são vetores em $\mathbb{R}^2$ $e\ \alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- $R_\ell(\vec{u} + \vec{v}) = R_\ell(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1 + v_1, -(u_2 + v_2)) = (u_1, -u_2) + (v_1, -v_2)$
  $= R_\ell(\vec{u}) + R_\ell(\vec{v});$
- $R_\ell(\alpha\vec{u}) = R_\ell(\alpha u_1, \alpha u_2) = (\alpha u_1, -\alpha u_2) = \alpha(u_1, -u_2) = \alpha R_\ell(\vec{u}).$

Na reflexão em relação ao eixo OY temos $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e assim $R_\ell(x, y) = (-x, y)$ e que analogamente também é uma transformação linear. Também podemos ver que pela definição 3.2 que as transformações por reflexão são bijetivas.

3.3 Translações



Seja O a origem do sistema OXY e O' a origem do novo sistema $O'X'Y'$ obtido do sistema original por uma translação a partir de um **vetor de translação** $\vec{v}$, esta é a transformação chamada de $T_{\vec{v}}(P) = P_1$ em que pontos $P(x, y)$ do sistema XOY são transformados por $T_{\vec{v}}$ em pontos $P_1(x_1, y_1)$ do novo sistema $O'X'Y'$ onde $\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{OO'} = \vec{v}$. Podemos então definir a translação pelo vetor $\vec{v}$ como $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$.

Figura 3: Translação

Logo, se $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}}(x, y) = (x, y) + (v_1, v_2) = (x + v_1, y + v_2)$.

Em nosso estudo estamos interessados nas translações verticais e horizontais e é o que veremos a seguir.

3.3.1 Translação em Relação ao Eixo OX

Neste caso se $P(x, y)$ é um ponto qualquer do sistema OXY, o **vetor de translação** $\vec{v}$ será definido por $\vec{v} = (0, k)$ em que:

- Se k $>$ 0, temos translação para cima;
- Se k $<$ 0, temos translação para baixo.

Pela definição 3.3, $T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}}(x, y) = (x, y + k)$ não é uma transformação linear pois $T(0, 0) = (0, k) \neq (0, 0)$ e pela definição 3.2, $T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}}(x, y)$ é uma transformação bijetiva.

3.3.2 Translação em Relação ao Eixo OY

Neste caso se $P(x, y)$ é um ponto qualquer do sistema OXY, o **vetor de translação** $\vec{v}$ será definido por $\vec{v} = (k, 0)$ em que:

- Se k $>$ 0, temos translação para esquerda;
- Se k $<$ 0, temos translação para direita.

Pela definição 3.3, $T_{\vec{v}}(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}}(x, y) = (x + k, y)$ não é uma transformação linear pois $T(0, 0) = (k, 0) \neq (0, 0)$ e observemos (definição 3.2), que $T_{\vec{v}}$ é uma transformação bijetiva.

Observemos que se $P_1 = (x_1, y_1) = T_{\vec{v}}(P) = (x + k, y)$, então $x_1 = x + k$ e $y_1 = y$ com k $>$ 0, logo, $T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}}(x, y) = T_{\vec{v}}(x_1 - k, y_1) = (x_1, y_1)$. Com isto mostramos o deslocamento para a esquerda e analogamente podemos mostrar o deslocamento para a direita.

3.4 Dilatações e Compressões

3.4.1 Dilatação (Compressão) Vertical

É a transformação definida por $T(x, y) = (x, ky)$ em que:

- Se k $>$ 1, temos dilatação;
- Se 0 $<$ k $<$ 1, temos compressão;
- Se -1 $<$ k $<$0, temos compressão e reflexão;
- Se k $<$ -1, temos dilatação e reflexão.

Sem perda de generalidade vamos considerar k $>$ 0. Então, pela definição 3.3, esta transformação é linear pois para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ temos:

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1 + v_1, ku_2 + kv_2) = (u_1, u_2) + (v_1, kv_2)$
  $= T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(\lambda\vec{u}) = T(\lambda u_1, \lambda u_2) = (\lambda u_1, k\lambda u_2) = \lambda(u_1, ku_2) = \lambda T(\vec{u})$

Pela definição 3.2, esta transformação é bijetiva.

3.4.2 Dilatação(Compressão) Horizontal

É a transformação definida por $T(x, y) = (kx, y)$ em que:

- Se k $>$ 1, temos compressão;
- Se 0 $<$ k $<$ 1, temos dilatação;
- Se -1 $<$ k $<$0, temos dilatação e reflexão;
- Se k $<$ -1 temos compressão e reflexão.

Sem perda de generalidade vamos considerar k $>$ 0. Então, pela definição 3.3, esta transformação é linear pois para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ temos:

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (ku_1 + kv_1, u_2 + v_2) = (ku_1, u_2) + (kv_1, v_2)$
  $= T(\vec{u}) + T(\vec{v})$;
- $T(\lambda\vec{u}) = T(\lambda u_1, \lambda u_2) = (k\lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda(ku_1, u_2) = \lambda T(\vec{u})$.

Podemos ver que esta transformação é bijetiva (definição 3.2).

Temos que $P_1 = (x_1, y_1) = T(x, y) = (kx, y)$ logo $x_1 = kx,\ y_1 = y$ e

$$T(x,y) = T\left(\frac{x_1}{k}, y_1\right) = \left(k\frac{x_1}{k}, y_1\right) = (x_1, y_1)$$

Com isto mostramos que para k $>$ 1 a transformação é uma compressão e analogamente podemos mostrar que para 0 $<$ k $<$ 1 a transformação é uma dilatação.

4 GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Queremos analisar neste capítulo o que acontece com os gráficos das funções trigonométricas dos tipos: $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x + c) + d$, $g(x) = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$ e $h(x) = a \cdot tag(b \cdot x + c) + d$ em que sen, cos e tag são respectivamente as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e a, b, c e d são números reais. As referências para este capítulo são [1] e [3]. As referências para o cálculo diferencial podem ser obtidas em [8].

4.1 Transformações Gráficas de Funções

Iremos analisar o comportamento do gráfico de algumas funções após as seguintes transformações: Simetria (Reflexão), Translação e Dilatação (ou compressão).

4.1.1 Simetria

A simetria pode ser em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y.

4.1.1.1 Simetria em relação ao eixo x

Suponhamos que sejam dadas as funções f e g, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $g(x) = -f(x)$, por exemplo, $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ em que os gráficos estão na figura 4.

Se $g(x) = -f(x)$, podemos dizer que $g'(x) = -f'(x)$ e $g''(x) = -f''(x)$. No nosso exemplo, $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ então $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -2x$ e $f''(x) = 2$, $g''(x) = -2$.

Logo temos que:

1. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é decrescente (ou crescente) respectivamente;

2. $f(x)$ e $g(x)$ possuem os mesmos pontos críticos;

3. Se em $x = t$, valor que pertence ao domínio das funções, $f'(t) = 0$ *e* $f''(t) > 0$ então $f(x)$ tem ponto de mínimo local e consequentemente teremos $g'(t) = 0$ *e* $g''(t) < 0$. Logo, $g(x)$ tem ponto de máximo local e vice-versa.

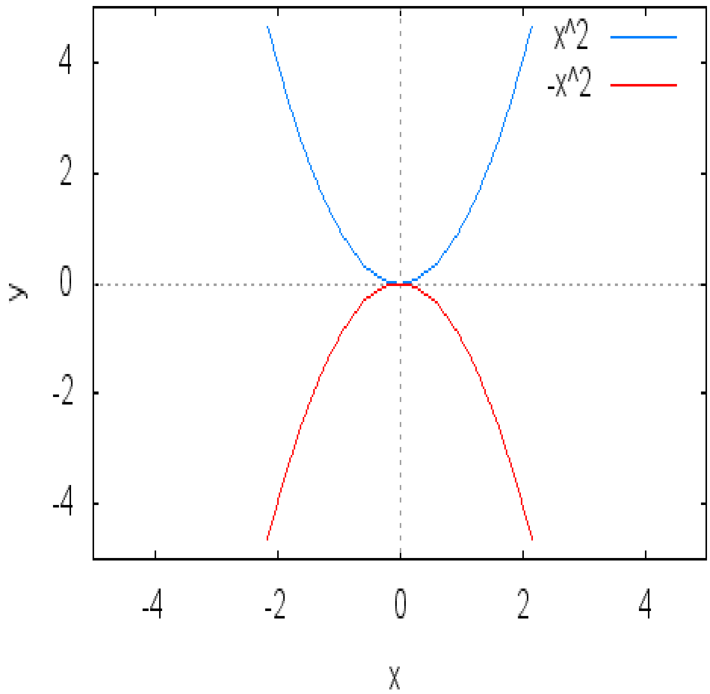


Figura 4: $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$

4.1.1.2 Simetria em relação ao eixo y

Suponhamos que sejam dadas as funções f *e* g, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $g(x) = f(-x)$. Por exemplo, $f(x) = x^3 - 4x + 2$ e $g(x) = (-x)^3 - 4 \cdot (-x) + 2$, em que os gráficos estão na figura 5.

Se $g(x) = f(-x)$, podemos dizer que $g'(x) = -f'(-x)$ e $g''(x) = f''(-x)$. No nosso exemplo, $f(x) = x^3 - 4x + 2$ e $g(x) = (-x)^3 - 4 \cdot (-x) + 2$ então $f'(x) = 3x^2 - 4$, $g'(x) = -3x^2 + 4$ e $f''(x) = 6x$, $g''(x) = -6x$. Logo, observemos que para as funções acima descritas temos:

1. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é decrescente (ou crescente) respectivamente;

2. Para $f(x)$ e $g(x)$, os pontos críticos são iguais em módulo;

3. Se em $x = t$, valor que pertence ao domínio de $f(x)$ e $x = -t$, valor que pertence ao domínio de $g(x)$, $f'(t) = 0$ e $f''(t) > 0$ então $f(x)$ tem ponto de mínimo local e consequentemente teremos $g'(-t) = 0$ e $g''(t) > 0$. Logo, $g(x)$ tem ponto de mínimo local e vice-versa.

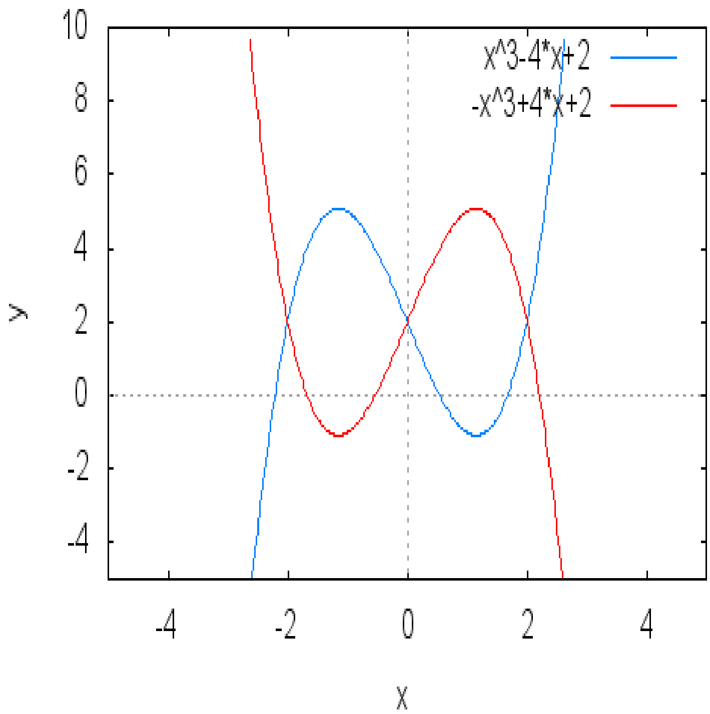


Figura 5: $f(x) = x^3 - 4x + 2$ e $g(x) = (-x)^3 - 4 \cdot (-x) + 2$

4.1.1.3 Observação

- Os gráficos de $g(x) = -f(x)$ são simétricos em relação ao eixo x;
- Os gráficos de $g(x) = f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo y;
- Se (x, y) pertence ao gráfico de $f(x)$ então $(x, -y)$ pertence ao gráfico de $-f(x)$;
- Se (x, y) pertence ao gráfico de $f(x)$ então $(-x, y)$ pertence ao gráfico de $f(-x)$.

4.1.2 Translação

A translação pode ser horizontal ou vertical.

4.1.2.1 Translação Vertical

Sejam as funções f, g e h, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que, $g(x) = f(x) + b$ e $h(x) = f(x) - b$ com $b > 0$. Por exemplo, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 5$ e $h(x) = x^2 - 5$ em que os gráficos estão na figura 6.

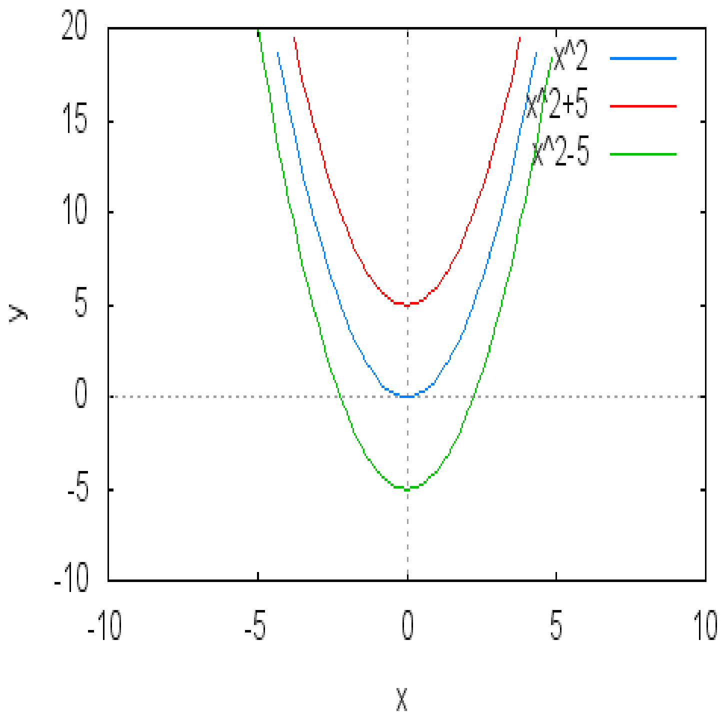


Figura 6: $f(x) = x^2,\ g(x) = x^2 + 5$ e $h(x) = x^2 - 5$

Temos que:

$g'(x) = f'(x),\ \ g''(x) = f''(x),\ \ h'(x) = f'(x)$ e $h''(x) = f''(x)$

Em nosso exemplo:

$f'(x) = 2x,\ \ f''(x) = 2,\ \ g'(x) = 2x,\ \ g''(x) = 2,\ \ h'(x) = 2x$ e $h''(x) = 2$

Portanto, podemos observar que para as funções acima descritas temos:

1. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é crescente (ou decrescente) e $h(x)$ é crescente (ou decrescente);

2. As funções $f(x),\ g(x)$ e $h(x)$ possuem os mesmos pontos críticos;

3. Se $x = t$ é um ponto crítico e representa um máximo local (ou mínimo local) para $f(x)$ então será máximo local (ou mínimo local) para $g(x)$ e também será máximo local (ou mínimo local) para $h(x)$;

4. Para $b > 0$, $g(x) = f(x) + b$, o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado b unidades para cima. Para $h(x) = f(x) - b$, o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado b unidades para baixo.

4.1.2.2 Translação Horizontal

Sejam as funções f, g e h, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que, $g(x) = f(x + d)$ e $h(x) = f(x - d)$ com $d > 0$. Por exemplo, $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$ e $h(x) = (x - 3)^2$ em que os gráficos estão na figura 7.

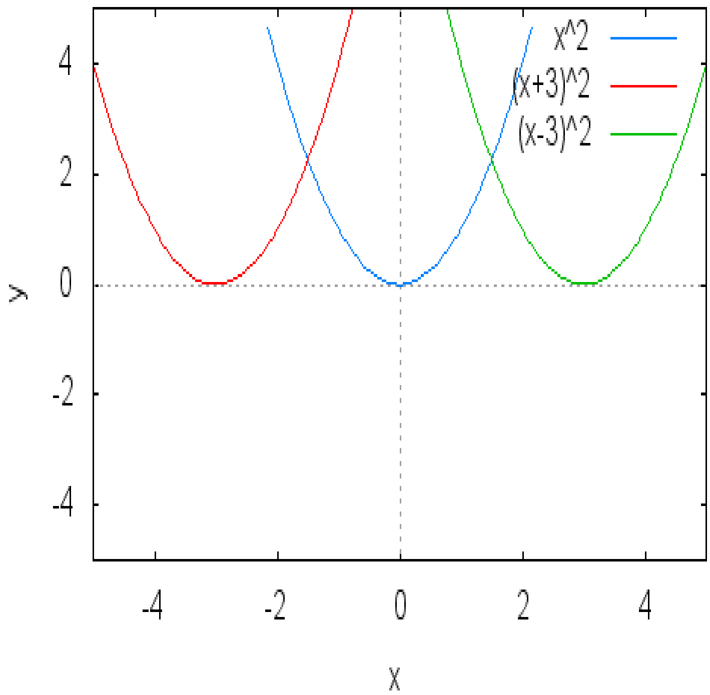


Figura 7: $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$ e $h(x) = (x - 3)^2$

Temos que:

$$g'(x) = f'(x + d),\ g''(x) = f''(x + d),\ h'(x) = f'(x - d) \text{ e } h''(x) = f''(x - d)$$

Em nosso exemplo:

$$f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2,\ g'(x) = 2 \cdot (x + 3),\ g''(x) = 2,\ h'(x) = 2 \cdot (x - 3) \text{ e } h''(x) = 2$$

Portanto, observemos que:

1. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é crescente (ou decrescente) e $h(x)$

é crescente (ou decrescente);

2. Se t é ponto crítico de $f(x)$ então $t-d$ é ponto crítico de $g(x)$ e $t+d$ é ponto crítico de $h(x)$;

3. Se $x = t$ é um ponto crítico e representa um máximo local (ou mínimo local) para $f(x)$ então $t-d$ será máximo local (ou mínimo local) para $g(x)$ e $t+d$ será máximo local (ou mínimo local) para $h(x)$;

4. Para $d > 0$, $g(x) = f(x+d)$, o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado d unidades para esquerda e para, $h(x) = f(x-d)$, o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado d unidades para direita.

4.1.3 Dilatação (ou Compressão)

A dilatação ou compressão pode ser horizontal ou vertical.

4.1.3.1 Dilatação (ou Compressão) Horizontal

Sejam as funções f e g, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que, $g(x) = f(ax)$ com $a > 0$. Por exemplo, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = (2x)^3 - 2x$ e $h(x) = (\frac{1}{2}x)^3 - \frac{1}{2}x$ em que os gráficos estão nas figuras 8 e 9.

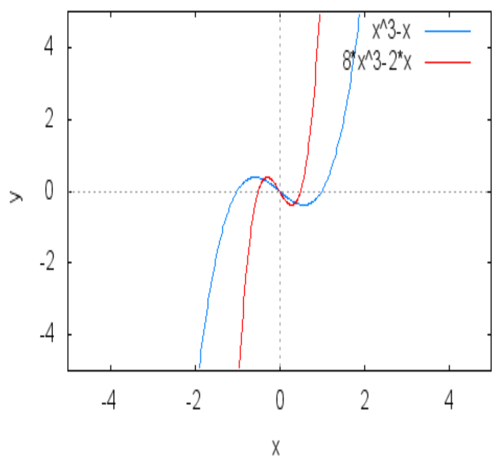


Figura 8: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = (2x)^3 - 2x$

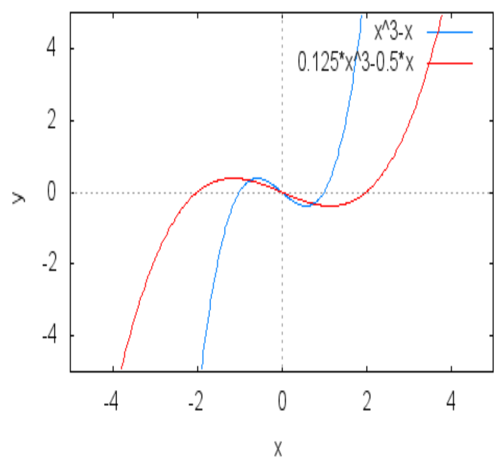


Figura 9: $f(x) = x^3 - x$, $h(x) = (\frac{1}{2}x)^3 - \frac{1}{2}x$

Se $g(x) = f(a \cdot x)$ então $g'(x) = a \cdot f'(a \cdot x)$ e $g''(x) = a^2 \cdot f''(a \cdot x)$. No nosso exemplo, podemos ver que $f(x) = x^3 - x$, $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, $g(x) = (2x)^3 - 2x = 8x^3 - 2x$, $g'(x) = 24x^2 - 2$, $g''(x) = 48x$, $h(x) = (\dfrac{1}{2}x)^3 - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x^3}{8} - \dfrac{1}{2}x$, $h'(x) =$

$\dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{1}{2}$, $h''(x) = \dfrac{6x}{8}$.

Portanto, observemos que:

1. Se $g(\frac{t}{a}) = f(a \cdot \frac{t}{a}) = f(t)$, logo se $|a| > 1$ esta transformação é uma compressão e se $0 < |a| < 1$ esta transformação é uma dilatação;
2. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é crescente (ou decrescente) e $h(x)$ é crescente (ou decrescente);
3. Se x = t é um ponto crítico e representa um máximo local (ou mínimo local) para $f(x)$ então $t \cdot \dfrac{1}{a}$ será máximo local (ou mínimo local) para $g(x)$ e para $h(x)$.

4.1.3.2 Dilatação (ou Compressão) Vertical

Sejam as funções f *e* g, funções definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que, $g(x) = a \cdot f(x)$ com $a > 0$. Por exemplo, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = 2 \cdot (x^3 - x)$ *e* $h(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (x^3 - x)$ em que os gráficos estão nas figuras 10 e 11.

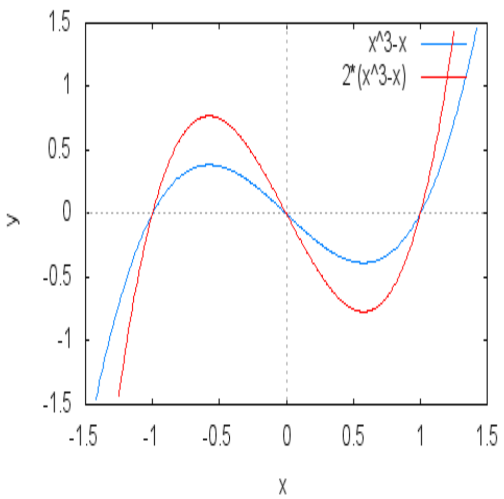


Figura 10: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = 2(x^3 - x)$

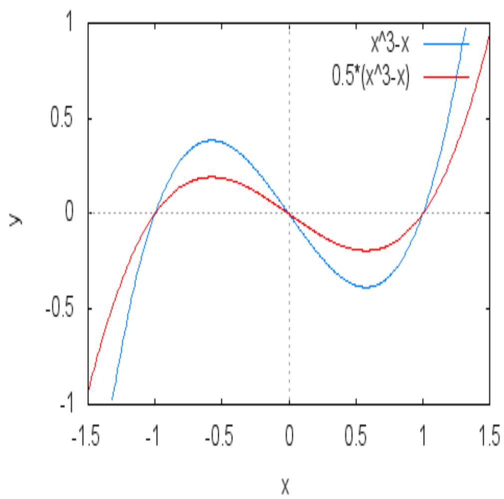


Figura 11: $f(x) = x^3 - x$, $h(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$

Se $g(x) = a \cdot f(x)$ então $g'(x) = a \cdot f'(x)$ *e* $g''(x) = a \cdot f''(x)$. Em nosso exemplo, podemos ver que $f(x) = x^3 - x$, $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, $g(x) = 2 \cdot (x^3 - x) = 2x^3 - 2x$, $g'(x) = 6x^2 - 2$, $g''(x) = 12x$, $h(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x}{2}$, $h'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$, $h''(x) = \dfrac{6x}{2} = 3x$.

Logo observemos que:

1. Se $|a| > 1$, esta transformação é uma dilatação e se $0 < |a| < 1$ esta transformação é uma compressão;

2. Se $f(x)$ é crescente (ou decrescente) então $g(x)$ é crescente (ou decrescente) e $h(x)$ é crescente (ou decrescente);

3. Se $x = t$ é um ponto crítico e representa um máximo local (ou mínimo local) para $f(x)$ então $x = t$ será máximo local (ou mínimo local) para $g(x)$ e para $h(x)$.

4.2 Transformações Gráficas de Funções Trigonométricas

Definição 4.1. Uma função f será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que, quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ também estará no domíno de f e $f(x+p) = f(x)$, em que o menor número real positivo p é chamado de **período** de f.

As funções trigonométricas são periódicas. Simetrias, translações e dilatação vertical não alteram o período das funções trigonométricas. Mostremos de que maneira a dilatação horizontal afeta o período. Seja f uma função periódica de período p, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Então, se f é uma função periódica com período p e se $g(x) = f(a \cdot x)$ com $a > 0$, então, g tem período $\dfrac{p}{a}$. De fato:

$$g\left(x + \frac{p}{a}\right) = f\left[a \cdot \left(x + \frac{p}{a}\right)\right] = f(a \cdot x + p) = f(a \cdot x) = g(x)$$

o que mostra que g tem período $\dfrac{p}{a}$.

4.2.1 Função Seno

A função $f(x) = sen(x)$ é periódica e tem período 2π pois $sen(x + 2k\pi) = sen(x) \cdot cos(2k\pi) + sen(2k\pi) \cdot cos(x) = sen(x) \cdot 1 + 0 \cdot cos(x) = sen(x)$. Lembremos que $cos(2k\pi)$ é igual a 1 e $sen(2k\pi)$ é igual a 0 para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. De acordo com a definição 4.1, o período de $f(x) = sen(x)$ é o menor valor positivo possível para $2k\pi$, neste caso 2π.

4.2.1.1 Simetria

Se $f(x) = sen(x),\ g(x) = -sen(x)\ e\ h(x) = sen(-x) = -sen(x) = g(x)$, então $f(x)\ e\ g(x)$ apresentam gráficos simétricos em relação ao eixo x. Portanto neste caso,

$f(x)$ e $h(x) = g(x)$ apresentam gráficos simétricos em relação ao eixo y, o que não modifica o período, em que os gráficos estão na figura 12.

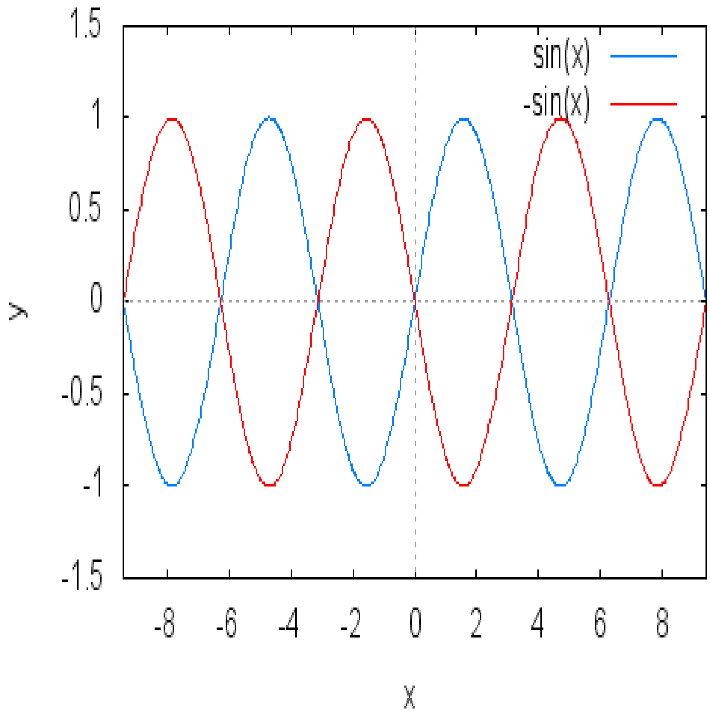


Figura 12: $f(x) = sen(x),\ g(x) = h(x) = -sen(x)$

4.2.1.2 Translação

Se $f(x) = sen(x),\ g(x) = sen(x) + 2$ e $h(x) = sen(x) - 2$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de duas unidades para cima, enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de duas unidades para baixo, em que os gráficos estão na figura 13.

Se $f(x) = sen(x),\ g(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{4}$ unidades para esquerda enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{4}$ unidades para direita, em que os gráficos estão na figura 14.

4.2.1.3 Dilatação ou Compressão

Se $f(x) = sen(x),\ g(x) = sen(2x)$ e $h(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ observemos que o gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ teve uma mudança de período, pois o período de $f(x)$

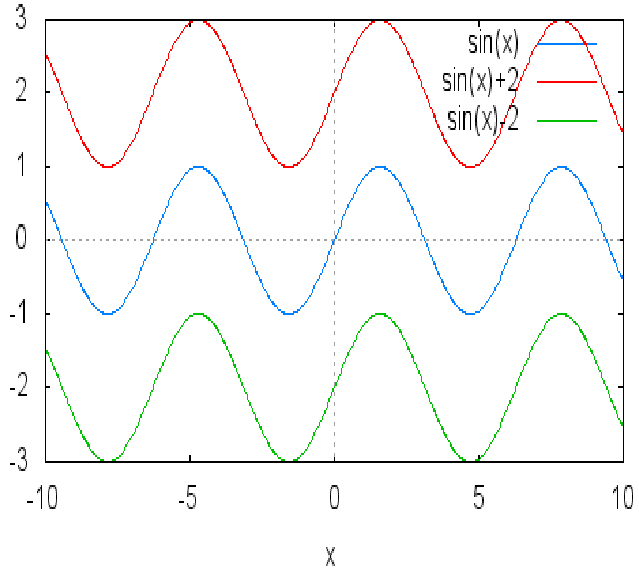


Figura 13: $f(x) = sen(x),\ g(x) = sen(x) + 2$ e $h(x) = sen(x) - 2$

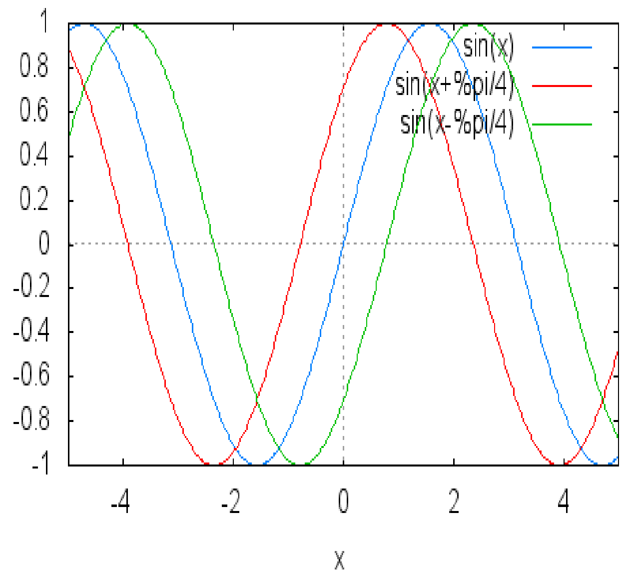


Figura 14: $f(x) = sen(x),\ g(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

é 2π, enquanto que o período de $g(x)$ é π. Logo houve uma compressão horizontal. Com relação ao gráfico de $h(x)$, também houve mudança de período, que passou a ser igual a 4π, implicando uma dilatação horizontal, em que os gráficos estão nas figuras 15 e 16.

Se $f(x) = sen(x),\ g(x) = 2 \cdot sen(x)$ e $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot sen(x)$, observemos que no gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ ocorreu uma dilatação vertical e com relação ao gráfico de $h(x)$, temos uma compressão vertical, em que os gráficos estão nas figuras 17 e

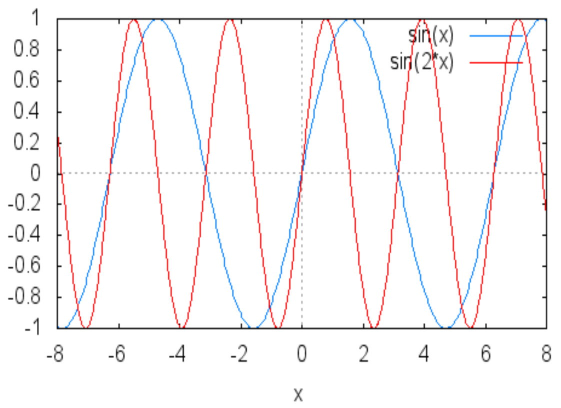


Figura 15: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(2x)$

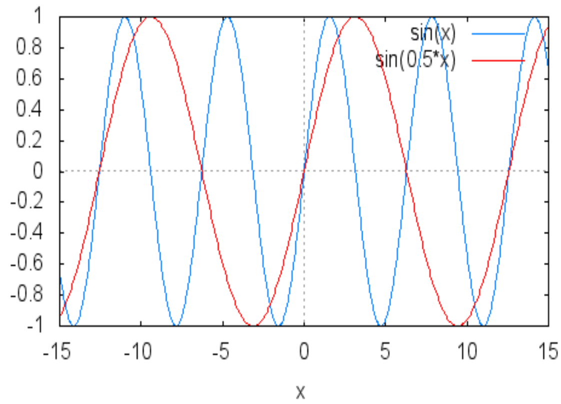


Figura 16: $f(x) = sen(x)$, $h(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$

18.

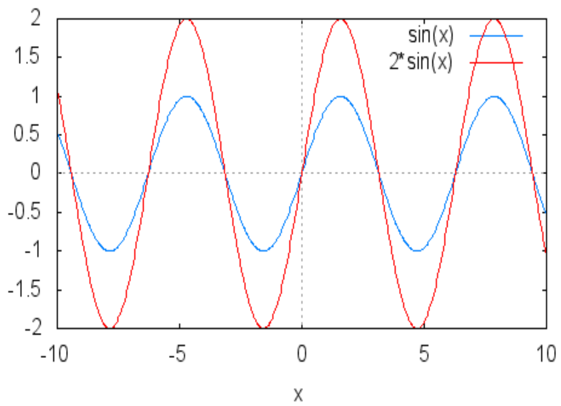


Figura 17: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2sen(x)$

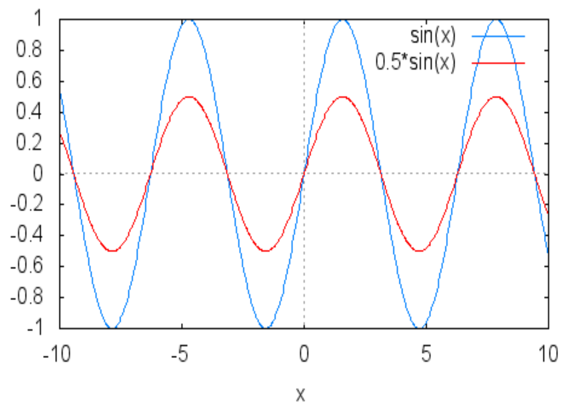


Figura 18: $f(x) = sen(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}sen(x)$

4.2.2 Função Cosseno

A função $f(x) = cos(x)$ é periódica e tem período 2π pois $cos(x + 2k\pi) = cos(x) \cdot cos(2k\pi) + sen(2k\pi) \cdot sen(x) = cos(x) \cdot 1 + 0 \cdot cos(x) = cos(x)$. Lembremos que $cos(2k\pi)$ é igual a 1 e $sen(2k\pi)$ é igual a 0 para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. De acordo com 4.1, o período de $f(x) = cos(x)$ é o menor valor positivo possível para $2k\pi$, no caso 2π.

4.2.2.1 Simetria

Se $f(x) = cos(x)$, $g(x) = -cos(x)$ e $h(x) = cos(-x) = cos(x) = f(x)$, então $f(x)$ e $g(x)$ apresentam gráficos simétricos em relação ao eixo x e $f(x) = cos(x)$ por ser uma função par, função em que $f(x) = f(-x)$, já é automaticamente simétrica em relação ao eixo y, em que os gráficos estão na figura 19.

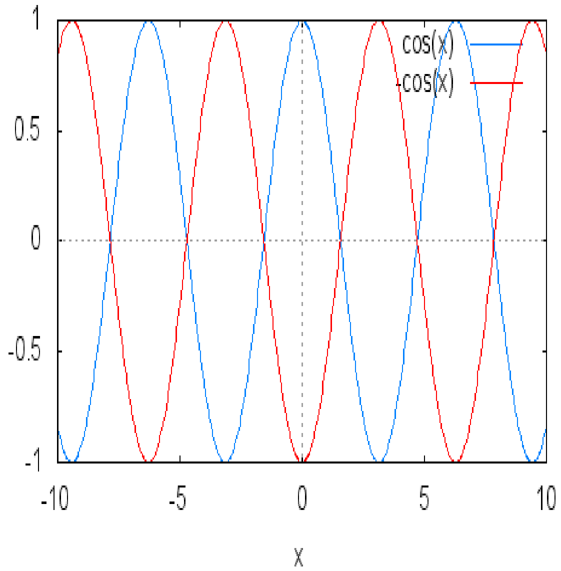


Figura 19: $f(x) = h(x) = cos(x),\ g(x) = -cos(x)$

4.2.2.2 Translação

Se $f(x) = cos(x),\ g(x) = cos(x) + 3$ e $h(x) = cos(x) - 3$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de três unidades para cima enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de três unidades para baixo, em que os gráficos estão na figura 20.

Se $f(x) = cos(x),\ g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ e $h(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{3}$ unidades para esquerda, enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{3}$ unidades para direita, em que os gráficos estão na figura 21.

4.2.2.3 Dilatação ou Compressão

Se $f(x) = cos(x),\ g(x) = cos(3x)$ e $h(x) = cos\left(\frac{x}{3}\right)$ observemos que o gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ teve uma mudança de período, pois o período de $f(x)$ é 2π enquanto que o período de $g(x)$ é $\frac{2\pi}{3}$, temos então uma compressão horizontal. Com relação ao gráfico de $h(x)$, também houve mudança de período, que passou a ser igual a

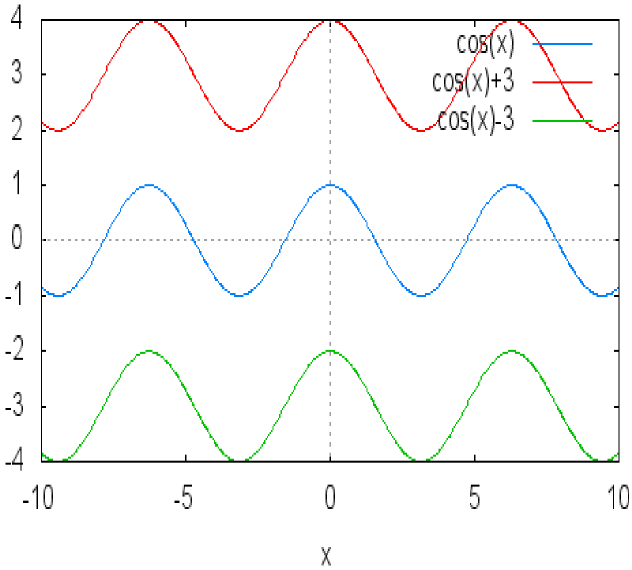


Figura 20: $f(x) = cos(x),\ g(x) = cos(x) + 3\ e\ h(x) = cos(x) - 3$

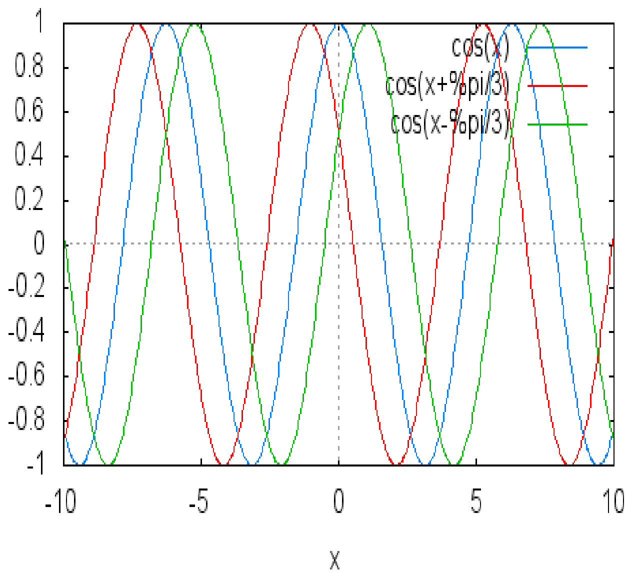


Figura 21: $f(x) = cos(x),\ g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\ e\ h(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

6π. Temos, portanto, uma dilatação horizontal, em que os gráficos estão nas figuras 22 e 23.

Se $f(x) = cos(x),\ g(x) = 3 \cdot cos(x)\ e\ h(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot cos(x)$, observemos que no gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ temos uma dilatação vertical. E com relação ao gráfico de $h(x)$, temos uma compressão vertical, em que os gráficos estão nas figuras 24 e 25.

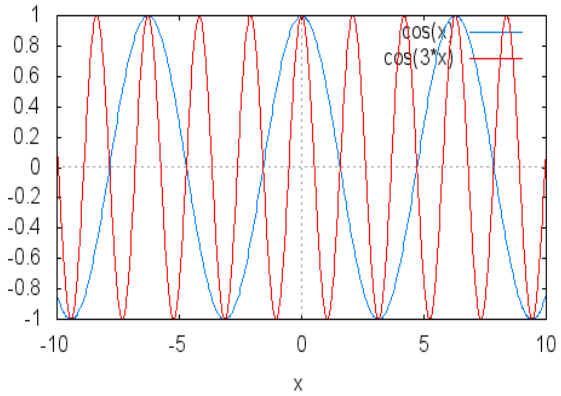


Figura 22: $f(x) = cos(x)$, $g(x) = cos(3x)$

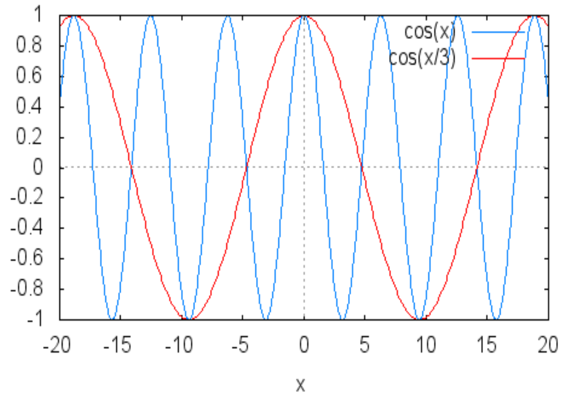


Figura 23: $f(x) = cos(x)$, $h(x) = sen\left(\frac{x}{3}\right)$

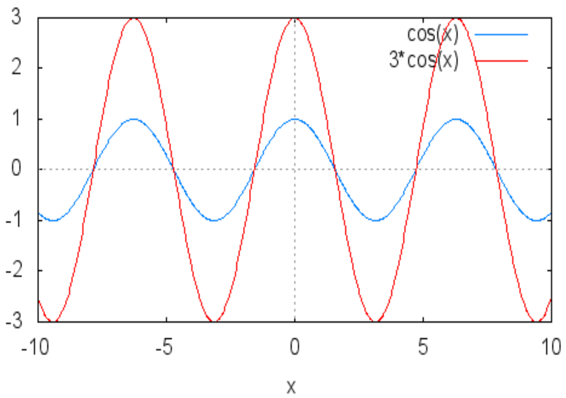


Figura 24: $f(x) = cos(x)$, $g(x) = 3cos(x)$

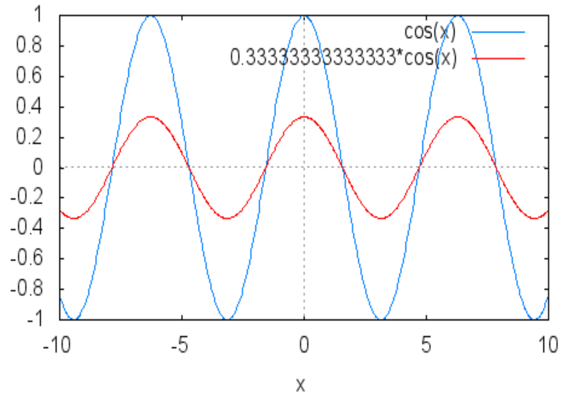


Figura 25: $f(x) = cos(x)$, $h(x) = \frac{1}{3}cos(x)$

4.2.3 Função Tangente

A função $f(x) = tan(x)$ é periódica e tem período π pois:

$$tan(x+\pi) = \frac{tan(x) + tan(\pi)}{1 - tan(x).tan(\pi)} = \frac{tan(x) + 0}{1 - tan(x).0} = tan(x)$$

4.2.3.1 Simetria

Se $f(x) = tan(x)$, $g(x) = -tan(x)$ e $h(x) = tan(-x) = -tan(x) = g(x)$, em que $f(x)$ e $g(x)$ apresentam gráficos simétricos em relação ao eixo x. E como $h(x) = g(x)$ nós teremos a simetria em relação ao eixo y, em que os gráficos estão na figura 26.

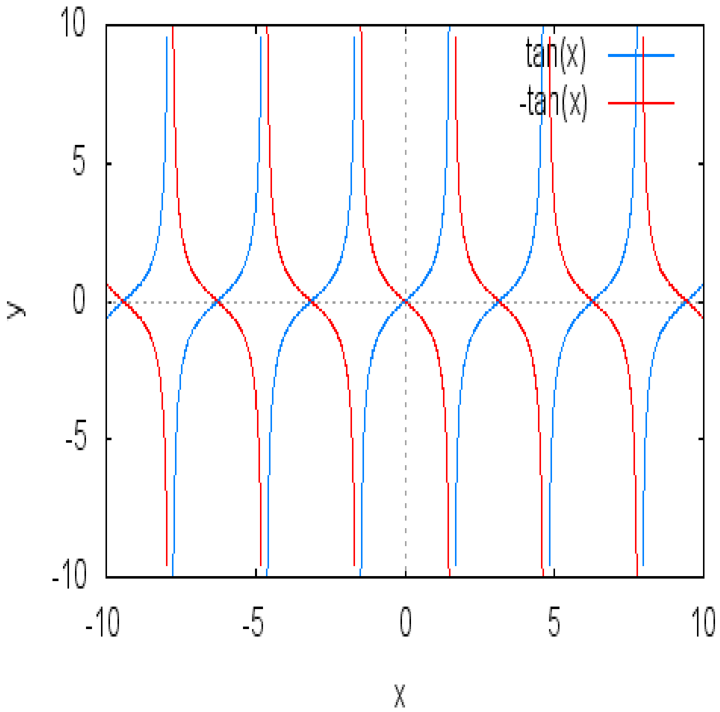


Figura 26: $f(x) = tan(x),\ g(x) = h(x) = -tan(x)$

4.2.3.2 Translação

Se $f(x) = tan(x),\ g(x) = tan(x) + 4\ e\ h(x) = tan(x) - 4$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de quatro unidades para cima, enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação vertical de quatro unidades para baixo, em que os gráficos estão na figura 27.

Se $f(x) = tan(x),\ g(x) = tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\ e\ h(x) = tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, observemos que o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{4}$ unidades para esquerda, enquanto que o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ com uma translação horizontal de $\frac{\pi}{4}$ unidades para direita, em que os gráficos estão na figura 28.

4.2.3.3 Dilatação ou Compressão

Se $f(x) = tan(x),\ g(x) = tan(2x)\ e\ h(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, observemos que o gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ teve uma mudança de período, pois o período de $f(x)$ é π, enquanto que o período de $g(x)$ é $\frac{\pi}{2}$, ocorreu então uma compressão horizontal. Com relação ao gráfico de $h(x)$, também houve mudança de período, que passou a ser igual a 2π. Temos portanto uma dilatação horizontal. Os gráficos estão nas figuras 29 e 30.

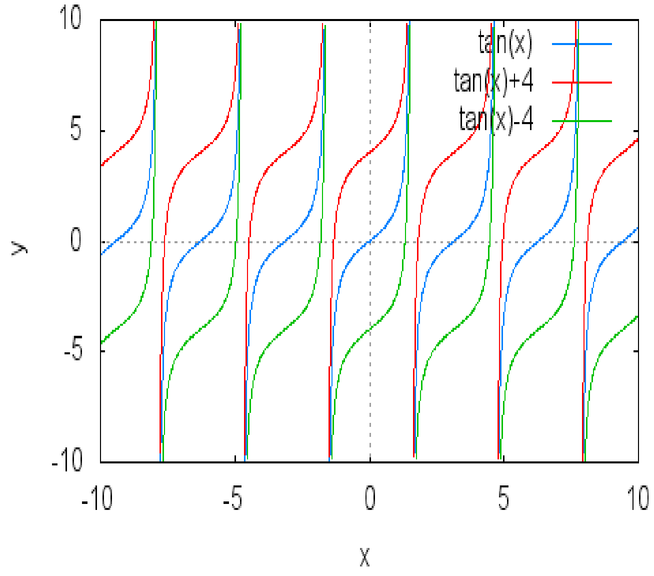


Figura 27: $f(x) = tan(x),\ g(x) = tan(x) + 4$ e $h(x) = tan(x) - 4$

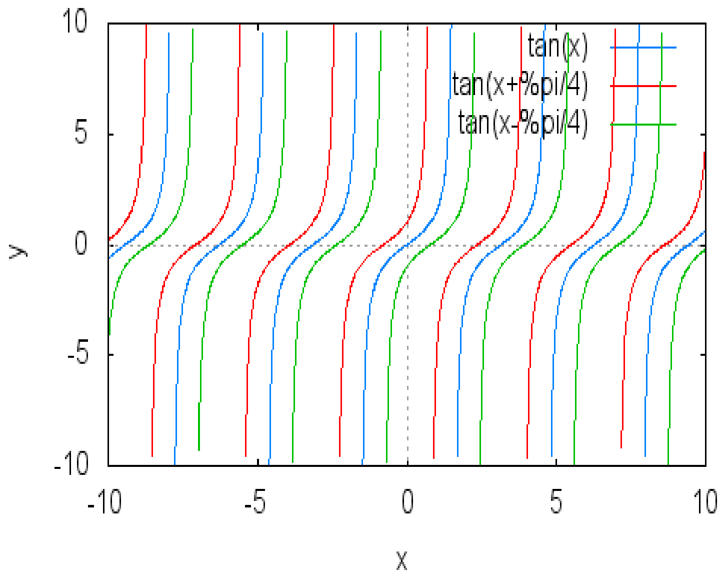


Figura 28: $f(x) = tan(x),\ g(x) = tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Se $f(x) = tan(x),\ g(x) = 5 \cdot tan(x)$ e $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot tan(x)$, observemos que no gráfico de $g(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ ocorreu uma dilatação vertical. Com relação ao gráfico de $h(x)$, temos uma compressão vertical. Os gráficos estão nas figuras 31 e 32.

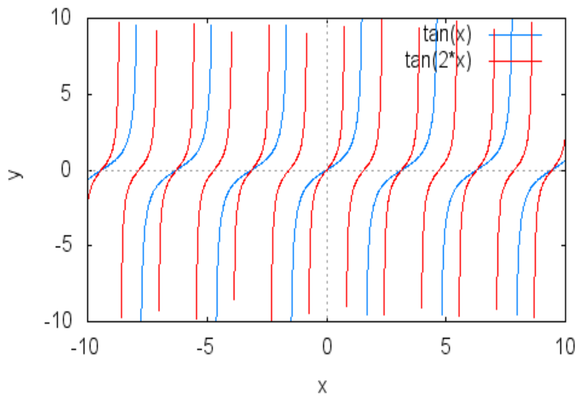


Figura 29: $f(x) = tan(x)$, $g(x) = tan(2x)$

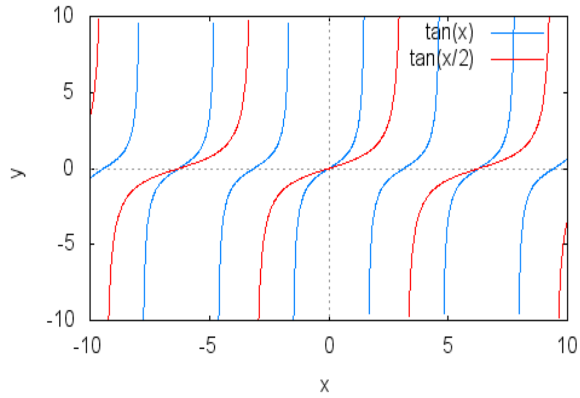


Figura 30: $f(x) = tan(x)$, $h(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

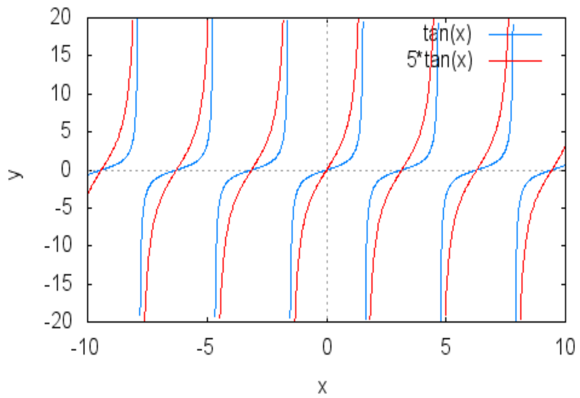


Figura 31: $f(x) = tan(x)$, $g(x) = 5tan(x)$

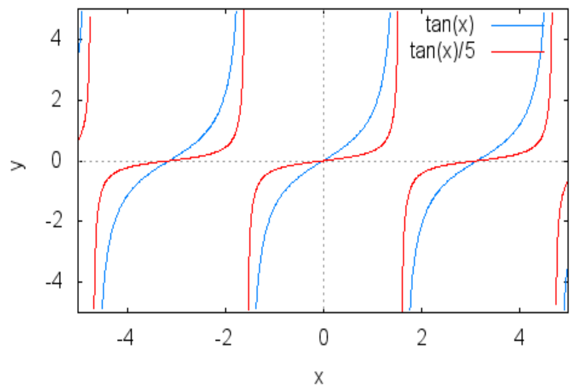


Figura 32: $f(x) = tan(x)$, $h(x) = \dfrac{1}{5}tan(x)$

4.2.4 Generalizando Transformações

1. Seja a função $f(x) = -3sen\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = -3sen\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$

Começando a análise por $f_1(x) = sen(2x)$, que possui período π, seguem as transformações:

$$f_1(x) = sen2x$$

$$f_2(x) = sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ translação horizontal a direita de } \frac{\pi}{6}$$

$$f_3(x) = 3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ dilatação vertical de 3 unidades}$$

$$f_4(x) = -3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ simetria em relação ao eixo x}$$

$$f(x) = -3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \text{ translação vertical}$$

Em que os gráficos são as figuras 33 , 34 e 35.

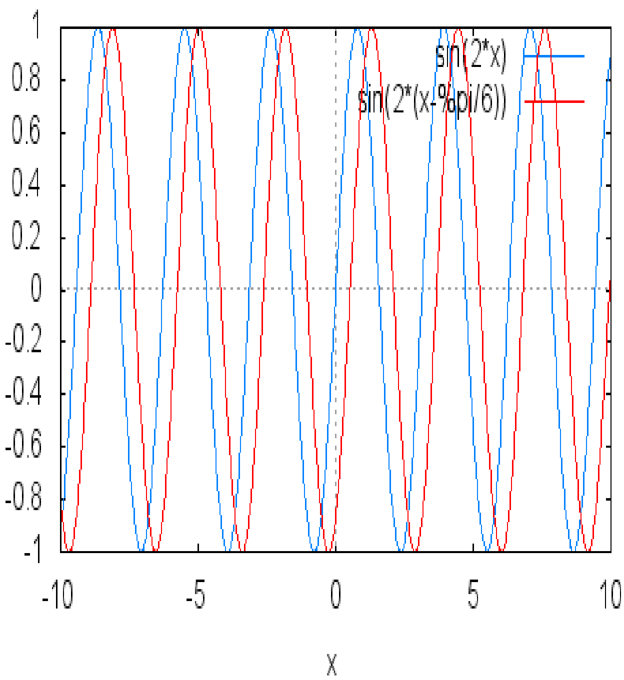


Figura 33: $f(x) = sen(2x)$, $g(x) = sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

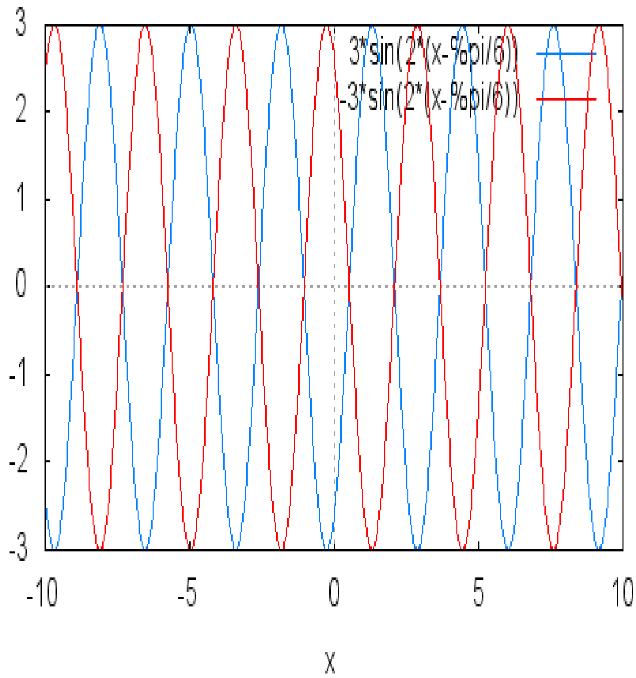


Figura 34: $f(x) = 3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $g(x) = -3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2. Seja a função $f(x) = 2cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = 2cos\left[3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 2.$$

Começando a análise por $f_1(x) = cos(3x)$, que possui período $\frac{2\pi}{3}$, seguem as transformações:

$$f_1(x) = cos3x$$

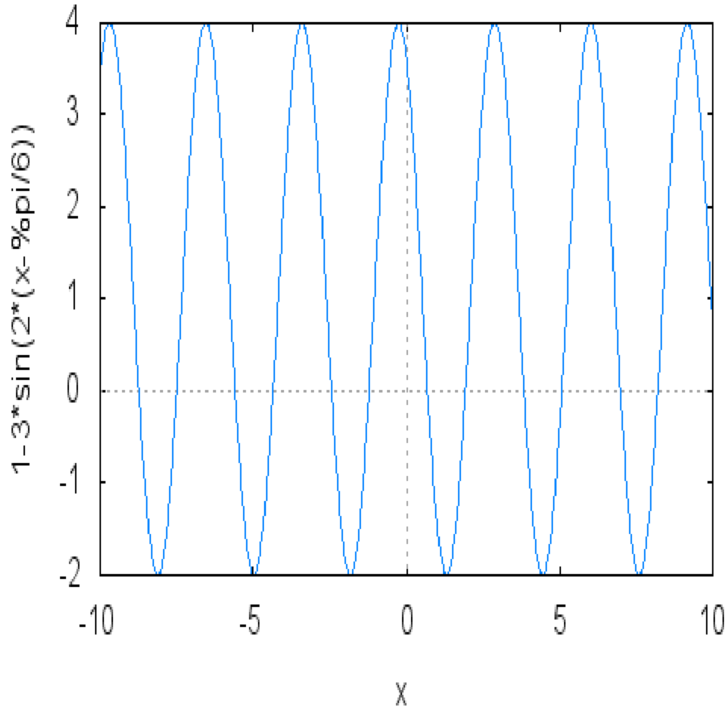


Figura 35: $f(x) = -3sen2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

$$f_2(x) = cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ translação horizontal a direita de } \frac{\pi}{6}$$

$$f_3(x) = 2cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ dilatação vertical de 2 unidades}$$

$$f(x) = 2cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \text{ translação vertical}$$

Em que os gráficos são as figuras 36, 37 e 38.

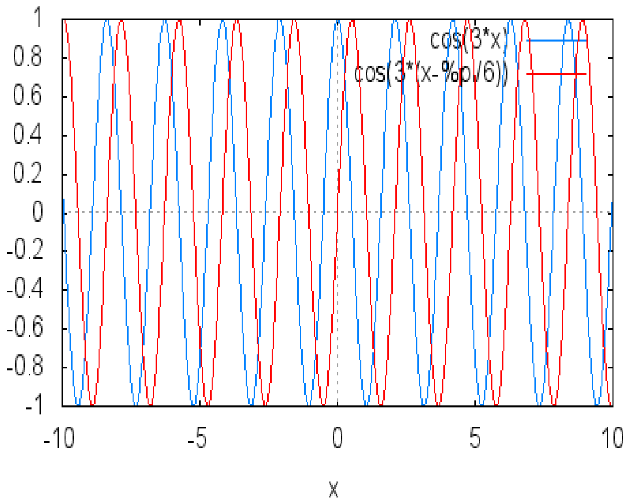


Figura 36: $f(x) = cos(3x)$, $g(x) = cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

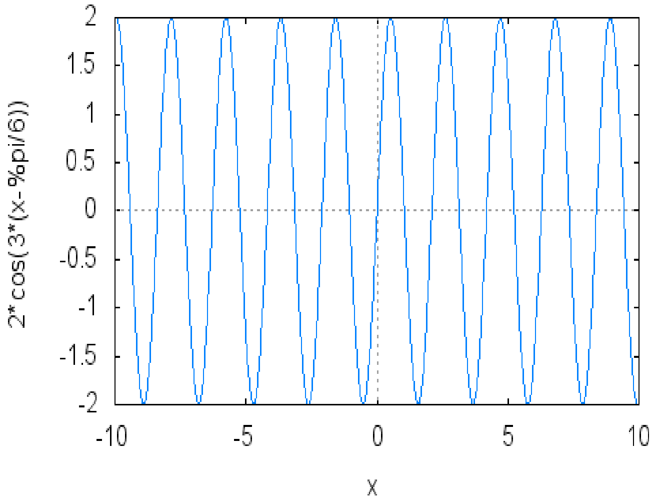


Figura 37: $f(x) = 2cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

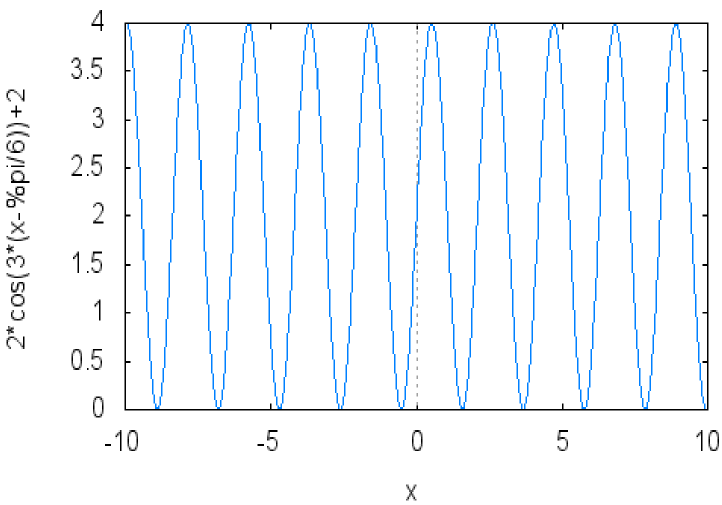


Figura 38: $f(x) = 2cos3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

5 *TRABALHO DESENVOLVIDO EM SALA DE AULA*

5.1 Descrição do Trabalho

Foi informado que iríamos desenvolver uma atividade usando o resurso computacional Geogebra para estudar as transformações de simetria, translação e dilatação (compressão) no gráfico da função $f(x) = sen(x)$.

O trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual Fernando Lobo na cidade de Juiz de Fora no estado de Minas Gerais com os alunos do terceiro ano do ensino médio noturno em uma segunda-feira de fevereiro de 2013 no terceiro e no quarto horário. O Anexo A contém o mesmo texto que foi entregue aos alunos, descrevendo a atividade que eles iriam desenvolver. Foram instalados nos computadores da escola o programa Geogebra e o aplicativo seno.ggb, que contém a atividade a ser desenvolvida, em que algumas das imagens estão no Anexo D. Na semana anterior, em sala de aula, foram recordados com os alunos o domínio, a imagem, o período e o gráfico da função seno. A atividade foi conduzida pelo professor que orientava os alunos através da execução do trabalho no projetor de multimídia. Com exceção de dois grupos, todos os outros grupos conseguiram abrir a atividade normalmente sem a ajuda do professor. Foram utilizados 10 computadores. Em 8 deles estavam dois alunos, em um deles estavam 3 alunos e no último estava o professor orientando a atividade pelo projetor de multimídia. Inicialmente foi lida a descrição do Anexo A e no terceiro horário os alunos conseguiram fazer as atividades de 1 a 4 do Anexo B, foram para o intervalo, e ao retornarem fizeram as atividades de 5 a 8 do Anexo B.

5.2 Questões Sobre a Atividade

Foi elaborado um questionário que é mostrado no Anexo B. Observamos, na primeira pergunta, como o aluno poderia responder com suas próprias palavras, que na letra **a** com relação ao gráfico de $f(x)$, 10 alunos escreveram que o gráfico aumentou, 8 que o gráfico cresceu e 1 que o gráfico esticou. Na letra **b**, 17 disseram que o gráfico encolheu, 2 disseram que os gráficos ficaram iguais. Na letra **c**, todos notaram a reflexão e na letra

d todos notaram a reflexão e a dilatação. Na segunda pergunta 10 alunos marcaram a alternativa correta. Na terceira pergunta, letra **a**, as respostas mais frequentes foram de que o gráfico encolheu ou compactou, em **b** para 16 alunos o gráfico esticou e para o restante o gráfico alargou, em **c**, 16 disseram que o gráfico refletiu, espelhou ou ficou invertido e 3 não responderam, em **d**, 17 observaram o mesmo comportamento da letra **a** e 2 não responderam. Na questão 4, 11 alunos acertaram. Nas questões 5 e 6 todos os alunos observaram e descreveram o movimento de forma correta. A questão 7 foi respondida corretamente por 18 alunos. Na questão 8, no item **a**, 18 alunos acertaram, em **b** também 18 alunos responderam corretamente, no item **c**, 15 alunos acertaram e 1 não respondeu e em **d** a maioria dos alunos respondeu de forma correta.

5.3 Questionário Para o Aluno

Com relação ao questionário fornecido aos alunos, que é mostrado no Anexo C, na primeira pergunta a maioria gostou muito de fazer esta atividade utilizando o computador. Alguns comentários merecem destaque. Por exemplo, uma aluna escreveu que foi uma aula divertida e diferente, outra diz que foi uma forma mais dinâmica de desenvolver e analisar o objetivo do exercício fazendo com que os alunos se interessem mais e o desempenho acabou sendo maior e melhor. Por outro lado, um aluno achou a atividade muito complicada. Com relação à segunda pergunta, 100% dos alunos acharam bem melhor desenvolver este tipo de atividade usando o computador do que em sala de aula. Na terceira pergunta, que é a crítica em relação à atividade, um aluno diz que atividade foi muito complicada e uma aluna disse que a atividade requer muita atenção. O restante dos alunos gostaram ou não apresentaram nenhuma crítica. Com relação à quarta e última pergunta, apenas dois alunos escreveram não ser a favor desse tipo de atividade.

5.4 Tutorial Sobre a Atividade

Os recursos computacionais utilizados neste trabalho podem ser encontrados em:
http://www.geogebra.org/
para o programa Geogebra e
http://maxima.sourceforge.net/
para o programa Maxima.

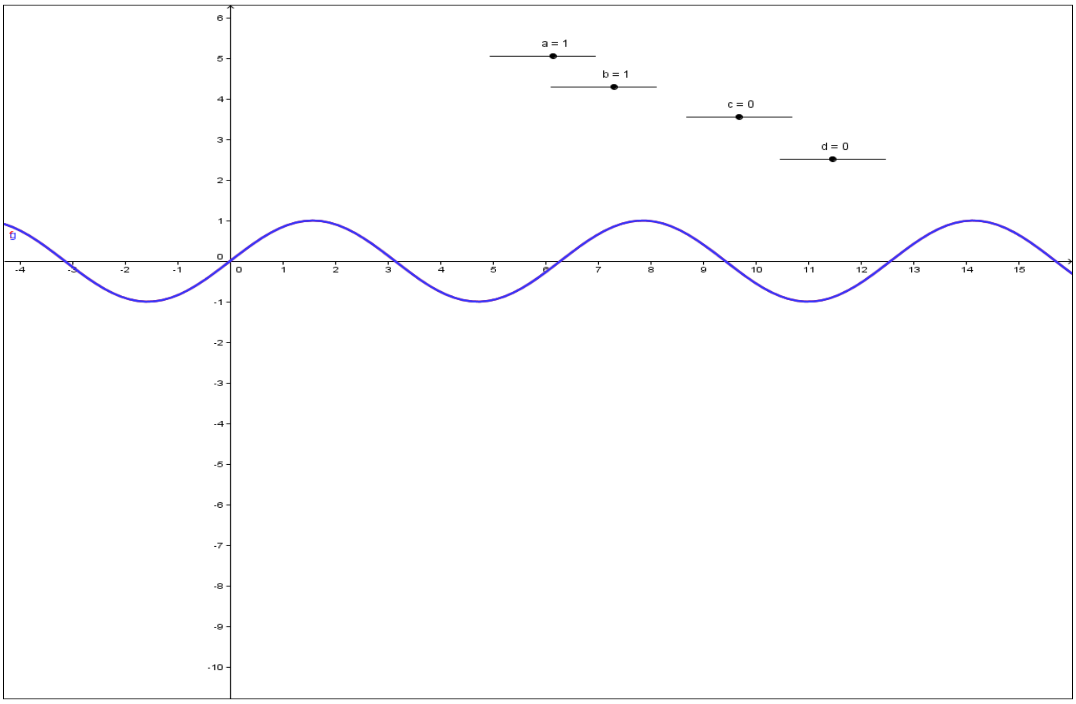
Nestes endereços o professor encontrará as informações necessárias para as instalações dos mesmos.

O roteiro para a atividade no Geogebra é o que está descrito a seguir. Ao abrir o programa irá aparecer uma tela como aquelas que aparecem no Anexo D. Clique em seletor, posicione o ponteiro na região em que será colocado o seletor a, clique em aplicar e repita as operações para definir os seletores b, c e d. Na parte inferior da tela, entrada, digite as funções da seguinte maneira: $f(x) = a * sin(b * x + c) + d$ e $g(x) = sin(x)$, clique com o botão direito sobre os gráficos e escolha propriedades, e em cor para mudar a cor dos gráficos, e em estilo para mudar a espessura das curvas. Vá modificando os seletores e observando o comportamento do gráfico de $f(x)$ em relação ao gráfico de $g(x)$.

GeoGebra - Protocolo de Construção Page 1 of 1

Roteiro

Magalhães



N.	Nome	Definição	Comando	Valor
1	Número a			a = 1
2	Número b			b = 1
3	Número c			c = 0
4	Número d			d = 0
5	Função f	f(x) = a sin(b x + c) + d	f(x) = a sin(b x + c) + d	f(x) = sin(x)
6	Função g			g(x) = sin(x)

Criado com GeoGebra

file://C:\Documents and Settings\Administrador\Desktop\Latex\Roteiro.html 14/4/2013

6 CONCLUSÃO

Nota-se então que o ensino de conteúdos matemáticos utilizando recursos computacionais proporciona resultados satisfatórios, porque podemos obter os resultados de forma mais rápida, notamos uma melhora na aprendizagem dos alunos, os alunos ficam mais interessados e mais motivados, principalmente nesta atividade de transformações gráficas, pois nitidamente o computador apresenta resultados que de outra maneira iriam demandar muito tempo. O nosso objetivo foi mostrar de maneira intuitiva e mais rápida, é claro, como se processam as transformações gráficas das funções trigonométricas. Notamos que com o uso dos recursos computacionais os alunos acharam bem mais fácil reconhecer estas transformações. À medida que os alunos interagiam com o computador eles obviamente viam imediatamente o que estava acontecendo.

Observamos que devemos dar continuidade a este tipo de trabalho procurando enfatizar em sessões posteriores um aprofundamento mais sério do conhecimento dos alunos, principalmente na caracterização correta de cada uma das transformações, bem como aprofundando os aspectos relativos a domínio, imagem e período. Acredito que atividades desse tipo em sala de aula são muito enriquecedoras e podem ser estendidas às outras áreas da Matemática como o estudo das matrizes, determinantes, geometria, funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, etc.

Espero sinceramente que este trabalho sirva de incentivo a outros colegas que usando de ferramentas computacionais possam desenvolver um trabalho diferente e agradável em sala de aula.

REFERÊNCIAS

[1] BITTINGER, M. I. *algebra & trigonometry graphs & models.* Prentice Hall College Div; Package edition, 1996.

[2] BRASIL (2002). Secretaria do Ensino Médio. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ensino Médio. Brasília: MEC/SEM.

[3] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos.* Rio de Janeiro: SBM,1992.

[4] Documentação do MAXIMA. http://maxima.sourceforge.net/documentation.html. Data de acesso: 16 de março de 2013.

[5] FONSECA, V. G. *O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.* Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.

[6] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.* Rio de Janeiro: PROFMAT, SBM, 2012.

[7] HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: PROFMAT, SBM, 2012.

[8] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo: HARBRA ltda, 1994.

[9] LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano.* Rio de Janeiro: IMPA,VITAE, 1992.

[10] LIMA, E. L. *Matemática e Ensino.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[11] LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

Anexo A – DESCRIÇÃO COMO APRESENTADA AOS ALUNOS

Descrição do Trabalho

Este é um trabalho que será desenvolvido com os alunos do terceiro ano do ensino médio da Escola Estadual Fernando Lobo, no laboratório de informática da escola, em que utilizando um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra) os alunos irão observar as transformações gráficas da função f(x) = a.sen(b.x + c) + d.

Ao abrir a atividade no computador os alunos perceberão que os seletores a,b,c e d estão respectivamente com os valores 1,1,0 e 0 e neste caso notarão que os gráficos das funções f(x) e g(x), definidas como $f(x):\Re \rightarrow \Re$ e $g(x):\Re \rightarrow \Re$ coincidem, pois f(x) = a.sen(b.x + c) + d e g(x) = sen(x). Sob a orientação do professor que está conduzindo a atividade os alunos irão interagir com o programa modificando o valor do seletor a, e deverão ser capazes de observar a nova função f(x) obtida, comparar o gráfico de f(x) com o gráfico de g(x) e a partir daí responder algumas perguntas. Retornar o seletor para o seu valor original e repetir o procedimento para cada um dos seletores. Ao final deste processo os alunos irão perceber as transformções de simetria, translação e dilatação(compressão), cada uma delas acontecendo independentemente. A partir do momento que o aluno entendeu cada uma das transformações, ele deverá modificar aleatoriamente todos os seletores e a partir do gráfico observado descrever cada uma das transformações obtidas.

O professor condutor da atividade irá projetá-la através do data show e pode assim conduzir um estudo dirigido, orientando os alunos na execução de sua atividade bem como recordando com os alunos o que está acontecendo com a imagem e o período da função a cada transformação que é feita.

Anexo B - QUESTÕES

Questões sobre a atividade

Escola Estadual Fernando Lobo

Nome do aluno:

01) Ao movimentar livremente o seletor **a** , descreva com suas palavras, o que aconteceu com o gráfico da função f(x), se:

a) a>1

b) 0<a<1

c) a=-1

d) a <0

02) No exercício anterior se a > 1 , 0 < a < 1 e a = -1 as transformações são respectivamente:

a) simetria,dilatação verticale translação

b) simetria,compressão vertical e translação

c) dilatação vertical,compressão vertical e simetria

d) translação,simetria e compressão vertical

03) Movimentando o seletor **b** responda livremente o que aconteceu com o gráfico se:

a) b>1

b) 0<b<1

c) b=-1

d) b <0

04) Se b > 1 , 0 < b < 1 e b < 0 , respectivamente temos:

a) compressão horizontal, dilatação horizontal,simetria e compressão horizontal se |a|>1

b) simetria, translação e dilatação horizontal

c) compressão horizontal, dilatação horizontal,simetria e compressão horizontal se 0<|a|<1

d) simetria,translação e dilatação vertical

05) O que você observa ao modificar o seletor **c**?

06) O que você observa ao modificar o seletor **d**?

07) As transformações dos exercícios 5 e 6 são chamadas de translações horizontais e verticais, observe que se c > 0 o gráfico desloca-se para__________________________________e se c < 0 o gráfico desloca-se para__________________________________

08) Faça a = 2 , b = 2 , c = 2 e d = 3 e responda:

a) Qual a função f(x) obtida?

b) O que aconteceu com o período da função f(x) em relação a função g(x) = sen(x)?

c) O que aconteceu com a imagem da função f(x) em relação a função g(x) = sen(x)?

d) Que transformações foram observadas comparando-se a função f(x) obtida em relação a

Anexo C – QUESTIONÁRIO

Questionário para o aluno:

Nome do aluno:

01) O que você achou de desenvolver esta atividade no computador?

02) Na sua opinião ficou mais fácil entender transformações com a ajuda do computador ou em sala de aula é melhor?

03) Qual a sua crítica em relação a atividade?

04) Você é a favor de atividades deste tipo?

Anexo D – IMAGENS

As imagens a seguir são relativas à atividade descrita usando o programa Geogebra.

D.1 Reflexão

D.2 Translação

D.3 Dilatação (Compressão)

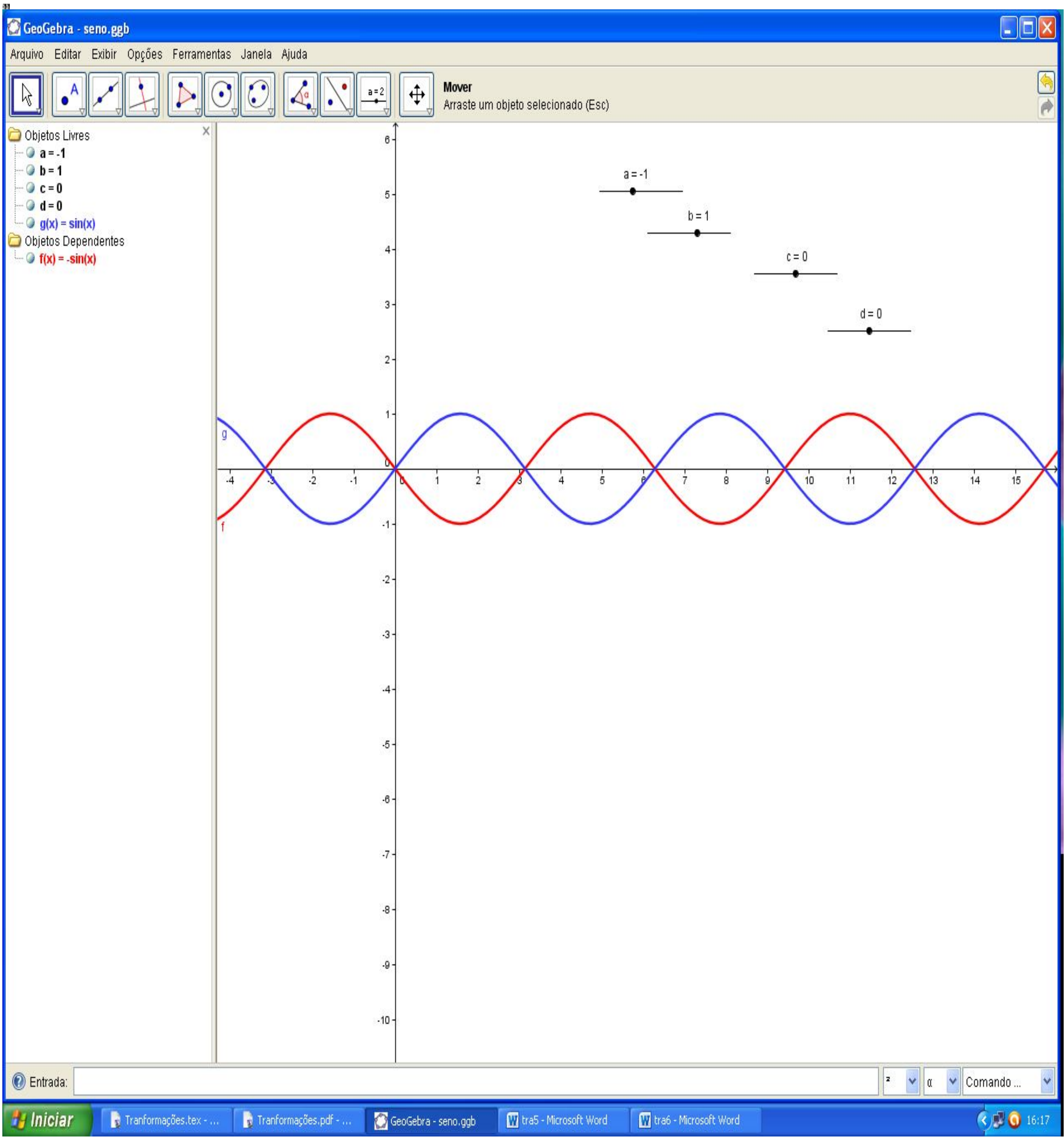


Figura 39: Reflexão

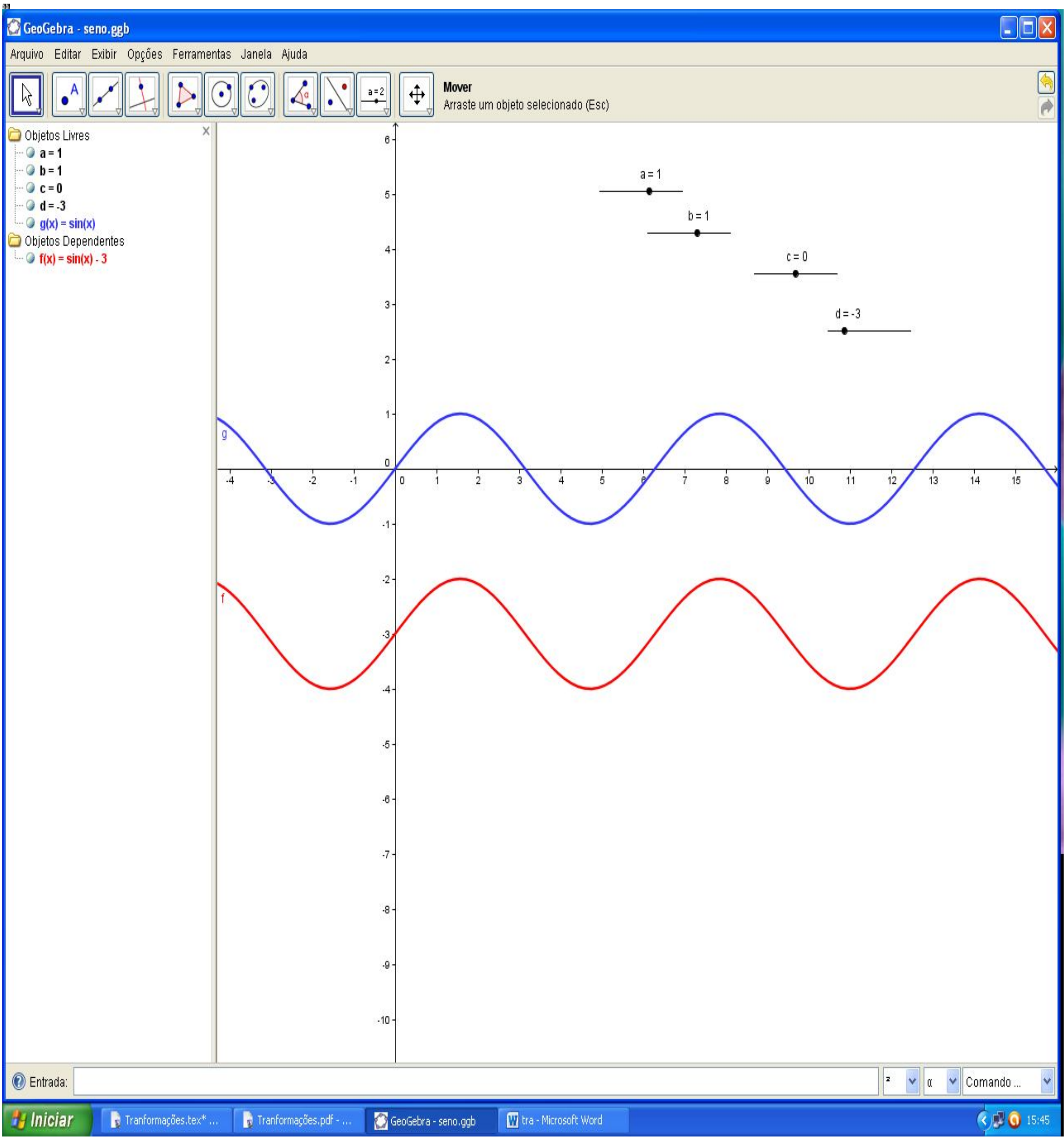


Figura 40: Translação

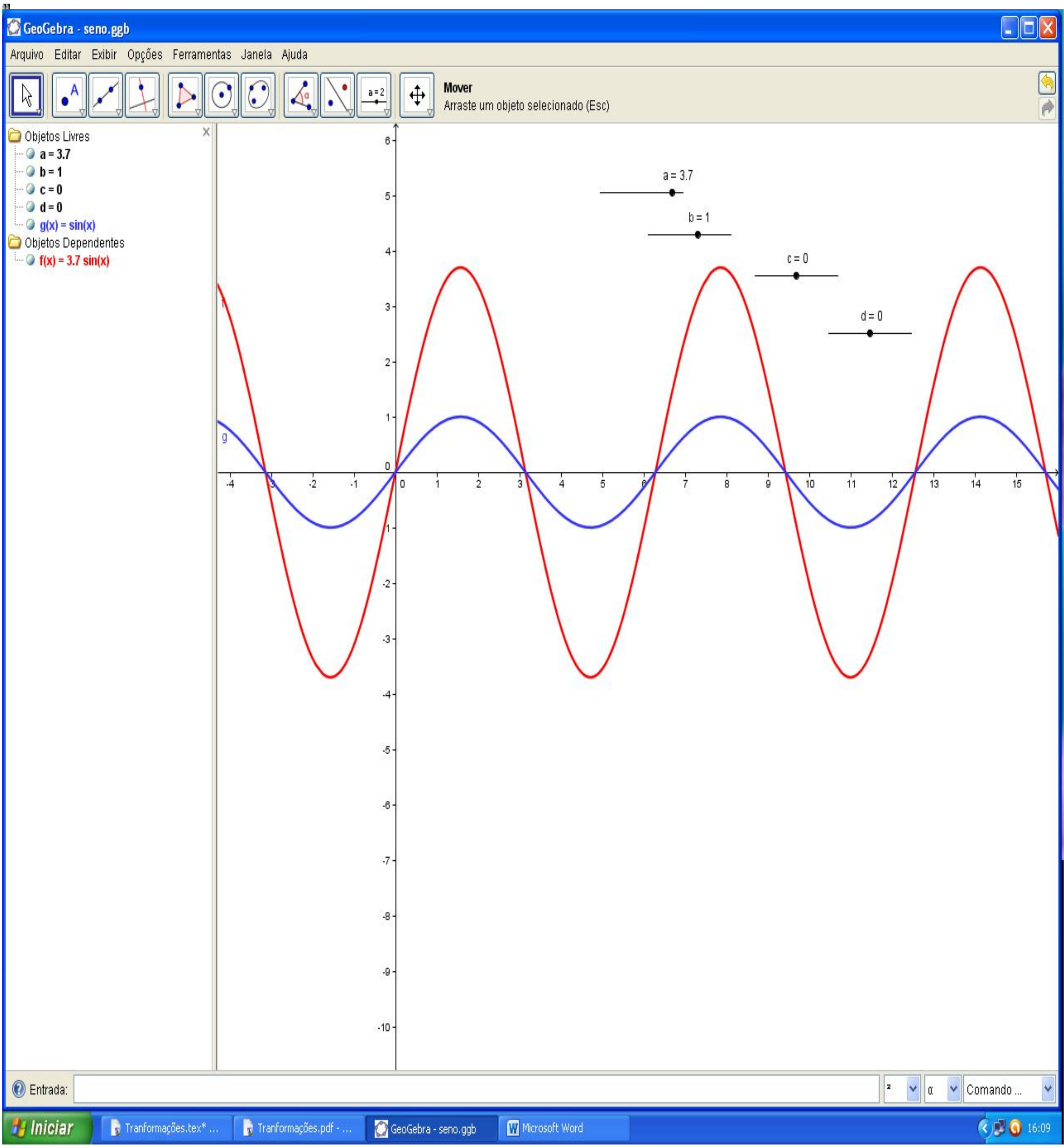


Figura 41: Dilatação