

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Danielle Rosâny de Medeiros Leal

Nova abordagem na análise de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo: o método ω - adaptativo explícito com subciclagem

Juiz de Fora

2016

Danielle Rosâny de Medeiros Leal

Nova abordagem na análise de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo: o método ω - adaptativo explícito com subciclagem

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. D.Sc. Delfim Soares Júnior.

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Medeiros Leal, Danielle Rosâny.

Nova abordagem na análise de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo: : o método ω - adaptativo explícito com subciclagem / Danielle Rosâny de Medeiros Leal. -- 2016.

108 p. : il.

Orientador: Delfim Soares Júnior

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, 2016.

1. Métodos de Integração no Tempo. 2. Controle Adaptativo de Dissipação Numérica. 3. Análise Explícita. 4. Subciclagem. 5. Ondas Eletromagnéticas. I. Soares Júnior, Delfim, orient. II. Título.

Danielle Rosâny de Medeiros Leal

Nova abordagem na análise de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo: o método ω - adaptativo explícito com subciclagem

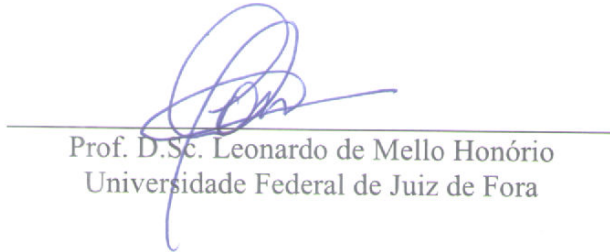
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em 29 de agosto de 2016

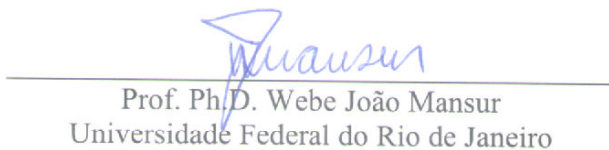
BANCA EXAMINADORA



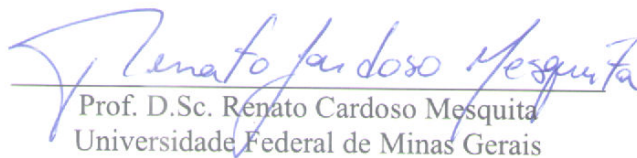
Prof. D.Sc. Delfim Soares Júnior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Leonardo de Mello Honório
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Ph.D. Webe João Mansur
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prof. D.Sc. Renato Cardoso Mesquita
Universidade Federal de Minas Gerais

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e à toda a minha família pelo amor incondicional, incentivo, apoio e compreensão nos momentos em que me fiz ausente durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao meu orientador Delfim Soares Júnior, um excelente profissional na área acadêmica e brilhante pesquisador, pela dedicação, apoio e suporte no trabalho e pela paciência e compreensão em meio às minhas ansiedades pela falta de experiência. Agradeço ainda pela confiança em mim depositada e pelo crescimento pessoal e profissional que me proporcionou.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPEE) da Universidade Federal de Juiz de Fora e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro e pela oportunidade de me tornar uma profissional mais capacitada.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

"Se quiser encontrar os segredos do Universo, pense em termos de energia, frequência e vibração" - Nikola Tesla.

RESUMO

Este trabalho apresenta um novo esquema explícito de marcha no tempo para a análise problemas de propagação de ondas compatível com qualquer método de discretização espacial que seja baseado em elementos (e.g., Método dos Elementos Finitos, etc.). Por ser explícito, isto é, sem necessidade da solução de um sistema de equações, o método é de fácil implementação. Baseado em integradores de tempo adaptativos, a técnica aqui proposta contempla dissipação numérica local e otimizada, permitindo a minimização de oscilações espúrias e aumento da precisão. Também, com o emprego de discretização temporal local (subciclagem), acrescenta-se robustez ao algoritmo do método, flexibilizando a estabilidade e aumentando a eficiência da análise em foco.

Palavras-chave: Métodos de Integração no Tempo, Análise Explícita, Parâmetros Adaptativos, Controle Adaptativo de Dissipação Numérica, Subciclagem, Propagação de Ondas, Ondas Eletromagnéticas.

ABSTRACT

This work presents a new explicit time marching procedure for wave propagation problems, which is compatible with any spatial discretization method based on elements (e.g. Finite Element Method - FEM, etc.). Because it does not require any system of equations to be solved, its implementation is very simple. Based on adaptive time integrators, it provides local and optimized numerical damping, allowing the influence of spurious oscillations to be minimized, improving accuracy. In addition, by employing local time discretization, considering a subcycling technique, the performance to the method is improved, enhancing the flexibility of the method regarding stability and increasing the efficiency of the proposed approach.

Keywords: Time Integration, Explicit Analysis, Adaptive Parameters, Adaptive Dissipation Control, Subcycling, Wave Propagation, Electromagnetic Waves.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO	12
1.1 Aspectos gerais, motivação e objetivos	12
1.2 Organização do trabalho	14
CAPÍTULO 2. EQUAÇÕES GOVERNANTES	16
2.1 Formulação da equação da onda eletromagnética no domínio do tempo	16
2.1.1 Equações de Maxwell para campos variantes no tempo.....	17
2.1.2 Relações constitutivas.....	18
2.1.3 Equações da onda para o campo elétrico e para o campo magnético	19
2.1.4 Forma genérica da equação da onda eletromagnética	20
2.2 Condições de fronteira, de contorno e iniciais	21
CAPÍTULO 3. MÉTODOS NUMÉRICOS CLÁSSICOS	24
3.1 Modelo de discretização espacial: Método dos Elementos Finitos em duas dimensões (MEF 2D).....	25
3.2 Modelos de discretização temporal: métodos de marcha no tempo.....	31
3.2.1 Discretização temporal localmente adaptada: subciclagem.....	33
3.2.2 Método de diferença central (MDC).....	35
3.2.3 Método α - generalizado explícito (α -GE).....	37
CAPÍTULO 4. O MÉTODO ω - ADAPTATIVO EXPLÍCITO (ω - AE)	39
4.1 Formulação	39
4.2 Propriedades	43
4.2.1 Estabilidade e amortecimento numérico	46
4.2.2 Convergência e precisão.....	51
CAPÍTULO 5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	60
5.1 Linhas paralelas	63
5.2 Fio infinito	72
5.3 Distribuição de densidades de corrente.....	81
5.3.1 Meio de propagação homogêneo	82

5.3.2 Meio de propagação heterogêneo	97
CAPÍTULO 6. CONCLUSÕES	102
6.1 Discussão dos resultados.....	102
6.2 Propostas para trabalhos futuros.....	103
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104

Capítulo 1. Introdução

Fenômenos físicos que envolvam propagação de ondas, sejam elas mecânicas ou eletromagnéticas, são de grande importância em diversos campos de pesquisa como medicina, indústria, previsão de eventos naturais, geração, transmissão e distribuição de energia, telecomunicações, dentre inúmeros exemplos e, com o progresso tecnológico das últimas décadas e consequente aumento da utilização de dispositivos eletroeletrônicos, as ondas eletromagnéticas em particular apresentam a cada dia maior relevância na elaboração e funcionamento de diversos equipamentos e processos, que se tornam cada vez mais dependentes e vulneráveis à sua influência. Tais fatos representam um grande incentivo ao desenvolvimento de ferramentas computacionais cada vez mais eficientes e precisas para auxiliar em seus estudos. Neste contexto esta dissertação propõe uma nova abordagem para análise de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo, através do método ω -Adaptativo Explícito (ω -AE). A seguir apresenta-se um maior detalhamento a respeito da problemática em questão e do trabalho desenvolvido.

1.1 Aspectos gerais, motivação e objetivos

Sistemas físicos que envolvam os fenômenos supracitados demonstram a cada dia um aumento na demanda por auxílio computacional em sua análise. Quando estes são de menor complexidade, soluções analíticas são acessíveis, porém, quando a complexidade é maior, existem características que tornam seus estudos inviáveis ou impossíveis de serem desenvolvidos satisfatoriamente somente com a utilização de modelos analíticos. Neste intuito, os modelos numéricos permitem a obtenção de soluções aproximadas para o estudo e simulações do comportamento destes sistemas, auxiliando em suas compreensão e análise e acarretando maior confiabilidade aos resultados obtidos.

Uma vez que a solução numérica é uma aproximação, nela estão presentes ruídos. Dentre eles, modos em superposição de alta frequência oriundos do processo de discretização espacial que não representam a solução real de fato, os chamados aqui de modos espúrios, se tornam um problema relevante quando o foco é em propagação de ondas eletromagnéticas. Por este motivo, algum meio de minimização destes modos espúrios se faz necessário. O amortecimento numérico atua neste âmbito e vem sendo apresentado na literatura [1-3]. Não só a presença de amortecimento numérico, mas ainda um meio de que este seja realizado adaptativamente ao longo do tempo e do espaço é um tema aqui abordado. Neste contexto, ele é controlável, localmente adaptado levando em consideração as propriedades físicas e geométricas do modelo e atualizado a cada passo de tempo, de acordo com soluções computadas em passos de tempo anteriores, melhorando o desempenho da análise.

Além da questão do amortecimento, há que se considerar a escolha por um esquema explícito de marcha no tempo. Métodos explícitos apresentam como uma de suas mais marcantes desvantagens, a estabilidade condicionada, que implica na necessidade de utilização de um passo de tempo menor do que um determinado valor crítico e possível queda de eficiência computacional do método, uma vez que ela está diretamente relacionada ao número de passos de tempo necessários para obtenção da resposta [4]. Entretanto, quando a propagação de ondas está em análise, esta desvantagem deixa de ser tão relevante, pois a própria natureza do problema, que geralmente envolve altas frequências de operação dos sistemas, exige que os passos de tempo sejam normalmente pequenos, com valores já no entorno do limite para a estabilidade numérica. Além disso, marchas explícitas são de fácil implementação, no intuito de não haver sistemas de equações a serem tratados.

O método ω -AE, especificamente, apresenta a característica de ser auto-iniciável, pois tem sua formulação baseada somente na solução e sua primeira derivada temporal, o que elimina cálculos adicionais na inicialização da marcha no tempo para o cálculo da segunda derivada temporal, que neste tipo de problema nem sentido físico relevante apresenta, sendo mais uma vantagem do método. Ainda, diferentes passos de tempo são levados em consideração, pois é realizada uma discretização temporal local e múltiplos incrementos de tempo (subciclagem) são utilizados, tornando o algoritmo mais robusto e diminuindo a desvantagem da estabilidade condicionada anteriormente citada. Quanto à discretização espacial, a presente abordagem utiliza o Método dos Elementos Finitos - MEF [4-7] para duas dimensões (2D), isto por uma questão de adaptação aos problemas aqui em foco, entretanto, destaca-se que qualquer método que seja baseado em elementos é compatível com o Método

ω - AE, em qualquer dimensão espacial. Isto posto, vale ressaltar que até o dado momento não foram encontradas referências de outros autores com estratégia de amortecimento numérico semelhante e bom desempenho em problemas hiperbólicos, aumentando a relevância deste trabalho.

As bases do método aqui proposto têm início no trabalho de Soares [8], que propôs uma nova técnica de marcha no tempo para análise dinâmica, que já permitia a adoção de parâmetros adaptativos, ainda que de forma global. Posteriormente, tal metodologia foi reconfigurada [9], passando a contemplar parâmetros localmente adaptativos, permitindo assim que os mesmos fossem espacial e temporalmente computados, de acordo com as propriedades do modelo e com o avanço da solução no tempo. Recentemente, uma abordagem bastante genérica foi apresentada neste sentido [10], considerando-se análises implícitas e parâmetros ótimos, tendo sido elaborada uma técnica bastante eficaz para análise de problemas hiperbólicos.

Neste trabalho, do qual decorrem até o dado momento dois artigos publicados em anais de congressos [11,12], análises explícitas são focadas e a performance da nova metodologia é avaliada neste contexto. Mais ainda, tem-se como objetivos associados, a análise do novo método para problemas de propagação de ondas eletromagnéticas, bem como a implementação de múltiplos passos de tempo à análise. Abaixo segue a organização desta dissertação.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado como segue: no presente capítulo uma breve introdução ao tema é apresentada e a modelagem matemática do problema é tratada no capítulo 2, descrevendo as equações governantes e suas características relevantes ao trabalho. O capítulo 3 versa sobre métodos numéricos clássicos, abordando modelos discretos para os domínios espacial e temporal, bem como a subciclagem. No capítulo 4, é apresentada a nova técnica de marcha no tempo, o método ω -AE e suas propriedades e características são discutidas. O capítulo 5 apresenta, com três aplicações numéricas, os resultados e o

desempenho apresentados pelo novo método e, finalmente, o capítulo 6 expõe as conclusões obtidas a partir deste trabalho, bem como algumas perspectivas para trabalhos futuros. Ao final uma lista de referências utilizadas é descrita.

Capítulo 2. Equações Governantes

O comportamento de campos eletromagnéticos em nível macroscópico, quer seja estático ou transiente, pode ser modelado matematicamente a partir das quatro equações básicas da teoria eletromagnética, as equações de Maxwell [13]. Estas equações são a seguir apresentadas, considerando a análise transiente, inicialmente em sua formulação genérica para três dimensões espaciais (3D) e, posteriormente, em duas dimensões (2D), que é de fato o foco nesta abordagem. Deste modo, este capítulo apresenta conceitos e modelos matemáticos pertinentes aos problemas de propagação de ondas eletromagnéticas utilizados aqui como estudo de caso, através do desenvolvimento de suas equações governantes. Entretanto, destaca-se que a formulação do método ω -AE é extensível e, o método portanto, aplicável a qualquer problema hiperbólico.

2.1 Formulação da equação da onda eletromagnética no domínio do tempo

Partindo das equações de Maxwell e das chamadas relações constitutivas [13-17], a equação da onda, utilizada como modelo hiperbólico pelos métodos numéricos, é obtida. Também as condições de contorno e iniciais são abordadas, de maneira que juntos, estes itens constituem o problema de valor inicial e de contorno no qual o método ω -AE mantém seu foco.

2.1.1 Equações de Maxwell para campos variantes no tempo

Quando a análise transiente em nível macroscópico está em foco, as equações de Maxwell, que podem ser escritas tanto em sua forma integral quanto em sua forma diferencial, são as equações que governam os fenômenos de propagação de ondas eletromagnéticas. As Eq. (2.1) as apresentam em sua forma integral, como foram inicialmente escritas e, obtidas a partir das leis de Faraday (2.1a), de Maxwell-Ampère (2.1b), de Gauss (2.1c) e a lei de Gauss para o campo magnético (2.1d) [7,13,15,16].

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1a)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1b)$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_c dV \quad (2.1c)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1d)$$

Estas equações podem ser escritas em forma diferencial a partir da forma integral. Isto feito, obtém-se:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} \quad (2.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad (2.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2d)$$

Onde:

\mathbf{E} é a intensidade de campo elétrico [V/m]

\mathbf{B} é a densidade de fluxo magnético [T]

\mathbf{H} é a intensidade de campo magnético [A/m]

\mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico [V/m²]

\mathbf{J} é a densidade de corrente [A/m²]

ρ_c é a densidade elétrica de carga [C/m³]

o sobrescrito ($\dot{}$) denota derivada temporal de primeira ordem.

2.1.2 Relações constitutivas

Ainda, as equações abaixo descritas, chamadas de relações constitutivas, que relacionam os campos envolvidos no estudo com as propriedades eletromagnéticas do meio de propagação, também compõem as informações necessárias para a formulação do sistema de equações de um problema de propagação de ondas eletromagnéticas. Estas relações são válidas para materiais isotrópicos lineares, visto que anisotropia e modos não lineares não são considerados nesta abordagem.

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (2.3c)$$

Onde:

μ é a permeabilidade magnética [H/m]

ε é a permissividade elétrica [F/m]

σ é a condutividade elétrica [S/m]

2.1.3 Equações da onda para o campo elétrico e para o campo magnético

De posse das equações e conceitos acima apresentados, é agora possível escrever a equação da onda eletromagnética vetorial no domínio do tempo. Embora o eletromagnetismo seja um fenômeno único, ainda é usual que as equações da onda sejam formuladas em função somente do campo elétrico ou somente do campo magnético. Assim sendo, a partir das equações de Maxwell na forma pontual (2.2a) e (2.2b) e das relações constitutivas (2.3a) e (2.3b) a equação não-homogênea vetorial da onda para o campo elétrico é obtida:

$$\varepsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{J} \quad (2.4)$$

Onde o sobrescrito (") representa a segunda derivada temporal.

E, analogamente, a equação não-homogênea vetorial da onda para o campo magnético é obtida a partir das Eq. (2.2a), (2.2b), (2.3a) e (2.3b).

$$\mu \ddot{\mathbf{H}} + \nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times (\varepsilon^{-1} \mathbf{J}) \quad (2.5)$$

2.1.4 Forma genérica da equação da onda eletromagnética

Das Eq. (2.4) e (2.5), nota-se que a formulação da equação vetorial da onda, tanto para o campo elétrico, quanto para o campo magnético, é semelhante. Levando isto em conta e que o foco aqui é no método numérico de marcha no tempo e não no problema físico, a seguir é apresentada então, uma formulação genérica da equação de onda eletromagnética vetorial, a qual pode ser utilizada tanto para campo elétrico quanto para o magnético, de acordo com a aplicação desejada. Assim, partindo das Eq. (2.4) e (2.5), esta forma genérica da equação vetorial não-homogênea é dada por:

$$\nabla \times k \nabla \times \mathbf{u} + \rho \ddot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\gamma} \quad (2.6)$$

Onde:

\mathbf{u} representa genericamente \mathbf{E} ou \mathbf{H} .

k representa genericamente \mathcal{E}^{-1} ou μ^{-1} .

ρ representa genericamente μ ou \mathcal{E} .

$\boldsymbol{\gamma}$ é chamado de termo fonte e representa genericamente $-\dot{\mathbf{J}}$ ou $\nabla \times (\mathcal{E}^{-1} \mathbf{J})$.

Por fim, é válido lembrar que o foco do presente trabalho é em modelos de duas dimensões espaciais (2D). Deste modo, com a escolha adequada do referencial, a Eq. (2.6) adquire a forma:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) - \rho \ddot{u} = \gamma \quad (2.7)$$

Onde u representa a componente em foco do vetor \mathbf{u} , isto é, u_j . O subscrito (j) simboliza a coordenada em foco do vetor em questão, podendo assumir os valores de (x, y ou z)¹. Os termos \mathbf{u} e u são a partir daqui chamados de campo incógnita do problema.

2.2 Condições de fronteira, de contorno e iniciais

Agora que a equação governante já é conhecida, para completar a formulação de um problema de propagação de ondas variantes no tempo, as condições de contorno e iniciais são essenciais para garantir a solução única que de fato representa um problema. Tais condições são apresentadas a seguir.

As condições de contorno podem ser deduzidas a partir das equações de Maxwell em sua forma integral, descritas nas Eq. (2.1). Para tal, considerando a interface entre dois meios distintos de propagação sem a presença de uma fonte de campo nesta interface, também chamada de fronteira, as denominadas condições de continuidade, descritas a seguir, são requeridas [13-17].

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (2.8a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (2.8b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (2.8c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (2.8d)$$

¹ Por exemplo, pode-se ter $u = E_z$ e $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

Onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o chamado vetor normal, que possui direção normal à fronteira (ou interface) e sentido do meio 2 para o meio 1 (apontando para fora da superfície em todo o seu contorno), como mostra o esquema da Fig. 2.1.

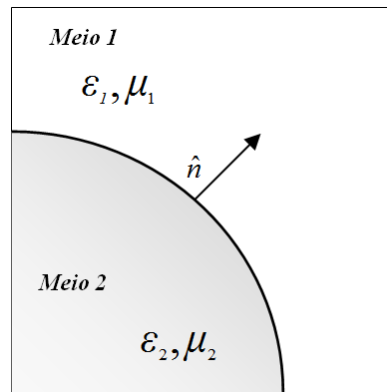


Figura 2.1 - Interface entre dois meios de propagação.

Embora existam diversas modelagens para condições de contornos, opta-se por utilizar neste trabalho (problemas 2D) as descritas a seguir, nas Eq. (2.9). Outras condições de contorno (e.g., condições de contorno não-reflexivas etc.) podem ser empregadas em conjunto com a metodologia proposta nesta dissertação, todavia, sem maiores dificuldades. A condição de contorno apresentada em (2.9a) é chamada essencial ou condição de contorno de Dirichlet e se caracteriza por definir o campo incógnita como sendo prescrito (valor imposto como conhecido ao longo do tempo) na região do contorno à qual corresponde. Já o tipo de condição em (2.9b) é denominada natural ou condição de contorno de Neumann, caracterizada pela imposição de derivada do campo incógnita como prescrita na região do contorno [4,5,14-16,18].

$$u = \bar{u} \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} u = \bar{u}_{\hat{\mathbf{n}}} \quad (2.9b)$$

Onde:

\bar{u} denota o valor prescrito do campo incógnita .

$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} u$ a derivada direcional do campo incógnita normal ao contorno

\bar{u}_n o valor prescrito derivada direcional do campo incógnita normal ao contorno.

A Fig. 2.2 esquematiza um domínio qualquer Ω limitado por um contorno Γ , onde Γ_1 apresenta condições de contorno tipo essencial (\bar{u}) e Γ_2 condições de contorno tipo natural (\bar{u}_n).

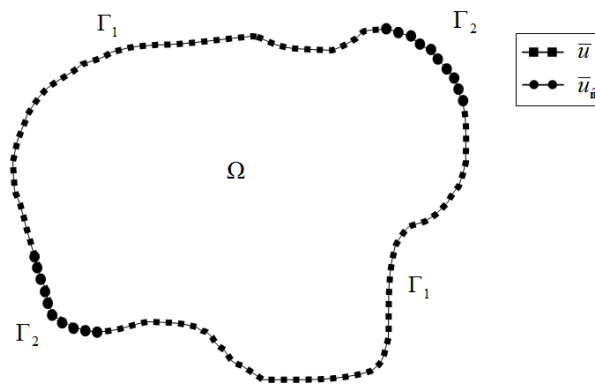


Figura 2.2 - Condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Por fim, as condições iniciais completam o conjunto de informações necessárias à formulação de um problema de propagação de ondas eletromagnéticas e são formadas pelos valores do campo incógnita no instante de início da análise e sua derivada, mostrados nas equações abaixo.

$$u|_{t=0} = u_0 \tag{2.10a}$$

$$\dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0 \tag{2.10b}$$

Capítulo 3. Métodos Numéricos Clássicos

Mesmo que a solução analítica dos problemas em questão não esteja disponível, faz-se necessária uma maneira de obtenção de uma solução e, para tal, através de processos de discretização, o problema é aproximado por diversos problemas de menor porte e discretos, viabilizando uma solução numérica. Por discretização entende-se ser o processo de subdivisão de um domínio contínuo qualquer em subdomínios menores e finitos. Tal processo é aqui abordado tanto para o domínio espacial, pelo Método dos Elementos Finitos - MEF, quanto para o domínio temporal, pelos métodos de marcha no tempo (ou métodos de integração direta).

Neste intuito, este capítulo aborda métodos de discretização espacial e temporal clássicos considerados relevantes ao desenvolvimento do trabalho. Para tal, inicialmente são apresentados conceitos relativos a técnicas de aproximação de soluções juntamente com o da discretização espacial utilizada, o Método dos Elementos Finitos em duas dimensões - MEF 2D. Entretanto, uma vez que o objetivo é a análise transiente, a discretização temporal é o foco principal do trabalho e por esta questão, o MEF é aqui descrito, não sendo desenvolvida uma discussão profunda a seu respeito e sim apenas apresentados os principais conceitos de sua formulação e dados relevantes à formulação do método ω -AE. Textos que apresentem maior detalhamento a respeito do MEF podem ser encontrados nas referências [4,5,6,7,17].

No que segue, são apresentados alguns conceitos relativos a métodos de marcha no tempo, bem como algumas considerações a respeito do que vem sendo desenvolvido recentemente pela comunidade científica em abordagens semelhantes. Ainda, é apresentada a técnica de discretização temporal local, recorrente na literatura, conhecida como subciclagem e muito utilizada em marchas explícitas para acrescentar robustez ao algoritmo e melhoria de eficiência [19-21]. Por fim, dois modelos de discretização temporal amplamente difundidos são citados, mais especificamente, o Método de Diferença Central (MDC) [4] e o Método α -Generalizado Explícito (α -GE) [1], os quais são utilizados como meio de comparação com o novo esquema de marcha no tempo (a ser apresentado no próximo capítulo), a fim de validar os resultados obtidos e, portanto, são brevemente apresentados, sem maiores discussões de suas características.

3.1 Modelo de discretização espacial: o Método dos Elementos Finitos em duas dimensões (MEF 2D)

Partindo da equação governante (2.7), considera-se que ela seja válida para um domínio contínuo qualquer Ω limitado por um contorno Γ subdividido em Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$).

No processo de discretização espacial pelo MEF, a primeira etapa consiste em segmentar o domínio contínuo Ω em subdomínios de dimensões espaciais finitas (Ω_e), chamados de elementos, de maneira que a união destes (Ω_D), denominada malha de elementos finitos (por vezes referida como domínio global), seja equivalente ao domínio contínuo. A Fig. 3.1 esquematiza um domínio espacial discretizado por elementos finitos, bem como seu contorno também discretizado (Γ_D), sendo que \bar{U} e $\bar{U}_{\hat{n}}$ correspondem, respectivamente, aos valores discretos das condições de contorno apresentadas nas Eq. (2.9a) e (2.9b). Ainda, o chamado elemento triangular linear é nesta figura destacado, suas bordas (lados do triângulo) e seus nós (vértices do triângulo). Este, por sua vez, é uma escolha que acarreta boas aproximações para geometrias complexas e irregulares e, por isto é neste trabalho utilizado (o subíndice e indica as variáveis em nível de elemento).

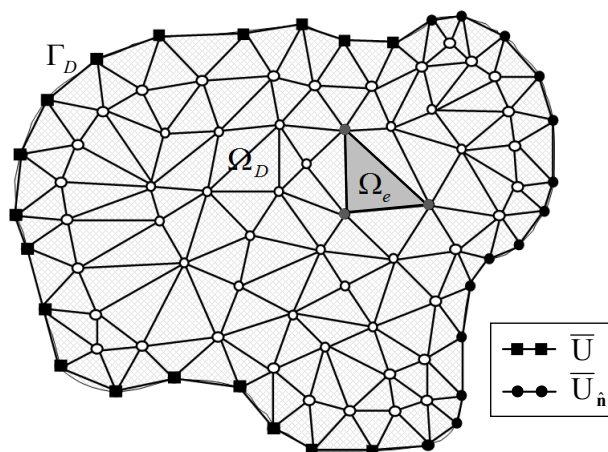


Figura 3.1 - Domínio discreto do problema.

Então, o campo solução u é aproximado por um valor discreto \underline{u} , no elemento, expresso como um somatório de produtos entre funções conhecidas e coeficientes

desconhecidos, como mostra a Eq. (3.1), simplificando assim a resolução do problema a encontrar estes coeficientes [22].

$$\underline{u}_e(X, t) = \varphi_e^1(X) u_e^1(t) + \varphi_e^2(X) u_e^2(t) + \dots + \varphi_e^{\eta_e}(X) u_e^{\eta_e}(t) = \sum_{i=1}^{\eta_e} \varphi_e^i(X) u_e^i(t) \quad (3.1)$$

Onde:

u representa os coeficientes desconhecidos.

X representa coordenadas espaciais genéricas.

t representa o instante de tempo em análise.

φ representa a função de aproximação conhecida (função de interpolação).

η_e representa o número de termos do somatório, ou número de graus de liberdade do elemento ($\eta_e = 3$ para o elemento triangular linear aqui adotado).

Uma vez discretizado o domínio espacial, passa-se à etapa de formulação do modelo espacial discreto pelo MEF. Esta formulação, por sua vez, pode ser desenvolvida a partir do método dos resíduos ponderados - MRP [17,22,23,24], que é muito utilizado devido à sua versatilidade e generalidade. Neste contexto, a formulação é desenvolvida em nível de elemento e , posteriormente, através da técnica conhecida como montagem, pode ser expandida para o domínio global Ω_D .

Quando o campo solução é substituído por um valor discreto aproximado, um erro (ou resíduo) associado à discretização surge. O MRP pondera este erro, de maneira que o resíduo na totalidade do domínio geral em análise seja nulo, através da seguinte expressão:

$$R_e = \int_{\Omega_e} r_e \omega_e d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

O resíduo decorrente da discretização (r_e) e a função de ponderação (ω_e) são aproximados pelas seguintes expressões:

$$r_e = \rho \ddot{\underline{u}}_e(t) - \nabla \cdot (k \nabla \underline{u}_e(t)) + \gamma(t) \quad (3.3a)$$

$$\omega_e(X) = \sum_{h=1}^{\eta_e} \beta_e^h \psi_e^h(X) \quad (3.3b)$$

Onde:

β é um coeficiente arbitrário.

ψ é a função de interpolação para ω .

Permitindo a obtenção da expressão a seguir:

$$R_e = \sum_{h=1}^{\eta_e} \beta_e^h \left\{ \sum_{l=1}^{\eta_e} \int_{\Omega_e} [\rho \phi_e^l \ddot{u}_e^l - \nabla \cdot (k \nabla (\phi_e^l u_e^l)) + \gamma(t)] \psi_e^h d\Omega = 0 \right\} \quad (3.4)$$

No MEF, que é classificado como um método de domínio, é usual se estabelecer no contorno Γ_1 (essencial) o peso como sendo idênticamente nulo ($\omega=0$) e o campo solução prescrito ($u = \bar{u}$), mantendo o foco da modelagem, de fato, no domínio. Assim, aplicando-se a Primeira Identidade de Green [16,25] à Eq. (3.4) obtém-se a Eq. (3.5), utilizando o método de Galerkin [6,17,22,25], onde a função de interpolação de ω é escolhida como igual à função de interpolação da solução ($\psi^k(X) = \phi^k(X)$). Isto posto, a Eq. (3.4) adquire a forma:

$$\sum_{h=1}^{n_e} \beta_e^h \left\{ \sum_{l=1}^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \varphi_e^h \rho \varphi_e^l d\Omega \ddot{u}_e^l + \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_e^h \cdot k \nabla \varphi_e^l d\Omega u_e^l = \int_{\Gamma_2} k \varphi_e^h \overline{\frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{n}}} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \varphi_e^h \gamma d\Omega \right] \right\} \quad (3.5)$$

Que pode ser entendida como sendo a forma fraca dos resíduos ponderados discreta. Esta por sua vez, quando reescrita sob forma matricial, como na equação abaixo, é o modelo discreto no espaço em um sistemas de coordenadas genérico X , também chamada de equação semi-discreta, para o sistema global.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.6)$$

De onde define-se a lei de formação das matrizes utilizadas da formulação geral do MEF, em nível de elemento, chamadas de matrizes locais, apresentadas nas equações a seguir. Os valores nelas descritos são utilizados para a construção das matrizes globais, através da técnica chamada assemblagem.

$$M_e^{lh} = \int_{\Omega_e} (\varphi_e^l) \rho (\varphi_e^h) d\Omega \quad (3.8a)$$

$$K_e^{lh} = \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_e^l) \cdot k (\nabla \varphi_e^h) d\Omega \quad (3.8b)$$

$$F_e^l = \int_{\Gamma_{e_2}} \varphi_e^l \bar{k} u_n d\Gamma - \int_{\Omega_e} \varphi_e^l \gamma d\Omega \quad (3.8c)$$

Apresentada a formulação do MEF, é realizada agora a particularização para o modelo neste trabalho utilizado, o MEF 2D com elementos triangulares lineares, os quais são representados na Fig. 3.2, juntamente com suas funções de interpolação.

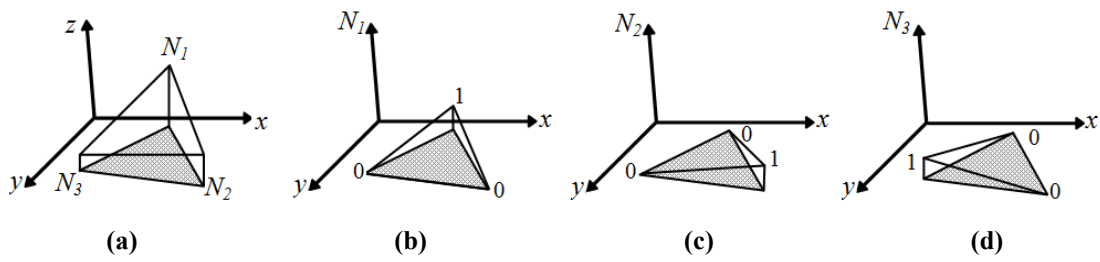


Figura 3.2 - Elemento triangular linear e suas funções de interpolação.

Neste contexto, a coordenada genérica espacial X passa às coordenadas em duas dimensões (x,y) e a função de interpolação φ_e^i forma a matriz de interpolação (\mathbf{N}) , com lei de formação descrita na equação abaixo.

$$N_i = \frac{1}{2A_e} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad \forall \quad i=1,2,3 \quad (3.8)$$

Onde o subíndice i corresponde aos nós do elemento, A_e é a área geométrica do elemento e a_i , b_i e c_i são os coeficientes do plano interpolador para cada um dos nós, dados por:

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.9a)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (3.9b)$$

$$c_i = x_k - x_j$$

Onde:

$$(i,j,k = 1,2,3) \vee (i,j,k = 2,3,1) \vee (i,j,k = 3,1,2)$$

Neste contexto, a Eq. (2.7), em nível de elemento, assume a seguinte forma matricial:

$$\underline{u}_e(x,y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (3.10)$$

E a partir da matriz de interpolação, pode-se definir uma matriz auxiliar \mathbf{B}_{MEF} , como sendo dada por:

$$\mathbf{B}_{MEF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

E as Eq. (3.8), tornam-se:

$$\mathbf{M}^e = \frac{1}{2} \rho A_e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{B}_{MEF})^T k \mathbf{B}_{MEF} A_e \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{F}^e = k \left(\bar{u}_n^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\ell_1}{2} + \bar{u}_n^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\ell_2}{2} + \bar{u}_n^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\ell_3}{2} \right) - \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{A_e}{3} \quad (3.12c)$$

Onde ℓ_i , com $i=1, 2$ ou 3 , é o comprimento da borda do elemento, com respectiva condição de contorno natural prescrita de \bar{u}_n^i (aqui assumida constante ao longo do lado), conforme indicado na Fig. 3.3. Na Eq. (3.12c) também assume-se γ como constante no elemento.

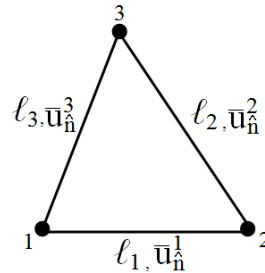


Figura 3.3 - Elemento triangular linear e suas características relativas à modelagem do termo fonte.

Observe que a matriz de massa \mathbf{M} em (3.12a) é diagonal, também chamada de forma concentrada. Esta modelagem é tradicional em métodos explícitos e permite que não haja necessidade de solucionar sistemas de equações a cada incremento de tempo durante a marcha [6,26]. Assim o sistema se torna desacoplado, ou explícito, originando inclusive a denominação dada a técnicas deste tipo no atual contexto. Esta diagonalização da matriz \mathbf{M} torna o custo computacional por intervalo de tempo consideravelmente menor para técnicas explícitas, se comparadas a métodos implícitos.

3.2 Modelos de discretização temporal: métodos de marcha no tempo

Para a discretização temporal, o domínio temporal contínuo é dividido em instantes discretos de tempo, através de um intervalo finito chamado de passo-de-tempo (Δt). No que segue a discretização do domínio temporal, cálculos recursivos são realizados para obtenção da resposta numérica do problema a cada instante desejado. A estes cálculos

recursivos se dá o nome de marcha no tempo ou método de integração direta. Assim, métodos deste tipo consideram duas idéias básicas [4,6,27]:

- i.* Ao invés de encontrar a solução no contínuo tempo, ela é buscada em tempos discretos, intervalados de Δt .
- ii.* Dentro deste Δt se assume que o campo solução e suas derivadas variem de forma pré-determinada. A maneira como estas grandezas variam é que determina características como estabilidade, precisão e custo computacional do método numérico.

Entre os métodos de integração direta encontram-se os explícitos [4,18,1,6,2], conceito relacionado ao fato de não haver sistemas de equações a serem tratados ao longo da marcha, uma vez que a matriz \mathbf{M} é diagonalizada nos modelos abordados, como mostra a Eq. (3.12a).

Como já citado, técnicas explícitas apresentam a característica de estabilidade condicionada, necessitando que o passo de tempo escolhido seja menor ou igual a um valor crítico. O valor do passo de tempo crítico (Δt_c) pode ser calculado com base nas propriedades físicas e da geometria espacial do problema, em conjunto com a estratégia de integração adotada no método. Basicamente ele tem relação com o menor período de oscilação natural dos modos em superposição do modelo discreto no espaço (T_c) e, conseqüentemente, com a sua maior frequência de oscilação natural (ω_c), que juntos mantêm a chamada frequência de amostragem também menor ou igual a seu valor crítico Ω_c , como mostra a Eq. (3.13a). Estes conceitos são melhor abordados no próximo capítulo. Embora estes valores garantam a estabilidade da marcha no tempo, não é matematicamente trivial encontrar Δt_c , uma vez que este é relativo a matrizes globais (obtidas pela assemblagem das matrizes locais), que são de grandes dimensões. É usual então, realizar uma análise semelhante a partir das matrizes locais de elemento e utilizar como passo de tempo crítico o do chamado elemento mais crítico da malha (Δt_0), que corresponde àquele com maior frequência natural de oscilação, dentre todos os elementos da discretização espacial (ω_0), correspondendo a uma frequência de amostragem crítica Ω_0 , descrita na Eq. (3.13b). Isso permite trabalhar com matrizes em nível de elemento, de dimensões consideravelmente menores e viabiliza os cálculos para definição do passo crítico a ser adotado, sem perda de estabilidade e precisão [4].

$$\Omega_c = \Delta t_c \omega_c \quad (3.13a)$$

$$\Omega_0 = \Delta t_0 \omega_0 \quad (3.13b)$$

A grosso modo, pode-se entender estabilidade como a característica que garante que o método numérico ao longo da marcha no tempo não amplifique o erro oriundo das condições iniciais e do processo de discretização e a precisão como a característica que trata sobre o valor definido pela estratégia de integração do método para este erro, em consonância com a estabilidade e eficiência computacional. Estes conceitos estão fortemente correlacionados e são abordados para o método ω -AE no próximo capítulo. Por enquanto, um conceito geral é apenas apresentado no que concerne à apresentação da técnica de subciclagem, a seguir abordada.

3.2.1 Discretização temporal localmente adaptada: a subciclagem

Em adição à discretização temporal realizada por um esquema explícito de marcha no tempo, a subciclagem, conceito recorrente na literatura [19,20,28-39], é comumente empregada para melhoria de eficiência computacional, bem como aumento da robustez do método. A necessidade de um passo de tempo crítico em marchas explícitas, embora garanta a estabilidade, acaba por subotimizar a marcha no tempo, uma vez que diversos elementos da malha não precisariam utilizar um passo de tempo tão pequeno quanto Δt_0 . Neste contexto, a subciclagem permite que o problema seja minimizado e pode ser entendida como uma discretização local otimizada, que consiste em dividir o domínio espacial global discreto em subdomínios menores, cada um possuindo um passo de tempo adequado a ser utilizado na marcha no tempo.

Na estratégia aqui adotada, esta divisão do domínio considera um passo de tempo base (Δt_{base}), menor ou igual a Δt_0 e então subdomínios são criados, levando em

consideração potências de 2 multiplicadas por Δt_{base} para definição do passo de tempo de cada subdomínio, observando sempre os limites de estabilidade. Através deste conceito, cada nó do modelo espacial pode ser alocado em um subdomínio temporal, marchando com o respectivo passo de tempo.

A Fig. 3.4 ilustra a subdivisão de um domínio qualquer, considerando uma malha irregular de elementos finitos e a atribuição de dois passos de tempo. Assim, os nós destacados na imagem 3.4(a) marchariam com passo de tempo $\Delta t_1 = 2^0 \Delta t_{base}$ e os nós destacados na imagem 3.4 (b), com passo $\Delta t_2 = 2^1 \Delta t_{base}$.

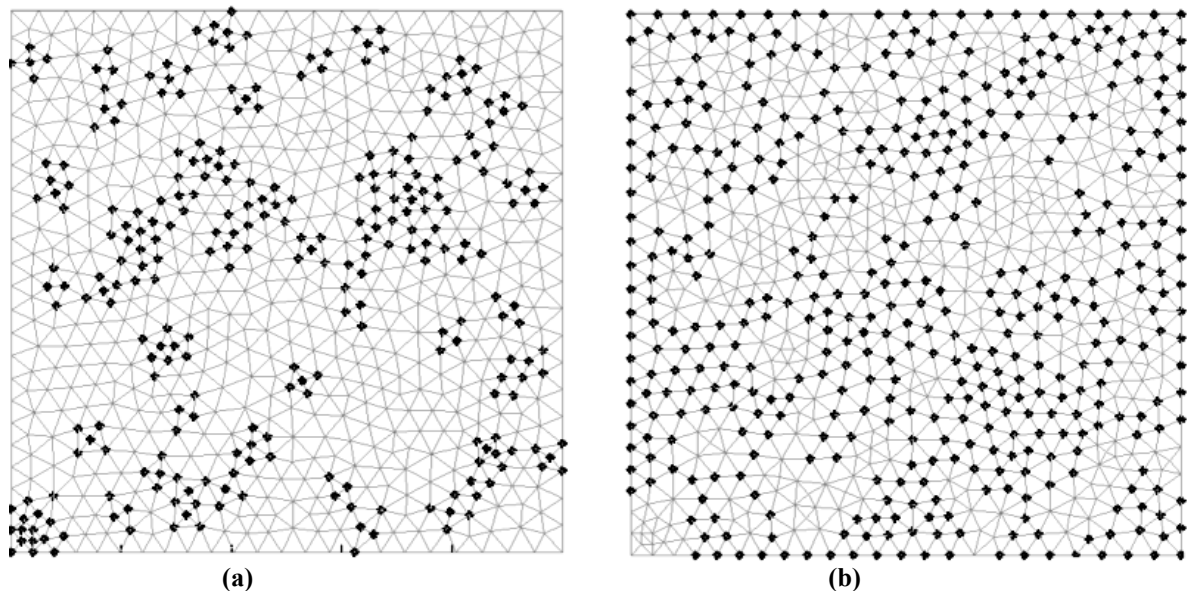


Figura 3.4 - Exemplo da subdivisão de um domínio para a subciclagem: (a) nós no subdomínio 1, (b) nós no subdomínio 2.

Em tese, cada elemento da malha possui um passo de tempo crítico (Δt_0^e) e é a partir destes valores que os subdomínios são criados. Esta primeira etapa de classificação dos nós em distintos subdomínios, consiste em primeiro avaliar, durante o processo de construção das matrizes para o MEF 2D, os nós de cada elemento da malha e calcular respectivos passos de tempo críticos como sendo igual a Δt_{base}^e e, quando o nó pertencer a mais de um elemento, o menor Δt_{base}^e dentre os elementos a este nó conectados é a ele atribuído. Após todos os elementos serem analisados, cada nó da malha tem um passo de tempo crítico a ele atribuído,

chamado de passo de tempo primitivo (Δt_{prim}), que será utilizado no intuito de não violar o critério de estabilidade.

Levando em consideração Δt_{base} e seus múltiplos, os subdomínios são construídos e os nós neles alocados da seguinte maneira: para cada potência de 2 multiplicada por Δt_{base} , partindo de 2^0 , são avaliados os nós da malha e seus respectivos Δt_{prim} e, caso Δt_{prim} seja maior ou igual a $2^n \Delta t_{base}$ e menor que $2^{n+1} \Delta t_{base}$ (com $n=0,1,2,3\dots$), o respectivo subdomínio é criado e os nós que obedecem a esta condição nele alocados.

Realizada a criação dos subdomínios e classificação dos nós, a solução para cada subdomínio é computada considerando a solução do respectivo subdomínio no seu passo de tempo anterior e, para as bordas dos subdomínios, a solução é interpolada sempre que necessário e assim a solução global deste passo de tempo global é construída. Considera-se aqui, interpolação baseada em ajuste de curvas parabólicas em relação a três passos de tempo consecutivos, sendo esta uma abordagem consistente com técnicas de segunda ordem (como é o caso) [24]. Feitas estas considerações a respeito da discretização temporal, o MDC e o método α -GE são a seguir apresentados.

3.2.2 O Método da Diferença Central (MDC)

O MDC é uma referência mundial nas últimas décadas, quando se trata de métodos explícitos. Sua formulação é baseada em aproximações por diferenças centrais para as derivadas temporais e interpolações quadráticas são utilizadas para obtenção do campo incógnita nos instantes de tempo $(t-\Delta t)$ e $(t+\Delta t)$, sendo portanto, um método com precisão de 2ª ordem. Como é uma técnica explícita, o MDC exige que o Δt escolhido seja menor ou igual a um valor crítico, para que a frequência de amostragem seja menor ou igual à crítica, sendo estes valores críticos definidos abaixo, na Eq. (3.14) [4]:

$$\Delta t_c^{MDC} = \frac{T_c}{\pi} = \frac{2}{\omega_c} \quad \text{ou} \quad \Omega_c^{MDC} = 2 \quad (3.14)$$

Como o MDC é de fácil implementação e geralmente eficiente, embora não contemple amortecimento numérico, ele é amplamente utilizado como método de comparação para a afirmação das características de outros métodos. Neste sentido, a figura abaixo mostra um esquema de sua rotina de marcha no tempo. Relembra-se que o MDC não é aqui discutido, sendo o mesmo somente apresentado.

1. Calcular as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F} .
2. A partir das condições iniciais \mathbf{U}^0 e $\dot{\mathbf{U}}^0$ calcula-se $\ddot{\mathbf{U}}^0 = (\mathbf{M})^{-1}(\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}\mathbf{U}^0)$ e

$$\mathbf{U}^{-\Delta t} = \mathbf{U}^0 - \Delta t \dot{\mathbf{U}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^0$$
3. Escolhe-se $\Delta t \leq \Delta t_0$
4. Calcula-se as constantes $a_0 = \Delta t^{-2}$, $a_1 = (2\Delta t)^{-1}$, $a_2 = 2a_0$
5. Calcula-se $\hat{\mathbf{M}} = (a_0 \mathbf{M})^{-1}$
6. E a cada passo de tempo:
 - 6.1. Calcula-se $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^t + (a_2 \mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{U}^t - a_0 \mathbf{M}\mathbf{U}^{t-\Delta t}$
 - 6.2. Calcula-se $\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{F}}$
 - 6.3. Calcula-se (se necessário) $\dot{\mathbf{U}}^t = a_1(\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^{t-\Delta t})$ e $\ddot{\mathbf{U}}^t = a_0(\mathbf{U}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t-\Delta t})$

Figura 3.5 - Esquema de marcha do MDC.

3.2.3 O método α - Generalizado Explícito (α -GE)

Analogamente, o método α -GE [1] é outro método consagrado, o qual tem precisão de 2ª ordem e apresenta como característica adicional ao MDC a presença de amortecimento numérico. Uma vez que a presença de amortecimento numérico configura uma das características de maior relevância na abordagem aqui desenvolvida, o α -GE é também escolhido como método comparativo neste trabalho.

O método α -GE possui um parâmetro (ρ) a ser escolhido manualmente durante a inicialização do algoritmo, o qual representa o valor do raio espectral no limite de bifurcação e rege a dissipação numérica. Uma vez que esta é uma técnica explícita, assim como o MDC ela também está condicionada a uma frequência de amostragem crítica, que neste caso é dependente deste parâmetro ρ e está definida a seguir na Eq. (3.15).

$$\Omega_c^{\alpha-GE} = \sqrt{\frac{12(1+\rho)^3(2-\rho)}{10+15\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4}} \quad (3.15)$$

Ainda, quando o amortecimento numérico se faz presente em uma técnica explícita, a chamada frequência de bifurcação (Ω_B) é de suma importância na modelagem do método. Este conceito é melhor abordado no próximo capítulo, tendo por enquanto, apenas seu valor descrito para o método α -GE na Eq. (3.16), observando-se à restrição de que para garantir a estabilidade deste método, a frequência de bifurcação deve ser menor ou igual à frequência crítica ($\Omega_B^{\alpha-GE} \leq \Omega_c^{\alpha-GE}$). Isto posto, a Fig. 3.6 apresenta o esquema de marcha no tempo do método.

$$\Omega_B^{\alpha-GE} = (1+\rho)\sqrt{2-\rho} \quad (3.16)$$

1. Calcular as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F} .
 2. A partir das condições iniciais \mathbf{U}^0 e $\dot{\mathbf{U}}^0$, calcula-se $\ddot{\mathbf{U}}^0 = (\mathbf{M})^{-1}(\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}\mathbf{U}^0)$
 3. Escolhe-se $\Delta t \leq \Delta t_0$
 4. Seleciona-se o parâmetro ρ ($0 \leq \rho \leq 1$)
- Destaca-se que: $\rho = \begin{cases} 1 & \text{para nenhum amortecimento numérico} \\ 0.366534 & \text{para mínimo alongamento de período} \\ 0 & \text{para máximo amortecimento numérico} \end{cases}$
5. Calcula-se as constantes $\alpha_m = \frac{2\rho - 1}{\rho + 1}$, $\beta = \frac{5 - 3\rho}{(\rho + 1)^2(2 - \rho)}$ e $\gamma = \frac{3}{2} - \alpha_m$
 6. E a cada passo de tempo:
 - 6.1. Calcula-se $\hat{\mathbf{F}} = (\mathbf{K}\mathbf{U}^t + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t)$
 - 6.2. Calcula-se $\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{(1 - \alpha_m)} (\mathbf{M})^{-1} (\mathbf{F} - \hat{\mathbf{F}})$
 - 6.3. Calcula-se $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right)$
 - 6.4. Calcula-se $\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right)$

Figura 3.6 - Esquema de marcha do método α -GE.

Capítulo 4. O Método ω - Adaptativo Explícito (ω -AE)

De posse do modelo hiperbólico discreto no espaço e dos conceitos relativos à discretização temporal apresentados no capítulo anterior, o foco principal deste trabalho de propor o método ω - adaptativo explícito (ω -AE) é agora abordado.

Como previamente citado, o método ω -AE é um técnica explícita de marcha no tempo, que utiliza um parâmetro de integração espacial e temporalmente adaptativo para inserção de amortecimento numérico na análise, o qual é atualizado a cada passo de tempo, de acordo com a solução computada em passos de tempo anteriores. A atualização deste parâmetro é baseada em um critério de oscilação e, caso esta seja percebida, o amortecimento numérico é introduzido localmente na análise.

O método tem sua formulação desenvolvida com base somente em variáveis do campo incógnita e de sua derivada temporal primeira, ou seja, em momento algum há a necessidade de computar derivadas temporais de segunda ordem. Esta característica torna a metodologia simples e eficiente, uma vez que menos cálculos são necessários no decorrer da marcha, além de fazer o método realmente auto-iniciável, pois dispensa os cálculos de derivada segunda durante a inicialização do algoritmo. Neste contexto o método e sua formulação são apresentados a seguir, bem como são descritas e analisadas suas propriedades.

4.1 Formulação

A Eq. (3.6) que representa o modelo hiperbólico discreto no domínio espacial é agora discretizada também no domínio temporal para compor o problema a ser solucionado numericamente, a fim de que se desenvolva a análise dinâmica do sistema em estudo, pelo método ω -AE.

A idéia básica do método é utilizar uma formulação fraca. Neste intuito, assume-se que dentro do intervalo Δt , a variação do campo incógnita seja linear, então este é

aproximado por polinômios lineares, com a primeira derivada constante. Na estratégia utilizada o campo incógnita em um dado passo de tempo é expresso em função de seu valor no passo de tempo anterior, considerando sua variação neste intervalo de tempo. A Fig. 4.1 apresenta o esquema de diferenças finitas utilizado a partir desta idéia.

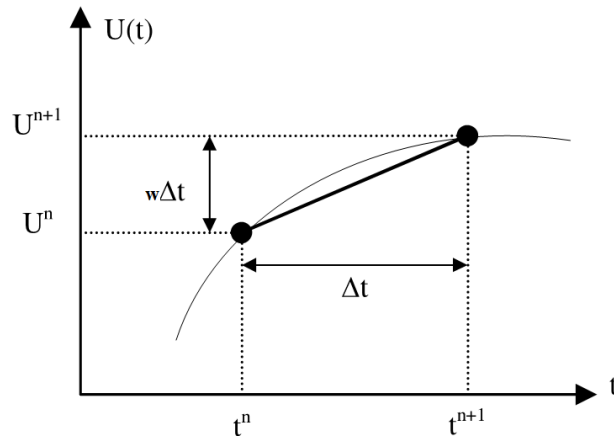


Figura 4.1. Esquema de diferenças finitas adotado na formulação do método.

Assim, as aproximações utilizadas para o campo incógnita e sua taxa de variação dentro do intervalo Δt são definidas por:

$$U^{n+1} = U^n + w\Delta t \quad (4.1a)$$

$$w = \frac{1}{2} \dot{U}^n + \frac{1}{2} \dot{U}^{n+1} \quad (4.1b)$$

Onde:

U^n é a aproximação para $U(\tau^n)$

\dot{U}^n é a aproximação para $\dot{U}(\tau^n)$

$\tau^n = n\Delta t$

n é o contador do passo de tempo corrente.

w é a taxa de variação do campo incógnita no intervalo de tempo Δt .

Para a formulação fraca acima citada, a Eq. (3.6) é escrita sob a forma integral e a seguinte expressão é obtida:

$$\mathbf{M}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{U}}_e(\tau) d\tau + \mathbf{K}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{U}_e(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{F}_e(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

Sendo os termos do lado esquerdo da Eq. (4.2) aproximados por:

$$\mathfrak{S}_{\ddot{\mathbf{U}}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{U}}_e(\tau) d\tau \approx \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_e^n \quad (4.3a)$$

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{U}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{U}_e(\tau) d\tau \approx \Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \alpha_e^n \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n \quad (4.3b)$$

Onde α_e^n é o parâmetro de integração temporal usado na estratégia de amortecimento numérico.

A integral no lado direito da Eq. (4.2), a ser representada por $\mathfrak{S}_{\mathbf{F}_e}^{n+\frac{1}{2}}$, descreve o comportamento do termo fonte, assumindo que ele é conhecido em todo o domínio temporal. Esta pode ser aproximada por diversas funções, como será explicitado no item 4.2 do presente capítulo.

Isto posto, quando realizadas as aproximações acima descritas, a Eq. (4.2) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_e \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} = \mathfrak{S}_{\ddot{\mathbf{U}}_e}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{U}}_e^n - \mathbf{K}_e (\Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \alpha_e^n \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n) \quad (4.4)$$

Expressão a partir da qual se pode computar as derivadas primeiras do campo incógnita em um dado passo de tempo, a partir das respostas de passos anteriores e do vetor fonte, discretos no espaço e no tempo. E substituindo a Eq. (4.1b) em (4.1a), obtém-se a expressão de diferenças finitas:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (4.5)$$

Desta forma, as Eq. (4.4) e (4.5) formam a relação recursiva que define o método ω -AE, a ser computada em cada passo de tempo.

Observa-se, considerando a Eq. (3.12), que uma vez \mathbf{M} modelada como uma matriz diagonal, não há sistema de equações a ser resolvido, caracterizando a marcha como explícita. Ainda, o conjunto de equações recursivas do método permite que o campo incógnita seja computado a cada passo de tempo, a partir de seus valores em passos de tempo anteriores e de sua derivada primeira, não sendo necessário o cálculo de derivadas segundas em nenhum momento da formulação. Por este motivo o método é considerado realmente auto-iniciável, uma vez que elimina rotinas de cálculo durante a inicialização da marcha no tempo e torna a metodologia de simples implementação.

Com relação ao parâmetro α_e^n , ele é computado a cada passo de tempo para cada elemento do domínio. Ele é baseado em um critério de oscilação φ_e^n , o qual leva em consideração a resposta em três passos de tempo anteriores, como descrevem as Eq. (4.6a-c). Desta forma, se o resultado computado em um determinado grau de liberdade oscila em passos anteriores, o parâmetro α_e^n dos elementos ao redor deste grau de liberdade são calculados de forma a introduzir um amortecimento numérico e, caso nenhum comportamento oscilatório seja notado, este parâmetro se mantém unitário, não introduzindo amortecimento numérico.

$$\varphi_e^n = \sum_{i=1}^{n_e} \left(|u_i^n - u_i^{n-2}| - |u_i^n - u_i^{n-1}| - |u_i^{n-1} - u_i^{n-2}| \right) \quad (4.6a)$$

$$\text{Se } \varphi_e^n = 0, \quad \alpha_e^n = 1 \quad (4.6b)$$

$$\text{Se } \varphi_e^n \neq 0, \quad \alpha_e^n = \frac{4}{\omega_e \Delta t} - 1 \quad (4.6c)$$

Onde:

η_e é o número de graus de liberdade do elemento.

ω_e é a máxima frequência natural de oscilação do elemento.

Então, o conjunto formado pelas Eq. (4.4), (4.6) e (4.6) formulam o método ω -AE, responsável pela discretização temporal para análise transiente de problemas hiperbólicos, como a propagação de ondas eletromagnéticas. Nos itens a seguir, as propriedades do método são analisadas.

4.2 Propriedades

Convencionalmente se considera que uma solução numérica representa uma aproximação razoável para a solução exata do problema matemático quando assegura características como estabilidade, precisão, consistência e convergência. Estas características, por sua vez, são intimamente relacionadas entre si e dependem dos erros envolvidos nos processos matemáticos e numéricos de obtenção da solução. Neste sentido, caracterizam-se:

- I. *Estabilidade*: um esquema é dito estável se não amplifica artificialmente as condições iniciais ao longo da marcha no tempo, impedindo que a solução cresça indefinidamente para quaisquer condições iniciais. Para métodos condicionalmente estáveis, o Δt escolhido deve ser mantido menor ou igual a um valor crítico definido pelas estratégia de integração adotada e propriedades do modelo.
- II. *Amortecimento numérico*: o amortecimento numérico é um meio de minimizar, senão eliminar modos espúrios presentes na resposta numérica provenientes do processo de discretização espacial. É definido aqui por um parâmetro da estratégia de integração.

- III. *Convergência:* a convergência de um método numérico de marcha no tempo implica em garantir que à medida que os passos de tempo sejam refinados a solução numérica tenda à solução exata. Assim, cada método apresenta uma determinada ordem de convergência ou ordem de precisão. Esta, por sua vez, pode ser obtida através da expansão em série de Taylor dos termos da chamada matriz de aproximação ou matriz de amplificação.
- IV. *Precisão:* em problemas de vibrações, é comum definir erros em termos de alongamento de período e decaimento de amplitude, sendo usualmente estes parâmetros utilizados para caracterização da precisão de uma metodologia numérica em problemas hiperbólicos.

Para a análise das propriedades de uma marcha no tempo, uma forma alternativa a métodos de integração direta, a superposição, é considerada. Nesta metodologia, a Eq. (3.6) é escrita sob forma de q equações desacopladas, correspondentes aos q primeiros autovalores do sistema em estudo, cada uma com o período de oscilação natural (T) conhecido e, cada uma delas pode ser integrada com um passo de tempo específico e respectiva precisão. Entretanto, no caso de se integrar as q equações com o mesmo passo de tempo (se q corresponde à totalidade de equações do modelo e, conseqüentemente, ao total de autovalores do sistema), a análise por superposição é equivalente à por integração direta, ou seja, a solução obtida por superposição ou por integração direta é exatamente a mesma [4]. Então, utilizando um modelo de um grau de liberdade característico e atentando às peculiaridades de uma técnica explícita para análise transiente de problemas hiperbólicos, as propriedades do método ω -AE podem ser satisfatoriamente analisadas. Para tal, o problema de um grau de liberdade descrito na Eq. abaixo é utilizado.

$$\ddot{u}(t) + w^2 u(t) = f(t) \quad (4.7)$$

Onde:

w é a frequência natural de oscilação.

Considerando que em uma marcha no tempo a resposta é obtida em passos de tempo subsequentes, as equações da relação recursiva do método (4.4) e (4.5) são a seguir reescritas sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u^{n+1} \\ \dot{u}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n \\ \dot{u}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^n \\ f^{n+\frac{1}{2}} \\ f^{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u^n \\ \dot{u}^n \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} f^n \\ f^{n+\frac{1}{2}} \\ f^{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde:

\mathbf{A} é denominada matriz de aproximação ou matriz de amplificação.

\mathbf{L} é denominada matriz de excitação ou fonte.

As definições destas matrizes, para o método ω -AE, são dadas respectivamente pelas equações a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 & (1 - \frac{1}{4} \alpha \omega^2 \Delta t^2) \Delta t \\ -\omega^2 \Delta t & 1 - \frac{1}{2} \alpha \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \beta_1 \Delta t^2 & \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 & \frac{1}{2} \beta_3 \Delta t^2 \\ \beta_1 \Delta t & \beta_2 \Delta t & \beta_3 \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

Onde:

β_1, β_2 e β_3 são os parâmetros de integração do termo fonte.

Os parâmetros de integração acima descritos podem ser escolhidos de acordo com a abordagem utilizada na aproximação do termo $\mathfrak{F}_{F_e}^{n+\frac{1}{2}}$ da Eq. (4.4). A Tabela 4.1 apresenta alguns valores para estes parâmetros e os respectivos resultados reproduzidos. No que segue, as propriedades do método ω -AE são abordadas.

Tabela 4.1 - Exemplo de valores para os parâmetros de integração do termo fonte.

β_1	β_2	β_3	Resultado
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	Integração exata para comportamento linear de $F(t)$ em Δt
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Regra trapezoidal
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	Regra de Simpson

4.2.1 Estabilidade e amortecimento numérico

A estabilidade de um método numérico está diretamente relacionada ao esquema de integração e para assegurá-la, é necessário analisar o raio espectral da matriz de amplificação ($\rho(\mathbf{A})$), definido na Eq. (4.10).

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_{1,2}| \quad (4.10)$$

Onde os autovalores (λ) de \mathbf{A} são dados por:

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{A}) = A_1 \pm (A_1^2 - A_2)^{1/2} \quad (4.11)$$

Onde A_1 é metade do traço da matriz \mathbf{A} e A_2 é o seu determinante, dados respectivamente, por (4.12a) e (4.12b).

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) = \left[1 - \frac{1}{4}(\alpha + 1)\Omega^2 \right] \quad (4.12a)$$

$$A_2 = \det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Omega^2 \right] \quad (4.12b)$$

E Ω é denominada frequência de amostragem do modelo, definida por:

$$\Omega = w\Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad (4.13)$$

De maneira a garantir que a resposta não cresça indefinidamente, as duas restrições abaixo devem ser consideradas:

- i.* se todos os autovalores são distintos, o raio espectral da matriz de amplificação deve ser menor ou igual a 1 ($\rho(\mathbf{A}) \leq 1$);
- ii.* se não, os autovalores com multiplicidade igual ou maior que 2 devem ser estritamente menores que 1, em módulo ($|\rho(\mathbf{A})| < 1$) e é desejável que $\lambda_{1,2} \rightarrow 0$ neste caso.

Analisando o raio espectral de \mathbf{A} juntamente com as restrições em *(i)* e *(ii)*, a maior frequência de amostragem sob a qual a propriedade de estabilidade é assegurada, denominada frequência de amostragem crítica (Ω_C), é a seguir definida:

$$\Omega_C = 2\alpha^{-1/2} \quad (4.14)$$

A forma numérica que os autovalores $\lambda_{1,2}$ assumem influenciam diretamente no tipo de amortecimento que é introduzido à análise. Neste contexto, a chamada frequência de bifurcação (Ω_B), valor a partir do qual os autovalores deixam de ser complexos conjugados e bifurcam em valores reais distintos, é a seguir levada em consideração, juntamente com a descrição da estratégia de amortecimento numérico adotada.

Como descrito em [6], em geral, é visto como desejável, se não absolutamente necessário que haja algum meio de inserção de amortecimento numérico para remover os modos espúrios de alta frequência presentes no modelo semi-discreto, uma vez que estes são artefatos gerados pelo processo de discretização espacial e não representam a solução do problema real. A frequência de bifurcação é de suma importância na estratégia aqui utilizada, pois esta é a frequência na qual o emprego de amortecimento numérico presente é otimizado. Ela é obtida quando o discriminante da Eq. (4.11) é nulo e seu valor é dado por:

$$\Omega_B = 4(\alpha + 1)^{-1} \quad (4.15)$$

Uma vez definidas a máxima frequência de amostragem permitida (Ω_C) e a frequência na qual o amortecimento é máximo (Ω_B), a última análise para definição dos critérios de estabilidade do método é em relação ao parâmetro α . Neste contexto, a frequência de bifurcação deve ser mantida igual ou menor à frequência crítica, para que as condições de estabilidade não sejam violadas e os possíveis valores de α , definidos. Isto feito, pode-se definir o critério de estabilidade do método ω -AE, descrito em função do parâmetro α , como mostra a tabela 4.2. Ressalta-se que se $\alpha = 1$, características do MDC são reproduzidas, inclusive o comportamento do raio espectral.

Tabela 4.2 - Condições de estabilidade do método ω -AE.

α	Comportamento
$\alpha < 1$	incondicionalmente instável
$\alpha \geq 1$	condicionalmente estável
$\alpha = 1$	amortecimento numérico ausente
$\alpha > 1$	amortecimento numérico presente

A Fig. 4.2 mostra raios espectrais do método ω -AE para diversos valores de α , enquanto a Fig. 4.3 mostra as principais características do raio espectral como função de Ω .

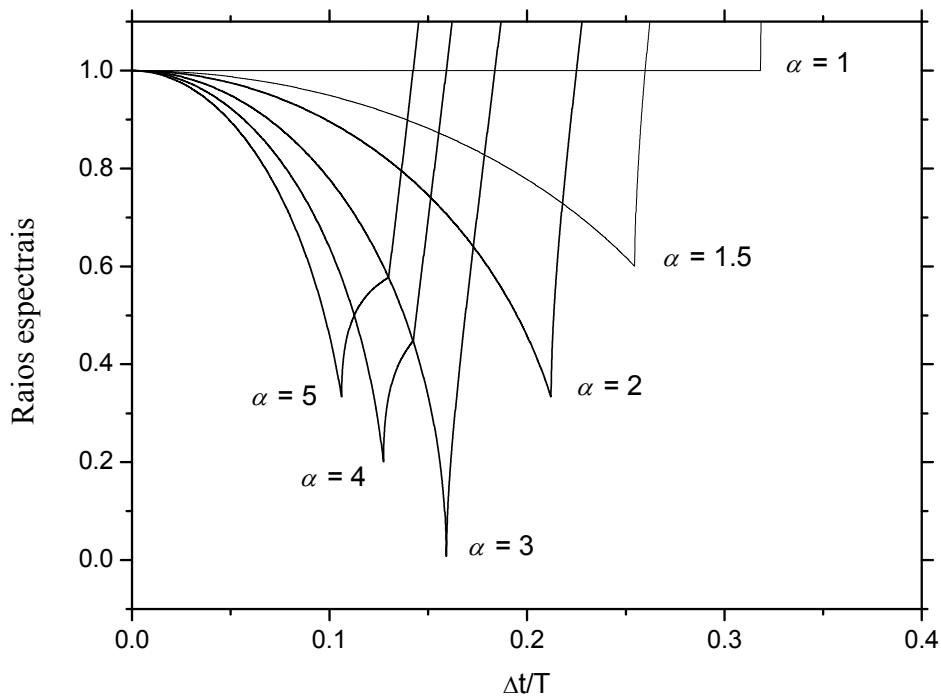


Figura 4.2 - Raios espectrais do método ω -AE.

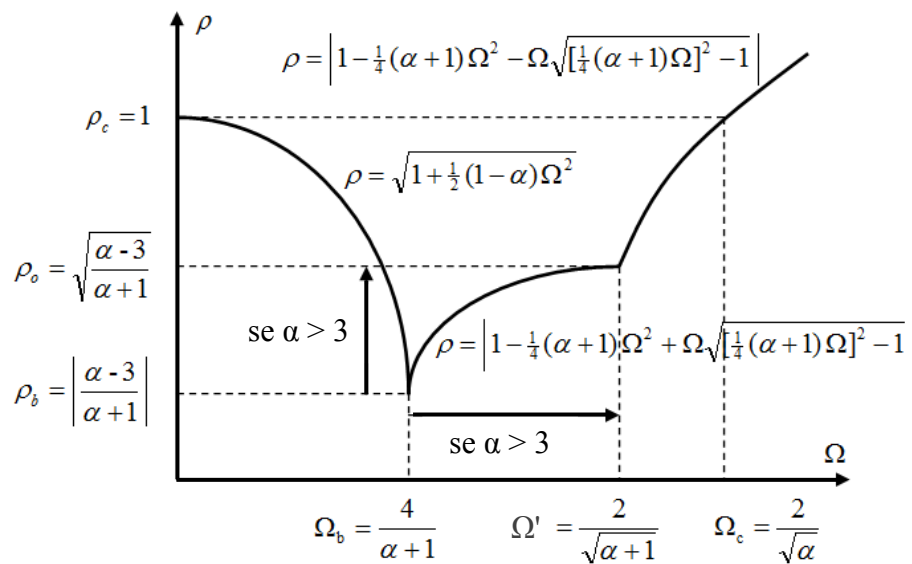


Figura 4.3 - Comportamento do raio espectral.

É possível ver que na frequência de bifurcação o raio espectral atinge seu valor mínimo, dado por $\rho_b = \left| \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} \right|$. Então, para $\alpha=3$, $\rho=0$ em $\Omega=1$ e para $\alpha=1$, $\rho=1$ em $\Omega=2$.

Como indicado nas Fig. 4.2 e 4.3, o maior amortecimento numérico ocorre nas frequências de bifurcação, considerando-se o problema com um grau de liberdade. Ao mesmo tempo, considerando-se problemas com múltiplos graus de liberdade provenientes da discretização espacial pré-realizada, maior amortecimento numérico deve ocorrer nas maiores frequências do modelo, de forma a dissipar a influência de modos espúrios, devendo os importantes baixos modos de vibração do modelo não ser significativamente afetados por tal amortecimento.

Assim sendo, de alguma forma o amortecimento numérico deve ser introduzido na análise, de maneira a afetar predominantemente os maiores modos do sistema. Guiado por esta premissa, no presente trabalho, quando se pretende introduzir amortecimento à análise, calcula-se α em nível de elemento, de forma que a maior frequência do elemento coincida com a frequência de bifurcação do método e obtém-se a Eq. (4.6c). Mais ainda, como a frequência de bifurcação é sempre menor ou igual à frequência crítica do modelo para $\alpha \geq 1$, tem-se que o Δt_c da análise torna-se $\Delta t_c = 2\omega_c^{-1}$, considerando-se ou não amortecimento numérico, conforme indicado nas Eq. (4.6).

Assim ocorre pois, sendo a frequência máxima do elemento igual à frequência de bifurcação, esta sempre será menor que a frequência crítica (para $\alpha > 1$) e a estabilidade é garantida. Para $\alpha = 1$, a frequência de amostragem máxima do elemento será igual à frequência de amostragem crítica e a estabilidade ocorrerá tendo em conta o mesmo Δt_c do MDC.

É importante ressaltar que a adaptatividade aqui considerada para o parâmetro α permite que amortecimento numérico seja introduzido à análise sem que o Δt_c diminua, o que não é usual. Nos métodos de marcha no tempo tradicionais, a introdução de amortecimento numérico implica na redução do Δt_c , impondo maiores limitações ao seu uso. Destaca-se assim outro grande aspecto positivo do método proposto: ele permite a introdução de amortecimento numérico à análise sem reduzir seu Δt_c .

4.2.2 Convergência e precisão

Uma vez que o método ω -AE é um método numérico, é usual definir a ordem de precisão (O), o que corresponde à taxa de convergência que o método apresenta e possui um erro de truncamento (ε^tr) a ele associado. Isto é feito através da expansão dos termos da matriz \mathbf{A} em série de Taylor e ε^tr é dado pela diferença entre os valores analítico e numérico. Os valores analíticos são dados a seguir, pelas Eq. (4.16).

$$A_{11}^a = 1 - \frac{1}{2} w^2 \Delta t^2 + \frac{1}{24} w^4 \Delta t^4 + O(\Delta t^6) \quad (4.16a)$$

$$A_{12}^a = \Delta t - \frac{1}{6} w^2 \Delta t^3 + \frac{1}{120} w^4 \Delta t^5 + O(\Delta t^6) \quad (4.16b)$$

$$A_{21}^a = -w^2 \Delta t + \frac{1}{6} w^2 \Delta t^3 - \frac{1}{120} w^4 \Delta t^5 + O(\Delta t^6) \quad (4.16c)$$

$$A_{22}^a = 1 - \frac{1}{2} w^2 \Delta t^2 + \frac{1}{24} w^4 \Delta t^4 + O(\Delta t^6) \quad (4.16d)$$

Ao passo que para o método ω -AE, os valores obtidos são apresentados nas Eq. (4.17). Como pode ser visto, o método apresenta precisão de segunda ordem para $\alpha = 1$.

$$A_{11} = 1 - \frac{1}{2} w^2 \Delta t^2 \quad (4.17a)$$

$$A_{12} = \Delta t - \frac{1}{4} \alpha w^2 \Delta t^3 \quad (4.17b)$$

$$A_{21} = -w^2 \Delta t \quad (4.17c)$$

$$A_{22} = 1 - \frac{1}{2} \alpha \omega^2 \Delta t^2 \quad (4.17d)$$

Embora o erro de truncamento seja um parâmetro útil na verificação da precisão temporal de um método numérico, para problemas hiperbólicos a utilização de outros parâmetros que permitam melhor análise do amortecimento numérico e da performance da resposta numérica ao longo do tempo são comumente empregados. Neste sentido, medidas do erro relativo de período, ou alongamento de período (τ) e decaimento de amplitude (DA) são consideradas [6]. Ainda, seguindo a proposta mais recente de [8], um parâmetro é adicionado à análise, o qual computa o erro na amplitude nos resultados numéricos que não é proveniente do decaimento de amplitude, chamado fator de amplitude (A_f).

Partindo do modelo na Eq. (4.7) para o caso homogêneo e fazendo uso recursivo da relação sob a forma da Eq. (4.8), uma equação de diferenças em termos de campo incógnita é obtida, como a seguir:

$$u^{n+1} - 2A_1 u^n + A_2 u^{n-1} = 0 \quad (4.18)$$

Assim, pela comparação da Eq. (4.18) com a equação característica de \mathbf{A} , considera-se que a solução numérica seja da forma descrita na Eq. (4.19a), com autovalores complexos conjugados como descrito em (4.19b) e as constantes c_1 e c_2 (4.19c) definidas a partir das condições iniciais.

$$u^n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad (4.19a)$$

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi \quad (4.19b)$$

$$c_{1,2} = c_r \pm c_i i \quad (4.19c)$$

A solução numérica, pode ser comparada ao modelo de um caso subamortecido, abaixo descrito, nas Eq. (4.20).

$$\bar{u}^n = e^{-\bar{\xi} \bar{\omega} t^n} \left(\bar{c}_1 \cos(\bar{\omega}_d t^n) + \bar{c}_2 \text{sen}(\bar{\omega}_d t^n) \right) \quad (4.20a)$$

$$\bar{c}_{1,2} = \bar{c}_r \pm \bar{c}_i i \quad (4.20b)$$

Onde:

$\bar{\xi}$ é o coeficiente de amortecimento.

$\bar{\omega}$ é a frequência natural de oscilação do modelo.

$\bar{\omega}_d$ é a frequência de oscilação amortecida $\left(\bar{\omega}_d = \bar{\omega} \sqrt{1 - \bar{\xi}^2} \right)$.

Partindo destas premissas, é possível que as medidas de erro sejam estabelecidas. Convencionalmente, como pode ser visto mais aprofundadamente em [40-43], entre outros, relata-se da comparação das soluções numérica a um modelo de um caso subamortecido resultar em:

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi = e^{(-\tilde{\xi} \tilde{\omega}_D \pm \tilde{\omega}_D i) \Delta t} \quad (4.21a)$$

$$\tilde{\omega}_D \Delta t = \text{arctg} \left(\frac{B}{A} \right) \quad (4.21b)$$

$$\tilde{\xi} \tilde{\omega}_D \Delta t = -\frac{1}{2} \ln(A^2 + B^2) \quad (4.21c)$$

Onde:

$\tilde{\xi}$ é o coeficiente de amortecimento numérico.

$\tilde{\omega}_d$ é a frequência amortecida numérica.

Assim, o alongamento de período, que é função de $\tilde{\omega}_d$, pode ser medido pela Eq. (4.21b) e o decaimento de amplitude, a partir de (4.21c), por se função de $\tilde{\xi}$. Entretanto, estas expressões não são totalmente genéricas, uma vez que são aplicáveis apenas quando se considera as constantes das condições iniciais do modelo subamortecido e numéricas, presentes respectivamente nas Eq. (4.20b) e (4.19c), sejam as mesmas, o que não se pode garantir ser sempre verdade. Neste contexto, uma recente proposta [8,9] considera uma formulação mais genérica para cálculo destas grandezas, a qual é aqui utilizada e a seguir, brevemente descrita.

Através da expressão em (4.22), as respostas nas Eq. (4.19a) e (4.20a) podem ser comparadas. Assim, considerando que os autovalores e as constantes iniciais sejam dos tipos, respectivamente, descritos em (4.19b), (4.19c) e (4.20b), a comparação resulta em uma forma mais genérica da Eq. (4.21a), expressa na Eq. (4.22).

$$(c_r \pm c_i i)(A \pm Bi)^n = (\bar{c}_r \pm \bar{c}_i i) e^{(-\bar{\xi}\bar{w} \pm \bar{w}_d i)\Delta t n} \quad (4.22)$$

Onde:

$$c_r = \bar{c}_r = \frac{1}{2} u^0 \quad (4.23a)$$

$$c_i = \frac{1}{2} \left[\frac{A - A_{11}}{B} \right] u^0 - \frac{1}{2} \left[\frac{A_{12}}{B} \right] \dot{u}^0 \quad (4.23b)$$

$$\bar{c}_i = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{w} \right] \dot{u}^0 \quad (4.23c)$$

Ainda, considerando a forma polar para as grandezas nas Eq. (4.19b), (4.19c) e (4.20b), como descrito respectivamente nas Eq. (4.24a), (4.24b) e (4.24c), a expressão em (4.22a) pode ser reescrita como em (4.24d).

$$A \pm Bi = \rho e^{\pm \phi i} \quad (4.24a)$$

$$c_r \pm c_i i = r e^{\pm \theta i} \quad (4.24b)$$

$$\bar{c}_r \pm \bar{c}_i i = \bar{r} e^{\pm \bar{\theta} i} \quad (4.24c)$$

$$\frac{r}{\bar{r}} \rho^n e^{(\pm \phi n \pm \theta \mp \bar{\theta}) i} = e^{(-\bar{\xi} \bar{w} \Delta t n)} e^{(\pm \bar{w}_d \Delta t n) i} \quad (4.24d)$$

E a partir da expressão em (4.24d), pode-se definir:

$$\bar{w}_d \Delta t = \phi + \frac{(\theta - \bar{\theta})}{n} \quad (4.25a)$$

$$\bar{\xi} \bar{w} \Delta t = -\ln(\rho) \quad (4.25b)$$

$$A_f = \left(\frac{r}{\bar{r}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.25c)$$

Ainda, a Eq. (4.22) pode ser reescrita de uma maneira mais compacta:

$$(\bar{A} \pm \bar{B} i) = e^{(-\bar{\xi} \bar{w} \pm \bar{w}_d i) \Delta t} \quad (4.26)$$

Onde:

$$\bar{A} = \text{Re} \left[\left(\frac{c_r \bar{c}_r + c_i \bar{c}_i}{\bar{c}_r^2 + \bar{c}_i^2} \pm \frac{c_i \bar{c}_r + c_r \bar{c}_i}{\bar{c}_r^2 + \bar{c}_i^2} i \right)^{\frac{1}{n}} (A \pm Bi) \right] \quad (4.27a)$$

$$\bar{B} = \text{Im} \left[\left(\frac{c_r \bar{c}_r + c_i \bar{c}_i}{\bar{c}_r^2 + \bar{c}_i^2} \pm \frac{c_i \bar{c}_r + c_r \bar{c}_i}{\bar{c}_r^2 + \bar{c}_i^2} i \right)^{\frac{1}{n}} (A \pm Bi) \right] \quad (4.27b)$$

A expressão na Eq. (4.26) permite que as grandezas em (4.25) sejam escritas sob forma retangular, como descrito nas Eq. (4.28).

$$\bar{w}_d \Delta t = \text{arctg} \left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}} \right) \quad (4.28a)$$

$$\bar{\xi} \bar{w} \Delta t = -\frac{1}{2} \ln(A^2 + B^2) \quad (4.28b)$$

$$A_f = e^{-\left(\bar{\xi} - \bar{\xi}\right) \bar{w} \Delta t} \quad (4.28c)$$

Onde:

$$\bar{\xi} \bar{w} \Delta t = -\frac{1}{2} \ln(\bar{A}^2 + \bar{B}^2) \quad (4.29)$$

$\bar{\xi}$ é o coeficiente de amortecimento numérico.

\bar{w}_d é a frequência amortecida numérica.

Esta mudança para a forma retangular pode facilitar o cálculo das medidas de precisão, na prática. Assim, o alongamento de período $\left(\tau = \frac{w}{\bar{w}} - 1\right)$, o decaimento de amplitude $\left(DA = \bar{\xi}\right)$ e o fator de amplitude (A_f) , podem, respectivamente ser obtidos a partir de (4.28a), (4.28b) e (4.28c). As Fig. 4.4, 4.5 e 4.6 ilustram estas grandezas, para o modelo padrão do caso com condição inicial unitária para o campo-incógnita.

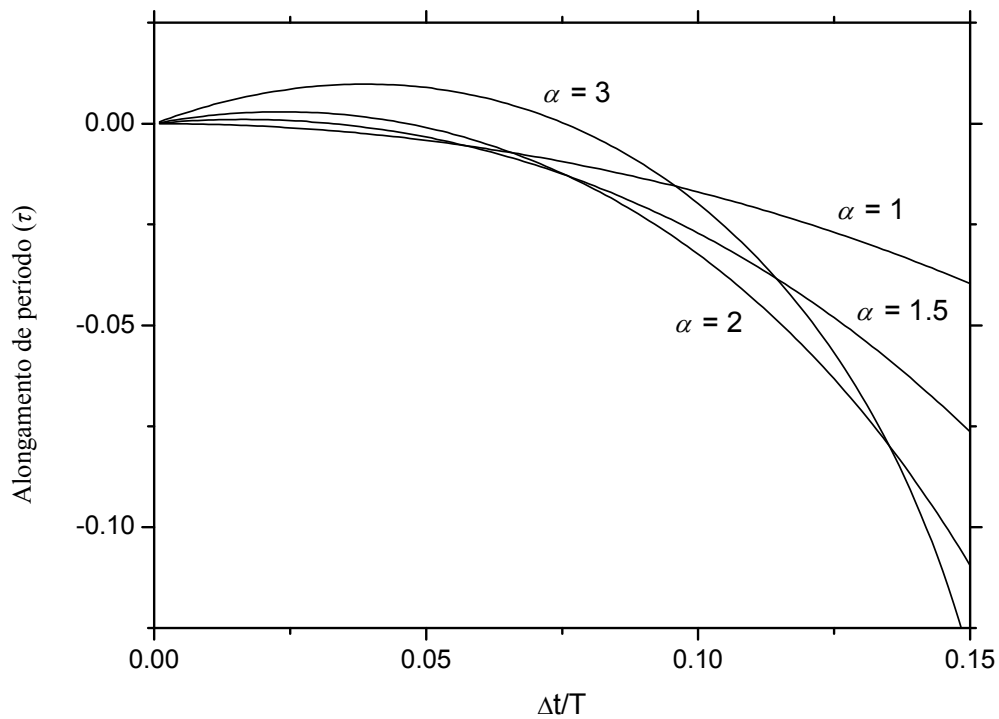


Figura 4.4 - Alongamento de período (τ).

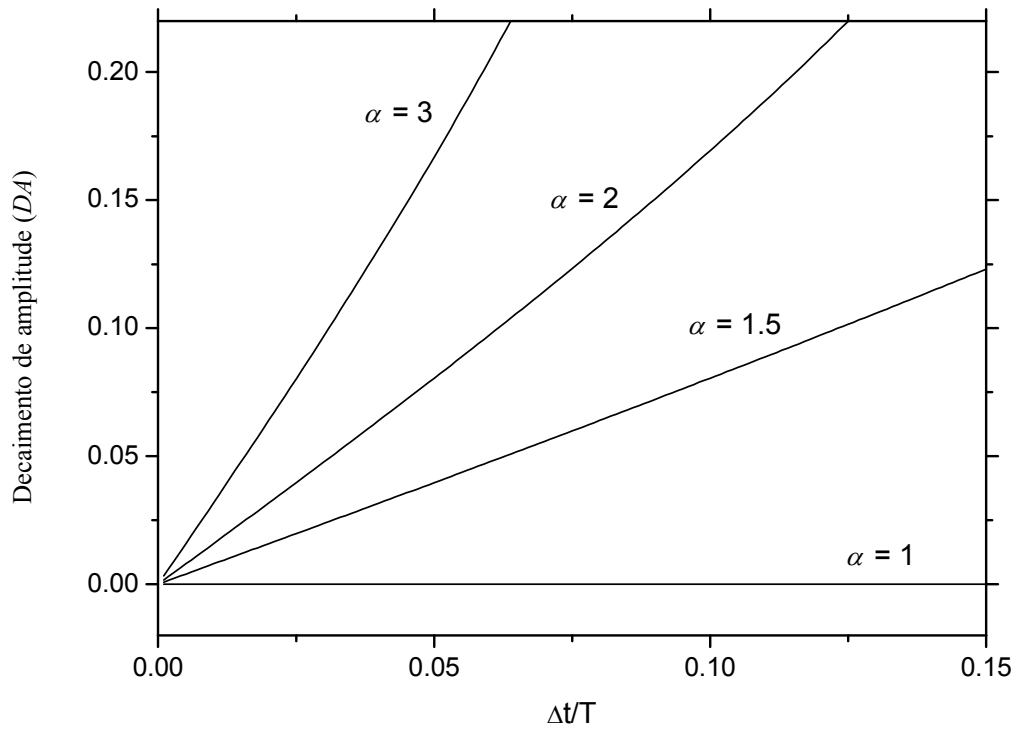


Figura 4.5. Decaimento de amplitude (DA).

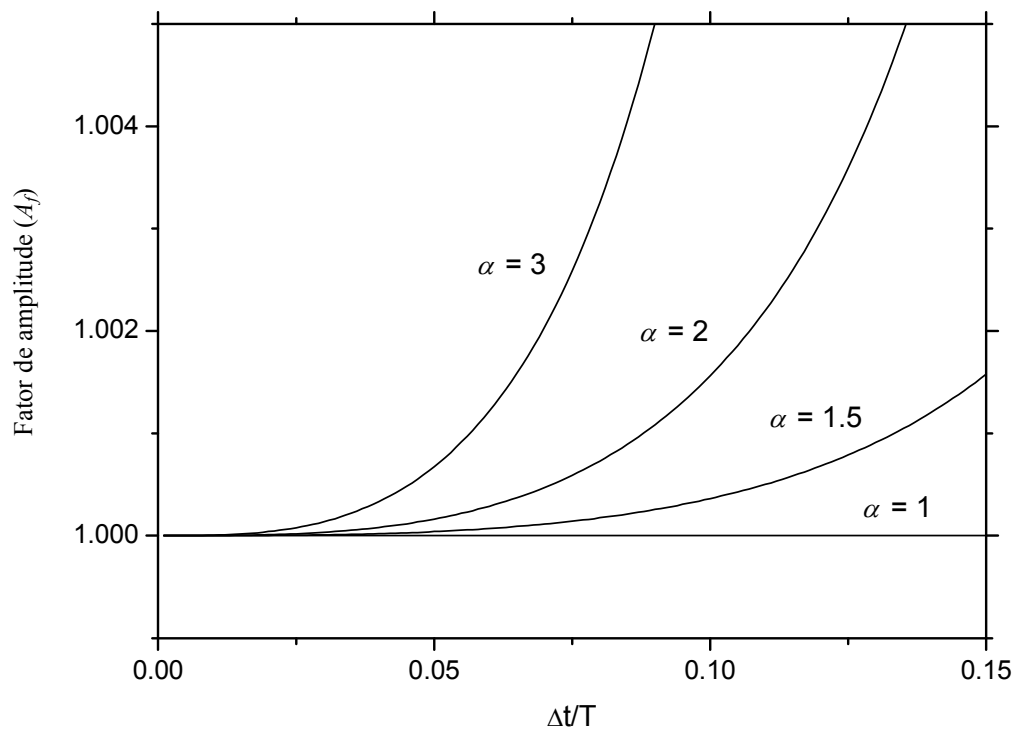


Figura 4.6 - Fator de amplitude (A_f).

Mesmo em posse das medidas acima obtidas para análise de precisão e convergência, é importante ter em mente que estas grandezas são úteis para o cálculos dos erros associados à discretização temporal somente. Entretanto, a discretização temporal é realizada em um modelo matemático já discretizado no espaço, como mostra a Eq. (3.6) e, portanto, já com os erros desta discretização embutidos. Assim, é impossível somente com tais ferramentas conseguir mensurar corretamente os erros associados ao método numérico aqui proposto, uma vez que não há como dimensionar com exatidão as parcelas de contribuição dos erros associados à discretização espacial ou temporal ao erro total. Pode-se inclusive, provar matematicamente que erros da discretização temporal podem contrapor os erros da discretização espacial, implicando em um menor erro total, como mostra [6 (pp. 504-510)] para um problema 1D, quando o erro espacial compensa o temporal, eliminando o erro total e fazendo a solução numérica ser exatamente igual à analítica. Tendo isto em mente e no intuito de demonstrar as potencialidades e performance do método proposto, aplicações numéricas e os respectivos resultados obtidos são a seguir apresentados e discutidos, considerando-se discretização espacial e temporal combinadas.

Capítulo 5. Aplicações Numéricas

Neste capítulo são analisadas três aplicações numéricas, com o objetivo de avaliar o desempenho, bem como as potencialidades do novo método. A primeira e segunda aplicações, respectivamente os itens 5.1 e 5.2 deste capítulo, apresentam solução analítica, para comparação com as respostas obtidas através dos métodos numéricos implementados. A terceira aplicação, item 5.3, por sua vez, é dividida em duas aplicações, a 5.3.1 apresenta solução analítica e sua análise recorre da mesma maneira como nas anteriores, já 5.3.2, representa um sistema envolvendo meios heterogêneos e, neste caso, não apresenta solução analítica trivial, deste modo a análise é realizada somente por comparação entre as soluções obtidas do MDC e dos métodos α -GE e ω -AE.

Nos três casos em estudo, quando pertinente, é computado o valor da Intensidade de Campo Elétrico (**E**) como solução numérica do sistema de equações diferenciais em um ponto de interesse e os erros associados a cada método implementado são calculados utilizando a solução de todos os passos de tempo para este ponto, pela norma L2, com a equação abaixo descrita:

$$Erro = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_t} (u(t_i) - u_a(t_i))^2}{\sum_{i=1}^{N_t} (u_a(t_i))^2}} \quad (5.1)$$

Onde:

$u(t_i)$ é a grandeza numérica de interesse no tempo t_i .

$u_a(t_i)$ é a grandeza analítica de interesse no tempo t_i .

N_t é o número de passos de tempo utilizados.

A definição do passo de tempo a ser usado pelos métodos numéricos nestas aplicações é uma escolha a ser feita durante a inicialização de seus algoritmos, respeitando os critérios de estabilidade e estratégias de integração de cada método. Uma vez que as aplicações aqui abordadas envolvem sistemas com múltiplos graus de liberdade, a maior frequência de oscilação natural associada ao elemento mais crítico da malha de elementos finitos (ω_0) e, conseqüentemente, a frequência de amostragem crítica (Ω_0), são levadas em consideração para esta escolha. Assim, segue abaixo uma breve explanação, lembrando estas características de cada método neste contexto.

Para o MDC tem-se que a frequência crítica de amostragem é dada por:

$$\Omega_0^{MDC} = \Delta t_0 \omega_0 = 2 \quad (5.2)$$

Para o método α -GE, este valor é apresentado na Eq. (5.3), lembrando que para que a estabilidade seja mantida, a restrição ($\Delta t \leq \Delta t_0$) deve ser atendida.

$$\Omega_0^{\alpha-GE} = \Delta t_0 \omega_0 = \sqrt{\frac{12(1+\rho)^3(2-\rho)}{10+15\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4}}, \forall 0 \leq \rho \leq 1 \quad (5.3)$$

Já para o método ω -AE, o valor frequência de amostragem crítica ($\Omega_0^{\omega-AE}$), apresentado na Eq. (5.4a), é definido em função do parâmetro α associado ao elemento com maior frequência de oscilação dentre todos os elementos da malha (ω_0), que aqui será chamado de α_0 . A frequência de bifurcação para tal elemento ($\Omega_{B_0}^{\omega-AE}$), é definida na Eq. (5.4b) e, obedecendo à restrição na Eq. (5.4c), o passo de tempo do método ω -AE pode ser escolhido conforme a Eq. (5.4d).

$$\Omega_0^{\omega-AE} = 2\alpha_0^{-1/2} \quad (5.4a)$$

$$\Omega_{B_0}^{\omega-AE} = \Delta t \omega_0 = \frac{4}{(\alpha_0 + 1)} \quad (5.4b)$$

$$\Omega_{B_0}^{\omega-AE} \leq \Omega_0^{\omega-AE} \quad (5.4c)$$

$$\Delta t \leq \Delta t_0 \therefore \Delta t \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha_0}} \right) \frac{1}{\omega_0}, \quad \forall \alpha_0 \geq 1 \quad (5.4d)$$

Revisadas as principais características e restrições de cada método numérico aqui utilizado, ao longo dos exemplos, uma comparação inicial é realizada entre os três métodos, mostrando o erro associado a cada um deles em resposta à variação da máxima frequência de amostragem utilizada, chamada aqui de $\bar{\Omega}$ e, conseqüentemente do passo de tempo utilizado Δt . Para tal, valores aleatórios de $\bar{\Omega}$ são testados e os resultados obtidos amostrados em tabelas no intuito comparar o desempenho dos métodos quanto ao erro associado à resposta obtida nestas situações, bem como discutir algumas características a elas pertinentes. Entretanto, feita esta comparação inicial, opta-se por manter o valor de $\bar{\Omega}$ fixo para as demais simulações desenvolvidas ao longo das análises, escolhendo-se assim $\bar{\Omega} = \Omega_0 = 2$ para comparação dos demais resultados obtidos nos métodos, o que corresponde a $\Delta t = \Delta t_0 = \frac{2}{\omega_0}$. Para o método ω -AE isto equivale a utilizar o passo de tempo abaixo descrito, na Eq. (5.5):

$$\Delta t = \frac{4}{(\bar{\alpha} + 1)} \frac{1}{\omega_0}, \quad \text{com } \bar{\alpha} = \alpha_0 = 1 \quad (5.5)$$

Onde $\bar{\alpha}$ é o valor utilizado para o parâmetro α associado ao elemento mais crítico da malha de maneira a se obter uma máxima frequência de amostragem $\bar{\Omega}$ para ele.

A conseqüência da escolha $\bar{\alpha} = 1$ é que o elemento de maior autovalor da malha não terá capacidade de introduzir amortecimento à análise, podendo os demais elementos

assim o fazer em maior ou menor escala, de acordo com as características de cada elemento, através do valor atribuído ao parâmetro α a ele associado a cada passo de tempo (α_e^n).

Como anteriormente citado, por vezes para o método ω -AE, múltiplos passos de tempo são utilizados e, neste contexto, o passo de tempo base (Δt_{base}) tem seu valor igual ao passo de tempo descrito na Eq. (5.5), enquanto os passos de tempo correspondentes ao demais subdomínios da discretização (SD) são potências de dois deste valor ($\Delta t_{SD1} = \Delta t_{base}$, $\Delta t_{SD2} = 2\Delta t_{base}$, $\Delta t_{SD3} = 4\Delta t_{base}$, ..., $\Delta t_{SDr} = 2^{(r-1)}\Delta t_{base}$). Isto posto, seguem abaixo as aplicações numéricas.

5.1 Linhas paralelas

Na primeira aplicação, a propagação de ondas eletromagnéticas entre duas linhas paralelas percorridas por correntes que fluem na direção z com sentidos opostos e comportamento linear ao longo do tempo (i.e., $I(t)=at$, onde a representa uma dada amplitude), é analisada. Na Fig. 5.1 o esquema do modelo é descrito e o domínio discretizado é ilustrado (a anti-simetria do modelo é considerada na discretização). A geometria do problema é definida por $L = 2m$ e as propriedades físicas do meio de propagação (ar) são $\mu = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ e $\varepsilon = 8,8544 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ [13].

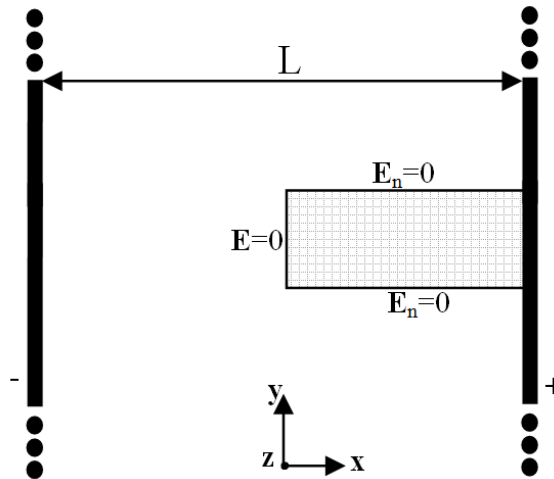


Figura 5.1 - Esquema do modelo da primeira aplicação numérica.

Nesta aplicação, a evolução do campo elétrico em $x = 1/2 m$ ao longo do tempo é computado e, analisando a sua evolução com um comportamento unidimensional, as soluções analíticas para \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$ e \mathbf{B} , considerando $(0 \leq x \leq L/2)$, são dadas por:

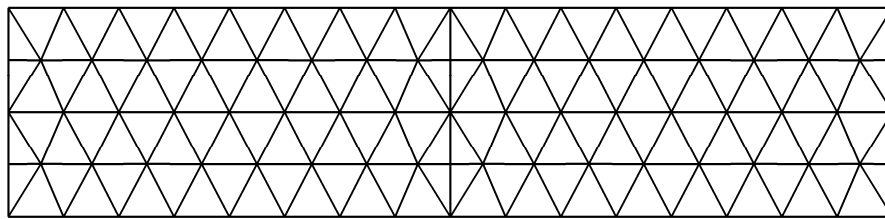
$$\mathbf{E}(x, t) = 4aL\mu\pi^{-2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{L}\pi x\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2n-1}{L}\pi t\right)\right) \right] \cdot \mathbf{a}_z \quad (5.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = 4a\mu\pi^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \cos\left(\frac{2n-1}{L}\pi x\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2n-1}{L}\pi ct\right)\right) \right] \cdot \mathbf{a}_y \quad (5.6b)$$

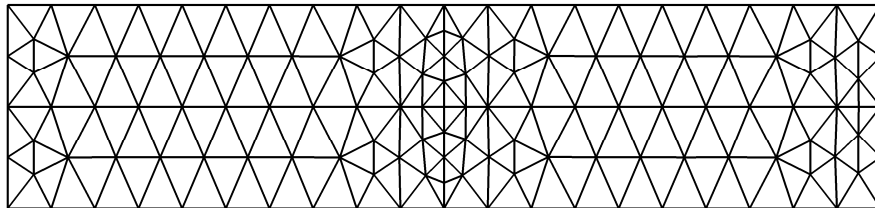
$$\mathbf{B}(x, t) = 4a\mu\pi^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \cos\left(\frac{2n-1}{L}\pi x\right) \cdot \left(t - \frac{L \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{L}\pi ct\right)}{(2n-1)\pi c} \right) \right] \cdot \mathbf{a}_y \quad (5.6c)$$

Onde a é amplitude da fonte, c é a velocidade de propagação da onda e \mathbf{a}_z e \mathbf{a}_y são vetores unitários em coordenadas cartesianas (x, y, z) .

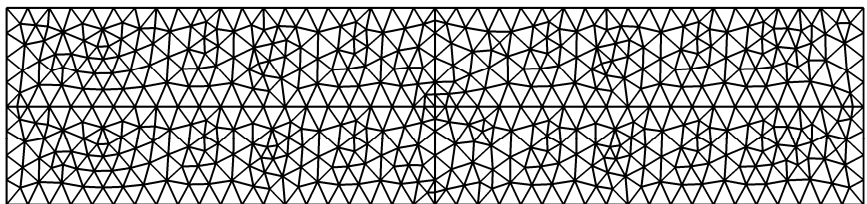
Para esta aplicação, o termo fonte foi introduzido como condição de Neumann e foram utilizadas 6 discretizações por elementos finitos triangulares lineares irregulares, com diferentes refinamentos, como mostra a figura a seguir.



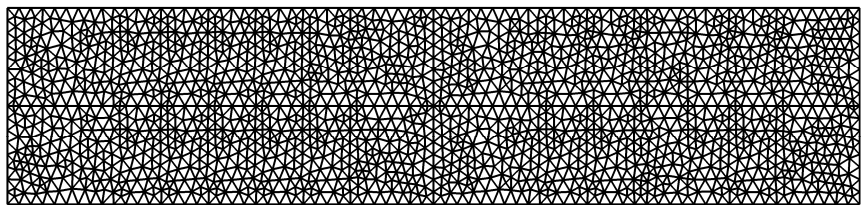
(a)



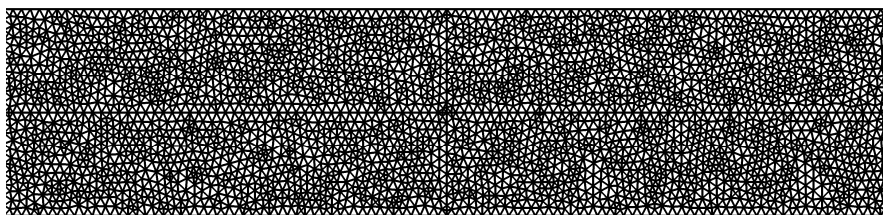
(b)



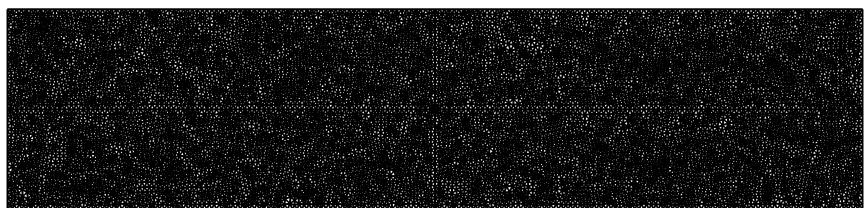
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.2 - Discretizações: (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5, (f) 6.

A seguir uma discretização de refinamento intermediário, a discretização 4, é utilizada para demonstrar os resultados para diferentes valores de $\bar{\Omega}$. Além do método ω -AE, o MDC e o α -GE também foram implementados, como métodos comparativos. A Tabela 5.1 mostra os erros obtidos para estes testes.

Tabela 5.1 - Erros de \mathbf{E} em função de $\bar{\Omega}$.

$\bar{\Omega}$	MDC	α -GE	ω -AE
2	0,006346	0,006549	0,004691 ($\bar{\alpha} = 1$)
1,6	0,006761	0,006890	0,004696 ($\bar{\alpha} = 1,5$)
1,33	0,006848	0,006945	0,004737 ($\bar{\alpha} = 2$)
1,1429	0,006967	0,007041	0,004790 ($\bar{\alpha} = 2,5$)
1	0,007124	0,007184	0,004903 ($\bar{\alpha} = 3$)
0,8889	0,007218	0,007269	0,004987 ($\bar{\alpha} = 3,5$)

A tabela acima mostra que os testes com método ω -AE, em todos os diferentes valores de $\bar{\Omega}$, que correspondem para o método ω -AE a diferentes valores de $\bar{\alpha}$, resultaram em menores erros do que com os métodos comparativos, sendo estes em média 30% menores que os do MDC e 31% que os do α -GE (com $\rho = 0.366534$) para esta aplicação. A Tabela 5.1 também ilustra o curioso, porém usual comportamento de métodos explícitos de marcha no tempo atuando em conjunto com discretizações espaciais. Neste caso, mantida uma discretização espacial (no caso, escolheu-se a discretização 4) fixa, os erros aumentam conforme o Δt adotado diminui. Assim ocorre porque a solução no tempo converge para a solução do problema discreto de MEF e não para a solução analítica (ressaltando que, como previamente citado no item (4.2.2) do capítulo anterior, a discretização espacial também introduz erros). De fato, em métodos explícitos conjugados com métodos de discretização espacial, erros totais menores usualmente ocorrem quando o passo de tempo adotado se aproxima de seu valor crítico. Este comportamento fica bem ilustrado pela Tabela 5.1. Reforça-se assim a importância da criação de métodos de marcha no tempo que sejam função da discretização espacial adotada, o que representa um procedimento ainda pouco explorado

na literatura. Isto posto, os dados pertinentes às discretizações para o valor $\bar{\alpha} = 1$ escolhido são descritos na Tabela 5.2.

Observe que esta escolha é apropriada para malhas não perfeitamente estruturadas (malhas que não tenham os elementos iguais), que são usuais em aplicações reais. Para malhas perfeitamente estruturadas, deve-se escolher $\bar{\alpha} > 1$ para que amortecimento numérico seja presente na análise.

Tabela 5.2 - Dados das discretizações.

Discretização	Nº de elementos	Δt_0 (s)
1	136	9.1338×10^{-11}
2	222	4.2870×10^{-11}
3	1008	2.1965×10^{-11}
4	3458	1.1728×10^{-11}
5	13906	5.7305×10^{-12}
6	33472	3.1282×10^{-12}

É possível reparar que com esta abordagem, a discretização temporal é automaticamente escolhida e, adotando-se $\bar{\alpha} = 1$, tal é feito levando em consideração o maior passo de tempo possível (Δt_0), relativo ao MDC (utilizando-se as matrizes de elemento e não as globais).

Como o campo elétrico varia somente em função de uma coordenada espacial, é trivial a obtenção também de dados do campo magnético, sem a necessidade da formulação de um novo problema. Neste intuito, para esta aplicação, o rotacional da solução ($\nabla \times \mathbf{E}$) é calculado durante a marcha no tempo através das informações contidas na Eq. (3.11), obtida durante a construção das matrizes do MEF 2D e, de posse do valor numérico de $\nabla \times \mathbf{E}$ e da Eq. (2.2a), através da regra trapezoidal, é calculada a Densidade de Campo Magnético (\mathbf{B}).

Portanto, uma vez escolhidos os parâmetros, simulações são efetuadas para as 6 discretizações e as respostas obtidas de \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$ e \mathbf{B} para o ponto de interesse $x=1/2$ são apresentadas, respectivamente nas Fig. 5.3, 5.4 e 5.5.

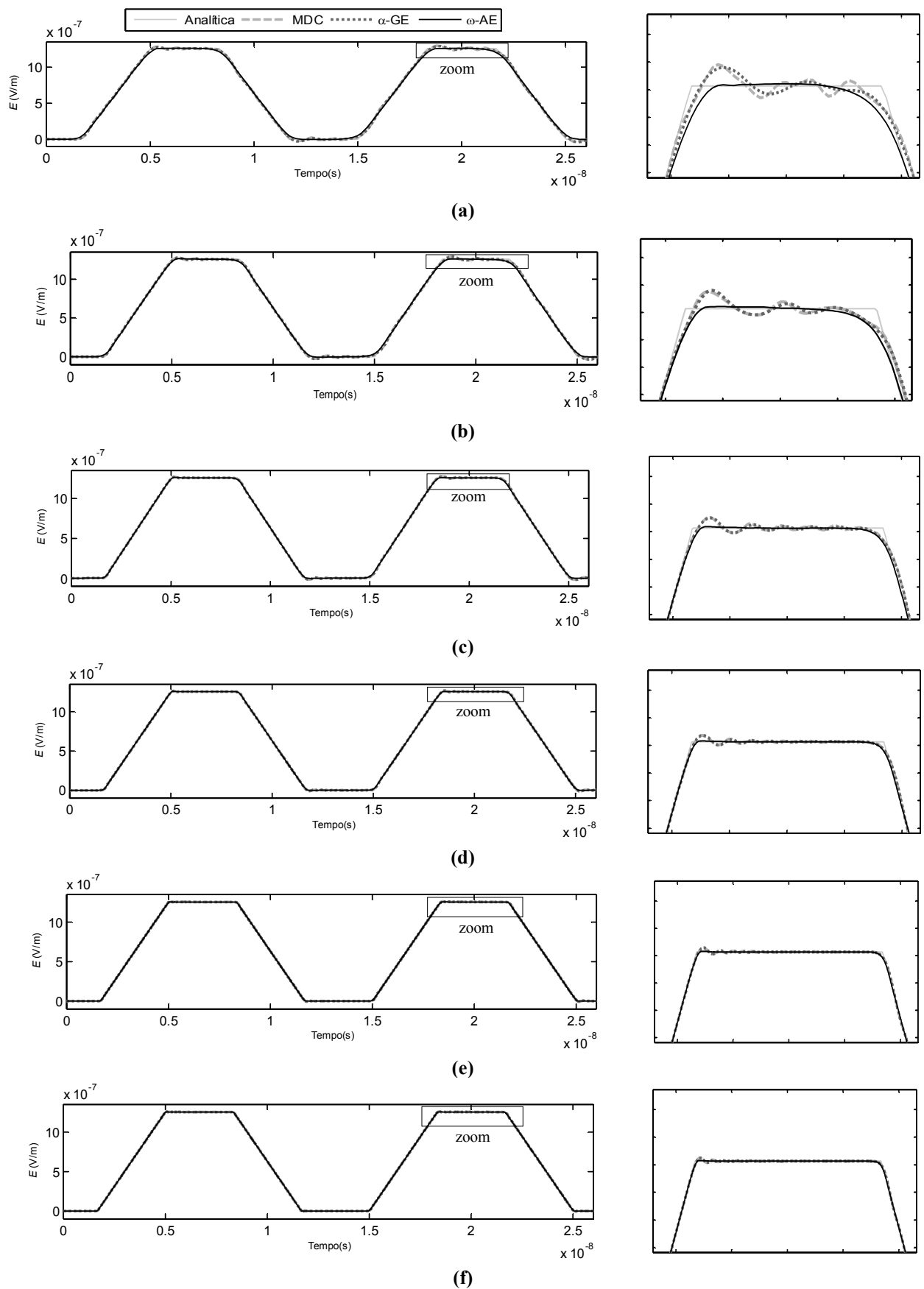


Figura 5.3 - \bar{E} para: (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3, (d) discretização 4, (e) discretização 5, (f) discretização 6.

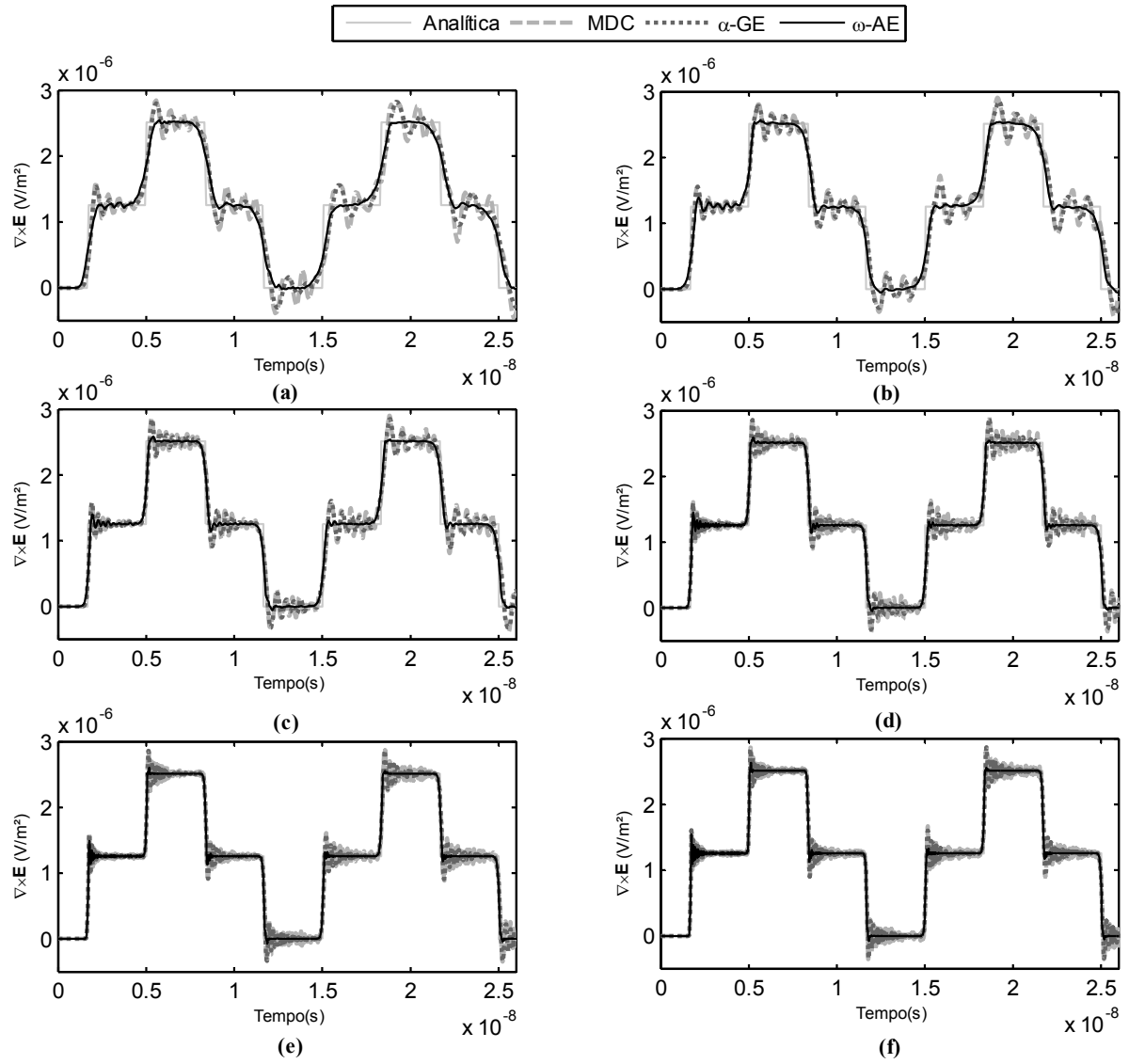


Figura 5.4 - $\nabla \times \mathbf{E}$ para: (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3, (d) discretização 4, (e) discretização 5, (f) discretização 6.

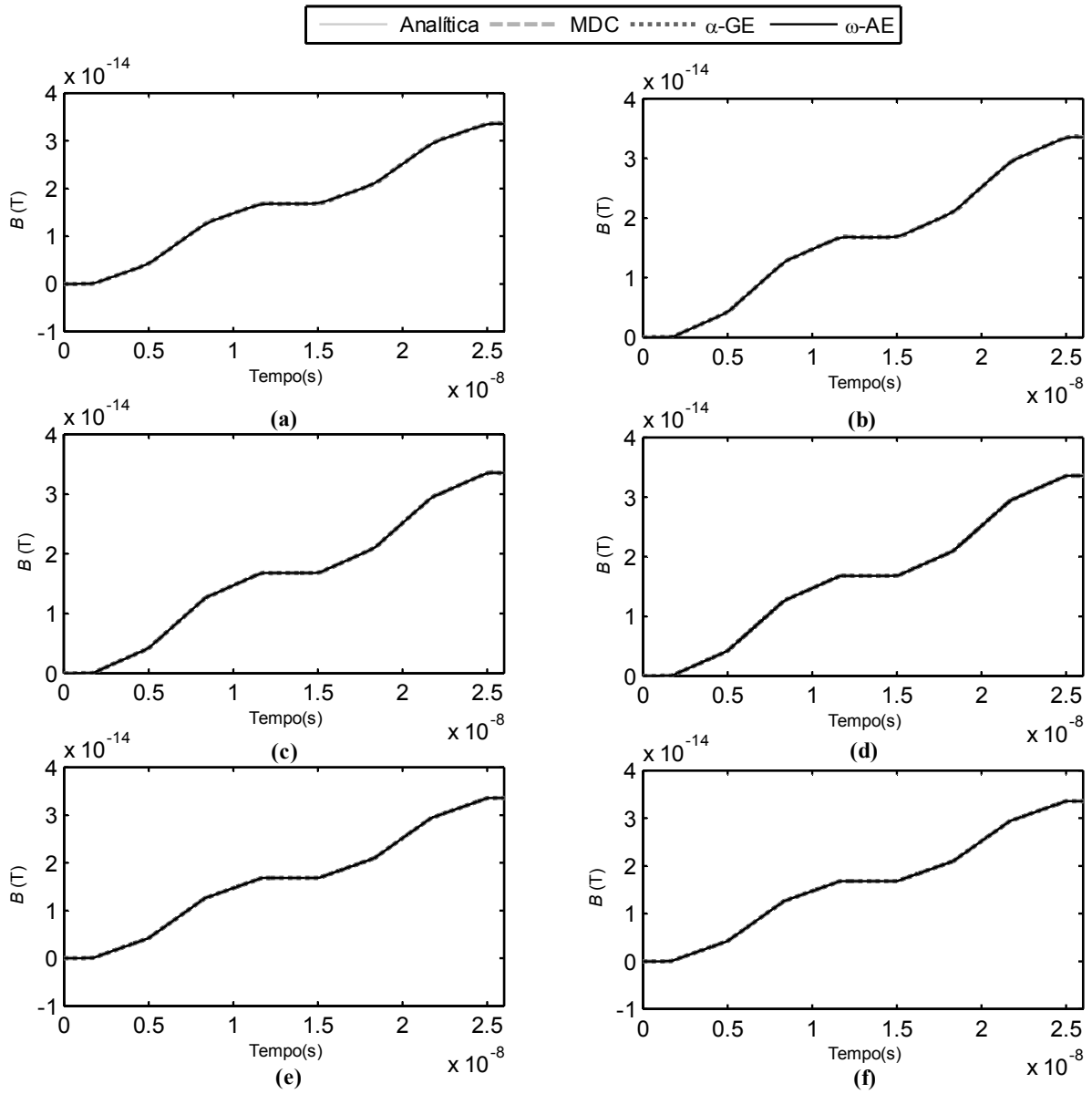


Figura 5.5 - B para: (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3, (d) discretização 4, (e) discretização 5, (f) discretização 6.

Além das respostas, foram calculados os erros associados a cada método implementado. Os resultados obtidos para \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$ e \mathbf{B} são apresentados, respectivamente, nas tabelas (5.3), (5.4) e (5.5) e o gráfico de convergência, na Fig. 5.6.

Tabela 5.3 - Erros associados a \mathbf{E} .

Método	Discretização					
	1	2	3	4	5	6
MDC	0,029479	0,025937	0,011718	0,006346	0,003268	0,002450
α -GE	0,030853	0,026584	0,012135	0,006549	0,003376	0,002502
ω -AE	0,026592	0,020476	0,008966	0,004691	0,002318	0,001738

Tabela 5.4 - Erros associados a $\nabla \times \mathbf{E}$.

Método	Discretização					
	1	2	3	4	5	6
MDC	0,206552	0,198042	0,153840	0,127010	0,102561	0,090393
α -GE	0,185563	0,191447	0,147129	0,121382	0,097862	0,086756
ω -AE	0,149085	0,135097	0,102881	0,083755	0,067306	0,059449

Tabela 5.5 - Erros associados a \mathbf{B} .

Método	Discretização					
	1	2	3	4	5	6
MDC	0,001282	0,001179	0,000534	0,000290	0,000150	0,000125
α -GE	0,001370	0,001207	0,000551	0,000300	0,000155	0,000127
ω -AE	0,001174	0,000892	0,000387	0,000206	0,000103	0,000100

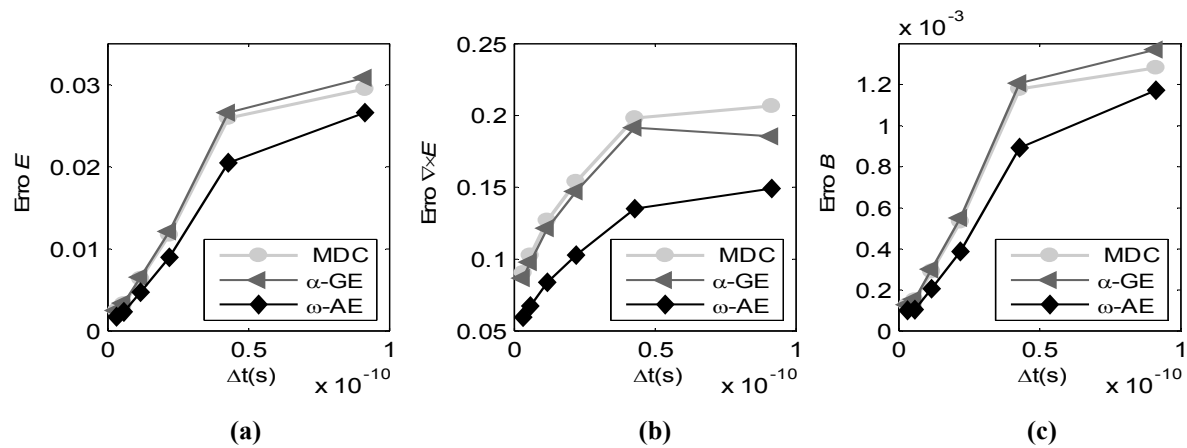


Figura 5.6 - Convergência do erro em função do refinamento da discretização espacial: (a) E , (b) $\nabla \times E$, (c) B .

Com esta primeira aplicação pode-se perceber que mesmo para as discretizações muito pobres, como a discretização 1, o método ω -AE já mostra resultados mais precisos que os demais métodos, principalmente graças ao tratamento efetivo dos modos espúrios pelo amortecimento numérico presente no método. Ainda, conforme a malha de elementos finitos é refinada, estes resultados melhoram, o que demonstra a boa sensibilidade do método, uma vez que conforme há refinamento, a precisão melhora. Nos testes o novo método apresenta erro menor que os demais métodos, apresentando, especialmente, uma precisão consideravelmente melhor no cálculo de derivadas, como é o caso do $\nabla \times E$, que representam um desafio no âmbito de métodos numéricos, embora para o cálculo de integrais, como em B , seu desempenho não tenha se destacado muito frente aos métodos comparativos, o que já era esperado, uma vez que a existência da integral no tempo relativa ao cálculo de B suaviza a resposta, eliminando erros.

5.2 Fio infinito

Nesta segunda aplicação, são analisados os campos gerados em um domínio infinito por um fio, também infinito, quando percorrido por uma corrente com comportamento linear no tempo. O fio se encontra ao longo do eixo z e a corrente, com valor $I(t) = t$, flui no sentido positivo do eixo, enquanto a solução é computada no ponto A , definido por $x = 0,1 m$

e $y = 0\text{ m}$. O meio de propagação é o ar. A discretização leva em consideração a simetria do problema e é definida por uma região quadrada com $L = 0,6\text{ m}$. A Fig. 5.7 mostra o esquema do modelo utilizado, bem como o domínio discretizado, representado pela área hachurada.

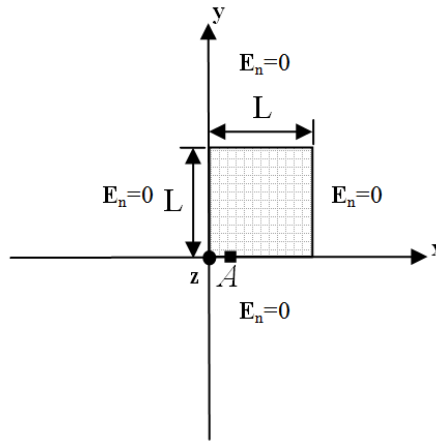


Figura 5.7 - Esquema do modelo da segunda aplicação numérica.

As soluções analíticas para \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$ e \mathbf{B} são dadas respectivamente pelas Eq. (5.7a), (5.7b), (5.7c).

$$\mathbf{E}(\rho, t) = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{ct + (c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}}{\rho} \right] \cdot H[ct - \rho] \cdot \mathbf{a}_z \quad (5.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\rho, t) = - \frac{\mu \left(\frac{ct + (c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}}{\rho^2} + \frac{1}{(c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right)}{(2\pi ct + c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}} \cdot H[ct - \rho] \cdot \mathbf{a}_\theta \quad (5.7b)$$

$$\mathbf{B}(\rho, t) = - \frac{\mu}{2\pi c} \cdot \left(\frac{ct}{\rho} - \frac{\rho}{ct + (c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right) \cdot H[ct - \rho] \cdot \mathbf{a}_\theta \quad (5.7c)$$

Onde H representa uma função Heaviside, c é a velocidade de propagação da onda e \mathbf{a}_z e \mathbf{a}_θ são vetores unitários em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) .

Para esta análise, o termo fonte é aplicado diretamente como carga nodal e inicialmente duas discretizações com respectivamente, 17202 e 68448 elementos triangulares lineares irregulares são utilizadas e estão representadas na Fig. 5.8. Elas representam malhas de elementos finitos triangulares lineares irregulares com diferentes refinamentos. A Fig. 5.9 mostra uma pequena região, com 16% da área total de ambas as discretizações, para comparação dos diferentes refinamentos.

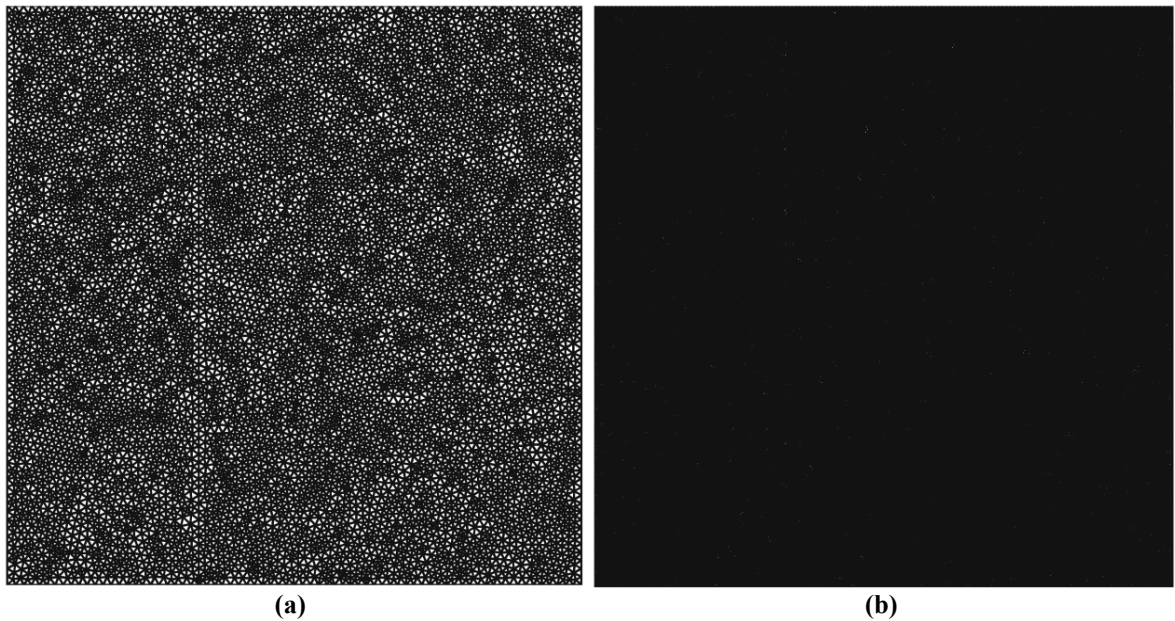


Figura 5.8 - Discretizações da segunda aplicação: (a) discretização 1 com 17202 elementos, (b) discretização 2 com 68448 elementos.

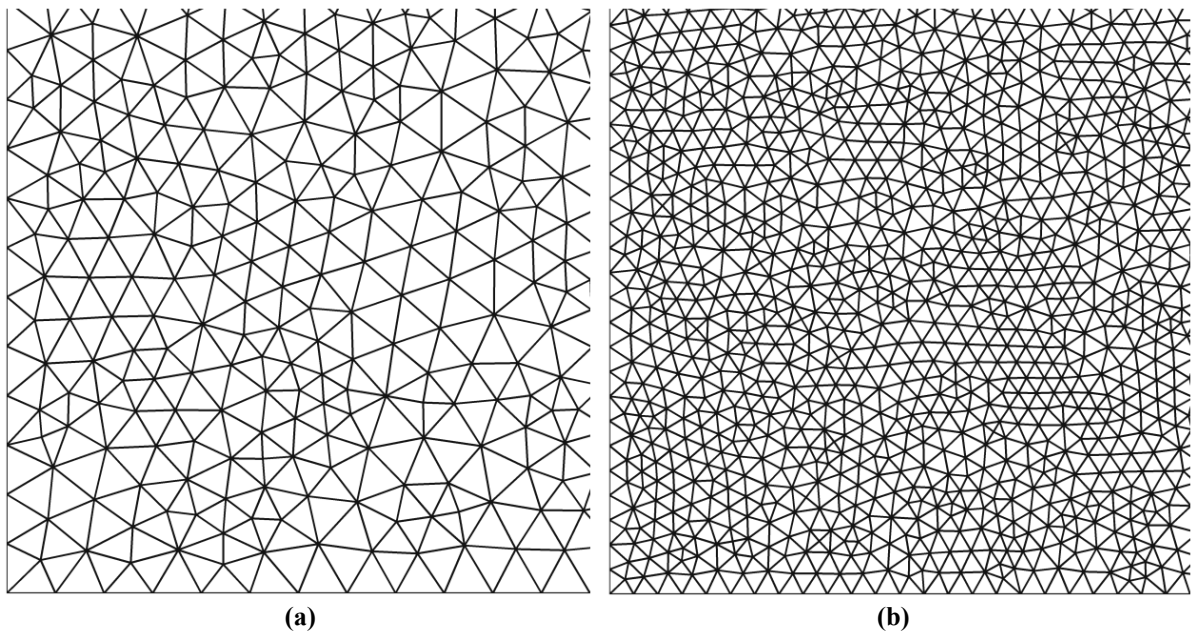


Figura 5.9 - Detalhes do refinamento das malhas: (a) discretização 1, (b) discretização 2.

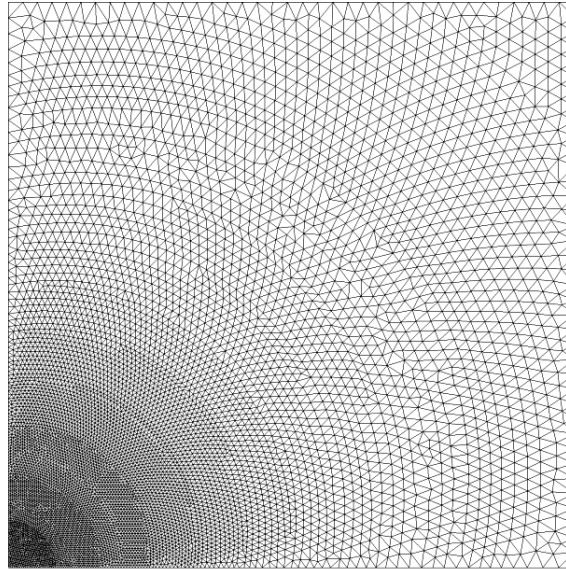
Analogamente ao exemplo anterior, diversos valores de $\bar{\Omega}$ são testados e, neste caso, a discretização 1 é utilizada, sendo os respectivos valores na tabela abaixo mostrados.

Tabela 5.6 - Erros de \mathbf{E} em função de $\bar{\Omega}$.

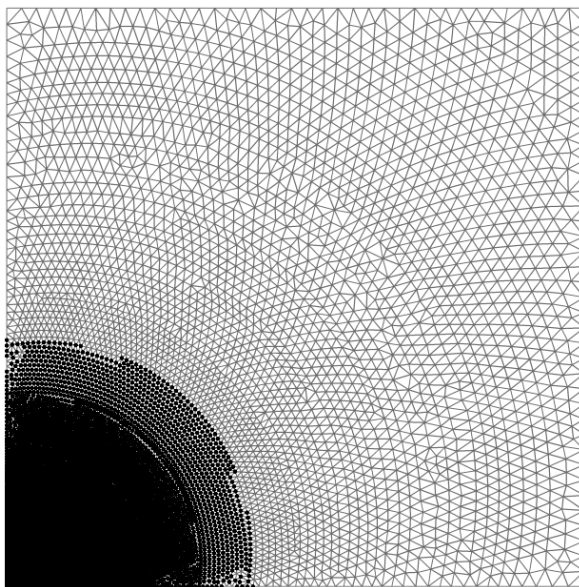
$\bar{\Omega}$	MDC	α -GE	ω -AE
2	0,029643	0,013935	0,013589 ($\bar{\alpha} = 1$)
1,6	0,020566	0,009968	0,007900 ($\bar{\alpha} = 1,5$)
1,33	0,020607	0,011428	0,008329 ($\bar{\alpha} = 2$)
1,1429	0,020539	0,012796	0,008594 ($\bar{\alpha} = 2,5$)
1	0,020511	0,014172	0,008829 ($\bar{\alpha} = 3$)
0.8	0,020527	0,016448	0,009210 ($\bar{\alpha} = 4$)

Após os testes, verifica-se que o método ω -AE apresenta erros em torno de 140% menores que o MDC e 40% que o α -GE, com $\rho=0,1$. A seguir, passos de tempo de $\Delta t = 7,3543 \times 10^{-12}(s)$ e $\Delta t = 3,8308 \times 10^{-12}(s)$ são utilizados, respectivamente, para as discretizações 1 e 2, os quais correspondem a $\bar{\Omega} = 2$ em ambos os casos. Para o método ω -AE isto implica em utilizar o parâmetro $\bar{\alpha} = 1$.

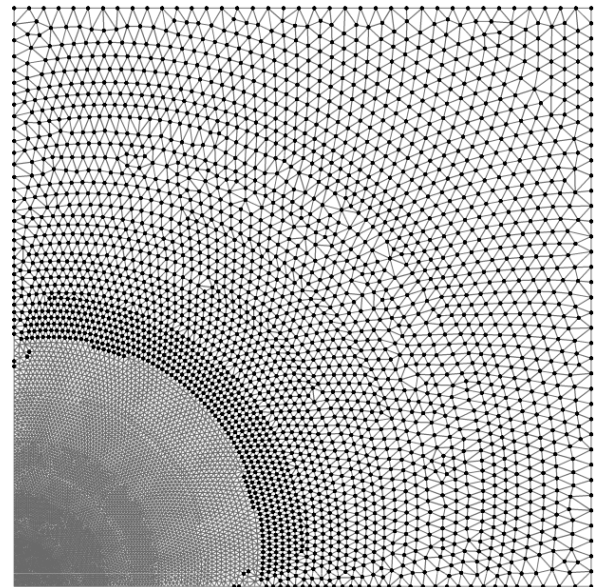
Como já citado nos capítulos anteriores, recomenda-se a utilização de múltiplos passos de tempo em método explícitos, pois além de tornar a marcha no tempo mais rápida pela utilização de interpolações em determinados passos de tempo para nós alocados em subdomínios menos críticos, as aproximações por elas introduzidas não interferem significativamente na precisão da resposta, tornando de fato o método mais eficiente computacionalmente. Neste intuito, a subciclagem é nesta aplicação implementada para o método ω -AE e, para tal, uma terceira discretização com 15382 elementos triangulares lineares irregulares, que apresenta $\Delta t_{base} = \Delta t_0 = 3,4166 \times 10^{-12}(s)$, foi utilizada, porém com maior refinamento no entorno do ponto onde se encontra o campo fonte, ou seja, o eixo longitudinal do fio infinito. Ela está representada na Fig. 5.10, juntamente com os subdomínios da subciclagem implementada.



Discretização 3
(a)



SD1 com $\Delta t = \Delta t_{base}$
(b)



SD2 com $\Delta t = 2 \cdot \Delta t_{base}$
(c)

Figura 5.10 - Discretização 3 com os respectivos subdomínios da subciclagem.

Realizadas as simulações para os parâmetros escolhidos, as respostas no tempo obtidas para \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$ e \mathbf{B} , obtidas de maneira semelhante à da aplicação anterior, são apresentadas, respectivamente nas Fig. 5.11, 5.12 e 5.13.

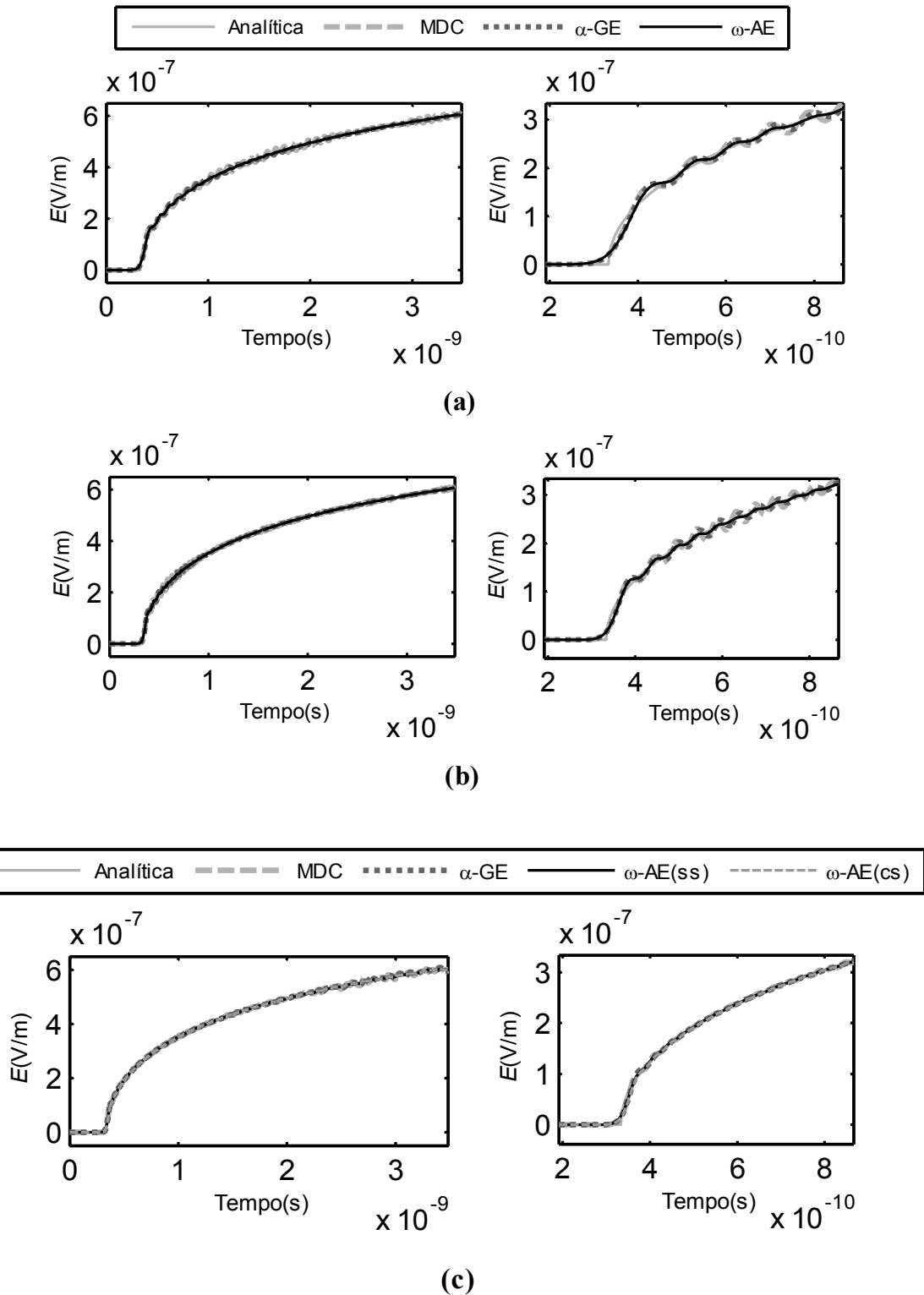
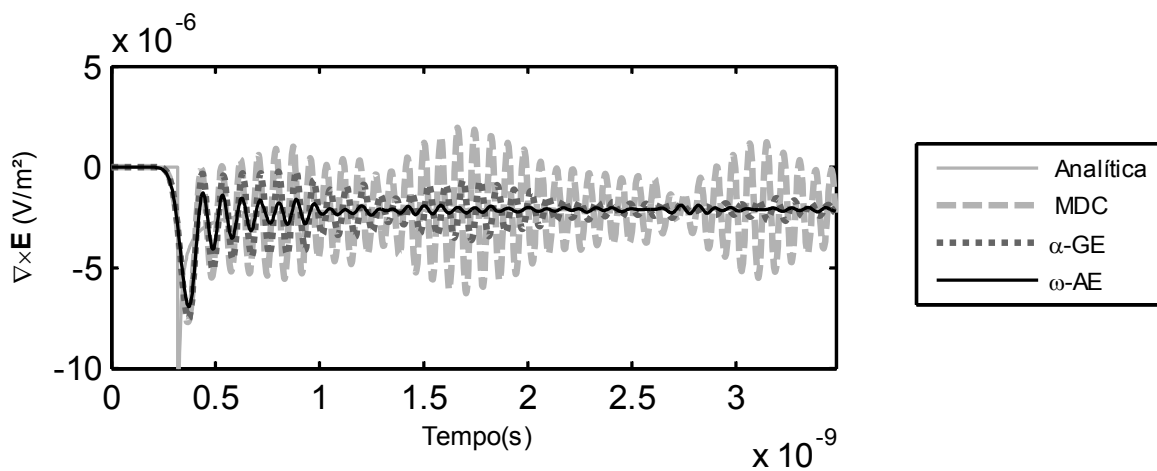
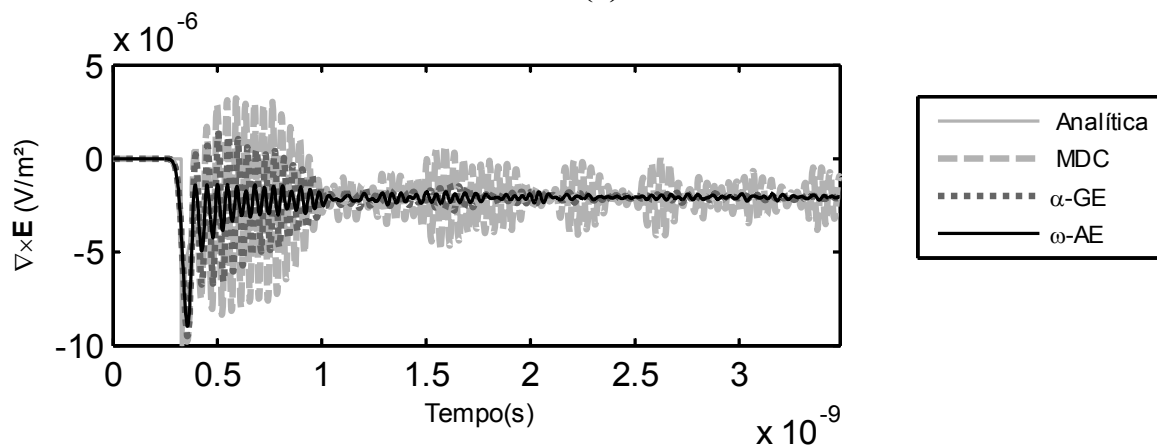


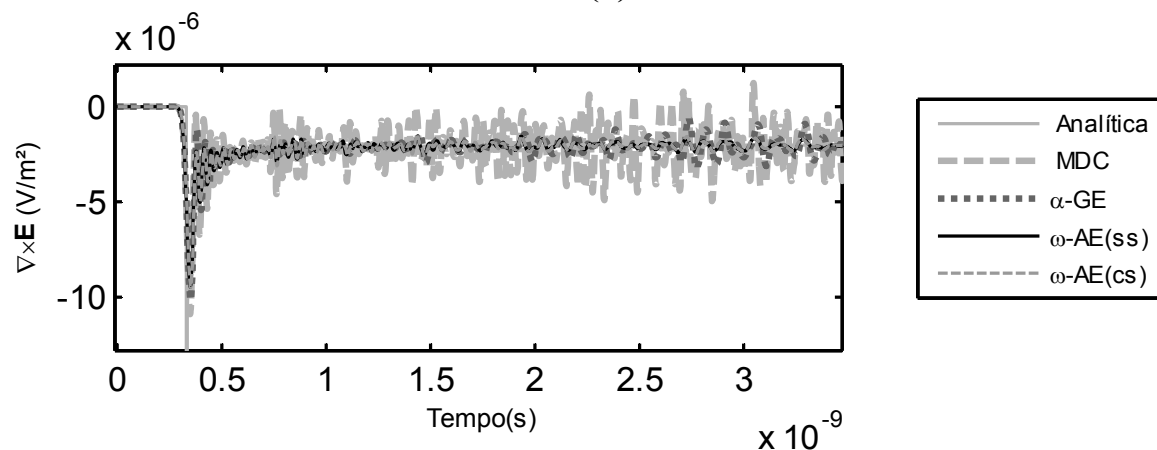
Figura 5.11 - E: (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3.



(a)

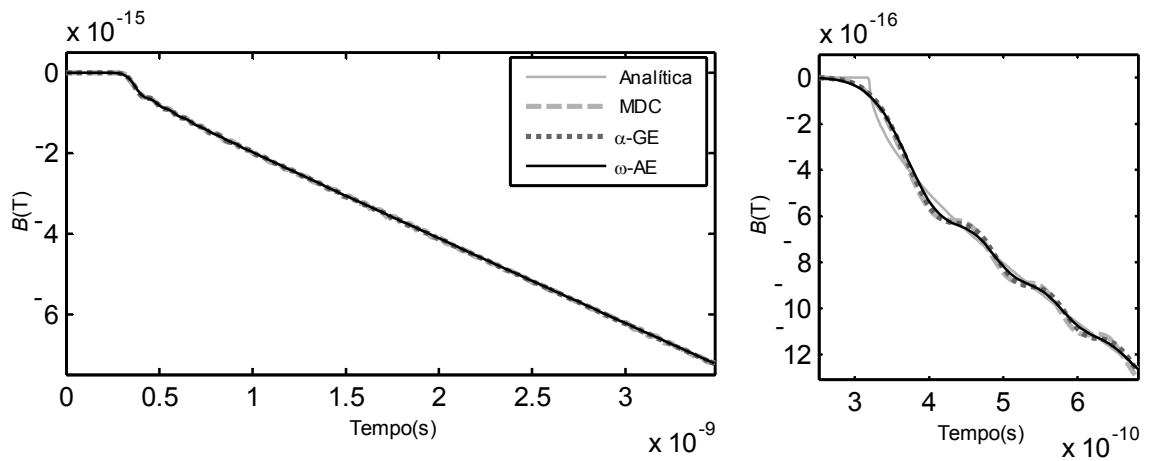


(b)

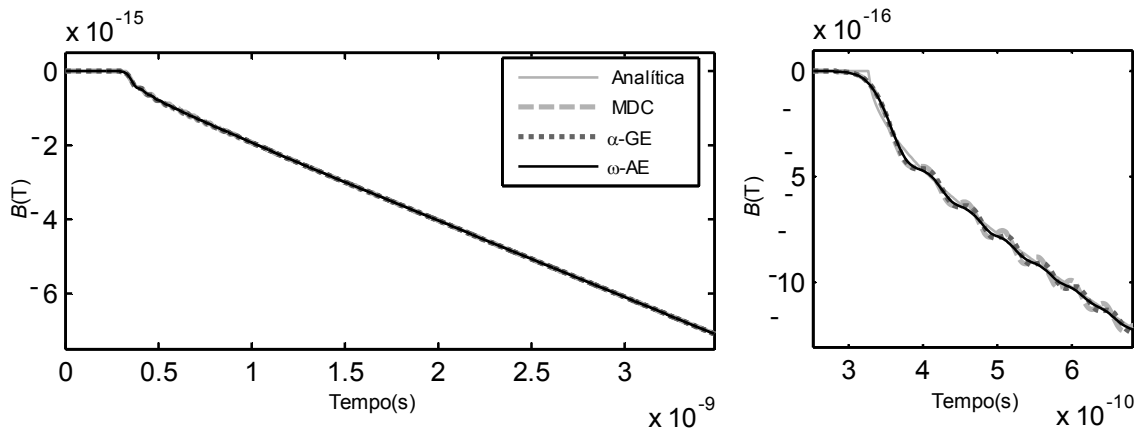


(c)

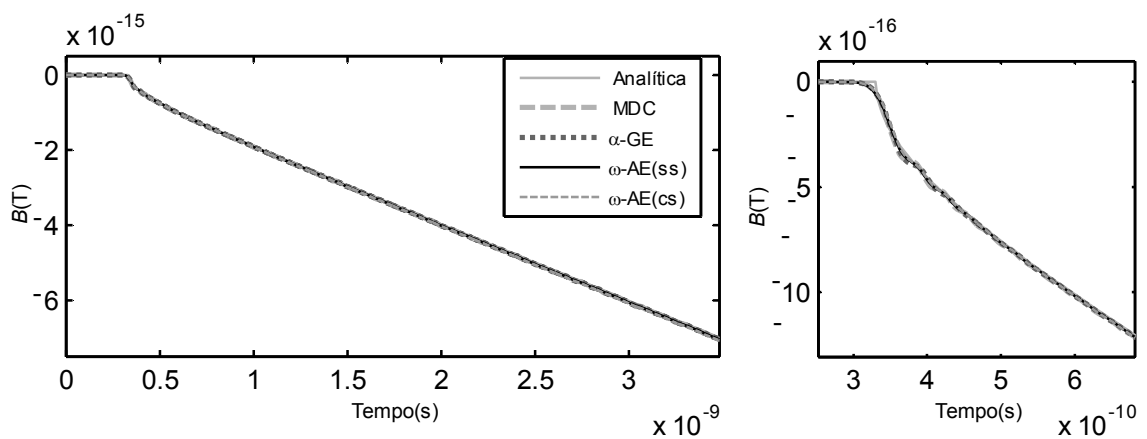
Figura 5.12 - $\nabla \times \mathbf{E}$: (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13 - B : (a) discretização 1, (b) discretização 2, (c) discretização 3.

E os erros obtidos com as simulações para os métodos implementados nas 3 discretizações para as grandezas \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$, \mathbf{B} são apresentados nas tabelas (5.7), (5.8) e (5.9), respectivamente.

Tabela 5.7 - Erros associados a \mathbf{E} .

Método	Discretização		
	1	2	3
MDC	0,029643	0,019416	0,007397
α -GE	0,013935	0,008296	0,008096
ω -AE(ss)	0,013589	0,008248	0,007617
ω -AE(cs)	---	---	0,008024

Tabela 5.8 - Erros associados a $\nabla \times \mathbf{E}$.

Método	Discretização		
	1	2	3
MDC	0,865321	0,949519	0,566305
α -GE	0,369667	0,383712	0,485759
ω -AE(ss)	0,348901	0,386838	0,47384
ω -AE(cs)	---	---	0,473066

Tabela 5.9 - Erros associados a \mathbf{B} .

Método	Discretização		
	1	2	3
MDC	0,014332	0,010513	0,005888
α -GE	0,007329	0,006031	0,004965
ω -AE(ss)	0,007093	0,005007	0,00507
ω -AE(cs)	---	---	0,004642

A princípio, pode-se esperar que a utilização de subciclagem sempre aumente o erro da resposta, devido às aproximações introduzidas à análise pelas interpolações, mesmo que este erro não seja considerável, entretanto, percebe-se que a utilização de múltiplos passos de tempo pode vir a otimizar a marcha e melhorar a precisão, já que assim pode-se considerar melhores discretizações temporais para um certo nível de discretização espacial de uma região.

5.3 Distribuição de densidades de corrente

Na terceira aplicação, densidades de corrente fluindo na direção z são espacialmente distribuídas em regiões quadradas (definidas por $l = 0,02L$) que são esparsas e anti-simetricamente localizadas ao longo do plano xy , como mostra o esquema da Fig. 5.6, o qual também mostra o domínio discretizado, uma região quadrada com dimensões de $0,5L$ nas duas direções. As correntes têm comportamento no tempo de uma função de Heaviside e a geometria do problema é definida por $L = 10 m$.

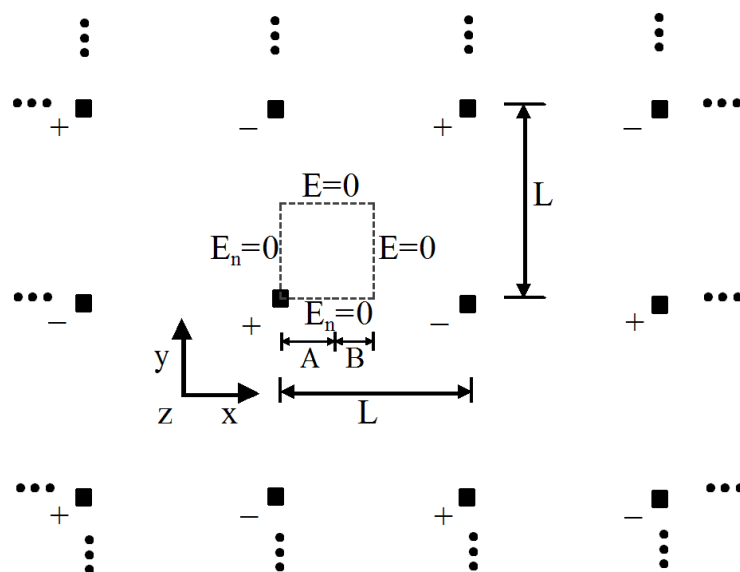


Figura 5.14 - Esquema do modelo: regiões quadradas de densidades de corrente constante e o domínio discretizado.

Esta aplicação é dividida em dois estudos de caso, um com o meio de propagação homogêneo e o outro heterogêneo. Como a derivada temporal da função Heaviside é dada pela função delta de Dirac, nas análises que a seguir, o efeito da densidade de corrente sobre o modelo é representado por condição inicial de derivada de campo prescrita, estando a amplitude desta devidamente calculada de forma a existir apropriada analogia entre os dois efeitos. Assim sendo, abaixo seguem as duas análises.

5.3.1 Meio de propagação homogêneo

Para a análise em meio homogêneo o ar é o meio de propagação e para esta configuração a solução analítica para a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} é, para $(0 \leq x \leq L$ e $0 \leq y \leq L)$, expressa por:

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \frac{4aL}{c\pi^3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{C_{mn}}{mn(m^2 + n^2)^{1/2}} \sin\left(\frac{m}{L}\pi x\right) \sin\left(\frac{n}{L}\pi y\right) \sin\left(\frac{(m^2 + n^2)^{1/2}}{L}\pi ct\right) \right] \cdot \mathbf{a}_z \quad (5.8)$$

Onde:

$$C_{mn} = (\cos(c_1 m) - \cos(c_2 m))(\cos(c_1 n) - \cos(c_2 n)) \quad (5.9a)$$

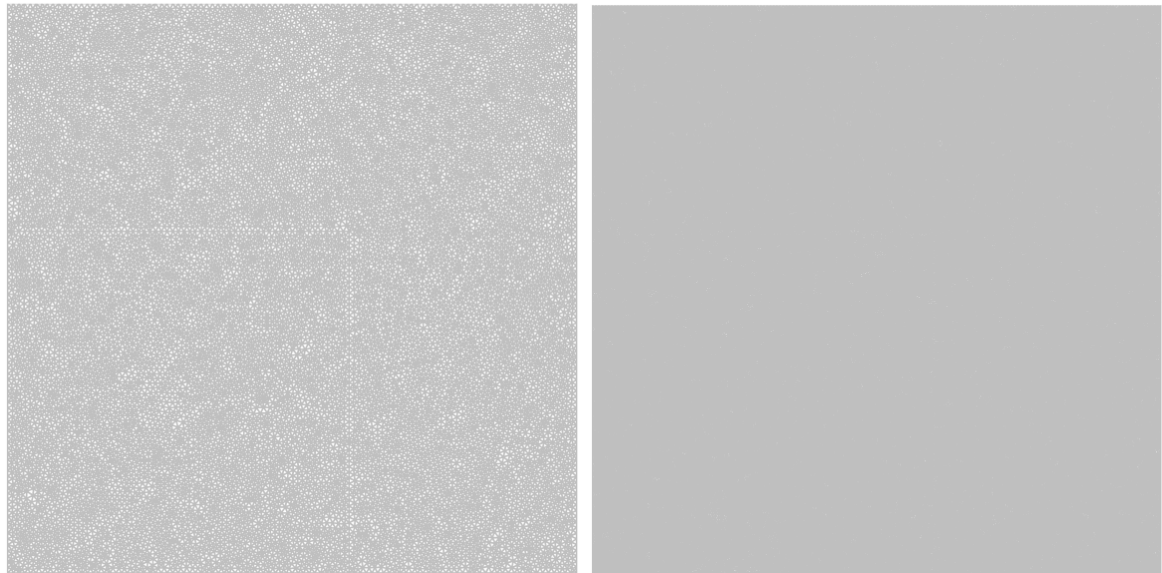
$$c_1 = \left(1 + \frac{l}{L}\right) \frac{\pi}{2} \quad (5.9b)$$

$$c_2 = \left(1 - \frac{l}{L}\right) \frac{\pi}{2} \quad (5.9c)$$

a é amplitude da fonte;

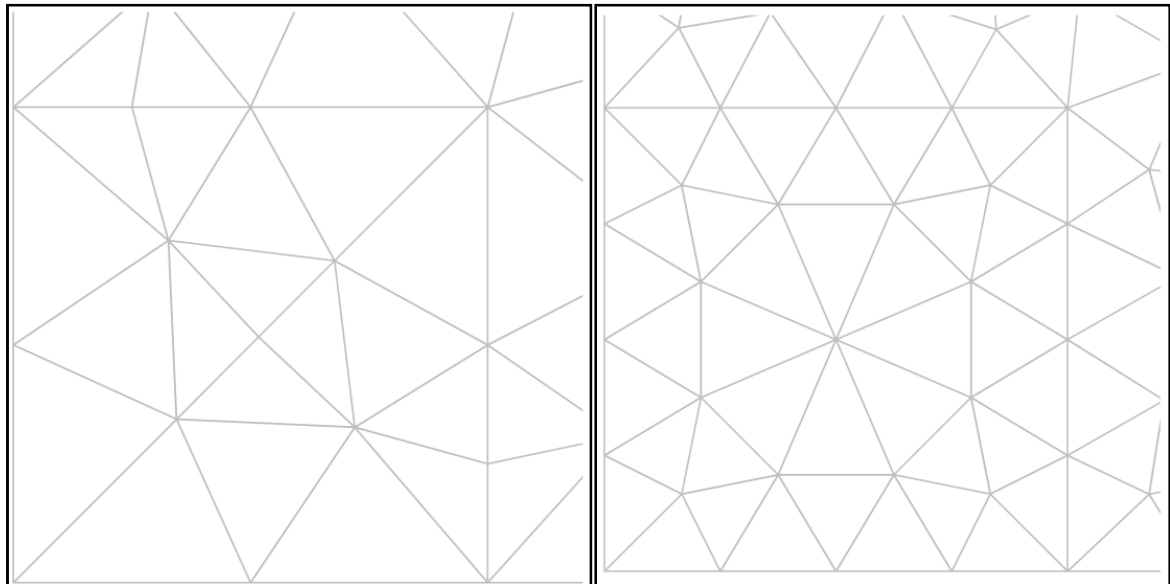
c é a velocidade de propagação da onda no meio.

Para esta aplicação duas discretizações são utilizadas, uma com 34194 e outra com 70138 elementos triangulares lineares. Na figura abaixo, 5.15(a) e 5.15(b) mostram, respectivamente, estas duas discretizações enquanto, 5.15(c) e 5.15(d), mostram os detalhes de refinamento de cada discretização em uma região com dimensão igual a 2% do domínio discretizado.



Discretização 1 com 34194 elementos.
(a)

Discretização 2 com 70138 elementos.
(b)



Detalhes da discretização 1.
(c)

Detalhes da discretização 2.
(d)

Figura 5.15 - Discretizações espaciais da aplicação 5.3.1

Os mesmos testes anteriores de erro da solução em função da variação de $\bar{\Omega}$ foram realizados para a malha com 34194 elementos e os resultados são abaixo apresentados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 - Erros de E em função de $\bar{\Omega}$.

$\bar{\Omega}$	MDC	α -GE	ω -AE
2	0,231755305	0,202738776	0,173168018 ($\bar{\alpha} = 1$)
1,6	0,234904312	0,209311512	0,174948323 ($\bar{\alpha} = 1,5$)
1,33	0,235337240	0,214087825	0,178787919 ($\bar{\alpha} = 2$)
1,1429	0,235990619	0,217562789	0,18131676 ($\bar{\alpha} = 2,5$)
1	0,236556380	0,220223707	0,187537172 ($\bar{\alpha} = 3$)
0,8	0,236985039	0,224224975	0,189959225 ($\bar{\alpha} = 4$)

A tabela mostra que os testes com método ω -AE, em todos os diferentes valores de $\bar{\Omega}$, que correspondem para o método ω -AE a diferentes valores de $\bar{\alpha}$, resultaram mais uma vez em menores erros do que com os métodos comparativos, sendo em média 30% menores que os do MDC e 18%, que os do α -GE para esta aplicação, mostrando mais uma vez a boa adaptatividade do amortecimento numérico empregado pelo novo método frente às alterações de operação da marcha.

As simulações a seguir foram realizadas com $\bar{\alpha} = 1$ e conseqüentemente $\bar{\Omega} = 2$, o que corresponde a $\Delta t_0^1 = 4.5823 \times 10^{-11}$ (s) para a discretização 1 e $\Delta t_0^2 = 3.3450 \times 10^{-11}$ (s) para a discretização 2. Para o método α -GE, o parâmetro $\rho=0$ apresentou menor erro para os testes com a discretização 1 e por isso foi escolhido para ser utilizado, entretanto, quando as simulações são realizadas com a malha mais rica, na discretização 2, utilizando $\rho=0$, a solução com o método α -GE não tem estabilidade, tendendo após alguns passos de tempo a infinito. Por este motivo, para a discretização 2, as marchas do método α -GE utilizam $\rho=0.1$, sendo este o menor valor testado com o qual o método se manteve estável.

Como já abordado no capítulo anterior, tal comportamento se deve à característica presente, não só no método α -GE, mas em muitos métodos que contemplam amortecimento numérico, que faz com que maior presença de amortecimento numérico na análise implique em uma diminuição do Δt_c do método. Este fato é bem explicitado através da Eq. (5.3) que mostra que quanto menor o valor de ρ , menor deve ser o Δt_c para que a estabilidade do método seja garantida.

Vale ressaltar que os valores críticos utilizados são pertinentes à matriz correspondente ao elemento mais crítico da malha e não, à matriz global do sistema. Matematicamente pode-se provar que esta abordagem é conservadora e, portanto, o real passo de tempo crítico do sistema (Δt_c) é maior do que Δt_0 . Uma vez que não é trivial este cálculo e, normalmente as matrizes a nível global nem chegam a ser formuladas, o cálculo de Δt_c não será apresentado para análise do motivo de instabilidade apresentada pelo método α -GE. Entretanto, o cálculo de Δt_0 , através da Eq. (5.3), mostra tais indícios.

Para a discretização 1, as simulações utilizam $\Delta t_0^1 = 4.5823 \times 10^{-11}$ e, fazendo-se uso da Eq. (5.3), vê-se que para o método α -GE, $\Delta t_0^{1(\rho=0)} = 3.5494 \times 10^{-11}$. Percebe-se que o Δt_0 exigido pelo método para que a estabilidade seja garantida é menor do que o utilizado, porém, provavelmente este valor ainda é menor que Δt_c e, por isso neste caso não ocorreu a instabilidade. Já para a discretização 2, as simulações utilizam $\Delta t_0^2 = 3.3450 \times 10^{-11}$ e, fazendo-se uso da Eq. (5.3), vê-se que para o método α -GE, $\Delta t_0^{2(\rho=0)} = 2.5910 \times 10^{-11}$. O Δt_0 exigido pelo método para que a estabilidade seja garantida também é menor do que o utilizado, porém, provavelmente este valor já é maior do que Δt_c e, por isso a instabilidade se fez presente. Quando utilizado $\rho=0.1$, tem-se $\Delta t_0^{2(\rho=0.1)} = 2.7180 \times 10^{-11}$, já não se percebe a instabilidade do método.

Tal fato demonstra mais uma vantagem do novo método em relação aos demais, pois devido à estratégia de integração desenvolvida, se garante a introdução de amortecimento numérico à análise sem a diminuição de seu Δt_c .

É possível ver na Fig. 5.15 que as malhas utilizadas nas discretizações são irregulares, com alguns elementos inclusive, de qualidade muito ruim. Por isso, embora o meio de propagação seja homogêneo e não haja nenhum nível de refinamento diferente em alguma região específica da malha de elementos finitos (como ocorreu no exemplo anterior), é pertinente que se utilize neste caso também múltiplos passos de tempo. Portanto, a

subciclagem é aqui implementada e a subdivisão das discretizações está representada na Fig. 5.16 a seguir.

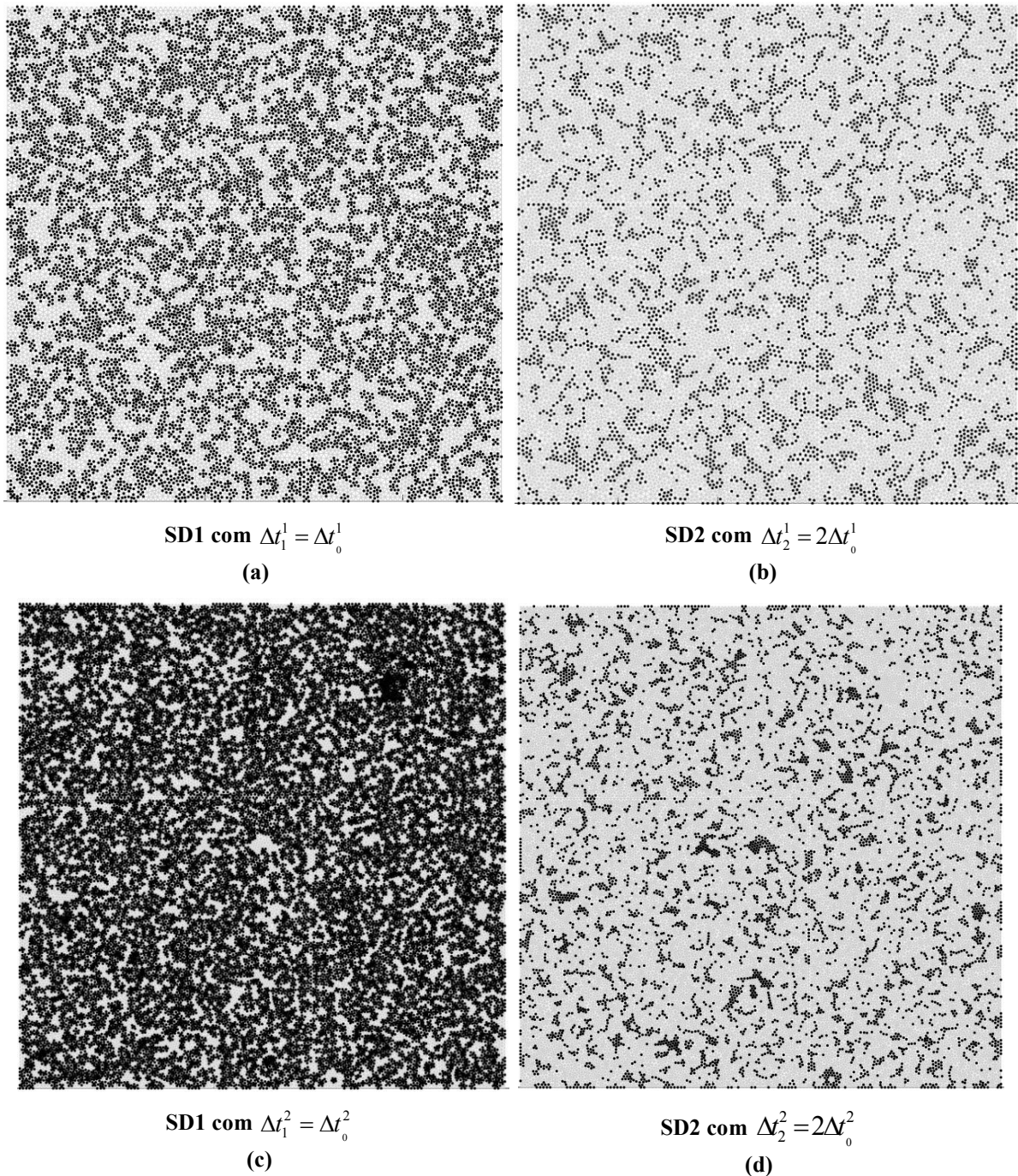


Figura 5.16 - Sudomínios da subciclagem da discretização 1 (a,b) e da discretização 2 (c,d).

Realizadas as simulações com os parâmetros escolhidos, o comportamento do mesmo ponto $P(L/2, L/2)$, é analisado ao longo do tempo e os resultados dos métodos

numéricos comparados com a solução analítica. A figura abaixo ilustra este comportamento em 5.17(a) para a discretização 1 e em 5.17(b) para a discretização 2.

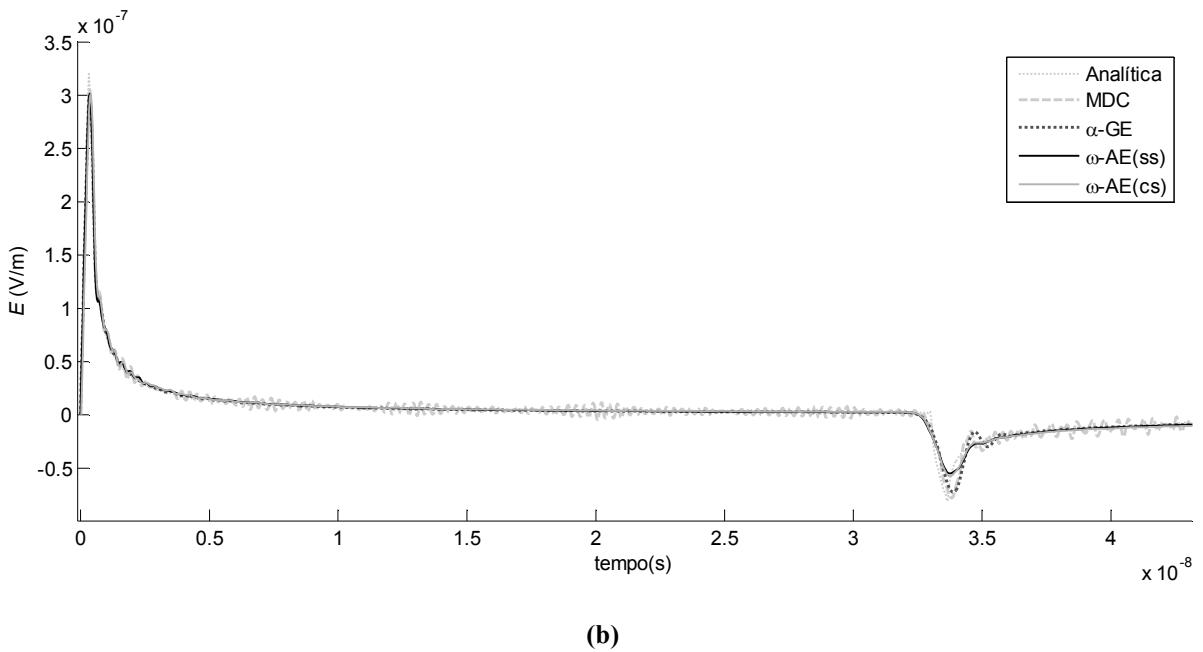
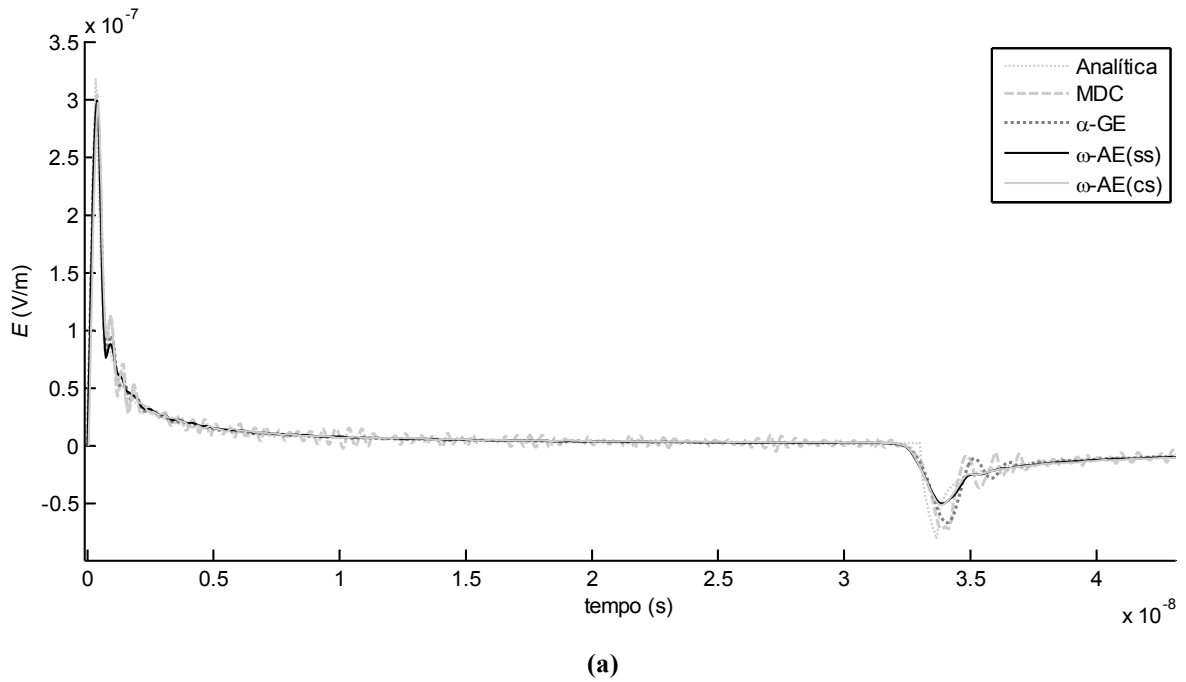


Figura 5.17 - Solução ao longo do tempo para o ponto $P(L/2, L/2)$ para: (a) discretização 1, (b) discretização 2.

Os gráficos acima mostram que o método ω -AE se mostrou eficiente em mitigar as oscilações espúrias, frente aos demais métodos, por outro lado, nota-se uma tendência a maior amortecimento de picos e vales, o que pode vir a ser uma desvantagem, entretanto, os erros associados a cada um dos métodos para o cálculo da resposta ao longo do tempo no ponto P foram calculados e estão apresentados na tabela abaixo, respectivamente para as discretizações 1 e 2, conforme indicado.

Tabela 5.11 - Erros de E ao longo do tempo para P(L/2, L/2).

Discretização	MDC	α-GE	ω-AE(ss)	ω-AE(cs)
1	0,231755305	0,202738776	0,173168018	0,165287348
2	0,160752047	0,141789048	0,121906909	0,116129395

Estes resultados mostram erros em torno de 30% e 16% menores que os métodos DC e α -GE, respectivamente. A presença de subciclagem implica em um erro 5% menor do que sem ela. Neste caso, aconteceu novamente de melhorar a precisão, embora, como anteriormente citado, que isto não se assuma como uma regra. Portanto, ao longo do tempo, o novo método em aplicações de problemas hiperbólicos se mostra bastante preciso e eficiente no tratamento de oscilações numéricas espúrias.

Para enriquecimento da análise, a resposta do campo computado **E** em todo o domínio discretizado é apresentada para um dado instante de tempo, auxiliando visualmente a comparação dos resultados obtidos pelos métodos numéricos com a solução analítica. A Fig. 5.18 mostra, para a discretização 1, a vista em 3D da solução no domínio. Já a Fig. 5.19 apresenta a solução em vista superior, onde as curvas de contorno correspondem à intensidade do campo. As Fig. 5.20 e 5.21 trazem as mesmas informações, porém para a discretização 2. Isto é feito para três instantes de tempo: $t=2.35 \times 10^{-8}(s)$, $t=2.75 \times 10^{-8}(s)$, $t=4.7 \times 10^{-8}(s)$, relativos, às três colunas, ao passo que às linhas correspondem, respectivamente, as respostas analítica, do MDC, α -GE e ω -AE(ss), como indicado nas figuras abaixo.

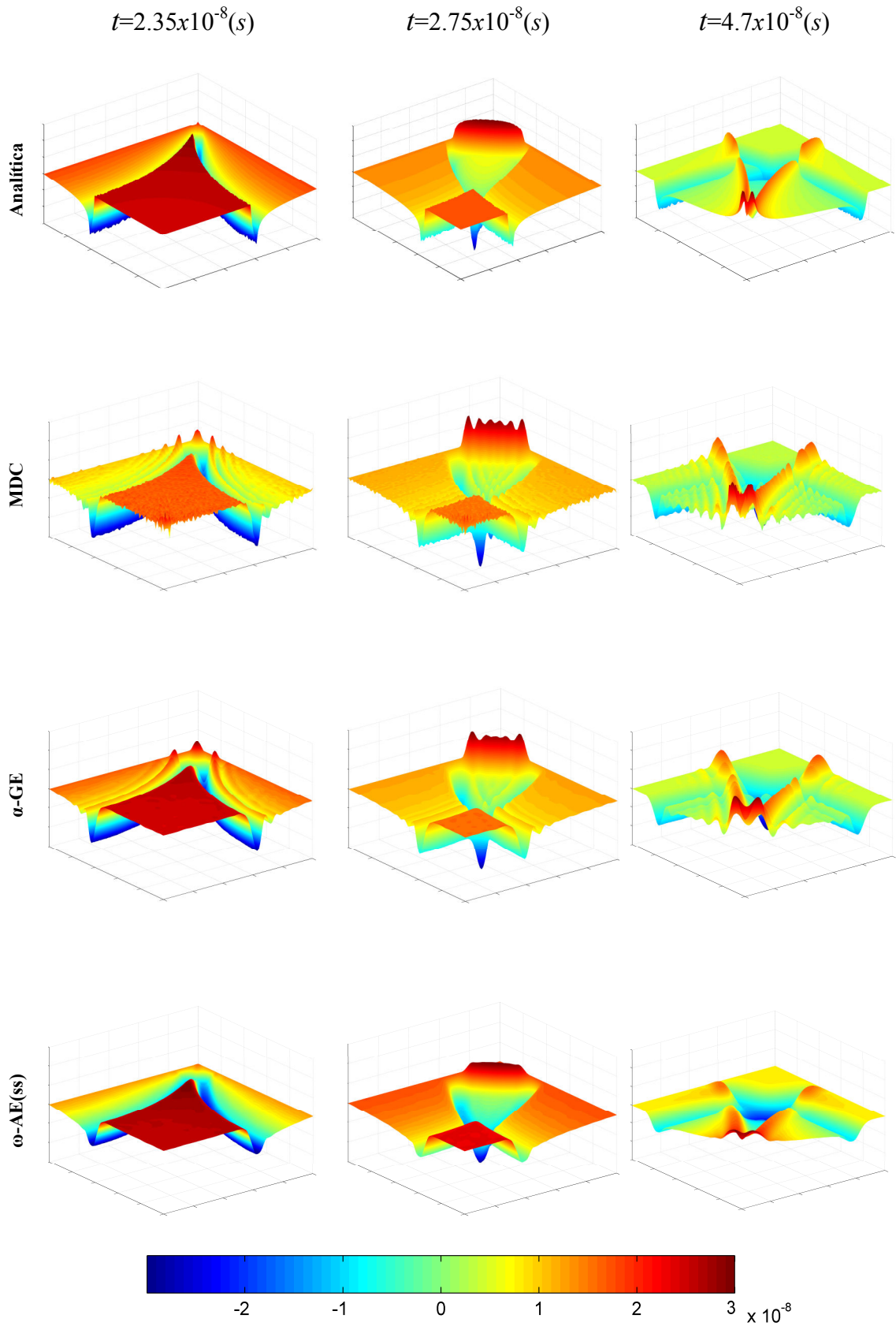


Figura 5.18 - Vista em 3D de E para a discretização 1 em diferentes instantes de tempo para a resposta analítica, os MDC, α -GE e ω -AE(ss).

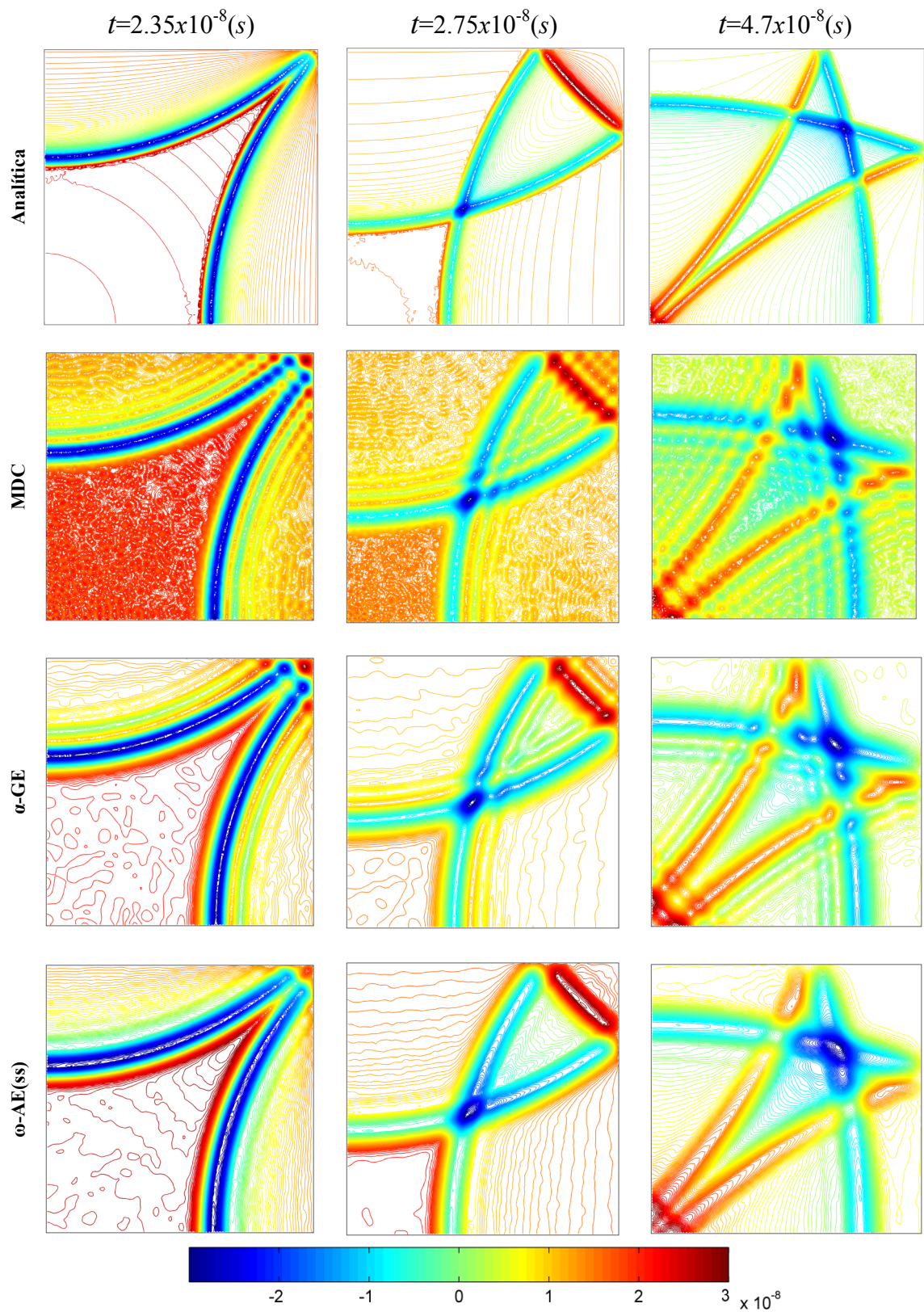


Figura 5.19 - Vista superior de E para a discretização 1 em diferentes instantes de tempo para a resposta analítica, os MDC, α -GE e ω -AE(ss).

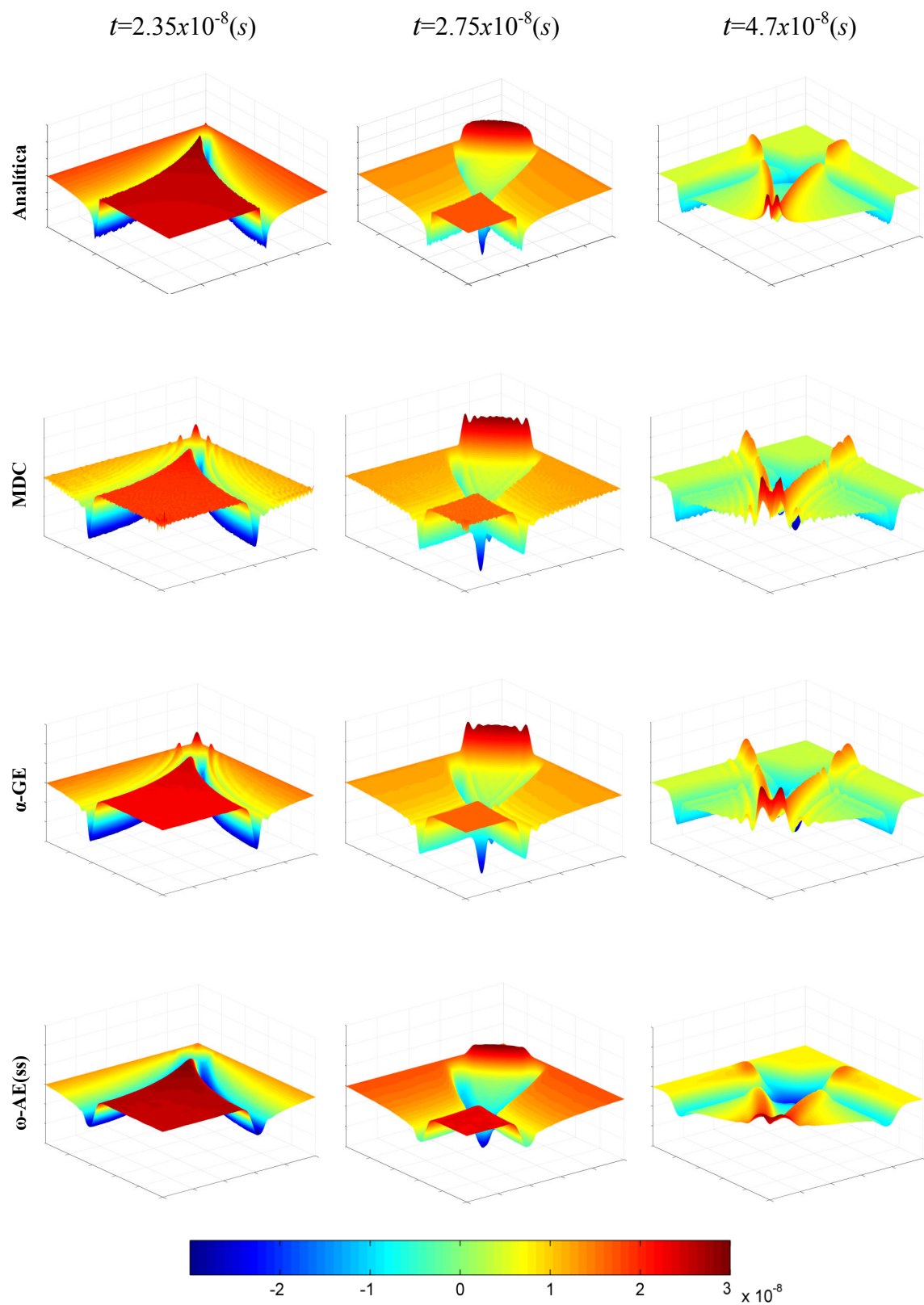


Figura 5.20 - Vista em 3D de E para a discretização 2 em diferentes instantes de tempo para a resposta analítica, os MDC, α -GE e ω -AE(ss).

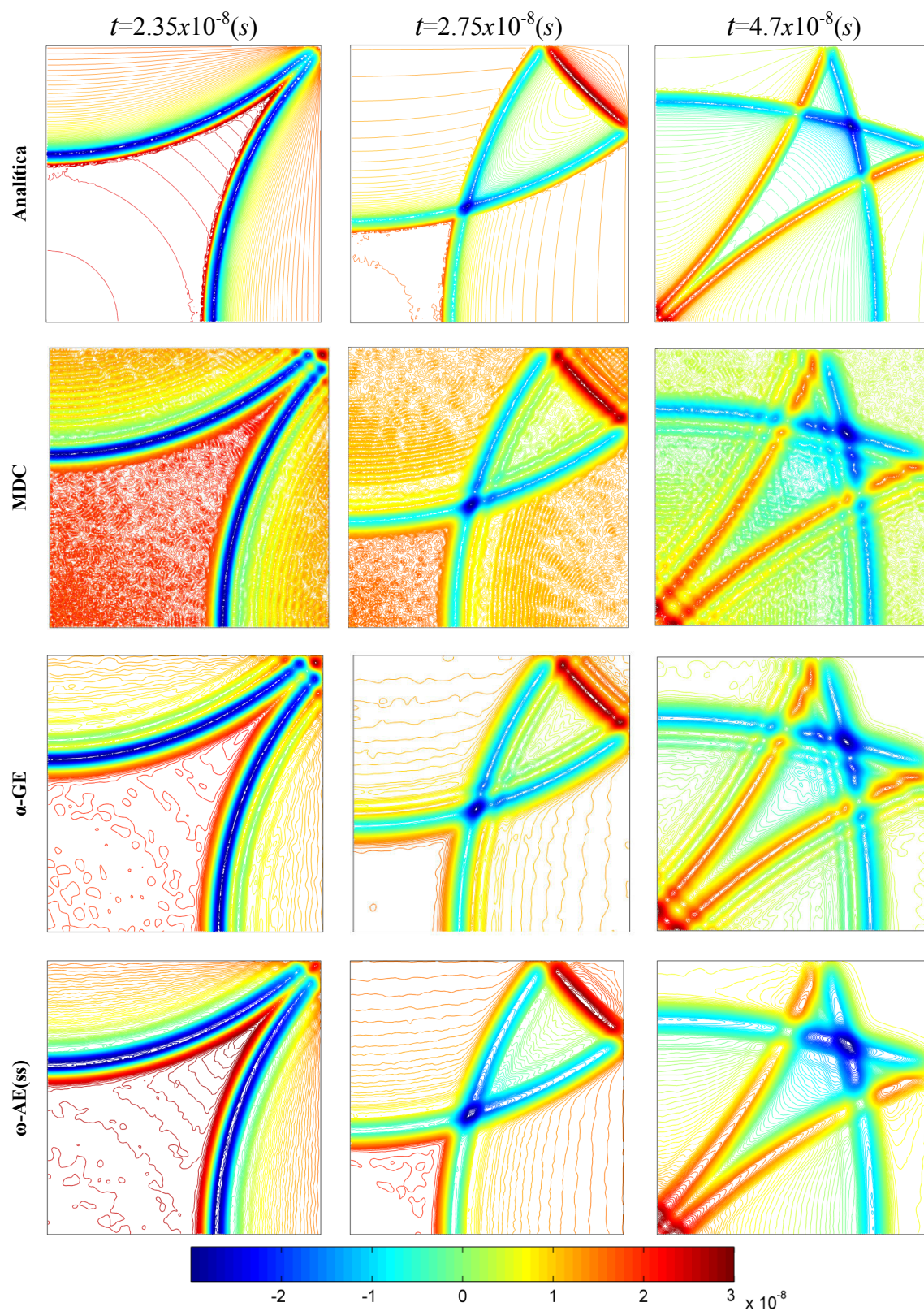


Figura 5.21 - Vista superior de E para a discretização 2 em diferentes instantes de tempo para a resposta analítica, os MDC, α -GE e ω -AE(ss).

As figuras indicam que o MDC, por não possuir nenhuma forma de amortecimento numérico, apresenta diversas oscilações espúrias que não correspondem à solução de fato, modificando significativamente a forma da resposta em comparação com os métodos que apresentam alguma maneira de mitigar estes modos espúrios, como visto nos exemplos deste trabalho. O α -GE e o ω -AE já apresentam menos ruídos na solução computada, entretanto se pode ver que a solução obtida pelo ω -AE para esta aplicação, em ambas as discretizações, com menor e maior refinamento, se assemelha mais à resposta analítica, sendo muito eficiente em apropriadamente eliminar os modos de vibrações espúrias presentes nesta aplicação devido aos erros introduzidos pelo processo de discretização espacial.

Por fim, para demonstrar a estratégia de amortecimento numérico proposta pelo método ω -AE, as Fig. 5.22 e 5.23, que respectivamente correspondem às discretizações 1 e 2, mostram em vista superior a solução computada nos mesmos instantes de tempo que as figuras anteriores, sendo a 1ª linha correspondente ao método ω -AE(ss) e a 3ª linha, ao ω -AE(cs). Além disso, a figura destaca os elementos que apresentam amortecimento ativo nestes instantes de tempo, indicados em preto com a malha de elementos finitos em cinza ao fundo, para o ω -AE(ss) na 2ª linha e para o ω -AE(cs) na 4ª linha das figuras.

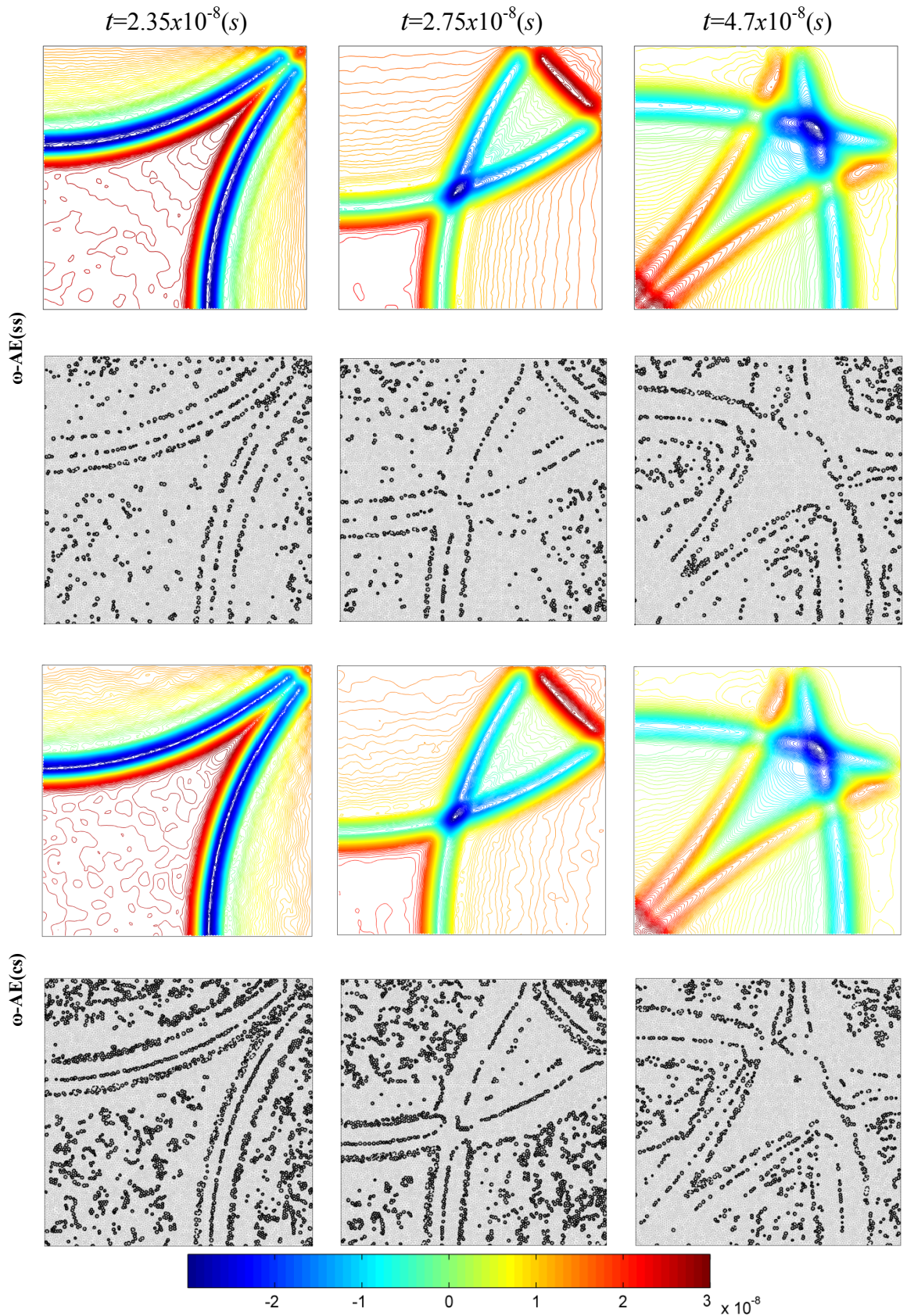


Figura 5.22 - E para a discretização 1 em diferentes instantes de tempo para os métodos ω -AE(ss) e ω -AE(cs) e elementos com amortecimento numérico ativo.

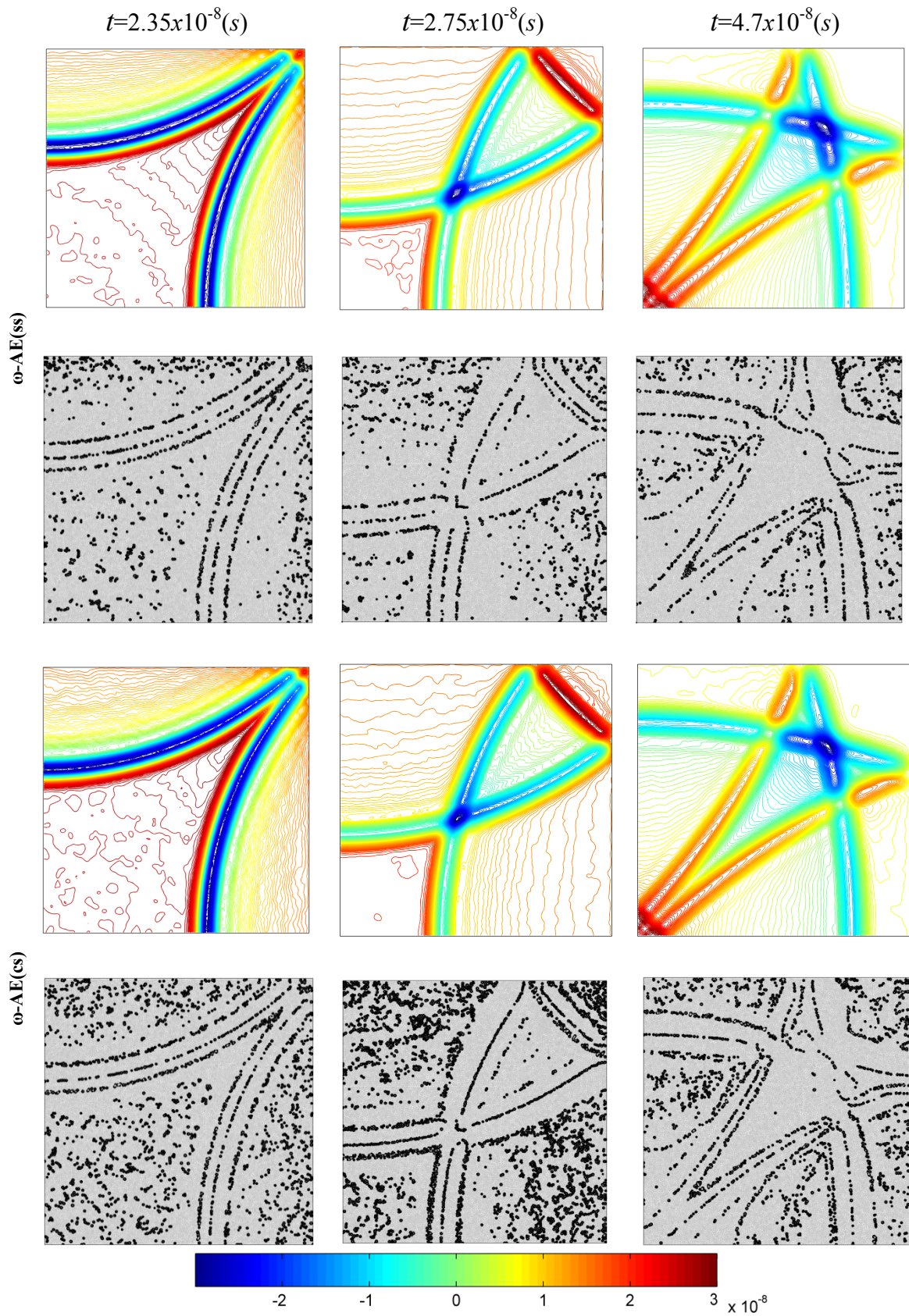


Figura 5.23 - E para a discretização 2 em diferentes instantes de tempo para os métodos $\omega\text{-AE}(ss)$ e $\omega\text{-AE}(cs)$ e elementos com amortecimento numérico ativo.

Assim, cada elemento marcado nas imagens acima têm o parâmetro α , definido na Eq. (4.6c), ativo e, por conseguinte, maior que 1, o que introduz o amortecimento à solução naquele instante de tempo.

Além da estratégia de amortecimento numérico, estas duas últimas figuras também permitem mais uma análise acerca da técnica de subciclagem implementada ao método ω -AE. Comparando as soluções computadas com e sem subciclagem, é possível perceber visualmente que, para estes instantes de tempo, as respostas sem subciclagem são mais semelhantes às respostas analíticas do que as soluções com subciclagem. Se forem observados os elementos com amortecimento ativo, pode-se ver que com a subciclagem geralmente há mais elementos amortecidos do que quando ela não é implementada. Entretanto, quando a solução ao longo do tempo é analisada, percebe-se que para o ω -AE(cs) normalmente o amortecimento numérico presente é ligeiramente menor do que para o ω -AE(ss). O que se verifica é que para esta aplicação especificamente, embora mais elementos sejam amortecidos no ω -AE(cs), o valor do parâmetro α para a maioria destes elementos é menor do que seria no ω -AE(ss). Isto quer dizer que na prática, a resposta com subciclagem é menos amortecida do que sem subciclagem, o que não necessariamente implica em maior ou menor erro. Como pode ser visto neste exemplo, quando a solução é analisada no ponto P ao longo do tempo, o método ω -AE(cs) apresenta melhor performance, ao passo que nos instantes de tempo escolhidos para análise da solução computada em todo o domínio discretizado, o ω -AE(ss) parece se aproximar mais da resposta analítica, embora, como demonstrado nas aplicações, as diferenças entre o método com e sem subciclagem tenham ficado em torno de 5%, não sendo de fato, de grande relevância, frente às vantagens que apresentam em comparação à correspondente aos demais métodos implementados.

De fato, esta característica mostra a robustez do método ω -AE. Quanto maior a capacidade dissipativa dos elementos (i.e., elevados valores para α), um pequeno número de elementos com amortecimento numérico ativado é suficiente para se extinguir as oscilações espúrias do modelo; caso a capacidade dissipativa dos elementos seja reduzida (i.e., valores de α próximos da unidade), em um maior número de elementos o amortecimento será ativado, de forma a se reduzir de igual maneira as oscilações espúrias do modelo. Esta é outra importante vantagem do método adaptativo em foco, permitindo que as oscilações espúrias do método sejam apropriadamente atingidas, independentemente das discretizações adotadas. Este não é o caso para a maioria dos métodos dissipativos existentes, sendo estes bastante sensíveis à discretização temporal adotada.

5.3.2 Meio de propagação heterogêneo

Por fim, como última aplicação numérica, um problema semelhante ao anterior, porém com meio de propagação heterogêneo, constituído em parte por ar, com geometria definida por $A=0,6L$ e em parte por concreto, com geometria definida por $B=0,4L$, abaixo descritas no esquema da Fig. 5.24, é considerado. As propriedades dos meios de propagação são: $\mu_{ar} = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$, $\varepsilon_{ar} = 8,8544 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_{concreto} = \mu_{ar}$ e $\varepsilon_{concreto} = 5 \varepsilon_{ar}$ [44].

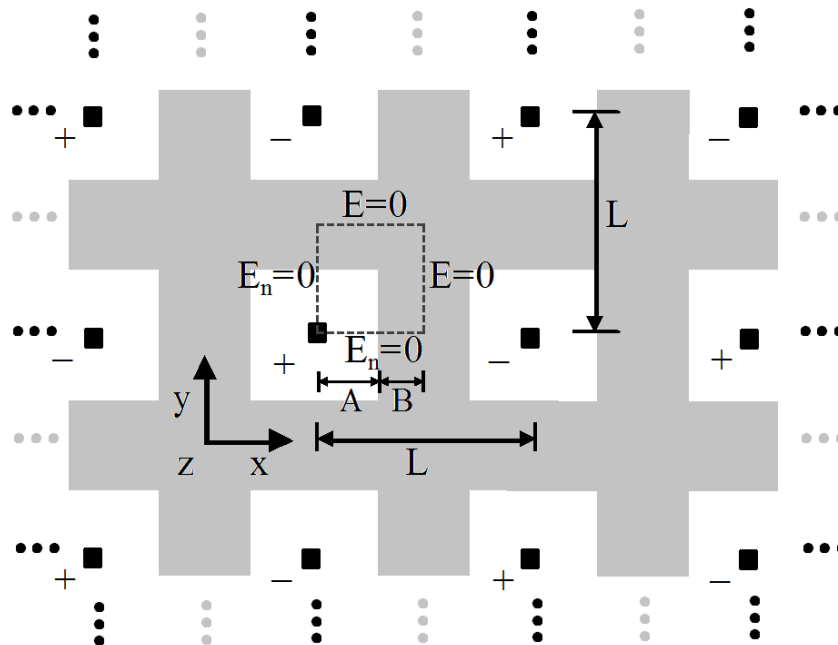


Figura 5.24 - Esquema do modelo: regiões quadradas de densidades de corrente constante e o domínio discretizado.

Esta aplicação numérica não apresenta solução analítica para comparação. Isto posto, a mesma discretização utilizada na aplicação anterior em meio homogêneo, com 34194 elementos triangulares lineares irregulares, apresentada na Fig. 5.15(a) e 5.15(c), é utilizada nesta aplicação, mudando somente o meio de propagação na área pertinente, tornando-o heterogêneo.

Analogamente às simulações anteriores, nesta aplicação as simulações são realizadas com $\bar{\alpha} = 1$ e conseqüentemente $\bar{\Omega} = 2$, o que corresponde a $\Delta t_0 = 4.6342 \times 10^{-11}$ (s). Também a subciclagem é implementada e a figura a seguir mostra a divisão dos subdomínios. Para este caso, ocorre a criação de 3 subdomínios, isto devido à irregularidade da malha de elementos finitos, uma vez que a definição do Δt_0 de cada elemento e respectiva classificação dos nós depende tanto da geometria da discretização espacial, quanto das propriedades do meio de propagação.

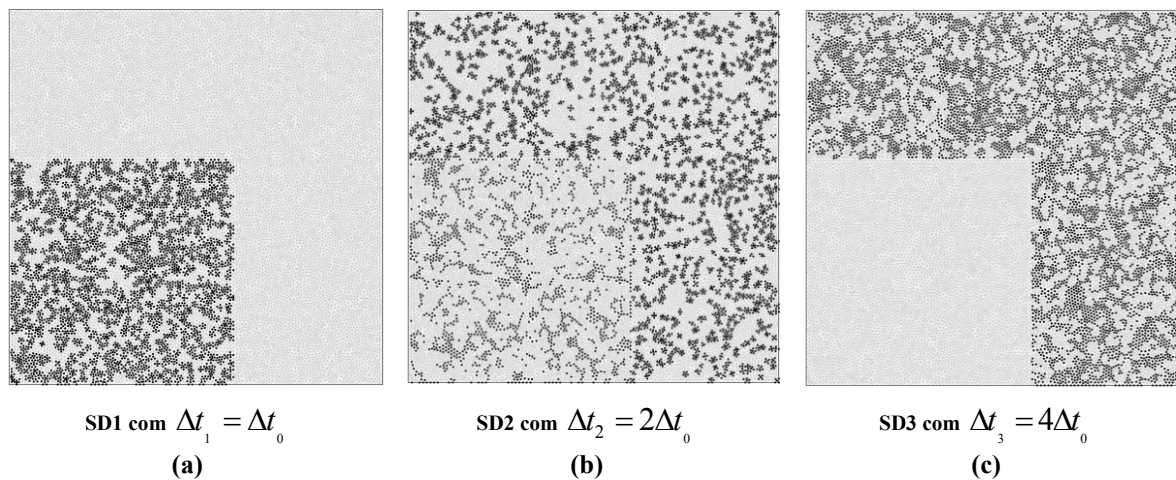


Figura 5.25 - Subdomínios utilizados na subciclagem.

Realizadas as simulações, a resposta do campo computado \mathbf{E} em todo o domínio discreto é agora apresentada para um dado instante de tempo. A Fig. 5.26 mostra a vista em 3D da solução no domínio, enquanto a Fig. 5.27 apresenta a vista superior da solução, onde as curvas de contorno correspondem à intensidade do campo, analogamente ao exemplo anterior. Isto é feito para três instantes de tempo: $t=1,85 \times 10^{-8}$ (s), $t=3,70 \times 10^{-8}$ (s), $t=4,5 \times 10^{-8}$ (s), relativos às três colunas, ao passo que às linhas correspondem, respectivamente, as respostas do MDC, α -GE, ω -AE(ss) e ω -AE(cs). Em todas as figuras subsequentes há uma demarcação do limite entre o ar e o concreto, representado por uma linha tracejada.

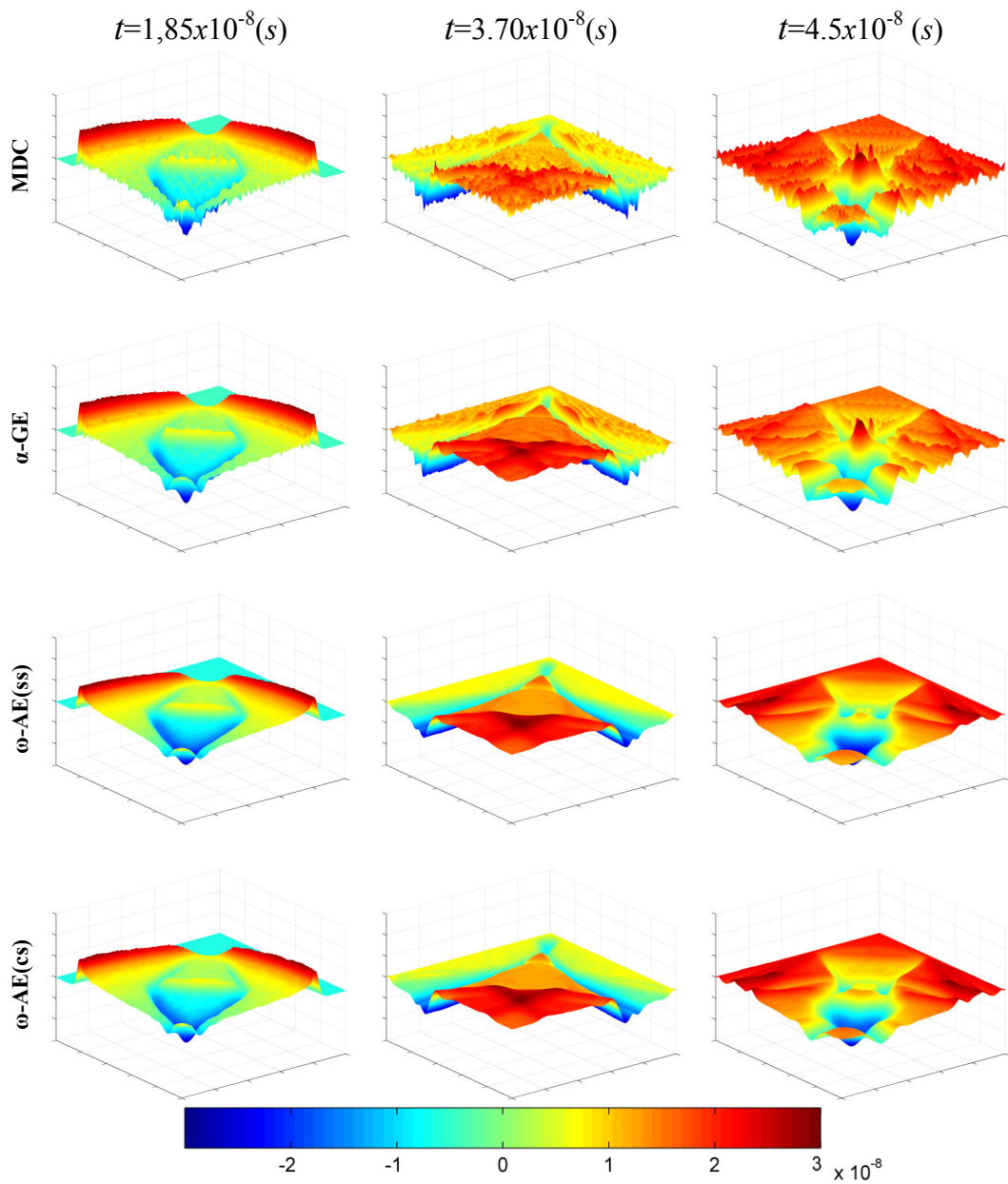


Figura 5.26 - Vista em 3D de E em diferentes instantes de tempo para MDC, α -GE, ω -AE(ss) e ω -AE(cs).

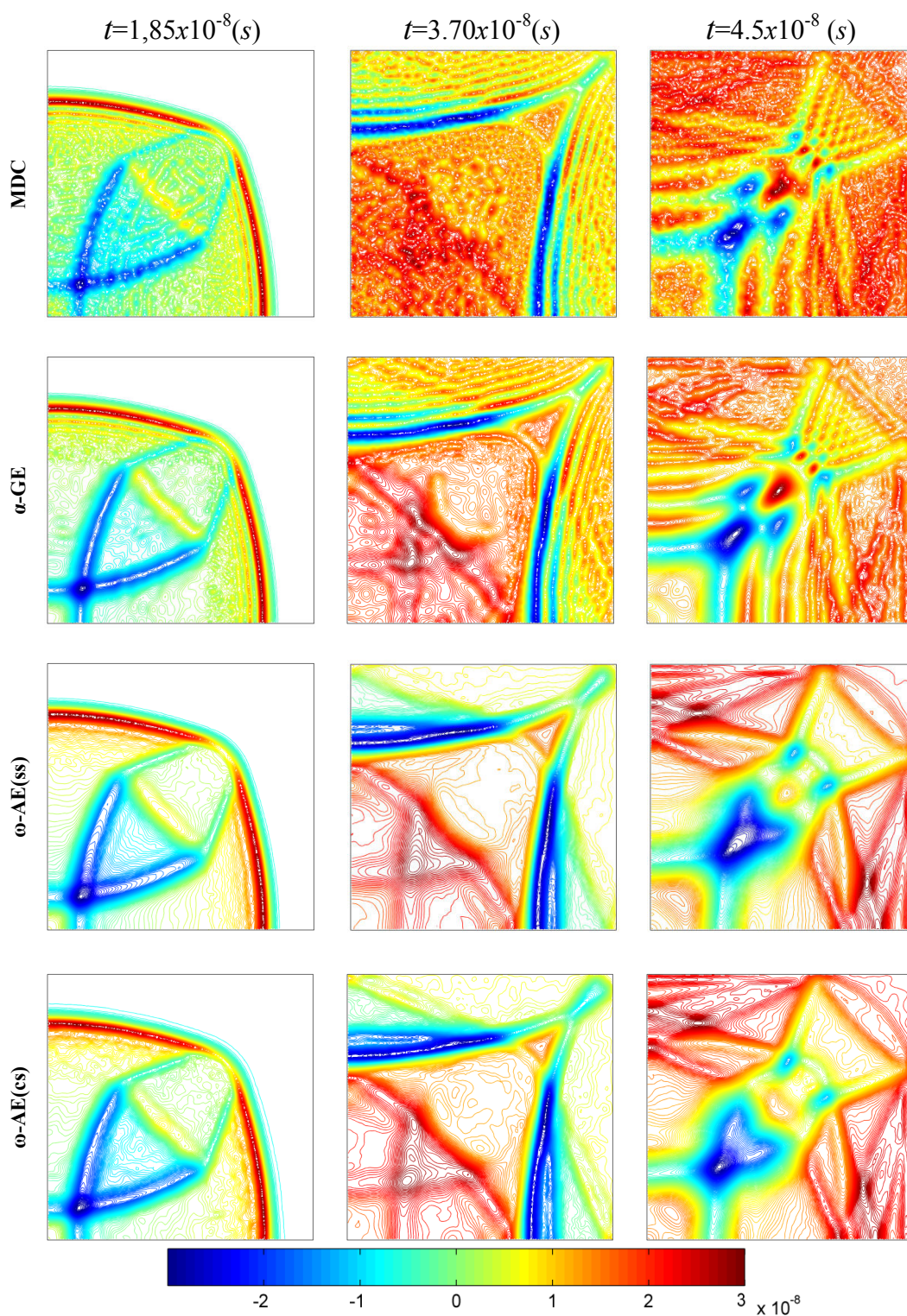


Figura 5.27 - Vista superior de E em diferentes instantes de tempo para MDC, α -GE, ω -AE(ss) e ω -AE(cs).

Por fim, a Fig. 5.28 apresenta os elementos com dissipação numérica ativa, para comparação entre os métodos ω -AE(ss) e ω -AE(cs).

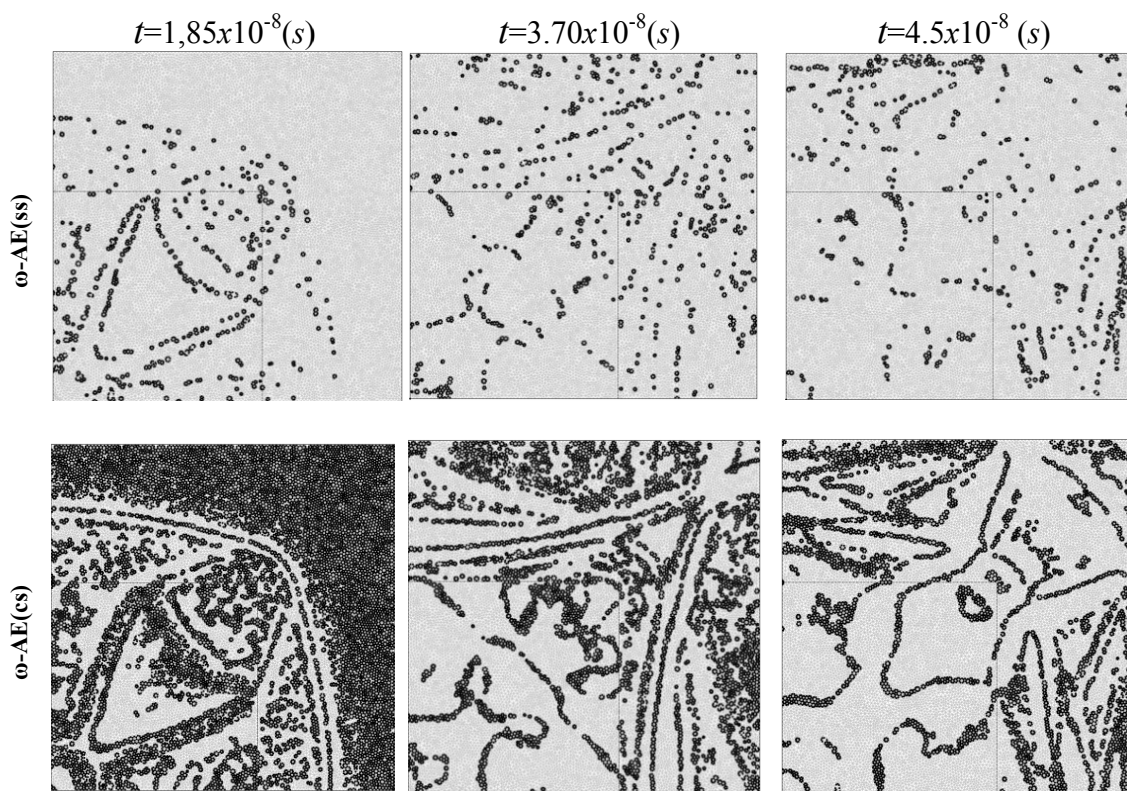


Figura 5.28 - Elementos com amortecimento numérico ativo em diferentes instantes de tempo para os métodos ω -AE(ss) e ω -AE(cs).

Neste caso, a solução com subciclagem se aproxima bastante da sem subciclagem, o ω -AE(cs) apresentou consideravelmente mais elementos com dissipação numérica ativa do que o ω -AE(ss). Isto de fato corrobora com os resultados obtidos nos exemplos anteriores e valida a utilização desta técnica junto ao novo método.

Nesta última aplicação, os métodos apresentam comportamento similar aos anteriores e nela também são apresentadas as potencialidades para método ω -AE e bom desempenho frente a problemas que envolvam meios heterogêneos, pois estes normalmente acarretam em mais modos espúrios do que problemas com meios homogêneos. No próximo capítulo seguem algumas conclusões acerca deste trabalho e dos resultados com ele obtidos e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 6. Conclusões

6.1 Discussão dos resultados

Um método explícito de marcha no tempo para análise de problemas hiperbólicos é no presente trabalho analisado e os resultados obtidos, discutidos. A técnica é condicionalmente estável e apresenta amortecimento numérico controlável e temporalmente adaptativo, que é introduzido na análise apenas quando um comportamento oscilatório é detectado, em nível de elemento. Com um parâmetro que é calculado para todos os elementos a cada passo de tempo, o método ω -AE se mostra muito eficiente para a análise de problemas hiperbólicos.

Por outro lado, nota-se uma tendência à suavização de picos e vales, como pode ser visto nos resultados das aplicações numéricas, fato que usualmente ocorre em métodos dissipativos. Entretanto, embora visualmente isto seja uma possível desvantagem, em todos os testes realizados o método ω -AE, com e sem subciclagem, apresenta menores erros ao longo do tempo em relação aos demais métodos, pois nos outros instantes de tempo, quando ocorrem, as oscilações espúrias, o desempenho do novo método se mostra superior na sua eliminação, mostrando que os resultados obtidos são satisfatórios. Desta maneira, o método se mostra eficaz em eliminar os modos espúrios de alta frequência provenientes da discretização espacial, sem interferir consideravelmente na precisão no cálculo dos modos principais da resposta, além de ser uma técnica de fácil implementação, com uma abordagem de passo único não-iterativo e que é verdadeiramente auto-iniciável. Portanto, conclui-se com o presente trabalho que o método ω -AE se apresenta como um método eficaz de marcha no tempo explícita.

Além disso, nesta nova abordagem proposta, ao considerar a utilização de múltiplos passos de tempo no método ω -AE(cs), a principal desvantagem de métodos explícitos, que é sua estabilidade condicionada, é minimizada e, a integração direta por vezes, otimizada, tornando o método ω -AE uma técnica promissora e com grande potencial para aplicações que envolvam ondas eletromagnéticas.

6.2 Propostas para trabalhos futuros

Uma primeira proposta para continuação do corrente trabalho é a de validar o método ω -AE para problemas em 3 dimensões espaciais. Neste contexto, a modelagem espacial por Elementos Finitos de Arestas surge como primeira alternativa. Entretanto, por outro lado, se acredita também ser de considerável relevância a validação do método para problemas que envolvam meios com distribuição elaborada de material, geometrias e condições de contorno complexas, etc., que podem acarretar erros consideráveis às respostas numéricas obtidas por métodos convencionais, demandando técnicas de discretização espacial e temporal mais elaboradas.

Verificou-se recentemente, que resultados ainda melhores podem ser obtidos com a presente técnica caso sejam adotados critérios mais restritivos para ativação dos elementos dissipativos. Testes recentes têm mostrado que adotando-se como critério de ativação a ocorrência de duas oscilações consecutivas ao invés de uma (como indicado na Eq. 4.7), o amortecimento excessivo em picos e vales é consideravelmente reduzido, tornando o método ainda mais preciso. De fato, tal melhora é esperada, uma vez que o critério de duas oscilações consecutivas praticamente elimina a introdução de amortecimento numérico quando há vibrações físicas reais, sendo a mesma praticamente ativada somente quando de vibrações espúrias.

Ainda, a adaptação dos algoritmos ao paralelismo é mais uma proposta que pode permitir melhor análise do método ω -AE. Com ela, são viabilizados estudos de problemas de maior porte em diversas aplicações, como guias de ondas, antenas, problemas de espalhamento, entre outros. Além disto, a investigação de algoritmos paralelos para a técnica proposta, especialmente os adaptados à computação com GPUs (Graphics Processing Unit), que vêm se mostrando uma tendência, vai acrescentar robustez aos algoritmos utilizados.

Referências Bibliográficas

- [1] G.M. HULBERT, J. CHUNG. "Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 137, pp 175–188, 1996.
- [2] Chung, J. AND Lee, J.M. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* v. 37, pp. 3961–3976, 1994.
- [3] MAHEO, L., RIO, G. AND GROLLEAU, V. One the use of some numerical damping methods of spurious oscillations in the case of elastic wave propagation, *Mechanics Research Communications*, v. 38, pp. 81-88, 2011.
- [4] BATHE, K., *Finite Element Procedures*. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [5] FISH J., BELYTSCHKO T. *A First Course In Finite Elements*. 1 ed. Chichester: Wiley, 2007.
- [6] HUGUES, T.J.R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover ed. New York: Dover Publications INC, 2000.
- [7] MEUNIER, G. *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Gérard Meunier ed. London: Wiley, 2008, pp. 1-68.
- [8] SOARES, D. A simple and effective new family of time marching procedures for dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 1138–1166, 2015.
- [9] SOARES, D. An explicit time marching technique with solution-adaptive time integration parameters, *Computer Modeling In Engineering & Sciences*, v. 107, no. 3, pp. 223-247, 2015.
- [10] SOARES, D. A simple and effective single-step time marching technique based on adaptive time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.

- [11] SOARES JÚNIOR, D.; LEAL, D. R. DE M. Análise Explícita de Problemas de Propagação de Ondas Considerando Dissipação Numérica Adaptativa e Subciclagem. In: III CMAC-SE Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste, v. 3 n. 2, 2015, Vitória - ES. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. [Online]. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5540/03.2015.003.02.0060>. Acesso em 15 jul. 2016.
- [12] SOARES JR, D.; DE MEDEIROS LEAL, D. R. Wave propagation analysis with adaptive time integration parameters. In: XXXVI CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, ISSN: 2178-4949, 2015, Rio de Janeiro - RJ. *Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2015-0090>. Access on jul. 15th 2016.
- [13] HAYT , W. H. *Eletromagnetismo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2003.
- [14] SARDELLA, E. *Física-Matemática: Teoria e Aplicações*. 1. ed. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, pp. 143-155, 2008.
- [15] QUEVEDO, C. P. *Ondas Eletromagnéticas*. 1. ed. São Paulo: Pearson Practice Hall, 2010.
- [16] BUTKOV, E. *Física-Matemática*, 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1988.
- [17] JIN, J. *The finite element method in electromagnetics*, 3 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.
- [18] BOYCE, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.
- [19] BELYTSCHKO, T. AND MULLEN, R. Explicit integration of structural problems, in: P. Bergen et al., *Finite Elements in Non Linear Mechanics*, v. 2, pp. 697-720, 1977.
- [20] DOKANISH, M. A., SUBBARAJ, K., “A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics – I. Explicit Methods”, *Computer & Structures*, v. 32, n. 6, pp. 1371-1386, 1989.

- [21] SOARES, D. An explicit family of time marching procedures with adaptive dissipation control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 100, p. 165-182 2014.
- [22] POLJAK D. & BREBBIA C. A. *Boundary Element Methods for Electrical Engineers*. 1. ed. Southampton Boston: WIT Press, 2005.
- [23] ESGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacionais*, 1. ed. Moscú: Editora MIR, 1969, pp. 207-245.
- [24] CHAPRA S, REYMOND C. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill, 2005.
- [25] PINTO D. MORGADO M. C. F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Rio de Janeiro. Editora UFRJ. 2008.
- [26] HEWITT E., HEWITT R. **The Gibbs-Wilbraham Phenomenon: An Episode in Fourier Analysis**. Tese de Doutorado. University of Washington Seattle and Lockheed Missiles and Space Company Sunnyvale, California, 1979.
- [27] ROVERE, H. L. L., **Estudos de algoritmos de integração direta para análise de dinâmica estrutural**. Tese de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 1983.
- [28] GROTE, M. J. AND MITKOVA T., Explicit local time-stepping methods for Maxwell's Equations, *J. of Computational and Applied Mathematics*, v. 234, pp. 3283-3302, 2010.
- [29] FUNG, T.C. Higher-order accurate time-step-integration algorithms by post-integration techniques, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 53, pp. 1175–1193, 2002.
- [30] W.J.T. DANIEL, Analysis and implementation of a new constant acceleration subcycling algorithm, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 40, pp. 2841–2855, 1997.
- [31] W.J.T. DANIEL . Subcycling first- and second-order generalizations of the trapezoidal rule. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v. 42, pp. 1091–1119, 1998.

[32] WU, Y.S. AND SMOLINSKI, P., Multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 187, pp. 641-660, 2000.

[33] PRAKASH, A., TACIROGLU, E. HJELMSTAD K. D. Computationally efficient multi-time-step method for partitioned time integration of highly nonlinear structural dynamics. *Computers and Structures*, v. 133, pp 51–63, 2014.

[34] BRUIJS, W. E. M., **Subcycling in Transient Finite Element Analysis**. Tese de Doutorado. Technische Universiteit Eindhoven, 1990.

[35] RODRIGUES, M. V. **Algoritmos otimizados para a análise acoplada de sistemas flutuantes na exploração de petróleo offshore**, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE - UFRJ, 2004.

[36] SILVEIRA, E. S. S. da. **Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem com Adaptação no Tempo e Subciclagem**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil - PUC - RJ, 2001.

[37] SMOLINSKI, P. , SLEITH, S. , BELYTSCHKO, T.. Stability of an explicit multi-time step integration algorithm for linear structural dynamics equations, *Computational Mechanics*, v. 18, pp 236-244, 1996.

[38] SMOLINSKI, P. Subcycling integration with non-integer time steps for structural dynamics problems, *Comput. Struct.*, v. 59, pp. 273–281, 1996.

[39] MIAO, C., ZHU P., SHI G. L., CHEN G. L. Study on sub-cycling algorithm for flexible multi-body system—integral theory and implementation flow chart, *Comput Mech*, v. 41, pp. 257–268, 2008.

[40] HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., Collocation, dissipation and ‘overshoot’ for time integration schemes in structural dynamics. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, v. 6, pp. 99–117, 1978.

[41] HOFF, C. , PAHL, P.J. Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 67, pp. 367–385, 1988.

[42] CHANG, S.Y. A new family of explicit methods for linear structural dynamics, *Comput. Struct.*, v. 88, pp. 755–772, 2010.

[43] HUGHES, T.J.R. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour, in: T. Belytschko, T.J.R. Hughes (Eds.), *Computational Methods for Transient Analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1983.

[44] DANIELS, J. D. Surface Penetrating radar, *Electronics & Communication Engineering Journal*, pp. 165-182, August, 1996.