

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Mestrado em Economia Aplicada

Gabriel Filipe Rodrigues Vasconcelos

**PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS SOB QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS:  
A DERIVAÇÃO E APLICAÇÃO DO *OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL*  
(OCAPM)**

JUIZ DE FORA

2013

Gabriel Filipe Rodrigues Vasconcelos

**PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS SOB QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS:  
A DERIVAÇÃO E APLICAÇÃO DO *OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL*  
(OCAPM)**

Versão final referente à Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcel de Toledo Vieira

Supervisor: Prof. Dr. Rogério da Silva Mattos

JUIZ DE FORA

2013

PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS SOB QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS: A  
DERIVAÇÃO E APLICAÇÃO DO *OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL* (OCAPM)

Versão final referente à Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia Aplicada.

Aprovada em: 25/11/2013

BANCA EXAMINADORA

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli (Orientadora)  
Faculdade de Economia / Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Marcel de Toledo Vieira (Co-Orientador)  
Faculdade de Estatística / Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Álvaro de Lima Veiga Filho  
Departamento de Engenharia Elétrica/  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Rogério Silva de Mattos  
Faculdade de Economia / Universidade Federal de Juiz de Fora

## RESUMO

Esta dissertação propõe uma nova versão para o CAPM, denominada Ômega CAPM. Este novo modelo trabalha com uma condição suficiente mais simples do que a eficiência do mercado em termos de média e variância. Conseqüentemente, restrições na utilidade e nas distribuições de retornos não são necessárias, podendo os ativos ter distribuições diferentes entre si. Além disso, todos os momentos das distribuições de retornos são considerados de forma indireta, ou seja, não precisam ser calculados e observados pelos investidores. O OCAPM mantém a forma simples de um único fator do CAPM, bem como seu rigor teórico. Empiricamente o OCAPM mostrou-se superior ao CAPM, não sendo rejeitado em um número maior de vezes, além de obter coeficientes mais coerentes com a teoria. Além disso, foi mostrado que o OCAPM adiciona novas informações sobre os retornos esperados não consideradas pelo CAPM. Entretanto, este trabalho não rejeita nenhum dos dois modelos, ele apenas aponta a superioridade do OCAPM.

**Palavras chave:** CAPM, OCAPM, momentos superiores, modelo média variância

## ABSTRACT

This dissertation proposes a new version for the well-known CAPM, the Omega CAPM. This new model has a simpler sufficient condition than the mean-variance efficiency required on the CAPM. Thus, restriction regarding utility functions and returns distributions are not required. Besides that, our model allows assets to have different distribution amongst themselves. The OCAPM considers all superior moments indirectly, i.e. they do not have to be calculated or observed by investors and it maintains the single factor simplicity and the theoretical rigor of the original model. On an empirical point of view, the OCAPM was superior to the CAPM, the model obtained coefficients which were more consistent with the theory. Moreover, we showed that the OCAPM adds information of the expected returns that are not considered by the CAPM. Nevertheless, we do not reject any of the models, we just show that the OCAPM is superior.

Key words: CAPM, OCAPM, superior moments, mean-variance model

## Índice de Equações

( 2.1 ) .....	6
( 2.2 ) .....	6
( 2.3 ) .....	6
( 2.4 ) .....	6
( 2.5 ) .....	6
( 2.6 ) .....	7
( 2.7 ) .....	7
( 2.8 ) .....	7
( 2.9 ) .....	8
( 2.10 ) .....	8
( 2.11 ) .....	8
( 2.12 ) .....	8
( 2.13 ) .....	9
( 2.14 ) .....	9
( 2.15 ) .....	9
( 2.16 ) .....	9
( 2.17 ) .....	9
( 2.18 ) .....	9
( 2.19 ) .....	10
( 2.20 ) .....	11
( 2.21 ) .....	12
( 2.22 ) .....	12
( 2.23 ) .....	13
( 2.24 ) .....	15
( 2.27 ) .....	18
( 2.28 ) .....	18
( 3.1 ) .....	20
( 3.2 ) .....	21
( 3.3 ) .....	21
( 3.4 ) .....	21
( 3.5 ) .....	22
( 4.1 ) .....	24
( 5.1 ) .....	25
( 5.2 ) .....	26
( 6.1 ) .....	28
( 6.2 ) .....	28
( 6.3 ) .....	29
( 6.4 ) .....	29
( 6.5 ) .....	30
( 6.6 ) .....	30
( 6.7 ) .....	30
( 6.8 ) .....	30
( 6.9 ) .....	30
( 6.10 ) .....	30
( 6.11 ) .....	30
( 6.12 ) .....	31
( 6.13 ) .....	32
( 6.14 ) .....	32

( 6.15 ) .....	32
( 6.16 ) .....	32
( 6.17 ) .....	32
( 6.18 ) .....	33
( 6.19 ) .....	33
( 6.20 ) .....	33
( 6.21 ) .....	33
( 6.22 ) .....	33
( 6.23 ) .....	34
( 6.24 ) .....	34
( 6.25 ) .....	34
( 6.26 ) .....	34
( 6.27 ) .....	34
( 6.28 ) .....	35
( 6.29 ) .....	35
( 6.30 ) .....	35
( 6.31 ) .....	35
( 7.1 ) .....	37
( 7.2 ) .....	40
( 7.3 ) .....	41

## Índice de Figuras

<b>Figura 2.1:</b> A Capital Market Line .....	8
<b>Figura 2.2:</b> A Security Market Line .....	10
<b>Figura 2.3:</b> Duas distribuições com mesma média, variância e curtose.....	14
<b>Figura 2.4:</b> Distribuições simétricas, com a mesma média e variância.....	15
<b>Figura 5.1:</b> Medida $\hat{\Omega}$ .....	25
<b>Figura 6.1:</b> Fronteira Eficiente $\hat{\Omega}$ .....	28
<b>Figura 6.2:</b> Capital Market Line $\hat{\Omega}$ .....	31
<b>Figura 6.3:</b> Security Market Line $\hat{\Omega}$ .....	36

## Índice de Tabelas

<b>Tabela 7.1:</b> Número de ações utilizadas para a construção dos portfólios ano a ano. ....	40
<b>Tabela 7.2:</b> <i>Betas</i> e retornos esperados para todo o período (1990-2012) .....	41
<b>Tabela 7.3:</b> Resultados para o período completo (1990-2012) .....	42
<b>Tabela 7.4:</b> Resultados para o período completo com os instrumentos utilizados em conjunto. ....	44
<b>Tabela 7.5:</b> Resultados para o primeiro subperíodo de 69 meses (1990-1995).....	45
<b>Tabela 7.6:</b> Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (1995-2001).....	46
<b>Tabela 7.7:</b> Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (2001-2007).....	46
<b>Tabela 7.8:</b> Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (2007-2012).....	47
<b>Tabela 7.9:</b> Resultados para o segundo subperíodo de 138 meses (2001-2012).....	48

# Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>3</b>
<b>2. MODELOS CLÁSSICOS DE AVALIAÇÃO DE ATIVOS DE RISCO .....</b>	<b>6</b>
2.1. A Medida de Performance de Carteiras por Média e Variância .....	6
2.2. O Capital Asset Pricing Model (CAPM).....	7
2.3. Extensões do CAPM.....	10
2.3.1. O Modelo de Black .....	11
2.3.2. O Modelo de Merton (ICAPM) .....	12
2.3.3. O Modelo de Lucas (CCAPM).....	13
2.4. A Importância dos Momentos Superiores .....	14
2.5. O CAPM, a Função Utilidade Quadrática e a Distribuição Normal.....	16
2.6. Testes Empíricos do CAPM.....	17
<b>3. ARBITRAGE PRICING THEORY.....</b>	<b>20</b>
<b>4. MEDIDAS DE RISCO COERENTES.....</b>	<b>23</b>
<b>5. A MEDIDA ÔMEGA .....</b>	<b>24</b>
<b>6. A PROPOSIÇÃO DO OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL (OCAPM).....</b>	<b>27</b>
6.1. A Fronteira Eficiente Ômega .....	28
6.2. A Capital Markets Line (CML) Ômega.....	29
6.3. A Security Markets Line (SML) Ômega.....	32
6.4. O Custo de Oportunidade $L$ .....	36
<b>7. TESTES EMPÍRICOS DO OCAPM .....</b>	<b>37</b>
7.1. Descrição das Variáveis .....	40
7.2. A Regressão dos Retornos Esperados .....	41
7.3. Os Subperíodos .....	45
7.4. Variações Independentes.....	49
<b>8. CONCLUSÕES .....</b>	<b>52</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>53</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Na tomada de decisões financeiras sob condições de incerteza, a precificação justa de ativos de risco sempre foi tema de grande interesse. A teoria financeira tem seu primeiro grande marco com Makowitz (1952), em seu trabalho sobre Teoria de Carteiras, posteriormente aprofundada e difundida pelo desenvolvimento do modelo conhecido como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), proposto Treynor<sup>1</sup> (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). Até os dias de hoje este é um dos principais modelos financeiros de precificação de ativos, largamente utilizado tanto na academia, quanto no mercado.

Embora o CAPM seja um modelo teoricamente consistente e de fácil implementação, todas as suas premissas são violadas no mundo real (mercado eficiente em termos de média e variância, restrições na função utilidade, existência de uma carteira de mercado contendo todos os ativos em proporções de equilíbrio, mercado perfeito, existência de uma taxa livre de risco entre outras). Dessa forma, sua utilização é questionável, sob pena de gerar estimativas de retornos pouco aderentes aos retornos efetivamente observados. Copeland e Weston (2002) direcionam essa discussão por dois caminhos: i) estender o CAPM com o objetivo de relaxar suas premissas; ii) verificar como o modelo se comporta empiricamente, apesar de tais premissas.

No que tange ao relaxamento das premissas, Black (1972) mostrou que o CAPM pode ser derivado sem assumir a existência de uma taxa livre de risco. Merton (1973) tornou o modelo intertemporal, com uma taxa livre de risco estocástica. Fama e Roll (1968; 1971), Ross (1978) e Berk (1997) são alguns dos autores que argumentaram que o CAPM pode ser derivado sem que se assuma distribuição normal ou função utilidade quadrática (descrita em termos de média e variância).

Do ponto de vista empírico, o número de trabalhos é ilimitado e os resultados variam, tanto quando o modelo é analisado em períodos diferentes, como quando é testado com variáveis diferentes. Uma discussão empírica detalhada do CAPM é apresentada mais à frente. Entretanto, vale a pena adiantar o trabalho de Roll (1977) e o quão controverso ele tornou todos

---

<sup>1</sup> O trabalho de Treynor (1961) nunca foi publicado. Entretanto, muitos autores consideram este trabalho como o precursor do CAPM. Treynor e Sharpe desenvolveram o primeiro CAPM de forma independente, mas o último fez a primeira submissão do artigo para o *The Journal of Finance* em 1962, quando ele foi rejeitado, para ser submetido novamente e publicado como Sharpe (1964). O CAPM de Sharpe é resultado de sua tese de doutorado, escrita entre 1960 e 1961. Uma revisão detalhada do papel de cada autor na criação do CAPM é apresentada por French (2003).

os testes empíricos do CAPM. O autor argumenta que o CAPM é irrefutável, pois não pode ser testado com perfeição, uma vez que a carteira de mercado, da qual o modelo depende, é inestimável. Como o modelo não pode ser testado, a única discussão possível é sobre o quão razoável é assumir que o mercado seja eficiente em termos de média e variância apenas.

Na concepção original do CAPM, fez-se necessário assumir que o mercado fosse eficiente em termos de média e variância. A única forma então conhecida para gerar tal resultado era a utilização da função utilidade quadrática ou da distribuição normal para os retornos (BERK 1997). Nos dias de hoje, já são conhecidas outras restrições que podem ser aplicadas à função utilidade ou às distribuições de retornos capazes de levar ao resultado do CAPM, como no caso das distribuições de separação em dois fundos<sup>2</sup> (ROSS, 1978).

A generalização do modelo média-variância para recompensa-risco é bastante natural. Entretanto, é preciso esclarecer que a média e a variância são apenas as medidas escolhidas para representar tal relação. Adicionalmente, a variância, que é a medida de risco sobre a qual o modelo é construído, considera tanto a *downside risk* (risco de perda) como a *upside risk* (“risco” de ganho) como risco. No entanto, é natural assumir que investidores avessos ao risco se preocupem mais com o risco de perder do que com o risco de ganhar, o que torna a variância inadequada ao tratar de forma igual toda a distribuição de retornos dos ativos. Além disso, a variância (e o desvio-padrão) são medidas de risco que não atendem a todos os axiomas das medidas de risco coerentes de Artznet *et. al* (1999).

Dito isto, este trabalho propõe uma nova versão para o CAPM, denominada Ômega<sup>3</sup> CAPM (OCAPM). Este novo modelo avança em relação ao CAPM tradicional por utilizar uma medida para recompensa-risco conhecida como medida Ômega (KEATING e SHADWICK, 2002). O novo conceito de recompensa é a *Expected Chance* (EC) e o novo conceito de risco é o *Expected Shortfall* (ES). Informalmente, estas medidas são respectivamente definidas como: se o investidor ganhar, quanto será seu ganho em média (EC); se o investidor perder, quanto será sua perda, em média (ES).

A grande vantagem da medida Ômega advém do fato de que ela considera toda a distribuição de retornos dos ativos, uma vez que ela representa as próprias distribuições, ou seja, todas as informações relativas a todos os momentos das distribuições são consideradas em

---

<sup>2</sup> Distribuições de K fundos são aquelas que fazem a escolha de um portfólio equivalente à escolha entre um número limitado K de fundos.

<sup>3</sup> O nome ‘Ômega’ vem da medida de performance criada por Keating e Shadwick (2002).

conjunto, sem terem que ser necessariamente observadas. Note ainda que nada obriga o investidor a pensar em média e variância, quando o que realmente interessa é o quanto ele pode ganhar e o quanto ele pode perder, e com qual probabilidade. O EC e o ES refletem o que qualquer investidor deseja saber sobre um ativo. Além disso, o ES atende a todos os axiomas das medidas de risco coerentes que a variância não atende, e o risco relevante é apenas o *downside risk*, enquanto a variância considera como risco toda a distribuição de retornos.

Por apresentar duas informações bem simples para o investidor (quanto espera ganhar e perder), no OCAPM o problema da função utilidade deixa de existir. Na verdade, não é preciso assumir sequer que indivíduos se comportam de acordo com funções utilidades pré-estabelecidas (caso se comportem, a função utilidade deve ser capaz de capturar todas as informações das distribuições dos retornos como faz a medida  $\hat{\Omega}$ ). Os únicos pressupostos com relação às preferências dos indivíduos são aversão ao risco e não saciedade. Desta forma, o OCAPM é um modelo que prescinde da discussão das condições necessárias e suficientes<sup>4</sup> presentes no CAPM, em outras palavras, ele pode ser derivado sob qualquer distribuição de retornos (até mesmo distribuições diferentes para cada ativo), sem necessidade de presumir momentos finitos, estabilidade ou qualquer pressuposto que generalize as preferências dos indivíduos em uma função utilidade. A carteira de mercado passa a ser, na verdade, eficiente no sentido  $\hat{\Omega}$ . É importante ressaltar que o OCAPM é construído com o mesmo rigor teórico e fazendo uso dos mesmos micro fundamentos de seu predecessor, diferentemente dos modelos de múltiplos fatores para retornos esperados que ficaram conhecidos nos anos 90.

Empiricamente, este trabalho tem como objetivo testar o OCAPM contra o CAPM. Foram realizados vários testes comparando os dois modelos, tanto em um período de tempo longo (23 anos) quanto em períodos menores (69 meses). O procedimento empírico utilizado é semelhante ao implementado por Jensen, Black e Scholes (1972), em que as ações são divididas em grupos a fim de se obter a máxima dispersão entre os *betas*. Os resultados mostraram, de uma forma persistente, que o OCAPM domina o CAPM também em termos empíricos. Entretanto, os resultados obtidos para o CAPM, embora inferiores, foram melhores do que se imaginava, com uma forte relação linear entre o *beta* e os retornos esperados.

---

<sup>4</sup> O CAPM requer que o mercado seja eficiente no sentido média e variância e esta é sua única condição necessária e suficiente. Entretanto, para que se obtenha um mercado que atenda tais requisitos, é preciso impor fortes restrições nas distribuições de retornos ou na função utilidade dos indivíduos. No caso do OCAPM, a condição necessária e suficiente para sua derivação é um mercado eficiente no sentido  $\hat{\Omega}$ . Tal resultado pode ser obtido sem qualquer tipo de restrição nas distribuições de retornos e os investidores precisam ser apenas avessos ao risco e não saciáveis. Não há necessidade de se impor uma função utilidade a eles.

## 2. MODELOS CLÁSSICOS DE AVALIAÇÃO DE ATIVOS DE RISCO

### 2.1. A Medida de Performance de Carteiras por Média e Variância

A teoria para avaliação e performance de carteiras de ativos teve um marco importante com Markowitz (1952), cuja proposta era determinar um conjunto de carteiras ótimas considerando as dimensões risco (variância) e retorno (média). O modelo apresentado, comumente conhecido como Média-Variância, era de fácil manuseio e foi amplamente aceito pela comunidade acadêmica. Em linhas gerais, o modelo pode ser descrito como se segue:

Seja  $p$  um portfólio contendo  $n$  ativos de risco:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^n a_i E[R_i] \quad (2.1)$$

$$VAR[R_p] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (2.2)$$

$$\sigma_p = \sqrt{VAR[R_p]} \quad (2.3)$$

em que  $a_i$  é a participação do ativo  $i$  na carteira  $p$ , que tem seu retorno esperado definido como  $E[R_p]$ ,  $E[R_i]$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $\sigma_i$  e  $\sigma_p$  são, respectivamente, os desvios padrão do ativo  $i$  e do portfólio  $p$ ,  $\rho_{ij}$  representa o coeficiente de correlação entre os ativos  $i$  e  $j$ .

O objetivo precípua desse modelo era a construção da então denominada Fronteira Eficiente, que representa todas as combinações de portfólios ótimas no sentido de retorno e risco. A Fronteira eficiente pode ser construída via programação simples de duas formas:

$$\max E[R_p] \quad s. a. \quad \sigma_p = k_1 \quad (2.4)$$

$$\min \sigma_p \quad s. a. \quad E[R_p] = k_2 \quad (2.5)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes.

Na equação (2.4) maximiza-se o retorno esperado para um dado desvio padrão ( $k_1$ ). Se a programação for repetida para vários níveis de desvios padrão diferentes o resultado será um conjunto de portfólios ótimos que geram a Fronteira Eficiente. No caso da equação (2.5), o procedimento é análogo, porém minimiza-se o desvio padrão para um dado nível de retorno

esperado ( $k_2$ ). O modelo assume que quanto maior o retorno e menor o desvio padrão, melhor o portfólio. A relação entre retorno e risco, avaliada em um ponto da fronteira, fornece o preço do risco naquele ponto, sendo a não existência de um preço único para o risco, capaz de satisfazer a todos os investidores, um dos problemas dessa abordagem inicial.

No entanto, o fato de que média e variância sozinhas não são capazes de definir com precisão séries financeiras já é amplamente aceito na literatura, principalmente tratando-se de ativos mais complexos, como opções e outros derivativos. Chunnachinda *et al.* (1997), Peiró (1999), Harvey e Siddique (2000) e Smith (2007) são alguns dos autores que discutem a importância de se considerar, na tomada da decisão de investimento, funções de outros momentos estatísticos da distribuição de retornos dos ativos, dando mais ênfase à assimetria, que não é tratada no enfoque média-variância. Este, em sua forma original, pressupõe distribuição normal.

Por fim, a forma original do modelo média-variância assume que decisores possuem função utilidade quadrática, também definida em termos de média e variância apenas. O modelo elege uma função utilidade para descrever o comportamento dos investidores que viola certos padrões esperados de comportamento do investidor racional, como aversão absoluta e relativa ao risco crescente, quando, de acordo com Arrow (1971), a primeira deveria ser decrescente e a segunda constante.

## 2.2. O Capital Asset Pricing Model (CAPM)

O CAPM de Treynor (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) origina-se da transformação da fronteira eficiente de Markowitz (1952) na *Capital Markets Line* (CML) pela consideração do ativo livre de risco. Considere um portfólio  $p$  composto por uma carteira de ativos de risco ótima  $m$  e mais um ativo livre de risco  $r_f$ , de forma que:

$$E[R_p] = \alpha E[R_m] + (1 - \alpha)r_f \quad (2.6)$$

$$Var[R_p] = \alpha^2 Var[R_m] \quad (2.7)$$

$$\sigma_p = \alpha \sigma_m \quad (2.8)$$

onde  $\alpha$  é a fração da renda investida na carteira de risco. Para encontrar a inclinação da CML, que será também o preço único do risco, é preciso diferenciar as equações (2.6) e (2.8) em relação a  $\alpha$  e calcular a razão entre os resultados:

$$\frac{\partial E[R_p]}{\partial \alpha} = E[R_m] - r_f \quad (2.9)$$

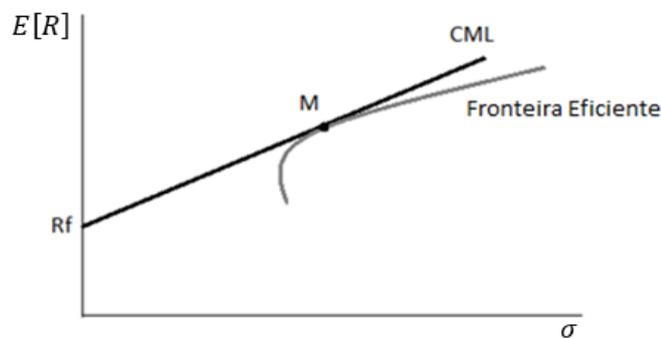
$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} = \sigma_m \quad (2.10)$$

A inclinação da CML será então:

$$\frac{\frac{\partial E[R_p]}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha}} = \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m} \quad (2.11)$$

Este é o preço único do risco na abordagem CML. A carteira  $m$  pode ser chamada de carteira de mercado, sendo definida como a carteira pertencente à Fronteira Eficiente de Markowitz que maximiza a inclinação da CML. Além de estabelecer um preço único para o risco, a CML domina todos os pontos da fronteira, como mostra a figura (2.1). Uma outra implicação deste resultado é o teorema da separação em dois fundos, segundo o qual qualquer combinação ao longo da CML será obtida com investimentos proporcionais na carteira de mercado e no ativo livre de risco.

**Figura 2.1:** A Capital Market Line



Fonte: Elaborado com base em Lintner (1965).

A CML permite a precificação e avaliação do retorno justo de qualquer carteira. No entanto, ela não é suficiente para precificar ou avaliar um único ativo (pertencente à carteira de mercado). Para tal, faz-se uso da SML (*Securities Market Line*), que traz o *beta* (medida de risco sistêmico de um ativo num enfoque de carteira diversificada) no eixo ‘x’ do gráfico.

Considere, então, um portfólio composto por um ativo  $i$  e pela carteira de mercado  $m$ , em que se investe uma fração  $\alpha$  da renda no primeiro e uma fração  $1 - \alpha$  no segundo, tal que:

$$E[R_p] = \alpha E[R_i] + (1 - \alpha) E[R_m] \quad (2.12)$$

$$\sigma_p = [\alpha^2 \sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{im}]^{1/2} \quad (2.13)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da CML, o objetivo é encontrar a inclinação da curva que relaciona ativos individuais com o mercado. Portanto, a variação do retorno esperado e de seu desvio padrão com relação ao peso  $\alpha$ , investido no ativo  $i$ , será:

$$\frac{\partial E[R_p]}{\partial \alpha} = E[R_i] - E[R_m] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} [\alpha^2 \sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{im}]^{-1/2} \times [2\alpha \sigma_i^2 - 2\sigma_m^2 + \\ + 2\alpha \sigma_m^2 + 2\sigma_{im} - 4\alpha \sigma_{im}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tomando como premissa que a carteira de mercado contém todos os ativos da economia, em proporções de equilíbrio de oferta e demanda, não poderá haver excesso de demanda para o ativo  $i$ , considerado isoladamente. Não haver excesso de demanda implica em  $\alpha = 0$ . Esta premissa foi um dos principais *insights* de Sharpe (1964) na derivação do CAPM.

Avaliando as equações (2.14) e (2.15) em  $\alpha = 0$  e obtendo a razão entre os dois resultados encontra-se que o *trade off* entre risco e retorno de um único ativo (pertencente à carteira de mercado) é:

$$\left. \frac{\frac{\partial E[R_p]}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha}} \right|_{\alpha=0} = \frac{E[R_i] - E[R_m]}{(\sigma_{im} - \sigma_m^2) / \sigma_m} \quad (2.16)$$

Note que a CML também é uma situação de equilíbrio, ou seja, todos os seus pontos representam portfólios ótimos no sentido média-variância. Portanto, o *trade off* entre risco e retorno de uma carteira (enfoque da CML) deve ser igual ao *trade off* entre risco e retorno de um ativo de risco (enfoque SML), de forma que:

$$\frac{E[R_i] - E[R_m]}{(\sigma_{im} - \sigma_m^2) / \sigma_m} = \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m} \quad (2.17)$$

Resolvendo a equação acima para  $E[R_i]$  encontra-se o resultado final conhecido como *Capital Asset Pricing Model* (ou Modelo de Precificação de Ativos de Risco):

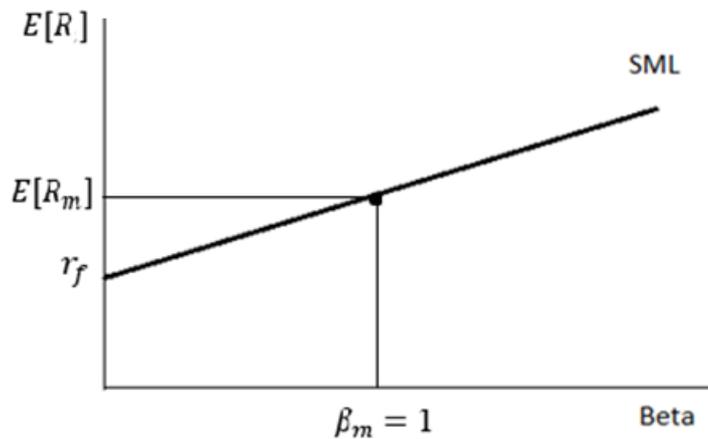
$$E[R_i] = r_f + \beta_i (E[R_m] - r_f) \quad (2.18)$$

e

$$\beta_i = \frac{COV(r_i, r_m)}{VAR(r_m)} \quad (2.19)$$

em que  $E[R_i]$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $r_f$  é o retorno do ativo livre de risco e  $E[R_m]$  é o valor esperado do retorno de uma carteira eficiente (no sentido definido por Markowitz, 1952, onde para um dado risco, não existe maior retorno possível) contendo todos os ativos de risco em proporções de equilíbrio (carteira de mercado).  $\beta_i$  pode ser interpretado como a quantidade de risco<sup>5</sup> do ativo  $i$ , enquanto  $(E[R_m] - r_f)$  representa o preço do risco. A multiplicação das duas medidas dá origem ao prêmio pelo risco do ativo. A figura (2.2), conhecida como *Security Market Line* (SML), apresenta o graficamente o CAPM:

**Figura 2.2:** A Security Market Line



Fonte: Elaborado com base em Sharpe (1964)

### 2.3. Extensões do CAPM

Praticamente todas as premissas teóricas do CAPM são violadas no mundo real, e sua validade empírica é questionável (testes empíricos do modelo serão discutidos mais a frente).

As principais premissas do modelo são apresentadas abaixo:

- Agentes são racionais e avessos ao risco;
- agentes mantêm posições diversificadas;
- agentes são tomadores de preços;
- agentes podem emprestar e tomar dinheiro emprestado a uma mesma taxa livre de risco;
- não existem custos de transação;

<sup>5</sup> O beta de um ativo representa seu risco sistêmico (em relação ao mercado), de forma que o risco total de um ativo é a soma dos riscos sistêmico e não sistêmico. O risco não sistêmico é aquele que é independente da economia e, de acordo com o modelo, pode ser eliminado via diversificação, de forma que apenas o risco sistêmico ofereça algum tipo de recompensa em termos de retorno esperado.

- todos os ativos são perfeitamente divisíveis;
- a carteira de mercado é eficiente em termos de média e variância
- agentes possuem expectativas homogêneas sobre as distribuições de retornos dos ativos;
- os ativos são disponibilizados em quantidades fixas;
- todos os ativos são negociáveis.

Este trabalho busca relaxar a premissa de eficiência em termos de média e variância para o mercado, em favor de uma eficiência em termos da medida Ômega, que leva a hipóteses menos restritivas na utilidade e nas distribuições de retornos. As condições suficientes para que o mercado seja eficiente em termos de média e variância serão discutidas na sessão 2.5. A seguir, serão apresentadas algumas das extensões mais conhecidas do CAPM.

### 2.3.1. O Modelo de Black

Black (1972) considerou a não existência de um ativo livre de risco, relaxando a premissa de que os investidores podem emprestar e tomar emprestado a uma mesma taxa, independente do estado da natureza. Levando em conta o portfólio de mercado, o modelo consiste em encontrar todas as carteiras que possuam correlação nula com o mesmo e, dentre essas, selecionar a carteira com a menor variância. Note que a carteira que possuir correlação nula com o mercado necessariamente apresentará *beta* igual a zero (condição idêntica à do ativo livre de risco teórico no CAPM original).

Uma vez conhecida a carteira com a menor variância entre todas as carteiras descorrelacionadas com o mercado, esta substituirá o ativo livre de risco no modelo original do CAPM. Black (1972) mostra que o retorno esperado de qualquer ativo será uma combinação linear dos retornos da carteira de *beta* nulo ( $R_z$ ) e dos retornos do mercado ( $R_m$ ). O retorno esperado de um ativo  $i$  será definido como:

$$E[R_i] = E[R_z] + \beta_i(E[R_i] - E[R_z]) \quad (2.20)$$

A equação acima é conhecida também como modelo de dois fatores (mercado e ativo de *beta* nulo) e evidencia que o CAPM pode existir mesmo na ausência de um ativo livre de risco.

Embora o modelo de Black (1972) tenha sido bem sucedido em relaxar o pressuposto da existência de um ativo livre de risco, Ross (1977) enfatiza que um outro pressuposto passou a ter um papel muito importante nesse modelo: o modelo de dois fatores só será válido se não

houver restrições à venda a descoberto<sup>6</sup>. No mundo real, como praticamente todos os ativos possuem correlação positiva entre si, seria impossível a construção de uma carteira de *beta* nulo se houvesse restrição à venda a descoberto.

### 2.3.2. O Modelo de Merton (ICAPM)

O *Inter-temporal Capital Asset Pricing Model*, defendido por Merton (1973), pode ser desenvolvido de duas formas. A primeira delas utiliza uma taxa livre de risco determinística e a segunda uma taxa livre de risco estocástica.

Na presença de uma taxa livre de risco determinística e levando em conta que os ativos são negociados no mercado em todos os períodos de tempo, o ICAPM tem exatamente a mesma representação do CAPM tradicional, que deve ser satisfeita em todos os períodos, independente das preferências e distribuição de riqueza dos indivíduos. Assim sendo, vale que:

$$E[R_i] = r_f + \beta_i(E[R_m] - r_f) \quad (2.21)$$

Importante ressaltar que os retornos esperados para o ICAPM, nesta versão, não abrangem todo o período de tempo e sim intervalos de tempo discretos, como se houvesse um modelo para cada período de tempo.

Já o modelo de Merton sob taxa livre de risco estocástica é conhecido como modelo de separação em três fundos. O primeiro deles é o ativo livre de risco, o segundo é a carteira de mercado (ambos comuns ao CAPM original) e o terceiro é um portfólio,  $N$ , que tenha uma correlação perfeita negativa com o ativo livre de risco. Assim, o terceiro fundo atua como *hedge* para variações não esperadas no ativo livre de risco. O retorno esperado para um ativo  $i$  será, então:

$$E[R_i] = r_f + \gamma_{i1}(E[R_m] - r_f) + \gamma_{i2}(E[R_N] - r_f) \quad (2.22)$$

onde

$$\gamma_{i1} = \frac{\beta_{im} - \beta_{iN}\beta_{Nm}}{1 - \rho_{Nm}^2}, \quad \gamma_{i2} = \frac{\beta_{iN} - \beta_{im}\beta_{Nm}}{1 - \rho_{Nm}^2}$$

e

---

<sup>6</sup> Vender a descoberto significa vender uma ação que o investidor ainda não tem, tomando-a emprestado de outro investidor, apostando na queda dos preços da mesma.

$\rho_{Nm}$  é o coeficiente de correlação entre o portfólio  $N$  e a carteira de mercado  $m$ .

$$\beta_{jk} = \frac{Cov(R_i, R_k)}{\sigma_k^2}$$

Encontrar e manter uma carteira com correlação negativa perfeita com o ativo livre de risco estocástico pode ser um problema no mundo real, pois a taxa livre de risco tem um comportamento de variável aleatória estocástica. No entanto, o modelo mostra que algum tipo de *hedge* seria desejável, e também possível, para que o investidor se protegesse de variações em  $r_f$ . No OCAPM, que será apresentado mais a frente, a taxa livre de risco pode manter um comportamento estocástico, além disso variações na mesma levam a variações nos *betas*, uma vez que o risco não é o mesmo quando é relacionado a uma taxa livre de risco maior (ou menor).

### 2.3.3. O Modelo de Lucas (CCAPM)

O *Consumption CAPM* de Lucas (1978) não relaxa premissas do CAPM tradicional, porém ele trata a precificação de ativos de uma forma diferente, onde o investidor, que também é consumidor, tem como objetivo maximizar a utilidade de toda sua vida, e não apenas de fim de período. Os ativos financeiros passam a ser utilizados para distribuir o consumo ao longo da vida do indivíduo de acordo com seu desejo por consumo em cada período de tempo, vendendo ativos em tempos ruins e comprando ativos em tempos bons. Ativos com baixa correlação com o consumo irão demandar um prêmio pelo risco menor do que aqueles ativos altamente correlacionados com o consumo, uma vez que os últimos serão de pouca utilidade em tempos ruins. O retorno exigido para um ativo  $i$  será, então:

$$E_t[R_{i,t+1}] = r_{f,t+1} - \frac{1}{E_t[u'(C_{t+1})]} Cov[u'(C_{t+1}), 1 + R_{i,t+1}] \quad (2.23)$$

O principal resultado observado a partir da equação do CCAPM é que, para quaisquer dois ativos  $i$  e  $j$ , seus retornos esperados irão diferir apenas se a covariância de seus respectivos retornos com a utilidade marginal do consumo for diferente. Por ser construído tomando como premissa um consumidor representativo, o modelo pressupõe expectativas homogêneas, de forma que todos os indivíduos exijam o mesmo retorno esperado para um mesmo ativo. O sinal negativo na equação indica que, para ativos com covariância elevada (baixa) com a utilidade marginal do consumo, um prêmio pelo risco menor (maior) é aceitável. Note que, graças à hipótese da utilidade marginal decrescente do consumo, uma covariância positiva (negativa) do

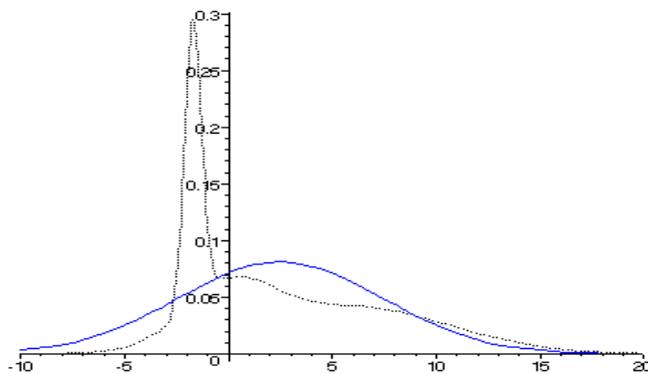
retorno de um ativo com a utilidade marginal do consumo leva a uma covariância negativa (positiva) do mesmo ativo com o consumo. Portanto, como dito anteriormente, ativos com correlação elevada com o consumo irão exigir um prêmio pelo risco maior do que aqueles ativos de correlação baixa com o consumo.

Qualquer que seja a forma utilizada para atingir o mercado eficiente em termos de média e variância no CAPM tradicional (utilidade quadrática, distribuições de dois fundos, distribuição normal, etc), as informações relevantes continuarão restritas apenas a estes momentos, ignorando os demais. A próxima sessão tem como o objetivo descrever a importância dos momentos superiores e porque estes não devem ser ignorados na precificação de ativos.

#### 2.4. A Importância dos Momentos Superiores

Em geral, as distribuições de séries financeiras possuem assimetria e curtose que diferem das que se encontram em distribuições normais, podendo resultar em problemas ao se utilizar apenas a média e a variância de um ativo para avaliar sua performance. Keating e Shadwick (2002) mostraram distribuições de probabilidade que possuem média e variância iguais, mas variam nos outros momentos. A figura (2.3) apresenta duas distribuições com mesma média, variância e curtose. Embora se trate de um caso extremo, as duas distribuições apresentariam o mesmo resultado quanto avaliadas sob a teoria fundamentada no modelo média-variância.

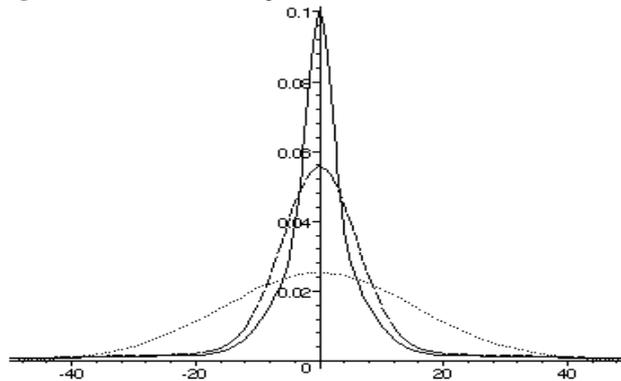
**Figura 2.3:** Duas distribuições com mesma média, variância e curtose



Fonte: Keating e Shadwick (2002)

Da mesma forma, a figura (2.4) apresenta três distribuições simétricas, com média e variância iguais, porém com os coeficientes de curtose variando entre elas. Novamente, o modelo média-variância falharia ao classificar estas distribuições de forma igual.

**Figura 2.4:** Distribuições simétricas, com a mesma média e variância



Fonte: Keating e Shadwick (2002)

Na tentativa de tornar o CAPM sensível aos momentos superiores, mas sem considerar a base teórica original, Kraus e Litzenberger (1976) estenderam empiricamente o modelo com o objetivo de incorporar a assimetria. A motivação dos autores partiu de resultados empíricos ruins do CAPM apresentados em diversas publicações, podendo uma das causas aventada para tal resultado ser a má especificação do mesmo ao não levar em conta a assimetria não diversificável dos ativos. Os testes empíricos da versão estendida do CAPM para incluir assimetria indicaram que os investidores tem aversão à variância e propensão à assimetria positiva. Fang e Lai (1997) inseriram também a curtose no modelo, chegando ao resultado de que investidores preferem a menor curtose possível. Tais extensões empíricas do CAPM, a despeito de carecerem de rigor teórico, são úteis ao evidenciar que os momentos superiores das distribuições dos retornos dos ativos são estatisticamente significativos para explicar o retorno esperado. O modelo de Fang e Lai (1977), que leva em conta assimetria e curtose, é similar à equação apresentada abaixo para uma taxa livre de risco igual a zero:

$$E[R_i] = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} E[R_m] + \frac{\sigma_{im^2}}{\sigma_m^3} E[R_m^2] + \frac{\sigma_{im^3}}{\sigma_m^4} E[R_m^3] \quad (2.24)$$

onde

$$\sigma_m^3 = E[(R_m - E[R_m])^3]$$

$$\sigma_m^4 = E[(R_m - E[R_m])^4]$$

$$\sigma_{i,m^2} = E[(R_i - E[R_i])(R_m - E[R_m])^2]$$

$$\sigma_{i,m^3} = E[(R_i - E[R_i])(R_m - E[R_m])^3]$$

Ainda no campo dos momentos superiores, Athayde e Flores (2003) apresentam uma nova fronteira eficiente multidimensional que incorpora assimetria e utiliza a curtose no lugar da variância. Os autores argumentam que, apesar das duas medidas refletirem dispersão, a curtose é mais indicada para variações extremas do que a variância. Embora essa nova fronteira conte com alto rigor teórico, ela torna o problema muito mais complexo do que aquele apresentado por Markowitz (1952), uma vez que novas dimensões de tratamento algébrico mais complexo são incorporadas. Além disso, assumir que indivíduos observam a curtose na tomada de decisão já é algo questionável *per se*.

## 2.5. O CAPM, a Função Utilidade Quadrática e a Distribuição Normal

A discussão das condições necessárias e suficientes para o CAPM vai muito além de assumir distribuição normal para os retornos e função utilidade quadrática para os investidores. Na verdade, qualquer uma das duas condições citadas são suficientes, mas nenhuma delas é necessária se outras restrições nas primitivas (utilidade e distribuição) puderem ser assumidas.

A função utilidade quadrática é, por si só, suficiente para se demonstrar o CAPM, uma vez que tal função permite uma utilidade indireta em termos de média e variância apenas. Sendo assim, sob função utilidade quadrática, a distribuição dos retornos não é relevante para que o CAPM seja derivado, pois o próprio comportamento dos investidores fará com que eles ignorem os momentos superiores das distribuições de retorno, e uma carteira de mercado eficiente em média e variância poderá ser obtida. No entanto, a utilidade quadrática é inadequada quando a teoria de Arrow (1971) é levada em conta, pois representa indivíduos com aversão ao risco relativa crescente, ou seja, quanto maior a riqueza de um indivíduo, menor é sua preferência por ativos de risco, o que tornaria tais ativos bens inferiores.

A distribuição normal também é uma condição suficiente para se demonstrar o CAPM, pois os únicos parâmetros necessários para descrevê-la completamente são a média e a variância. Assim, mesmo que a função utilidade não seja quadrática, indivíduos não saciáveis e avessos ao risco seriam suficientes para se obter uma carteira de mercado eficiente em média e variância, uma vez que outros momentos das distribuições de retornos dos ativos não seriam relevantes.

É importante ressaltar que a distribuição normal não é a única suficiente para derivar o CAPM. Tobin (1958) acreditava que qualquer distribuição descrita por dois parâmetros seria suficiente; no entanto, Feldstein (1969) apresentou o contra exemplo da log-normal, que pode ser descrita em dois parâmetros mas não permite a derivação do CAPM em sua versão mais simples de apenas um período. Ross (1978) apresentou resultados mais conclusivos de que o CAPM poderia ser obtido a partir de qualquer distribuição de dois fundos, que receberam esse nome devido ao teorema da separação em dois fundos, que é um dos resultados do CAPM. As distribuições de dois fundos são aquelas sob as quais, para um número grande de ativos, os investidores são induzidos a dividir sua riqueza entre dois portfólios apenas. Do ponto de vista da utilidade, Berk (1997) mostrou que restrições em distribuições são equivalentes a restringir a função utilidade a uma forma que considere apenas média e variância. O autor mostra também que qualquer utilidade polinomial, quando combinada com restrições nos momentos superiores ao segundo momento também leva ao mercado eficiente em média variância.

Embora a normalidade dos retornos e a utilidade quadrática não sejam necessárias em conjunto, caso as duas hipóteses sejam assumidas em conjunto, o modelo média-variância passa a ser ótimo, pois o comportamento dos investidores estará levando em conta todas as informações relevantes das distribuições dos retornos.

Para que seja possível demonstrar o CAPM, uma condição necessária e suficiente seria um mercado eficiente em termos de média e variância. No entanto, esta condição não responde exatamente o que deve ser assumido quanto às hipóteses primitivas do modelo, como utilidade quadrática e distribuição normal dos retornos (BERK, 1997).

O OCAPM, proposto neste trabalho, por seu turno, prescinde da discussão das condições necessárias apresentada nessa sessão, quer seja sobre as preferências dos investidores, quer seja sobre distribuições de retornos, uma vez que pode ser derivado sob qualquer distribuição (ativos podem ter distribuições diferentes entre si), além de não haver necessidade de impor funções utilidade para os investidores. Estes são apenas avessos ao risco e não saciáveis.

## **2.6. Testes Empíricos do CAPM**

Outra linha de pesquisa relacionada ao CAPM diz respeito a quão bem o modelo se ajusta à realidade (testes empíricos). Seria o *beta* suficiente para explicar os retornos esperados dos ativos? É correto assumir que exista uma única taxa livre de risco? Os retornos esperados

podem mesmo ser explicados de forma linear pelo *beta*? Tais questões incitaram um grande número de trabalhos empíricos realizados para verificar se o CAPM é capaz de se ajustar os dados.

O CAPM na forma em que foi originalmente apresentado, *ex ante*, não pode ser testado, pois os retornos esperados não são observáveis. No entanto, ao assumir que os retornos de qualquer ativo são, na média, iguais ao retorno esperado do mesmo, ou seja, que o mercado é um *fair game*, é possível construir uma forma *ex post* do CAPM permitindo que o modelo seja testado. Em um ponto de vista estatístico, o *fair game* significa que, para uma amostra aleatória<sup>7</sup> de tamanho  $t$  dos retornos de um ativo  $j$ , o retorno médio converge em probabilidade para o retorno esperado:

$$Plim \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_{ij} = E[R_j] \quad (2.25)$$

A equação *ex post* do CAPM será então:

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_{ij} - r_f = \delta_o + \delta_1 \beta_j + \varepsilon_{jt} \quad (2.26)$$

em que  $\delta_o$  representa o intercepto da equação e  $\delta_1 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_{im} - r_f$  é o preço do risco.

O intercepto,  $\delta_o$ , deve ser estatisticamente igual a zero, caso contrário existirá algum retorno em excesso ao previsto pelo CAPM, ou uma má especificação da taxa livre de risco. É possível também estimar a taxa livre de risco ao excluir o termo  $\delta_o$ , mantendo apenas os retornos médios do lado esquerdo da equação (2.28). O *beta* deve ser o único fator significativo que explica os retornos médios e qualquer outra variável incluída no modelo em adição ao *beta* deve ser não significativa. O coeficiente  $\delta_1$  estimado deve estar de acordo com o preço único do risco.

Tratando de alguns resultados empíricos do CAPM apresentados na literatura, Black, Jensen e Scholes (1972), Fama e Macbeth (1973) e Friend e Blume (1970; 1973) verificaram que o *beta* possuía uma relação linear com os retornos esperados dos ativos em períodos anteriores a 1969. No entanto, Reinganum (1981), Lakonishok e Shapiro (1986), Fama e French (1992a) mostram que tal relação desapareceu em um período posterior. Fama e French (2006) analisam o período de 1924 à 2004. Eles mostram que apesar do CAPM ter obtido bons resultados em um período anterior a 1963, tais resultados são mascarados pelo tamanho das

---

<sup>7</sup> Uma amostra aleatória de retornos de um ativo no tempo só é possível se não houver qualquer dependência temporal entre os retornos. O retorno de ontem não tem influência no retorno de hoje.

firmas, uma vez que variações no *beta* não correlacionadas com o tamanho das firmas não possuem nenhum prêmio em termos de retorno esperado.

A incapacidade do *beta* em explicar os retornos esperados levou vários autores a testarem outras variáveis para solucionar o problema. O resultado foi um grande número de modelos de múltiplos fatores. No entanto, estes modelos se baseiam apenas em resultados empíricos, sem o rigor teórico do CAPM. Basu (1977; 1983) e Litzenberger e Ramaswamy (1979) mostraram, respectivamente, que a razão preço-lucro e os dividendos explicam os retornos esperados dos ativos. Banz (1981) verificou que o tamanho da empresa (produto do preço e da quantidade de ações) também é relevante; o autor mostra que empresas menores tendem a ter retornos esperados maiores. Complementar ao trabalho de Banz (1981), Stattman (1980) e Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) verificaram que os retornos esperados são relacionados ao valor contábil (*book-value*) das empresas. Chan, Hamao e Lakonishok (1991) utilizaram a razão entre o valor contábil e a medida de tamanho de Banz (1981) e mostraram que esta variável (*book-to-market* ou BE/ME) também é relevante. Keim (1983; 1985) mostrou que existe sazonalidade nos retornos dos ativos. A liquidez também é um fator relevante na tomada de decisão dos investidores, como mostrado por Liu (2006). Fama e French (1992a) fazem um grande número de testes com todas as variáveis citadas acima; os autores concluem que o tamanho (ME) e o *book-to-market* (BE/ME) são suficientes para explicar os retornos esperados, e as informações das demais variáveis estão divididas entre estas duas. Além disso, foi mostrado que variações do *beta*, que não dependem do tamanho, não são relevantes para explicar os retornos esperados. Entretanto, a modelagem proposta por Fama e French (1992a) não trata o tamanho e o *beta* de forma igual, ela permite uma variação maior para o tamanho, o que pode acabar favorecendo esta variável.

Fama e French (1993; 1996) utilizam um modelo de cinco fatores, sendo três para ações e dois para títulos de dívida. Os autores definem o mal comportamento dos retornos esperados em relação ao CAPM como anomalias e mostram que elas chegam perto de desaparecer em um modelo de três fatores para ações, sendo eles o excesso de retorno do mercado, uma variável que separa empresas grandes de empresas pequenas e outra que separa empresas com um BE/ME elevado daquelas com um BE/ME baixo. Uma revisão teórica que conta a história do CAPM e de outros modelos para retornos esperados pode ser vista em Fama e French (2004).

Os trabalhos citados acima mostram que, apesar do CAPM ter sido construído com rigor teórico e micro fundamentos consistentes, diferente dos modelos empíricos de múltiplos fatores, seus resultados empíricos ficaram aquém do esperado. O *beta* como fator único não é suficiente

para explicar os retornos esperados e, em vários casos, seu poder de explicação chega a ser nulo. A próxima sessão apresenta um modelo, conhecido como *Arbitrage Pricing Theory*, que possui rigor teórico semelhante ao CAPM e resultados empíricos menos criticados. No entanto, sua aplicação é mais complexa e seus resultados são de difícil entendimento, pois se trata de um modelo de vários fatores, em que a interpretação econômica dos mesmos não é clara.

### 3. ARBITRAGE PRICING THEORY

Embora o foco deste trabalho seja flexibilizar as premissas restritivas do CAPM, quando o tema principal é precificação de ativos, o modelo conhecido como *Arbitrage Pricing Theory* (APT), de Ross (1976), deve ser levado em conta como principal concorrente do CAPM.

O APT pode ser visto como uma forma mais robusta do CAPM, já que os pressupostos com relação à utilidade dos indivíduos são relaxados para não saciedade e aversão ao risco apenas. Também não há hipóteses sobre a distribuição dos retornos e a carteira de ativos de risco utilizada pode ser qualquer subconjunto da carteira de mercado utilizada no CAPM.

Partindo do pressuposto de mercado competitivo e sem fricção e levando em conta que os indivíduos acreditam, de forma homogênea, que um conjunto de ativos  $A$  seja governado por um modelo de  $k$  fatores, então:

$$\begin{aligned} r_i &= E[R_i] + b_{i1}\delta_1 + \dots + b_{ik}\delta_k + \epsilon_i \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que  $E[R_i]$  é o retorno esperado do  $i$ -ésimo ativo,  $\delta_j$  é o  $j$ -ésimo fator, de média zero, comum a todos os ativos considerados. Os fatores comuns captam o risco sistêmico dos ativos. Os termos  $b_{ij}$  mostram a sensibilidade do ativo  $i$  a movimentos no fator comum  $j$  e, por último,  $\epsilon_i$  é um termo de erro que representa o risco não sistêmico dos ativos, tal que  $E[\epsilon_i | \delta_j] = 0$ <sup>8</sup>.

A principal ideia por trás do modelo APT advém do fato de que os retornos dos ativos são uma combinação linear dos  $k$  fatores comuns e do ativo livre de risco, que é uma constante; se o termo  $\epsilon_i$  fosse omitido, então essa combinação linear se tornaria exata. Neste caso, é possível expressar o ativo livre de risco e os  $k$  fatores como uma combinação linear de  $k+1$

---

<sup>8</sup> O risco não sistêmico é independente dos fatores de risco sistêmico e não há variáveis omitidas, de forma que qualquer outra variável adicionada ao modelo não deve ter nenhum poder de explicação.

outros retornos do conjunto  $A$  de ativos. Como qualquer outro retorno da carteira  $A$  é uma combinação linear dos  $k$  fatores, então esses retornos devem também ser uma combinação linear dos  $k+1$  retornos. Essa análise mostra que portfólios com os  $k+1$  ativos são substitutos perfeitos de todos os outros ativos da carteira  $A$ ; conseqüentemente, devem ter o mesmo preço. Essa é a ideia central subjacente ao APT: como existem poucos componentes de risco sistêmico, então muitos portfólios são substitutos próximos e devem ter valor semelhante.

Para prosseguir no desenvolvimento do APT, considere um indivíduo que mantém um portfólio de ativos e está pensando em alterar sua composição. O novo portfólio irá diferir do antigo em proporções de investimento  $x_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) que é a quantidade monetária comprada ou vendida do ativo  $i$  como fração de toda a renda investida. A soma das proporções  $x_i$  é:

$$\sum_i x_i = 0 \quad (3.2)$$

Portanto, a renda investida é igual nos dois portfólios e, para comprar mais de um ativo, é preciso vender de algum outro. Portfólios que não utilizam renda, como descrito acima, e apresentam risco nulo, devem, em equilíbrio, ter retorno nulo na média. Estes portfólios são chamados portfólios de arbitragem. Seja o vetor  $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$  um portfólio de arbitragem, então o retorno adicional obtido pela alteração dos portfólios será:

$$\begin{aligned} xR &\equiv \sum_i x_i r_i \\ &= (\sum_i x_i E[R_i]) + (\sum_i x_i b_{i1})\delta_1 + \dots + (\sum_i x_i b_{ik})\delta_k + \sum_i x_i \epsilon_i \\ &= xE[R] + (xb_1)\delta_1 + \dots + (xb_k)\delta_k + x\epsilon_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Seja  $x_i = \frac{1}{n}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , e seja o portfólio  $x$  bem diversificado e sem risco sistêmico de forma que:

$$xb_j \equiv \sum_i x_i b_{ij} = 0 \quad (3.4)$$

O retorno do portfólio  $x$  será, então,  $xR = xE[R]$ . O termo  $x\epsilon$  é eliminado via diversificação<sup>9</sup>. Portanto, é possível escolher um portfólio de arbitragem livre de risco sistêmico e de risco não sistêmico. Se o indivíduo estiver satisfeito com seu portfólio e este for um

---

<sup>9</sup> O termo  $x\epsilon$  é eliminado pelo simples fato de haver diversificação. Seja  $\sigma^2$  a variância não condicional dos termos  $\epsilon_i$ . Por simplicidade, assumamos que cada  $x_i$  é exatamente igual a  $\pm \frac{1}{n}$ , então:

$$Var(x\epsilon) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_i \epsilon_i\right) = \frac{1}{n^2}Var(\epsilon_i) = \frac{\sigma^2}{n^2}$$

Diversificar significa ter um  $n$  elevado; quando  $n$  tende a infinito  $Var(x\epsilon)$  tende a zero, eliminando o risco não sistêmico.

portfólio de equilíbrio, então  $xE[R] = 0$ . Nenhum portfólio é um portfólio de equilíbrio se for possível obter retorno adicional sem aumentar o risco.

Todo portfólio de equilíbrio construído da forma acima, satisfazendo as condições de não utilizar nenhuma renda e não ter risco, deve ter retornos nulos na média.

Da equação (3.2) obtém-se que o vetor  $x$  é ortogonal ao vetor constante e a equação (3.4) mostra que  $x$  é também ortogonal a cada vetor  $b_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Uma consequência da álgebra linear diz que, se as ortogonalidades acima são válidas, então o vetor  $x$  deve ser ortogonal também ao vetor de retornos esperados,  $E[R]$ . Um outra consequência da álgebra linear garante que  $E[R]$  deve ser uma combinação linear do vetor constante e dos vetores  $b_j$ . Formalmente, existem  $k+1$  pesos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  tal que:

$$E[R_i] = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \dots + \lambda_k b_{ik} \quad (3.5)$$

Se houver um ativo livre de risco, então seu retorno será dado por  $\lambda_0$ , todos os ativos com  $b_j = 0$  devem ter  $E[R_i] = \lambda_0$ . Uma possível interpretação para  $\lambda_j$  é a de prêmio pelo fator de risco sistêmico:  $\lambda_0 = E[\delta_j] - r_f$ , onde  $r_f$  representa o retorno do ativo livre de risco. Uma demonstração mais detalhada do modelo APT pode ser encontrada em Ross (1976), Roll e Ross (1980) e Copeland e Weston (1992).

A pouca importância da carteira de mercado é um fato relevante do APT. O modelo é derivado usando um conjunto  $A$ , que é um subconjunto do universo de ativos disponíveis, e não há pressuposições sobre a construção do conjunto  $A$ . No CAPM, é preciso que todos os ativos da economia sejam utilizados na composição da carteira de mercado. Portanto, o APT pode ser testado utilizando apenas um subconjunto de ativos. Roll e Ross (1980) apontam que, apesar de o CAPM ser bastante utilizado, intuitivamente as pessoas estão pensando no APT com apenas um fator de risco sistêmico. Tal raciocínio pode ser equivocado, entretanto, uma vez que nada garante a unicidade do fator utilizado, ou seja, pode haver outros fatores que explicam os retornos esperados e que estão omitidos no termo de erro.

Tanto o CAPM quanto o APT permitem a comparação de um ativo com uma carteira; em outras palavras, respondem quanto de risco um ativo traz para o conjunto e, portanto, quanto deveria render em termos de retorno para compensar esse risco adicional (o que se convencionou denominar ‘retorno justo’ ou ‘retorno ajustado ao risco relevante’).

Empiricamente, o APT obtém resultados melhores que o CAPM. Roll e Ross (1980), Reiganum (1981a) e Chen (1983) utilizam um mesmo procedimento empírico, que consiste na utilização da ferramenta estatística da análise fatorial, para testar o modelo. Apesar dos autores mostrarem quantos fatores são necessários para explicar o retorno esperado, não conseguem dizer, com certeza, o significado destes fatores.

Bower, Bower e Logue (1984) fazem uma comparação do CAPM contra o APT e mostram que o APT explica melhor os retornos esperados, pelo menos no caso de ações, do que o fator único de risco do CAPM.

Shanken (1985) trata de uma afirmação feita por Roll e Ross (1980) de que “as pessoas utilizam o CAPM mas intuitivamente estão pensando em um APT com um único fator”. Shanken discute, então, o que seria o APT e o que seria um CAPM com vários fatores, além de argumentar que até então, não havia trabalhos empíricos que refutassem o APT<sup>10</sup>.

#### 4. MEDIDAS DE RISCO COERENTES

Artzner *et. al.* (1999) definem as propriedades necessárias para que uma medida de risco seja considerada coerente. Formalmente, sejam  $R_i$  e  $R_j$  os retornos (variável aleatória) dos ativos (carteiras)  $i$  e  $j$ , e seja  $k$  uma constante, então  $\rho$  será uma medida de risco coerente se satisfizer os seguintes axiomas:

- a) Alocação:  $\rho(R_i + k) = \rho(R_i) - k, \forall k > 0$ .
- b) Subaditividade:  $\rho(R_i + R_j) \leq \rho(R_i) + \rho(R_j)$ .
- c) Homogeneidade de grau 1:  $\rho(kR_i) = k\rho(R_i)$ .
- d) Monotonicidade: Se para todo  $R_i$  e  $R_j$  tem-se  $R_i < R_j$  então  $\rho(R_i) > \rho(R_j)$

Uma medida de risco coerente deve diminuir quando é adicionada renda fixa à carteira (alocação); o risco da carteira deve ser menor ou igual ao risco dos ativos que a compõem separadamente (subaditividade); ao duplicar a posição em uma carteira, o risco também é duplicado (homogeneidade de grau 1) e, se os retornos de um ativo são sempre maiores que os retornos de um outro ativo, em qualquer estado da natureza, então o primeiro tem menor risco (monotonicidade).

---

<sup>10</sup> Não é de conhecimento dos autores nenhum trabalho que refute completamente o APT até hoje.

Além disso, não é interessante considerar ‘ganhos acima da média’ como risco, ou seja, é razoável assumir que os investidores avessos ao risco dão mais peso para as partes das distribuições de retornos abaixo da média. O risco abaixo da média é conhecido na literatura como *downside risk*; o risco acima da média será, então, o *upside risk*.

O *Expected Shortfall (ES)*, utilizado na versão do CAPM derivada neste trabalho, é uma medida de risco que respeita todos os axiomas da coerência (ARCEBI e TASCHE, 2002), além de considerar apenas a distribuição das perdas como risco. Seja  $X$  uma variável aleatória<sup>11</sup> que representa os retornos de um ativo (carteira) e seja  $L$  o retorno limiar, de forma que, se  $x < L$  o investidor estará na região de perdas da distribuição dos retornos e se  $x > L$  o investidos estará na região de ganhos da distribuição dos retornos. O *Expected Shortfall* do ativo é definido como:

$$ES(L) = \int_{-\infty}^L (L - x) f_X(x) dx = E[\max(L - X; 0)] \quad (4.1)$$

onde  $ES(L)$  é o *Expected Shortfall* do ativo  $X$  levando em conta o limiar  $L$  e  $f_X(\cdot)$  é função densidade de probabilidade dos retornos do ativo  $X$ .

Embora o  $ES$  seja uma medida de risco pouco familiar, sua interpretação é bem simples: ele representa o valor esperado da perda, caso o investidor venha realmente a perder (estar na região de perda da distribuição dos retornos).

## 5. A MEDIDA ÔMEGA

Com o objetivo de relaxar o pressuposto da eficiência de mercado em termos de média e variância do CAPM em favor de um outro pressuposto menos restritivo, será feito uso dos conceitos teóricos da medida de performance Ômega, proposta originalmente por Keating e Shadwick (2002). Esta medida tem a vantagem de não fazer qualquer tipo de pressuposição quanto às distribuições dos retornos de ativos, assim como colocar o problema da escolha sob incerteza em um plano bidimensional, como feito no modelo média-variância de Markowitz (1952).

---

<sup>11</sup> A variável aleatória  $X$  representa a distribuição dos retornos de um ativo, da mesma forma que na definição das medidas de risco coerentes. Tal variável foi chamada de  $X$ , ao invés de  $R_i$ , afim de manter as expressões matemáticas de uma forma simples para o leitor.

A vantagem da medida  $\hat{\Omega}$  advém do fato de toda a informação da distribuição de retornos ser considerada, ou seja, todos os momentos superiores são levados em conta em conjunto sem a necessidade de calculá-los. Funções utilidade também não são necessárias, é preciso assumir apenas que os indivíduos são avessos ao risco e não saciáveis. Além disso, as características de risco e recompensa podem ser descritas em torno de qualquer nível de retorno e não apenas da média.

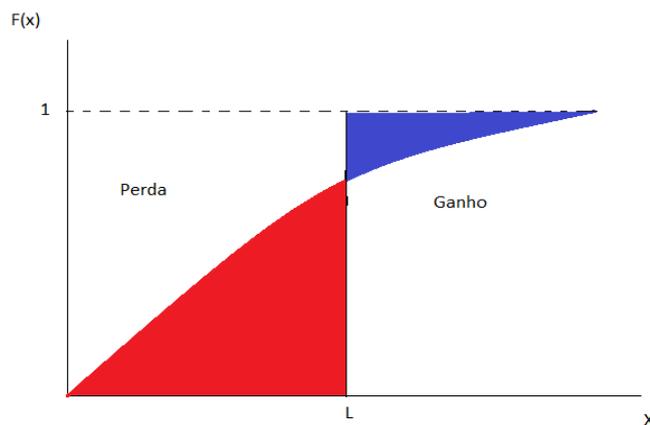
Para definir a medida  $\hat{\Omega}$ , em primeiro lugar é preciso definir um ponto de retorno mínimo<sup>12</sup>  $L$ , exógeno e definido pelo investidor. Um investidor estará na região de ganhos da distribuição de retornos se  $x > L$ ; se  $x < L$ , o investidor estará na região de perdas.

Seja  $X$  uma variável aleatória (distribuição de retornos) que assume valores  $a \leq X \leq b$ , a medida de performance  $\hat{\Omega}$  é definida como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F_X(x)] dx}{\int_a^L F_X(x) dx} \quad (5.1)$$

em que  $F_X(x)$  é a função de distribuição acumulada dos retornos de um portfólio ou ativo  $X$ . A medida  $\hat{\Omega}$  é a razão entre a área de ganhos e a área de perdas da distribuição acumulada de retornos. A figura (5.1) permite uma visualização gráfica da medida  $\hat{\Omega}$ , sendo a área em azul a região de ganhos e a área em vermelho a região de perdas.

**Figura 5.1:** Medida  $\hat{\Omega}$



Fonte: Elaboração própria com base em Keating e Shadwick (2002).

Kazemi *et al.* (2004) mostraram que era possível uma representação alternativa da medida  $\hat{\Omega}$ . Definindo *Expected Chance* (EC) como o valor esperado do excesso de ganho

<sup>12</sup> O retorno  $L$  da medida  $\hat{\Omega}$  é o mesmo definido no caso do *Expected Shortfall*.

$(x - L)$  condicional a resultados positivos e *Expected Shortfall* (ES) como o valor esperado da perda  $(L - x)$  condicional a resultados negativos, então:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b (x-L)f_X(x)dx}{\int_a^L (L-x)f_X(x)dx} = \frac{EC(L)}{ES(L)} = \frac{E[\text{Max}(X-L;0)]}{E[\text{Max}(L-X;0)]} \quad (5.2)$$

Note que a medida  $\hat{\Omega}$  é uma característica natural da distribuição de retornos, de fato, ela é a própria distribuição. Assim, sua construção a partir das distribuições de retornos não requer nenhuma informação que não esteja presente nos próprio ativos, ou seja, não existe necessidade de introduzir funções utilidade.

Em um ponto de vista empírico, ainda existem poucos trabalhos sobre a medida  $\hat{\Omega}$ . Castro (2008) realizou otimizações de carteiras de ativos financeiros e ativos reais usando tal medida, argumentando que a mesma se ajusta melhor a retornos não normais. Além de comparar a medida  $\hat{\Omega}$  com a otimização de carteiras via enfoque de Markowitz (1952), o autor faz uso de simulações de Monte Carlo com o objetivo de construir distribuições de VPL (Valor Presente Líquido) para construir carteiras ótimas de projetos fazendo uso de  $\hat{\Omega}$ .

Favre-Bulle e Pasche (2003) e Passow (2004) comparam portfólio construídos via medida  $\hat{\Omega}$  com portfólios construídos via razão de Sharpe, apontando a superioridade dos primeiros. Bertrand e Prigent (2011) utilizam a medida  $\hat{\Omega}$  no mercado de seguros, mais especificamente para comparar duas estratégias, já assumindo a superioridade da medida em relação às outras disponíveis. Gomes, Brandão e Pinto (2010) utilizaram a medida para obter carteiras ótimas em uma empresa do setor elétrico brasileiro. Dentre vários tipos de operações de compra e venda de energia elétrica, o montante destinado a cada operação foi obtido via maximização da medida  $\hat{\Omega}$ .

Observe que a medida  $\hat{\Omega}$  utiliza o *Expected Shortfall* como medida de risco, respeitando todos os axiomas das medidas coerentes de risco e considerando como risco apenas a parte referente às perdas da distribuição dos retornos dos ativos.

De modo a justificar a escolha da medida  $\hat{\Omega}$  para a seleção de ativos de risco, é importante levar em conta a seguinte questão: será que no mundo real, os agentes levam em consideração os momentos superiores das distribuições de retorno para tomar suas decisões de investimento? A resposta mais provável a essa pergunta é não. Entretanto, é razoável acreditar que, no mundo real, agentes não-saciáveis desejem o maior ganho possível ao investir, ao mesmo tempo que exigem um prêmio pelo risco da perda. Essa intuição está presente nos

modelos financeiros desde Markowitz (1952), que tentou considerar as dimensões recompensa e risco ao maximizar a razão entre a média (recompensa) e a variância (risco). A medida  $\hat{\Omega}$  faz uso da mesma ideia, porém com medidas diferentes daquelas utilizadas por Markowitz (1952). Embora matematicamente, o *Expected Shortfall* e o *Expected Chance* possam parecer mais complexos do que a variância e a média, eles são medidas mais razoáveis para explicar como as pessoas realmente se comportam, uma vez que, o *ES* representa quanto um agente perderá em média, caso haja perda, e o *EC* representa quanto um agente ganhará em média, dado que houve ganho. Mais importante: o modelo não exige nenhuma distribuição *a priori* para os retornos dos ativos ou limita a decisão a qualquer função utilidade do agente (os únicos comportamentos esperados do agente são não-saciedade e aversão a risco).

O  $\hat{\Omega}$  CAPM (OCAPM), que será derivado mais a frente, parte do pressuposto de que, na realidade, as pessoas levam em conta o *Expected Chance* e o *Expected Shortfall* na tomada de decisões mais do que levariam a média e a variância. Em uma loteria, por exemplo, é mais interessante saber o tamanho do ganho e o tamanho da perda, do que sua média e variância para decidir apostar.

Isso posto, é importante ressaltar que o OCAPM não assume que as pessoas observam (ou consideram) diretamente a assimetria e a curtose das distribuições de retornos dos ativos para tomar suas decisões; todas as informações de momentos superiores são levados em conta de forma indireta, via medida  $\hat{\Omega}$ .

## **6. A PROPOSIÇÃO DO OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL (OCAPM)**

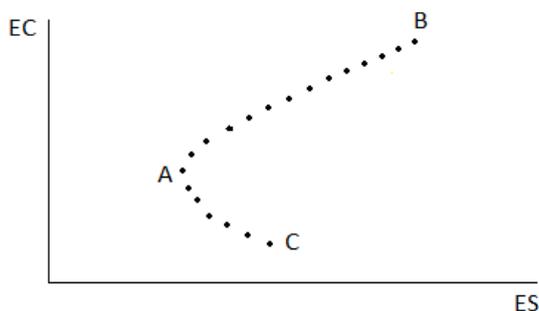
Tendo definido as medidas  $\hat{\Omega}$ , EC e ES, a proposta deste trabalho é construir um modelo de precificação de ativos a partir dessas medidas e com rigor teórico similar ao do CAPM original, flexibilizando, entretanto, a premissa de que o mercado é eficiente em termos de média variância.

### 6.1. A Fronteira Eficiente Ômega

Em primeiro lugar, é preciso construir uma fronteira eficiente no sentido de Markowitz (1952), porém no plano  $EC \times ES$ . A fronteira eficiente ômega mostra os portfólios onde, para um dado *Expected Shortfall*, nenhuma outra oportunidade de investimento ofereça um *Expected Chance* maior. Em outras palavras, todos os portfólios disponíveis no mercado são dominados pela fronteira eficiente (neste caso, eficiente no sentido da medida Ômega).

A figura 6.1 apresenta um exemplo visual de uma fronteira eficiente. O ponto A representa o menor *Expected Shortfall* factível, entre todos os portfólios disponíveis no mercado. Note que investidores avessos ao risco e não saciáveis nunca escolherão pontos abaixo do ponto A, pois sempre será possível obter um nível mais elevado de *Expected Chance*, sem alterar o *Expected Shortfall*. O conjunto de portfólios obtido via medida Ômega tecnologicamente factível será composto por todos os portfólios existentes entre os pontos AB da fronteira eficiente Ômega.

**Figura 6.1:** Fronteira Eficiente Ômega



Fonte: Elaboração Própria

Considerando que os agentes são avessos ao risco e preferem sempre mais a menos<sup>13</sup>, o conjunto ômega eficiente tecnologicamente factível é obtido por meio de simples programação matemática:

$$\text{Max } EC(L) \quad \text{s. a. } ES(L) = k_1 \quad (6.1)$$

$$\text{Min } ES(L) \quad \text{s. a. } EC(L) = k_2 \quad (6.2)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes. As duas programações acima são equivalentes para a verificação da parte factível da fronteira eficiente. Portanto, o procedimento é maximizar

<sup>13</sup> Preferir mais a menos, neste caso, significa preferir níveis superiores de *Expected Chance* e níveis inferiores de *Expected Shortfall*. Para um  $L$  fixo, elevar  $EC(L)$  e reduzir  $ES(L)$  refletem em aumento do retorno esperado e das probabilidades de obter retornos mais elevados.

(minimizar) o EC (ES), de forma que ES (EC) seja igual a uma constante. A fronteira eficiente representa vários pontos de equilíbrio (todos ótimos).

Um investidor não saciável escolherá um portfólio  $P$ , contido na fronteira eficiente, de acordo com sua aversão ao risco. Em outras palavras, para um dado ES capaz de ser suportado por um investidor qualquer, ele escolherá o ponto que possua o maior EC.

## 6.2. A Capital Markets Line (CML) Ômega

A partir deste ponto, o retorno limite  $L$ , escolhido pelo investidor representativo, será tratado como um custo de oportunidade desse investidor. Tal interpretação é coerente com o conceito inicial de Keating e Shadwick (2002), uma vez que, segundo esses autores, retornos menores que  $L$  são considerados como perda, enquanto retornos maiores que  $L$  serão tratados como ganhos. Se  $L$  é o retorno mínimo para que o investidor entre no mercado, vale a interpretação tradicional de custo de oportunidade, em que só haverá lucro econômico caso existam ganhos superiores a este custo.

Se o custo de oportunidade do investidor representativo é  $L$ , então se pressupõe que exista alguma forma deste investidor ter um retorno certo que seja exatamente  $L$ . Os valores de EC e ES desta oportunidade que rende  $L$  serão<sup>14</sup>:

$$EC_L = E[\text{Max}(X - L; 0)] = 0 \quad (6.3)$$

$$ES_L = E[\text{Max}(L - X; 0)] = 0 \quad (6.4)$$

As esperanças acima são sempre iguais a zero, pois o único valor que  $x$  assume é  $L$ , ou seja, para qualquer  $L$ , o excesso de ganho ou perda em relação ao mesmo é nulo. Para construir a CML Ômega, compatível com a CML original, é preciso supor um portfólio que seja composto do ativo livre de risco (ou que renda o custo de oportunidade do investidor) e de uma carteira da fronteira eficiente Ômega, que será tratada como carteira de mercado. Seja  $\alpha > 0$  a proporção da renda investida na carteira de mercado,  $m$ , então:

---

<sup>14</sup> Para tornas as expressões matemáticas mais simples, a partir deste ponto será omitido o  $L$  do qual EC e ES são funções. Como serão utilizadas expressões de EC e ES para vários ativos (portfólios), a notação utilizada passará a conter um subscrito referenciando o ativo (portfólio) tratado. Para um portfólio  $p$ :  $EC_p$  e  $ES_p$

$$EC_p = E[\text{Max}\{\alpha R_m + (1 - \alpha)L - L; 0\}] \quad (6.5)$$

$$ES_p = E[\text{Max}\{L - \alpha R_m - (1 - \alpha)L; 0\}] \quad (6.6)$$

A função  $\text{Max}\{.\}$  pode ser definida como: sejam  $\{X, Y\} \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Max}\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}$  (TRYBULEC e BYLINSKI 1989). Transformando as equações (6.5) e (6.6) encontra-se<sup>15</sup>:

$$EC_p = E\left[\frac{\alpha R_m - \alpha L + |\alpha R_m - \alpha L|}{2}\right] = E\left[\frac{\alpha(R_m - L) + |\alpha||R_m - L|}{2}\right] = \alpha EC_m \quad (6.7)$$

$$ES_p = E\left[\frac{\alpha L - \alpha R_m + |\alpha L - \alpha R_m|}{2}\right] = E\left[\frac{\alpha(L - R_m) + |\alpha||L - R_m|}{2}\right] = \alpha ES_m \quad (6.8)$$

Note que só foi possível retirar  $\alpha$  da esperança porque  $\alpha$  assume apenas valores positivos<sup>16</sup>. Ao diferenciar  $EC_p$  e  $ES_p$  com relação a  $\alpha$  e calcular a razão entre os dois resultados, é possível encontrar a inclinação da CML Ômega no plano  $EC \times ES$ .

$$\frac{\partial EC_p}{\partial \alpha} = EC_m \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial ES_p}{\partial \alpha} = ES_m \quad (6.10)$$

A inclinação da CML Ômega será, então,  $\frac{EC_m}{ES_m}$ . A equação da nova CML, por sua vez, será:

$$EC_p = \frac{EC_m}{ES_m} ES_p \quad (6.11)$$

A equação acima mostra que, no plano  $EC \times ES$ , a CML irá sempre partir da origem. Além disso, a medida ômega do mercado  $\Omega_m = (EC_m/ES_m)$  poderá ser interpretada como o preço do risco de mercado, enquanto  $ES_p$  será a medida da quantidade de risco do portfólio. Dessa maneira, a multiplicação do preço de risco de mercado pela quantidade de risco do portfólio fornecerá uma estimativa do prêmio de risco do portfólio.

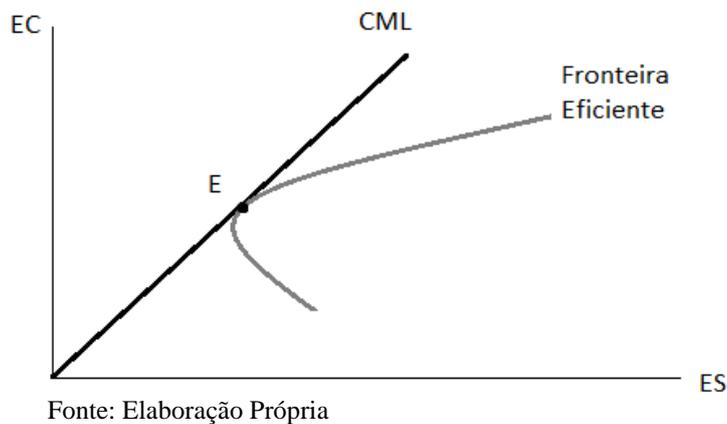
Note que a carteira de mercado não é qualquer carteira ótima, mas aquela que faz com que a inclinação da CML Ômega seja a maior possível, de forma que a reta da CML Ômega

<sup>15</sup> Para a equação (6.5) faz-se  $X = \alpha R_m + (1 - \alpha)L - L$  e  $Y = 0$ , o raciocínio para (6.6) é análogo.

<sup>16</sup> Ao diferenciar (6.7) e (6.8) com relação a  $\alpha$ , sem retirar o mesmo da esperança, e avaliar a derivada apenas em pontos positivos o resultado obtido é o mesmo de (6.9) e (6.10). Em  $\alpha = 0$  o resultado é indefinido.

tangencie a fronteira ótima  $\hat{\Omega}$ ega. Desta forma, um novo conjunto de oportunidades é formado e tal conjunto domina a fronteira eficiente, como mostra a figura 6.2.

**Figura 6.2:** Capital Market Line  $\hat{\Omega}$ ega



O ponto E representa a carteira da fronteira eficiente que faz com que a CML tenha a maior inclinação possível. Seja  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ , o conjunto das frações da renda utilizadas nos ativos  $1, \dots, n$ . A carteira de mercado,  $m$ , é obtida solucionando-se o seguinte problema:

$$\text{Max} \Omega_m = \text{Max} \frac{EC_m}{ES_m} \quad \text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (6.12)$$

Note ainda que, conforme o artigo original de Sharpe (1964), o Teorema da Separação em Dois Fundos permanece válido, uma vez que, um investidor qualquer sempre poderá manter parte de sua renda na carteira de mercado e a outra parte na atividade que resulte em seu custo de oportunidade  $L$ <sup>17</sup>.

No entanto, para que só exista uma CML, é preciso pressupor que os investidores tenham expectativas homogêneas com relação a EC e ES, que são funções de  $L$ . O custo de oportunidade dos investidores também deve ser homogêneo para que exista um único conjunto de oportunidades. Esse conjunto único poderia ser assumido se todos os investidores reconhecem a taxa básica de juros de uma economia ( $r_f$ ) como seu custo mínimo de oportunidade ( $L$ ). As possibilidades de tratamento do custo de oportunidade serão estudadas no item (6.4) mais à frente. Até este momento,  $L$  pode ou não ser assumido como  $r_f$ . Se tal não for, isso implica que existirá uma CML para cada investidor (note que o mesmo resultado é aplicável à CML original, caso a hipótese de expectativas homogêneas não possa ser assumida).

<sup>17</sup> É importante ressaltar que o custo de oportunidade  $L$  é qualquer ativo que apresente um retorno mínimo desejável pelo investidor, podendo até mesmo ser um ativo não negociável no mercado.

### 6.3. A Security Markets Line (SML) Ômega

Tendo derivado a CML Ômega, a comparação de portfólios com a reta de mercado (CML) permite que se infira o retorno justo esperado (em termos de *Expected Chance*) de qualquer carteira a partir de seu nível de risco (em termos de *Expected Shortfall*), bastando para isso assumir que, caso essa carteira tenha o mesmo nível de risco (ES) da carteira de mercado, deverá render exatamente o retorno (EC) da carteira de mercado. Ou seja, assume-se um único preço do risco no mercado.

Porém, caso o objetivo seja comparar ativos individuais, visando mensurar o retorno de equilíbrio desses ativos, é preciso avançar um pouco mais até a SML Ômega.

Seja  $m$  a carteira de mercado que faz com que a CML tangencie a fronteira ótima, e  $i$  um outro ativo qualquer considerado isoladamente. Suponha um portfólio  $p$  que seja composto pela carteira de mercado  $m$  e pelo ativo  $i$ :

$$EC_p = E[\text{Max}\{\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L; 0\}] \quad (6.13)$$

$$ES_p = E[\text{Max}\{L - (\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m); 0\}] \quad (6.14)$$

Transformando as funções  $\text{Max}\{.\}$  encontra-se:

$$EC_p = E \left[ \frac{\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L + |\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L|}{2} \right] \quad (6.15)$$

$$ES_p = E \left[ \frac{L - \alpha R_i - (1 - \alpha)R_m + |L - \alpha R_i - (1 - \alpha)R_m|}{2} \right] \quad (6.16)$$

Note que, no caso das equações (6.15) e (6.16), não é possível colocar  $\alpha$  em evidência. A diferenciação deve ser feita diretamente nas equações encontradas. Os cálculos para a equação (6.15) são apresentados abaixo, os resultados para (6.16) são análogos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial EC_p}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} E \left[ \frac{\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L + |\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L|}{2} \right] = \\ &= E \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L + |\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L|}{2} \right) \right] = \\ &= E \left[ \frac{(R_i - R_m) + \frac{(\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L)}{|\alpha R_i + (1 - \alpha)R_m - L|} (R_i - R_m)}{2} \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

O sinal da esperança foi intercambiado com o sinal da diferenciação pela utilização da regra de Leibnitz<sup>18</sup>. Para que seja possível um melhor tratamento da equação (6.17), o valor  $L$  foi somado e subtraído duas vezes dentro da esperança, conforme mostrado abaixo:

$$\frac{\partial ECP}{\partial \alpha} = E \left[ \frac{(R_i - L) - (R_m - L) + \frac{(\alpha R_i + (1 - \alpha) R_m - L)}{|\alpha R_i + (1 - \alpha) R_m - L|} [(R_i - L) - (R_m - L)]}{2} \right] \quad (6.18)$$

Assim como em Sharpe (1964), neste ponto é preciso assumir que os mercados se encontram em equilíbrio. Em outras palavras, como o ativo  $i$  está incluso, em proporções ótimas, na carteira de mercado ( $\hat{\Omega}$  eficiente), em um mercado em equilíbrio, o excesso de demanda por este ativo deve ser nulo, de forma que  $\alpha = 0$  (condição de equilíbrio).

$$\frac{\partial ECP}{\partial \alpha} = E \left[ \frac{(R_i - L) - (R_m - L) + \frac{(R_m - L)}{|R_m - L|} [(R_i - L) - (R_m - L)]}{2} \right] \quad (6.19)$$

Como para  $|R_m - L| \neq 0$ ,  $\frac{(R_m - L)(R_m - L)}{|R_m - L|} = |R_m - L|$ , o resultado final, para o caso do *Expected Chance*, será:

$$\frac{\partial ECP}{\partial \alpha} = \frac{E[R_i] - L - 2EC_m + E \left[ \frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|} \right]}{2} \quad |R_m - L| \neq 0 \quad (6.20)$$

Para o *Expected Shortfall* (equação 6.16) o procedimento é análogo e o resultado é apresentado na equação (6.21).

$$\frac{\partial ESP}{\partial \alpha} = \frac{L - E[R_i] - 2ES_m + E \left[ \frac{(L - R_m)(L - R_i)}{|L - R_m|} \right]}{2} \quad |L - R_m| \neq 0 \quad (6.21)$$

O *trade off* entre *EC* e *ES* será então a razão entre as equações (6.20) e (6.21):

$$\frac{E[R_i] - L - 2EC_m + E \left[ \frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|} \right]}{L - E[R_i] - 2ES_m + E \left[ \frac{(L - R_m)(L - R_i)}{|L - R_m|} \right]} \quad (6.22)$$

<sup>18</sup>Casella e Berger (1990) apresentam a seguinte definição da regra de Leibnitz: Se  $f(x, \theta)$ ,  $a(\theta)$  e  $b(\theta)$  são diferenciáveis com relação a  $\theta$ , então:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) dx = f(b(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} b(\theta) - f(a(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} a(\theta) + \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

Como no caso de (6.3.5) os limites da integral (esperança) não dependem do parâmetro  $\theta$ , então apenas o terceiro termo da expressão acima será diferente de zero, permitindo que o sinal da integral e o sinal da diferenciação sejam intercambiados.

A equação (6.22) representa o *trade off* entre risco e retorno para ativos individuais. Assumindo que todo o risco não sistêmico (individual) dos ativos é eliminado via diversificação a custo zero, então não haverá prêmio pelo risco diversificável. A CML resulta no preço do risco de portfólios diversificados e, como o mercado não paga nada pelo risco não diversificável, o preço do risco da CML e da SML (na situação de equilíbrio, em que  $\alpha = 0$ ) devem ser iguais.

Igualando as equações do preço do risco da CML e da SML:

$$\frac{E[R_i] - L - 2EC_m + E\left[\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|}\right]}{L - E[R_i] - 2ES_m + E\left[\frac{(L - R_m)(L - R_i)}{|L - R_m|}\right]} = \frac{EC_m}{ES_m} \quad (6.23)$$

Note que  $\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|} = \frac{(L - R_m)(L - R_i)}{|L - R_m|}$ , e que  $\frac{EC_m}{ES_m} = \Omega_m$ . Chamando  $E\left[\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|}\right]$  de  $\gamma_i$  e resolvendo a equação acima para  $E[R_i]$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} E[R_i] - L &= \Omega_m(L - E[R_i] + \gamma_i - 2ES_m) - \gamma_i + 2EC_m \\ (E[R_i] - L)(1 + \Omega_m) &= \Omega_m\gamma_i - 2EC_m - \gamma_i + 2EC_m \end{aligned}$$

$$E[R_i] = L + \gamma_i \left[ \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m + 1} \right] \quad (6.24)$$

$$\gamma_i = E\left[\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|}\right] \quad (6.25)$$

Para obter a equação final do OCAPM é preciso saber que  $\left[ \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m + 1} \right] = \frac{EC_m - ES_m}{EC_m + ES_m}$  e deve-se mostrar que  $EC_m - ES_m = E[R_m] - L$ . Para fins de generalização, seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $a \leq X \leq b$  e  $f_X(x)$  sua função densidade de probabilidade, então:

$$EC_X = \int_L^b (x - L) f_X(x) dx \quad (6.26)$$

$$ES_X = \int_a^L (L - x) f_X(x) dx \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} EC_X - ES_X &= \int_L^b (x - L) f_X(x) dx - \int_a^L (L - x) f_X(x) dx \\ &= E[X] - L \int_L^b f_X(x) dx - L \int_a^L f_X(x) dx \\ &= E[X] - L[F_X(b) - F_X(a)] \end{aligned}$$

Note que  $[F_X(b) - F_X(a)] = 1$ , pois a expressão considera todo o domínio da distribuição de probabilidade de  $X$ , de forma que  $F_X(b) = 1$  e  $F_X(a) = 0$ . Assim o resultado do desenvolvimento acima é:

$$EC_X - ES_X = E[X] - L \quad (6.28)$$

Em seguida, é preciso um tratamento algébrico em  $EC_m + ES_m$ , também para fins de generalização. Os cálculos abaixo são apresentados para uma variável aleatória  $X$ :

$$EC_X + ES_X = E\left[\frac{X-L+|X-L|}{2}\right] + E\left[\frac{L-X+|L-X|}{2}\right] = \frac{E[X]-L+L-E[X]+2E[|X-L|]}{2}$$

$$EC_X + ES_X = E[|X - L|] \quad (6.29)$$

Substituindo as equações (6.28) e (6.29) na equação (6.24), encontra-se a equação do OCAPM:

$$E[R_i] - L = \gamma_i \left[\frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m + 1}\right] = \gamma_i \left[\frac{EC_m - ES_m}{EC_m + ES_m}\right] = \gamma_i \left[\frac{E[R_m] - L}{E[|R_m - L|]}\right] = \frac{\gamma_i}{E[|R_m - L|]} (E[R_m] - L)$$

$$E[R_i] = L + \beta_i (E[R_m] - L) \quad (6.30)$$

$$\beta_i = \frac{\gamma_i}{E[|R_m - L|]} = E\left[\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|}\right] \frac{1}{E[|R_m - L|]}, \quad |R_m - L| \neq 0 \quad (6.31)$$

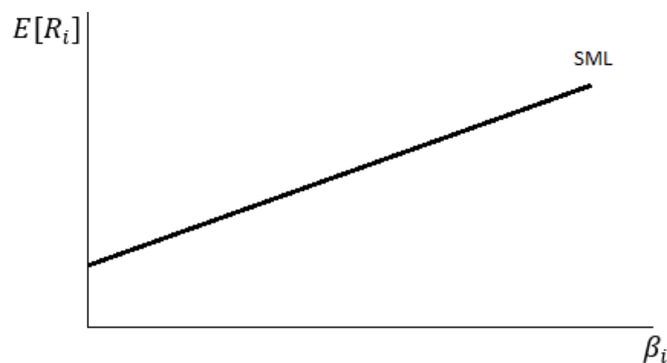
A equação (6.30) representa a forma final do Ômega CAPM, que possui interpretação semelhante ao CAPM tradicional. Assumindo a existência de expectativas homogêneas e o teorema da separação de Fisher, a constante,  $L$ , se torna a taxa livre de risco  $r_f$ . O termo  $(E[R_i] - L)$  representa o preço único do risco, que é o mesmo do CAPM tradicional. A diferença entre o OCAPM e o CAPM está no termo  $\beta_i$ , que representa o risco do ativo  $i$  em relação ao mercado, ou seja, o risco sistêmico do ativo  $i$ . Note que o *beta* do OCAPM, embora tenha a mesma interpretação, é diferente do *beta* do CAPM, pois não se trata da razão entre uma covariância e uma variância. No OCAPM, o *beta* do mercado também é igual a um. Se um ativo auferir retornos maiores que o mercado, quando o mercado está em alta, seu *beta* será maior do que um; se estes retornos forem menores que os do mercado, porém positivos, seu *beta* estará entre zero e um. Ativos que variam em sentido contrário ao mercado possuem *betas* negativos. O leitor deve ter em mente que o *beta* do OCAPM indica co-movimentos entre duas variáveis aleatórias (retornos de ativos e mercado), mas não é a razão entre uma covariância e uma variância, como no CAPM tradicional.

Como o mercado precisa ser Ômega eficiente, não foi preciso impor restrições nas distribuições de retornos ou na utilidade dos indivíduos (exceto aversão ao risco e não saciedade), entretanto as esperanças de (6.30) e (6.31) devem ser definidas. O *Expected Shortfall*, no qual o modelo é baseado, é uma medida de risco coerente no sentido de Artzner

*et. al.* (1999), como foi mostrado por Arcebi e Tasche (2002). Por último, vale a pena ressaltar que o OCAPM leva em conta todas as características das distribuições de retornos, mantendo a parcimônia e o rigor teórico de seu predecessor, de forma que não é preciso acrescentar novos fatores de risco de forma *ad hoc*, como é feito em Kraus e Litzemberger (1976) e Fang e Lai (1997).

A figura (6.3) mostra a SML Ômega. Ela tem a mesma forma da SML tradicional e a única diferença entre ambas está no fato do *beta* ser construído de forma diferente.

**Figura 6.3:** Security Market Line Ômega



Fonte: Elaboração Própria

#### 6.4. O Custo de Oportunidade $L$

Até este ponto,  $L$  foi tratado como o custo de oportunidade de um investidor representativo. Sob expectativas homogêneas e assumindo como válido o Teorema da Separação de Fisher, a interpretação de ativo livre de risco se torna válida para  $L$ . Note que o único parâmetro que é comum a todos os investidores no modelo é justamente a taxa  $L$ .

Se  $L$  for a taxa livre de risco da economia, empiricamente a *proxy* para tal taxa pode ser muito elevada, fazendo com que a SML tenha uma inclinação negativa, decorrente do preço do risco negativo (o mesmo ocorre no CAPM tradicional para uma taxa livre de risco muito elevada).

Note que, sob o enfoque ômega, onde a medida de risco é o *Expected Shortfall*,  $L$  será sempre livre de risco, como mostra a equação (6.4). No entanto, não há nada que impeça que tal taxa tenha variância não nula. Em outras palavras,  $L$  é livre de risco quando a medida de risco for o *Expected Shortfall*, mas pode apresentar risco quando tal medida for o desvio padrão.

O *beta* do OCAPM é sensível à taxa  $L$ . O modelo é compatível com o ICAPM (MERTON, 1973) e com a teoria de Hamada (1969). No entanto variações na taxa,  $L$ , passam a ter impacto na medida de risco sistêmico dos ativos. Como mudanças na taxa livre de risco representam mudanças na estrutura da economia, tal resultado é economicamente razoável. Os principais pressupostos do OCAPM são listados abaixo:

- agentes não saciáveis e avessos ao risco;
- agentes mantem posições diversificadas;
- agentes tomadores de preços;
- agentes podem emprestar e tomar dinheiro emprestado a uma mesma taxa,  $L$ ;
- não existem custos de transação;
- todos os ativos são perfeitamente divisíveis;
- a carteira de mercado é Ômega eficiente.
- agentes possuem expectativas homogêneas sobre as distribuições de retornos dos ativos;
- ativos disponibilizados em quantidades fixas;
- todos os ativos são negociáveis.

A restrição  $|R_m - L| \neq 0$  pode ser um problema ao se estimar os betas do OCAPM utilizando médias. Tal restrição implica que a taxa livre de risco não pode ter o mesmo retorno do mercado em nenhum período de tempo. Uma solução para este problema é a utilização do máximo de casas decimais possíveis no banco de dados utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo.

## 7. TESTES EMPÍRICOS DO OCAPM

Para verificar a relação linear do *beta* com os retornos esperados, é preciso conhecer o valor de  $\beta_i$ , que não é observável. Assim, acaba-se utilizando o  $\hat{\beta}_i$ , que está sujeito a erros de medida, de forma que:

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \epsilon_i \quad (7.1)$$

onde  $\epsilon_i$  é o erro de medida da ação  $i$ .

Além disso, para que seja possível uma maior dispersão entre os *betas*, é recomendável agrupar as ações em  $N$  portfólios obtidos a partir do ordenamento dos  $\hat{\beta}_i$  estimados, ou seja, as ações com maiores *betas* ficariam no primeiro portfólio, e as com menores *betas* ficariam no último (FAMA e MACBETH, 1973 e JENSEN, BLACK e SCHOLE, 1972). No entanto, as ações com  $\epsilon_i$  positivo tenderiam a se concentrar nos portfólios de maior *beta*, enquanto as ações com  $\epsilon_i$  negativo se concentrariam nos portfólios de menor *beta*. Para solucionar este problema,

Jensen, Black e Scholes (1972) utilizaram uma variável instrumental para a construção dos portfólios. Os autores utilizaram os *betas* estimados a partir das séries de retornos em um período anterior ( $t - j$ ) para agrupar as ações no período de interesse ( $t$ ). Tanto os *betas* obtidos em  $t$  como aqueles obtidos em  $t - j$  estariam sujeitos a erros de medidas, mas os autores mostraram que, caso estes erros de medida fossem independentes no tempo, seria possível eliminá-los assintoticamente, através de um procedimento que resulta em um estimador em dois passos, onde o primeiro se refere à construção das séries de retornos dos portfólios, e o segundo se refere a estimar o preço do risco utilizando as séries geradas. Além disso esse procedimento é robusto à não estacionariedade dos *betas*.

O procedimento utilizado para comparar o CAPM e o OCAPM é semelhante ao apresentado por Jensen, Black e Scholes (1972). Existem vários outros procedimentos para a correção dos erros de medida presentes nos  $\hat{\beta}_i$ . No entanto, conforme argumentado por Shanken (1992), o agrupamento das ações em portfólios já é padrão em testes empíricos que envolvam retornos esperados. Isso se deve ao fato dos estimadores do preço do risco do CAPM serem consistentes no tempo, mas não serem consistentes no número de ações. Em outras palavras, Shanken (1992) argumenta que para um número elevado de ativos, não haveria convergência em probabilidade para o parâmetro populacional, devido aos erros de medidas presentes nos  $\hat{\beta}_i$ . Entretanto, ao dividir os ativos em grupos foi possível mostrar que, para longos períodos de tempo, o estimador do preço do risco apresentara convergência em probabilidade para o parâmetro populacional, como mostram Jensen, Black e Scholes (1972).

O banco de dados utilizado foi obtido na Bloomberg e no Economática e conta com todas as ações listadas na NYSE no ano de 2012. O Economática foi utilizado para obter papeis que não estariam mais listados, mas que estiveram presentes em alguma parte do período estudado, que vai de 1986 até 2012. O preços obtidos são mensais.

Para a construção das séries de retornos dos portfólios, foi utilizado um procedimento semelhante ao de Jensen, Black e Scholes (1972). O primeiro passo foi selecionar as ações dos quatro primeiros anos da amostra (1986-1989) que estavam listadas em 1990 na NYSE. Estimou-se os  $\hat{\beta}_i$  tanto para o CAPM como para o OCAPM, as ações foram ordenadas em termos de seus *betas* e foram construídos 20 portfólios<sup>19</sup> a partir deste ordenamento. Os retornos dos 20 portfólios foram computados para o ano de 1990. O mesmo procedimento foi repetido para

---

<sup>19</sup> O número de portfólios foi escolhido arbitrariamente. Fama e Macbeth (1973) utilizaram 20 portfólios e Jensen, Black e Scholes (1972) utilizaram 10.

as ações listadas em 1991, utilizando como instrumento para a construção dos portfólios os *betas* dos anos de 1987 até 1990, e assim sucessivamente, até chegar no ano de 2012, sempre utilizando os quatro anos anteriores para computar os retornos dos portfólios do ano alvo.

O procedimento descrito acima permite a entrada e saída de empresas da bolsa de valores, o que torna possível trabalhar com o banco de dados desbalanceado. No entanto, para uma ação ser utilizada na composição dos portfólios, foi estabelecido que ela tivesse retornos mensais disponíveis para os 5 anos necessários para o processo (1 ano para computar as séries e 4 para o instrumento). Jensen Black e Scholes (1972) utilizam os 5 anos anteriores para computar os retornos do ano  $t$ , fazendo com que o processo tivesse 6 anos. Porém, os autores apenas exigiram que uma ação tivesse retornos disponíveis nos últimos 24 meses dos cinco anos do instrumento, o que leva à comparação de *betas* estimados em intervalos diferentes. Por este motivo, optou-se nesta dissertação por usar um instrumento com um ano a menos, exigindo que todas as observações de retornos estivessem disponíveis no período. Vale a pena ressaltar que, ao fazer tal exigência o modelo fica mais exposto a um possível viés de sobrevivência, por isso o número de anos do instrumento foi reduzido para 4.

A *proxy* para a taxa livre de risco escolhida foi a *Federal Funds Effective Rate*, sendo que no caso da carteira de mercado, foi utilizada uma média aritmética simples<sup>20</sup> dos retornos de todas as ações disponíveis no banco de dados. A tabela 7.1 apresenta o número de ações em cada ano considerado no procedimento descrito acima.

---

<sup>20</sup> O CAPM exige que o mercado seja eficiente em termos de média variância, já o OCAPM requer que essa eficiência seja no enfoque Ômega. Entretanto, a carteira de mercado verdadeira é impossível de ser estimada, pois requer que todos os ativos, negociáveis ou não, estejam presentes. A crítica de Roll (1977) diz respeito ao fato de que é impossível refutar o CAPM empiricamente justamente porque não é possível estimar a carteira de mercado. Segundo o autor, a única discussão sobre a validade do CAPM, e a única forma de derrubá-lo, é provando que o mercado não é eficiente em termos de média e variância. O OCAPM trabalha com uma eficiência de mercado mais razoável, mas a crítica de Roll continua válida. Utilizar como *proxy* da carteira de mercado uma média simples dos retornos dos ativos da amostra não atende à premissa de eficiência no sentido média-variância ou ômega, pois deve-se assumir que esta *proxy* é altamente correlacionada com a verdadeira carteira de mercado. Entretanto, a grande maioria dos trabalhos utilizam ou a técnica da média simples ou então um índice de mercado como o S&P500.

**Tabela 7.1:** Número de ações utilizadas para a construção dos portfólios ano a ano.

Ano	Nº de ações	Ano	Nº de ações
1990	648	2002	1803
1991	716	2003	1905
1992	772	2004	1975
1993	828	2005	2054
1994	864	2006	2077
1995	891	2007	2077
1996	960	2008	2099
1997	1047	2009	2183
1998	1147	2010	2269
1999	1264	2011	2379
2000	1433	2012	2522
2001	1700		

Fonte: Elaboração própria.

Para os anos onde o número de ações não é divisível por 20, o resto é dividido entre o primeiro e o último portfólio. Se o número de ações for ímpar, o primeiro portfólio (maior *beta*) recebe uma ação a mais.

No caso do CAPM, os *betas* foram estimados da forma tradicional, ou seja, a razão entre a covariância do ativo *i* com o mercado e a variância do mercado. No caso do OCAPM os *betas*<sup>21</sup> foram estimados da seguinte forma:

$$\hat{\beta}_i = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(R_{it} - L_t)(R_{mt} - L_t)}{|R_{mt} - L_t|} \right] \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{|R_{mt} - L_t|} \right]^{-1} \quad (7.2)$$

onde,  $R_{it}$  representa o retorno da ação *i* no período *t*,  $R_{mt}$  representa o retorno da carteira de mercado no período *t* e  $L_t$  é o valor da taxa livre de risco também no período *t*.

### 7.1. Descrição das Variáveis

O procedimento descrito na sessão anterior resultou em 23 anos de retornos para 20 portfólios construídos através de variáveis instrumentais dos *betas* do CAPM e do OCAPM, levando a um total de 40 séries de retornos mensais que vão de janeiro de 1990 a dezembro de

<sup>21</sup> O estimador do *beta* do CAPM e a razão da covariância do mercado com o ativo dividida pela variância do mercado:  $\hat{\beta}_i = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \mu_i)(R_{mt} - \mu_m) \right] \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{mt} - \mu_m)^2 \right]^{-1}$ .



onde  $\overline{R}_p$  representa o excesso<sup>23</sup> de retorno do portfólio  $p$ ,  $\gamma_0$  é uma constante,  $\gamma_1$  é o preço do risco e  $\varepsilon_p$  representa um termo de erro. O  $\hat{\beta}_p$  é calculado (na forma do CAPM e na forma do OCAPM) diretamente das séries de retorno geradas pelo primeiro passo do procedimento. Os parâmetros a serem estimados são  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . Os modelos serão válidos se algumas hipóteses forem atendidas, quais sejam:

- $\gamma_0 = 0$
- $\gamma_1 = \overline{R}_m - \bar{L}$

onde,  $\overline{R}_m - \bar{L}$  é o preço médio do risco, que também representa o excesso de retorno do mercado.

As regressões foram estimadas via mínimos quadrados ordinários, utilizando uma correção para que os estimadores fossem robustos a heterocedasticidade. Foram ajustadas, primeiramente, 6 regressões para o período de 23 anos. A tabela 7.3 sumariza os resultados.

**Tabela 7.3:** Resultados para o período completo (1990-2012)

		Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM		
		1	2	3	1	2	3
$\beta$	Coef.	1.242		-2.37	1.324		-0.651
	t	(25.73)		(-2.03)	(10.05)		(-0.41)
	Std.	0.048		1.168	0.132		1.577
$\Omega\beta$	Coef.		1.134	3.302		1.123	1.827
	t		(32.16)	(3.1)		(9.56)	(1.18)
	Std.		0.035	1.065		0.128	1.551
Cons.	Coef.	0.1225	0.087	0.028	0.046	-0.109	-0.136
	t	(2.72)	(2.27)	(0.70)	(-0.38)	(-0.81)	(-0.72)
	Std.	0.045	0.038	0.041	0.122	0.136	0.190
	R <sup>2</sup>	0.97	0.98	0.99	0.90	0.91	0.91
	$\overline{R}_m - \bar{L}$	1.166					

Fonte: Elaboração Própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R}_m - \bar{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

<sup>23</sup> Excesso de retorno é o retorno acima da taxa livre de risco média.

A tabela acima mostra que, para as regressões que contém apenas um *beta*, este é sempre significativo a 5%. No caso das constantes, os resultados não são conclusivos. Para o instrumento do OCAPM a hipótese nula de que  $\gamma_0 = 0$  não é rejeitada para os dois modelos a 10% de significância. Entretanto, ao observar o instrumento do CAPM, tal hipótese é rejeitada para os dois modelos, com uma estatística *t* menor para o OCAPM. No caso das inclinações, em todos os casos o OCAPM foi superior ao CAPM, apresentando um coeficiente mais próximo do preço do risco com um desvio padrão menor. Note que mesmo para o instrumento construído a partir do *betas* do CAPM, o OCAPM obteve melhores resultados, com um  $R^2$  maior, e com o preço do risco estimado mais próximo daquele calculado diretamente através da amostra.

Nos modelos com os dois *betas*, os coeficientes do CAPM apresentaram sinal negativo, enquanto os coeficientes do OCAPM se mantiveram positivos, além disso os últimos apresentaram estatísticas *t* maiores (em valor absoluto). Na regressão 3 do instrumento do CAPM, apenas o *beta* do OCAPM foi significativo a 5%, no entanto, no caso do instrumento do OCAPM, os indícios de multicolinearidade foram mais fortes, fazendo com que todas as variáveis fossem não significativas a 5%, o que é razoável devido à elevada correlação entre os *betas* do CAPM e do OCAPM. Por último, vale a pena observar que a estatística  $R^2$  foi menor para as regressões ajustadas sobre o instrumento do OCAPM. Uma possível explicação para isto é que o procedimento utilizado para construir a variável instrumental pode ser menos adequado para o OCAPM, pois seu *beta* depende da taxa *L*, que é diferente nos anos utilizados para a construção do instrumento e no ano alvo, para o qual as séries de retorno dos portfólios é construída.

Os resultados apresentados até o momento são insuficientes para rejeitar qualquer um dos modelos. No entanto, as evidências dos melhores resultados do OCAPM foram persistentes. Para verificar se esta persistência se mantém, foram ajustadas mais duas regressões com os instrumentos em conjunto, para o período de 23 anos da amostra. A Tabela 7.4, a seguir, sumariza os resultados.

**Tabela 7.4:** Resultados para o período completo com os instrumentos utilizados em conjunto.

		Instrumentos em Conjunto		
		1	2	3
$\beta$	Coef.	1.277		-0.254
	t	(19.15)		(0.20)
	Std	0.067		1.300
$\Omega\beta$	Coef.		1.173	1.405
	t		(18.83)	(1.15)
	Std		0.062	1.217
Cons	Coef.	0.0452	0.000	-0.008
	t	(0.70)	(0.00)	(-0.09)
	Std	0.064	0.069	0.091
	R <sup>2</sup>	0.92	0.93	0.93
$\overline{R_m} - \overline{L}$		1.166		

Fonte: Elaboração própria

A regressão de número 1 é para o CAPM, a de número 2 para o OCAPM e a de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico a 5% de significância grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R_m} - \overline{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

Os resultados apresentados acima levam a não rejeição dos dois modelos. No entanto, a inclinação do OCAPM ainda é mais próxima do preço do risco estimado diretamente do banco de dados. Quando os dois *betas* são utilizados em conjunto, o sinal negativo para o CAPM também persiste, enquanto o OCAPM se mantém positivo e com uma estatística *t* maior em valor absoluto. Entretanto, nenhum dos dois *betas* se mostrou significativo ao nível 5%, mais uma vez evidenciando forte multicolinearidade.

### 7.3. Os Subperíodos

Com o objetivo de analisar se os modelos se mantêm coerentes ao longo do tempo, o período de 23 anos foi dividido em 4 subperíodos de 69 meses. Os resultados são apresentados abaixo, nas tabelas 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8.

**Tabela 7.5:** Resultados para o primeiro subperíodo de 69 meses (1990-1995)

Período de 1990 a 1995										
Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM			Instrumentos em Conjunto				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
$\beta$	coef.	1.834	-3.777	2.879	-4.847	2.220	-3.040			
	t	(4.72)	(-1.49)	(3.80)	(-1.18)	(5.37)	(-2.28)			
	std	0.389	2.541	0.758	4.115	0.414	1.331			
$\Omega\beta$	coef.		1.321	3.902		1.883	4.932		1.563	3.537
	t		(5.90)	(2.18)		(4.3)	(1.91)		(6.34)	(3.77)
	std		0.224	1.791		0.438	2.583		0.247	0.937
cons	coef.	0.490	0.163	-0.344	-0.109	-0.496	-0.993	0.287	-0.110	-0.447
	t	(1.79)	(0.6)	(-0.76)	(-0.21)	(-0.90)	(-1.53)	(3.17)	(-0.37)	(-1.33)
	std	0.273	0.273	0.453	0.528	0.551	0.651	0.283	0.302	0.335
	$R^2$	0.69	0.75	0.80	0.68	0.72	0.75	0.65	0.72	0.76
	$\overline{R_m} - \overline{L}$	1.468								

Fonte: Elaboração Própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R_m} - \overline{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

**Tabela 7.6:** Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (1995-2001)

Período de 1995 a 2001										
Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM			Instrumentos em Conjunto				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
$\beta$	coef.	2.401	-0.906	2.522		1.049	2.356		-0.754	
	t	(7.17)	(-0.78)	(13.41)		(0.99)	(6.42)		(-0.88)	
	std	0.336	1.170	0.188		1.056	0.367		0.869	
$\Omega\beta$	coef.		1.597	2.176		2.154		1.778	2.300	
	t		(9.15)	(2.58)		(11.66)		(8.92)	(3.75)	
	std		0.175	0.843		0.185	0.876	0.200	0.613	
cons	coef.	1.653	0.379	0.131	-2.334	-1.564	-1.923	-1.838	-0.843	-0.464
	t	(-3.67)	(-1.75)	(0.22)	(-8.3)	(-6.35)	(-4.36)	(-3.56)	(-3.03)	(-0.87)
	std	0.451	0.217	0.596	0.281	0.246	0.442	0.517	0.278	0.531
	R <sup>2</sup>	0.86	0.93	0.93	0.88	0.89	0.90	0.64	0.71	0.72
	$\overline{R_m} - \overline{L}$	1.251								

Fonte: Elaboração Própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R_m} - \overline{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

**Tabela 7.7:** Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (2001-2007)

Período de 2001 a 2007										
Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM			Instrumentos em Conjunto				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
$\beta$	coef.	0.454	-3.245	0.484		-4.016	0.469		-3.552	
	t	(3.07)	(-4.56)	(4.68)		(-7.73)	(5.28)		(-6.90)	
	std	0.148	0.712	0.103		0.600	0.089		0.514	
$\Omega\beta$	coef.		0.524	4.024		0.547		4.848	4.353	
	t		(3.41)	(5.62)		(5.12)		(8.66)	(8.12)	
	std		0.154	0.716		0.107	0.560	0.091	0.536	
cons	coef.	0.804	0.734	0.478	0.772	0.710	0.425	0.788	0.722	0.456
	t	(5.93)	(5.36)	(7.56)	(7.88)	(7.42)	(8.68)	(9.60)	(8.86)	(11.05)
	std	0.136	0.137	0.063	0.098	0.096	0.049	0.082	0.082	0.041
	R <sup>2</sup>	0.55	0.62	0.86	0.60	0.66	0.90	0.58	0.64	0.87
	$\overline{R_m} - \overline{L}$	1.256								

Fonte: Elaboração própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R}_m - \bar{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

**Tabela 7.8:** Resultados para o segundo subperíodo de 69 meses (2007-2012)

Período de 2007 a 2012										
Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM			Instrumentos em Conjunto				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
coef.	1.406	3.259		1.297		0.040	1.360		1.254	
t	(11.93)	(1.28)		(10.62)		(0.03)	(15.96)		(1.17)	
std	0.118	2.537		0.122		1.427	0.085		1.071	
coef.		1.489	-1.974		1.315	1.275		1.412	0.111	
T		(10.76)	(-0.71)		(10.38)	(0.87)		(14.34)	(0.10)	
std		0.138	2.794		0.127	1.456		0.99	1.145	
coef.	-0.717	-0.801	-0.596	-0.608	-0.626	-0.626	-0.672	-0.724	-0.676	
cons	T	(-5.85)	(-5.39)	(-2.21)	(-4.38)	(-4.30)	(-4.12)	(-7.31)	(-6.79)	(-5.55)
std	0.123	0.149	0.269	0.139	0.146	0.152	0.092	0.107	0.122	
R <sup>2</sup>	0.93	0.92	0.93	0.85	0.86	0.86	0.89	0.89	0.90	
$\overline{R}_m - \bar{L}$	0.690									

Fonte: Elaboração própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R}_m - \bar{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

Os resultados dos subperíodos suportam a dominância do OCAPM sobre o CAPM. Tratando-se das tabelas 7.5 e 7.6, a inclinação dos modelos se manteve próxima do valor do preço do risco dos períodos analisados, sempre favorecendo o OCAPM. Nas regressões onde os *betas* são utilizados em conjuntos, o *beta* do CAPM se torna negativo e o *beta* do OCAPM se mantém positivo. Os resultados da tabela 7.5 levam a uma não rejeição do OCAPM em todas as regressões. Entretanto, os resultados da tabela 7.6 são menos conclusivos, levando a uma rejeição dos dois modelos quando as regressões são ajustadas sobre o instrumento do OCAPM e quando os dois instrumentos são utilizados em conjunto.

No caso das tabelas 7.7 e 7.8, todos os modelos foram rejeitados em todos os casos. Entretanto existiram evidências favoráveis à dominância do OCAPM, como o sinal negativo do *beta* do CAPM na maioria das regressões múltiplas. O sinal do *beta* do OCAPM foi negativo apenas na regressão 3 do instrumento do CAPM na tabela 7.8, onde não houve evidências da dominância do modelo. Em todos os modelos ajustados nas tabelas 7.7 e 7.8, a inclinação se mostrou incoerente com o preço do risco,  $\overline{R}_m - \bar{L}$ .

Sumarizando os resultados, não é possível rejeitar com confiança nenhum dos modelos. No entanto, levando em conta o período completo e os subperíodos, a dominância do OCAPM sobre o CAPM foi persistente, e o primeiro teve suas hipóteses atendidas em um número maior de testes. O OCAPM só teve comportamento pior do que o modelo original nos resultados do instrumento do CAPM na tabela 7.8 (subperíodo 2007-2012), porém os resultados para este período são pouco conclusivos no que tange os dois modelos. Os resultados ruins dos dois últimos subperíodos motivaram que estes fossem testados em conjunto; assim, a tabela 7.9 sumariza as regressões para o período 2001-2012.

**Tabela 7.9:** Resultados para o segundo subperíodo de 138 meses (2001-2012)

Período de 2001 a 2012									
Instrumento do CAPM			Instrumento do OCAPM			Instrumentos Conjuntos			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
coef.	0.938		-2.801	0.938		-0.388	0.938		-0.949
t	(9.20)		(-2.43)	(12.23)		(-0.35)	(14.57)		(-0.93)
std	0.102		1.156	0.767		1.121	0.064		1.022
coef.		0.969	3.842		0.913	1.288		0.943	1.890
t		(10.44)	(3.29)		(11.31)	(1.13)		(15.52)	(1.81)
std		0.093	1.169		0.080	1.141		0.061	1.046
coef.	0.035	0.004	-0.062	0.035	0.060	0.718	0.035	0.030	0.032
cons t	(0.37)	(0.05)	(-0.99)	(0.45)	(0.75)	(1.03)	(0.57)	(0.53)	(0.56)
std	0.093	0.086	0.063	0.078	0.080	0.070	0.061	0.058	0.058
R <sup>2</sup>	0.93	0.95	0.96	0.90	0.91	0.91	0.92	0.93	0.93
$\overline{R}_m - \overline{L}$	0.973								

Fonte: Elaboração própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, as de número 2 para o OCAPM e as de número 3 contém os dois *betas* em conjunto.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade: 2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade: 2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R}_m - \overline{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

Ao utilizar o período de 2001 a 2012, os maus resultados dos períodos 2001-2007 e 2007-2012 desaparecem. Tanto o OCAPM quanto o CAPM não são rejeitados em todos os casos. A superioridade do OCAPM permanece também nessa análise. O mesmo vale para o sinal negativo do coeficiente do CAPM quando os dois *betas* são utilizados em conjunto. As constantes não são estatisticamente diferentes de zero em todos os modelos ajustados e as inclinações são próximas do preço do risco do mercado, dado por  $\overline{R}_m - \overline{L}$ .

Considerando todos os resultados, pode-se dizer que o OCAPM domina o CAPM. Foi mostrado que quando os dois *betas* são utilizado em conjunto, em uma regressão múltipla, o *beta* do CAPM não adiciona praticamente nenhuma (na maioria dos casos nenhuma) informação quando o modelo é controlado pelo *beta* do OCAPM. Além disso, a incoerência do sinal do *beta* do CAPM foi persistente.

Não é possível concluir qual dos instrumentos utilizados para a construção dos portfólios funciona melhor, apesar do  $R^2$  das regressões ajustadas sobre o instrumento CAPM ser maior na maioria dos casos. De toda forma, a performance do OCAPM é superior nos dois instrumentos.

Esta sessão se encerra com a conclusão de que o *beta* do OCAPM acrescenta informação sobre os retornos esperados ao *beta* do CAPM. Apesar do acréscimo de informação ser pequeno, devido à alta correlação entre os dois *betas*, tal acréscimo é persistentemente capturado pelas regressões.

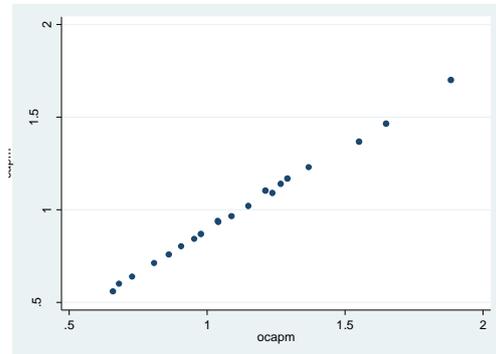
#### **7.4. Variações Independentes**

Devido a elevada correlação entre os *betas* do dois modelos, é interessante verificar se as variações do *beta* do OCAPM, que não dependem do *beta* do CAPM, adicionam alguma informação à regressão dos retornos esperados, quando controlada pelo *beta* do CAPM.

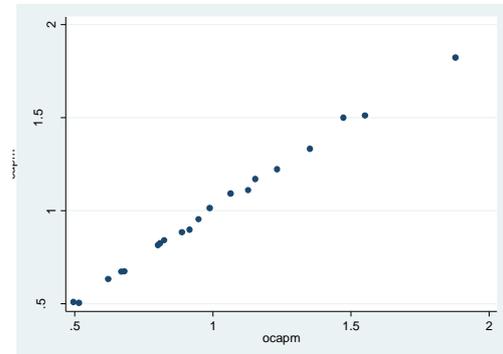
Uma possível forma de realizar tal verificação, é utilizar os resíduos da regressão do *beta* do OCAPM no *beta* do CAPM para explicar os retornos esperados. No entanto, é preciso que a relações entre os dois *betas* seja linear. As figuras apresentadas abaixo mostram as relações entre os *betas* estimados utilizando as duas variáveis instrumentais, para o período de 23 anos.

**Figura 7.1:** Relação entre o *beta* do CAPM e o *beta* do OCAPM.

Instrumento do CAPM



Instrumento do OCAPM



Fonte: Elaboração Própria

Levando em conta as figuras apresentadas, é razoável assumir uma relação linear entre os *betas*. Abaixo são mostrados os resultados das regressões, note que os testes foram realizados também para as variações no *beta* do CAPM, não explicadas pelo *beta* do OCAPM.

**Tabela 7.10:** Resíduos dos betas explicando os retornos esperados

		Instrumento do CAPM		Instrumento do OCAPM	
		1	2	1	2
$\beta$	coef.	1.242		0.938	
	t	(51.51)		(10.91)	
	std	0.024		0.086	
$\Omega\beta$	coef.		1.139		0.913
	t		(51.95)		(10.68)
	std		0.022		0.086
$\epsilon_{\beta}$	coef.		-2.730		-0.388
	t		(-2.03)		(-0.35)
	std		1.168		1.121
$\epsilon_{\Omega\beta}$	coef.	3.302		1.288	
	t	(3.2)		(1.13)	
	std	1.065		1.141	
cons	coef.	0.123	0.087	0.036	0.060
	t	(4.79)	(3.29)	(0.41)	(0.71)
	std	0.026	0.026	0.84	0.084
	R <sup>2</sup>	0.99	0.99	0.91	0.91

Fonte: Elaboração própria

As regressões de número 1 são para o CAPM, com resíduos do OCAPM, e as regressões de número 2 para o OCAPM, com resíduos do CAPM.

Os valores estão em % a. m.

Valor crítico do teste a 5% de significância com 19 graus de liberdade:  
2.093

Valor crítico do teste a 5% de significância para 39 graus de liberdade:  
2.020

Valor crítico do teste a 5% de significância para grandes amostras: 1.96

Std. representa o desvio padrão do erro dos estimadores.

$\overline{R}_m - \overline{L}$  é o preço do risco estimado diretamente do banco de dados.

É possível observar que, para o instrumento do CAPM, os resíduos do OCAPM foram estatisticamente significativos para explicar os retornos esperados, quando controlados pelo *beta* do CAPM. O mesmo não ocorreu para os resíduos do CAPM. No caso do instrumento do OCAPM, nenhum dos resíduos foi estatisticamente significativo ao nível de 5%. Entretanto a estatística *t* dos resíduos do OCAPM foi mais de três vezes maior do que aquela dos resíduos do CAPM. Mais uma vez os resultados foram favoráveis à dominância do OCAPM sobre o CAPM. Apesar dos resíduos do OCAPM não terem sido significativos em todas as regressões, eles mantiveram uma estatística *t* superior nos dois casos estudados.

Apesar do OCAPM ter se mostrado superior ao CAPM, os resultados obtidos para o segundo foram uma surpresa quando comparados com outros trabalhos encontrados na literatura. Fama e French (1992a) encontram resultados de que o *beta* do CAPM não possui nenhum poder de explicação sobre os retornos esperados no período de 1962-1990. No caso dos resultados apresentados aqui, a relação linear do *beta* com os retornos esperados esteve presente em todos os testes realizados, mesmo que o OCAPM tenha obtido resultados melhores. O procedimento utilizado por Fama e French (1992a) é aquele proposto por Fama e Macbeth (1973). Tal procedimento difere em vários aspectos daquele proposto por Jensen, Black e Scholes (1972), sendo o segundo a base dos testes empíricos apresentados nesta dissertação. Vale a pena ressaltar que para períodos anteriores a 1969, Jensen Black e Scholes (1972) e Fama e Macbeth (1973) obtiveram resultados que evidenciavam uma relação linear dos *betas* com os retornos esperados, porém tal relação é mais fraca do que aquela prevista pela teoria.

Uma possível explicação para o poder de explicação do *beta* diferenciar tanto, até entre trabalhos feitos pelos mesmo autores, pode ser o simples fato de tal relação existir apenas em alguns períodos do tempo. Embora exista a possibilidade, dificilmente os resultados apresentados neste trabalho foram espúrios, uma vez que, se mostraram coerentes e robustos a variação subperíodos da amostra, além de terem sido calculados com base em estimadores respaldados pela literatura.

## 8. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma nova versão para o CAPM, denominada Ômega CAPM. O novo modelo trabalha com premissas menos restritivas do que o modelo original. No que tange às distribuições de retornos, o OCAPM não faz uso de nenhuma premissa (além da existência das esperanças do modelo), nem mesmo de que os ativos tenham a mesma distribuição. Do ponto de vista das funções utilidade, é preciso assumir apenas que os investidores sejam avessos ao risco e prefiram mais a menos riqueza.

Dessa maneira, o OCAPM se desvia da discussão sobre as condições suficientes nas primitivas econômicas (utilidade e distribuição) para atender à condição necessária (mercado eficiente no sentido média-variância) presente no CAPM; sua única condição necessária e suficiente é a eficiência de mercado no sentido Ômega, que é atendida de forma mais fácil, sem impor restrições fortes nas primitivas.

Foi mostrado que o OCAPM leva em conta todas os momentos das distribuições dos retornos de uma forma simples via medida Ômega, sem precisar assumir que os momentos superiores são observados na tomada de decisão. Na verdade, no enfoque proposto, as informações necessárias para o indivíduo são: o ganho esperado caso haja ganho, e a perda esperada caso haja perda, respectivamente, a *Expected Chance* (EC) e o *Expected Shortfall* (ES).

A medida de risco utilizada no modelo proposto é o próprio *Expected Shortfall*. Esta medida tem propriedades que a fazem mais adequada do que o desvio padrão (ou a variância), utilizado no CAPM. Além de considerar como risco apenas a parte da distribuição de retornos que se refere às perdas (não existe risco de ganhar), o ES atende a todos os axiomas desejáveis para uma medida de risco.

O OCAPM tem a vantagem de manter a forma simples, de apenas um fator, do CAPM, o que não ocorre com outros modelos de precificação de ativos, como o APT e o modelo de Fama e French (1993; 1996). Além disso, todo o rigor teórico e a elegância do CAPM são mantidos no OCAPM, diferentemente dos modelos citados acima.

Empiricamente, foram realizados testes que confrontassem os dois modelos. O procedimento utilizado para tais testes é semelhante àquele proposto por Jensen, Black e Scholes (1972). Levando em conta que o estimador do preço do risco não é consistente no número de ativos, este procedimento tem o objetivo de solucionar este problema ao buscar a maior dispersão possível entre os *betas*, além de propor eliminar os erros de medida dos mesmos.

Os testes foram realizados em um período de 23 anos (1990-2012) e em quatro subperíodos da amostra (cada um de 69 meses). Os dados utilizados são os da bolsa de valores de Nova York (NYSE). Tratando-se dos resultados, o OCAPM mostrou dominar o CAPM de forma persistente e confiável. Além disso, quando controlado pelo *beta* do OCAPM, o *beta* do CAPM não adiciona nenhuma informação às regressões na grande maioria dos testes, além de apresentar sinal negativo. No entanto, este trabalho não rejeita o CAPM, apenas mostra que o OCAPM seria um aperfeiçoamento teórico e empírico do modelo original.

Quando as variações do *beta* do OCAPM, que não dependem do *beta* do CAPM, foram testadas em uma regressão para os retornos esperados, os resultados continuaram favoráveis ao OCAPM. No caso contrário, as variações do *beta* do CAPM que não dependem do *beta* do OCAPM não foram significativas em nenhum dos testes realizados, mantendo sempre uma estatística *t* menor.

Os resultados sobre qual instrumento utilizado na construção das séries de retornos dos portfólios funciona melhor não foram conclusivos. A única evidência obtida é a de uma estatística  $R^2$  persistentemente maior para os dois modelos do instrumento do CAPM. Entretanto, vale a pena ressaltar que, mesmo sobre o instrumento construído com os *betas* do CAPM, os resultados do OCAPM foram superiores.

## REFERÊNCIAS

ACERBI, Carlo; TASCHE, Dirk. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1487-1503, 2002.

ARROW, Kenneth Joseph. **Essays in the theory of risk-bearing**. Chicago: Markham Publishing Company, 1971.

ARTZNER, Philippe et al. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

ATHAYDE, Gustavo; FLORES, Renato. Incorporating skewness and kurtosis in portfolio optimization: a multidimensional efficient set. **Advances in Portfolio Construction and Implementation**, p. 243-257, 2003.

BANZ, Rolf W. The relationship between return and market value of common stocks. **Journal of financial economics**, v. 9, n. 1, p. 3-18, 1981.

- BASU, Sanjoy. Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios: A test of the efficient market hypothesis. **The Journal of Finance**, v. 32, n. 3, p. 663-682, 1977.
- BASU, Sanjoy. The relationship between earnings' yield, market value and return for NYSE common stocks: Further evidence. **Journal of financial economics**, v. 12, n. 1, p. 129-156, 1983.
- BERK, Jonathan B. Necessary conditions for the CAPM. **Journal of Economic Theory**, v. 73, n. 1, p. 245-257, 1997.
- BERTRAND, Philippe; PRIGENT, Jean-luc. Omega performance measure and portfolio insurance. **Journal of Banking & Finance**, v. 35, n. 7, p. 1811-1823, 2011.
- BLACK, Fischer. Capital market equilibrium with restricted borrowing. **The Journal of Business**, v. 45, n. 3, p. 444-455, 1972.
- BLUME, Marshall E.; FRIEND, Irwin. A new look at the capital asset pricing model. **The journal of finance**, v. 28, n. 1, p. 19-34, 1973.
- BOWER, Dorothy H.; BOWER, Richard S.; LOGUE, Dennis E. Arbitrage pricing theory and utility stock returns. **The Journal of Finance**, v. 39, n. 4, p. 1041-1054, 1984.
- CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. Belmont, CA: Duxbury Press, 1990.
- CASTRO, J. G. **Otimização da Performance de um Portfólio de Ativos e Opções Reais utilizando a Medida Omega**. 2008. Tese de Doutorado. Tese de Doutorado, DEI, PUC-Rio, 2008.
- CHAN, Louis KC; HAMAOKA, Yasushi; LAKONISHOK, Josef. Fundamentals and stock returns in Japan. **The Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1739-1764, 1991.
- CHEN, NAI-FU. Some empirical tests of the theory of arbitrage pricing. **The Journal of Finance**, v. 38, n. 5, p. 1393-1414, 1983.
- CHUNHACHINDA, Pornchai et al. Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. **Journal of Banking & Finance**, v. 21, n. 2, p. 143-167, 1997.
- COPELAND, Thomas E.; WESTON J. Fred. **Financial theory and corporate policy**. 2002.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. **Journal of financial economics**, v. 33, n. 1, p. 3-56, 1993.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. **The journal of finance**, v. 51, n. 1, p. 55-84, 1996.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The capital asset pricing model: theory and evidence. **The Journal of Economic Perspectives**, v. 18, n. 3, p. 25-46, 2004.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The cross-section of expected stock returns. **the Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The value premium and the CAPM. **The Journal of Finance**, v. 61, n. 5, p. 2163-2185, 2006.

FAMA, Eugene F.; MACBETH, James D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. **The Journal of Political Economy**, p. 607-636, 1973.

FAMA, Eugene F.; ROLL, Richard. Parameter estimates for symmetric stable distributions. **Journal of the American Statistical Association**, v. 66, n. 334, p. 331-338, 1971.

FAMA, Eugene F.; ROLL, Richard. Some properties of symmetric stable distributions. **Journal of the American Statistical Association**, p. 817-836, 1968.

FANG, Hsing; LAI, Tsong-Yue. Co-kurtosis and Capital Asset Pricing. **Financial Review**, v. 32, n. 2, p. 293-307, 1997.

FAVRE-BULLE, Alexandre; PACHE, Sébastien. The omega measure: Hedge fund portfolio optimization. **Available at SSRN 365740**, 2003.

FELDSTEIN, Martin S. Mean- variance analysis in the theory of liquidity preference and portfolio selection. **The Review of Economic Studies**, v. 36, p. 5-12, 1969.

FRENCH, Craig W. The Treynor capital asset pricing model. **Journal of Investment Management**, v. 1, n. 2, p. 60-72, 2003.

FRIEND, Irwin; BLUME, Marshall. Measurement of portfolio performance under uncertainty. **The American Economic Review**, v. 60, n. 4, p. 561-575, 1970.

GOMES, Leonardo Lima; BRANDAO, Luiz Eduardo; PINTO, Antonio Carlos Figueiredo. Otimizaç ao de Carteiras de Contratos de Energia Elétrica através da Medida  $\hat{\Omega}$ . **Revista Brasileira de Finanças**, v. 8, n. 1, p. 45-67, 2010.

HAMADA, Robert S. Portfolio analysis, market equilibrium and corporation finance. **The Journal of Finance**, v. 24, n. 1, p. 13-31, 1969.

HARVEY, Campbell R.; SIDDIQUE, Akhtar. Conditional skewness in asset pricing tests. **The Journal of Finance**, v. 55, n. 3, p. 1263-1295, 2000.

JENSEN, Michael; BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.

KAZEMI, Hossein; SCHNEEWEIS, Thomas; GUPTA, Bhaswar. Omega as a performance measure. **JOURNAL OF PERFORMANCE MEASUREMENT.**, v. 8, p. 16-25, 2004.

KEATING, Con; SHADWICK, William F. A universal performance measure. **Journal of performance measurement**, v. 6, n. 3, p. 59-84, 2002.

KEIM, Donald B. Dividend yields and stock returns: Implications of abnormal January returns. **Journal of Financial Economics**, v. 14, n. 3, p. 473-489, 1985.

KEIM, Donald B. Size-related anomalies and stock return seasonality: Further empirical evidence. **Journal of Financial Economics**, v. 12, n. 1, p. 13-32, 1983.

KRAUS, Alan; LITZENBERGER, Robert H. SKEWNESS PREFERENCE AND THE VALUATION OF RISK ASSETS\*. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 4, p. 1085-1100, 1976.

LAKONISHOK, Josef; SHAPIRO, Alan C. Systematic risk, total risk and size as determinants of stock market returns. **Journal of Banking & Finance**, v. 10, n. 1, p. 115-132, 1986.

- LINTNER, John. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The review of economics and statistics**, v. 47, n. 1, p. 13-37, 1965.
- LITZENBERGER, Robert H.; RAMASWAMY, Krishna. The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: Theory and empirical evidence. **Journal of financial economics**, v. 7, n. 2, p. 163-195, 1979.
- LIU, Weimin. A liquidity-augmented capital asset pricing model. **Journal of financial Economics**, v. 82, n. 3, p. 631-671, 2006.
- LUCAS JR, Robert E. Asset prices in an exchange economy. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 1429-1445, 1978.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection\*. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MAS-COLELL, Andreu et al. **Microeconomic theory**. New York: Oxford university press, 1995.
- MERTON, Robert C. An intertemporal capital asset pricing model. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 867-887, 1973.
- MODIGLIANI, Franco; MILLER, Merton H. Corporate income taxes and the cost of capital: a correction. **The American Economic Review**, v. 53, n. 3, p. 433-443, 1963.
- MODIGLIANI, Franco; MILLER, Merton H. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. **The American economic review**, v. 48, n. 3, p. 261-297, 1958.
- MOSSIN, Jan. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 768-783, 1966.
- PASSOW, Alexander. **Omega portfolio construction with Johnson distributions**. International Center for Financial Asset Management and Engineering, 2004.
- PEIRO, Amado. Skewness in financial returns. **Journal of Banking & Finance**, v. 23, n. 6, p. 847-862, 1999.
- REINGANUM, Marc R. The arbitrage pricing theory: some empirical results. **The Journal of Finance**, v. 36, n. 2, p. 313-321, 1981a.
- ROLL, Richard. A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory. **Journal of financial economics**, v. 4, n. 2, p. 129-176, 1977.
- ROLL, Richard; ROSS, Stephen A. An empirical investigation of the arbitrage pricing theory. **The Journal of Finance**, v. 35, n. 5, p. 1073-1103, 1980.
- ROSENBERG, Barr; REID, Kenneth; LANSTEIN, Ronald. Persuasive evidence of market inefficiency. **The Journal of Portfolio Management**, v. 11, n. 3, p. 9-16, 1985.
- ROSS, Stephen A. Mutual fund separation in financial theory—the separating distributions. **Journal of Economic Theory**, v. 17, n. 2, p. 254-286, 1978.
- ROSS, Stephen A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of economic theory**, v. 13, n. 3, p. 341-360, 1976.

ROSS, Stephen A. THE CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM), SHORT-SALE RESTRICTIONS AND RELATED ISSUES. **The Journal of Finance**, v. 32, n. 1, p. 177-183, 1977.

SHANKEN, Jay. Multi-Beta CAPM or Equilibrium-APT?: A Reply. **The Journal of Finance**, v. 40, n. 4, p. 1189-1196, 1985.

SHANKEN, Jay. On the estimation of beta-pricing models. **Review of Financial Studies**, v. 5, n. 1, p. 1-55, 1992.

SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk\*. **The journal of finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SMITH, Daniel R. Conditional coskewness and asset pricing. **Journal of Empirical Finance**, v. 14, n. 1, p. 91-119, 2007.

TOBIN, James. Liquidity preference as behavior towards risk. **The Review of Economic Studies**, v. 25, n. 2, p. 65-86, 1958.

TREYNOR, Jack L. **Toward a theory of market value of risky assets**. 1961. Não Publicado.

TRYBULEC, Andrzej; BYLINSKI, Czesław. Some properties of real numbers operations: min, max, square, and square root. **Journal of Formalized Mathematics**, v. 1, n. 198, p. 9, 1989.