Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado em Educação

FABULAÇÕES E MODELOS OU COMO POLÍTICAS COGNITIVAS OPERAM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GIOVANI CAMMAROTA

Juiz de Fora
2013

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado em Educação

GIOVANI CAMMAROTA

FABULAÇÕES E MODELOS OU COMO POLÍTICAS COGNITIVAS OPERAM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profª. Drª. Sônia Maria Clareto

Juiz de Fora
2013

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cammarota, Giovani.
Fabulações e modelos ou como políticas cognitivas operam em educação matemática / Giovani Cammarota. -- 2013.
154 f.

Orientador: Sônia Maria Clareto
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, 2013.

1. invenção. 2. políticas cognitivas. 3. educação matemática. I. Clareto, Sônia Maria, orient. II. Título.

GIOVANI CAMMAROTA

FABULAÇÕES E MODELOS OU COMO POLÍTICAS COGNITIVAS OPERAM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Educação.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA

____
Prof.ª Dr.ª Sônia Maria Clareto (Orientadora)
Universidade Federal de Juiz de Fora

____
Prof.ª Dr.ª Margareth Aparecida Sacramento Rotondo
Universidade Federal de Juiz de Fora

____
Prof.ª Dr.ª Beatriz Sancovschi
Universidade Federal do Rio de Janeiro

____
Prof. Dr. César Donizetti Pereira Leite
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

DEDICATÓRIA

Ao meu avô, Luciano de Abreu Cammarota, pelos montes de guizos que sabem rir. Amigos para sempre.

"À noite, tu olharás as estrelas. Aquela onde moro é muito pequena para que eu possa te mostrar. É melhor assim. Minha estrela será para ti qualquer uma das estrelas. Assim, gostarás de olhar todas elas... Serão todas tuas amigas. E, também, eu lhe darei um presente...
E ele riu outra vez.
- Ah! Meu caro, meu querido amigo,como eu gosto de ouvir esse riso!
- Pois é ele o meu presente ... será como a água...
- Que queres dizer?
- As pessoas veem estrelas de maneiras diferentes. Para aqueles que viajam, as estrelas são guias. Para outros, elas não passam de pequenas luzes. Para os sábios, elas são problemas. Para o empresário, eram ouro. Mas todas essas estrelas se calam. Tu, porém, terás estrelas como ninguém nunca as teve...
- Que queres dizer?
- Quando olhares o céu à noite, eu estarei habitando uma delas, e de lá estarei rindo; então será, para ti, como se todas as estrelas rissem! Dessa forma, tu, e somente tu, terás estrelas que sabem rir!
E ele riu mais uma vez.
- E quando estiveres consolado (a gente sempre se consola), tu ficarás contente por teres me conhecido. Tu serás sempre meu amigo. Terás vontade de rir comigo. E às vezes abrirás tua janela apenas pelo simples prazer... E teus amigos ficarão espantados de ver-te rir olhando para o céu. Tu explicarás então: "Sim, as estrelas, elas sempre me fazem rir!" E eles te julgarão louco. Será uma peça que te prego...
E riu de novo.
- Será como se eu lhe houvesse dado, em vez de estrelas, montes de pequenos guizos que sabem rir..."

O Pequeno Príncipe – Antoine de Saint-Exupéry

Aos meus pais, Luci-Ane e Valmir, e à minha irmã Juliana.

À dinda-Beth-mãe.

Ao Sílvio César Otero-Garcia.

Sou eternamente responsável por vós, como sois eternamente responsáveis por mim.

"- Eis o meu segredo. É muito simples: só se vê bem com o coração. O essencial é invisível aos olhos.
- O essencial é invisível aos olhos – repetiu o principezinho, para não se esquecer.
- Foi o tempo que perdeste com tua rosa que a fez tão importante.
- Foi o tempo que eu perdi com a minha rosa... repetiu ele, para não se esquecer.
- Os homens esqueceram essa verdade – disse ainda a raposa. Mas tu não a deves esquecer. Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas. Tu és responsável pela tua rosa..."
O Pequeno Príncipe – Antoine de Saint-Exupéry

AGRADECIMENTOS

Todo fim é, também, começo. Seja em fins ou começos, agradecer é dizer de bons encontros que nos arrastam para não se sabe onde. Assim, finalizo-começo agradecendo...

à Luci-Ane Cammarota, pelo amor incondicional, pelas confidências e pela paixão, por ouvir e compartilhar tantas invenções. Por traduzir melhor que ninguém a força amorosa de ser mãe;

a Valmir Ferreira Gomes, por todo o amor e apoio, pelas palavras colocadas com a precisão cirúrgica de um sábio e pelas problematizações em momentos certos;

à Juliana, pelo companheirismo de toda a vida, pelo amor, por compartilhar comigo tantos momentos importantes e por fazer de nossa irmandade um laço de cuidado e carinho recíproco;

à dinda Beth, por me mostrar que força não precisa ter a ver com sisudez. Admiro a força-alegre-leve com a qual você encara e leva a vida. Pelo apoio em tudo o que sempre fiz, pelo amor, pelas palavras, gestos, beijos, abraços e, também, por nunca medir esforços;

ao Sílvio, pelas inúmeras noites perdidas em eternas discussões sobre esse trabalho, por sugerir a divisão desse trabalho em dois livros, por me presentear com materiais que necessitava, como a tese de livre-docência e alguns dos artigos do professor Rômulo Lins e o livro A Gênese do Número na Criança, de Piaget, por produzir comigo um trabalho para um congresso e um artigo em periódico, pelo convite e insistência para que participássemos do colóquio Didactiques de Mathematiques, pela disponibilidade, por estar comigo na tensão da escrita, pelo companheirismo e pelas sugestões feitas em horas certas. Por cuidar e amar sem limites, por rhyzus, beykons e yeaphs, por estar em espaços onde jamais alguém pôde estar. Por compartilhar comigo a vida, as experiências, as alegrias, as frustrações, por ter o poder de tomar atitudes que me fazem sentir uma pessoa especial, por não me faltar; enfim, por ser um Pequeno Príncipe;

aos meus familiares, em especial à Angélica, Gabriel, Ingrid, Rodrigo, Marcos, tia Cléo e tia Lourdinha pelo zelo e carinho que sempre tiveram comigo;

à Soninha, por ser mais do que uma orientadora; por dar sentido, cor e vida à minha licenciatura, abrindo frente às potencialidades de um bom encontro Giovani-educação matemática; por constituir-se comigo nesse processo, nesse trabalho. Pela confiança que muitas vezes me faltou, pelo incentivo, pelas orientações-caminhadas pelos corredores da Universidade e pelas ruas do São Pedro;

à Margareth, pelo exercício incessante de instauração do pensar, por me desassossegar, pelas discussões, por compartilhar comigo um plano de experiências entre a docência e a pesquisa;

ao César, pelos e-mails acalentados de carinho, por estar comigo nos momentos de qualificação e defesa, pela leitura atenta e sugestões potentes, por fazer ressoar o incômodo, por problematizar de maneira tão precisa, mesmo "na experiência infantil da estrangeiridade". Pelo devir-infância;

à Virgínia Kastrup, por todo o esforço em participar do momento da minha qualificação, pela potência, pela obra e pelas ideias inspiradoras junto às quais venho constituindo um modo de ser educador matemático, pelo primeiro pedaço do seu bolo de aniversário em Juiz de Fora, em 2009;

à Beatriz, pela prontidão de se juntar a nós na altura da defesa desse trabalho, por se abrir ao encontro com a educação matemática, pela leitura afetuosa e prospectiva desse texto;

ao Grupo Travessia, cujo híbrido formativo está para além e aquém de um grupo de pesquisa. Por ser um grupo que respira, sente, pensa, se afeta e, sobretudo, por acolher;

à Eriqueta, pela amizade em tantos momentos, por fazer-se presente mesmo estando ausente. Pelos sorrisos, pelas conversas, pelos abraços apertados e, sobretudo, pela força de quem se entrega por não distinguir pensar e fazer;

à Nina, pelo amor, por toda a ajuda em momentos difíceis, pelas discussões, por perder tempo, ficar, criar corpo, carnar. Pelo lindo parecer na ocasião da minha qualificação, pelas crônicas que escreve, pelo vigor;

aos professores da licenciatura em matemática da UFJF, em especial ao Adlai, pelas diversas frases que têm o estranho poder de fazer pensar;

aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFJF, em especial a Diva Chaves Sarmento, Maria Teresa de Assunção Freitas, Ana Maria Moraes Fontes, André da Silva Martins e Rubens Luiz Rodrigues, cujas disciplinas compuseram minha trajetória nesse Programa. À professora Sônia Regina Miranda e à Adriana, pelos momentos de conversa e troca sobre vida, matemática, história, escola,...;

aos muito queridos Getúlio, Cidinha e Michele, que secretariam um Programa de Pós-Graduação com seriedade, sem perder o jeitinho mineiro, sempre simpático, disponível e acolhedor! Muito obrigado por estarem junto a nós em todos os momentos;

aos meus queridos colegas de PPGE, em especial à Marina, à Cássia e à Cris, por compartilharem comigo a difícil e importante tarefa da representação discente, à Camila e à Rose, pelas conversas, pelo convívio, pelos sorrisos, abraços, contatos. Enfim, por toda a amizade construída num momento tão crucial para todos nós;

aos meus alunos dos cursos de Pedagogia, Matemática e Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora, que me ensinaram muito mais do que eu pude ensinar a eles;

Ao Curso Nota 10, em especial à Dani e ao Luiz Claudio, por me mostrar que o exercício da docência se faz sempre junto a um ensaio que se pratica na imanência da sala de aula, pelo convívio salutar e pela convivência com um corpo docente comprometido e afetado pela sala de aula e pelo ser professor;

às escolas por onde passei como aluno – IMEC, Colégio Comecinho de Vida, Liceu Municipal de Petrópolis e Rede MV1/Colégio São José – por me colocarem desafios e aprender a amar a docência;

aos meus professores de matemática, em especial à Leila, ao Fred, ao Márcio e ao Allan, por me ensinarem a amar matemática e a sala de aula;

aos meus queridos amigos de escola, Carol, Rodrigo, Michele, Ana e Rafaela, por me ensinarem que a amizade é uma forma de amor que não cobra, por estarem sempre por perto, ainda que fisicamente longe. A todos vocês, saudades!;

aos meus queridos amigos de graduação, Raquel, Sara, Marcela, Emanoelle, Ana Claudia, Júlia e Filipe, por todo o convívio e por fazer minha vida mais feliz sendo de fora em Juiz de Fora. A todas vocês, saudades!;

aos meus queridos amigos Zé Carlos, Kelle e Zanna, pelo carinho, pela amizade, pelo apoio e entusiasmo com o trabalho que eu vinha desenvolvendo, por toda a preocupação e por me darem todo o apoio em um dos momentos mais difíceis de minha vida. A presença de vocês ressoa em mim a todo o tempo! A vocês, saudades!;

à Escola Municipal João Guimarães Rosa, em especial à Marinez, e à Escola Municipal Santos Dumont, em especial à Maria Clara, por terem permitido as vivências e experiências que compõe esse trabalho;

à FAPEMIG pelo apoio financeiro;

à UFJF, por proporcionar espaços tão ricos de formação;

a todos e todas que torceram por mim e se preocuparam ao longo dessa e de outras trajetórias;

à vida pelos bons encontros.

RESUMO

A presente dissertação se constitui junto a uma pesquisa que tem por objetivo investigar como políticas cognitivas operam em Educação Matemática. Nesse sentido, constrói-se, como intercessores, a noção de cognição inventiva proposta por Virgínia Kastrup e, mais de perto, dois modelos comumente utilizados na área: a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud, e o Modelo dos Campos Semânticos, de Rômulo Lins. O texto dissertativo desdobra-se, pois, em dois livros. Em um deles são compostas quatro fabulações junto à sala de aula de matemática, que operam com os modelos de aprendizagem e de cognição com os quais dialoga esta pesquisa. Essas fabulações são construções narrativas que operam com os modelos levando à explicitação das implicações desses modelos para a sala de aula de matemática. Uma delas, porém, ao operar com a noção de cognição inventiva, produz uma fabulação que vai constituindo(-se) em um antimodelo, ou seja, naquilo que coloca a ideia de modelo em movimento, forçando seus limites. No outro livro, o objetiva-se ao estudo da Teoria dos Campos Conceituais e do Modelo dos Campos Semânticos, discutindo-se as noções que a eles subjazem, situando-os como teorizações que estão em conexão com as ideias de Piaget e Vigotski, respectivamente.

Palavras-chave: Invenção; políticas cognitivas; Educação Matemática.

ABSTRACT

This dissertation is the result of a research that aims to investigate how cognitive policies operate in Mathematics Education. For this, we as intercessors, the notion of cognition inventive proposal by Virginia Kastrup and more closely two models commonly used in the area: the Theory of Conceptual Fields, of Gerard Vergnaud, and the Model of Semantic Fields, of Rômulo Lins. The dissertation unfolds into two books. In one of their fabulations are made from the mathematics's classroom, operating with models of learning and cognition with which this research dialogues. These fabulations are narrative constructions that operate with the models leading to explicitation of the implications of these models for the classroom math. Operating with the inventive cognition, one will fabulation thus becoming anti-model one, which puts the idea of model in motion forcing its limits. In another book, the objective is by study the Theory of Conceptual Fields and Model of Semantic Fields, discussing the concepts that underlie them, placing them as theories that are in connection with the ideas of Piaget and Vygotsky, respectively.

Key words: Invention; Theory of Conceptual Fields; Model of Semantic Fields; Mathematics Education.

SUMÁRIO

Encontros no Travessia: constituição de um campo problemático 11

LIVRO DAS FABULAÇÕES

PARA COMEÇAR 30

FABULAÇÃO: E NO INÍCIO FORAM A RECOGNIÇÃO... E A MATEMÁTICA 32

FABULAÇÃO: AS SETE MAÇÃS E A FRAÇÃO 43

FABULAÇÃO: OS TANQUES.. 59

FABULAÇÃO: SOMBRAS, VULCÂNGULOS E PRIMOS DE CONE OU UM ANTIMODELO ... 72

LIVRO DOS MODELOS

SOBRE MODELOS TEÓRICOS E COGNIÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 108

Teoria dos Campos Conceituais: uma ampliação da perspectiva piagetiana 108

Modelo dos Campos Semânticos: a cognição no campo da cultura 122

Pós-escrito 139

Referências 149

ENCONTROS NO TRAVESSIA: A CONSTITUIÇÃO DE UM CAMPO PROBLEMÁTICO

Ao perguntarmo-nos acerca de nossas preocupações de pesquisa, é inevitável voltarmos o olhar para os processos de subjetivação que nos trouxeram até aqui. As diversas forças que compõem a configuração desta pesquisa, deste texto, remetem, de algum modo, ao tornar-se daquele que escreve. Mais do que um exercício de resgate de uma história que me constitui, talvez o exercício seja traçar na escrita, ainda que minimamente, um mapa de configurações que vai, aos poucos, devindo, tornado-se outro, implicando questões em mim. *O que em você faz questão?* Se o exercício de uma reconstituição de minha história aponta para um olhar aos pontos de continuidade/descontinuidade que me trouxeram até essa pesquisa, o exercício que proponho é de problematização de minha própria história, apontando os escapes que forjam subjetividades, tornam-se um corpo: corpo-pesquisa, corpo-pesquisador. Rolnik (1993) chama de marcas esses "estados inéditos que se produzem em nosso corpo a partir das composições que vamos vivendo" (p. 242). Talvez aqui, mais do que minha própria história, seja contada uma fabulação de marcas. Marcas de um corpo-educador-matemático.

Quando penso no meu contato com a matemática, a primeira lembrança que tenho é de ter conseguido tirar nove pontos em dez em uma prova bimestral na sexta série. O conteúdo era os números negativos e suas operações. Não que antes eu tivesse passado por grandes apuros na disciplina, mas, a partir daquele dia e das palavras de incentivo de uma professora, passei a ter um olhar mais interessado para aquela disciplina que antes tanto não me inspirava medo como não me inspirava prazer. Simplesmente não inspirava nada em especial. Até ali, a matemática para mim era fundamentalmente *fazer conta*. E se fossem contas com vários algarismos, tanto melhor! Isso mostrava que uma destreza de cálculo estava lá presente. E nada de meio-certos quando apenas *um* algarismo do resultado saía diferente da resposta. Matemática é assim: ou se acerta ou se erra. O resultado é algo exato, não dá para negar. A matemática é exata, *não dá para negar! Todo mundo sabe que* a matemática é exata! E era tão *bom* ter *certeza* de que os resultados estavam *certos*! Os resultados *nunca* mudavam uma vez que a gente chegasse neles. Em história ou geografia, por exemplo, não funcionava assim. As coisas mudavam dependendo do professor que falava, do livro que a gente lia ou de sua época.

Na altura em que estava, já nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, outros elementos iam, aos poucos, entrando em cena onde antes havia muitos números e umas poucas figuras geométricas. Entravam em jogo letras, equações, valores desconhecidos, *x, y,* pirâmides, relações métricas, probabilidades e outras coisas do gênero. Meu destaque em termos de nota contrastava com o fracasso da grande maioria dos meus colegas. Afinal, porque eu aprendia enquanto a maioria não? Ah, devia ser falta de *esforço*, *de atenção ou de estudo*. Ou todas essas coisas juntas. Afinal, aprender matemática me exigia cumprir as tarefas de casa, resolver os problemas do livro, repetir diversas vezes uma mesma técnica. *Resolver equação? Hum... Tudo o que tem "x" para um lado; tudo o que não tem para o outro*. *Troca o sinal dos termos transpostos. Faz as operações com os termos que tem "x" entre si e com os números "puros" entre si. Logo, x é igual a tanto*. Mas nem todos faziam isso. E quando o professor fazia os exercícios no quadro com a gente, aí todo mundo que não fazia o dever copiava. Não, assim não se aprende matemática! Para aprender matemática é preciso disciplina. E a disciplina, para mim, não era repetir a mesma equação diversas vezes. A disciplina consistia em repetir até entender porque eu fazia aquilo, porque eu seguia as regras. Porque, enfim, tinha que trocar o sinal quando transportava "x" do segundo para o primeiro membro da equação? Alguns diziam que era *a regra*. E eu concordava. Mas, para mim, a regra acabava fazendo algum sentido: a regra não era regra só porque o professor falou!

A afinidade e o gosto que, naquela altura, tinha com a matemática acabaram por me levar a estudar junto com muitos colegas para as *provas*. Encontrava-os na biblioteca da cidade ou eles iam até a minha casa. E eu *ensinava* a eles o que eu sabia, mostrava como se resolviam os exercícios, os problemas, explicitava meus raciocínios para que eles pudessem segui-lo, lembrava dos exemplos e falas dos professores de matemática em sala, tentava falar de modo que os colegas entendessem. E quando eles iam bem nas provas, choviam agradecimentos, sorrisos, abraços. Mas uma coisa me incomodava: porque eles haviam *aprendido* comigo e não com o professor? Bom, por certo que eles haviam aprendido, afinal, tiraram boa nota na prova. Mas, se quando estudávamos de novo numa vez seguinte, eles haviam esquecido um tanto de coisas que já havíamos visto antes, não lembravam como resolvia a proporção ou que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180 graus, haviam aprendido *de fato*? E toda minha certeza da aprendizagem deles se esvaía. Meu esforço se redobrava em fazê-los *lembrar* do que havia sido esquecido. Um dos meus professores de matemática de ensino médio vivia dizendo: *como é que se estuda matemática?* – perguntava retoricamente – *Fazendo sempre muitos exercícios porque em algum momento você vai esgotar a possibilidade de variação do conteúdo e, assim, vai saber resolver todos os* tipos *de exercícios que aparecerem*. Carregava e professava aquela frase na esperança de uma implicação necessária entre o fazer muitos exercícios e a aprendizagem. E se aquilo funcionava para alguns, estava longe de atingir toda a turma.

Talvez seja, a essa altura, redundante dizer que meu desejo era fazer o curso de licenciatura em matemática. Ao mesmo tempo em que a disciplina me encantava, rendia-me status e bons frutos nas escolas em que estudei. Seus processos de ensino-aprendizagem, encarnados na sala de aula em que eu era aluno, inquietavam-me de alguma maneira. Minha pergunta, naquele momento, era: porque há quem não aprende matemática? Foi assim que, ao fim da escolarização básica, prestei vestibular para três universidades, tendo feito a opção pela graduação em matemática em todas elas. No primeiro semestre de 2006 ingressei na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Logo nos primeiros dias de aula, um de nossos professores, então coordenador do curso, fez uma preleção sobre as dinâmicas do curso de matemática na UFJF. Explicou-nos que havia duas habilitações no curso – licenciatura e bacharelado – e que cada um de nós se veria na obrigação de escolher uma delas para seguir ao final do tronco comum de disciplinas, que tinha duração de dois semestres. Mas, já ali, havia algo que chamava a atenção: éramos a primeira turma que ingressaria seguindo uma reformulação curricular pensada para as licenciaturas da UFJF. No novo currículo, havia uma proposta de se pensar a formação do professor em uníssono com as disciplinas do departamento de matemática, que ministrava os conteúdos específicos. A tentativa era fugir do recorrente modelo 3 + 1 de organização curricular das licenciaturas[1]. Dessa maneira, já a partir do terceiro período, os alunos da licenciatura começavam a cursar disciplinas pedagógicas e disciplinas que versavam sobre *educação matemática*. Essas últimas disciplinas eram ministradas por *educadores matemáticos*. Educação matemática, educadores matemáticos? Embora o nome me remetesse a preocupações com as questões ligadas ao ensino-aprendizagem, era a primeira vez que escutava falar daquela área de conhecimento.

O coordenador convidou a todos aqueles que se interessavam pela licenciatura a participar dos Seminários de Educação Matemática que eram organizados pelo Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática (NIDEEM/UFJF) no Instituto de Ciências Exatas. Eu participaria daqueles seminários durante os dois primeiros períodos do curso, sendo meu primeiro contato com a educação matemática. Ali, vi serem discutidos temas não só relacionado ao ensino-aprendizagem da matemática, mas também questões ligadas à formação do professor, ao uso de tecnologias em sala de aula, às relações da educação matemática com outras áreas do conhecimento, como sociologia, psicologia, epistemologia e filosofia. Enfim, naquele espaço foi possível entrar em contato com discussões relativas à *pesquisa em educação matemática*.

Ao longo desses dois primeiros períodos cursei as disciplinas do tronco comum da licenciatura com o bacharelado. Todas elas eram de conteúdos matemáticos, como geometrias plana e espacial, teoria dos números e cálculo. Havia algo de novo, porém, nas aulas de matemática que eu assistia na graduação. Elementos como método dedutivo-axiomático, demonstrações, rigor apareciam de modo recorrente nas aulas, na fala dos professores. Havia uma preocupação extremada com uma possível equivocidade da linguagem, das definições, das demonstrações. Tudo tinha de ser o mais objetivo possível, o mais rigoroso possível. E isso para além dos limites do uso da linguagem: a construção da matemática segundo a axiomática euclidiana aparecia como elemento central. O encadeamento

[1] O modelo 3 + 1 diz respeito à organização curricular que conta com três anos de formação em disciplinas de conteúdo matemático e um ano de disciplinas pedagógicas e vem sendo duramente questionado pelos estudos que tratam da formação do professor de matemática. Carrera de Souza et al (1995) e Garnica (1997) apontam para essa questão.

seqüencial não era possível de ser quebrado. Lembro de uma aula de geometria: *estudávamos triângulos, mas não havíamos estudado ângulos formados por retas paralelas e uma transversal. Queríamos provar que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180 graus, mas não podíamos fazer uso do que sabíamos sobre os ângulos formados por paralelas e transversal. Isso não fazia parte do encadeamento lógico daquela axiomática.* Que matemática seria aquela? Muito distinta daquela que eu tive sucesso na escola. Afinal, o que era matemática? A disciplina escolar ou aquela com a qual começava um contato na graduação? Como aprender aquela “nova” matemática quando as estratégias que eu utilizava na escola não apresentavam mais eficiência? Seria eu um novo *fracassado escolar* com minha entrada na graduação? Segundo período do curso: reprovação em duas disciplinas. Fracasso? A escolha pela modalidade da licenciatura mostrar-me-ia facetas até então não pensadas sobre minha trajetória: *encontros*.

A estrutura curricular da licenciatura em matemática que eu cursava naquele momento previa, a partir do terceiro período do curso, além das disciplinas de conteúdo matemático específico e as disciplinas clássicas de formação do professor – como sociologia e psicologia da educação – disciplinas com foco de interesse na educação matemática. Algumas delas eram ministradas pelo departamento de matemática, enquanto outras eram ministradas pelo departamento de educação. Disciplinas que discutiam metodologias para o ensino da matemática, ensino de geometria, aritmética e álgebra no ensino fundamental, a educação matemática no ensino médio, a história da matemática e sua constituição enquanto disciplina escolar, o conhecimento matemático, a aprendizagem e as práticas educativas... *Conhecimento matemático? Aprendizagem?* Encontros.

* * *

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FACED
NÚCLEO DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIA, MATEMÁTICA E TECNOLOGIA – NEC
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – GRUPEEM
CURSO DE MATEMÁTICA
SABERES MATEMÁTICOS ESCOLARES
Sônia Maria Clareto

EMENTA DA DISCIPLINA:

Fundamentos filosóficos, epistemológicos e metodológicos da matemática escolar. Reflexões acerca de conteúdos e produção de espaços adequados de aprendizagem inventiva destes conteúdos matemáticos para a escola básica, a partir de estudos de concepções de Matemática e Educação Matemática. Compreensão da Educação Matemática como área de pesquisas e estudos acerca da matemática e seus processos de produção e difusão. A matemática como produção humana sócio-cultural, historicamente situada. A matemática escolar: composições curriculares e abordagens alternativas. A escola e a produção de espaços de aprendizagem inventiva.

PROGRAMA DA DISCIPLINA:

1. Concepções de Matemática;
2. Concepções de Educação Matemática;
3. Aprendizagem inventiva;
4. Conteúdos matemáticos para a escola básica;
5. Matemática escolar e matemática do cotidiano;
6. Currículos matemáticos;
7. Abordagens curriculares alternativas.

* * *

O texto entre as duas marcações "* * *" acima é uma reprodução da ementa e do programa da disciplina Saberes Matemáticos Escolares, pensada para o terceiro período do curso de licenciatura em matemática, constituindo a primeira disciplina que versava sobre questões específicas da educação matemática. Algumas atividades dentro dessa disciplina me causaram estranheza: desenvolver uma geometria que tivesse por superfície não mais o plano, mas um balão de soprar! Uma geometria do balão?

E se 17x – x tivesse como resultado 17, e não 16x? Que álgebra produzir-se-ia? No grupo em que fiz essa atividade, batizamos nossa produção de *álgebra perplexa*, pois foi essa, fundamentalmente, a sensação que tivemos diante da necessidade de *criação* de uma álgebra, dizíamos à época, *errada*. A discussão envolvendo a produção da turma nessa atividade tentava deslocar o lugar do erro.

Então devo ensinar essa álgebra para o meu aluno na escola básica? A disciplina abria-me questões. Que matemática? Que aprendizagem? Que professor? Que formação? As questões abertas sustentavam-se enquanto tal, problemáticas. Qualquer solução que aparecia em nossas falas era posta, ela também, em estado de questão. Ora, então a matemática não é exata, *não dá para negar*! *Todo mundo sabe que* (ou deveria saber que) a matemática não é exata, que aprender não é repetir técnicas e solucionar problemas, retendo o conhecimento. *Todo mundo sabe que* (ou deveria saber que) formar o professor não é dar-lhe instrumental didático-metodológico que resolva o problema da aquisição do conhecimento. Formação de professores... Encontros...

A problemática da formação do professor de matemática surgiu por meio de minha inserção no projeto de pesquisa "Tornar-se o que se é: a escola como espaço de formação de subjetividade-professor de matemática"[2], no qual atuei como bolsista de iniciação científica. O trabalho se propunha a investigar a formação do professor de matemática acontecendo no espaço escolar, descolando-se das noções clássicas de formação inicial e formação continuada que se estendem largamente pela literatura da formação de professores. O tornar-se o que se é nietzscheano, a Bildung, aparecia como intercessor na investigação da constituição do professor no espaço escolar.

> A *bildung* poderia ser entendida como a idéia que subjaz ao relato temporal pelo qual um indivíduo singular alcança sua própria forma, constitui sua própria identidade, configura sua particular humanidade ou, definitivamente, converte-se no que é (LARROSA, 2004, p. 52).

Clareto (2007) coloca o problema da formação do professor enquanto um processo que crie condições para que o sujeito constitua sua subjetividade-professor de matemática. Por isso, o tornar-se o que se é nietzscheano tem por efeito pensar a formação do professor enquanto um processo no qual atuam forças em disputa que forjam subjetividades. Nesse sentido, a formação do professor de matemática perde a dimensão de idealidade, pois não há uma forma final que consiste naquilo que o professor de matemática *é* ou *deve ser*. A compreensão do mundo enquanto relação de forças problematiza a noção de sujeito constituído como uma identidade que se fecha em uma forma final.

[2] Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) – EDT172/07, Programa de Apoio a Recém-Doutor.

O projeto de pesquisa se colocava a pensar, ainda, a formação do professor acontecendo no espaço escolar, espaço relacional de vivências em que as condições do ser-professor são criadas. O espaço escolar é, então, relacional no sentido de que as subjetividades e os objetos são já configurações provisórias de forças, são já relações de forças (CLARETO; SÁ, 2006). Nesse sentido, não são os sujeitos e objetos que, existindo, entram em relação, mas, em existindo a relação, subjetividades e objetividades são constituídas. A relação é, assim, anterior às noções de sujeito e objeto, já que essas duas são efeitos provisórios daquela.

Como parte do projeto de iniciação científica, inseri-me em um grupo de pesquisa que se reunia semanalmente; era um grupo composto pelos orientandos de iniciação científica, de mestrado e de doutorado da coordenadora do projeto. Minhas participações no grupo começaram no segundo semestre de 2007, quando se iniciaram suas reuniões semanais regulares. Discutíamos, à época, questões ligadas à noção de espaço e do tornar-se, em diferentes campos do saber: geografia, educação física, matemática, filosofia, psicologia. Como intercessores, tínhamos autores como Nietzsche, Deleuze e Foucault, que colocavam em questão os pressupostos da ciência moderna enquanto parâmetros de alcance da verdade. A rigor, sujeito, objeto e conhecimento perdiam um núcleo duro e identitário que permitia reconhecê-los como categorias universais do pensamento humano.

Encontros... Os estudos para a iniciação científica e a participação no grupo de pesquisa colocavam-me questões: *havia em mim uma forte resistência às ideias de não-identidade das formas*. Como assim as relações no mundo são relações de forças? Matemática em que $17x - x = 17$? Sujeito sem identidade? Objetos sem existência prévia? Mundo sem representação? As discussões diziam de um mundo completamente adverso àquele em que me encontrava antes? Busca pela segurança! Com o fim da iniciação científica, pensava eu, *nunca mais* voltaria a trabalhar com aquele *referencial teórico*. Completamente descabida essa história de mundo sem sujeito, sem objeto, sem verdade, sem *nada*! Nada?

* * *

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF

FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FACED

Processos de ensino-aprendizagem

EMENTA:

Contribuições da Psicologia para a compreensão das relações ensino/aprendizagem. A sala de aula como espaço de aprendizagem e desenvolvimento. O papel do professor na relação de aprendizagem. A construção de conhecimento e avaliação da aprendizagem.

PROGRAMA DA DISCIPLINA

1- As relações da Psicologia com a Educação;

2- A relação sujeito/ objeto no processo de construção do conhecimento focalizando as perspectivas psicológicas: objetivista, subjetivista, cognitiva, sócio-histórica;

3- A relação desenvolvimento/ aprendizagem e a prática escolar: o ponto de vista pigetiano, o ponto de vista vygotskiano.

* * *

Encontros... Dentre as disciplinas que cursava na licenciatura – concomitantemente com a realização da pesquisa de iniciação científica – uma, em particular, chamou-se atenção: Processos de Ensino-Aprendizagem, cuja ementa encontra-se logo acima entre "* * *", que cursei no segundo semestre de 2007. Era uma disciplina que se propunha a discutir algumas teorias gerais do desenvolvimento humano e suas contribuições para a educação. A psicologia da educação entrava em jogo nas discussões da disciplina que era ministrada, inclusive, por um professor com formação em psicologia. E ali nos foram apresentadas diversas escolas do pensamento psicológico: comportamentalismo, por meio de discussões sobre Pavlov e Skinner, psicologia genética, por meio das ideias de Piaget, e psicologia histórico-cultural, por meio das discussões sobre a obra de Vigotski. E aquelas discussões me envolviam, encontrando ressonâncias no mundo de seguranças em que queria fincar pé. Era possível colocar, ali, minhas antigas perguntas, *porque há quem não aprende matemática?* Era possível, ali, falar de aprendizagem, de desenvolvimento, de sujeito e de objeto, colocando questões a serem *solucionadas*. E aquelas teorias e seus desdobramentos na chamada *psicologia da educação matemática* procuram dar soluções para a questão que então me colocava. Algum conforto. A disciplina tal como estava organizada sugeria-me uma certa noção de evolução entre as escolas psicológicas: o comportamentalismo como um hábito a ser banido da educação; a psicogenética piagetiana que respondia a questões do pensamento operatório no âmbito do sujeito cognitivo, portanto, individualista e a psicologia histórico-cultural vigotskiana como aquela que pensa o homem e suas condições psicológicas para além dos limites do sujeito, lançando mão das noções de sociedade, história e cultura na compreensão do desenvolvimento cognitivo. Enquanto na primeira escola havia informação do meio ao sujeito e a aprendizagem era algo passivo, um condicionamento, as duas outras escolas colocavam a aprendizagem em termos de ação que constrói o pensamento. Porém, enquanto Piaget (1974) colocava o problema do pensamento em termos das estruturas lógico-operatórias, Vigotski (2009) colocava a questão a partir da internalização de formas culturais de pensar que se constituem historicamente no âmbito das sociedades.

O interesse pela área da psicologia em suas interfaces com a educação matemática acabou por ressoar em outras disciplinas. Em *Prática escolar II: aspectos teórico-práticos do ensino de matemática na escola básica I;* e *Prática escolar III: aspectos teórico-práticos do ensino de matemática na escola básica II,* tivemos como uma das atividades de avaliação a apresentação de um seminário com base no texto de algum livro que versasse sobre educação matemática a ser escolhido por nós, alunos. Na Prática II, escolhi o texto de Da Rocha Falcão (2003) e na Prática III, a coletânea organizada por Brito (2005).

Encontros... Talvez o encontro do qual falarei agora seja aquele que mais proliferou-se em marcas que constituem esse texto. A potência do *bom encontro* constitui-se de dois momentos distintos: a leitura de um texto e a escrita do relatório final da pesquisa em formação de professores.

A invenção de si e do mundo: uma introdução do tempo e do coletivo no estudo da cognição é um livro de Virginia Kastrup (2007), fruto de sua tese de doutorado em psicologia clínica pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Nele, a autora se baseia em duas afirmações: a inexistência de uma psicologia da invenção e a necessidade da exploração das condições dessa psicologia a partir de problemáticas colocadas por nossa atualidade discursiva. Movida por essas duas afirmações, a autora coloca-se o problema da *cognição inventiva*, ainda não pensado nos grandes sistemas psicológicos. Ela analisa mais de perto o caso da psicologia da Gestalt e da epistemologia genética, uma vez que essas se colocam a preocupação da busca de leis e invariantes do funcionamento cognitivo. Ressonâncias. O estudo do texto de Kastrup, no âmbito do grupo de pesquisa, veio a juntar-se ao meu interesse nas discussões de cunho psicológico e suas contribuições para a educação. Era interessante notar que a ocupação com os invariantes cognitivos e com a representação se caracterizava como um ponto comum aos sistemas analisados pela autora. Era o primeiro texto que eu lia uma preocupação de não apontar as falhas ou erros de uma dada teoria, mas sim apontar o que aquela teoria produz enquanto discurso sobre a cognição. Mais ainda, era um encontro que proporcionava vislumbrar um elo possível de ser construído entre aquilo que vinha estudando na iniciação científica e no grupo de pesquisa e meus interesses ligados à questão da aprendizagem na sala de aula de matemática.

O segundo encontro se constituiu a partir de um movimento de escrita do relatório final de pesquisa da iniciação científica. Não saberia precisar em que momento – se é que esse momento de fato existiu – em que, na escrita, a articulação entre a formação do professor, a aprendizagem como invenção e a construção da subjetividade-professor passaram a *fazer sentido*. Talvez tenha sido na discussão de nossas vivências de pesquisa em salas de aula de matemática dos anos finais do ensino fundamental. Aconteciam, naqueles episódios, movimentos de invenção, de aprendizagem inventiva? Operaria uma cognição inventiva lá? De que modos essa operação se atualizava? Eu, que tantas vezes havia me perguntado *como alguém aprende*, não conseguia dizer, nem mesmo, *como eu havia aprendido*, quando os sentidos foram se constituindo.

As discussões que aconteciam no grupo de pesquisa – naquele momento ainda sem nome – e os problemas que ali se colocavam apontavam para a instauração da diferença no pensamento, movimentos de produção de subjetividade e do mundo, de constituição de um corpo. Uma educação matemática atenta à produção de uma matemática menor, que "se refere a uma maneira minoritária – não hegemônica – de se compreender/aceitar conteúdos e linguagens matemáticas" (CLARETO, 2010, p. 76).

Chegaríamos, enfim, a um tema que poderia se configurar como proposição para uma pesquisa futura de mestrado: as relações entre a cognição inventiva e a educação matemática. Mas, alguns outros encontros ainda compor-se-iam com os que já indicamos aqui na construção de nosso problema de pesquisa: encontros na sala de aula de matemática.

Os encontros na sala de aula de matemática foram, mais uma vez, atravessados por disciplinas da licenciatura em matemática. A partir do quinto período do curso, primeiro semestre de 2008, iniciamos nossa imersão no espaço escolar por meio das disciplinas de prática de ensino e estágio supervisionado de matemática. Minha imersão aconteceu na mesma escola em que estava fazendo a pesquisa de campo na iniciação científica. Ao lado de uma colega de turma que realizou comigo os quatro semestres, dois de prática e dois de estágio, fiz um acompanhamento de uma turma de 7º ano do ensino fundamental durante o ano de 2008. No primeiro semestre, a proposta era que observássemos e acompanhássemos o que acontecia nas aulas de matemática da turma para que, a partir de nossas observações e de negociações com a professora, pudéssemos propor um projeto de intervenção que se estendesse por todo o ano letivo. Em nosso caso, a professora cedeu duas de suas cinco aulas semanais para que trabalhássemos com os alunos uma introdução aos conteúdos de álgebra, que classicamente aparecem nos currículos de matemática no 7º ano.

Para a implementação do projeto levamos em conta duas contribuições de Lins e Gimenez (1997): a primeira diz respeito a uma determinada maneira de trabalhar aritmética e álgebra de tal modo que essas áreas se distingam, mas não se separem. Aritmética e álgebra têm, portanto, significados que se retroalimentam e devem ter um tratamento conjugado; a segunda diz respeito à contribuição teórica de Lins, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que procura fazer uma leitura epistemológica dos significados em jogo numa atividade matemática. Assim, o MCS centra sua atenção no processo de produção de significados para objetos matemáticos e acabou por ser um forte intercessor em nossa intervenção, já que Lins desenvolveu em vários de seus trabalhos (LINS, 1993; 1994; 1997) um modo de compreensão dos significados produzidos para a álgebra escolar. Utilizamo-nos, por exemplo, de uma atividade proposta por ele em seu texto de 1997. Note-se que o MCS, ao falar do processo de produção de significados, caracteriza-o como um ponto chave da cognição humana. Lendo os textos de Lins, mais um encontro: uma outra teoria, um outro modelo, de inspiração piagetiana, entrava em cena: a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), um modelo criado pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud cujo objetivo é a investigação de processos cognitivos complexos como a aprendizagem científica e técnica. É uma teoria psicológica dos conceitos (VERGNAUD, 1996) e opera uma inflexão com relação a outras teorias sobre a aprendizagem de conceitos ao trocar a noção de conceito isolado pela de campo conceitual. Essa noção faz referência a uma complexidade da aprendizagem conceitual relacionando um dado conceito que está sendo aprendido com um campo conceitual ao qual faz referência. Por isso fala-se em, por exemplo, campo conceitual de estruturas aditivas, que congrega conceitos que dizem respeito às noções de soma, subtração e seus meandros.

Durante o ano de 2008, ao longo de nossas intervenções em sala de aula, os alunos foram chamados a participar de diversas atividades – a maioria delas em grupo – com a produção de um relatório escrito sobre cada uma delas. Assim, além de andarmos pelos grupos e conversarmos com os eles durante as aulas, tínhamos como produto os relatórios dos alunos que, por diversas vezes, nos deram a dimensão dos efeitos de cada atividade. Uma questão, porém, intrigava-me sobremaneira: lá, no espaço da sala de aula em que intervinha junto a minha colega, utilizava atividades e indicações apontadas por Lins e seu MCS. Por outro lado, percebia um movimento recíproco de *invenção* acontecendo, movimentos de produção de subjetividades e de matemática... E uma questão surgia. Em meu anteprojeto de mestrado, escrevi: *Kastrup (2007) aponta a inexistência de uma psicologia da invenção nas teorias de Piaget e da Gestalt. Cabe perguntar se o mesmo ocorre na Psicologia soviética (SANCOVSCHI, 2005) e nos desdobramentos teóricos advindos de tal vertente, como o Modelo dos Campos Semânticos, de forte inspiração vigotskiana. O que acontece quando deslocamentos teóricos para a formulação de uma política cognitiva de invenção são propostos no agenciamento de uma Psicologia da Invenção e de uma Psicologia histórico-cultural? Que Psicologia da Educação Matemática se insinua por essa vertente?*

E com essa questão ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFJF (PPGE/UFJF) na linha de pesquisa Linguagem, conhecimento e formação de professores. Interessava-me investigar os deslocamentos que se fariam *necessários* para que a invenção fosse pensada no âmbito da psicologia histórico-cultural e seus desdobramentos na educação matemática. Por isso o MCS se apresentava ali.

Questões travesseiras atravessaram. A leitura de meu anteprojeto pelo grupo de pesquisa – agora batizado de Travessia – foi marcada em fins de 2010. Naquele momento, um abalo. Fazer uma leitura do MCS por meio da psicologia da invenção não seria um meio de apontar o que “falta” ao MCS para que ele se torne inventivo? Não seria um movimento de superação, do mesmo modo como Piaget superava o comportamentalismo, Vigotski superava Piaget? Seria um movimento na direção de apontar que Kastrup superava Vigotski e que, portanto, era a psicologia da invenção que deveria fazer a leitura dos processos de ensino-aprendizagem? Um olhar evolucionista das teorias psicológicas e suas contribuições para a educação? Uma crítica? Um Modelo dos Campos Inventivos? *Modelo?*

Era preciso deslocar uma questão fundamental, criar um corpo para existencializar uma marca (ROLNIK, 1993). Um novo modelo que pensasse a cognição e aprendizagem matemática por meio de um movimento de superação não operaria, também, exatamente com aquilo que se esforçava por superar? Na tentativa de superar um modelo representacional de cognição em favor de outro, um modelo inventivo, não estaríamos fechando a proposição da inventividade, já que ela se submeteria a um modelo? Não estaríamos, assim, numa dimensão axiológica que julga e separa o que é *bem* do que é *mal*, uma dimensão moralizante do conhecimento, enfim, agindo como num impulso em direção à verdade, uma *vontade de verdade*, como diria Nietzsche? Como escapar dessa vontade? Camargo explicita como procede Nietzsche:

> Até agora a verdade foi o valor máximo que um discurso podia alcançar. Neste ponto, tornava-se inquestionável. Até que outro discurso o negasse e em seu lugar apresentasse outra verdade, esta sim, *a* verdade, que desbancaria a anterior. E assim sucessivamente, como se enganos estivessem sendo corrigidos por uma suposta evolução do pensamento. Neste enredo, Nietzsche seria apenas mais um a apresentar uma nova verdade a ser superada no futuro. Mas o discurso de Nietzsche critica, justamente, esta estrutura e estaria sendo inconsistente se apresentasse sua própria perspectiva como a única possível e verdadeira. Como faz Nietzsche, então, para sustentar sua argumentação contra os discursos filosóficos sobre a verdade, sem pretender, com isto, apresentar uma nova verdade? E como acreditar em seu discurso se, de antemão, já sabemos que não é verdadeiro? – Estas questões, bastante legítimas, não são deixadas sem resposta pelo filósofo. Elas podem ser pensadas a partir dos seguintes questionamentos: *É possível pensar o valor de um discurso sem referi-lo à verdade?* Será que um discurso parcial e perspectivo daria conta daquilo que a filosofia tem a dizer? (CAMARGO, 2008, p. 102-3, grifo nosso).

Tomamos a questão que grifamos para o nosso problema. É possível pensar o valor de nosso discurso sem referi-lo à verdade? O apontamento seria, então, ético, e não moral, já que a ética “avalia sentimentos, condutas e intenções, referindo-os a modos de existência imanentes que eles supõem ou implicam” (MACHADO, 2009, p. 26). Por isso, dizer que a matemática é exata e depois dizer que a matemática não é exata; dizer que cognição representa e depois dizer que a cognição inventa são duas faces distintas da vontade de verdade. Então, a questão que se coloca não é se a matemática é exata ou não, se o MCS ou a epistemologia genética ou a obra de Vigotski são verdadeiros, mas sim em que implicam cada um desses discursos.

Desse modo, nosso texto fará referência, principalmente, a dois discursos sobre a cognição e aprendizagem em educação matemática: a Teoria dos Campos Conceituais – TCC – do psicólogo francês Gérard Vergnaud e o Modelo dos Campos Semânticos – MCS – do educador matemático brasileiro Rômulo Lins, aos quais já fizemos referência. Essas talvez sejam as duas teorias mais mobilizadas em educação matemática quando se fala em cognição e aprendizagem. Assim, não procuraremos implementar uma crítica que julgue a eficiência e a legitimidade de tais teorias, já que isso nos levaria a operar segundo uma vontade de verdade, mas perguntaremos sempre: o que essa teoria implica? O que ela produz quando pensamos o problema da cognição e da aprendizagem? Que tipo de relação se estabelece com conhecimento ou, junto a Kastrup (2007), perguntamos: que políticas cognitivas estão sendo praticadas quando operamos na Teoria dos Campos Conceituais e no Modelo dos Campos Semânticos? Mais ainda, como a inventividade opera nessas teorias, ainda que não esteja teoricamente colocada enquanto problema? Eis algumas inquietações que pulsam neste texto.

Poderíamos dizer que as questões acima são a preocupação *teórica* de nossa pesquisa. Discutir alguns modos – o da Teoria dos Campos Conceituais e o do Modelo dos Campos Semânticos – pelos quais as noções de cognição e aprendizagem são mobilizadas em educação matemática. Gostaríamos de colocar, agora, nossa preocupação *prática*. Antes, porém, resta esclarecer o que estamos chamando de teórico e prático neste texto. Diremos, junto a Gallo (2010) que:

> Se a uma teoria não compete representar a realidade, ela precisa funcionar como uma forma de intervenção. Uma teoria é boa e faz sentido na medida em que é operativa, que me permite agir, atuar. Uma teoria que não possibilita uma atuação, não é uma boa teoria, e deve ser descartada. Uma teoria que não encontre pessoas que dela se utilizem, deixa de fazer sentido enquanto teoria (GALLO, 2010, p. 58).

O que o autor acaba por explicitar é uma compreensão de que a função da teoria não é de representar uma prática ou interagir com ela para, então, dela se descolar, totalizando-a. Pelo contrário: ao pensar com Deleuze, Gallo abre a possibilidade de entender que a teoria é pragmática, embora não pragmatista, na medida em que deve servir como uma caixa de ferramentas, permitindo a ação. Nesse sentido, desloca-se o papel do intelectual: se a raiz da palavra teoria remete à Grécia e à ideia de contemplação, Gallo (2010) dirá que o intelectual não restringe seu campo de ação a essa contemplação, mas intervém com o próprio exercício do pensamento.

O que nos importa destacar é que nossas preocupações teóricas e práticas se imbricam numa espécie de revezamento em que não há primazia alguma das primeiras com relação às segundas ou vice-versa. Dessa maneira, nossa intenção neste texto não é de formular uma terceira via teórica que dê conta de ler os processos cognitivos que acontecem na sala de aula de matemática – um Modelo dos Campos Inventivos – mas, no revezamento com outras teorias e com o próprio campo, produzir um exercício de pensamento ou, poderíamos dizer, de constituição de um corpo-pesquisa(dor) para atualizar as marcas da pesquisa.

Com o intuito de lançar uma perspectiva sobre como a noção de cognição inventiva opera na sala de aula de matemática, procuramos empreender uma discussão por meio de fabulações de situações de sala de aula. Algumas delas fizeram parte de uma pesquisa de campo que teve lugar em turmas de 6º e 7º anos de uma escola pública da rede municipal de ensino de Juiz de Fora/MG, no ano de 2011, enquanto já cursava o mestrado. Outras são escritos a partir de atividades feitas junto a alunos, também de 6º e 7º anos de uma segunda escola da rede pública municipal de Juiz de Fora/MG, nos anos de 2008 e 2009, quando cursava disciplinas de prática e estágio supervisionado na licenciatura em Matemática na UFJF. De todo modo, tentamos constituir um corpo sensível ao fluxo de forças que falasse da invenção da/na sala de aula de matemática.

Conforme dissemos anteriormente, nosso problema de pesquisa nasce fruto de vivências em sala de aula e a ela fazem referência. As noções de cognição e aprendizagem, embora, via de regra sejam discutidas levando em conta seus aspectos dentro da educação escolar, não se limitam a ela. Remetemo-nos, assim, à Kastrup, quando diz que a invenção não é

> algo raro e excepcional, privilégio exclusivo de artistas ou mesmo de cientistas. O interesse é pensar a inventividade que perpassa o nosso cotidiano e que permeia o funcionamento cognitivo de todos nós, do homem comum (KASTRUP, 2001, p. 19).

Dessa maneira, a invenção se constitui nos meandros da produção da própria subjetividade do homem comum, para além da produção que acontece na escola. Porque, então, nos perguntarmos sobre o funcionamento da invenção na sala de aula de matemática?

> a instituição escolar fez e faz parte dessa produção [de subjetividade], uma vez que, se por um lado ela é um lugar fundamental na constituição da subjetividade, por outro ela também está inserida num amplo contexto. Nesse sentido, a engrenagem da escola é atravessada e marcada pela configuração social, mas também tem o papel de definir o sujeito, seja por meio das relações de poder entre professores e alunos, seja na forma pela qual concebe a aprendizagem e transmite o saber (SANTOS PRATA, 2005, p. 108-109).

Isso nos abre a escola como espaço privilegiado de constituição de subjetividades. Existe, assim, uma tentativa de conformação das subjetividades em torno de uma forma-sujeito. Ao mesmo tempo, o conhecimento matemático é comumente veiculado em torno da ideia de uma ideologia da certeza (SKOVSMOSE, 2001): uma matemática pura que tem o poder de dar a palavra final sobre as questões humanas, a ciência dos objetos essenciais, não-sensíveis, ideais, a ciência das regularidades, consoante a um processo de conformação dos sujeitos. De nosso ponto de vista, algumas questões se abrem: o que escapa a isso? Que matemática e que sujeitos se inventam/são inventados na sala de aula de matemática? Como a invenção opera lá?

Colocar assim a questão *prática* de nossa pesquisa tem por efeito uma ampliação de nossas questões teóricas, colocadas anteriormente. A partir disso, poderíamos colocar nossa questão de pesquisa nos seguintes termos: *se tomarmos a cognição inventiva como possibilidade na sala de aula de matemática, que implicações isso traz para a educação matemática?* Note-se que aqui também a questão central de nossa pesquisa é ética e política. Ética na medida em que coloca em questão o valor da invenção, seus efeitos quando é mobilizada na educação matemática e política porque envolve um certo posicionamento, um certo modo de configuração de relação com o conhecimento matemático.

Eis, pois, um esboço de nosso *campo problemático*: nele figuram elementos como sala de aula, invenção, educação matemática, aprendizagem, matemática, psicologia, desenvolvimento, linguagem, corpo, diferença, subjetividade... Elementos para os quais não se busca uma harmonia ou invariante de relação. Clareto (2011), ao lidar com a noção de campo problemático, destaca três características: 1º) o *problemático* ao qual o campo se refere não se identifica com a resolução de um problema de pesquisa nem, tampouco, com uma não-solução. Para a pesquisadora, problemático é um acontecimento que vai se dando junto a encontros; 2º) o campo problemático se configura enquanto aos modos canônicos de pesquisa que tem por horizonte um *objetivo* ou *solução* dados de antemão. Nesse sentido, não há como antecipar o que acontece quando a invenção atravessa a educação matemática, nem mesmo como a aprendizagem, o corpo, a subjetividade ou a diferença são implicadas nesse processo. O campo problemático resiste à noção de equilíbrio de forças, pois instaura uma violência do fora que rompe com os fluxos cognitivos habituais; 3º) o campo problemático se sustenta enquanto tal. Nesse sentido, ao escapar à lógica da solução de problema e da busca de invariantes, o campo problemático se caracteriza por ganhar contornos sempre imprecisos, por guardar em si a potência da instabilidade forçando o exercício de pensamento, a invenção de problemas, fazendo a cognição bifurcar, impelindo seu funcionamento à condição do sempre novo.

Assim sendo, passamos a uma rápida descrição a organização desse texto. Há dois livros distintos, mas que se interpelam a todo o momento. No Livro das Fabulações, apresentamos cinco situações de sala de aula que nos ajudam a discutir os modelos de aprendizagem e seus efeitos para a sala de aula de matemática. Não há hierarquia entre as cinco fabulações, que podem ser lidas em qualquer ordenação. Sempre que, no decorrer dessas fabulações, aparecerem conceitos dos quais ainda não tratamos, inserimos uma nota de rodapé com a referência à página em que o leitor encontrará uma discussão sobre a questão então levantada.

No Livro dos Modelos, apresentamos uma discussão detalhada sobre a Teoria dos Campos Conceituais e sobre o Modelo dos Campos Semânticos, centrais em toda nossa discussão. Além disso, tentamos estabelecer relações diretas entre essas teorias e seus pressupostos teóricos. Desse modo, procuramos fazer uma discussão entre Vergnaud e Piaget de um lado e entre Lins e Vigotski de outro.

Por fim, no Pós-escrito, retomamos nossa problemática e fazemos uma discussão final da trajetória dessa pesquisa.

LIVRO DAS FABULAÇÕES

Este livro se propõe a exercícios de quatro fabulações. Todas elas são construções narrativas que operam junto à sala de aula de matemática e a modelos de cognição e aprendizagem com os quais dialoga nossa pesquisa. Em E no início foram a recognição... e a matemática*, discutimos a fabulação em torno do modelo platônico de aprendizagem como rememoração; em* As sete maçãs e a fração*, discutimos fazemos uma leitura sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais; em* Os Tanques*, discutimos a dinâmica de produção de significados para a álgebra. Em cada fabulação, a discussão que procuramos empreender nos levará a uma explicitação das implicações desses modelos para a sala de aula de matemática. Em* Sombras, vulcângulos e primos de cone ou um antimodelo*, pensamos o problema da invenção na aula de matemática. Essa fabulação vai, então, tornando-se um antimodelo, ou seja, aquilo que coloca a própria ideia de modelo em movimento.*

PARA COMEÇAR

Este livro tem por objetivo principal fazer operar modelos de aprendizagem e cognição com os quais dialogam nossa pesquisa. Em especial, dois deles são importantes: a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Por outro lado, também tentaremos operar com a noção de cognição inventiva na leitura de uma das fabulações. Dessa forma, nossa proposta é de entrar nos modelos, tentar operar teoricamente com eles, dizer com eles em fabulações de atividades de campo. Nesse sentido, a todo momento estaremos mostrando as implicações que esses modelos têm para pensarmos a aprendizagem em sala de aula, a cognição e a educação matemática.

Nossa tentativa é, assim, de operar no plano de imanência desses modelos e noções, de maneira que possamos evidenciar as implicações que eles têm para a educação matemática, para a sala de aula de matemática. Dessa forma, não estamos preocupados em implementar uma crítica a um ou outro modelo, ou lê-los tendo com solo seguro a noção de invenção, uma vez que nosso problema não é de ordem teórica ou epistemológica, mas, fundamentalmente, de ordem política. Pensando com Kastrup, Tedesco e Passos (2008), é um problema de política cognitiva.

> Falar em políticas da cognição significa afirmar que a distinção entre uma concepção da cognição como representação de um mundo preexistente e aquela que define a cognição como um processo de invenção de si e do mundo não se restringe a uma diferença entre modelos teóricos. A cognição representacional e a cognição inventiva são dois modos de estar no mundo, de estabelecer relação consigo e com a própria atividade de conhecer. Isso significa que o problema da cognição não se limita ao âmbito epistemológico, ou seja, à discussão acerca do funcionamento cognitivo e dos diferentes modelos teóricos propostos para o seu entendimento. [...] O que o

> conceito de política cognitiva busca evidenciar é que o conhecer envolve uma posição em relação ao mundo e a si mesmo, uma atitude, um *ethos*. Sendo assim, o cognitivismo não é apenas um problema teórico, mas um problema político. Ele é uma das configurações que nossa cognição assume. (KASTRUP, TEDESCO, PASSOS, 2008, p. 11-12).

É muito interessante a mudança de direção que a noção de política cognitiva nos propõe: os modelos teóricos assumem configurações, modulam o funcionamento cognitivo. Ao colocar o problema político, abre-se frente para pensar, também, a questão ética do cultivo de certos modos de estabelecer relações com o conhecimento de modo a entender o mundo como efeito de nossa prática cognitiva. É pensando com a questão da ética que procuraremos problematizar os modelos que apresentamos anteriormente.

Desse modo, as questões da crítica, "qual discurso é mais verdadeiro?" e "esse discurso é eficaz?" deslocam-se para pensarmos em que implica cada um desses discursos. Dito de outro modo, o problema ético-político nos levará a uma problematização que não se pergunta pela eficácia ou pela verdade dos modelos, mas por seus efeitos quando pensamos aprendizagem e cognição em educação matemática. Os efeitos desses discursos nos levarão a explicitar seus pressupostos. Nesse sentido, parafraseando Kastrup (2007), podemos dizer que problematizar a TCC e o MCS não é suspeitar de sua eficácia, mas questionar seus pressupostos[3].

A referência a esses modelos se dá, no âmbito de nosso trabalho, em função do que essas teorias dão a pensar quando colocam o problema da cognição e da aprendizagem, ou, em outros termos, que cognição e que aprendizagem esses modelos inventam. Ao mesmo tempo, é um ponto forte de diálogo desse trabalho com a área da educação matemática e isso tem, por assim dizer, a *função* de mostrar que existe entre as perspectivas pontos de ruptura importantes e que não podem ser desprezados como, por exemplo, a noção de conhecimento. Ao apontarmos aquilo que *separa* essas perspectivas, abrimos a possibilidade para que pontos de contato e diálogo sejam produzidos, inventados. Nesse sentido, podemos dizer que, em nossa problematização dos modelos, a invenção opera transversalmente por meio de uma política cognitiva.

---

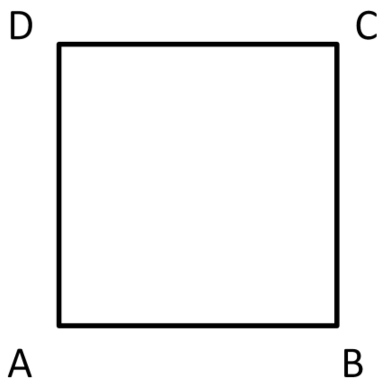
[3] "Problematizar o projeto da modernidade não é suspeitar de sua eficácia, mas questionar seus pressupostos" (KASTRUP, 2007, p. 50)

FABULAÇÃO

E NO INÍCIO FORAM A RECOGNIÇÃO... E A MATEMÁTICA

Num dia qualquer, numa sala de aula qualquer, uma aula de matemática acontece. A professora conversa com seus alunos, fazendo-lhes questões enquanto desenha no quadro de giz algumas figuras que ilustram o problema por ela colocado.

Professora: Todos reconhecem que essa superfície (e aponta para o desenho no quadro) é um quadrado?

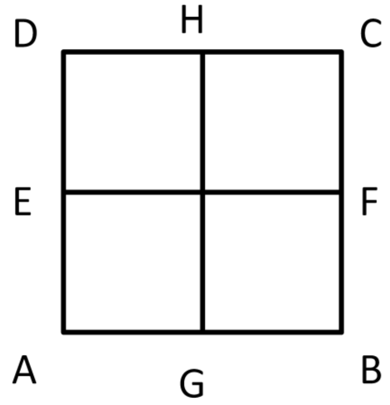


Alunos (em coro): Sim!

Professora: Todos reconhecem que, por se tratar de um quadrado, temos as linhas AB, BC, CD e DA de igual medida entre si?

Alunos (em coro) Sim!

Professora: E não é verdade que essas linhas (e desenha os segmentos EF e GH) também são iguais?



Alunos (em coro): Sim!

Professora: Então, podem existir quadrados maiores que ABCD ou menores que ABCD, não é mesmo?

Alunos (em coro): Sim!

Professora: Muito bem! Se os lados AB e BC medem, cada um, dois centímetros, quanto será a superfície total de ABCD?

Os alunos silenciam.

Professora: Pensem da seguinte forma: se tivéssemos uma figura em que AB fosse um centímetro e BC fosse de dois centímetros, a superfície total não seria de um centímetro vezes dois centímetros?

Alunos (em coro): Sim!

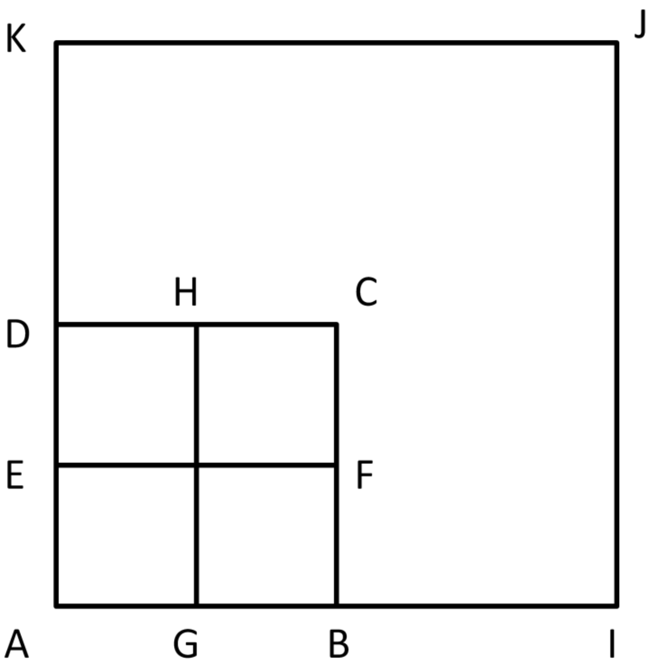
Professora: Então, como nossa superfície tem os lados todos iguais a dois centímetros, a superfície total dela não é dois centímetros vezes dois centímetros?

Alunos (em coro): Sim!

Professora: Então, quanto é a superfície total do quadrado ABCD?

Alunos (em coro): Quatro, professora!

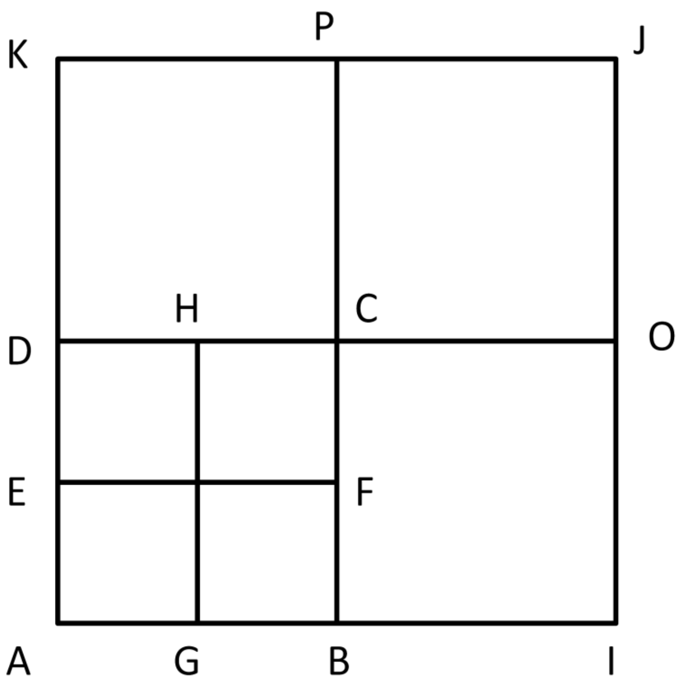
Professora: Muito bem! E pode existir uma figura quadrada com o dobro da superfície desta (e aponta para ABCD)?



Alunos (em coro): Sim!
Professora: E de quanto seria a superfície dessa nova figura?
Alunos (em coro): Oito!
Professora: E qual será a medida do lado dessa nova superfície?
Um aluno: Será, também, o dobro do lado do quadrado ABCD. Vai ser de quatro unidades.

A professora prolonga o lado AB no quadro, e completa a figura de um quadrado, conforme a figura ao lado.

Professora: É esta, então, a figura de oito unidades de superfície?
Alunos (em coro): Sim!
Professora: Mas não é verdade que nessa figura (e aponta para AIJK) existem quatro quadrados (e desenha BIOC, COJP, CDKP conforme a figura a abaixo) iguais ao quadrado ABCD que tem quatro unidades de superfície?
Alunos (em coro): Sim!



Professora: Quanto é a superfície de ABCD?

Alunos (em coro): Quatro!

Professora: E de quanto é a superfície de AIJK?

Alunos (em coro): Dezesseis!

Professora: Se são dezesseis, isso significa que a superfície de AIJK é quatro vezes maior que a superfície de ABCD, certo?

Alunos (em coro): Certo!

Professora: Então a superfície AIJK é, ao mesmo tempo, o dobro e o quádruplo da superfície de ABCD?

Um aluno: Não pode!

Professora: Então do lado que é o dobro, conseguimos formar uma figura que tem o quádruplo da superfície original, e não o dobro, não é?

Alunos (em coro): Sim!

Professora: Muito bem. Como queremos que a superfície da nova figura seja o dobro da superfície da ABCD, então ela deve ser gerada por uma linha que tenha comprimento maior que AB e menor que AI, não é?

Um aluno: É, parece que sim.

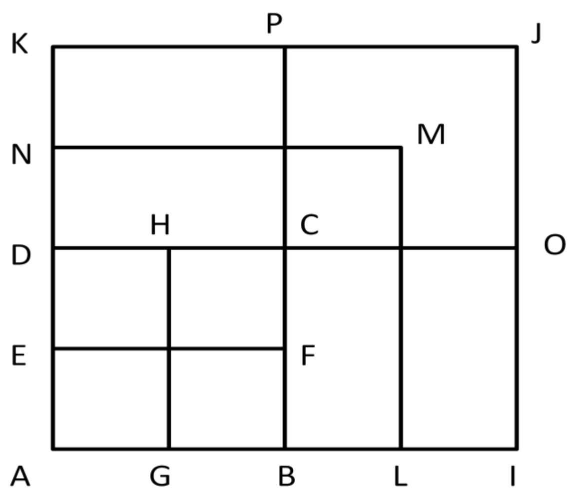
Professora: Muito bem. Respondam o que lhes parece correto. Então o quadrado de oito unidades de superfície tem os lados maiores que duas unidades e menores que quatro unidades, certo?

Alunos (em coro): Certo!

Professora: E de que tamanho acham que serão os lados do quadrado de oito unidades de superfície?

Um aluno: Três unidades! – os demais meneiam a cabeça num sinal de aprovação.

A professora faz mais linhas em seu desenho de acordo com a medida indicada por sua turma.



Professora: Estão falando do quadrado ALMN, certo?

Alunos (em coro): Certo!

Professora: Todos os lados de ALMN medem três unidades. É um quadrado de três unidades por três unidades. Quanto é a superfície total desse quadrado, então?

Alunos (em coro): Nove!

Professora: E de quanto deveria ser?

Alunos (em coro): Oito!

Professora: Então não é a partir do lado de três unidades que formamos um quadrado de oito unidades de superfície, certo?

Alunos (em coro): Certo!

Professora: Então quanto mede o lado que gera o quadrado de oito unidades de superfície?

Um aluno: A gente não sabe!

Professora: A figura AIJK é formada por quatro quadrados iguais, ABCD, BIOC, COJP, CDKP, não é?

Alunos (em coro): Sim!

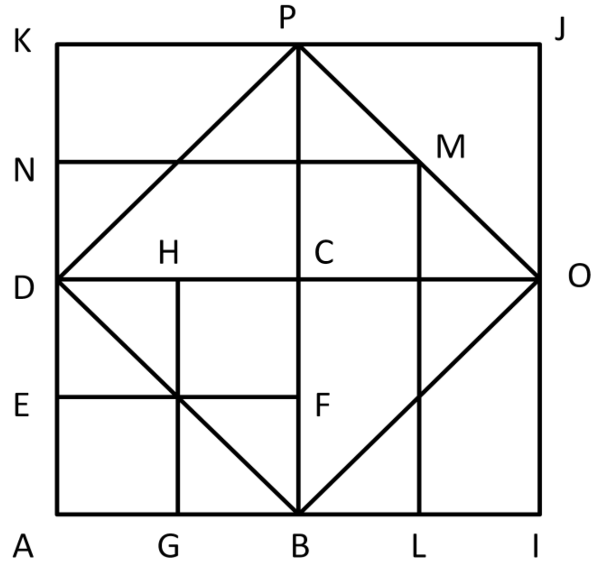
Professora: Quantas vezes a superfície de AIJK é maior que a superfície de ABCD?

Alunos (em coro): Quatro vezes!

Professora: Mas a gente queria que fosse duas vezes maior, não é mesmo?

Alunos (em coro): Sim!

Professora: Essas linhas que eu estou desenhando (e traça os segmentos BD, BO, OP e DP conforme a figura abaixo) não cortam os quatro quadrados em duas partes iguais?



Alunos (em coro): Sim!

Professora: Mas se há quatro superfícies iguais e de quatro unidades de superfície cada uma em AIJK e as linhas BD, BO, OP e DP dividem cada uma dessas quatro superfícies ao meio, quantos quadrados iguais a ABCD há em BDPO?

Alunos (em coro): Dois!

Professora: E de quanto é a superfície de BDPO?

Alunos (em coro): Oito unidades de superfície!

E, sem mais nada dizer, a professora deu por terminada aquela aula.

* * *

O que nos leva a pensar o fragmento que compusemos acima? Uma aula de matemática comum acontece, a professora domina seu conteúdo, fala com propriedade sobre ele, ouve respostas dos alunos, ajuda-os a entender em que pontos sua linha de resolução para o problema falha. Havia um problema matemático: a duplicação da área do quadrado. E as tentativas a que procedeu a professora levaram seus alunos à resposta correta, ou seja, pode-se dobrar a área de um quadrado por meio da utilização de sua diagonal como lado do novo quadrado.

As questões a que nos propomos nesta pesquisa nos levam a perguntar sobre o funcionamento cognitivo em jogo nessa sala de aula. Que conhecimento matemático e que tipo de relação com o conhecimento se estabelecem naquela dinâmica?

Com relação à dinâmica, podemos ver de saída que há um certo tipo de diálogo que se estabelece entre professora e alunos. Um diálogo em que a professora lança perguntas a seus alunos e a eles cabe responder. Todas as respostas são consideradas, em alguma medida pela professora. Ainda que não respondam corretamente o problema, a professora acaba por trazer a tona novas perguntas que fazem com que os alunos se entorpeçam diante de contradições que vão aparecendo. Eles vão, aos poucos, percorrendo o curso da solução correta do problema. Há uma *educação matemática* operando. Uma *educação matemática* que tem por ocupação levar a uma solução correta, uma solução já conhecida pela professora, a *única* resposta aceitável. É por isso que, cada resposta *errada* dos alunos, cada ilusão que eles mostravam por meio de seu discurso é considerada, pela professora, como instrumento de um processo pedagógico de análise do erro que leva, via de regra, à explicitação de uma contradição no *pensamento* dos alunos. Há um processo, pois, de *transmissão* ocorrendo, já que a solução do problema, conhecida pela professora de antemão, se tornaria, por meio do processo de *aprendizagem*, a solução do problema *conhecida* pelos alunos. Exatamente a *mesma*. Nada fora disso poderia ocorrer, já que seria objeto de uma análise de erro que levaria, mais uma vez, a uma contradição.

O conhecimento matemático, a própria matemática depende das relações de ensino-aprendizagem que ocorrem naquela sala de aula? Pensemos: operando segundo a *educação matemática* que discutimos acima, o que aconteceria em outras salas de aula? Exatamente o mesmo? Talvez. O que parece importar aqui é que um procedimento permaneceria como o mesmo: discutir-se-iam os erros dos alunos a partir de suas falas, as contradições se mostrariam com clareza para que, então, a solução correta fosse seguida. É possível seguir uma solução? Mas de onde ela vem? Quem ou que a constituiu como solução correta? Ter acesso a ela significa repeti-la tal qual ela é? De acordo com aquela *educação matemática*, a matemática é um sistema de essências bem definidas: o quadrado, a área, o número, o dobro. Devemos, então, lançarmo-nos a descobrir tais objetos, devemos depreender-lhes a essência para delas constituirmos boas cópias. Existe, ainda, uma certa dimensão de "moralidade" em conhecer: a essência é aquilo que existe de *verdade*, de imutável naqueles objetos. Pouco importa, enfim, que existam diferentes números ou diferentes quadrados: importa que, em essência, se queremos duplicar a área do quadrado, devemos tomar como lado do novo quadrado a diagonal do quadrado anterior. A essência não é desse mundo e somente a uma ideia se refere. Eis o que é a matemática; eis o que é a educação matemática.

* * *

O trecho da aula que descrevemos acima é uma releitura do diálogo entre Sócrates e o escravo em Mênon, de Platão[4]. A intercessão de nosso trabalho com as assim chamadas filosofias da diferença, em especial com o pensamento deleuziano, leva-nos ao interesse pelo texto platônico já que Deleuze, por meio de sua filosofia, "pretende afrontar as dificuldades e cumprir as exigências colocadas

[4] Ao longo deste capítulo nos remeteremos à nossa releitura. Assim, quando nos referirmos à professora e aos alunos estaremos, em alguma medida, retomando as figuras de Sócrates e do escravo, respectivamente, no diálogo em Mênon.

por uma 'subversão' radical do platonismo ou por uma crítica, de inspiração nietzschiana, da filosofia da representação" (MACHADO, 2009, p. 43). Para Deleuze, a filosofia da representação tem seu início com a teoria das ideias de Platão.

Em Mênon, o diálogo entre Sócrates e o escravo nos interessa particularmente por tratar de maneira direta a natureza do conhecimento. Nossa releitura se dá em forma de uma situação de sala de aula porque, de nosso ponto de vista, existe no texto platônico uma certa maneira de compreender a cognição, a aprendizagem e a própria matemática. Poderíamos dizer que em Platão encontramos ideias que têm implicações educacionais e psicológicas que nos interessa examinar.

Diante de uma questão colocada por Mênon – "E de que modo [...] procurarás aquilo que não sabes absolutamente o que é? [...] Ainda que [...] a encontres, como saberás que isso <que encontraste> é aquilo que não conhecia?" (PLATÃO, 2001, p. 49) – Sócrates procura mostrar como o conhecimento é entendido como reconhecimento e a aprendizagem como rememoração. Para tanto, o filósofo valer-se-á da figura do escravo para mostrar que ele vai, aos poucos, rememorando a solução do problema da duplicação da área do quadrado por meio das questões a ele feitas. O escravo nunca tivera contato com o ensino sistemático. No diálogo, Sócrates afirma que:

> Sendo a alma imortal e tendo nascido muitas vezes, e tendo visto tanto as coisas <que estão> aqui quanto as <que estão> no Hades, enfim, todas as coisas, não há o que não tenha aprendido; de modo que não é nada de admirar [...] ser possível a ela rememorar aquelas coisas justamente que já antes conhecia. Pois, sendo a natureza toda congênere e tendo a alma aprendido todas as coisas, nada impede que, tendo <alguém> rememorado uma só coisa – fato esse precisamente que os homens chamam aprendizado – essa pessoa descubra todas as outras coisas, se for corajosa e não se cansar de procurar. Pois, pelo visto, o procurar e o aprender são, no seu total, uma rememoração (PLATÃO, 2001, p. 51-53).

Ora, retomemos a "situação de sala de aula" pela qual começamos esse texto e vejamos como a rememoração e, por conseguinte, a aprendizagem, operam lá. De início, poderíamos pensar no método utilizado pela professora com seus alunos. As falas explicitam que eles possuem uma certa opinião sobre qual seja a solução do problema. A professora, então, utiliza-se dessas opiniões, explorando-as, mas sempre no sentido de mostrar como aquelas opiniões não correspondem, de fato, à solução verdadeira do problema. É assim, por exemplo, quando um primeiro aluno sugere que para se dobrar a área do quadrado deve-se dobrar seu lado. A professora dobra o lado e mostra que a área da nova figura quadruplica em vez de dobrar. Dessa maneira, as opiniões dos alunos somadas ao encaminhamento dado pela professora vão guiando o processo de aprendizagem rumo ao correto, ao verdadeiro. É, pois, uma razão dialética que guia o processo de aprendizagem (MUELLER, 1978). A cognição está subordinada, então, à identidade das ideias, entendidas como os objetos do intelecto.

Mas se a alma já viveu diversas vezes e tudo aprendeu em um mundo fora deste nosso, tudo o que se faz nos processos de aprendizagem é uma tentativa de se afastar do sensível em direção à rememoração da ideia pura com a qual a alma já teve contato em momentos anteriores. Sobre esse afastamento, necessário, das sensações em Platão, Mueller nos diz

> Todo conhecimento implica certa permanência e, se os objetos estivessem em perpétua transformação, o pensamento não teria como captá-los [...]. Essa permanência não é menos necessária de parte do sujeito do conhecimento e eis porque o conhecimento não pode apoiar-se nas sensações. Entra aí outro elemento, decisivo: a atividade racional, que coordena o semelhante. Para Platão essa atividade é inseparável de sua concepção metafísica e o famoso “mito da caverna” exprime o desligamento necessário da simples existência em direção às idéias eternas. Também a reminiscência, lembrança latente de nossa origem supraterrestre e das realidades que lá encontrou a alma, nos põe no caminho do verdadeiro conhecimento, aberto apenas quando alguém se desliga do mundo sensível. (MUELLER, 1978, p. 36).

Eis sobre o que se apoia a aprendizagem em Platão: uma permanência – poderíamos dizer identidade – do sujeito do conhecimento e do objeto. Todos os alunos definem-se, pois, por uma capacidade inata de conhecer a solução do problema da duplicação do quadrado. A ação cognitiva é de rememoração de tal solução, de constituição de uma boa cópia como verdadeira solução do problema segundo um modelo que se assemelha à ideia. Cognição como representação.

E as más cópias? Existirão? Pensemos mais uma vez em nossa situação. A distinção entre as boas e as más cópias[5] acaba remetendo à ideia como uma referência para todas as cópias. Quanto mais semelhante à pureza da ideia for uma

---

[5] Para Deleuze, mais do que a distinção aparência/essência, Platão opera uma distinção latente entre dois tipos de imagens ou de cópias. A boa cópia guarda com a ideia uma relação de semelhança, enquanto que a má cópia – o simulacro – é uma imagem sem semelhança. O projeto de Platão, então, procura distinguir as cópias boas das ruins, conferindo às primeiras o status do verdadeiro. Uma discussão mais aprofundada pode ser encontrada em Machado (2009, p. 41-49).

cópia, tanto mais verdadeira será, colocando as outras cópias sob a égide do falso, do erro. Dessa maneira distingue-se aquilo que é conhecimento do que não é. Em particular, distingue-se o que é matemática do que não é. Assim, a solução do problema da duplicação do quadrado por meio da diagonal é verdadeira e, portanto, é conhecimento matemático. Tudo o que induz ao erro revela soluções falsas, um não-conhecimento. Seguindo o rastro do pensamento platônico, a matemática é um conhecimento dado a priori em um mundo ideal – de essências. Aprender matemática é, pois, desvendar verdades universais que independem da ação humana (ANASTÁCIO; CLARETO, 2000).

Por isso uma *educação matemática* tal qual caracterizamos anteriormente está centrada na solução de problemas, no afastamento do erro por meio das contradições, na transmissão de um saber por meio do direcionamento ao “pensar corretamente”, centrada, pois, num método de ensino, já que a aprendizagem está garantida pela coragem e procura do verdadeiro, por parte dos alunos, e pelas boas cópias que o professor carrega e transmite. Caracteriza-se, em concomitância, uma noção de *psicologia* como um movimento de ascensão da alma ao verdadeiro, à razão, ao mundo do qual foi tirada por um aprisionamento ao corpo, uma psicologia como psique, como alma, como transcendência. Note-se que alma, aqui, é considerada como algo do domínio natural fazendo com que a psicologia aí se defina como ciência natural (CANGUILHEM, 1999). Por conseguinte, o corpo é pensado, também, como algo do domínio natural, que contém a alma e a engana por ser movido por sensações, pelo não-inteligível. Estabelece-se aí uma dicotomia entre alma e o corpo.

Uma última questão que gostaríamos de colocar: por que, no diálogo de Sócrates com o escravo, Platão se utiliza da matemática para mostrar que o conhecimento é, na verdade, reconhecimento? Uma boa pista nos é dada por Mueller (1978) que nos aponta que o filósofo grego via na matemática um sistema que se apoia em essências bem definidas – quadrado e superfície, por exemplo, na situação em que começamos este texto. O movimento aqui é de ascensão: a partir de impressões visíveis, como o desenho do quadrado, os alunos vão renunciando às suas primeiras opiniões sobre a solução do problema e vão, aos poucos, entendendo que a intuição perceptiva do desenho deve ser abandonada, já que produz falsas soluções. A matemática, porém, não basta para a aprendizagem, para a rememoração. É necessário um método para rememorar.

Meneghetti (2003) nos ajuda a compreender essa questão em seu artigo que trata do conhecimento matemático em duas correntes distintas da filosofia: o realismo, que tem Platão e Aristóteles como seus maiores expoentes, e o idealismo, que tem em Descartes seu maior representante. A autora argumenta que a matemática está numa espécie de meio termo entre o sensível e o inteligível, já que faz referência a objetos da realidade sensível sem se ater a eles, ou seja, os objetos sensíveis aos quais a matemática faz referência são apenas o ponto de partida dos processos de conhecer e, não sua finalidade. Nesse sentido, ao falar de quadrado e diagonal, professora e alunos fazem referência a objetos de apelo visual, mas pensam as ideias que se apoiam naqueles elementos perceptivos. Pensam, portanto, a diagonal *em si*, o quadrado *em si*, e não a diagonal ou o quadrado que estão desenhados no quadro. Por apoiar-se no sensível a matemática não se basta, mas depende do movimento dialético da razão como um método para ser descoberta enquanto sistema de entidades abstratas. Assim, Platão acaba por subordinar a matemática à dialética, sendo essa uma espécie de propedêutica para aquela.

Tudo o que foi discutido até aqui mostra alguns efeitos do texto platônico para pensarmos *matemática, aprendizagem*, *educação matemática*, *psicologia*, noções que perpassarão por todo o trabalho que segue. Nosso interesse em jogar com alguns desses elementos se deu por Platão inaugurar, em grande medida, a tradição da filosofia da representação. É como remontar à gênese de nossas preocupações. E, se no início foram a recognição – cognição que representa uma ideia e a ela ascende por meio da razão – e a matemática – um corpo de conhecimentos que pensa seres não-sensíveis, essenciais, objetos verdadeiros da razão – nos interessará ao longo de nosso trabalho compreender os efeitos que a colocação do problema do conhecimento como representação tem quando pensamos a educação matemática em seu discurso contemporâneo.

FABULAÇÃO

AS SETE MAÇÃS E A FRAÇÃO

São sete e vinte da manhã de um dia de novembro. A primeira aula do dia começa entre os bocejos dos vinte e um presentes na sala de aula do 6º ano da professora Maria. Na aula anterior, ela havia deixado para a turma uma folha com alguns exercícios em que se pedia a transformação de frações impróprias em números mistos. Ela passa olhando os cadernos para verificar aqueles que haviam feito os exercícios deixados para casa. Ao final, ela olha para a turma com uma expressão séria e diz:

- Ontem, dezesseis alunos não fizeram o dever. Hoje foram quatro. Para que serve fazer exercício aqui? – um dos alunos responde que é para aprender mais e a professora assente – Dever não é castigo, é sua obrigação de casa! É para dar continuidade ao que gente faz aqui na escola. Vamos pegar a folha da aula passada. O que o exercício está pedindo?

- Para transformar fração imprópria em número misto – forma-se um coro em resposta.

- E por que o número se chama misto?

- Porque é misturado!

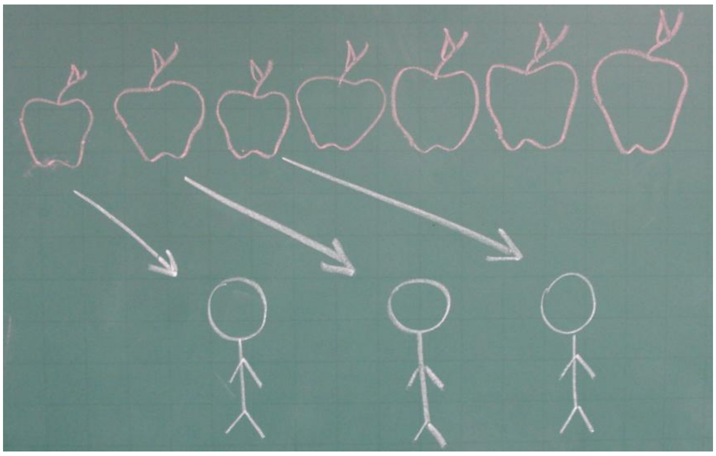
- Misturado de que?

- Números – diz um.

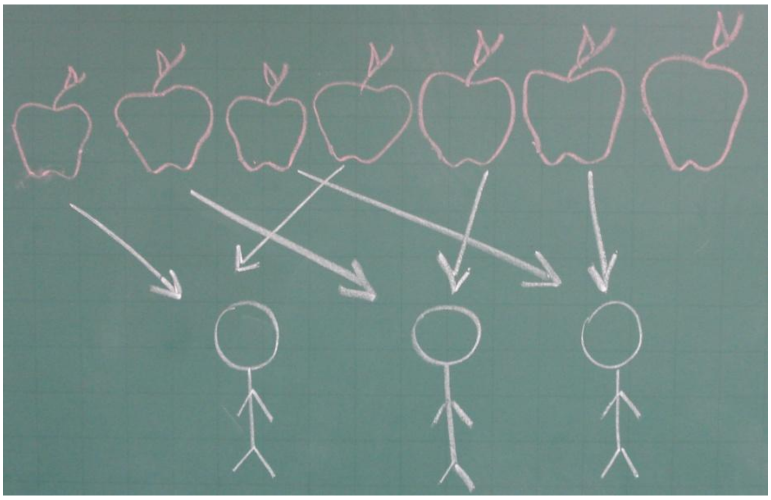
- Divisão – diz outro.

- Multiplicação – arrisca um terceiro.

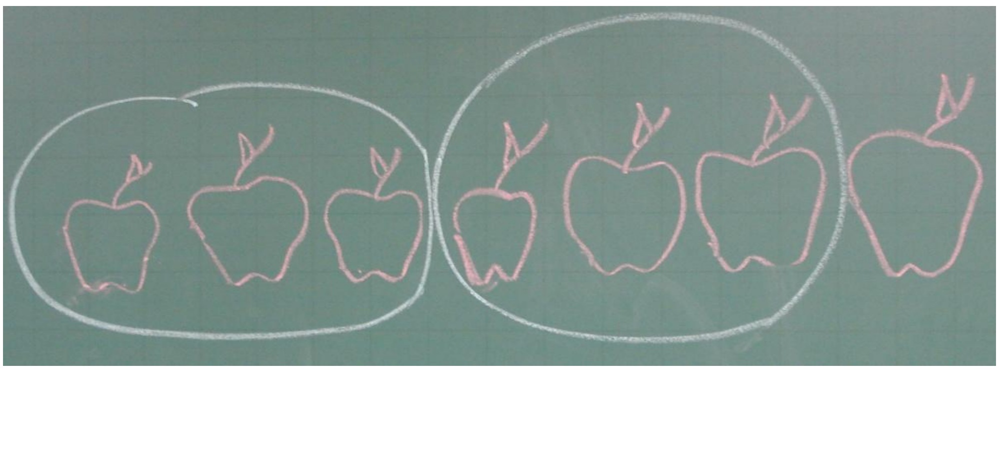
A professora não diz nada e escreve no quadro a fração $\frac{7}{3}$, continuando com alguns desenhos.



- Eu vou distribuir sete maçãs para três pessoas. A primeira maçã para a primeira pessoa, a segunda maçã para a segunda pessoa e assim por diante – ao fim da distribuição, o desenho da professora fica assim.



- Quantos grupos de três são formados com sete maçãs?



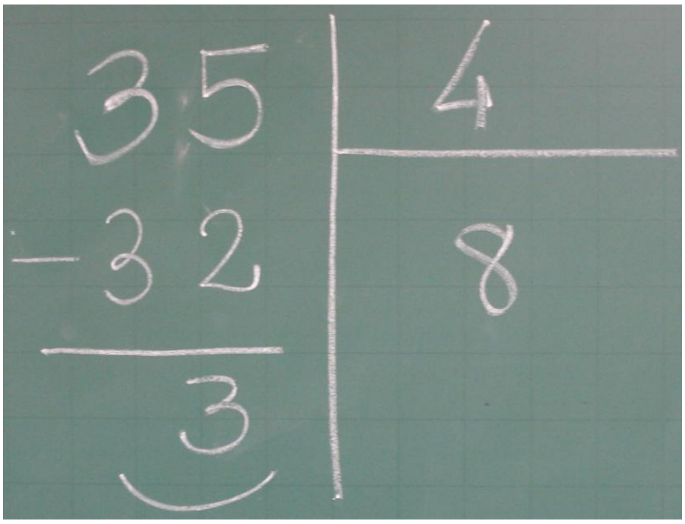
A resposta da turma é que são dois grupos e a professora emenda:

- E ainda vou pegar a faca e cortar a maçã que sobrou. Por que é misto? – escreve no quadro $2\frac{1}{3}$ – Porque tem uma parte inteira, sem pedaço, e um pedaço. Isso é o número misto.

Dando-se por satisfeita com a conceitualização do número misto, a professora voltou à folha de exercícios que deixara na aula anterior. A professora escreve a fração $\frac{35}{4}$ no quadro e pergunta:

- Por que eu divido o 35 pelo 4 para achar o número misto?
- Para saber quantas vezes o 4 cabe no 35! – diversos alunos reponderam.

No quadro, a professora vai fazendo a divisão:



- Bom, isso significa que o 4 cabe quantas vezes no 35?
- Oito vezes! – dizem os alunos.
- E o que sobra?
- O que sobra é menor que o inteiro, professora! – diz um dos meninos que se senta mais a frente na sala.
- Muito bem! Sobram três partes daquelas trinta e cinco. Então a gente fica com oito partes inteiras e sobram outras três partes das trinta e cinco – ao mesmo tempo em que fala, a professora escreve no quadro a resposta do exercício, $8\frac{3}{4}$.

Com o fim da correção, a professora vai olhando os cadernos dos meninos, quando parece ter um sobressalto. Dessa maneira, emenda a pergunta:

- O que é fazer prova real?
- É fazer a operação inversa – um dos alunos responde.

A professora sorri e o menino parece ensaiar uma espécie de dança com os braços, como se ouvisse um ritmo qualquer.

- Isso aí! Bom, gente, se fazer a prova real é fazer a operação inversa, como eu faço para transformar o número misto em fração imprópria de novo? – ela escreve $7\frac{5}{9}$ no quadro – Se eu divido para achar o número misto, para achar a fração imprópria eu faço o quê?

- Multiplico! – o aluno que respondera o que era prova real volta a dizer.

- Então sete vezes nove vai dar sessenta e três. Com os outros cinco que já estavam ali são sessenta e oito – a professora escreve $\frac{68}{9}$ e continua – Se eu faço sessenta e oito pãezinhos de mel e divido para nove pessoas, quantos cada uma delas vai comer?

- Sete! – respondem os alunos.

- E quantos vão sobrar?

- Cinco!

Com isso, a professora aponta novamente para $7\frac{5}{9}$, como que frisando que os sete pãezinhos de mel que todos comeriam era a parte inteira do número misto e os cinco restantes figuravam no numerador da fração. Com um sorriso de ares satisfeitos, ela finaliza:

- Entendeu que a gente pode ir e voltar?

Alguns alunos assentem. A professora senta-se em sua cadeira à frente da turma que, irriquieta, copia o que está no quadro. Onde antes reinava o tom de voz da professora, agora ecoa vozes contidas dos alunos. Corpos que não se contentam na carteira. A professora autoriza que todos guardem seu material. É o fim da primeira aula do dia

* * *

Partindo de *As sete maçãs e a fração*, o propósito desse fragmento é discutir a situação de sala de aula descrita anteriormente junto à Teoria dos Campos Conceituais – TCC. Uma discussão mais apurada sobre os conceitos que concernem a essa teoria tem lugar no Livro dos Modelos. Para nós, nesse momento, é importante salientar que partiremos da orientação de Vergnaud (1996), segundo quem o pesquisador interessado na aprendizagem de matemática deverá centrar seu esforço de compreensão em estabelecer classificações, descrever procedimentos, formular teoremas-em-ação[6], analisar a estrutura e a função dos enunciados e representações simbólicas.

De início, é interessante notar que trabalharemos com nosso relato de campo dividido em três fases distintas: a primeira delas vai do início da aula até o momento em que a professora diz que o número misto é aquele que "*tem uma parte inteira, sem pedaço, e um pedaço. Isso é o número misto*"; a segunda inicia-se com a divisão de 35 por 4 e termina no momento em que ela escreve $8\frac{3}{4}$ no quadro negro e a terceira parte se inicia com a discussão em torno da prova real e vai até o fim da fabulação. Em cada um desses momentos, acreditamos que podemos recobrir uma série de análises a partir dos pressupostos teóricos da TCC.

Dito isso, iniciaremos nossa discussão explicitando alguns pontos sobre o campo conceitual[7] de estrutura multiplicativa. Faremos isso, pois, para Vergnaud o conhecimento está organizado em campos conceituais que se desenvolvem no sujeito em certo tempo. No caso de nossa fabulação, o objeto da aula são as frações, em especial a transformação de frações impróprias em números mistos, o que vai levar à necessidade de se explorar as noções de divisão, multiplicação e proporcionalidade entre grandezas.

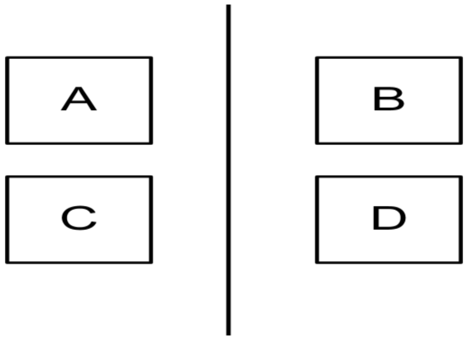
Vergnaud (1996) aponta que o campo conceitual de estrutura multiplicativa é aquele no qual se inserem situações que requerem um tratamento que envolva multiplicações, divisões e combinações dessas operações, bem como conceitos e teoremas que possam servir de ferramenta para a análise de situações que envolvam frações, razões, produtos e quocientes de medidas, funções lineares e n-lineares, dentre outras.

Dessa maneira, identificam-se nesse campo conceitual problemas que envolvem isomorfismo de medidas, produtos de medidas e proporção múltipla (GONÇALVES, 2008; CANOAS, 1997). Para efeitos de nossa discussão, vamos nos ater especificamente aos problemas que envolvem isomorfismo de medidas[8], já que o evento que descrevemos faz referência a situações matemáticas desse tipo. Os problemas do tipo isomorfismo de medidas são aqueles em que se pode estabelecer

---

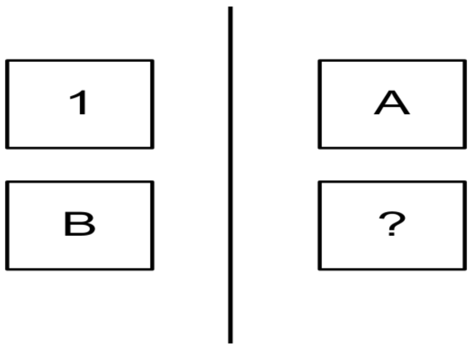
[6] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 114.
[7] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 116.
[8] Vale ressaltar, porém, que os problemas de produtos de medida e proporção múltipla têm estruturas semelhantes e ligadas à composição e proporcionalidade de grandezas distintas.

uma relação de proporcionalidade direta simples entre duas grandezas. Utilizaremos alguns diagramas para representar a estrutura do isomorfismo de medidas



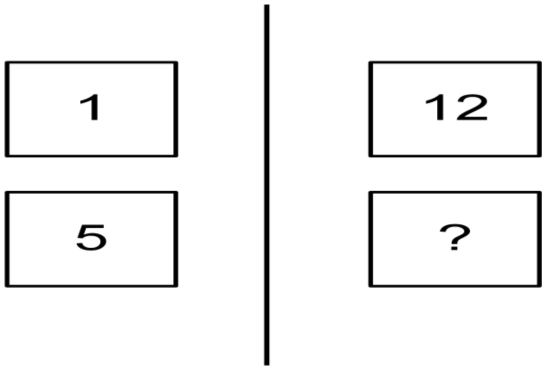
Podemos ler esse esquema da seguinte maneira: A está para B assim como C está para D, ou, simbolicamente, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow A.D=C.B\Rightarrow C.B=A.D$. A partir dessa relação, podem-se gerar quatro tipos distintos de problemas de estrutura de isomorfismos de medidas, representados pelos diagramas a seguir:

1º tipo: Multiplicação



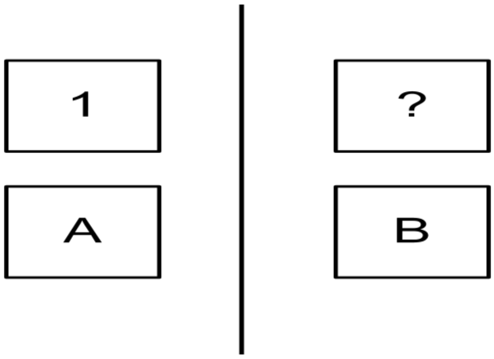
Utilizando a proporção que dá estrutura a esse problema, entendendo A e B como dados, ? como incógnita e 1 como elemento neutro da multiplicação, temos: $\frac{1}{A}=\frac{B}{?}\Rightarrow 1.?=A.B\Rightarrow ?=A.B$. Esse primeiro tipo de problema requer, portanto, o produto entre A e B para ser solucionado. São problemas que envolvem multiplicação, como o do seguinte exemplo:

Letícia tem 5 caixas com 12 lápis de cor cada uma. Quantos lápis de cor ela tem ao todo? Pela representação de Vergnaud:



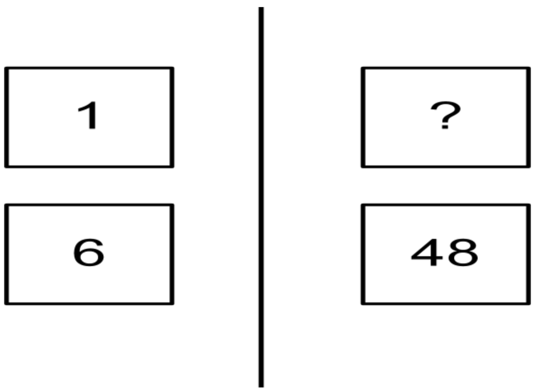
Temos: $? = 12.5 = 60$. Logo, Letícia tem 60 lápis de cor.

2º tipo: Divisão por partição



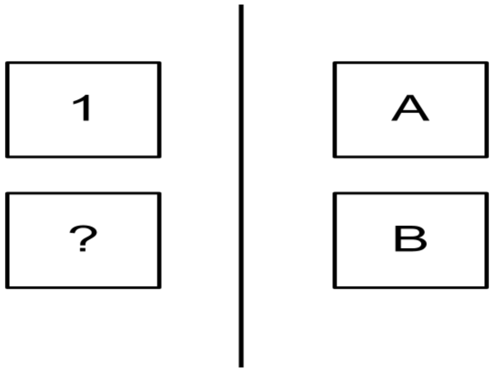
Utilizando a proporção que dá estrutura a esse problema, entendendo A e B como dados, ? como incógnita e 1 como elemento neutro da multiplicação, temos: $\frac{1}{A} = \frac{?}{B} \Rightarrow 1.B = A.? \Rightarrow B = A.? \Rightarrow ? = \frac{B}{A}$. Nesse tipo de problema, conhecemos a quantidade total de elementos de um conjunto – B – que deverá ser dividido em uma quantidade dada – A – de conjuntos, sendo necessário calcular a quantidade de elementos em cada conjunto. Vejamos um exemplo:

Pedro tem 48 lápis de cor e quer distribuí-los igualmente em 6 caixas. Quantos lápis de cor ficarão em cada caixa? Pela representação de Vergnaud:



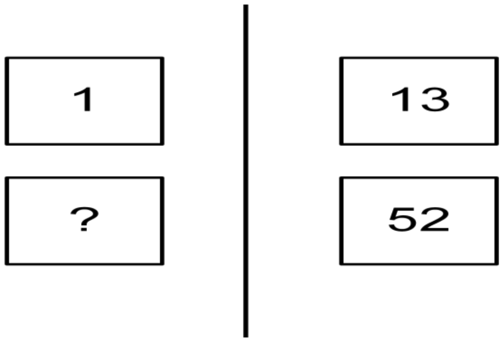
Temos: $? = \frac{48}{6} \Rightarrow ? = 8$. Logo, Pedro colocará 8 lápis de cor em cada caixa.

3º tipo: Divisão em quotas



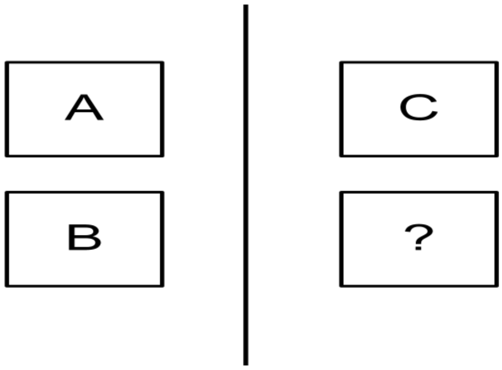
Utilizando a proporção que dá estrutura a esse problema, entendendo A e B como dados, ? como incógnita e 1 como elemento neutro da multiplicação, temos: $\frac{1}{?} = \frac{A}{B} \Rightarrow 1.B = A.? \Rightarrow B = A.? \Rightarrow ? = \frac{B}{A}$. Nesse tipo de problema, conhecemos a quantidade total de elementos de um conjunto – B – que deverá ser dividida em conjuntos de quantidade de elementos – A – estabelecida a priori, sendo necessário calcular a quantidade de conjuntos que se pode formar. Vejamos um exemplo:

Daniel tem 52 lápis de cor e quer distribuí-los em caixas de tal maneira que cada caixa tenha 13 lápis. Quantas caixas Daniel vai utilizar? Pela representação de Vergnaud:



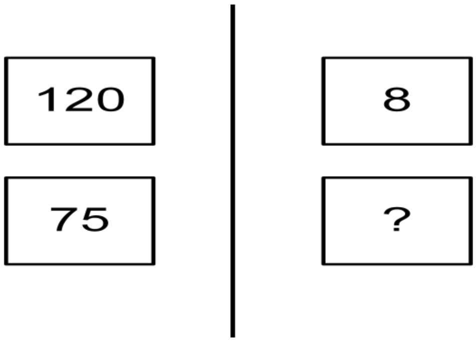
Temos: $? = \frac{52}{13} \Rightarrow ? = 4$. Logo, Daniel utilizará 4 caixas.

4º tipo: Quarta proporcional



Utilizando a proporção que dá estrutura a esse problema, entendendo A, B e C como dados e ? como incógnita, temos: $\frac{A}{B}=\frac{C}{?}\Rightarrow A.?=B.C\Rightarrow ?=\frac{B.C}{A}$. Nesse tipo de problema, conhecemos três grandezas, sendo necessário determinar a quarta grandeza envolvida. Vejamos um exemplo:

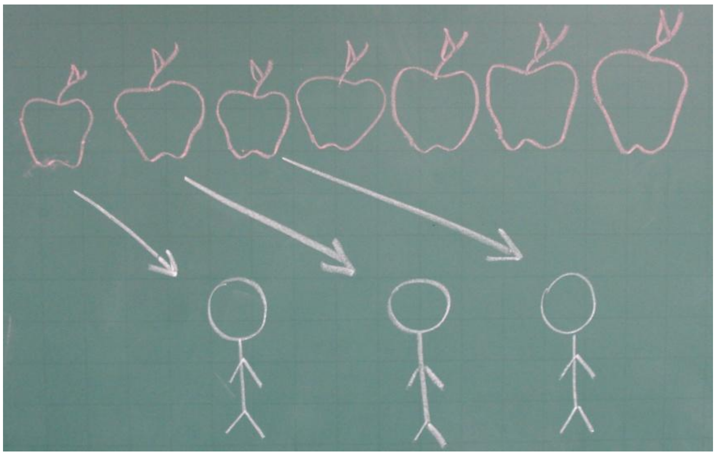
Em uma fábrica de lápis de cor, cada 120 lápis dão origem a 8 caixas. Se tivermos 75 lápis, quantas caixas serão produzidas? Pela representação de Vergnaud:



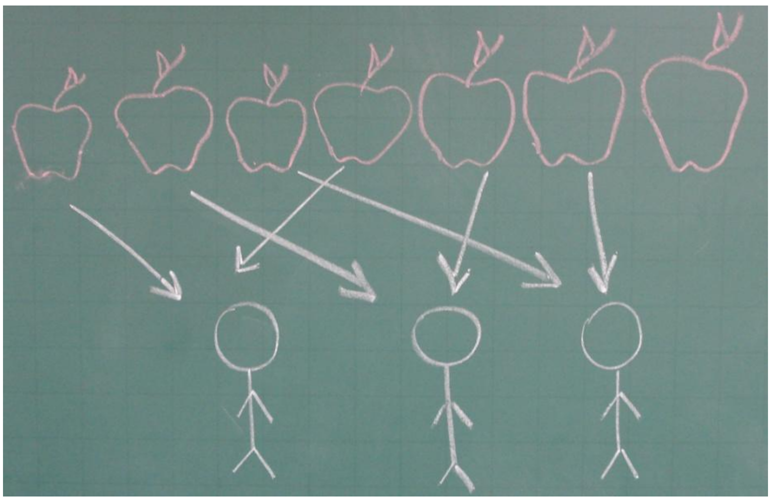
Temos: $?=\frac{75.8}{120}=\frac{600}{120}=5$. Logo, serão produzidas 5 caixas de lápis.

A partir dessas estruturas, pensemos a primeira parte da aula, na qual a professora procura representar, com a linguagem oral, a ideia de número misto. Logo nas primeiras falas, a professora pergunta aos alunos porque o número misto recebe esse nome. Há três respostas: porque é uma mistura de números; porque é uma mistura de multiplicações; porque é uma mistura de divisões.

Devemos levar em conta que um número misto é aquele em que as unidades inteiras aparecem escritas separadas da forma fracionária, sendo essa última necessariamente menor que a unidade (BERTONI, 2009). Alcançar a definição de número misto é o principal objetivo dessa primeira parte da aula. Das três falas dos alunos anteriormente citadas, aquela que mais se aproxima de uma definição de número misto é a do primeiro aluno, que diz de uma mistura de números. Falta ainda, porém, explicitar de que natureza são os números que estão “misturados”, ou seja, falta explicitar que um desses números é natural – a parte inteira e necessariamente maior ou igual à unidade – e que o outro número é fracionário e necessariamente menor que a unidade. Diante das respostas dos alunos, a professora parte, então, para uma sub-tarefa dessa primeira e propõe uma situação problema baseada na seguinte afirmação: *eu vou distribuir sete maçãs para três pessoas*. Temporariamente, então, o problema da definição do número misto é abandonado em favor da proposição de uma situação problema de estrutura multiplicativa, já que sua solução dependia da divisão $7 \div 3$. Lembremos o procedimento que a professora utilizou para efetuar essa divisão. Em vez do algoritmo usual, foi usado o recurso aos desenhos, da maneira como segue:



A esse primeiro desenho, acompanha a fala: *“eu vou distribuir sete maçãs para três pessoas. A primeira maçã para a primeira pessoa, a segunda maçã para a segunda pessoa e assim por diante”*. Por fim, o desenho transforma-se em outro:



A partir dessa representação da divisão $7 \div 3$, é interessante salientar duas questões. A primeira delas diz respeito à estrutura conceitual da situação que está sendo proposta pela professora: da maneira como está sendo feita a distribuição, o problema da divisão das maçãs é do tipo *divisão por partição*. Conhecemos a quantidade de elementos do conjunto de maçãs – 7 – e conhecemos a quantidade de pessoas para quem as maçãs serão distribuídas – 3. A partir disso, é natural que desejemos conhecer a quantidade de maçãs que corresponderão a cada uma das três pessoas.

A segunda delas tem a ver com os esquemas utilizados no procedimento de divisão. De início, dois deles chamam a atenção por estarem intrinsecamente ligados ao desenvolvimento do campo conceitual de estrutura multiplicativa: 1) a relação um para muitos, representada pela correspóndência de uma pessoa para várias maçãs; 2) a coordenação das relações entre dois conjuntos de grandezas distintas: pessoas e maçãs (LARA, 2011). Com relação à tarefa principal desse momento da aula – conceituar a ideia de número misto – o primeiro e talvez mais imediato esquema é o de que fração pode ser entendida como uma divisão entre dois números inteiros (BERTONI, 2009).

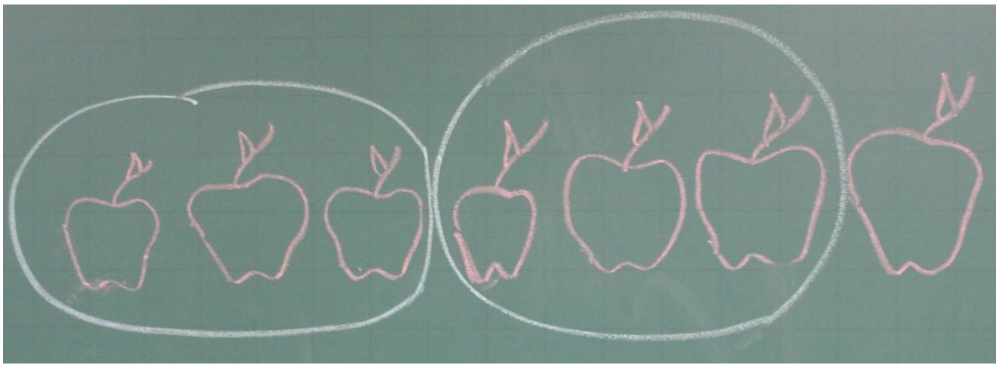
Um último esquema que vamos destacar – e que mostram bem a preocupação da leitura de longo prazo na aprendizagem de matemática[9] que a TCC tem – é o próprio esquema utilizado pela professora de dividir por partições. Moro (2004) afirma que há diversas evidências de que a estruturação de situações de divisão por partição são menos difíceis para as crianças. Se levarmos em conta que a tarefa principal da primeira parte da aula é conceituar a ideia de número misto – que está em processo de aprendizagem em curto prazo – a partir da divisão de maçãs para pessoas, parece natural que os esquemas dessa divisão devam já estar estruturados nos alunos, sendo algo já conhecido por eles ao longo de seu processo de desenvolvimento – longo prazo.

Embora a situação da divisão de maçãs para pessoas e a representação icônica proposta pela professora no quadro nos sugiram uma estrutura do tipo *divisão por partição*, a aula continua com a seguinte pergunta: *quantos grupos de três são formados com sete maçãs?* É necessário observar que a pergunta feita pela professora nos remete a um problema de estrutura multiplicativa do tipo *divisão em*

---

[9] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, páginas 109 e 110.

quotas, já que conhecemos a quantidade total de elementos do conjunto de maçãs – 7 – e necessitamos saber quantos agrupamentos de extensão fixa – 3 – podem ser feitos. A representação dessa segunda pergunta aparece por meio de desenhos no quadro negro:



Partindo desse desenho é que a professora diz que vai pegar a faca e cortar a maçã que sobrou. A representação que aparece por último, porém, induz a uma divisão da maçã que sobra em duas metades, sendo uma metade para cada conjunto. Apesar disso, a professora escreve que a fração $\frac{7}{3}$ dá origem ao número misto $2\frac{1}{3}$, sendo a parte inteira 2 correspondente aos dois agrupamentos de três maçãs e a parte fracionária a $\frac{1}{3}$ à maçã que sobra desses agrupamentos. Dessa analogia decorrem alguns efeitos.

O primeiro deles é a mudança no tipo de problema que está sendo utilizado na situação, já que a primeira representação diz respeito a uma divisão por partição e a segunda diz respeito a uma divisão em quotas. Isso implica em uma mudança das grandezas envolvidas nas divisões, já que na primeira representação tratava-se de maçãs e pessoas, enquanto que na segunda representação as grandezas são as maçãs e os agrupamentos. Além disso, na segunda representação as pessoas que aparecem na situação proposta não são parte explícita da solução da divisão, aparecendo somente em correspondência com a quantidade de elementos dos agrupamentos, ou seja, os conjuntos têm três maçãs porque cada maçã corresponde a uma pessoa.

Por último, a primeira representação da divisão $7 \div 3$ parecia dar conta de explicar a transformação da fração em número misto de maneira mais imediata, já que, uma vez feita a distribuição das maçãs pelas três pessoas, teríamos duas maçãs para cada uma, além do resto – uma maçã. Porém, a maçã inteira não é divisível para três, o que levaria à necessidade de sua subdivisão em três partes, das quais cada pessoa ficaria com uma. Sendo assim, cada uma das três pessoas ficaria com duas maçãs inteiras e um terço de maçã, o que corresponde, numericamente, a $2\frac{1}{3}$. Bertoni ressalta que:

> Em situações envolvendo a partilha do resto, o fato de o resultado final envolver, muitas vezes, números naturais acompanhados de números fracionários menores do que a unidade, permite uma compreensão mais ampla dos números fracionários do que aquela obtida pela relação parte-todo, a partir de uma única unidade (com obstáculo posterior à aceitação de frações maiores do que a unidade) (BERTONI, 2008, p. 223-4).

É interessante notar como a situação proposta pela professora se mostra adequada à aprendizagem de frações, apesar de possíveis complicações quanto à mudança de tipo de problema que as duas representações distintas utilizadas pela professora evocam. Bertoni (2008) explicita em outro trecho como a ideia de fração como divisão de inteiros é pouco explorada na escola em nome de representações mais canônicas – como as que se utilizam de figuras divididas e pintadas – mas que estão longe de abarcar as situações possíveis de conceitualização da fração, tornando-se, até mesmo, obstáculos à aprendizagem posterior.

O segundo momento da aula começa depois de a professora afirmar que o número misto é aquele que tem *uma parte inteira e um pedaço*. A situação em questão, a partir daquele momento, passou a ser a transformação de $\frac{35}{4}$ em número misto. Os alunos dizem, então, é preciso dividir 35 por 4 para saber quantas vezes o 4 cabe no 35. Aqui, mais uma vez aparece a *divisão em quotas* como significado para a fração. Dessa maneira, como acontece na situação da distribuição das maçãs, a ideia de *divisão por partição* é abandonada e a professora segue com o algoritmo da divisão usual. O que muda aqui é a maneira como as divisões são representadas: se na situação da distribuição das maçãs são utilizados desenhos, setas e conjuntos, na transformação de $\frac{35}{4}$ em número misto somente a representação simbólica matemática usual está presente.

Note-se que, em consonância com o que aconteceu na primeira situação, temos uma organização invariante na dinâmica da transformação, embora as representações dessa transformação sejam distintas: primeiro são identificadas as duas grandezas que precisam ser divididas; depois a divisão, seja por qual método for, é efetuada; por último, é preciso identificar na divisão feita que numerais representam a parte inteira e que numerais representam a parte fracionária que vão compor, por fim, a resolução da situação.

Outro elemento interessante que aparece nessa segunda parte da aula é a fala de um dos alunos, que afirma que a parte que “sobra” da divisão de 35 por 4 – e que vai compor a parte fracionária do número misto – é menor que o inteiro. Dizemos isso porque o conceito de número misto é mobilizado até esse momento com elementos implícitos, ou seja, como um conceito-em-ação ou um teorema-em-ação[10], na acepção de Vergnaud (1996). A ideia de que o número misto é composto por uma parte inteira e outra fracionária menor que a unidade estava presente nos processos de solução, embora não tenha sido explicitada nem pela professora em sua definição verbal, nem pelos alunos.

Ao falar de um dos elementos do conceito de número misto, o aluno toma consciência[11] de um esquema antes implícito em sua ação. Com a TCC podemos afirmar que, por meio da linguagem[12], esse aluno controla sua ação em uma situação em que os esquemas de resolução ainda não estão completamente formados. Aqui aparece, mais uma vez, a tensão entre o longo prazo – o desenvolvimento – e o curto prazo – a situação de aprendizagem – pois a nominação feita pelo aluno se apoia sobre os esquemas já desenvolvidos – a divisão euclidiana de inteiros, o reconhecimento dos numerais da divisão em termos da transformação da fração em número misto – ao mesmo tempo que dá lugar à aprendizagem de esquemas novos, que permitem uma verbalização correta do número misto. Note-se que, aliando a definição que a professora havia dado ao fim da divisão das maçãs entre pessoas – número misto é aquele *tem uma parte inteira, sem pedaço, e outra com pedaço* – e a fala do aluno – o que *sobra é menor que o inteiro* – temos uma definição bastante semelhante àquela dada por Bertoni (2009). É claro que, nesse caso, estamos aproximando o termo *pedaço* da fala da

---

[10] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, páginas 112 e 113.

[11] “Visto no quadro da epistemologia genética como aspecto da equilibração, o processo da tomada de consciência de esquemas é uma das dimensões que transforma esses esquemas em um conceito ou em um sistema de conceitos [...]. A perspectiva piagetiana a respeito entende a ação como um “saber fazer” com algum grau de autonomia. Porém, seja quando há sucesso precoce, imediato, da ação, ou quando há fracasso com sucesso obtido adiante, a sua conceitualização ocorre por tomadas de consciência *a posteriori*, o que Piaget [...] explica segundo um movimento das regiões de adaptação ao objeto, periféricas da interação sujeito-objeto, para regiões centrais desta interação, as das coordenações internas das ações” (MORO, 2005, p. 217). Moro salienta o movimento de tomada de decisão, que não é nosso objeto imediato de discussão – como um momento dentro do processo de equilibração.

[12] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 115.

professora com o termo *sobra* da fala do aluno. Vale ressaltar, ainda, que no processo de nomeação, de uso da linguagem para a representação, o aluno transforma um conceito-ferramenta – implícito, cuja função é a de auxiliar o pensamento e a organização da ação – em um conceito-objeto, explícito, consciente, objeto próprio do pensamento.

Cabem ainda algumas palavras sobre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação em jogo nessas duas primeiras partes da aula. Em primeiro lugar, aparecem as ideias de conservação e equivalência entre o par $\frac{7}{3}$ e $2\frac{1}{3}$ e o par $\frac{35}{4}$ e $8\frac{3}{4}$, ou seja, fica implícito que, apesar da transformação feita na escrita desses números, a quantidade que eles representam mantém-se invariante. Além disso, a transformação de frações em números mistos auxilia na identificação de que escrever $2\frac{1}{3}$ é o mesmo que escrever $2+\frac{1}{3}$ e que escrever $8\frac{3}{4}$ é o mesmo que escrever $8+\frac{3}{4}$. Isso tem a vantagem de garantir uma compreensão, ainda que inicial, de um caso particular de operação com números racionais: a soma de um número inteiro com um número fracionário (BERTONI, 2008).

Para finalizarmos essa discussão, é interessante notar como a terceira parte da aula ocorre. Devemos recorrer, uma vez mais, à noção de campo conceitual de estrutura multiplicativa que, para Vergnaud (1996), é aquele que comporta situações em que uma multiplicação ou uma divisão são necessárias. É preciso levar em conta que multiplicação e divisão são operações inversas[13], ou seja, no âmbito da TCC, toda operação que estiver dentro do campo conceitual de estrutura multiplicativa pode ser desfeita. Nesse sentido, a própria proposição teórica de Vergnaud segundo a qual o conhecimento se estrutura por meio de campos conceituais parece coerente com o desenvolvimento mental que seja análogo à estruturação matemática, como propunha Piaget (1979).

Ao perguntar a seus alunos o que é prova real e receber como resposta que significa fazer uma operação inversa, a professora propõe uma situação em que os alunos precisam lidar com a reversibilidade do pensamento. Em outros termos: na primeira parte da aula, a professora se esforçou por mostrar a seus alunos a maneira pela qual a fração – um estado inicial – se transforma em número misto –

---

[13] Isso significa que se tivermos os números reais a, b, ambos diferentes de zero, de tal modo que $a.b=c$, podemos obter a dividindo c por b, ou seja, fazendo $a=\frac{c}{b}$ e podemos obter b dividindo c por a, ou seja, fazendo $b=\frac{c}{a}$.

um estado final. A partir da pergunta sobre a prova real, toda a situação se inverte, de maneira que temos um estado final – número misto – e queremos desfazer a transformação, levando-o novamente a um estado inicial – fração. Essa capacidade de reversibilidade de pensamento desloca a atenção dos estados dos objetos para as transformações que nele se pode empreender, sendo um dos mecanismos que completa da construção das estruturas lógico-matemáticas (PIAGET, 1993). É imperativo dizer que a intervenção da professora em perguntar aos alunos sobre a operação inversa se faz em um momento bastante oportuno, já que Piaget aponta que a reversibilidade aparece no período pré-operatório, que, em geral, vai dos 7 aos 12 anos.

Interessante notar que, explorada a questão da inversão, um dos alunos responde prontamente que para se transformar um número misto em fração imprópria, efetua-se uma multiplicação, ou seja, uma inversão da divisão requerida nas duas primeiras partes da aula. A ideia de reversibilidade aparece, então, na última fala da professora: *entendeu que a gente pode ir e voltar?*

FABULAÇÃO

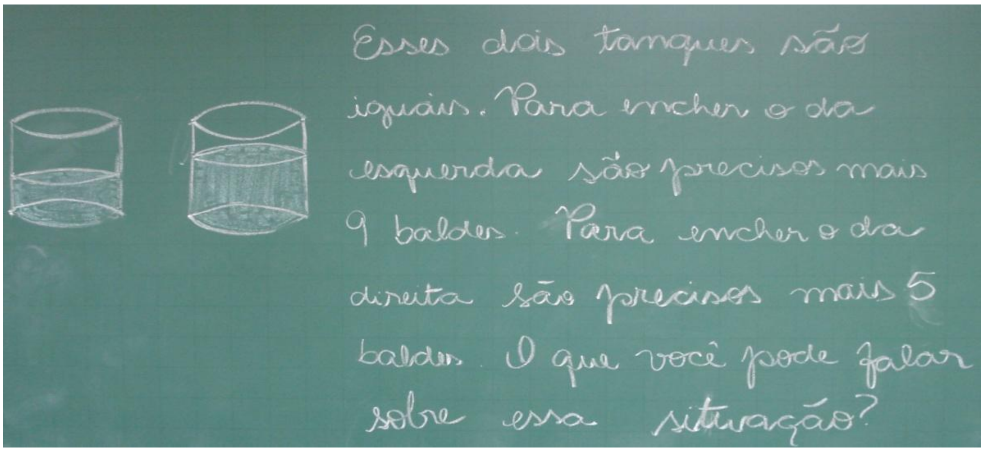
OS TANQUES

Era um segundo semestre de ano em uma escolinha pequenina, distante de todo centro de cidade que havia. Uma turma de sétimo ano com 28 alunos. Dois estagiários de matemática ensaiavam seu ofício trabalhavando com as primeiras atividades que levaria aqueles alunos a adentrarem em um domínio da matemática até então não explorado (?): a álgebra.

* * *

Acompanhávamos aquela turma havia quase um ano. A professa da turma, de nome Maria Inês, sempre dizia que aquela era a turma mais difícil da escola, que a gente sempre tinha que perder muito tempo para conseguir falar, que era uma turma muito fraca, que tinha que ficar de olho neles o tempo todo. Maria Inês sempre exigia silêncio quando falava. Desde quando havíamos chegado ali, ela já havia ensinado números decimais, simetria, números negativos. Quando o fim do ano se aproximava, ela disse que ai começar a trabalhar com álgebra e foi aí que nós entramos. Pedimos à professora para trabalharmos essa entrada no mundo da álgebra. Nosso objetivo era chegar a discutir equações de primeiro grau.

Uma atividade...



Em uma folha de papel, os alunos começam a atividade. Nesse início, a proposta era que eles escrevessem em uma folha em branco aquilo que poderiam dizer sobre a situação. Muitos olhares se cruzaram, talvez surpresos com a proposta inusitada. O que você pode falar sobre essa situação não é uma pergunta comum em atividades de matemática. Demorou um pouco até que eles começassem a escrever.

- Pode escrever qualquer coisa? – Mateus perguntou.
- Não é qualquer coisa, é qualquer coisa que tenha a ver com o que a gente disse para vocês – respondemos.
- Ah, tá.
- Mas porque você está perguntando isso?
- Porque não dá para ver o tamanho dos tanques. Além disso, não diz qual é o líquido que tem nos tanques. E faltam nove baldes de que? Baldes de água? Se forem baldes de leite o tanque vai transbordar. Leite faz espuma! – o menino continuou.

Alguns muxoxos da turma pareciam dar a entender que alguns alunos concordavam. *Era preciso saber o líquido que estava no tanque*.

- Gente, faz como se fosse água porque água não faz espuma – Maria Inês interveio de imediato.

Mateus não parecia ter se dado por satisfeito. Voltou silenciosamente à sua folha, ainda em branco, e escreveu como duas primeiras respostas à nossa pergunta: *O texto não fala de que que são os baldes, se é de água, se é de leite, etc.; 2. Não dá pra vc VER O TAMANHO DO TANQUE!*

Às letras garrafais do fim da segunda resposta, seguiam-se outras afirmações, todas elas afins à proposição da atividade, como *tem menos líquido no* *tanque da esquerda*, por exemplo. Douglas também escreveu que *o da esquerda precisa de mais baldes para encher porque é mais fundo e largo*.

Assim, a turma voltou ao silêncio enquanto os alunos se debruçavam sobre a situação que lhes fora apresentada. Ao fim de algum tempo, tomamos a palavra:

- Pessoal, vamos começar aqui? – e vários pares de olhos se voltaram para a frente da sala, onde falava o estagiário – A ideia é que a gente possa conversar sobre as respostas de vocês. Alguém pode começar dizendo alguma coisa que tenha escrito?

- O tanque da direita tem mais líquido que o da esquerda – arriscou Rincom – apesar dos dois serem do mesmo tamanho. É que se para encher o da esquerda falta mais baldes, nove, isso significa que só muda a forma como esses tanques *foram enchidos*. O primeiro *foi enchido* com mais, por isso precisa de menos e o segundo *foi enchido* com menos, por isso precisa de mais.

- Ah, isso eu vi só olhando para o desenho – disse Aline – O da esquerda está mais vazio porque a linha pontilhada está mais embaixo e o da direita está mais cheio porque a linha pontilhada está mais em cima.

- Isso, os tanques estão com quantidades diferentes mesmo. O da esquerda precisa de 9 baldes e o da direita precisa de 5 baldes. Mas tem várias maneiras de fazer esses tanques ficarem com a mesma quantidade de líquido. E se você encher o da esquerda com 4 baldes, fica igual o da direita; se você tirar 4 baldes do da direita, fica igual o da esquerda; se você encher os dois tanques eles também ficam com a mesma quantidade: daí é só colocar 9 baldes no da esquerda e 5 baldes no da direita – disse Isabel.

O estagiário procurava escrever no quadro, por extenso, aquilo que os alunos iam dizendo: o tanque da esquerda tem menos líquido que o tanque da direita; é preciso colocar 4 baldes no taque da esquerda para que ele fique com a mesma quantidade de líquido que o tanque da direita; é preciso retirar 4 baldes do tanque da direita para que ele fique com a mesma quantidade de líquido do tanque da esquerda; é preciso colocar 9 baldes no tanque da esquerda e 5 baldes no tanque da direita para que eles tenham a mesma quantidade de líquido. E retomou, então, a fala:

- Gente, e se a gente parasse de escrever tudo por extenso? Estão vendo, quando a gente escreve tudo fica grande. Será que a gente não pode usar outro modo de escrever isso aqui? Olha, se eu chamar a quantidade de líquido em cada balde de “b”, a gente poderia dar nome para a quantidade de líquido nos dois tanques e...

- Ah, então a gente devia chamar o que tem mais de galão e o que tem menos de galinho! – logo emendou Walker.

- Pode ser, gente? – o estagiário virou-se para a turma, que ria da sugestão do colega – Então toda a vez que formos falar da quantidade de líquido do tanque da esquerda, vamos falar galinho e escrever "g". Toda a vez que formos falar da quantidade de líquido do tanque da direita, vamos falar galão e escrever "G". Vamos ver como fica? Se a gente pegar, por exemplo, a primeira coisa que vocês disseram, *o tanque da direita tem mais líquido que o tanque da esquerda*, a gente poderia dizer que o galão tem mais líquido que o galinho. Daí a gente pode escrever o seguinte: $G > g$.

E outras respostas foram escritas utilizando aqueles símbolos. *Os tanques estão com quantidades diferentes* virou $G \neq g$; *se você encher o da esquerda com 4 baldes, fica igual o da direita* virou $g + 4b = G$; *se você tirar 4 baldes do da direita, fica igual o da esquerda* virou $g = G - 4b$; *se você encher os dois tanques eles também ficam com a mesma quantidade: daí é só colocar 9 baldes no da esquerda e 5 baldes no da direita* virou $g + 9b = G + 5b$.

Aquela aula terminou com os alunos devolvendo as folhas nas quais haviam feito a atividade e conversando sobre aquilo que podia ser dito sobre o galão, o galinho e os baldes. Uma semana depois, quando os estagiários voltaram àquela turma, procuraram lembrar o que haviam conversado sobre a atividade dos tanques. Dessa vez, escreveram novamente a atividade no quadro, nomearam a quantidade de líquido no tanque da esquerda de "X" e a quantidade de líquido no tanque da direita de "Y". A quantidade de líquido nos baldes continuou sendo chamada de "b". Mudou a notação da atividade. Sai "g", entra "X", sai "G", entra "Y". Mudariam também as falas dos alunos? Nessa segunda fase, os meninos receberam de novo as folhas nas quais haviam feito a atividade da semana anterior e deveriam tentar justificar as afirmações $X < Y$; $X + 2b < Y$; $X + 4b = Y$; $Y - 4b = X$; $Y - 1b = X + 3b$.

- Aqui no $X < Y$ eu disse que tem uma menor quantidade de líquido no X – Walker disse, logo que começou a fazer a atividade.

- Eu disse que o tanque da esquerda é menor que o tanque da direita – disse Douglas.

- Mas você *não pode* dizer isso – Walker, logo respondeu a Douglas – Está *escrito* que os dois tanques são iguais!

O estagiário, então, interveio na conversa, pedindo ao segundo menino que dissesse por que achava que poderia dizer aquilo.

- Bom, X *é o tanque* da esquerda e Y *é o tanque* da direita. Se está escrito $X < Y$ é porque o tanque da esquerda é menor que o da direita.

- Mas X não *é o tanque* da esquerda, *é a quantidade* de líquido que tem no tanque da esquerda – Walker voltou a responder, prontamente.

- Mas na semana passada a gente tinha chamado de galinho o tanque da esquerda e de galão o tanque da direita!

Outros alunos, ouvindo o que diziam os dois meninos, deram razão ora ao primeiro menino, ora ao segundo.

- Gente, vamos pensar a próxima expressão para ver se a gente dá conta do que está acontecendo? – interrompeu o estagiário – Olha, está escrito $X + 2b < Y$. O que vocês acham que isso significa?

- Significa que, mesmo botando mais 2 baldes no X, o Y ainda *será maior* porque ele terá mais líquido – Nábia respondeu, lendo o que havia escrito em sua folha.

- Todo mundo concorda? – alguns alunos disseram que sim e ninguém se manifestou em outra direção. O estagiário, então, continuou – Bom, gente, se a gente fala que $X + 2b < Y$ porque, mesmo se colocarmos dois baldes de líquido no X, ainda vai ter mais líquido no Y, então o X e o Y são os tanques ou a quantidade de líquido nos tanques?

- É a quantidade – foi Douglas quem respondeu.

- Vamos tentar seguir a ideia de que X e Y são os tanques para ver o que conseguimos? – o estagiário sugeriu – Se X é o tanque da esquerda, o que significa $X + 2b$?

- O tanque da esquerda mais dois baldes.

- Tudo bem. Mas o que significa esse mais dois baldes? X agora é o tamanho do tanque. Mais dois baldes significa empilhar dois baldes no taque X? – o estagiário esperou um pouco e continuou – Lá na fala anterior, mais dois baldes significava acrescentar a quantidade de líquido de dois baldes à quantidade de líquido X do tanque da esquerda. Mas se X for o tamanho do tanque, b tem que ser o tamanho do balde, não é? Aí muda tudo, não acham? E quando chegar em $Y - 4b$, o que vamos fazer? Como eu tiro o tamanho de 4 baldes do tamanho do tanque? E se desse, como a gente poderia garantir que $Y - 4b$ vai dar tamanho de X?

- Aí não dá para fazer – alguém responde.

E os meninos voltaram a suas folhas, escrevendo suas justificativas, rumo ao caminho da álgebra (?).

* * *

Nosso objetivo nesse fragmento é discutir a fabulação *Os Tanques* por meio do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Dessa maneira, importa entender os modos de produção de significados[14] que estão em jogo na atividade[15] dos tanques, de tal modo que seja possível identificar os modos pelos quais os sujeitos[16] constituem objetos[17] matemáticos e não-matemáticos no interior dessa atividade. Exploremos, então, nossa fabulação.

Inicialmente, pensemos junto a Mateus, que afirma não saber que líquido está nos tanques e que não é possível ver o tamanho do tanque. Bom, de saída, parece-nos que esse aluno constitui um núcleo que parte, em grande medida, do desenho dos tanques. Dessa forma, a imprecisão do diagrama passa a ser constitutivo dos significados produzidos por ele. Se pensarmos conhecimento[18] dentro do MCS, poderíamos dizer que Mateus crê-afirma que não sabe o tamanho dos tanques e que não sabe o líquido que há no balde. Para as duas crenças-afirmações a justificação é a mesma: não sei o tamanho dos tanques e o líquido que está no balde *porque* não é possível ver no desenho. O que parece acontecer é que o enunciado da atividade não se mostra relevante para Mateus no processo de produção desses significados, já que a frase '*esses dois tanques são iguais'* não funciona como estipulação local[19] em sua enunciação. A nucleação que se efetiva parece ser majoritariamente qualitativa (LINS, 2001). Algo semelhante parece acontecer quando outro aluno afirma que o tanque da esquerda precisa de mais baldes porque é mais fundo e largo ou quando Aline, pouco depois, diz que o tanque da esquerda tem menos líquido porque a linha pontilhada está mais embaixo.

Ainda sobre essa nucleação em torno do desenho da atividade, precisamos nos deter na intervenção da fala da professora nesse processo. Por um lado, ao afirmar que o líquido nos tanques e baldes é água porque não faz espuma, Maria Inês determina uma estipulação local que não fazia parte da atividade de antemão.

[14] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 124.
[15] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 135 e 136.
[16] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, páginas 123.
[17] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 124.
[18] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 122.
[19] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 131.

Por outro, para o MCS, o sujeito sempre diz tudo o que pode dentro de uma dada atividade e, quando fala, o faz para seus interlocutores, ou seja, o sujeito fala numa direção em que acredita que poderá ser ouvido. Nesse caso, o que acontece é que a professora não compartilha com o aluno o modo de produção de significados a partir do leite, de tal forma que nega a esses significados o status de legítimo naquela sala de aula. Essa não legitimidade acaba por forçá-la a introduzir um elemento na atividade que não estava previsto: no lugar de líquido, os alunos podem e devem ler água. Se Mateus abre mão, por qualquer motivo que seja, de discutir isso em voz alta com a professora, o mesmo não ocorre no momento em que ele escreve em sua folha, já que aí aparecem novamente significados que estão ligados ao tamanho dos tanques e às diferentes possibilidades de líquido na atividade. Dessa maneira, podemos entender que acontece um duplo processo no qual a professora se recusa a compartilhar com o aluno o interlocutor para o qual a fala sobre o leite seria legítima, da mesma forma que o aluno se recusa a compartilhar com a professora o interlocutor para o qual a fala sobre a água seria legítima[20].

Naquela mesma atividade, porém, outro núcleo se constitui: quando outros alunos falam sobre os tanques, começam a aparecer núcleos que têm por base o enunciado da atividade, de tal modo que os significados envolvidos são majoritariamente quantitativos (LINS, 2001). Isso fica explícito quando Isabel diz que o nível nos tanques está diferente porque em um deles são necessários 9 baldes para enchê-lo, enquanto que no outro são necessários apenas 5. Surge dessa fala uma comparação entre os dois tanques a partir do problema de sua nivelação: existem diversas maneiras de se fazer com que aqueles tanques apresentem uma mesma quantidade de líquido.

O que importa aqui, sob a perspectiva do MCS é que, embora toda a turma fale sobre tanques, baldes e comparações entre os tanques, a produção de significado não é *necessariamente* a mesma. Pensemos por meio das falas de Rincom e Aline, que afirmam que o tanque da direita tem mais líquido que o da esquerda. A crença-afirmação é exatamente a mesma. Porém, Rincom diz que os tanques foram cheios de maneira distinta e que, se faltam mais baldes para completar o tanque da esquerda é porque há menos líquido nele do que no da

[20] A esse processo dá-se o nome de impermeabilização. “Chamaremos de impermeabilização ao processo que leva os alunos a não compartilharem novos interlocutores em situação de interação face a face, diferentes daqueles para o quais estavam voltados; de não se propor a produzir significados numa outra direção” (SILVA, 2012, p. 79).

direita. E Aline diz que a linha pontilhada no tanque da esquerda está mais em baixo do que a do tanque da direita. As justificações são distintas e, nesse sentido, o conhecimento também o é. Enquanto Rincom opera segundo uma lógica quantitativa – estabelecida pelo enunciado da atividade – Aline opera segundo uma lógica qualitativa – estabelecida pelo diagrama dos tanques. Dessa maneira, distinguem-se os dois modos de produção de significado e essa diferença é que deve ser valorizada em sala de aula. Ainda que o objetivo seja fazer com que os alunos falem para novos interlocutores, é preciso reconhecer que a fala de Aline é legítima dentro da atividade, tanto quanto a fala de Rincom.

A partir do que disseram os alunos, o estagiário propôs que a turma começasse a escrever suas afirmações por meio de símbolos. Assim surgem o galão (G), o galinho (g) e o balde (b) enquanto símbolos. Dessa maneira, a notação algébrica surge como uma maneira de expressar as relações quantitativas que antes estavam escritas em linguagem corrente. Ora, aqui é preciso levar em conta o papel de sugestão do estagiário, que propõe aos alunos essa notação. Para Lins (1997), o professor pode e deve colocar em jogo a notação algébrica de tal forma que fique clara sua intenção de que os alunos trabalhem com ela. Nesse sentido, a orientação do processo está vinculada ao pressuposto vigotskiano de que as formas de pensamento humano desenvolvem-se inicialmente no plano social para, somente depois, se constituirem no plano individual.

Na semana seguinte, quando a turma voltou a se debruçar sobre a atividade dos tanques, o diálogo entre Douglas e Walker passa a ser de interesse para que possamos entender como a dinâmica de produção de significados aconteceu naquela sala de aula. A discussão toma corpo frente à afirmação de que $X < Y$, que ganha duas justificações distintas. Para Walker, $X < Y$ porque há menos quantidade de líquido em X do que em Y; para Douglas, $X < Y$ porque o tanque X é menor que o tanque Y. Devemos retomar aqui a discussão em torno dos núcleos que se constituem nesse momento da atividade. Quanto a Walker, os significados de X, Y e < estão atrelados, respectivamente, *a quantidade de líquido no tanque da esquerda*, *quantidade de líquido no tanque da direita* e *ter menos líquido que*. Aqui, sempre se faz referência à quantidade de líquido. Para Douglas, X, Y e < estão atrelados a *tanque da esquerda*, *tanque da direita* e *é menor que*. Aqui, se faz referência ao tamanho dos tanques. Dessa maneira, quando Walker diz que Douglas *não pode* falar aquilo, ele está levando em conta que a frase *'esses dois tanques são iguais'* é uma estipulação local; na semana anterior, Douglas já havia produzido significados para os tanques a partir do desenho da atividade, o que faz com que a estipulação local *'esses dois tanques são iguais'* não esteja em jogo em sua fala. O que se delineia, então, é que esses dois alunos, que *pareciam* falar dos mesmos objetos, estão falando, na verdade, para interlocutores completamente distintos. Os alunos se afastam, por assim dizer, em seus modos de produção de significados, não compartilham um espaço comunicativo[21].

A proposição do estagiário deve ser, mais uma vez, levada em conta: ao propor que se produzam significados para as expressões $X + 2b$ e $X - 4b$ a partir do núcleo constituído por Douglas, chega-se a um limite epistemológico, ou seja, a uma impossibilidade de produção de significados para os tanques a partir daquele núcleo. Assim, Douglas se vê frente à necessidade de constituir outros modos de falar sobre aqueles mesmos objetos, de internalizar outros interlocutores.

A partir da atividade dos tanques e de nossa discussão em torno de álgebra, duas questões surgem quase que de imediato: a atividade dos tanques constituiu-se como atividade algébrica naquela sala de aula? Os alunos produziram significados algébricos no interior daquela atividade, ou seja, a atividade envolveu pensamento algébrico? Pensemos junto ao MCS.

De saída, devemos situar o problema a que a fabulação faz referência, que é o das relações entre aritmética e álgebra escolares. Lins e Gimenez (1997) apontam a álgebra escolar como o mais severo momento de seleção da educação matemática escolar, de tal modo que é comum se considerar que a álgebra deva ser adiada no contexto escolar. Na raiz dessa problemática está a ideia de que os conteúdos algébricos e conteúdos aritméticos são identificados, respectivamente, como pensamento algébrico e pensamento aritmético. Levada a cabo, essa ideia traz como consequência o entendimento de que o pensamento algébrico é uma superação do pensamento aritmético.

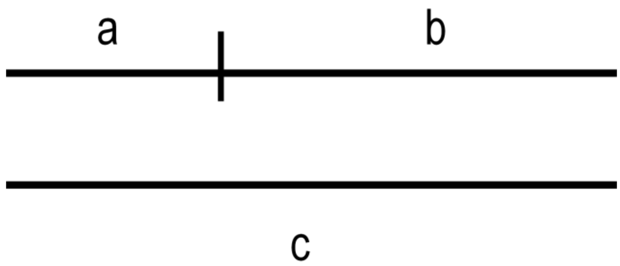
O que Lins e Gimenez procuram mostrar é que essa posição é infundada e que, na verdade, a álgebra deveria ser antecipada, tendo seu desenvolvimento implicado no desenvolvimento da própria aritmética. Nesse sentido, aritmética e álgebra não podem ser consideradas como dois momentos e conteúdos separados na matemática escolar, bem como a primeira não pode ser entendida como um pré-

[21] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, páginas 127 e 128.

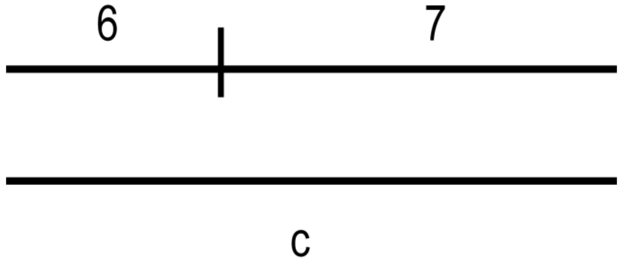
requisito com relação à segunda. Pelo contrário, aritmética e álgebra encontram seu elo no que se chama de relações quantitativas e é a partir dessas relações que seus tratamentos podem ser pensados de modo unificado.

Um exemplo de Lins (1997, 2002) pode nos ajudar aqui. Tomemos dois problemas típicos da aritmética escolar: *Ricardo tem 6 bolinhas de gude e ganha mais 7. Com quantas ele ficou?* e *Ricardo tem 6 bolinhas de gude e ganha mais algumas, ficando com 13. Quantas ele ganhou?* O autor argumenta que, em geral, alunos de nossas escolas não tem dificuldade em resolver o primeiro problema, mas apresentam bastante dificuldade com relação ao segundo. O que Lins procura demarcar com esse exemplo é que, diferente de outras abordagens, que costumam entender a dificuldade na segunda situação como um problema de natureza cognitiva, seu modelo entende que essa dificuldade se explica por uma não-familiaridade das crianças com a lógica das operações[22] todo-parte. O que se desenha, então, é uma distinção cultural entre alunos que estão ou não imersos nessa lógica de operações.

O diagrama abaixo pode ser utilizado para entender as relações todo-parte.

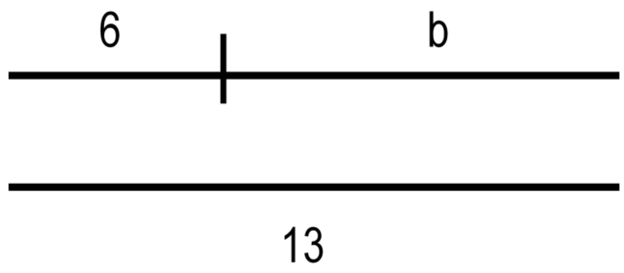


Partindo desse diagrama, é possível produzir significados para as três igualdades seguintes: $a + b = c$; $a = c - b; b = c - a$. É possível, ainda, colocar nossos dois problemas aritméticos sob o ponto de vista desse diagrama, de tal maneira que teríamos, no primeiro deles:



[22] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 132.

E no segundo:



Ora, o que o diagrama de todo-partes acaba por mostrar é que, embora sejam necessárias operações aritméticas distintas para resolver cada um desses problemas, estamos operando sob uma mesma lógica, sobre um mesmo núcleo[23]. Nesse sentido, perde-se a hierarquia entre os dois problemas propostos, que passam a pertencer, por assim dizer, a uma mesma "estrutura". O que é de particular interesse quando se pensa nas relações entre aritmética e álgebra é que ao produzir significado para os problemas a partir do núcleo do todo-parte, o aluno ainda pequeno é levado a lidar com uma relação genérica – se do todo eu tiro uma parte, sobra a outra parte; se eu junto as partes, consigo o todo, o que é de particular interesse para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Por outro lado a produção de significados a partir de diagramas em que constam, ao mesmo tempo, números e letras beneficia a compreensão de que letras representam números, já que a notação algébrica está presente desde muito cedo.

Com base nessa indissociação entre aritmética e álgebra e no MCS, Lins (1997) vai propor alguns objetivos instrucionais na álgebra escolar que estão para além de conteúdos, residindo no domínio de certos modos de produção de significado, em certos modos de pensar.

A essa altura é preciso dizer o que o MCS entende por álgebra: "um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade" (LINS, 1997, p. 137). Dessa maneira, já se coloca a questão de que a caracterização de álgebra não depende de um conteúdo, mas sim de modos de produção de significados para objetos. Enfim, a caracterização de uma determinada atividade em atividade algébrica só pode ser feita sob o ponto de vista do sujeito que produz significados. Para a educação matemática, uma caracterização de álgebra serve

[23] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 131.

para que se possa identificar atividades em que potencialmente estará em jogo o pensamento algébrico, e não para hierarquizar significados em mais corretos – significados matemáticos – ou menos corretos – significados não-matemáticos. A consequência disso é uma avaliação que se pauta no seguinte:

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos (LINS, 1999, p. 85)

Em nosso caso, com relação à aritmética e álgebra, poderíamos dizer: sei que você compartilha certos interlocutores[24] – modos de produção de significados não-matemáticos – e reconheço a legitimidade desses interlocutores, mas tenho o projeto de levá-lo a compartilhar interlocutores novos – outros modos de produção de significados para a aritmética e álgebra – que se somarão aos que você já compartilha. Baseado no MCS, talvez seja essa a grande proposição da educação matemática: a possibilidade de ampliação do escopo de significados que o sujeito entende como legítimos.

Falamos em álgebra e pensamento algébrico, mas ainda não pensamos no que significa falar em pensamento algébrico. No MCS, o pensamento algébrico é um desses novos interlocutores que queremos que nossos alunos entendam como legítimos. Trata-se, então, de um modo de produção de significados que tem três características principais: pensar *aritmeticamente*, isto é, produzir significados somente com relação a números e operações aritméticas; pensar *internamente*, isto é, produzir significados considerando os números e operações de acordo com suas propriedades e não segundo propriedades de qualquer outro objeto; pensar *analiticamente*, isto é, operar com números não conhecidos como se fossem conhecidos. Por fim, com base nessas três características, transformar expressões obtidas no processo de produção de significados para a álgebra (LINS, 1994, 1997).

Desenha-se, assim, um modo de compreensão da educação algébrica por meio do MCS, que comporta dois objetivos: permitir que os alunos produzam significados para a álgebra e permitir que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico. A proposição da atividade dos tanques vai nessa direção.

Voltemos, então, às duas questões que havíamos feito: a atividade dos tanques constituiu-se como atividade algébrica naquela sala de aula? Os alunos

[24] Remeto o leitor ao Livro dos Modelos, página 134 e 135.

produziram significados algébricos no interior daquela atividade, ou seja, a atividade envolveu pensamento algébrico? Para a primeira questão, a resposta parece ser sim, a atividade constituiu-se em uma atividade algébrica, já que para as afirmações produzidas em seu interior – $\mathrm{G} > g$; $\mathrm{G} \neq \mathrm{g}$; $\mathrm{g} + 4\mathrm{b} = \mathrm{G}$; $\mathrm{g} = \mathrm{G} - 4\mathrm{b}$; $\mathrm{g} + 9\mathrm{b} = \mathrm{G} + 5\mathrm{b}$ – podem ser pensadas em termos de números e operações envolvendo igualdade e desigualdade. Porém, não se mobilizou pensamento algébrico nessa atividade pois, a todo momento, os núcleos a partir dos quais os alunos produziram significados para essas expressões envolveu os tanques e o balde. Desse modo, os alunos não pensaram as expressões com base em propriedades das operações aritméticas, mas com base naquilo que se pode fazer com tanques e baldes.

FABULAÇÃO

SOMBRAS, VULCÂNGULOS E PRIMOS DE CONE OU UM ANTIMODELO

Era setembro de 2009. Éramos dois alunos de estágio supervisionado em matemática. Na escola, considerada por muitos uma escolinha rural de Juiz de Fora, tínhamos duas aulas por semana para trabalhar conteúdos de matemática com alunos das séries finais do ensino fundamental. Naquele semestre, estávamos em uma sala de aula do sexto ano do ensino fundamental. Era uma turma de menos de 20 alunos. A pauta de nossas atividades era a geometria.

* * *

Notas no caderno do professor:
18 de setembro de 2009 – Atividade com sólidos geométricos.
Turma dividida em trios

Vamos pedir aos alunos que, munidos dos sólidos de papel, encontrem formas de classificá-los da maneira como quiserem levando em conta, é claro, um (ou mais) atributo(s) dos sólidos. Os alunos nomearão os objetos, uma vez que existe a possibilidade de que não saibam seus nomes "oficiais" – cubo, paralelepípedo, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base triangular, cone, cilindro, esfera, tronco de cone, tronco de pirâmide. Na classificação, estarão atentos à presença de sólidos que apareçam em mais de uma categoria, categorias que estejam incluídas umas nas outras e a possível coerência da categorização. Cada grupo vai, por fim, apresentar rapidamente a classificação que criou. Num texto, explicarão como funciona sua classificação, bem como organizarão suas categorias de tal modo que todas as figuras sejam contempladas.

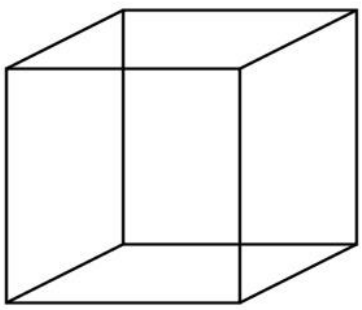
A partir de discussões como essas, exploraremos a comparação de figuras espaciais e planas por meio da planificação. O que as diferencia? No sentido de pensar nessa questão, os alunos investigarão as faces que compõem os sólidos, reconhecendo nelas os polígonos, além de trabalharem com seções horizontais nos sólidos para pensar que a seção demarca figuras também planas. Além disso, seções em sólidos geométricos delimitam dois outros sólidos distintos e uma vertente da atividade será direcionada ao reconhecimento dos sólidos que têm origem nas seções horizontais.

Dessa maneira, ao fim da atividade, os alunos saberão diferenciar figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como saberão a nomenclatura dessas figuras e a classificação dos sólidos em poliedros e corpos redondos.

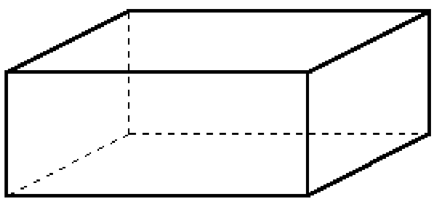
Não, acho que não foi bem assim que aconteceu... Acho que foi...

* * *

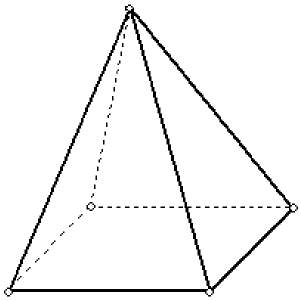
Notas sobre a produção matemática de uma turma de sexto ano do ensino fundamental de quinze alunos divididos em três grupos de cinco alunos cada. Para cada grupo, há oito sólidos geométricos – sete deles feitos de cartolina e uma bola de isopor – disponíveis. São figuras semelhantes às seguintes:



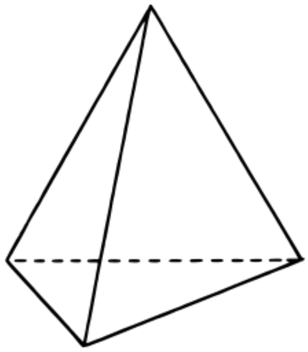
Sólido Geométrico 1 – SG1



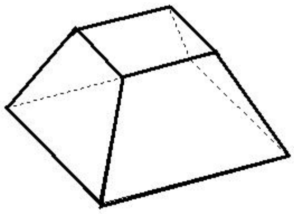
Sólido Geométrico 2 – SG2



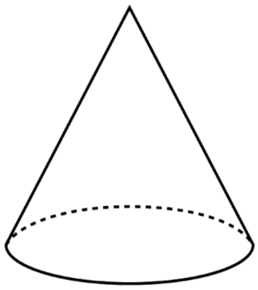
Sólido Geométrico 3 – SG3



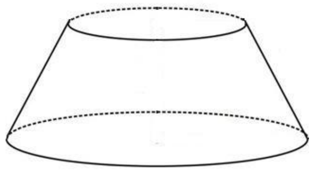
Sólido Geométrico 4 – SG4



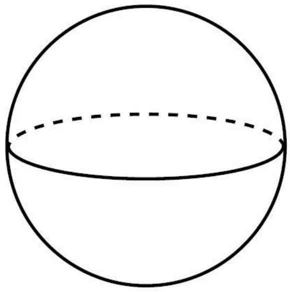
Sólido Geométrico 5 – SG5



Sólido Geométrico 6 – SG6



Sólido Geométrico 7 – SG7



Sólido Geométrico 8 – SG8

Todos os três grupos criam modos de operar com as figuras, dão linguagem ao que fazem por meio de conversas e de um relatório escrito por grupo. Ao fim da atividade, cada um dos grupos é chamado a falar sobre sua produção naquela aula de matemática. O grupo um toma, então, a palavra, na figura de Jhony, que parece nervoso em ter que falar para toda a turma.

- Bom, a gente começou dando nome para as figuras. Essa aqui – o menino aponta para SG5 – a gente chamou de *pirâmide de seis lados* e essa aqui a gente chamou de *círculo de dois lados* – terminou o menino, pegando o SG7 – O resto, a gente *já sabia* o nome: *quadrado*, *retângulo*, *pirâmide*, *pirâmide de base quadrada* e *cone* – os objetos apontados foram o SG1, SG2, SG4, SG3 e SG6.

- Depois disso – o menino continuou falando, com o olhar baixo, atento às figuras que pegava para mostrar aos colegas que o ouviam – a gente começou a ver que o *quadrado* e o *retângulo* se parecem, porque os dois têm seis lados. Só que o retângulo é maior de *largura* e o quadrado tem os *lados* divididos em *lados* iguais – ele segurava e apontava para as figuras SG1 e SG2, ressaltando com os dedos o tamanho da *largura do retângulo* com relação à do *quadrado* – O *retângulo* parece uma caixa de fósforos – a reação da turma se dividiu entre risos e colegas que diziam coisas do tipo ‘parece mesmo’. Jhony sorriu e corou levemente, esperando que o rebuliço de seu comentário diminuísse e ele pudesse prosseguir no que dizia. Quando isso aconteceu, não muito depois, o menino pegou SG3 e SG4 e continuou falando – A *pirâmide* e a *pirâmide de base quadrada* também se parecem. Elas são iguais nas laterais, só que uma tem o fundo quadrado – aponta para SG3 – e a outra tem o fundo triangular – a figura SG4 ganha destaque nas mãos do menino.

- Agora, o *cone* e *círculo de dois lados*: os dois têm o fundo circular. A diferença é que na ponta, um – e pega SG6 – é circular e o outro – pega SG7 – não. O *cone* com o *círculo de dois lados* formam um sorvete! – o menino, então, ‘encaixa’ SG7 em SG6 e a turma cai na gargalhada. Alguém comenta que aquele sorvete estava pela metade, outra pessoa diz que ficaria mais parecido se Jhony tentasse encaixar SG8 em SG6.

- Falta agora a *pirâmide de seis lados*. Ela se parece com a *pirâmide de base quadrada*, só que na *ponta* uma é quadrada – o menino pega a figura SG5 e mostra para a turma – e a outra é pontiaguda – o menino passa o dedo indicador sobre a parte *pontiaguda* de SG3.

Quando Jhony terminou de falar a turma irrompeu em aplausos e o professor falou:

- Muito obrigado, Jhony. Todo mundo entendeu os nomes que o grupo do Jhony deu às figuras, pessoal? – todos silenciaram – Certo. Alguém quer perguntar alguma coisa? Dizer alguma coisa? – mais uma vez não houve resposta – Então, o segundo grupo pode vir apresentar.

Dessa vez, quem se levantou para falar sobre a produção do grupo foi Robert.

- O nosso grupo deu nomes diferentes para as figuras – menino havia levado uma folha com os nomes dos sólidos geométricos e ordenou as formas de cartolina na mesa do professor na mesma ordem em que ele tinha os nomes escritos na folha – Essa aqui é a *bola*, – apontou para SG8 – essa é a *pirâmide*, – apontou para SG3 – esse é o *quadrado*, – apontou para SG1 – esse é o *triângulo*, – apontou para SG4 – esse é o *retângulo*, – apontou para SG2 – esse é o *cone*, – apontou para SG6 – esse é o *quadrangular* – apontou para SG5 – e esse é o *vulcângulo* – apontou para SG7. A gente chamou essa de *bola* porque parece uma bola de futebol. Ela tem em comum com o *cone* e com o *vulcângulo*, porque tem a forma de *círculo* na *base* –

Robert ia falando pausado, passando para frente os objetos que ia comparando em sua fala.

- A gente deu o nome desse aqui de *vulcângulo* – o menino sorriu como se achasse graça do nome e vários integrantes de seu grupo acompanharam o sorriso – porque ele parece um vulcão: vai ficando mais alto e deixa uma abertura grande na *boca*. Esse aqui – prosseguiu – a gente chamou de *quadrangular*. Ele tem essas duas partes parecidas com *quadrados*, só que inclinados. Quando a gente juntou o *quadrangular* com o *quadrado* a gente formou uma casa, – o sorriso voltara a estender-lhe os lábios – mas não estava perfeita. Para a casa ficar perfeita, a gente teve que colocar a *pirâmide*. Essas figuras têm isso em comum: elas formam uma casa – menino mostra como ficam as casas construídas pelo 'encaixe' entre SG1 e SG5 e entre SG1 e SG3 – O *triângulo* e o *retângulo* não têm nada em comum. Eles são de *bases* diferentes.

Robert terminou o que dizia e encarou seus colegas de classe pela primeira vez diretamente. Durante toda sua apresentação, o menino estivera com o olhar baixo, fixo nos sólidos sobre os quais falava. A turma devolveu seu olhar com uma salva de palmas. Mais uma vez o professor tomou a palavra.

- Muito bem, Robert. Todo mundo entendeu, gente? Os nomes que o Robert disse, entendeu porque o grupo dele deu esses nomes para as figuras? – alguns sinalizaram com a cabeça que sim – Certo. Bom, então agora é a vez do grupo do Jason.

É nesse momento que um terceiro menino põe-se de pé ao lado da mesa de onde Robert tinha acabado de sair para se sentar.

- A gente chamou esse aqui – o menino pegou SG4 – de *pirâmide de base triangular* para diferenciar dessa daqui: a *pirâmide de base quadrada* – o menino pegou SG3 e mostrou a parte na qual as figuras tinham formas distintas.

- Depois, a gente *já sabia* o nome desses aqui: *cone*, *cubo* e *esfera* – Jason apontou primeiro para SG6, depois para SG1 e, por último para SG8.

- Depois que a gente fez esses, sobrou esses aqui: – o menino apontou para SG5 e SG7 – o *primo da pirâmide* e o *primo do cone*. A gente chamou o *primo da pirâmide* de *pirâmide sem ponta* – disse ele, mostrando SG5 – e o *primo do cone* de *pirâmide de base redonda*. Depois, a gente observou que a *esfera*, o *cone* e a *pirâmide de base redonda* são em formas *redondas*. A *pirâmide triangular* e a *pirâmide de base* *quadrada* são em forma de *triângulo*; e o *cubo* e a *pirâmide sem ponta* têm a *base quadrada*. A maioria das *bases* da *pirâmide sem ponta* é *retangular*.

A aula terminaria ali. Mas talvez ali terminasse apenas um tempo da aula. Um tempo de sucessão passado-presente-futuro. Um tempo que distinguiria mais tarde duas formas: não-saber-geometria e saber-geometria. Um tempo que engendrara, bastante antes da aula, expectativas de um professor de matemática: *é preciso saber* a nomenclatura dos sólidos geométricos. *É preciso saber* que são classificados em corpos redondos e poliedros. *É preciso saber* que sólidos geométricos se distinguem de polígonos e formas planas. *É preciso saber* é uma forma que instaura uma série de mecanismos de poder: um saber que se instaura, uma aprendizagem centrada na aquisição desse saber, uma aula preparada por um professor, numa certa linguagem. Um mecanismo de antecipação. Um professor que antecipa o que devem saber os alunos, antecipa a matemática que se constitui na sala de aula, pois tudo está garantido a título de finalidade, de necessidade. Ora, afinal para que serve uma aula de geometria senão para que os alunos saibam quais são os sólidos geométricos, seus nomes, classificações, características, propriedades? A Geometria é a teleologia de qualquer geometria de qualquer sala de aula... o sujeito do conhecimento é a teleologia de qualquer aluno de qualquer sala de aula. Mas se é assim, que produções serão essas geometrias ou esses alunos quaisquer? O que sabem Jhony, Robert e Jason e seus grupos se não sabem isso que é a finalidade do saber? O que se inventa numa aula? Que geometria é essa? Como a aula acontece de outro modo? Invenção? Problematizações.

Classificação. [De *classificar* + -*ção*]. S. f. [...] 4. *Lóg.* Esquema que resulta do agrupamento de elementos em classes, e estas em classes mais amplas, coordenadas ou subordinadas. [Cf; *divisão lógica*] 5. *Lóg.* Expressão das relações de extensão entre as classes pelas operações de disjunção e equivalência (FERREIRA, 1999, p. 484).

Classificar. [De *classe* + -*ificar*] 1. Distribuir em classes e/ou grupos, segundo sistema ou método de classificação [...]. 2. Determinar (as categorias em que se divide e subdivide um conjunto). 3. Pôr em ordem, arrumar (documentos, coleções, etc.) (FERREIRA, 1999, p. 484).

Classe. [...]. 1. Numa série ou num conjunto, grupo ou divisão que apresenta características semelhantes; categoria; ordem (FERREIRA, 1999, p. 484).

Entre as classificações em termos de ordenação, de divisão por semelhança, próprias da Geometria, aparecem divisões outras, nomenclaturas outras, classificações outras. Que afetações, problematizações com o material, com a aula, com a atividade proposta circulam? Que matemática se produz? Forças que emanam das formas da Geometria configuram formas-ações de uma geometria singular. Se classificar demanda um método de agrupamento, que métodos se produzem naquela sala de aula?

Um primeiro grupo cria. São sete sólidos: o quadrado, o retângulo, a pirâmide de base quadrada, a pirâmide, a pirâmide de seis lados, o cone e círculo de dois lados. O oitavo sólido não é nomeado. Para pensar em classificações, o grupo vai criando vínculos de seus sólidos com objetos: o retângulo como caixa de fósforo; um sorvete formado pelo cone e pelo círculo de dois lados. Aparece aqui uma classe-sorvete. Mas esse método de criação de vínculos com objetos não é único. Ao lidar com as formas da Geometria, o grupo também compara figuras por quantidade de *lados*[25] e por uma predominância de formas de um mesmo tipo. Assim aparece uma classe formada pelo quadrado e pelo retângulo, porque os dois têm seis *lados*. A diferença é que no quadrado todos os *lados* são iguais, enquanto que no retângulo não. É interessante ver que esse grupo atua com os dois atributos em conjunto. Não basta ter seis *lados* para ser "da classe do quadrado", pois, se assim o fosse, a pirâmide de seis *lados* estaria incluída. É preciso mais, é preciso certa predominância de um tipo de forma: é preciso ser composto com quadrados ou retângulos e não ser um sólido inclinado. Talvez por isso a pirâmide de seis lados seja composta por quadriláteros e não faz parte dessa "classe do quadrado": as partes laterais não são perfeitamente horizontais com relação às bases.

Um segundo grupo cria. Nele, os oito sólidos ganham nomes: quadrado, retângulo, pirâmide, triângulo, quandrangular, cone, vulcângulo e bola. Aqui surge uma questão sobre as classificações do grupo: a *base* é o elemento que ganha, em diversos momentos, um destaque como atributo que agrupa as diferentes classes.

[25] Faço, aqui, a seguinte ressalva: utilizo o termo lado(s) para designar tanto aquilo que os matemáticos chamam de arestas dos sólidos geométricos quanto aquilo que chamam de faces, uma vez que em toda a atividade de geometria a turma utilizou esse mesmo termo para se referir ora a uma coisa, ora a outra.

Talvez por isso Robert diga que *"o triângulo e o retângulo não têm nada em comum. Eles são de bases diferentes"*. Por outro lado, uma classe de sólidos agrupa a bola, o cone e o vulcângulo, que têm em comum uma *base* em forma de *círculo*. Parece haver aqui uma dupla acepção de base: por um lado, é a figura sobre a qual o sólido se apoia – como no caso do cone e do vulcângulo, que se apoiam sobre um círculo. Mas se é assim, sobre o que se apoia a bola? Não é esse um sólido que sempre rola? Base aqui pode estar ligada a uma semelhança com forças do círculo, não com o círculo em si, não com a forma-círculo. O círculo sempre rola. A bola também. E essa questão das forças também parece estar presente na última classe que o grupo delimita: nela estão o quadrangular, o quadrado e a pirâmide. A delimitação pela base está mais uma vez presente: todos são sólidos cujas bases são quadradas. Mas esse não é o problema do grupo: "e*ssas figuras têm isso em comum: elas formam uma casa"*. Uma classe híbrida, uma classe-base-casa.

Um terceiro grupo cria. Nele, o segundo sólido não ganha um nome. Os demais são o cubo, a pirâmide de base quadrada, a pirâmide de base triangular, a pirâmide sem ponta ou primo da pirâmide, o cone, a pirâmide de base redonda ou primo do cone e a esfera. Nesse grupo, algumas semelhanças entre as figuras entram em jogo: é porque são redondas que esfera, cone e pirâmide de base redonda são agrupadas numa mesma classe. É porque existe uma predominância de triângulos que pirâmide de base triangular e pirâmide de base quadrada estão numa mesma classe. Por outro lado, cubo e pirâmide sem ponta estão agrupadas por causa de suas bases, ambas quadradas. Interessante pensar que o segundo sólidos não ganhou nome e que, ao mesmo tempo, talvez ele não tivesse lugar em nenhuma das classes que o grupo criou.

Grupos que criam geometrias, forças que se expressam em classes delimitadas por formações de figuras: *"O cone com o círculo de dois lados formam um sorvete"*. Pouco importa que o cone e o círculo de dois lados guardem semelhanças internas, se a partir do cone é possível construir um círculo de dois lados ou se existem relações entre a área e o volume dessas figuras. Na produção daquela atividade, na problematização dos sólidos, o que importa é que essas figuras formam um sorvete. E a partir de então, o sorvete se torna uma instância problemática: nem todos concordam que aquilo seja um sorvete. Há outras possibilidades de sorvete, de encaixe entre sólidos. Uma classe-sorvete que se forma, dá expressão a uma forma de problematização com o que o material oferece.

Mas outras classes também surgem: classes-casa quando se encaixa o quadrangular no quadrado ou a pirâmide no quadrangular, classe-redonda quando estão agrupados esfera, cone e pirâmide de base redonda.

E antes dessas classes, outras já haviam surgido: os próprios nomes dados aos sólidos não são, também, expressões daquilo que não se sabe de antemão, daquilo que se constitui naquela atividade? E antes dos nomes, os próprios elementos dos sólidos – lados, bases, fundos, redondos – já não se constituíam naquela processualidade? Formas-nome de uma geometria. Geometria sem geo e sem metria em seus significados canônicos. Invenção junto ao canônico, que rompe com o canônico. Invenção. Ruptura.

É interessante notar como os grupos criam certos nomes. O grupo de Jhony, por exemplo, nomeia de quadrado e retângulo dois sólidos – SG1 e SG2 – o que parece ter a ver com a predominância de faces do tipo "quadrada" ou "retangular". A predominância aqui parece ser quantitativa: a figura em que há mais quadrado, o nome que se dá é quadrado; na figura em que predominam retângulos, o nome que se dá é retângulo. Essa predominância quantitativa distingue aquelas duas figuras. Por outro lado, quando o mesmo grupo nomeia uma figura de pirâmide de seis lados e outra de pirâmide de base quadrada, a predominância quantitativa de um certo "tipo" de face dos sólidos deixa de ser constitutivo dos nomes desses sólidos e aspectos qualitativos como o tipo de base ou a quantidade total de lados do sólidos passam a ser determinantes.

O que salientamos aqui é que o movimento de invenção da nomenclatura e das classificações que se baseiam na composição de figuras não devem ser entendidos como um movimento cognitivo espontâneo. Pelo contrário, o dado comparece como instância problemática, pois já não dá mais conta do que acontece na atividade, forçando o pensamento para fora de seus domínios. Pensemos junto ao exemplo da predominância quantitativa de que falávamos há pouco. Para dar nome aos sólidos SG1 e SG2, o grupo de Jhony levou em conta objetos que entendiam como dados – como é o caso dos quadrados e dos retângulos que predominam em SG1 e SG2 –, muito embora esses objetos sejam modificados no próprio movimento da atividade, já que o quadrado-de-antes[26] – o quadrado que é

[26] Aqui cabe mais uma nota com relação à linguagem que estamos utilizando: alguns grupos utilizaram, sem distinção, a palavra quadrado tanto para designar aquilo que os matemáticos chamam de quadrado quanto para designar o que os matemáticos chamam de cubo. Nesse sentido o

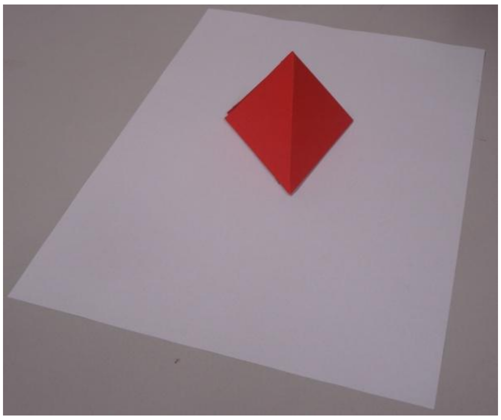
componente das faces – era uma figura plana e esse novo-quadrado – SG1 – é uma composição de vários dos quadrados-de-antes. Dessa maneira, o que queremos chamar a atenção é que a atividade vai se constituindo em um movimento de problematização e abertura das formas já reconhecidas, que vão, então, tornando-se outras... A nomenclatura como problema. Diz o dicionário:

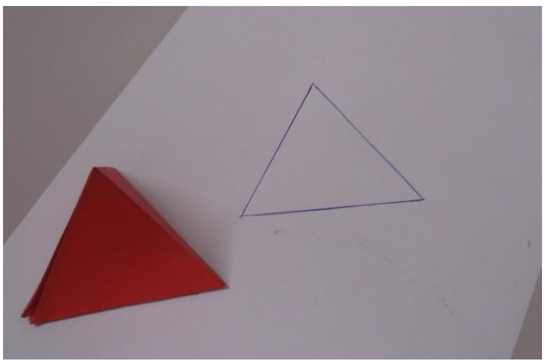
Nome. [...] 11. Substantivo; [...] 12. Classe de palavras que reúnem o substantivo e o adjetivo, caracterizados como estáticos, por oposição ao verbo (FERREIRA, 1999, p. 1413).

* * *

A partir da produção dos grupos com relação aos nomes dos sólidos geométricos e relações que se podia estabelecer entre eles, uma segunda atividade foi pensada para aquela sala de aula: o que acontece quando fazemos 'cortes' nos sólidos retirando deles alguma ou algumas de suas faces? Talvez seja importante saber que aqueles alunos *não podiam* recortar *de fato* os sólidos que lhes foram entregues. Além dos sólidos, eles tinham como material de apoio folhas de papel em branco para que pudessem desenhar as faces que podiam ser 'cortadas' das figuras de cartolina. O que aconteceria diante disso?

Uma estratégia aparece: meninos e meninas emparelham as folhas em branco com as faces dos sólidos e começam a desenhar a forma decalcada do sólido original. Difícil somente escrever, talvez algumas imagens ajudem. Às vezes é assim em geometria: as formas vistas, percebidas, coloridas não se transmutam perfeitamente para o preto das letrinhas no papel!





quadrado-de-antes está para o quadrado dos matemáticos bem como o novo-quadrado está para o cubo dos matemáticos.

E assim o trabalho daquela turma seguiu.

- Como vocês estão fazendo para desenhar essas formas? – perguntou o professor ao pessoal de um dos grupos.

- Ah, professor, a gente está fazendo igual a todo mundo! A gente pega a figura e encosta a folha *nos lados* dela. Quer ver? – a menina pega SG1 e faz o que havia dito – Agora eu pego o lápis e faço o *contorno*. Fica meio ruim, mas depois eu pego a régua e faço ficar direitinho – a menina ia fazendo enquanto o restante do grupo a observava junto com o professor.

- Olha, então faz o seguinte: toda vez que vocês desenharem na folha em branco a forma, escreve nela de qual figura você tirou. Como é o nome dessa figura que ela pegou, gente? – o professor dirigiu-se ao grupo todo.

- É o *quadrado*.

- Ok, então agora que já está desenhado a face do quadrado na folha, escrevam que essa figura foi 'cortada' do quadrado. Está bem?

O professor percorreu o restante da sala e viu que aquele procedimento estava sendo utilizado também em outros grupos. Chamou atenção da turma toda, então, com relação à orientação de escrever nos desenhos que faziam o nome do sólido geométrico de origem. Escreveu no quadro:

'Recortar' as faces dos sólidos. No pedaço de papel que vocês 'recortarem', escrevam a qual sólido o recorte pertence.

Com isso, os grupos começaram a desenhar nas folhas de papel em branco e recortar todas as faces de todos os sólidos.

Figura 1 na qual se lê "cone"

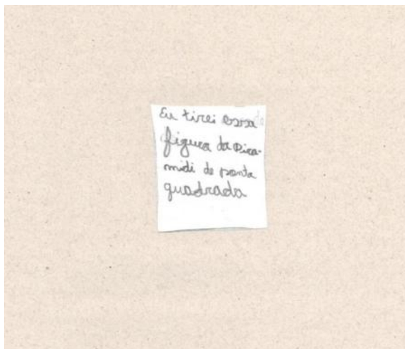


Figura 2 na qual se lê "Eu tirei essa figura da piramidi (sic) de ponta quadrada"

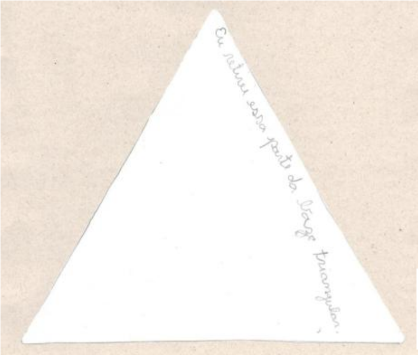


Figura 3 na qual se lê "Eu retirei essa parte da baze (sic) triangular"

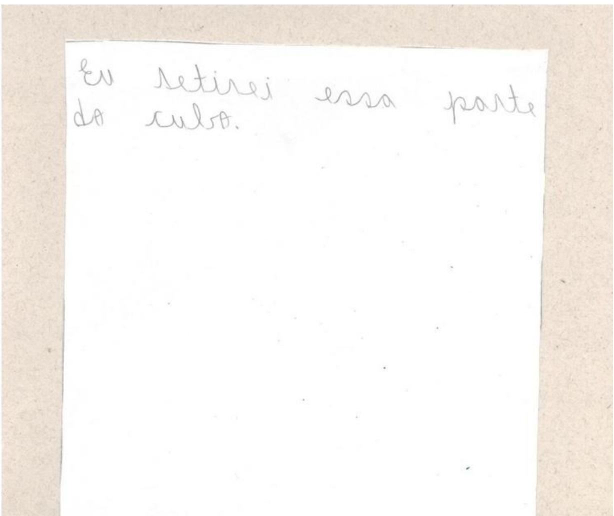


Figura 4 na qual se lê "Eu retirei essa parte do cubo"

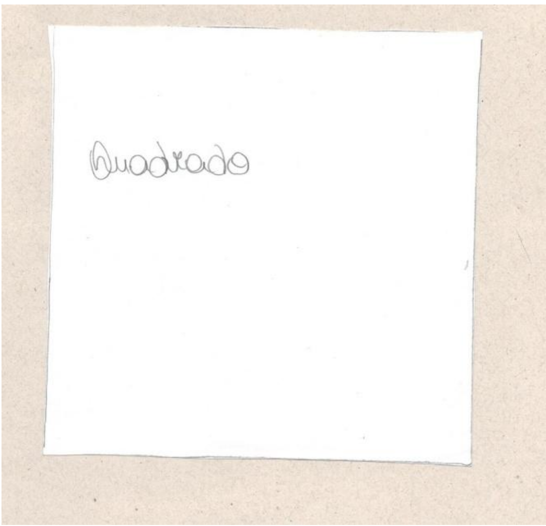


Figura 5 na qual se lê "quadrado"

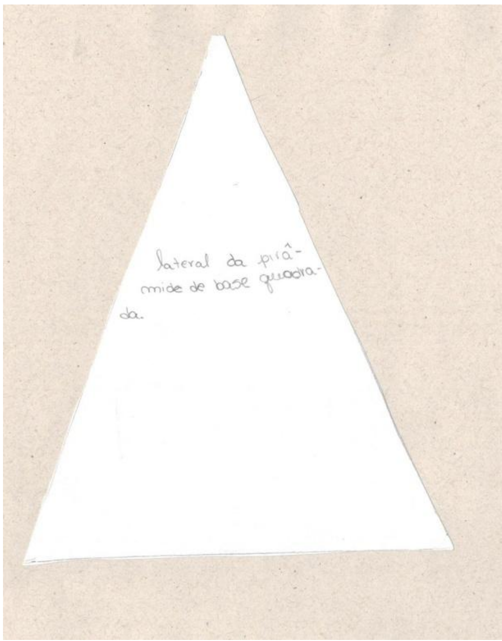


Figura 6 na qual se lê "lateral da pirâmide de base quadrada"

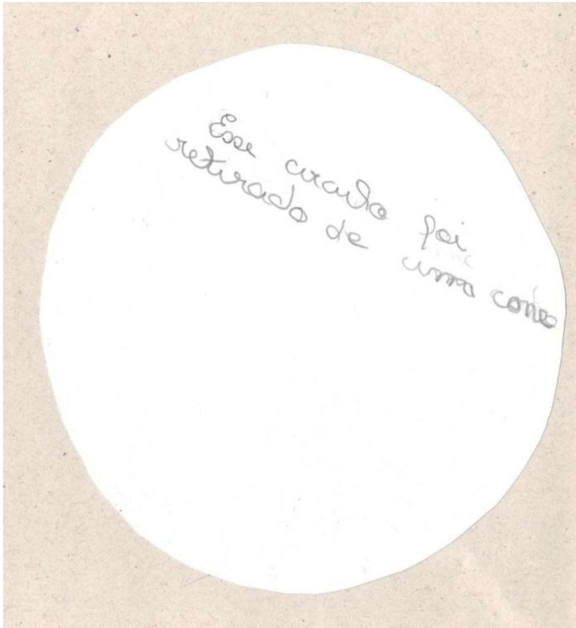


Figura 7 na qual se lê "este círculo foi retirado de um cone"

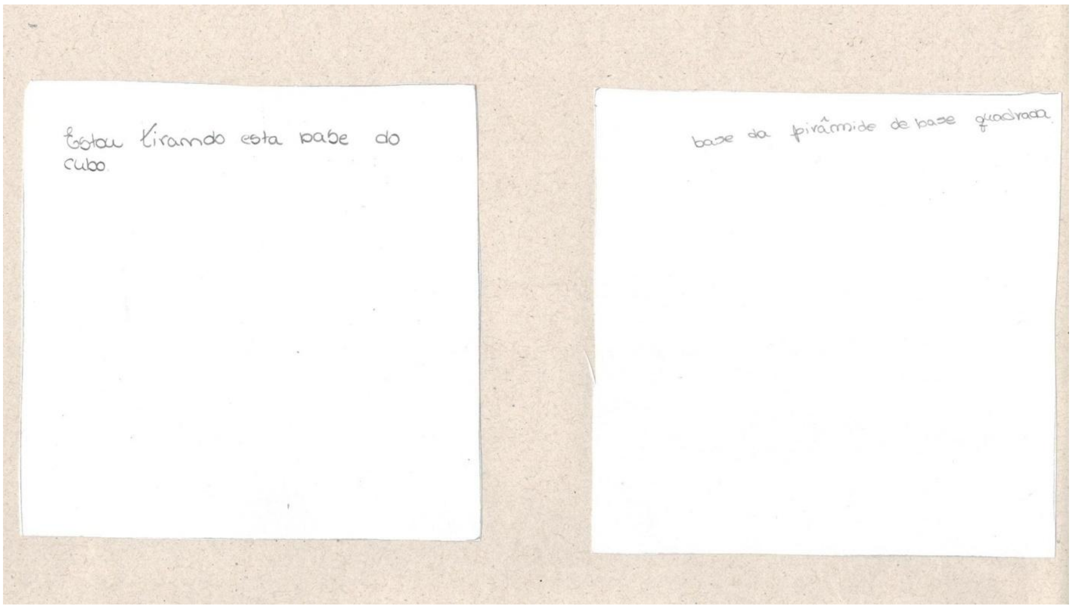


Figura 8 e 9. Na figura 8 – da esquerda – lê-se "Estou tirando esta base do cubo" e na figura 9 – da direita – lê-se "base da pirâmide de base quadrada"

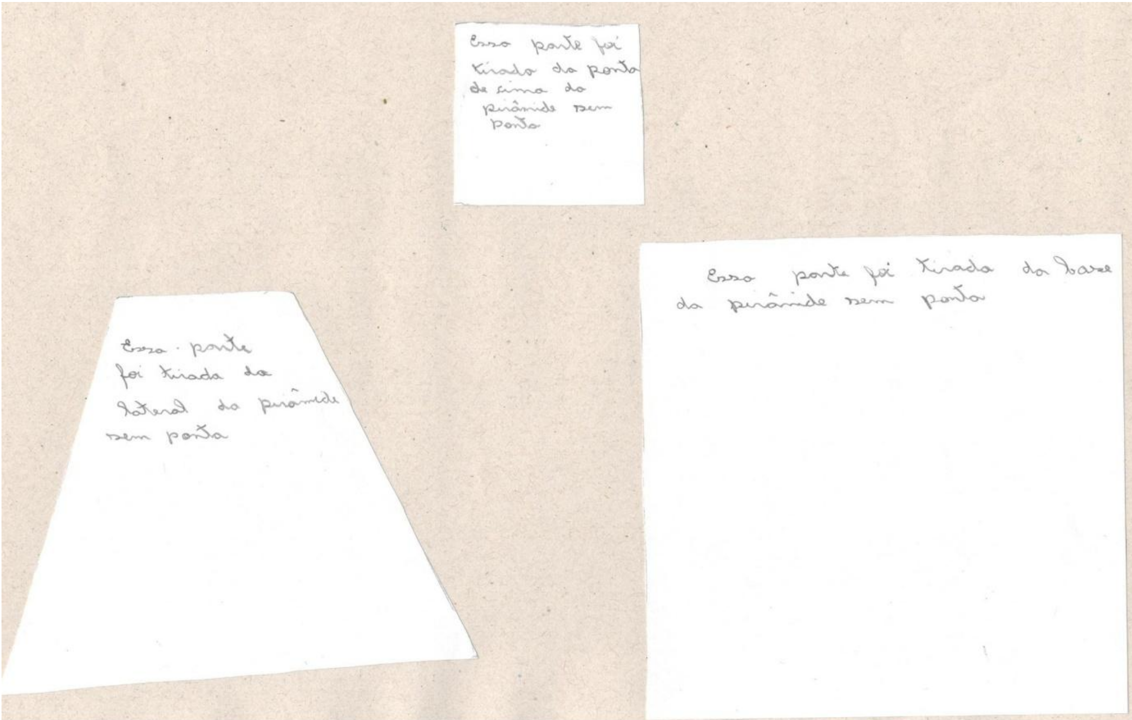


Figura 10, 11 e 12. Na figura 10 – de cima – lê-se "Essa parte foi tirada da ponta de cima da pirâmide sem ponta", na figura 11 – da esquerda – lê-se "Essa parte foi tirada da lateral da pirâmide sem ponta" e na figura 12 – da direita – lê-se "Essa parte foi tirada da base da pirâmide sem ponta"

Todas as faces? Todos os sólidos?

- Professor, não dá para fazer isso com todas as figuras! – exclamou um dos alunos.

- Não? Por quê?

- Ah, eu peguei esse aqui – o menino mostrou SG6 – e só consigo tirar a base dele. O resto não dá porque a folha fica *curvada* – ele fez o movimento que suas palavras buscavam descrever: o menino conseguia, sem problema, decalcar a forma que aparecia na base de SG6. Porém, quando tentava apoiar a folha de papel sobre a lateral do sólido, o procedimento só dava resultado quando a folha se curvava.

- É verdade, a folha fica *curvada*. E aí? Você acha que isso acontece com mais algum dos sólidos?

- Ah, ainda não testei, mas se a folha ficar *curvada* não tem como desenhar, eu acho – o menino respondeu, olhando em torno.

- Pessoal – o professor falou alto para que toda a turma ouvisse – surgiu uma questão aqui nesse grupo que a gente podia compartilhar com todo mundo.

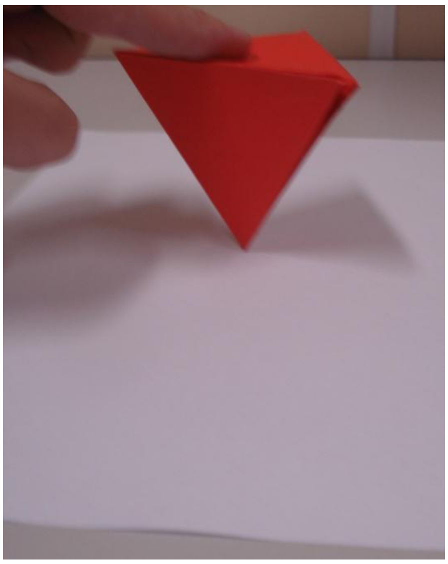
O professor pediu que seu aluno contasse à turma o que o estava incomodando.

- Gente, todo mundo entendeu qual é o problema aqui?
- A gente também estava pensando nisso – uma menina de outro grupo observou.
- Então, vamos tentar pensar um pouco nisso também. Será que é possível recortar as faces de todos esses sólidos que a gente tem?
- Não dá, professor, já te mostrei que com a pirâmide de base redonda não dá certo.
- E por que será que não dá certo? Será que a gente encontra outros sólidos em que isso não dá certo? Cada grupo pode ir pensando nisso também, ok?

O professor coloca no quadro, então, as seguintes perguntas: *É possível 'recortar' as faces de todos os sólidos como vínhamos fazendo até agora? Por quê?*

E a aula continuava: a turma recortava as faces que tinha conseguido tirar dos sólidos, escrevia um relatório por grupo com suas produções, montava tabelas que separavam os sólidos nos quais se podia decalcar as faces a partir da sobreposição da folha em branco. Até que...

- O que está fazendo? – o professor perguntou com curiosidade ao ver que uma das meninas apoiava a ponta de SG3 na folha de papel em branco da seguinte maneira:



- Ah, estou apoiando *a ponta* da *pirâmide* na folha para ver o que sai dela.
- E o que sai? – o professor continuou perguntando.
- Ah, fica uma pontinha só na folha.
- E o que você acha disso?

- Fica diferente do resto. Até agora tinha saído sempre uma *figura*. Agora só ficou a *pontinha*.
- E qual será que é o tamanho da pontinha? – o professor manteve o interesse.
- É muito pequenininha!
- Escreve isso no relatório do grupo, está bem? – o professor pediu. Dessa vez sem dizer nada, ele foi até o quadro e acrescentou uma terceira pergunta àquelas duas que já figuravam lá: *que figura sai se apoiarmos a ponta de uma pirâmide no papel?* Aos poucos os meninos percebiam a presença de um novo problema no quadro. Aos poucos, a aula ia chegando ao fim.

* * *

Notas no caderno do professor.

Li os três relatórios que os grupos haviam entregado depois daquela aula em que desenharam as faces dos sólidos na folha branca. A leitura dos relatórios indica, dá pistas sobre o modo de produção e problematização a que cada um dos grupos havia chegado. É interessante notar que, embora os grupos não fossem exatamente os mesmos do dia em que os sólidos ganharam nomes próprios na turma, muitos meninos continuaram utilizando, nessa segunda atividade, a nomenclatura que haviam criado em seu grupo de origem. Um grande problema surgiu quando os alunos tentaram conversar sobre 'sólidos iguais' que tinham nomes diferentes para cada um dos membros do grupo.

Dois desses grupos acabaram utilizando nomes que já haviam sido produzidos na atividade anterior, embora eu não saiba se houve alguma negociação sobre o nome que constou no relatório.

No terceiro grupo, os alunos me chamaram: queriam saber que nomes deveriam colocar nos sólidos geométricos. Parecem ter sentido a necessidade de unificar a nomenclatura no âmbito do grupo. A figura SG5, por exemplo, era chamada por um dos alunos de pirâmide sem ponta e por outro de quadrangular. Sugeri a eles um terceiro nome: tronco de pirâmide, que é o nome, digamos assim, oficial, matemático para o sólido geométrico.

* * *

Volta aqui a nomenclatura como problema. Se retomarmos o significado dicionarizado de *nome*, veremos que, na linguagem, o substantivo e o adjetivo são considerados classes de palavras estáticas.

Nome estático? Subversão na e da linguagem: substantivos no vir a ser, tornam-se verbo, ação. Destituem-se de certos valores, sentidos e tornam-se outra coisa. Tronco de cone, primo de cone, pirâmide de base redonda, círculo de dois lados, vulcângulo. Tudo isso é nome para o *mesmo* objeto? É tudo *equivalente*? Não trará o vulcângulo marcas que pouco ou nada têm a ver com o primo do cone ou tronco de cone? O que expressa o vulcângulo que o primo de cone não pode expressar ou vice-versa? Vulcângulo vem de vulcão. Tem a ver com calor, lava, formação rochosa, força de natureza intempestiva. Primo de cone tem a ver com familiaridade, relação próxima e não-hierárquica com o cone, brincadeira infantil. Tronco de cone tem a ver com seções horizontais feitas paralelas à base de um cone dado. Uma linguagem que se constitui para expressar ideias de uma geometria. Não a linguagem do aluno que enuncia, que fala.

> Não tomamos a enunciação como a manifestação de um sujeito dado, ou seja, o dizer não resulta de um conjunto de faculdades, de processos fixos, regulados por princípios gerais, como por exemplo, nos fala a psicologia. O “eu falo”, sujeito da enunciação e origem da linguagem, perde, para nós, seu lugar central. (TEDESCO, 2006, p. 358).

Ao mesmo tempo, a linguagem não designa a identidade de objetos. Não há tronco de cone expresso no vulcângulo, ou no primo do cone ou no círculo de dois lados. A linguagem cria esses objetos ao nomeá-los, cria a rede discursa que os atravessa e os constitui. É nesse sentido que a linguagem é uma produção em duplo sentido (TEDESCO, 2006). Por um lado, o professor conhece a nomenclatura e as propriedades matemáticas dos sólidos geométricos que seus alunos têm em mãos e a linguagem expressa essas nomenclaturas e propriedades, tendo por característica principal a repetição dessas propriedades; por outro, os grupos criam nomenclaturas que quebram com os esquemas de reconhecimento que o professor tinha para aqueles objetos, colocando esses esquemas em movimento.

A linguagem dos grupos, por seu curso, uma vez criada, tende a imprimir nos sólidos uma mesma natureza, num processo que repetição; mas, por outro lado, são diversos os momentos em que, conversando sobre os sólidos, alunos de diferentes grupos precisam entender o que o outro diz. Mais uma vez a linguagem comparece rachando as nomenclaturas constituídas, forçando o pensamento a delinear novos problemas.

Em nossa atividade, vimos dois problemas desse tipo acontecerem. Um em que os alunos resolveram a questão internamente e outro grupo que demandou do professor uma fala. Nesse processo de constituição e problematização dos fluxos cognitivos é que a invenção pode acontecer, que a aprendizagem ganha contornos imprecisos e não garantidos por uma finalidade dada. Aprender deixa de ser somente um movimento de construção de caminhos já trilhados por outros sujeitos ou pela cultura na qual nos inserimos. Aprendizagem ganha novos ares, ares de invenção. Mas como é isso, de que invenção falamos? Como pensar a aprendizagem a partir da invenção?

> Perspectivada pela invenção, a aprendizagem surge como processo de invenção de problemas. Aprender é, então, ser capaz de problematizar a partir do contato com uma matéria fluida, portadora de diferença e que não se confunde com o mundo dos objetos e das formas. A noção de aprendizagem inventiva inclui então a invenção de problemas e revela-se também como invenção de mundo (KASTRUP, 2005, p. 1277).

Problematizar. Como alunos problematizam a Geometria? Como entram em contato com o fluido da materialidade dos sólidos geométricos? Da proposição "*o que acontece quando fazemos 'cortes' nos sólidos retirando deles alguma ou algumas de suas faces?"* cria-se um método de investigação, um procedimento: encostar a folha na face do sólido em questão e desenhar o contorno da figura que vai aparecendo. O método se repete: repete-se para SG1, repete-se para SG2, repete-se para SG3, repete-se para SG4, repete-se para SG5. Nessa repetição, o que ainda há pouco era um método em invenção parece que vai, aos poucos, tornando-se um modelo de pensamento, de linguagem, de gestos, de ações. Um modelo em que vão convergindo as faculdades intelectivas em um reconhecimento de objetos, ações, linguagens, pensamentos, gestos. Um modelo de recognição.

> A recognição se define pelo exercício concordante de todas as faculdades sobre um objeto suposto como sendo o mesmo: é o mesmo objeto que pode ser tocado, lembrado, imaginado, concebido (DELEUZE, 2006a, p. 194).

Ora, uma vez construído o método do decalque, espera-se que exista uma conservação necessária de sua solução para o problema, espera-se que esse método de pensar acabe com a instância problemática e bifurcante do problema, espera-se a aquisição de um saber. Saber o que acontece quando uma face é retirada de um sólido geométrico. Os sólidos se mantêm, a Geometria se mantém, o método de resolução do problema se mantém e o problema está, enfim, terminado, solucionado. Pode-se concluir, pois, que houve aprendizagem. Fim da aula. (?) Até que... “*Professor, não dá para fazer isso com todas as figuras!*”

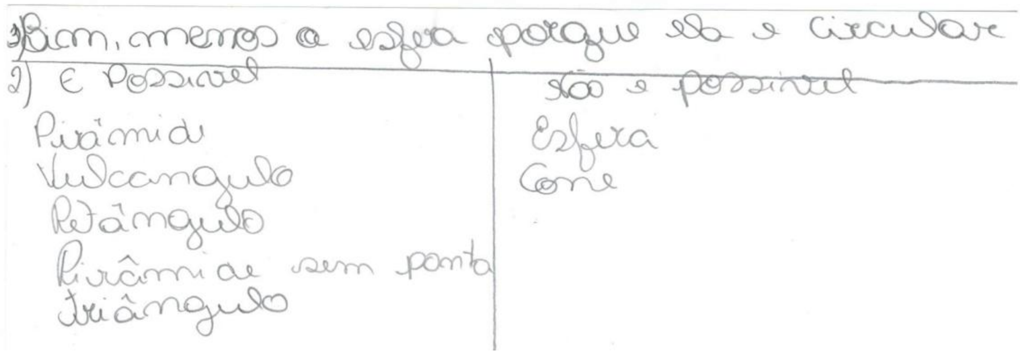
Problema: aquilo que força, coage, instaura a gênese do pensar no pensamento (DELEUZE, 2006a). Ora, a constituição de problemas esbarra naquilo que para Deleuze constitui o próprio ato de pensar: só pensamos em contato com um problema que nos violenta. O pensar não é natural ou espontâneo, ele só acontece diante de uma violência produzida por um problema. O pensamento como acontecimento singular. Aprendizagem como algo obscuro, imprevisível. Um fluxo de recognição que se encontra rachado em suas certezas: se antes havia uma concordância das faculdades sobre o método do decalque das figuras, o que instaura o pensar no pensamento é um movimento de divergência em que as faculdades não tendem a algo já conhecido. A curvatura de alguns sólidos surge, pois, como essa instância problemática. Eis a potência da criação, da invenção. Uma estética da aprendizagem, uma aprendizagem inventiva.

É preciso, pois, colocar o problema da aprendizagem não sob o ponto de vista da aquisição da nomenclatura dos sólidos geométricos, não sob o ponto de vista de uma antecipação da aula pelo professor, mas sob um ponto de vista uma estética, de uma arte.

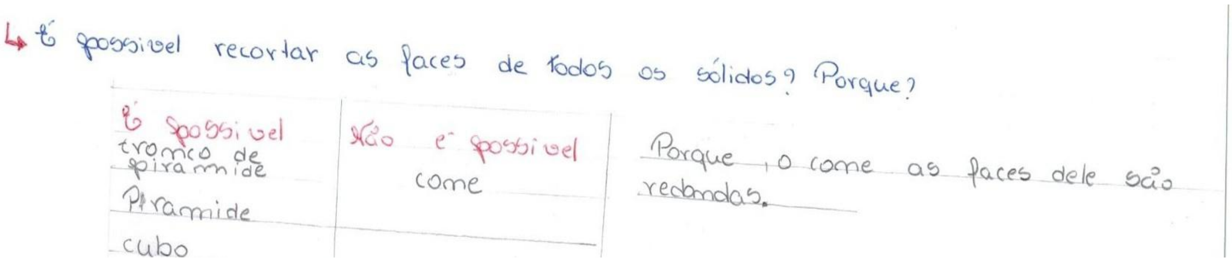
> Colocar o problema da aprendizagem do ponto de vista da arte é colocá-lo do ponto de vista da invenção. A arte surge como um modo de exposição do problema do aprender. Esta maneira de penetrar no campo da aprendizagem, pela precisa colocação do problema, significa aplicá-la ao próprio objeto de nossa investigação, ou seja, entender que toda aprendizagem começa com a invenção de problemas (KASTRUP, 2001, p. 19).

É preciso que se diga que colocar o problema da aprendizagem sob o ponto de vista da arte não significa que a arte seja um saber de referência, como uma finalidade ou como parâmetro de distinção entre o erro e o acerto. Os grupos não produzem uma obra de arte ao nomearem sólidos geométricos ou a problematizarem seus próprios métodos de pensamento e resolução de problemas. Ter a arte como intercessora significa colocar-se por sob os processos de solução de problemas, acessando um plano de invenção de problemas, de problematização de formas já constituídas. Se pensarmos nossa atividade novamente, podemos falar numa experimentação constante com uma linguagem, com os sólidos geométricos, com o método do decalque de faces.

É interessante notar como os meninos tentaram dar conta, de alguma maneira, dos dois problemas que surgiram no meio de sua investigação. Alguns escritos dos relatórios dão o que pensar.


1) Sim, menos a esfera porque ela é circular

2) É possível	Não é possível
Pirâmide	Esfera
Vulcangulo	Cone
Retângulo	
Pirâmide sem ponta	
triângulo	


4 É possível recortar as faces de todos os sólidos? Porque?

É possível	Não é possível	
tronco de pirâmide	come	Porque, o come as faces dele são redondas.
Piramide		
cubo		

2) Não pois um dos solido é esferico e pouca parte dele é encostada na folha.

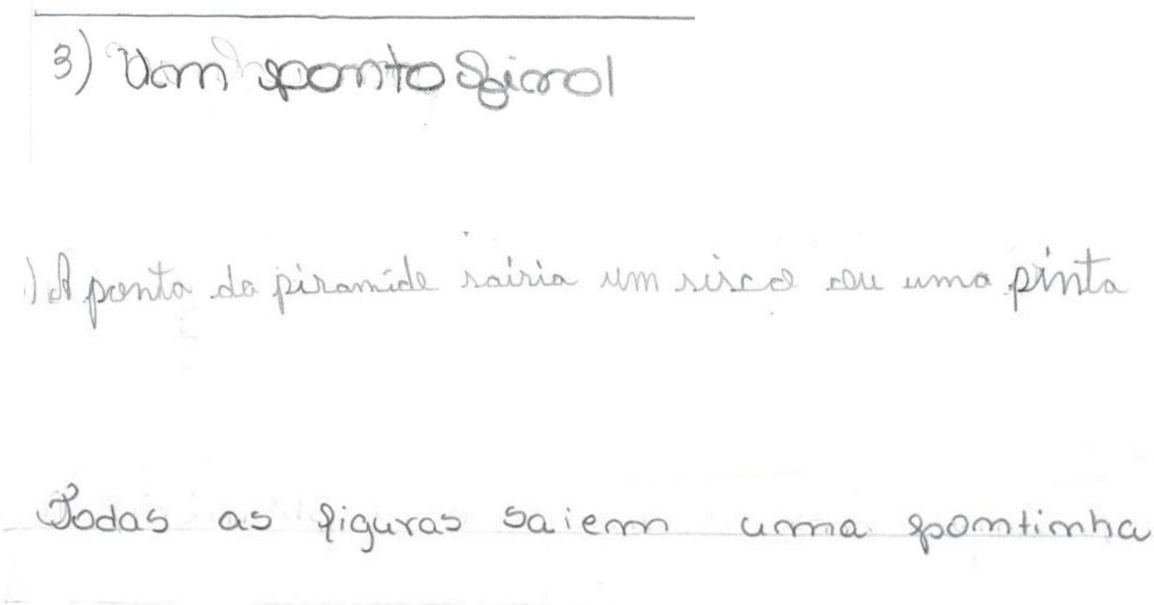
É possível	Não é possível
parallelepipido	esfera
Piramede de base quadrada	cone
Piramede de base triangular	vulcangolo

Sobre o método de decalque das faces dos sólidos na folha, os vários grupos montaram tabelas nas quais separaram as formas entre aquelas em que se é possível o decalque e aquelas nas quais o decalque não é possível. O que se vai notando é que a turma, diante do material e da folha de papel vai criando um método para pensar a situação inicialmente proposta pelo professor. Implicados com o material, exploram diversos decalques possíveis de serem feitos, repetindo aquele modo de proceder até que ele se encontre diante de um limite: não se consegue fazer o decalque de formas que sejam *esféricas*, *circulares* ou *redondas*. Limite aqui não significa necessariamente fechamento, abandono desse modo de pensar em favor de outros. Ao lidar com o limite de um modo de pensar que já se reconhece, as faculdades de entendimento já não andam juntas, já não convergem para um objeto dado. Já não funciona, pois, o modelo da recognição. Uso discordante das faculdades de entendimento: invenção de si e do mundo. Aprendizagem. Tempo.

A questão do apoio de uma das pontas da pirâmide sobre o papel provoca pensarmos a própria dinâmica da aula como uma proposição cujas invenções são inantecipáveis. Inclusive para o professor que prepara a aula. O professor prepara a aula? Ora, mas se a aula comporta o inantecipável, como se prever o que, por definição, é imprevisível? Então o professor não prepara a aula, mas se prepara

para a aula, para o encontro, para o inantecipável, para criar uma geometria singular que prolifere problemas num exercício de pensamento matemático (?) (!).

Na Geometria Euclidiana, existem três noções fundamentais, tão fundamentais que não têm definição. São noções intuitivas: o ponto, a reta e o plano ou, mais genericamente, o ponto, a linha e a superfície. Ora, ao se perguntar sobre o apoio de uma ponta da pirâmide sobre o papel, um dos alunos se vê frente ao problema daquilo que não se pode definir, daquilo cuja linguagem só recobre parcialmente: um ponto final, um cisco, uma pinta, uma pontinha. O ponto geométrico é uma completa abstração. O ponto final, o cisco, a pinta e a pontinha são problemas da concretude da aula, que surgem na medida em que a experiência de problematização do e com o material segue seu curso.


3) Um ponto final

) A ponta da pirâmide sairia um risco ou uma pinta

Todas as figuras saiem uma pontinha

* * *

Houve, ainda, uma terceira atividade envolvendo geometria. Depois de explorar características e relações entre as figuras espaciais e as faces que a compunham, o professor chegou à sala de aula naquele dia propondo a seguinte situação.

- Pessoal, hoje vamos continuar explorando os sólidos geométricos que tínhamos nas últimas aulas. A gente deu início, na última aula, a uma atividade em que era preciso destacar na folha em branco as figuras que sobravam quando a gente recortava as faces dos sólidos, não era isso? – algumas cabeças faziam um sinal de concordância – Muito bem. Hoje, a proposta é que a gente continue usando a folha de papel em branco, mas com um outro propósito. Hoje, a gente vai pegar os sólidos e vai imaginar que a folha em branco pode atravessar os sólidos, como se a folha pudesse passar por dentro dos sólidos até sair do outro lado. Tentem explorar e ver o que acontece quando vocês fazem isso. Não esqueçam de uma coisa importante: todos os grupos devem fazer um relatório mais ou menos como vocês vinham fazendo nas últimas aulas: coloquem o nome de todos os participantes e vão fazendo as anotações de vocês: o que acontece? A que conclusões vocês vão chegando? Podem desenhar no relatório se precisarem, podem fazer tabela igual fizeram na aula passada se for necessário, mas vão registrando o que está acontecendo durante a atividade, certo?

E iniciou-se a exploração dos sólidos com esse novo procedimento: imaginar que os sólidos geométricos podem ser interceptados, cortados pelas folhas em branco.

- Professor, olha só – uma aluna chamou até um dos grupos em certa altura – Vê se a gente está fazendo *certo*: peguei o quadrado – tinha SG1 em sua mão –, passei a folha bem no meio dele. Sobraram duas figuras: uma embaixo e outra em cima. As duas figuras tem forma de retângulo – SG2 – e são iguaizinhas. Está certo?

- Isso, é por aí mesmo – o professor disse – O que acontece se você fizer outros cortes em lugares diferentes? E uma outra pergunta: eu passei a folha no meio do sólido e dividi ele em dois. Que desenho fica na folha em branco?

- Hum... – o grupo observou as formas na mão da menina, hesitante.

- Vai pensando o que acontece. Anota isso que você fez no relatório do grupo – disse à menina que o havia chamado.

Como fizera em momentos anteriores, o professor foi até o quadro e escrever o problema daquele grupo para os outros. *Pensar na folha como se ela atravessasse os sólidos. Que figuras ficam desenhadas nas folhas? Que sólidos sobram desse corte?*

- Professor, mas como é que a gente escreve isso? – alguém perguntou quase ao fim da aula – Esses cortes que a gente faz tem *nome*? Ou chamam só corte mesmo?

- Esses cortes têm um nome na matemática sim: chamam seções. Só que na matemática a gente não faz seções com folhas de papel. As seções que a gente está fazendo não são com a folha na horizontal? Por isso o nome dela é seção horizontal – o professor falou alto, para toda a turma ouvir – Agora, quando vocês forem escrever, podem fazer um desenho e puxar uma setinha explicando o que estão fazendo.

- Mas a gente não está conseguindo explicar que quando a gente corta o vulcângulo sobram dois vulcângulos menores.

- Escreve isso que você acabou de dizer – o professor pegou o giz e escreveu no quadro: *se nós cortarmos um(a) .... sobra um(a) ....* – Daí você pode ir completando conforme for o caso. Está bem? Escreve isso e vai completando com os desenhos que você precisar.

O grupo continuou seu trabalho. Mais algum tempo se passou até que outra questão surgiu.

- Professor! Olha só! – menino tinha nas mãos SG7 e uma folha de papel – Lembra que na aula passada a gente não conseguia encostar o papel no *tronco de cone* para poder fazer o desenho? – o professor assentiu e o menino continuou animado – Então, consegui um jeito de fazer isso.

- É? E como você fez?

- Olha, eu coloco o *tronco de cone* em cima da mesa e coloco a folha um pouco na frente dele. Daí eu olho bem de frente para ver *através* da folha – menino abaixou-se na cadeira até quase encostar o queixo sobre a mesa, olhando a folha em branco – Está vendo? Fica uma sombra da figura lá de trás. Essa figura aqui – e o menino vai, aos poucos, tentando desenhar a forma da sombra que a folha deixava transparecer.

- Muito bom isso! Então se eu quisesse fazer a parte lateral toda do tronco de cone, era isso que eu ia precisar fazer?

- É! A folha podia até ficar *encurvada*, é só ir *completando* até acabar o *tronco* e no final deixar a folha *reta* de novo.

- Muito bem. E essa figura que você fez aí? – o professor apontou para o que o garoto acabara de fazer para lhe mostrar – O que ela é?

- É a figura que fica na folha que a gente faz um corte com a folha de cima para baixo ou de baixo para cima – o menino fez um gesto com a folha na vertical.

- E dá certo também quando a gente faz cortes de um lado para o outro? – o professor pegou a folha e mostrou-a fazendo um movimento na horizontal.

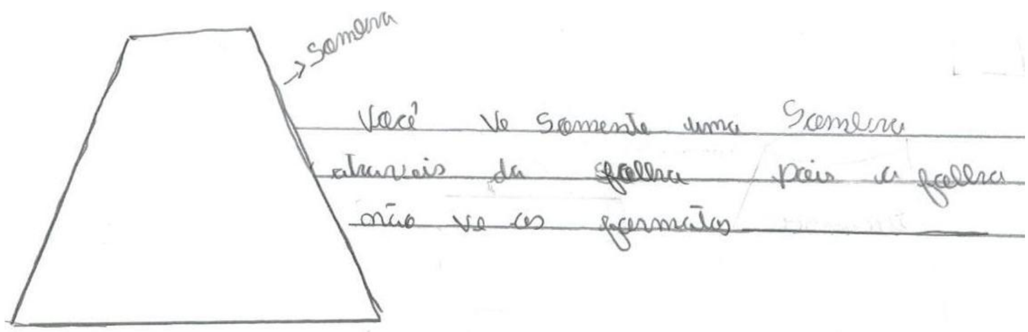
- Ah, dá certo sim!

O professor sorriu e deixou o grupo continuar seu trabalho. Alguém já havia chamado enquanto ele ouvia a explicação do menino.

- Professor, a gente observou aqui que quando a gente faz os cortes no *paralelepípedo* – e apontou para SG2 – com a folha na *horizontal* só sobra *retângulo* na folha branca e os *retângulos* são sempre iguais. Mas, quando a gente faz os cortes na *pirâmide de base quadrada* – e apontou para SG3 – sobram sempre *quadrados* na folha branca, mas o quadrado vai ficando menor se a gente vai de baixo para cima.

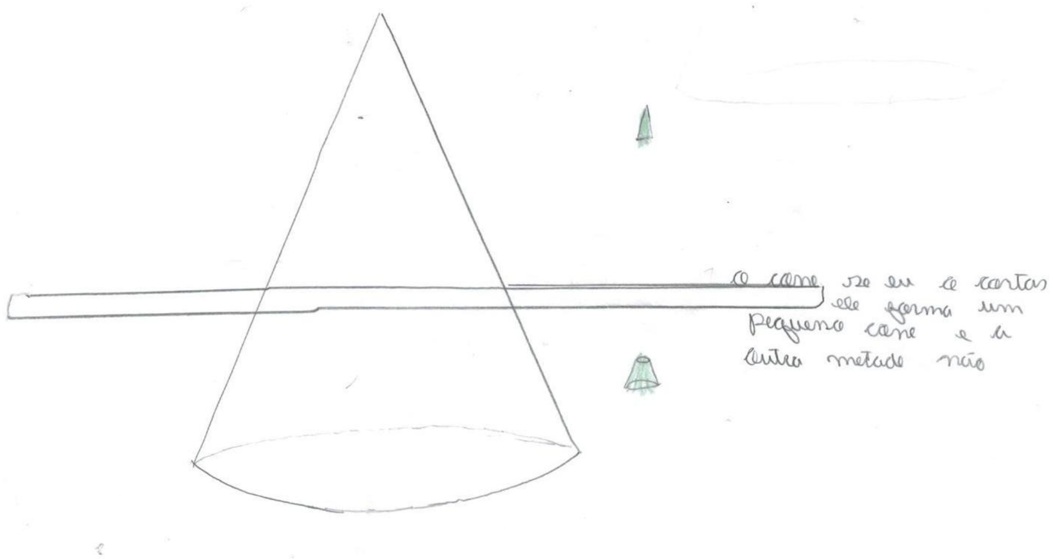
O professor perguntou ao grupo porque aquilo acontecia. “Tentem pensar nisso”, ele disse antes de se afastar do grupo e contar à turma o que acabara de ouvir. Escreveu no quadro: *Por que as seções horizontais do paralelepípedo são todas iguais e as seções horizontais da pirâmide de base quadrada vão aumentando?*

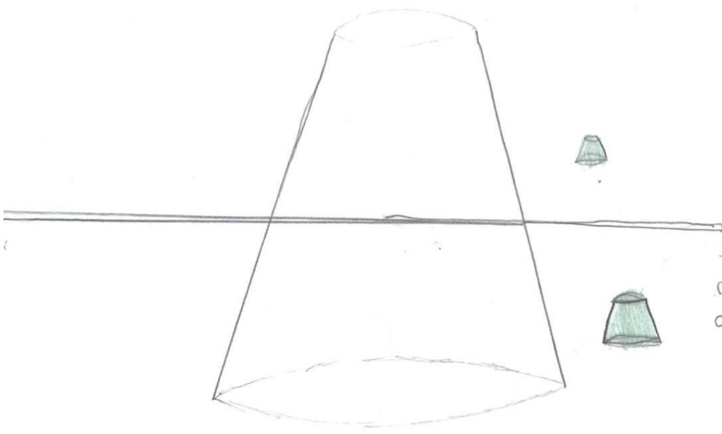
Quando leu os relatórios dos grupos, mais tarde, mais uma vez o professor percebeu o quanto aquilo o fazia pensar.



É interessante ver como, a partir da problematização do método do decalque, surge um método outro que tem no decalque seu ponto de partida, mas guarda com ele uma relação de diferenciação: para figuras em que não se é possível encostar completamente a folha na face a ser destacada do sólido, é preciso que se olhe para a face através da folha de tal modo que se enxergue uma sombra. Os contornos imprecisos da sombra é que dão o tom desse novo método. E aqui não devemos entender o método de pensamento como algo afim à resolução de um problema dado de antemão. Pelo contrário, é porque a problematização surge no âmbito da atividade que se põe em marcha um processo de solução de problemas, de invenção de métodos e formas de uma geometria singular: nesse sentido surgem tanto o primeiro método – de decalque – quanto o segundo – que chamaremos de método da sombra. Ora, acontece que essas formas inventadas são apenas uma ponta da processualidade envolvida na invenção, já que não tendem a uma universalidade ou uma invariância e respondem por um fechamento *parcial* a perturbações. Nesse sentido, guardam em si a potência de diferenciação que garantem que a cognição não é apenas inventada, mas também e, principalmente, inventiva e temporal (KASTRUP, 2007).

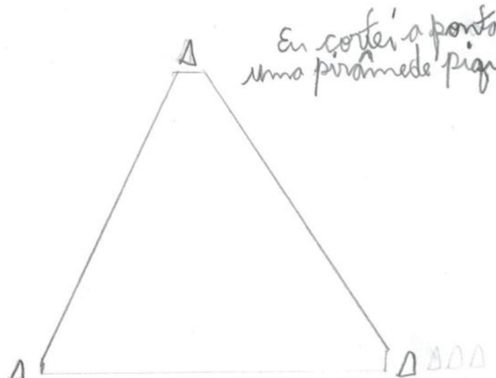
As formas construídas por meio do método de decalque – cognição inventada – são lançadas a uma condição temporalizada de devir que se dá quando acontece o encontro com o problema, com o que dá a pensar, com a matéria fluida – cognição inventiva. Tal como discutimos com relação à linguagem, aqui também temos uma produção em duplo sentido.





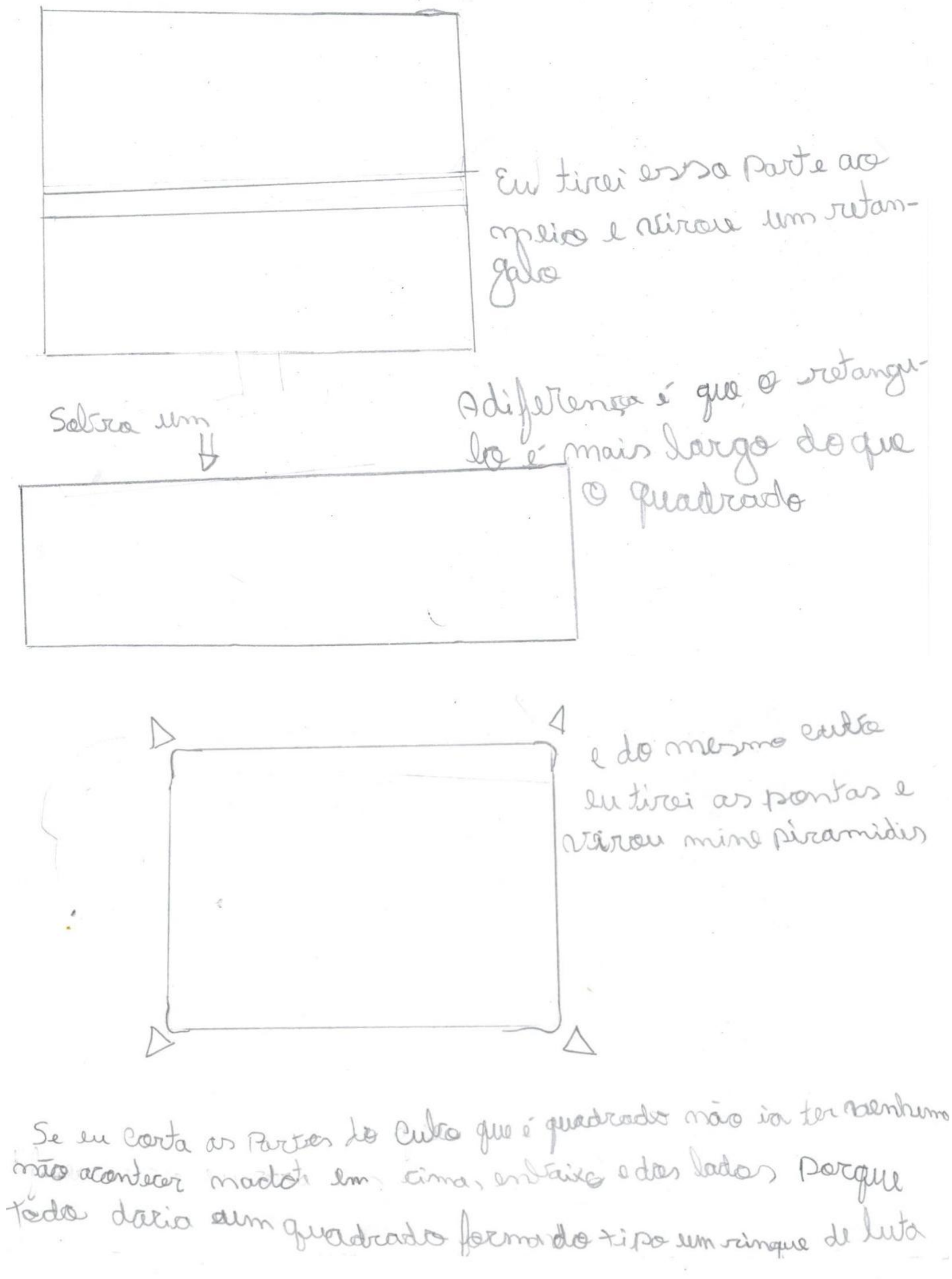
Já o Tromco de cone
se eu o cortar ao
meio ele Vira Dois Tron
cos de cones

Eu cortei a ponta da pirâmede e formou
uma pirâmede piquena.



1- A diferença do triângulo com a pirâmede da base triangular, é que
a pirâmede tem ponta.

2- Se eu corta uma pirâmede vai sobrar emcima uma pirâmede piquena
e embaixo um tronco.



Geometria. Ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos; ciência que estuda as propriedades dum conjunto de elementos que são invariantes sob determinados grupos de transformações (FERREIRA, 1999, p. 983).

Para Detoni (2003, 2012), a geometria é tão simplesmente a ciência do espaço. Que geometrias há? Plana, espacial, analítica, rieminniana, descritiva, projetiva, diferencial. Na escola, na maior parte das vezes, falamos em geometria plana e espacial, tendo a geometria analítica espaço no ensino médio. Desse modo, a grande ênfase dos currículos escolares quando se pensa geometria está sobre duas vertentes – plana e espacial – da assim chamada Geometria euclidiana. Por isso, uma questão comum ao pensarmos geometria na escola básica é: por onde começar a estudar e ensinar geometria?

Pensemos: a Geometria Euclidiana é constituída de três figuras elementares, ou noções primitivas, que não possuem definição: ponto, reta e plano. Essas noções são puramente intuitivas. Partindo dessas noções, é preciso que se aceitem algumas propriedades, denominadas de axiomas. Por meio desses axiomas, outras propriedades podem ser, então, demonstradas. Essas propriedades demonstradas são chamadas de proposições e teoremas e seguem o esquema de dedução da lógica clássica. Esse esquema de deduções é o modo formal de criação de um espaço geométrico bidimensional e de um espaço geométrico tridimensional.

Nesse modo de construção subjaz a ideia de uma linearidade progressiva no sentido dos elementos matemáticos mais simples e intuitivos aos mais complexos e lógico-dedutivos. Por outro lado, toda a experiência de construção do mundo envolve uma percepção de um espaço complexo que não se inscreve nos limites do plano. Embora teoricamente mais *simples*, a Geometria Plana constitui uma esquematização dessa percepção que constitui o mundo por meio da tridimensionalidade: não existe um quadrado ou triângulo empíricos. Da mesma maneira, embora esteja diretamente ligada à construção do mundo via percepção, a Geometria Espacial também aplica sobre as formas do mundo toda uma série de esquematizações que permitem deduzir propriedades. Assim, também não existe o cubo empírico.

Enfim, quando voltamos aos relatórios dos grupos e vemos os modos pelos quais os cortes nos sólidos são feitos nas duas últimas partes da atividade, o que vislumbramos é uma geometria que se constitui *entre* o plano e o espaço, uma geometria que recusa formas purificadas, seja da Geometria plana, seja da Geometria espacial. As notas de rodapé 25 e 26 são um bom exemplo disso: os alunos dizem *lado* e apontam tanto para o que a Geometria chama de aresta quanto para o que ela chama de face. Dois grupos chamam de quadrado e triângulo tanto formas bidimensionais quanto formas tridimensionais. Ali, para aquele grupo de alunos, naquela geometria, só há *lados*, só há *quadrados* e *triângulos*, embora esses termos designem mais de um objeto. Ali, desenhos na folha e sólidos geométricos instauram plano e espaço num campo problemático em que há sombras, decalques, primos de cone, ringues, ciscos, cortes. Modos de invenção de uma geometria no entre plano-espaço.

Um problema de educação matemática (?): se existe invenção, aprendizagem, o que se produz em uma sala de aula? Se uma geometria singular vai se configurando, como caracterizar essa geometria? Como caracterizar uma sala de aula?

Com relação à primeira pergunta, parece mais evidente que uma geometria se produz naquela sala de aula. Há, porém, uma segunda dimensão na aprendizagem inventiva, que é a invenção de si. Vamos nos deter nesse ponto com um pouco mais de cuidado. Hegemonicamente – em especial na psicologia – tem-se colocado o problema do conhecimento como algo que acontece por meio da relação sujeito/objeto. Essa relação é explicada ora tendendo-se para o pólo objeto – como é o caso das correntes behavioristas – ora tendendo-se para o pólo sujeito – como é o caso do gestaltismo – ora afirmando-se o primado do conhecimento como uma relação de interação entre sujeito e objeto – como é o caso e Piaget. Em que pesem as diferenças entre essas correntes, há algo em comum a todas elas que merece ser explicitado aqui: a existência dos pólos sujeito e objeto a priori da relação de conhecimento. Isso significa que sujeito e objeto existem e, por existirem, entram em relação. Essa relação é uma relação de representação e reconhecimento do sujeito com relação ao objeto. Se retormarmos a discussão em torno do modelo da recognição que fizemos ainda há pouco, temos a tríade: recognição-representação-reconhecimento. Essa tríade instaura o que Deleuze (2006a) vai chamar de Imagem Dogmática do Pensamento, que tem seu fundamento na unidade de um eu que pensa e na forma do mesmo no objeto. Quando partimos da caracterização da recognição, aprender é constituir uma representação para o mundo. Submetida, assim, a uma Imagem Dogmática do Pensamento, a aprendizagem é algo de caráter previsível e pode, portanto, ser modelada. Na educação escolar em geral, e na educação matemática, em particular, esta parece ser a noção de aprendizagem mais comumente praticada. Aprender se relaciona, de modo indissociável, a ensinar:

aprender é reter algum conhecimento ensinado por alguém – o professor, no mais dos casos – e “o processo educativo pode, então, ser tomado em uma perspectiva científica, dando segurança ao professor sobre como ensinar e como avaliar o aprendizado de cada aluno” (GALLO, 2012, p. 2). O que daí advém é que todos precisam aprender as mesmas coisas, do mesmo modo, ao mesmo tempo. A política cognitiva praticada nesse contexto é a política de recognição que implica que o conhecimento se configura por regras e por saberes anteriores. Assim, a matemática é tomada como preexistente e o sujeito do conhecimento, como um eu centrado na racionalidade.

Pensar em política cognitiva é propor a questão: que tipo de relação se estabelece com o conhecimento? Que tipo de relação se estabelece com a aprendizagem? Estas questões evidenciam mais o conhecer que o conhecimento. Ou seja, o conhecer referindo-se a uma ação, portando, em uma dimensão política: política cognitiva. Quer dizer, o problema da cognição não é um problema somente teórico, mas, fundamentalmente um problema político, como já discutimos anteriormente.

O modelo da representação pressupõe a existência prévia do sujeito cognoscente e do objeto que se dá a conhecer. Isso implica um modo de existir. Implica, digamos assim, em uma cosmologia – a compreensão do mundo enquanto formas que se dão a conhecer e sujeitos conhecedores – e uma ontologia – uma certa compreensão do sujeito como sujeito do conhecimento – uma ontologia que se confunde com uma epistemologia. Ou seja, os pressupostos do modelo cognitivo representacional nos habita de modo tão enraizado que é naturalizado.

Problematizar esta naturalização nos leva a desacostumar o corpo que se coloca nesta atitude naturalizada. Desacostumar, neste caso, implica em proceder a uma torção no modo como compreendemos o mundo: de um mundo dado à representação, que coloca os problemas que devem ser solucionados, para uma um mundo como efeito de prática cognitiva. De uma política representativa para uma política inventiva.

É na perspectiva de uma política cognitiva da invenção que Kastrup (2007) vai propor uma noção de aprendizagem como coengendramento de si e do mundo. Entendida dessa maneira, a aprendizagem deixa de pressupor sujeito e objeto como polos a partir dos quais a cognição opera para considerá-los estabilizações provisórias da ação cognitiva portadoras de uma inventividade intrínseca. É, assim, portanto, que sujeito e objeto são tirados de seu lugar de condição da cognição para serem pensados como efeitos provisórios dela. Aprendizagem como invenção de si e do mundo. É interessante ressaltar que a noção de invenção opera uma ampliação do conceito de cognição, ou seja, a invenção não é refratária à representação, mas opera nela uma torção fundamental: longe de estabelecer imagens universais e dogmáticas do pensamento, a invenção produz representações em sentido fraco[27] (VARELA, 1994). Por isso, a invenção não é o contrário da representação, mas guarda com ela uma relação de constituição e diferenciação.

Esta compreensão de cognição como coengendramento si-mundo, ou seja, a indissociabilidade sujeito e objeto, si e mundo, implica em um convite para se existir, de um tal modo a aceitar o mundo como efeito de nossas práticas cognitivas (KASTRUP, TEDESCO, PASSOS, 2008). Que políticas cognitivas se configuram na relação do conhecer? A política cognitiva aqui em questão propõe um mundo não como formas dadas, mas como constante construção, constante produção das práticas cognitivas, ou seja das políticas cognitivas engrendradas na relação si-mundo. Em particular aqui nos interessa a relação si-matemática.

O que aqui se nomeia “invenção” não é o mesmo que criatividade. Comumente se associa criatividade a uma habilidade ou capacidade humana para resolução de problemas, propondo soluções inéditas. O que pretendemos, ao colocar o problema da invenção na educação matemática é pensar não a solução de problemas – criatividade – mas a problematização, a colocação de problemas. A criatividade pode ser treinada, estimulada. A psicologia, especialmente nas décadas de 50, 60 e 70 do século passado, dedicou-se ao desenvolvimento de testes para medir a criatividade e de técnicas para treiná-la.

Por seu turno, a invenção aparece como invenção de problemas, problematização, como já discutimos. Em outros termos,

> A invenção é uma potência que a cognição tem de diferir de si mesma. Ela não é um processo psicológico a mais, além da percepção, do pensamento, da aprendizagem, da memória ou da linguagem, mas é uma potência temporal, potência de diferenciação, que perpassa todos os processos psicológicos. Colocando o problema da cognição a partir da invenção, falaremos então de uma

[27] “É preciso diferenciar o sentido forte e fraco de representação[...]. A representação em sentido forte é atravessada por pressupostos ontológicos – há um mundo pré-existente que serve de fundamento – e epistemológicos – o conhecimento é objetivo uma vez que corresponde ao mundo. Já o sentido fraco, diz respeito a um uso semântico, interpretativo, pragmático, sem compromisso epistemológico ou ontológico. Ele faz parte do uso cotidiano e ocorre por questão de comodidade.” (SANCOVSCHI, 2009, p. 63)

> percepção inventiva, de uma memória inventiva, de uma linguagem inventiva e – o que é de particular interesse aqui – de uma aprendizagem inventiva (KASTRUP, 2005, 1274).

A aprendizagem aqui surge muito mais como processo de subjetivação que aquisição de conhecimentos ou informações. Aprender é tornar-se. Aprendizagem como invenção de si. Retomando nossa atividade com os grupos e com os sólidos, colocar o problema da aprendizagem inventiva implica em um desaprender regras de funcionamento constitutivas da subjetividade a todo o tempo, colocando-a em movimento. Correlata, simultânea e reciprocamente, a invenção de si implica a invenção, naquela atividade, de uma geometria singular. Assim, aprendizagem como invenção de si e do mundo. Aprendizagem como problematização. Uma política cognitiva de invenção.

Essa noção de aprendizagem, em diálogo com os processos de "ensino-aprendizagem" da matemática escolar coloca em questão toda a sua dinâmica: que matemática está em pauta? Em nosso caso, que geometria está em pauta? Sugiro colocar o problema por meio da distinção entre matemática menor e matemática maior (CLARETO, 2010). Matemática maior pode ser caracterizada como "majoritária, fixa em um território, em um modo de pensar e existir" (p. 77). Dessa maneira entendida, a matemática maior é finalidade, a teleologia que pode ser pensada de antemão para qualquer produção matemática. Só é matemática aquilo que se produz dentro de um escopo delimitado e majoritário, aquilo que é afim a um modo de pensar e existir. Nesse sentido, a matemática maior lança mão do modelo da recognição e de uma política cognitiva de representação. Em nossa atividade, podemos pensar na Geometria Euclidiana, que institui um espaço geométrico que funciona por meio de uma axiomática baseada no terno ponto, reta e plano e nos cinco axiomas de Euclides. Assentado nessas bases, todo o resto é um desenvolvimento necessário e que pode ser previsto: matemática maior.

Uma matemática menor, por seu curso, subverteria a hegemonia da matemática maior, colocando o pensar matemático e seus modos de proceder em movimento de diferenciação (CLARETO, 2010). Seria, enfim, resistir à matemática maior, hegemônica e instituída, colocando-a em estado de questão: uma geometria singular que não se furta a colocar problemas à Geometria, já que nela estão em jogo forças de nomenclaturas outras, forças de métodos de investigação outros e constituição de formas outras, que não se identificam com o dado de antemão, com o majoritário e que não primam pela categoria de *necessidade.* Ou seja, essa geometria singular pensada como matemática menor não tem em seu caminho um trajeto rumo à matemática maior, à Geometria, mas guarda suas características singulares e engrendra seu próprio regime de funcionamento. Enfim, uma geometria singular se distingue, mas não se separa da Geometria. Ao contrário, atua em seu interior num movimento de diferenciação, de implicação e produção de problemas.

Os sólidos geométricos que estavam em jogo na atividade eram os sólidos canônicos da Geometria, mas, em meio às atividades, tornaram-se triângulo, quadrado, pirâmide de base redonda, e por aí vai. A proposição de se efetuar seções nos sólidos é uma ação canônica na Geometria. Porém, mais uma vez, a criação de métodos para se desenhar as figuras constituintes dos sólidos é singular, os tipos de seções pensadas pelos alunos são singulares: por meio dessas seções foi possível, por exemplo, obter pirâmides a partir de cubos ou construir um “ringue de luta”. Enfim, um saber singular e provisório, um saber da resistência se constitui... uma matemática menor que resiste.

No emaranhado de forças da matemática menor, se produz, a seu termo, uma *sala-de-aula-de-matemática*, um espaço entendido como relacional em toda a sua radicalidade, como relações de forças. Nesse sentido, tanto as subjetividades quanto a matemática que se produz naquele espaço são já relações de forças (CLARETO; SÁ, 2006). Tanto subjetividades quanto uma geometria singular se produzem no espaço *sala-de-aula-de-matemática*. Tal como a linguagem e a cognição, esse espaço é constituído por duas dimensões distintas, mas inseperáveis.

Por um lado, a *sala-de-aula-de-matemática* é forma individuada, com regimes de funcionamento instituídos, que tendem à repetição de si. Um professor que planeja atividades, espera dos grupos determinadas respostas, grupos que se utilizam de métodos já inventados para decalcar faces de sólidos geométricos em folhas de papel em branco, pensamento “preenchido apenas por uma imagem de si mesmo, imagem em que ele se reconhece tanto melhor quanto ele reconhece as coisas” (DELEUZE, 2006a, p. 202). Por outro lado, a *sala-de-aula-de-matemática* é uma configuração de forças e comporta em si uma franja de pré-individualidade. “Singular sem ser individual, eis o estado do ser pré-individual. Ele é diferença, disparidade, disparação” (DELEUZE, 2006b, p. 121). A dimensão pré-individual de uma *sala-de-aula-de-matemática* é, pois, processual, potência de diferenciação de si mesma, de reconfiguração de forças. Resta, pois, problemática, inventiva e bifurcante. *Sala-de-aula-de-matemática* como esse coletivo de forças, como essa dupla vertente, como espaço no qual

> [...] não existem regras fixas, modos privilegiados de relação. As modalidades e elos e as direções multiplicam-se nas diferentes composições momentâneas e locais entre as forças. Ao mesmo tempo, o ideal de equilíbrio, como direção única e privilegiada, também desaparece. A pluralidade substitui a síntese unificadora, e o princípio da estabilidade dá lugar à dinâmica da metaestabilidade (ESCÓSSIA; TEDESCO, 2009, p. 97)

Um espaço no qual se produzem encontros si-geometria, na imanência, no entre, na incerteza, no tateio. Um espaço de aprendizagem inventiva, linguagem inventiva, estabilizações provisórias, problematizações, geometrias singulares, matemáticas. Si-mundo.

Não, acho que não foi assim que aconteceu... Acho que foi... Como foi mesmo que aconteceu?

LIVRO DOS MODELOS

O objetivo do Livro dos Modelos é discutir minuciosamente os dois modelos de aprendizagem com os quais lidamos no Livro das Fabulações. Nesse sentido, a partir dos textos do psicólogo francês Gérard Vergnaud e seus seguidores, procederemos a uma discussão sobre a Teoria dos Campos Conceituais, situando-a como uma ampliação do ponto de vista piagetiano sobre a cognição humana. Dessa maneira, conceitos como esquemas, invariantes operatórios e estruturas cognitivas ganharão novos contornos com vistas à investigação da aprendizagem em sala de aula, o que tem por efeito pensar o conhecimento como uma organização que se dá em campos conceituais dados pelo saber formalizado. Por outro lado, a partir dos textos do educador matemático brasileiro Rômulo Lins e seus seguidores, discutiremos o Modelo dos Campos Semânticos, situando-o como um modelo epistemológico de inspiração vigotskiana que tem por função pensar a produção de significados para a matemática. Nesse sentido, conceitos como os de significado, campo semântico e atividade são forjados para se empreender o que se chama de uma leitura positiva dos processos cognitivos em sala de aula.

SOBRE MODELOS TEÓRICOS E COGNIÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Teoria dos Campos Conceituais: uma ampliação da perspectiva piagetiana

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que tem por objetivo explicar a formação psicológica dos conceitos, sendo, assim, uma psicologia dos conceitos (VERGNAUD, 1996). Dessa maneira, investiga os processos cognitivos de curto e longo prazos, analisando os modos pelos quais filiações e rupturas se constituem na construção do conhecimento pelo aprendiz. O conhecimento é compreendido tanto como "saber-fazer" – uma habilidade prática – quanto como expressão por meios semióticos – uma habilidade de representação do conhecimento.

Vergnaud desenvolveu sua elaboração teórica como um desdobramento do construtivismo piagetiano, estando vinculado visceralmente – conforme procuraremos discutir – à proposta da epistemologia genética em diversos pontos. Da Rocha Falcão e Lessa ressalvam, porém, que a abordagem de Vergnaud,

> Apesar de claramente alicerçada em pressupostos teóricos piagetianos, avança com relação àquela *[a abordagem piagetiana]* em função basicamente de três aspectos: em primeiro lugar defende uma perspectiva acerca da constituição do conhecimento (ou mais especificamente da conceptualização) que vai além do primado dos invariantes lógico-operatórios (I) para a formação dos conceitos, acrescentando a tais aspectos outros dois pontos constitutivos do chamado tripé teórico da conceptualização, quais sejam os suportes de representação (R) e as situações sócio-culturalmente significativas (S) no contexto dos quais o conceito é mobilizado e utilizado. Em segundo lugar, tal perspectiva estabelece claramente a

> necessidade de se levar em conta a *especificidade* dos conteúdos de conhecimento, ou seja, a referência dos mesmos a determinado campo epistêmico circunscrito. [...] Em terceiro lugar, tal perspectiva enfatiza a importância do conceito teórico de esquema. (DA ROCHA FALCÃO; LESSA, 2005, p. 316).

Discutiremos ao longo deste texto os três pontos de avanço de Vergnaud com relação a Piaget sem deixar de apontar, também, as filiações e pressupostos comuns aos dois autores e que acabam operando na própria TCC. Apresentaremos, assim, alguns pontos chave na discussão de Vergnaud.

Conforme salientamos anteriormente, a TCC é uma teoria do desenvolvimento e aprendizagem de conceitos, referindo-se, numa mesma visada, a processos de longo e curto prazos. O longo prazo diz respeito a uma perspectiva de desenvolvimento, já que competências ou conceitos novos são adquiridos ao longo de anos de vivências, notadamente na educação escolar. A TCC se refere a esse processo substituindo as teorias gerais de desenvolvimento humano que o descrevem enquanto etapas ou funções cognitivas (VERGNAUD, 2011). Embora essas teorias tenham seu espaço, a ideia é de que não estão suficientemente próximas das situações didáticas e da epistemologia dos domínios dos conteúdos escolares – não sendo, portanto, aplicáveis às situações de ensino – sendo necessário um quadro teórico que aproxime tanto quanto possível as discussões em torno da psicologia cognitiva – o que é o conhecimento e como ele se desenvolve e funciona – e a investigação em didática da matemática – preocupada com questões acerca da conceitualização, da resolução de problemas e da escolha de determinadas representações simbólicas como aporte para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Quando se pensa no processo de desenvolvimento a longo prazo, a TCC vai colocar o lugar de sua investigação em torno das rupturas e continuidades na construção do conhecimento. Assim, entenderá que um novo conceito ou uma nova competência se constroem, pelo menos parcialmente, sobre um substrato anterior de esquemas e competências já desenvolvidos no sujeito, apontando um caráter de continuidade no desenvolvimento cognitivo. Porém, tal continuidade não diz do desenvolvimento como um todo, já que diversas situações podem levar o sujeito à necessidade de refutar, rever, recombinar e reconstituir seus conhecimentos anteriores em favor de novas competências e modos de organização de sua ação.

Podemos colocar a questão das rupturas epistemológicas por meio do exemplo da passagem da aritmética para a álgebra no ensino fundamental. Vergnaud (1988) pensa a aritmética como uma maneira intuitiva de lidar com números, operações, escolher dados de resolução de problemas segundo uma ordem conveniente; já a álgebra é pensada como uma maneira de estabelecer relações entre incógnitas e dados em uma determinada situação. Exige, assim, um arsenal lingüístico distinto do aritmético, envolvendo manipulações de expressões de caráter mais geral e, portanto, mais abstratas. Se pensarmos a álgebra como uma generalização da aritmética, isso nos revelaria uma dimensão de continuidade entre aritmética e álgebra, uma filiação e ampliação das competências aritméticas. Vergnaud, entretanto, deixa clara uma concepção segundo a qual a álgebra não pode ser reduzida a essa continuidade, mas deve levar em conta rupturas importantes. O autor sugere, então, que sejam exploradas situações e problemas em que apareçam equações com duas incógnitas ou equações com incógnitas nos dois membros. Isso tem, para ele, a função de mostrar a ruptura da álgebra com relação à aritmética, já que situações que podem ser modeladas por equações do tipo $ax + b = c$ somente formalizam uma solução aritmética, ou seja, não exigem um tratamento algébrico de fato.

É interessante notar que Vergnaud (1996) salienta que os processos de ruptura e filiação são fruto do desenvolvimento na criança, mas estão presentes, também, no funcionamento cognitivo do adulto. Porém, nesse, tais processos são decorrência da cristalização de hábitos de pensamento e não do desenvolvimento das estruturas cognitivas. Os modos de pensar do adulto, aqui, aparecem mais como produto de um desenvolvimento que chegou ao seu fim. Assim, subjaz a indicação de que, embora adultos e crianças sejam qualitativamente diferentes, a cognição infantil concorre necessariamente para a cognição do adulto. Lembremos, aqui, que esse é um efeito da filiação teórica de Vergnaud com a epistemologia genética, já que, em Piaget (1990) a construção das estruturas operatórias formais liberta o pensamento da duração, do tempo, tornando-o extemporâneo.

O curto prazo diz respeito às situações que podem ser utilizadas em um dado momento do desenvolvimento do sujeito em termos de competências total ou parcialmente adquiridas. Consiste, em grande parte, no espaço de acompanhamento e intervenção que permitem ao professor guiar os processos de aprendizagem em sala de aula. (VERGNAUD, 2011).

A discussão em torno das situações didáticas em sala de aula deve ser colocada em termos de conceitos e resolução de problemas. Vergnaud (1996) aponta que um conceito não pode ser reduzido a sua definição e ele somente ganha sentido para os aprendizes na medida em que são explorados problemas que fazem referência a ele. É assim que o autor preconiza uma elaboração pragmática de conceitos (VERGNAUD, 1996). Tal pragmática leva em conta problemas teóricos e práticos, bem como as funções cognitivas atribuídas à linguagem e às representações. A justificativa para sua abordagem é que a função adaptativa do conhecimento só pode ser corretamente colocada a partir do momento em que os estudos centram-se na ação dos aprendizes e como o conhecimento toma forma nela,como o conhecimento se constitui nas operações do pensamento. Distinguem-se, assim, duas classes de situações. A primeira diz respeito àquelas para as quais o sujeito já possui competências e automatismos para seu tratamento imediato; a segunda diz respeito àquelas para as quais o sujeito não possui tais competências, sendo necessário um tempo de elaboração sucessiva de esquemas de tal modo que as situações possam se transformar naquelas da primeira classe. Assim, a segunda classe de situações coloca em xeque aquilo que o aprendiz já sabe, instaura um ponto de desestabilização, de desequilíbrio em sua estrutura cognitiva. É claro que, tão logo quanto se possa, a estabilidade e o equilíbrio são reconstituídos, assinalando o fim de um processo adaptativo das estruturas mentais à perturbação. O efeito esperado é uma equilibração das estruturas da inteligência, nos termos utilizados por Piaget.

Entra em cena, aqui, o conceito de *esquema*, central na TCC e utilizado no parágrafo anterior. Cito Piaget: “um esquema é a estrutura ou organização das ações, as quais se transferem ou generalizam no momento da repetição da ação, em circunstâncias semelhantes ou análogas” (PIAGET, 1974, p. 15). Vergnaud (1996) dirá que o esquema é uma organização invariante da conduta diante de uma dada classe de situações. De certa maneira, as descrições dos dois autores se retroalimentam: o aprendiz constitui um esquema diante de uma situação para a qual não tem competências e, em contato com situações análogas, acaba generalizando seu modo de ação por meio da repetição do uso do esquema. Para Kastrup (2007), a preocupação de Piaget com os aspectos de generalização e repetição dos esquemas revela uma ênfase da análise lógica da cognição não em termos da ação geral, mas sim da lógica da ação. O sujeito que aí se constitui é epistemológico, pensado como aquele cujos mecanismos são comuns a todos os sujeitos individuais de mesmo nível (PIAGET, 1979). O que Vergnaud acaba por fazer é levar a análise dos esquemas do sujeito epistemológico para o campo dos invariantes operatórios, ou seja, para o campo dos elementos cognitivos que permitem que ação do sujeito seja operatória.

Um exemplo de esquema dado por Verganud diz respeito à contagem de um conjunto de objetos por uma criança, digamos, um conjunto de cinco maçãs. A criança coordenaria movimentos oculares e gestuais com a sequência numérica de contagem – um, dois, três, quatro, cinco – colocando ênfase em sua fala sobre o último elemento e o número associado a ele, identificado como a cardinalidade do conjunto: como o último número dito foi cinco, existem cinco maçãs.

Na TCC, o funcionamento cognitivo do aprendiz comporta operações que vão se automatizando progressivamente. Embora aqui não se fale em estágios de desenvolvimento, como em Piaget, constitui-se uma noção de linearidade progressiva da confiabilidade dos esquemas cognitivos. A confiança, por parte do aprendiz, nos esquemas, reside num conhecimento explícito ou implícito inerente a eles. Uma questão fundamental, nessa perspectiva, é investigar esses conhecimentos ditos implícitos nos esquemas (VERGNAUD, 1996). Podemos pensar, por exemplo, no algoritmo da soma. Existe um conjunto de regras válidas para ele: iniciar a soma da direita para a esquerda; se a soma for menor que 10, escrever o resultado; se for maior, escrever somente a unidade e somar a dezena na próxima linha, etc. A explicitação dessas regras não é algo fácil para a criança, muito embora muitas delas consigam, com sucesso, realizar as somas por meio do algoritmo. Vergnaud vai pensar essas situações como conhecimentos-em-ação, ou seja, como um conhecimento implícito que o sujeito opera em sua ação de somar.

Uma pergunta que se abre com os invariantes e com a noção de conhecimentos-em-ação é: a que conhecimento “explícito” faz referência a conceitualização implícita dos esquemas? A TCC vai buscar a resposta para essa pergunta na epistemologia da matemática e na história das ciências.

> Os conhecimentos transmitidos pela escola são conhecimentos sociais historicamente datados; apareceram na história da humanidade como resposta a problemas práticos e teóricos que se apresentaram aos homens, tanto quando esses problemas foram explicitamente formulados, como é, na maioria da vezes, o caso da história das ciências, das técnicas e das artes, como quando tenham

> permanecido implícitos, tal como acontece em diversas práticas sociais (VERGNAUD, 1988, p. 240, tradução nossa)

Essa discussão abre frente a um problema central na TCC, que diz respeito ao modo de investigação do psicólogo interessado na aprendizagem da matemática. Vergnaud (1996) aponta que essa investigação deve ter como procedimentos a classificação e análise das estruturas dos problemas, identificação e formulação de teoremas-em-ação, além da análise das representações simbólicas das situações de modo que elas ganhem um sentido matemático. É interessante notar que o autor afirma que os esquemas fazem referência a uma classe bem delimitada de situações: essa delimitação é dada pela matemática, por suas estruturas. Salienta, assim, que a matemática aprendida pelo sujeito é a mesma a que se refere o sistema de descrições e análises estabelecido pelas orientações anteriormente colocadas. Porém, embora faça referências explícitas à matemática, sua história e sua epistemologia, Vergnaud dirá que a TCC não está totalmente contida na própria matemática, já que existe uma preocupação específica de sua teoria com o apelo didático dos conteúdos da disciplina.

Para Vergnaud (1996), então, os esquemas fazem referência à matemática em termos de invariantes operatórios. Tais invariantes são os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação. Cabe ressaltar, porém, que os conceitos-em-ação não são conceitos bem como os teoremas-em-ação não são teoremas de fato e isso tem dois motivos. O primeiro é que, nas ciências, conceitos e teoremas são explícitos, enquanto que os invariantes operatórios são a face implícita do esquema. O segundo é que não se discute a verdade ou falsidade dos esquemas como se faz quando a ciência discute a pertinência dos conceitos e teoremas. O que se discute para o caso dos esquemas é o seu papel na organização das ações do sujeito.

O esquema, então, acaba tomando um papel de destaque para a investigação em aprendizagem da matemática. Vergnaud (1996) ressalta que o esquema não é um estereótipo, mas uma função temporalizada de argumentos que permite generalizar séries de ações e de análise de variáveis envolvidas em uma dada situação. Porém, ao mesmo tempo, é universal dentro da classe de situações à qual se associa. Além dos invariantes operatórios, o esquema também é composto por regras de ação, antecipações e inferências. “As antecipações do objetivo a se atingir dizem respeito ao efeito que se deseja obter incluindo as etapas intermediárias, e que resultam igualmente das ‘operações’ inferenciais” (GONÇALVES, 2008, p. 84).

Já as inferências “tomam a forma de operações e [...] permitem ’avaliar’ as regras e antecipações a partir de informações fornecidas pelas situações e a partir das qualidades operatórias dos invariantes” (GONÇALVES, 2008, p. 84), enquanto que as regras de ação, “do tipo se... então... [...] permitem decidir sobre as ações que se tem que pôr em prática e que, ao mesmo tempo, resultam das ‘operações’ inferenciais. São as regras de ação que engendram o seguimento das ações” (GONÇALVES, 2008, p. 84).

Na teoria de Vergnaud, existem três tipos lógicos de invariantes operatórios. O primeiro deles é do tipo *proposição*: esse tipo de invariante pode ser classificado em verdadeiro ou falso. Os teoremas-em-ação são invariantes desse tipo. Da Rocha Falcão e Lessa (2005) explicam que a noção de teorema-em-ação diz respeito a conhecimentos não explicitáveis simbolicamente. Dessa maneira, esse tipo de invariante faz referência a conhecimentos próprios da matemática. Pensemos por meio de um exemplo (VERGNAUD, 1996). Consideremos uma criança que deve contar uma coleção de objetos divididos em dois subconjuntos A e B. Entre os cinco e sete anos, a criança descobre que não é necessário contar a coleção inteira se ela já conhece a cardinalidade dos subconjuntos A e B. Dessa maneira, o teorema-em-ação a que se faz referência nessa ação pode ser simbolicamente explicitado por:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B), desde\ que\ A \cap B = \emptyset$$

O segundo tipo de invariante é denominado *função proposicional* e é constitutivo das proposições. Dessa forma, não pode ser classificado em verdadeiro ou falso. Trata-se dos conceitos-em-ação. Se considerarmos novamente o exemplo da criança que conta os objetos da coleção $A \cup B$, pode-se identificar os conceitos de conjunto, cardinalidade de um conjunto, união e soma operando naquela ação. Vergnaud ressalta a distinção lógica entre os invariantes do tipo proposição e do tipo função proposicional, alertando para o fato de que os dois tipos se constituem dialeticamente, não existindo, portanto, funções proposicionais sem proposições e vice-versa. Existe uma relação de co-constituição desses tipos lógicos no âmbito das proposições utilizadas pelo aprendiz em ação.

O terceiro tipo de invariantes é o tipo *argumento*, relacionado a um só tempo com as proposições e as funções proposicionais. Consideremos a proposição $2 < 3$; a relação que se estabelece é a relação menor que. Daí podemos dizer que 2 é menor que 3, ou seja, que a proposição faz referência a dois argumentos, indicados, nesse caso pelos números 2 e 3. A relação geral *ser menor que* se faz utilizando dois argumentos *a* e *b* em $a < b$.

Para Vergnaud (1996) a distinção dos tipos lógicos de invariantes operatórios tem por função auxiliar a transformação do que ele chama de conceitos-ferramenta em conceitos-objeto por meio da operação lingüística de denominação.

Aqui ganham destaque os sistemas de representação dos conceitos na TCC e, em especial, a importância da linguagem nessa teoria. A TCC problematiza a ideia clássica de que a linguagem tem por funções cognitivas a representação e a comunicação. Verganaud considera que tais funções não recobrem completamente o viés de ferramenta do pensamento que a linguagem exerce. Nessa perspectiva, o autor considera que as funções cognitivas da linguagem são: ajudar na designação e, assim, na identificação dos invariantes operatórios; auxiliar no raciocínio e nas inferências; ajudar na antecipação dos efeitos e dos fins, na medida em que auxilia a organização da ação ainda insuficientemente dominada pelo sujeito. Podemos pensar em duas crianças diante de uma mesma situação para a qual a primeira delas possui um esquema de resolução e a segunda ainda não. A primeira não fará uso da fala para dar conta da situação, enquanto que a segunda utilizar-se-á da linguagem falada como meio de controle de suas ações. Dessa maneira, para a segunda criança, a linguagem tem a função mais de organização de sua ação e pensamento do que propriamente de representação e comunicação.

Quanto à função de representação da linguagem, Vergnaud considera que a denominação e identificação de invariantes respondem bem a esse problema. Sendo assim, a linguagem representa três estatutos de coisas: a ação do sujeito, os elementos pertinentes da situação e as relações entre ação e situação.

É a partir dos três parâmetros que discutimos até aqui – as situações, os invariantes e as representações – que Vergnaud vai dizer:

> Em minha opinião, um conceito é uma tríade de três conjuntos:
> Conceito = (S, I, φ)
> S = conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência).
> I = Conjuntos de invariantes operatórios associados ao conceito.(o significado).
> φ = conjuntos dos significantes (representações simbólicas) lingüísticos e não-linguísticos que permitem representar o conceito, suas propriedades e as situações que lhe cumpre conceber (o significante). (VERGNAUD, 1988, p. 252, tradução nossa).

O conceito em Vergnaud faz referência, assim, a *conjuntos* de situações, invariantes e representações. Isso tem a função de mostrar que uma única classe de situações, ou uma única representação ou um único invariante operatório não recobrem todos os sentidos de um conceito. Por isso, a aprendizagem conceitual não pode abrir mão de pensar esses conjuntos.

Ao mesmo tempo, uma classe de situações, um invariante e uma representação não fazem referência exclusiva a um único conceito, de maneira que uma das contribuições da TCC é pensar não na aprendizagem de um conceito isoladamente, mas na aprendizagem de um conceito e suas relações com outros: um campo conceitual. Da Rocha Falcão (2003) assinala que a ideia de campo conceitual tem uma dupla acepção: por um lado se refere ao nível de complexidade de relacionar um conceito a outros no âmbito da ação cognitiva do aprendiz; por outro, se refere à capacidade de relacionar conceitos no âmbito de um campo epistêmico específico, de um corpo de conhecimentos institucionalizado. Poderíamos pensar que um campo conceitual, então, refere-se, numa mesma visada, à capacidade de relacionar conceitos no âmbito do sujeito e no âmbito da própria matemática. Por isso a psicologia dos conceitos não pode abrir mão da consideração da análise epistemológica da matemática dentro de um dado campo conceitual.

Vergnaud (1996) sugere uma proximidade das noções de campo conceitual e situação, entendendo essa última como uma tarefa a ser realizada[28]. Para ele, existe uma vantagem fundamental nessa aproximação, já que ela permite uma análise das tarefas cognitivas em situações particulares com vistas a uma generalização da análise para uma classe de situações. Vergnaud vai insistir na ideia de que a didática da matemática não pode prescindir da análise das dificuldades intrínsecas que se ligam às mais diversas tarefas cognitivas dentro de um dado campo conceitual. Por isso, se uma primeira entrada para a noção de campo conceitual pode ser pensada por meio das situações, uma segunda pode ser pensada em termos de conceitos e teoremas. Pode-se falar, nessa ordem de ideias, em um

[28] Vergnaud (1996) faz referência ao conceito de situação sem referi-lo ao conceito de situação didática, mas tomando-o para ressaltar duas de suas características principais. A primeira é a de variedade: existe uma série de situações que se liga a um determinado conceito num campo conceitual dado. A segunda é a de história, já que o conhecimento do sujeito é modelado por situações e procedimentos que provêm de uma experiência prévia – especialmente as primeiras situações tem um papel significativo na constituição do sentido efetivo de um conceito – que dá condições de que ele domine progressivamente as novas situações.

campo conceitual de estrutura aditiva ou de estrutura multiplicativa ou de estrutura algébrica, fazendo referência aos próprios constructos teórico-conceituais no interior de um campo conceitual.

A noção de estrutura subjaz à ideia de campo conceitual. Nesse ponto, remetemo-nos a Piaget e à sua caracterização do termo estrutura. Citamos:

> Em uma primeira aproximação, uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema (por oposição às propriedades dos elementos) e que se conserva ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. Em resumo, uma estrutura compreende os caracteres de *totalidade*, de *transformações* e de *auto-regulação* (PIAGET, 1979, p. 8, grifo nosso).

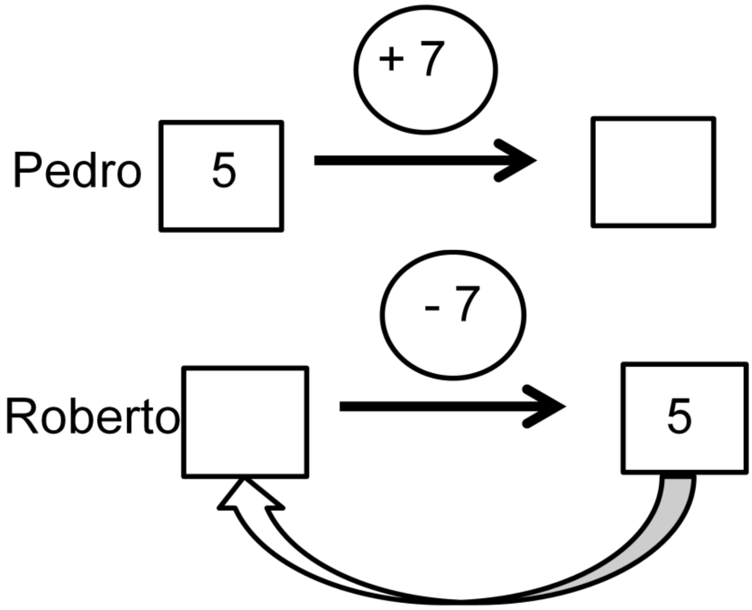
Grifamos na citação anterior as três características da estrutura em Piaget: a totalidade, as transformações e a autorregulação. Piaget pensa a estrutura como um sistema de totalidade, já que não importam tanto as propriedades dos elementos particulares da estrutura, mas sim aquilo que confere aos elementos um caráter de pertencimento a um conjunto que funciona segundo leis. Por isso, Piaget vai recusar pensar a estrutura como uma associação de elementos ou como uma totalidade emergente, tomando como ponto central a discussão em torno de estruturas operatórias. Tais estruturas são relacionais: importam as relações ou composições que se estabelecem e que estruturam os elementos segundo leis do sistema; as transformações são, portanto, ao mesmo tempo, estruturadas – já que obedecem às leis do sistema – e estruturantes – já que dizem respeito aos elementos do conjunto. Nesse ponto, a noção de autorregulação se mostra importante. As transformações geram elementos que sempre se conformam à estrutura, ou seja, os elementos gerados conservam as leis estruturais do conjunto ao qual pertencem. Dessa maneira, a ideia de estrutura é pensada sob a égide do fechamento, já que não gera e não faz referência a nada fora dela própria. Esse fechamento, porém, é relativo, na medida em que uma estrutura pode funcionar como subestrutura de outra, mais ampla. O que importa é que a estrutura mais ampla conserva as operações da subestrutura, de maneira que não se pode falar em uma justaposição ou anexação de estruturas, mas sim em uma confederação, um enriquecimento de uma estrutura com relação à outra. Piaget distingue, a partir dos trabalhos de Bourbaki[29], três estruturas-mãe, que, ao mesmo tempo em que são irredutíveis entre si, são a origem de todas as outras. São elas as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. É interessante notar como Piaget relaciona as estruturas-mãe à gênese do pensamento humano. Diz ele:

> [...] é espantoso constatar que as primeiras operações das quais se serve a criança em seu desenvolvimento, e que derivam diretamente das coordenações gerais de suas ações sobre os objetos, podem precisamente se repartir em três grandes categorias, conforme sua reversibilidade proceda por inversão, à maneira das estruturas algébricas (no caso particular: estruturas de classificação e de números), por reciprocidade, como nas estruturas de ordem (no caso particular: seriações, correspondências seriais etc.) ou, em lugar de se fundar sobre as semelhanças e diferenças, as uniões inocentadas pelas leis de proximidade, de continuidade e de fronteiras, o que constitui estruturas topológicas elementares (que são, do ponto de vista psicogenético, anteriores às estruturas métricas e projetivas, contrariamente ao desenvolvimento histórico das geometrias, em conformidade, porém, com a ordem de filiação teórica!) (PIAGET, 1979, p. 24).

Destacamos a fala de Piaget com relação ao desenvolvimento do pensamento segundo a “ordem de filiação teórica”. Ora, se seguirmos os passos da construção das estruturas tal como nos sugere Piaget, estaremos diante de construções sempre necessárias, uma vez que o pensamento humano subordina-se a transformações de modo semelhante ou análogo às estruturas lógico-operatórias da própria ciência. Talvez por isso Vergnaud (1996) afirme que Piaget centrou-se na elaboração de uma psicologia das estruturas lógicas ou de uma lógica geral do desenvolvimento do pensamento humano. A elaboração teórica de Vergnaud, porém, colocará seu foco sobre uma psicologia dos conceitos e, nesse sentido, acaba por colocar em outro lugar a ênfase sobre a estrutura com a qual trabalha: essa é agora pensada como estrutura de um campo conceitual. Nesse sentido, Vergnaud fala em campos conceituais de estrutura aditiva, por exemplo. As características da estrutura, agora, são pensadas no âmbito da própria matemática, dos próprios campos conceituais, deixando de ser tematizada como estrutura mental do sujeito. Assim, a análise histórica e epistemológica da matemática na investigação dos processos de aprendizagem em matemática ganham um novo caráter, inexplorado em Piaget: as dificuldades intrínsecas ao problema são

[29] Nicolas Bourbaki é um pseudônimo de um grupo de matemáticos franceses da primeira metade do século XX. Esse grupo tinha por objetivo de trabalho unificar a matemática por meio da noção de estruturas. Propõe, assim, uma arquitetura das matemáticas (BOURBAKI, 1950).

buscados na estrutura matemática em questão dentro de um campo conceitual e não na lógica geral de ação e desenvolvimento das estruturas cognitivas do sujeito. Pensemos com o exemplo das estruturas aditivas. Vergnaud (2011) descreve esse campo como aquele no qual as situações exigem uma soma, uma subtração ou uma combinação entre essas operações. O autor também descreve algumas situações prototípicas para a adição dentro desse campo conceitual: 1) reunião de partes em um todo; 2) a transformação de uma quantidade inicial. Tomemos duas situações retiradas de Vergnaud (1988): Pedro tem 5 bolinhas de gude. Joga uma partida com seus companheiros e ganha 7. Quantas tem agora?; Roberto acaba de perder 7 bolinhas de gude. Conta as que sobram e vê que são 5. Quantas bolinhas de gude tinha antes de jogar?



As representações acima estão presentes em Vergnaud (1988). Segundo o autor, embora as duas situações – a de Pedro e a de Roberto – exijam a soma $7 + 5 = 12$ como esquema de resolução, crianças demoram um ano e meio a mais para conseguirem resolver problemas do segundo tipo, pois ele envolve uma inversão do significado usual da soma, já que indica uma transformação do estado final para o inicial. É interessante notar a preocupação de Vergnaud com soluções de situações de modo mais confiável, econômico e geral. Se uma criança, então, consegue uma solução por tentativa e erro, considera-se necessária uma superação dessa solução. Nas palavras do autor, “[...] esta solução requer um controle difícil da memória imediata e não é generalizável para qualquer número” (VERGNAUD, 1988,

p. 241). Essas características – economia, confiabilidade e generalidade – remetem-nos às preocupações do matemático profissional em sua atividade de resolução de problemas. É nessa atividade que se requer uma solução confiável, econômica e geral. Aqui, aponta-se para uma identificação do desenvolvimento cognitivo com o próprio pensamento científico nos estudos ligados à epistemologia genética. Na TCC, tal identificação fica mais explícita quando se procura na matemática formas de análise dos invariantes da organização da ação dos sujeitos. Daí o sentido de utilizar-se das orientações de Vergnaud para a investigação da aprendizagem da matemática. A lógica é a seguinte: como o pensamento humano se desenvolve necessariamente para o pensamento científico, ou seja, o pensamento humano funciona de modo análogo ao pensamento científico, a investigação centra-se nos mecanismos de funcionamento invariante – teoremas-em-ação e análise epistemológica de situações – que tenham na matemática seu pano de fundo e sua finalidade.

Assim, se falamos em um campo conceitual de estrutura aditiva, é porque nessa estrutura podemos identificar invariantes e teoremas-em-ação que transitam numa passagem do pensamento não-científico ao científico. É nesse sentido que a tentativa de superação de soluções e esquemas não generalizáveis, pouco econômicos ou menos confiáveis é lida como falta ou erro, uma condição ainda não adaptada do conhecimento do sujeito com relação ao pensamento científico.

Aqui, voltamos a enfatizar a importância da noção de situação – conforme discutida anteriormente, como tarefa a ser realizada – na TCC, pois a aprendizagem conceitual proposta por Vergnaud depende, em grande medida, da variedade de situações que se ligam a um determinado conceito, ao mesmo tempo em que se liga a uma história do sujeito que elabora esquemas frente à variedade de situações. Na constituição do pensamento científico, o sujeito não pode ficar limitado a se confrontar com as situações da vida cotidiana. Para Vergnaud (1996), a vida oferece um número muito reduzido de problemas, além do que, em situações cotidianas, os dados dos problemas muitas vezes não são explícitos ou estão imersos em uma fonte de informações que não ajudam a resolver as situações. Por isso, e talvez essa característica seja a mais importante, os problemas das vivências do cotidiano dificultam o trabalho de sistematização científica. Assim, a ciência ajuda a superar as situações demasiadamente limitadas das vivências cotidianas. Esse é, portanto, o papel das situações na aprendizagem matemática. Vergnaud (2011), propõe, que a análise didática deva centrar-se no par situação/esquema, de tal maneira que haja uma superação dos pares estímulo/resposta do behaviorismo e sujeito/objeto, considerado por demais geral para responder adequadamente à questões da aprendizagem matemática. A análise a partir do par situação/esquema permite estabelecer sua relação com a tríade conceitual apontada por Vergnaud, já que as situações conferem sentido aos conceitos, enquanto que os esquemas se referem aos sistemas de representação do conceito e aos invariantes operatórios que a ele se ligam.

O Modelo dos Campos Semânticos: a cognição no campo da cultura

O esforço teórico de elaboração do Modelo dos Campos Semânticos teve início no trabalho de doutorado de Lins. Nele, o autor estudou uma caracterização de álgebra e de pensamento algébrico, tomando como noções basilares as de significado, produção de significado e campo semântico. Silva (2003) aponta, porém, que as ideias do MCS não se encontravam de modo explícito no corpo da tese e que é a partir dela que o modelo vai sendo elaborado enquanto marco teórico que procura proceder a uma leitura plausível dos processos de produção de significados.

A elaboração de uma noção de conhecimento também ganha importância na proposição de Lins. O autor defende uma posição relativa à pesquisa em educação matemática, segundo a qual as abordagens epistemológicas dos autores devem estar sempre explícitas, sendo discutidas com relação às próprias pesquisas, seja em termos de objetos, questões ou métodos (LINS, 1993). A preocupação com a explicitação dessas posições epistemológicas parece ser a de colocar em sintonia pressupostos e a prática de pesquisa em si. Com relação ao seu próprio lugar, Lins vai defender uma caracterização de epistemologia que, para ele, é uma atividade humana que centra suas preocupações em torno de três questões principais: “(i) o que é o conhecimento?; (ii) como é que o conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?” (LINS, 1993, p. 77).

Quanto à primeira questão, Lins propõe que o conhecimento seja uma díade composta por crença-afirmação e justificação. A ideia é de que o sujeito afirma e expressa algo em que crê; porém, isso não basta para a constituição do conhecimento. É preciso que ele, o sujeito, justifique sua afirmação, explicite o porquê ou o quê o autoriza a enunciar sua crença-afirmação (LINS, 1993). Dessa maneira, as mesmas crenças-afirmações podem dar origem a diferentes conhecimentos. Quando um matemático crê-afirma que $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ e justifica dizendo que 2 e 3 são números reais e que o conjunto dos números reais comporta, para a adição, a propriedade comutativa, ele produz um conhecimento diferente daquele que uma criança produz quando justifica a mesma crença-afirmação juntando dois dedos de uma mão a três dedos da outra e, posteriormente, fazendo o contrário. Assim, o papel da justificação não é de explicar as afirmações do sujeito, mas, fundamentalmente, de legitimá-las. Nesse sentido, a justificação é parte integrante do conhecimento, e não sua explicação (LINS, 1997). O MCS pode ser caracterizado, pois, como um modelo epistemológico, já que a atenção pousa sobre a produção de significados sobre um objeto.

A partir da caracterização dada ao conhecimento, pode-se pensar em dois efeitos mais imediatos para a construção do MCS: 1) o conhecimento é do domínio da enunciação. Isso significa que o conteúdo de um livro didático, por exemplo, não é um conhecimento, assim como não o é, também, a álgebra, a aritmética ou a geometria. Todos são textos, resíduos de enunciação, já que se caracterizam como enunciados para os quais é possível produzir significados, para os quais é possível afirmar/justificar enunciações; 2) o conhecimento pertence a um sujeito cognitivo. Pensado assim, o sujeito constitui-se cognitivamente enquanto tal por meio da produção de significados. Aponta-se, aqui, para uma dimensão ética do MCS levantada por Silva (2003): “[...] esta perspectiva toma como premissa o fato de que, quando as pessoas produzem significado [...] elas o fazem por inteiro, isto é, o que dizem/fazem é sempre o que elas podem dizer/fazer no interior daquela atividade” (p. 65). Esse modo de leitura da produção dos significados é caracterizado como um método positivo de leitura, já que dirige seu olhar para aquilo o que o sujeito pode dizer, e não para aquilo que ele deveria dizer, como fazem teorias que levam em conta uma leitura pela falta. A Teoria dos Campos Conceituais, para Lins, poderia ser caracterizada como um modelo de leitura pela falta, uma vez que coloca como privilegiados os significados da matemática acadêmica no bojo da aprendizagem e entende como deficiência ou erro uma produção que não faça referência aos significados e categorias do texto acadêmico.

Com relação a essa positividade da leitura proposta pelo MCS, é interessante apontar para a noção de verdade colocada por Lins (1999). Segundo o autor, as caracterizações de conhecimento que levam em conta o critério da verdade baseiam-se na premissa de que não se pode conhecer o que não é verdadeiro. A isso fia-se a ideia de que as proposições são verdadeiras ou falsas, numa lógica dual. Pensando com isso, o que se conheceria seria um enunciado verdadeiro. O MCS, ao colocar o conhecimento em termos de crença-afirmação/justificação, acaba por operar uma inflexão no critério de verdade, deslocando-o. Assim, em Lins, só se poderia falar em verdadeiro referindo-se ao conhecimento. Porém, a própria noção de conhecimento garante sua verdade para algum sujeito cognitivo que o enuncia, ou seja, o conhecimento é verdadeiro para alguém. Nesse sentido, ao mesmo tempo em que rompe com a noção de verdade absoluta, o MCS entende que o conhecimento se produz em “[...] um relativismo cujos limites são postos por práticas sociais e por culturas [...]” (LINS, 1999, p. 89).

Uma noção muito cara ao MCS e que utilizamos até aqui sem uma caracterização mais específica é a de significado. É interessante notar que esse conceito sofre mudanças de direção quando lemos os textos de Lins ao longo do tempo. Em 1993, o autor diz que

> [...] *significado* é a relação entre a *crença-afirmação* e uma justificativa para ela, o que coloca claramente a relatividade de um *significado*, ao mesmo tempo em que os caracteriza como a articulação entre as coisas em que se acredita e as razões que se tem para acreditar nela (LINS, 1993, p. 86).

Dessa maneira, constituo um objeto – matemático ou não – na medida em que produzo significados para ele, na medida em que falo sobre ele, alinhavando relações entre minhas crenças e as justificações que dou a elas. O sujeito, assim, produz significados na medida em que fala sobre um determinado objeto e é nessa fala que o objeto vai se constituindo enquanto tal. Mais ainda, o significado relaciona as crenças-afirmações do sujeito às suas justificações no momento concreto da enunciação. Somente na linguagem é possível produzir significados, ou seja, os objetos são constituídos a partir do material semiótico linguístico e, assim, estão sempre em vias de fazer-se. Nunca se sabe de antemão, portanto, se um objeto que se constitui na produção de significados é ou não matemático. Como a produção de significados é do âmbito da enunciação, somente o sujeito da enunciação pode dizer se uma determinada atividade é ou não algébrica, aritmética, geométrica e a partir dessa produção de significados é que os objetos passam a ser entendidos como matemáticos ou não. Aqui, uma atividade não pode ser considerada algébrica porque lida com objetos da álgebra – equações, por exemplo: uma atividade só pode ser considerada algébrica se houver produção de significados algébricos em seu interior.

Note-se que não se fala de objetos em si, mas em modos de constituir tais objetos. Nesse momento, campos semânticos são entendidos como modos de produção de significados, como modos de constituição de objetos. É nesse sentido que o MCS pode ser considerado como um modelo não-essencialista (LINS, 1994). Num paralelo entre a Teoria dos Campos Conceituais e o MCS, poderíamos pensar na primeira como uma teoria que opera por estruturas, conforme dissemos anteriormente. Numa estrutura, os objetos tem pertinência definida – uma adição pertence necessariamente ao campo conceitual de estrutura aditiva – e as relações dentro da estrutura são permanentes – um problema de transformação estado inicial em final, por exemplo. No campo semântico, porém, a ideia é de que os objetos tem permanência difusa e as relações que se estabelecem não são permanentes. Assim, os objetos não possuem uma essência a ser revelada, ou um modo privilegiado de configurar relações, mas são configurados no momento da produção de significados, no momento em que um sujeito do conhecimento o enuncia, sendo, portanto, sempre constituídos e abordados.

Silva (2003) caracteriza o momento logo após à constituição teórica do MCS – os textos a que fizemos referência com relação à noção de significado (LINS, 1993, 1994) foram escritos nesse momento – como a fase em que diversas pesquisas tomaram o modelo como referencial teórico. Naquele momento, as pesquisas tinham como característica investigar os diversos modos de produção de significados para determinados objetos matemáticos como, por exemplo, a noção de base em álgebra linear. Ao mesmo tempo, afirma que sua tese abre frente a um novo momento dos trabalhos que tomam o MCS como referencial teórico. A ideia é de deslocar o olhar da produção de significados para objetos matemáticos para o processo dessa produção: a ênfase, que antes recaía sobre os objetos, se encontra agora nos processos, naquilo que o autor chama de dinâmica da produção de significados para a matemática.

Silva aponta, assim, em seu trabalho, um cuidado de redefinição dos modos de pesquisar no MCS que fossem coerentes com as principais ideias e pressupostos do modelo. A questão metodológica aparecia, naquele momento, como algo vital na redefinição do MCS. Nesse sentido, o modelo vai se inspirar fortemente nas ideias metodológicas de Vigotski (1996).

Para o psicólogo russo, uma abordagem nova de um problema científico acaba por levar à necessidade de construção de novas metodologias. Assim se pode entender a necessidade de um olhar apurado colocada pela mudança de direção no interior do MCS. Por isso, Silva levará em conta três indicações metodológicas de Vigotski: 1) a análise de processos e não de objetos. Lins (1999) aponta que Vigotski, ao assumir os pressupostos do materialismo histórico-dialético, dirige o olhar para os modos como os processos cognitivos humanos se transformam, selando uma filiação teórica do MCS com a psicologia histórico-cultural; 2) explicação versus a descrição, assumindo a primeira como modo de compreensão dos processos cognitivos humanos e; 3) o problema do comportamento fossilizado, apontando para a importância de o pesquisador investigar o processos de produção dos comportamentos automatizados e fossilizados. Nesse sentido, a investigação dirigir-se-ia à gênese das funções psicológicas humanas, chamadas por Vigotski de funções psicológicas superiores.

O deslocamento de olhar proposto pelo MCS acaba por operar, assim, uma modificação em alguns de seus conceitos. O significado, por exemplo, aparece em Lins (1999) como aquilo que um sujeito pode e efetivamente diz sobre um determinado objeto, o que constitui esse objeto enquanto tal, no interior de uma atividade. O autor aponta que o significado não é tudo o que pode ser dito sobre um objeto, mas sim o que é, de fato, enunciado, o que de fato constitui um objeto numa dada atividade. Lembremos do exemplo da crença-afirmação $2 + 3 = 3 + 2 = 5$. Se uma criança produz significado para este texto por meio do uso das mãos, mostrando seus dedos, esse é o significado envolvido, é aquilo que constitui o conhecimento na atividade de produzir significados para aquele texto. Não se pensa aqui em todos os significados possíveis – inclusive aqueles do matemático – se eles não se efetivam nas enunciações.

Discutir, no âmbito do MCS, a produção de significado, é considerar que o sujeito sempre fala, sempre enuncia na direção de alguém, na direção de um outro. O objeto, no modelo, está sempre em processo de constituição e a validade ou não da produção de significados só pode ser entendida a partir do lócus social. Assim, se produzo significados, por exemplo, para a noção de número, faço para um outro e, assim, a produção do objeto "número" é dirigida a alguém, a um interlocutor. Lins (1999) aponta que a produção de significados é dialógica do ponto de vista cognitivo. Nesse sentido, o interlocutor de que se fala no MCS não é necessariamente o outro biológico – embora possa sê-lo – mas, fundamentalmente o outro cognitivo que compartilha com o sujeito do conhecimento modos de produzir significados. Segundo Linardi (2006, p. 34), "ele [o sujeito] fala numa direção na qual acredita que seria ouvido". Dessa maneira, esse sujeito do conhecimento garante que sua fala tenha legitimidade para um grupo social e cultural. É por isso que, no processo de produção de significados, não se fala na constituição correta ou não de um objeto, mas numa produção legítima para alguém.

É interessante notar que o MCS opera uma ampliação se tomarmos a noção de diálogo proposta por Vigotski, que o caracteriza, fundamentalmente, em termos do diálogo face a face. Para o psicólogo russo, “O diálogo sempre pressupõe a percepção visual do interlocutor, de sua mímica e seus gestos, bem como a percepção acústica de todo o aspecto entonacional da fala” (VIGOTSKI, 2009, p. 454). Vale lembrar que Vigotski discute, nesse trecho, uma tendência predicativa e dialógica no uso da linguagem falada atrelada a uma

> proximidade psicológica dos interlocutores *[que]* cria entre os falantes uma identidade de apercepção, o que, por sua vez, é momento determinante para se compreender por insinuação, para a abreviação da linguagem” (VIGOTSKI, 2009, p. 460).

Embora, ao lermos as noções de diálogo em Lins e em Vigotski, encontremos um ponto de ampliação desse conceito no MCS, os dois autores parecem guardar entre si alguns pontos de continuidade bastante relevantes. Para explicitarmos esses pontos, teremos que nos debruçar sobre a noção de comunicação de que Lins se utiliza no MCS. Essa discussão nos levará a pensar o que é a internalização dentro da psicologia histórico-cultural e, nesse momento, teremos elementos suficientes para colocar o problema do diálogo e da aprendizagem dentro do MCS em consonância com as contribuições da escola psicológica soviética.

Lins (1999), ao falar sobre o desenvolvimento dos processos comunicativos, explicita duas perspectivas: a primeira, tradicionalmente bastante difundida, é a de que a comunicação é um processo efetivo, seja porque diz respeito a mundo objetivo, seja porque se concebe uma tríade formada por emissor, mensagem e receptor na qual a comunicação depende de uma codificação por parte do emissor e de uma decodificação por parte do receptor. Aqui, a norma é a comunicação efetiva, sendo o fracasso do processo um acidente; a segunda – Lins a atribui a Jacques Derrida – pensa a comunicação efetiva como acidente, sendo a norma uma não-comunicação. Lins, propõe, a partir de limitações nos modelos acima, pensar a comunicação a partir dos conceitos de texto, autor e leitor.

Iniciemos pelo autor, que sempre fala na direção do interlocutor, que aqui chamaremos de leitor. Ao falar, o autor constitui, a um só tempo, o texto e o leitor[30], de modo que pressupõe uma transmissão no processo comunicativo.

---

[30] Aqui é preciso reiterar que o leitor/interlocutor não é necessariamente o outro biológico, mas, fundamentalmente, o outro cognitivo.

O leitor, por outro lado, também sempre constitui um autor, tomando-o como interlocutor. Nesse sentido, sua produção de significados para o texto procura levar em conta aquilo que o próprio autor diria sobre o texto. Aqui, a comunicação enquanto transmissão também só ocorre no imaginário do leitor. Lins (1999) considera que o leitor só se constitui enquanto tal a partir do momento em que produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor desse texto. Dessa forma, Lins vai entender que o texto é um resíduo de enunciação para o qual o leitor produz significados. É por essa razão que entenderá que não há leitor sem texto assim como não há texto sem leitor.

Uma consequência central da noção de comunicação no MCS é que, ao se colocar alternadamente na função de autor e de leitor de um texto, essas duas imagens acabam por se fundir, produzindo um efeito psicológico de que a comunicação é efetiva. Lins argumenta, porém, que esse efeito por si só não dá conta de explicar por que uma divergência entre autor e leitor não ocorre. Por isso, dirá que autor e leitor não são constituídos arbitrariamente, mas a partir de modos de produção de significados que compartilham e que internalizam como legítimos. Nesse sentido, autor e leitor compartilham um espaço comunicativo em que a transmissão – convergência total entre autor e leitor – não é necessária. O importante é que autor e leitor não se afastem demais. Silva aponta, ainda, um efeito da noção de comunicação no MCS para a própria investigação do processo de produção de significados: "em termos teóricos, um caminho para uma leitura positiva[31] [tal como discutimos anteriormente] é buscar fazer uma leitura do outro através de suas legitimidades, de seus interlocutores, compartilhando o mesmo espaço comunicativo" (SILVA, 2003, p. 66). A questão que parece surgir é como se dão os processo de internalização no âmbito do MCS. E aqui, novamente, a inspiração da psicologia histórico-cultural volta a se pronunciar com bastante força.

Vamos nos centrar em dois pontos principais com relação à proximidade do MCS com a psicologia histórico-cultural: o primeiro diz respeito à noção de internalização que Lins (1994, 1999) utiliza para elucidar os processos de legitimação da fala dos sujeitos e que Vigotski utiliza para explicar o movimento geral de aprendizagem e desenvolvimento humanos. A discussão sobre a

[31] O termo utilizado por Linardi (2006) é leitura plausível que tem, fundamentalmente, a mesma função da leitura positiva: ler o sujeito do conhecimento por meio de seus próprios interlocutores, apontando uma busca pela coerência e pela lógica do discurso do outro, em detrimento de uma leitura de dificuldades e erros, ou seja, em detrimento de uma leitura pela falta.

internalização nos levará pensar acerca da ideia de campo semântico; o segundo diz respeito ao conceito de atividade elaborado pelo psicólogo russo Alexei Leontiev, colaborador de Vigotski, utilizado por Lins (1997, 1999, 2004) para explicitar aquilo que entende por significado e produção de significado.

Bem, iniciemos pensando sobre o papel do interlocutor: é ele quem medeia a formação e o desenvolvimento da consciência do sujeito, já que é para esse interlocutor que o sujeito do conhecimento produz significados. Mais do que isso, o papel do interlocutor é ser o mediador cultural para quem o sujeito pergunta e olha em busca de sinais de que está falando adequadamente (LINS, 1994, p. 33). Podemos pensar o interlocutor do MCS com Vigotski, para quem a aprendizagem e o desenvolvimento se dão a partir da internalização de formas culturais de pensar e agir, formas culturais de significação. É por isso que compreender o homem como sujeito social e histórico implica em conceber sua constituição e desenvolvimento como algo que parte da cultura em direção ao sujeito. Oliveira reforça essa tese ao dizer que

> Vygotsky tem como um de seus pressupostos básicos a idéia de que o ser humano constitui-se enquanto tal na sua relação com o outro social. A cultura torna-se parte da natureza humana num processo histórico que, ao longo do desenvolvimento da espécie e do indivíduo, molda o funcionamento psicológico do homem (OLIVEIRA, 1992, p. 24).

Considerado assim, o papel do interlocutor é de fundamental importância no MCS, já que Lins aponta, apoiado na concepção vigotskiana de homem, que seu modelo toma o meio social como lócus último das relatividades (LINS, 1994). É, pois para a cultura, para os interlocutores, que o sujeito fala no processo de produção de significados. É importante considerar que a distinção sujeito do conhecimento/interlocutor pode ser entendida por meio de uma distinção clássica na investigação psicológica: a interioridade do sujeito e a exterioridade do meio social.

Vigotski (1996) pensa a distinção interior/exterior a partir da relação entre o signo e o instrumento. Para o autor, a invenção dos signos como mediadores dos processos psicológicos é análoga à invenção e o uso dos instrumentos para as atividades humanas de controle da natureza. Dessa maneira, ambos podem ser considerados como pertencentes a uma categoria mais geral, a atividade mediada. Essa, porém, é apenas a semelhança que os une. Vigotski propõe, ainda, uma distinção fundamental entre o signo e o instrumento, considerando que

> A função do instrumento é servir como um condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado *externamente*; deve necessariamente levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pelo qual a atividade humana externa é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio indivíduo; o signo é orientado *internamente* (VIGOTSKI, 1996, p. 72-73).

É a partir da distinção entre instrumento/signo, exterior/interior que Vigotski colocará, então, o problema da formação dos processos psicológicos tipicamente humanos, que ele chamará de processos psicológicos superiores. O autor entenderá, assim, que o que caracteriza tais processos é uma combinação entre signo e instrumento na atividade psicológica. Dessa maneira, abre frente para compreender como modos de pensar e agir culturais, externos ao sujeito, são, ao longo do processo de desenvolvimento, *internalizados*. A internalização é entendida como a “reconstrução interna de uma operação externa” (VIGOTSKI, 1996, p. 74).

O processo de internalização é pensado por Lins (1994) no âmbito do MCS. Para ele, sendo o interlocutor um outro cognitivo para quem se fala, pode-se caracterizar esse interlocutor como o agente que dá condições para o processo de desenvolvimento cognitivo do sujeito. Retomemos a ideia de comunicação no modelo. Uma vez que a constituição de autor e leitor[32] ou, poderíamos dizer, sujeito e interlocutor, não se dá maneira arbitrária, ou seja, autor e leitor (sujeito e interlocutor) constituem-se a partir de modos de produção de significados legítimos para ambos, podemos pensar, junto a Lins (1994, p. 33) que

> O que é internalizado são precisamente *modos de produzir significado*, isto é, o que é internalizado são *campos semânticos*. O que esta afirmação implica é que através da interação o sujeito possivelmente apre(e)nde dos interlocutores que certos *modos de produzir significado* são legítimos, que têm *sentido* para ele, sujeito, e ao engajar-se na prática de produzir *significado* dentro destes *campos semânticos* o sujeito se insere no social a que pertencem os interlocutores *ao mesmo tempo que abre a possibilidade de orientar a si próprio dali para a frente nas atividades em questão*.

A internalização se dá, dessa forma, pela reconstrução, no sujeito, de um modo de produzir significado aceito, culturalmente, por determinado interlocutor. Por isso, autor e leitor não se constituem arbitrariamente, mas a partir de modos de produção de significados legítimos para ambos. Aqui podemos retomar a noção de

[32] É importante compreender aqui que no processo de comunicação no MCS, o autor fala para seu leitor, que pode ser identificado com a figura do interlocutor; o leitor, por sua vez, fala para o autor que, nesse caso, assume a função do interlocutor.

diálogo em Vigotski e indicar seu caráter de continuidade com relação ao diálogo em Lins. Se, para o psicólogo russo o diálogo não pode prescindir da entonação, dos movimentos gestuais, que permitem compreender o outro por meio de uma identidade de apercepção, o movimento de constituição do leitor no MCS, por meio da alternação das funções de autor e leitor, parece garantir que, mesmo sem a presença física do outro (ser biológico), é possível criar com "ele" tal identidade de apercepção (ser cognitivo).

Note-se que na citação anterior a internalização aparece atrelada à noção de campo semântico. A mesma citação, também, acaba por dar-lhe uma característica: campos semânticos são modos de produção de significados. Essa noção, porém, vai ser reformulada e ampliada em textos posteriores de Lins, abarcando outros elementos, como estipulações locais, núcleo, lógica de operações e atividade.

A caracterização de conhecimento como crença-afirmação junto a uma justificação acaba por levar Lins (1999) à seguinte questão: o sujeito do conhecimento, ao produzir significados deve, também, justificar suas justificações? O autor propõe que pensemos, então, na noção de estipulações. Essas são compreendidas como afirmações que não precisam ser justificadas, ou seja, afirmações que funcionam como verdades locais. Um exemplo pode ser dado se voltarmos ao texto$2+3=3+2=5$. Se produzo significados para esse texto afirmando que *"$2+3=3+2$, pois 3 e 2 são números inteiros e o conjunto dos números inteiros é um grupo abeliano"*, as justificações "o conjunto dos números inteiros é um grupo abeliano" e *"3 e 2 são números inteiros"* não precisam ser justificadas. Podemos entendê-las como estipulações locais, como se correspondessem a elementos já dados no processo de produção de significados. A novidade dessa enunciação é a crença-afirmação "$2+3=3+2=5$" (LINS, 1997). É importante salientar que as estipulações no MCS são locais e esse "*locais"* se refere a um núcleo numa determinada atividade na qual o sujeito se engaja no processo de produção de significados. Ao conjunto de estipulações locais Lins (1997, 1999) chamará de núcleo de uma atividade. Assim, se tomarmos a atividade de produzir significados para a equação "$3x+10=100$" a partir de uma balança de dois pratos, o núcleo diz respeito ao conjunto de afirmações aceitas sem justificação nessa atividade como, por exemplo: 1) a balança *é* uma equação, na medida que guarda consonância com as propriedades da própria equação; 2) a equação *é* uma balança em equilíbrio; 3) se retiro ou coloco pesos em um prato, tenho que fazer o mesmo no outro prato; e assim por diante. É com relação a esses objetos que o processo de produção de significados vai acontecer.

Lins chama atenção para o fato de que "um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional" (LINS, 1997, p. 144). O que importa é que os núcleos não são constituídos a priori da atividade, mas nela podem se modificar, incluindo ou excluindo estipulações no decorrer da atividade. A partir da balança, podemos produzir significados para equações se esta for a atividade, mas também para justiça ou para medidas de massa, por exemplo. O processo de produção de significados para medidas de massa implicará na adoção de estipulações, e, consequentemente, de núcleos diferentes daqueles utilizados quando falamos de uma equação.

Tomando a observação da constituição do núcleo de uma atividade, pode-se identificar os modos pelos quais os sujeitos operam, pode-se identificar a lógica das operações que se fiam ao processo de produção de significados. A operação é aquilo que o sujeito faz com o objeto; a lógica, por sua vez, é aquilo que garante que ele pode operar de determinado modo com o objeto. (SILVA, 2003).

> Uma outra noção essencial em nossa formulação é a de lógica das operações. Posto de uma forma simples, estamos nos referindo a um conjunto de estipulações, dentro de um núcleo, que se referem diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados. Por exemplo, haveria uma "lógica das operações com todo e partes", que corresponderia ao que pode ser feito com um todo e suas partes: juntar duas ou mais partes, separar uma ou mais partes de um todo, repartir o todo em uma parte ou em partes (iguais ou não), comparar partes (LINS, 1997, p. 145).

A investigação no MCS procura, portanto, entender a lógica das operações que se constituem na produção de significados, entender que processos levam à constituição de objetos. Estão colocados, assim, todos os elementos que permitem dizer com mais precisão o que é um campo semântico: a atividade de produzir significado com relação a um núcleo (SILVA, 2003).

Salientamos a mudança de direção que a noção de campo semântico sofreu. Se em Lins (1994) ela aparece como um modo de produção de significado, em Silva (2003) aparece como um modo de produzir significados para um determinado núcleo no interior de uma atividade. Dessa maneira, o caráter processual da produção de significados fica mais evidentemente formulado, já que a própria noção de núcleo só pode ser compreendida no interior de uma atividade. Dessa maneira, o campo semântico não tem o objetivo de dizer o que deve acontecer na atividade, mas, ao contrário, o que está sendo a atividade (LINS, 1999).

Ao discutir a noção de campo semântico e a questão de sua internalização, Lins (1994) coloca a problemática do MCS em linha com a discussão vigotskiana da Zona de Desenvolvimento Iminente. Tal conceito aparece na obra do psicólogo russo para explicar o vínculo que se estabelece entre a aprendizagem e o desenvolvimento do sujeito. É interessante notar que Vigotski (2009) identifica três maneiras de colocar a relação entre desenvolvimento e aprendizagem na psicologia.

A primeira delas é entender os dois processos como independentes. Aqui, entende-se que o desenvolvimento dá-se de maneira natural como maturação biológica e a aprendizagem apoia-se no substrato maturacional. O desenvolvimento cria, então, as potencialidades e a aprendizagem as realiza. A teoria de Piaget é um exemplo dessa primeira maneira de colocação do problema: os estágios de desenvolvimento cognitivo piagetianos acontecem de maneira independente de estarem os sujeitos em processo de aprendizagem ou não (VIGOTSKI, 2009). A segunda das posições – Vigotski a atribuiu, por exemplo, ao associacionismo de William James e à reflexologia de Thorndike – identifica aprendizagem e desenvolvimento. Vigotski pondera que essas posições consideram aprendizagem e desenvolvimento como um acúmulo gradual de reflexos condicionados. Ao identificar as duas noções, torna-se impossível colocar a questão das relações entre os dois processos. Por último, o terceiro modo de colocação do problema é atribuído à psicologia gestaltista, e procura uma superação dos dois pontos de vista anteriormente constituídos. Vigotski encontra em Kurt Koffka essa terceira posição.

Contrapondo-se a essas posições, Vigotski vai dizer que sua tese é de que os processos de desenvolvimento e aprendizagem são distintos, embora existam entre eles relações de ordem complexa que cabe à psicologia explicar. A partir do estudo do desenvolvimento de conceitos científicos na esfera escolar, o autor dirá que “a aprendizagem se apoia em processos psíquicos imaturos, que apenas estão iniciando o seu círculo primeiro e básico de desenvolvimento” (VIGOTSKI, 2009, p. 318). Colocando o problema dessa maneira, Vigotski produz uma mudança de direção profunda nas correntes psicológicas que entendem que a aprendizagem se apoia no desenvolvimento maturacional do sujeito já que, para ele, a aprendizagem não finda o processo de desenvolvimento, mas o desencadeia. Dessa forma, a aprendizagem está sempre à frente do desenvolvimento e isso gera um efeito importante para sua formulação teórica: não se pode considerar o desenvolvimento do sujeito somente a partir das funções psicológicas que nele já se desenvolveram. É preciso que a psicologia dirija a atenção, também, aqueles processos que estão em fase de maturação imediata, em processo de desenvolvimento.

É nessa ordem de ideias, para explicar as relações entre desenvolvimento e aprendizagem, que Vigotski vai propor a distinção de duas zonas de desenvolvimento do pensamento humano, em particular, do pensamento infantil. A primeira, que diz respeito às funções psicológicas já maduras a que nos referimos anteriormente, é chamada de zona de desenvolvimento atual: por meio dela, "ficamos sabendo do que a criança dispõe e o que ela sabe no dia de hoje, uma vez que só se dá atenção aos problemas que ela resolve sozinha" (VIGOTSKI, 2009, p. 326); a segunda, que diz respeito às funções psicológicas em processo de desenvolvimento, é chamada de zona de desenvolvimento iminente.

> [...] essa discrepância entre a idade mental real ou nível de desenvolvimento atual,que é definida com o auxílio dos problemas resolvidos com autonomia, e o nível que ela atinge ao resolver problemas sem autonomia, em colaboração com outra pessoa, determina a zona de desenvolvimento imediato[33] da criança" (VIGOTSKI, 2009, p. 327).

---

[33] O termo Zona de Desenvolvimento Imediato é controverso mesmo entre os pesquisadores vigotskianos. Paulo Bezerra, tradutor de Vigotski para o português, no Prólogo do Tradutor de *A Construção do Pensamento e da Linguagem*, diz que "outro conceito criado por Vigotski diz respeito ao processo de aprendizagem e chegou ao Brasil como *zona de desenvolvimento proximal*. É um conceito que já se encontra em *Psicologia pedagógica* [...] e merece um esclarecimento à parte. Trata-se de um estágio de processo de aprendizagem em que o aluno consegue fazer sozinho ou com a colaboração de colegas mais adiantados o que antes fazia com o auxílio do professor, isto é, dispensa a mediação do professor. Na ótica de Vigotski, esse "fazer em colaboração" não anula mas destaca a participação criadora da criança e serve para medir o seu nível de desenvolvimento intelectual, sua capacidade de discernimento, de tomar a iniciativa, de começar a fazer sozinha o que antes só fazia acompanhada, sendo, ainda, um valiosíssimo critério de verificação da eficácia do processo de ensino-aprendizagem. Resumindo, é um estágio em que a criança traduz no seu desempenho imediato os novos conteúdos e as novas habilidades adquiridas no processo de ensino-aprendizagem, em que ela revela o que pode fazer hoje o que ontem não conseguia fazer. É isto que Vigotski define como *zona de desenvolvimento imediato*, que no Brasil apareceu como *zona de desenvolvimento proximal* (!). Por que *imediato* e não esse esquisito *proximal*? Por dois motivos. Primeiro: o adjetivo que Vigotski acopla ao substantivo desenvolvimento (*razvítie*, substantivo neutro) é *blijáichee,* adjetivo neutro do grau superlativo sintético absoluto, derivado do adjetivo positivo *blízkii*, que significa próximo. Logo, *blijáichee* significa o mais próximo, "proxíssimo", imediato. Segundo: a própria noção implícita no conceito vigotskiano é de que, no desempenho do aluno que resolve problemas sem a mediação do professor, pode-se aferir incontinenti o nível do seu desenvolvimento mental *imediato*, fator de mensuração da dinâmica do seu desenvolvimento intelectual e do aproveitamento da aprendizagem. Daí o termo *zona de desenvolvimento imediato"*. (BEZERRA apud VIGOTSKI, 2009, p. X-XI). Já Zóia Prestes (2010), que desenvolve sua tese estudando as traduções, critica a tradução de Bezerra bem como aquelas que derivam da tradução estadunidense, uma vez que considera que nenhuma delas reflete com fidelidade as questões centrais do conceito de Vigotski. Ela vai propor, assim, o termo Zona de Desenvolvimento Iminente.

A noção de zona de desenvolvimento iminente, então, acaba por dar unidade às questões do desenvolvimento e da aprendizagem na análise psicológica vigotskiana: se, por um lado, diz respeito às funções psicológicas que já amadureceram na criança ou, poderíamos pensar, diz respeito aos mecanismos já consolidados de internalização de modos culturais de pensamento, diz respeito, ainda, aos processos de internalização que estão acontecendo no ato da construção da subjetividade da criança. É nesse ínterim que acontece a apropriação da cultura, ou a transformação de funções interpsicológicas em funções intrapsicológicas. A consolidação do processo de internalização completa, por assim dizer, o desenvolvimento de uma certa função psicológica. A partir daí, torna-se desenvolvimento atual. Nesse sentido, o sujeito, que antes conseguia solucionar problemas em cooperação, por meio da mediação de pares, torna-se seu próprio mediador, conseguindo fazer sozinho o que antes não conseguia.

Tomando por base as noções de internalização e de zona de desenvolvimento imediato, Lins (1994) dirá que o problema central do desenvolvimento cognitivo – presente no MCS – é o da internalização, conforme já discutimos anteriormente. Para além disso, "ao internalizar um *modo de produzir significado*, o sujeito passa a ser capaz de ser *seu próprio interlocutor*" (LINS, 1994, p. 33). Assinala-se, assim, a relação que a internalização de campos semânticos tem com a zona de desenvolvimento iminente: se por um lado é preciso a mediação de diferentes interlocutores para produzir significados com relação a núcleos distintos, por outro, ao se engajar na atividade na produção desses significados, o sujeito internaliza os modos de produção legítimos para os diferentes interlocutores, tornando-se, aos poucos, capaz de dizer *com* o interlocutor aquilo que antes dizia *para* ele, *perguntando* a ele, *pedindo* a ele sinais de que falava de modo adequado. O que o sujeito reconstrói em si é a própria forma cultural, num *contato social consigo mesmo* (FREITAS, 1995).

Resta, ainda, discutir a noção de atividade. De saída, podemos dizer que esse é mais um elemento que o MCS compartilha com a psicologia histórico-cultural. A noção de atividade foi desenvolvida pelo psicólogo russo Alexei Leontiev, colaborador e seguidor de Vigotski, e é expressa pelo autor nos seguintes termos:

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o

> sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo (LEONTIEV, 1988, p. 68).

Dessa maneira, nem todos os processos psicológicos podem ser caracterizados como atividades. Pensemos numa situação de sala de aula em que os alunos são inquiridos pelo professor a resolver a equação[34] $3x + 10 = 100$; levemos, ainda, em consideração dois aprendizes engajados na resolução. A professora diz a seus aprendizes que aquela tarefa não contará pontos para a composição da nota bimestral. Ao ouvir isso, o primeiro aluno continua engajado na resolução da equação, enquanto o segundo aluno imediatamente para o que estava fazendo. Levando em conta a caracterização proposta por Leontiev, diríamos que o primeiro aluno estava em uma atividade psicológica. Note-se que a própria proposta da professora desencadeia o processo de produção de significados que passa a ser, a um só tempo, motivo e objeto das operações psicológicas do primeiro aluno. O segundo aluno, por outro lado, não se encontrava na atividade de "resolver a equação", uma vez que a proposta da professora não estimula por si só a continuidade do processo. Motivo e objeto, nesse caso, não coincidem. A atividade psicológica no caso do segundo aluno era "alcançar nota para aprovação no bimestre".

O processo de produção de significados, no âmbito do MCS, acontece sempre no interior de uma atividade. Note-se que essa noção está em consonância com a postura ética do modelo que já discutimos anteriormente. Ao que parece, se o sujeito está em atividade psicológica, ele está *implicado* no processo de produção de significados e, portanto, dizendo/fazendo tudo o que pode no interior daquela atividade.

Em síntese, dizemos com Silva:

> Em resumo, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observamos da perspectiva do MTCS[35] o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve:
> i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;
> ii) A formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e sua lógica;

[34] Essa equação já foi amplamente discutida por Lins (1993; 1997).

[35] MTCS se refere ao Modelo Teórico dos Campos Semânticos, nomenclatura que foi posteriormente substituída por MCS – Modelo dos Campos Semânticos.

> iii) A produção de conhecimento;
> iv) Os interlocutores;
> v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade (SILVA, 2003, p. 77).

Para finalizarmos este texto que apresenta o MCS, resta comentar os efeitos do modelo para a educação matemática. É preciso entender que Lins afasta-se claramente dos modos de leitura que a vertente piagetiana propõe. Em particular, afasta-se da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Isso fica claro nas proposições do MCS, mas, se mostra também quando Lins esboça o que para ele seria um “esqueleto” da educação matemática praticada por meio dos pressupostos do MCS. Ele parte de uma distinção entre a matemática da escola e o que chama de matemática da rua. Ele vai na contramão das tendências que dizem que há “matemática escolar” na rua: a álgebra, a aritmética ou a geometria que porventura apareçam na rua não são as mesmas que aprecem na escola. Para o autor, são aritméticas, álgebras e geometrias distintas, na medida em que levam em consideração interlocutores e, portanto, legitimidades distintos (LINS, 1997). A partir da distinção entre uma “matemática escolar” e uma “matemática da rua”, Lins propõe que: 1) a escola explicite os modos de produção de significados da rua; 2) a escola legitime dentro e fora dela os modos de produção de significados da rua; 3) a escola proponha novos modos de produção de significados que, ao invés de substituir aqueles da rua, juntam-se a eles. (LINS, 1999).

As propostas de Lins implicam, assim, em considerar que o papel da educação matemática seja ampliar o escopo de significados com os quais os aprendizes sejam capazes de lidar. Nesse sentido, não há modos privilegiados de produção de significados, ou seja, não se caminha para um progresso rumo aos significados mais verdadeiros. Por fim, é interessante o comentário do autor quando diz que, a partir da ampliação do escopo de significados, ele propõe uma educação matemática que seja vida, e não uma preparação para a vida (LINS, 1999).

Remetemo-nos, aqui, uma última vez, à filiação do MCS com as ideias de Vigotski. Ao propor uma educação matemática preocupada com a ampliação dos horizontes de significação dos sujeitos, Lins parece estar de comum acordo com o psicólogo russo quando esse diz afirma que o significado das palavras se modifica ao longo dos processos de aprendizagem e desenvolvimento humanos:

> O significado das palavras é inconstante. Modifica-se no processo de desenvolvimento da criança. Modifica-se também sob diferentes

> modos de funcionamento do pensamento. É antes uma formação dinâmica que estática (VIGOTSKI, 2009, p. 408).

Ora, o processo de produção de significados para núcleos distintos implica numa mudança da lógica das operações que se constroem e, por conseguinte, em diferentes modos de pensar. A afirmação vigotskiana torna-se importante para o MCS no seguinte sentido: as maneiras de produzir significado são inconstantes e se modificam tão logo sejam distintos os modos de funcionamento do pensamento. O significado é a unidade que vincula o pensamento à palavra. Produzir significado é, assim, produzir, a um só tempo, pensamento e palavra.

PÓS-ESCRITO

NOTAS DE UMA TRAVESSIA

Um pós-escrito. Depois de tanto operar conceitos, fabular, escrever, o que mais dizer? Talvez mais uma fabulação. Um momento. Fabulação? Como assim, fabulação? Fabulação é a ação de fabular e fabular é a arte de compor ou contar fábulas. Permitam-me, pois, uma última dessas fabulações.

A escrita dessa dissertação passou, por assim dizer, pela construção de um texto-fabulação. Mas um texto-fabulação não nasce pronto. Pelo contrário, o Livro das Fabulações surge a partir do Livro dos Modelos. *Mas como pode?* O Livro dos Modelos é aquele cuja escrita procura dar conta de autores, de conceitos, de campos conceituais, de campos semânticos. O Livro dos Modelos é o livro da escrita envelhecida, encadeada pela lógica de uma argumentação que se quer bem feita, consistente, coerente. Se isso então aquilo, donde se depreende que, se conclui que... Logo, ... Portanto, ... Fim.

Houve um tempo em que essa dissertação era composta fundamentalmente pelo Livro dos Modelos e pela análise de alguns episódios de campo. Sim, uma pesquisa havia sido feita: uma imersão de dois meses em uma escola da rede municipal de ensino de Juiz de Fora, em turmas de 6º e 7º anos. Fundamentalmente, o pesquisador acompanhava a professora de matemática dessas turmas pela escola durante todo o dia. A *tarefa* consistia em *cartografar* o que acontece em uma sala de aula de matemática, articulando o acontecimento aula de matemática com o principal conceito do trabalho: a cognição inventiva. Um pesquisador que assiste aulas de matemática em turmas de 6º e 7º anos do ensino fundamental, talvez mais afetado por modelos de aprendizagem e por cognição inventiva do que pela própria sala de aula. Talvez, somente talvez. Só para ser mais preciso, houve um tempo em que essa dissertação era composta por um texto de “motivação”, uma releitura de um diálogo socrático, pelo Livro dos Modelos e pela análise de duas ou três situações desse campo que havia sido *cartografado*. Se eu quisesse fazer valer minha formação matemática, podia logo colocar em forma de equação:

$$texto = parte\ "motivação" + discussão\ sobre\ modelos + análise\ de\ dados\ de\ campo.$$

A esse tempo, em que essa dissertação era uma justaposição de coisas, dar-se-á o nome de Qualificação. É só um nome, quase nada a ver com o tempo desse tal de mestrado. Moral da história? Sei lá.

Vozes de um tempo-Qualificação.

Voz de alguém.

- Acho que você precisa sujar mais as mãos, se banhar mais no campo, ser mais afetado, deixar o campo lhe colocar questões, como você fez lá com aquele caso do Sócrates – alguém disse.

- Isso tem que aparecer mais? – perguntei.

- É, porque se você se propõe a ir a campo, é preciso estar com a atenção mais afinada para essa experiência concreta de uma professora que ensina matemática para um grupo de crianças.

- E a cartografia nisso? – arrisquei.

- Bom, eu fiquei meio em dúvida sobre como você faz a sua pesquisa, qual é a sua intervenção naquela escola. Porque a cartografia tem um pouco disso de se debruçar sobre a sua própria intervenção naquele espaço. E há que se fazer uma articulação entre esses problemas teóricos que você vai desdobrando e aquilo que acontece na escola. Os livros e o mundo são a mesma coisa, eles não estão separados. Você tem que ver um jeito de escrever isso, de articular essas coisas, porque por enquanto a pesquisa ainda está começando, você tem poucos relatos, mas quando você tiver seis meses de pesquisa, você vai ter que escolher alguns problemas para articular com o campo – o mesmo alguém terminou.

“Eu não pretendia voltar a campo”, primeiro pensamento em meu silêncio.

“Eu não fiz uma cartografia”, segundo pensamento em meu silêncio.

Voz de outro alguém:

- Acho que você poderia caminhar muito pouco para terminar sua dissertação. Ela está boa dentro de um formato, desse formato em que o campo e a parte teórica estão mais separados: você apresenta o problema, traz uma discussão teórica consistente, enfim. Nesse modo de produzir dissertações falta pouco: talvez um pouco mais de análise – emendou uma segunda pessoa – Mas, enquanto eu ouvia a conversa de vocês, fui ficando cada vez com mais vontade de propor que pode haver um caminho diferente. Em certo sentido, eu acho que você poderia terminar sua dissertação na página dez.

- Na página dez? – eu quis saber.

- Claro! Você fez aqui o exercício que me parece que você quer fazer com a matemática, que é o exercício da invenção. Deu vontade de sugerir que você fizesse isso com o capítulo seguinte também. Porque, o que é isso tudo que você traz? Um diálogo um pouco mais afetado até a segunda parte, depois a coisa fica um pouco mais descolada, as teorias ficam mais descoladas dessa experiência de vida sua como educador, desde moleque. *Em que sentido o seu texto pode ser uma invenção?* Parece que você é um cara que se arrisca, que se afeta e isso não está aparecendo no seu texto. Eu não sei quanto sangue jorrou para sair esse texto aqui, mas é esse cara afetado que eu consegui sacar da escrita dos seus primeiros dois capítulos [ele se referia ao texto "motivação" e à introdução na qual aparece a construção do problema de pesquisa].

Voz de outro outro alguém:

- Me parece que a sua trajetória tanto como estudante, pesquisador ou professor já diz dos incômodos que a educação matemática lhe provocam. Se isso tomar voz no seu texto pode ficar potente, porque há um *tom intenso* nessa escrita da sua trajetória e do diálogo socrático. Acho que você não precisa ficar com o campo que você fez, acho que você precisa ampliar isso: são as marcas produzidas na sua trajetória e no seu pesquisar que podem conversar com esses modelos.

Moral das vozes? Sei lá. O que sei é que elas disseram, disseram de novo, e mais uma vez, e continuam dizendo. O que sei é que aquela estrutura que fundamentava a Dissertação de Mestrado no Livro dos Modelos encontrava-se rachada. *Em que sentido seu texto pode ser uma invenção?* Já ouvi dizer que invenção é uma composição com restos. E as vozes dão pistas sobre os restos: a experiência de escola, a iniciação científica, a vivência como professor, aluno de estágio, e por aí vai. O que ficava, ainda, era o problema da composição. O que compõe com esses restos, com uma ampliação do campo de pesquisa para as experiências de uma travessia? Sei lá.

Voltar a campo. Revisitar materiais: cadernos de campo, relatórios de pesquisa, notas de campo expandidas, artigos, trabalhos apresentados, materiais produzidos por alunos em atividades que propus durante disciplinas de prática escolar e de estágio na licenciatura. Seria uma composição com essa "volta ao passado"? Um trabalho de campo diferente: não havia mais salas de aula a se observar, professores ensinando matemática, barulho de sala de aula, cheiro, cor, vida. Havia montes de papéis *sobre* salas de aulas observadas, *sobre* professores que ensinavam matemática, *sobre* barulho de sala de aula, *sobre* cheiro, *sobre* cor, *sobre* vida. Não seria, também isso, pesquisa?

Compor com os restos: fragmentos de memórias, de atividades, de anotações. Tomar e apresentar como *real* aquilo que é *imaginário*. Potência, *fabulação*! Fabulação como pura potência, como atravessamento das formas do vivido, como falseamento da memória "[...]substituindo as imagens-lembrança reais por imagens falsas, imagens-fábula as quais interferem diretamente em nossa ação sobre o mundo. A fabulação rompe, portanto, a nossa suposta relação verídica com a vida ao se inserir no sistema produtor de imagens" (PIMENTEL, 2010, p. 135).

A fabulação surge nessa dissertação como aquilo que dá expressão a uma política de escrita que envolve a potência da criação e certos modos de se estabelecer relação com o conhecimento, com a aprendizagem e com a própria pesquisa. Por outro lado, a fabulação se constitui como o próprio modo de se trabalhar o problema das implicações de modelos de aprendizagem em educação matemática, já que os diversos desdobramentos que discutimos são produzidos no revezamento entre as fabulações e os modelos.

Moral das fabulações? Sei lá. Fabulação não se confunde com fábula. Dizem por aí que fábula é um gênero narrativo em que os personagens são, em geral, animais que imitam os modos típicos de ser humano. Na fábula, toda a estratégia ficcional se constitui no sentido de se extrair uma moral, uma lição. Ela coloca em jogo um modo de se produzir por meio de uma moral. Fabulação é devir, condição de toda fábula, mas é também o que mantém a fábula viva, como instância problemática e proliferante. Se à fábula se fia uma moral, à fabulação se fia uma ética que coloca a moral em questão, que se pergunta pelas implicações da vontade de verdade instituída pela moral. "A fabulação é cisão e não coexistência. Ela cinde, ela rompe, ela violenta o passado" (PIMENTEL, 2010, p. 137).

O que antes fora uma Dissertação de Mestrado em seu sentido mais canônico, vai dando lugar, aos poucos, a um texto-fabulação; o texto cuja principal força residia no Livro dos Modelos, agora dá lugar a um texto cuja força talvez esteja no próprio movimento de criação. O Livro das Fabulações passa, então, a ser central[36].

* * *

No Livro das Fabulações, discutimos alguns episódios junto a modelos de aprendizagem e cognição. Em *E no início foram a recognição... e a matemática* nos debruçamos sobre o modelo platônico, que instaura uma dicotomia entre alma/corpo

[36] A noção de fabulação parece ter potentes ressonâncias com a noção de invenção, em especial quando a articulamos com discussões em torno das filosofias de Deleuze e Bergson. Nossa pesquisa aponta para essa relação, embora não se debruce sobre seu estudo. Acreditamos que esse problema pode ganhar corpo em futuras investigações.

e coloca o problema da cognição por meio da ideia de rememoração e de ascensão da alma em direção às ideias. Na sala de aula, esse modelo se traduz por uma concepção de matemática como conhecimento dado independente da ação humana, cabendo ao homem um movimento de descoberta. Desse modo, institui a matemática como um corpo de conhecimento que lida com a essência dos objetos, mas que carece de um modo de pensar rigoroso e preciso. Platão vai buscar esse método na dialética e, assim, instaura-se um modelo sala de aula baseado, fundamentalmente, na solução de problemas dados e na superação do erro. Essa solução correta, única está garantida pela existência da Ideia. Além disso, o modelo platônico institui uma afinidade do conhecimento com o bom, o correto e o verdadeiro, de tal forma que o fracasso é entendido como falta de coragem e de procura por parte do sujeito.

Em *As sete maçãs e a fração*, procuramos operar com a TCC de Vergnaud, uma ampliação, para situações didáticas, da perspectiva piagetiana de desenvolvimento humano. Parte-se do pressuposto de que o pensamento humano se desenvolve de acordo com etapas previsíveis, estruturadas segundo o pensamento científico. Assim, ainda que o desenvolvimento cognitivo dependa da ação de um sujeito sobre o objeto, a construção fica submetida a estruturas mentais universais que são as próprias estruturas lógico-matemáticas. Gostaríamos de destacar dois conceitos.

O primeiro diz respeito à própria noção de *estrutura mental* proposta por Piaget que vai se manter na proposição da Teoria dos Campos Conceituais. Tomemos duas características da estrutura de que o autor fala. A totalidade é compreendida como a constituição de leis de composição interna que regem os elementos constituintes da estrutura e que acabam por conferir ao todo propriedades de conjuntos que, sozinhos, os elementos não necessariamente possuem. Já a autorregulação é pensada sob o duplo aspecto da conservação e fechamento das leis de transformação. Enquanto a totalidade vai levar Piaget a considerar que o pensamento funciona conforme leis de composição operatórias que se constituem enquanto sistema de transformações, a noção de autorregulação vai garantir a coerência interna do pensamento, já que tudo o que é construído por ele se submete às leis gerais que o estruturam, ou seja, o sistema de transformações não gera nada fora de si próprio.

O segundo diz respeito à noção de *teoremas-em-ação* no âmbito da Teoria dos

Campos Conceituais, que são entendidos como “competências práticas não explicitáveis simbolicamente” (DA ROCHA FALCÃO; LESSA, 2005, p. 316). Para cada teorema-em-ação corresponde um conceito-em-ação, que se relaciona ao saber formal que desencadeia o teorema-em-ação.

O que queremos chamar atenção é o fato de que, para Vergnaud, todas as situações enfrentadas pelo sujeito fazem referência, ainda que de maneira implícita, a um saber de referência dado de antemão pela matemática científica. Mais do que isso, a noção de estrutura acaba por garantir um desenvolvimento cognitivo que obedece a leis de composição interna e que concorre para um funcionamento invariante. Dessa maneira, o que ocorre é um fechamento à variação cognitiva. As etapas de desenvolvimento concorrem para um construtivismo de caminho necessário (KASTRUP, 2007). Nessa perspectiva, a aprendizagem matemática resta como uma construção sucessiva de representações para conceitos matemáticos científicos. Dessa maneira, ao entrar na sala de aula, a TCC opera uma política cognitiva afim à representação do conhecimento científico e de sua racionalidade.

Em *Os Tanques*, procuramos operar com o MCS de Lins, que tem como mote a dinâmica de produção de significados para a matemática. O discurso que se liga ao Modelo dos Campos Semânticos toma como fundamento o princípio “genético geral do desenvolvimento humano” (PINO, 2000) de Vigotski segundo o qual todas as funções intrapsicológicas já foram, em algum momento anterior, interpsicológicas (VIGOTSKI, 1996). A questão que se abre para pensar a aprendizagem, na perspectiva do psicólogo russo, é a da internalização das funções intrapsicológicas. No Modelo dos Campos Semânticos, o que se internalizam são modos de produção de significado, ou seja, o que se internalizam são os próprios campos semânticos (LINS, 1994). A aprendizagem, portanto, é um processo de internalização das formas culturais de conhecer. Assim entendida, toda produção de significados do sujeito do conhecimento se quer legítima para essa cultura e pede a ela sinais de que fala com plausibilidade.

Sancovschi (2005) discute – a partir de Tudge, pesquisador que trabalha com a psicologia histórico-cultural – a ideia segundo a qual a teoria psicológica de Vigotski traz em si uma teleologia que é a apropriação cultural. Para a autora, essa ideia de teleologia acaba por minar a originalidade dos conceitos vigotskianos. Se a aprendizagem se configura como um processo de apropriação dos modos culturais de conhecer e significar objetos, operamos no campo da representação. Explico:

concebida como produção humana sujeita às relações sociais, a matemática passa a se constituir como um ente cultural cujo conteúdo deve ser ensinado na escola. Passa-se, então, para a questão de que conteúdos vão para a sala de aula. Ora, vemos duas possibilidades: estabelecemos uma matemática que vai ganhar corpo nas salas de aula, constituindo-se hegemonicamente com relação às demais como uma imagem universal do pensamento que deve ser representada; dadas as diversidades culturais, tenta-se dar conta de diferentes contextos sociais em sala de aula, apropriando-se de diferentes modos de pensar e agir que coexistem socialmente. De qualquer maneira, ao operarmos um corte na matemática que chega à sala de aula, acaba-se fazendo uma espécie de congelamento em seu processo de produção, tomando pontos de estabilidade da cultura matemática como tópicos escolares. Com relação ao MCS, o que podemos afirmar é que a tentativa de legitimação de modos de produção de significados da rua pode ser entendida em termos da segunda possibilidade que colocamos acima. A cognição praticada aqui – ou, digamos, a política cognitiva que aqui opera – é a da recognição, uma vez que agora as formas culturais de pensar e agir se configuram como as imagens de pensamento que a educação matemática tem por missão perpetuar. Isso tem por efeito a proliferação de Imagens do Pensamento que se desenvolvem de modo que encontrem ressonância com as variáveis culturais.

Dessa maneira, a aprendizagem resta como um processo de reconhecimento de imagens que agora operam no seio da cultura, ainda que tais imagens sejam mutáveis. Resiste, portanto, uma afinidade da aprendizagem com o conteúdo das imagens. No caso do Modelo dos Campos Semânticos, a internalização dos modos de produção de significado tem por efeito a constituição de falas que se querem legítimas para um interlocutor inserido no campo da cultura. Poderíamos dizer que, se não há nesse modelo um construtivismo de caminho necessário, como na Teoria dos Campos Conceituais, em termos de estágios de desenvolvimento, o que há é uma construção teleológica cuja finalidade é a representação dos modos culturais de pensar e agir – imagens do pensamento no âmbito da cultura.

Em *Sombras, vulcângulos e primos de cone ou um antimodelo*, procuramos discutir as implicações de se pensar a invenção em sala-de-aula. Assim, poderíamos nos perguntar: o que pode a cognição inventiva que já não podia a recognição em suas mais diversas perspectivas? Em particular, como a cognição inventiva pode nos ajudar a compreender a própria *sala-de-aula-de-matemática*? Talvez possamos apontar que a cognição inventiva nos ajuda a construir, em sala de aula, um espaço de problematização das formas cognitivas constituídas, o que aponta para um movimento de construção e ruptura de fluxos cognitivos habituais.

Além disso, a matemática que é produzida na *sala-de-aula* não se produz fora da matemática canônica e dos saberes formais, tampouco os nega. Ao contrário, opera em seu interior por meio de um movimento de diferenciação e produz formas que não podem ser antecipadas, previstas. Nesse sentido, a cognição se configura como um movimento de invenção de problemas (KASTRUP, 2005). É assim, por exemplo, que as formas da Geometria tornam-se problemáticas: embora estejam em um espaço privilegiado de veiculação de determinados discursos já constituídos, a sala de aula, são forçadas para além de seus limites formais.

Tais relações de conhecimento produzem saberes que não tendem à universalidade, mas que possuem uma diferença intrínseca que podem ser problematizadas novamente, apontando para a repetição do movimento de diferenciação. A recognição se efetua, aqui, como efeito provisório de estabilização, como um momento do processo cognitivo que guarda em si uma instabilidade.

Nesse sentido, falar em processos inventivos na *sala-de-aula-de-matemática* não anula a legitimidade e possibilidade das leituras propostas pela Teoria dos Campos Conceituais e pelo Modelo dos Campos Semânticos. Ao contrário, afirma a singularidade e a potência de produção do modo de ler os processos cognitivos de cada uma, já que opera no âmbito do questionamento de seus efeitos e não no âmbito da vontade de verdade. Não se trata, pois, de um problema de ordem teórica desses modelos mas, antes, de um problema político. Esse é um ponto chave a ser considerado: as políticas cognitivas que instauram modelos representacionais acabam por levar a cabo uma constituição moral e moralizante do conhecimento. Elas operam segundo uma vontade de verdade. Desse modo, fazer operar a invenção, cultivar uma política cognitiva que a leve em conta é colocar em questão essa vontade de verdade.

O que se delineia, ao pensarmos uma educação matemática junto à invenção e às políticas cognitivas, é uma discussão que se constitui, concomitantemente, por meio da ética, da estética e da política. *Política* no sentido de que prima por um modo de ser, uma atitude frente aos processos de conhecer; *ética* porque requer um cultivo de atitudes políticas que precipitem a cognição para fora do já constituído por seus fluxos habituais de funcionamento, que a façam bifurcar; *estético* porque envolve a constituição de um espaço de criação. Uma educação matemática que sustente a *sala-de-aula* como espaço de problematização, de produção do sempre novo. Eis o que pode a invenção. Uma educação matemática atenta, que prima por uma atitude frente aos processos de conhecer, cultiva uma política cognitiva: invenção recíproca e indissociável de si-matemática.

Por fim, ainda com relação à nossa última fabulação, cabe discutirmos a questão de um antimodelo. De saída, talvez seja mais cômodo dizer aquilo que um antimodelo não é: um antimodelo não é o *não-modelo*, a *não-forma*, a *não-matemática*, o *não-ensino*, a *não-aprendizagem*. Com isso, queremos deixar explícita logo de imediato a ideia de que pensar um antimodelo não significa negar modelos, formas, matemática, ensino ou aprendizagem que se instituem.

Dizemos isso porque um antimodelo é modelar, mas somente na medida em que cria modelações, inventa as formas, os métodos, os objetos, os sujeitos. Um antimodelo é *anti* porque, ao inventar modelações, deforma pré-modelos e as formas, os métodos, os objetos que eram afins a esses pré-modelos. Um antimodelo não é contrário a qualquer modelo em particular, mas é a crítica radical à ideia de modelo como aquilo que pode ser reproduzido como forma de leitura e, ao ser reproduzido, congela seu processo de produção e de produção do mundo.

Se pensarmos com relação à nossa fabulação, o que veremos acontecer é uma modelação – ou seja, um certo modo de dar expressão e problematizar o que acontece na sala-de-aula – que não opera por meio de categorias, já que o que está em jogo na sala-de-aula-de-matemática é inantecipável, é produção singular. Um antimodelo somente pode se efetuar na imanência do que acontece, e nunca enquanto lei, generalidade ou verdade. Por isso não podemos pensar “o” antimodelo, mas sempre “um” antimodelo que se constitui de maneira pragmática atrelado a um processo de produção singular. Dessa maneira, um antimodelo é aquilo que coloca a própria ideia de modelo em movimento, forçando seus limites, impelindo-a à condição de novidade.

REFERÊNCIAS

ANASTÁCIO, Maria Queiroga Amoroso; CLARETO, Sônia Maria. Concepções de matemática e suas incidências na educação matemática. **Boletim Pedagógico de Matemática**, Juiz de Fora, n. , p. 7-13, 2000.

BERTONI, Nilza. A construção do conhecimento sobre número fracionário. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 31, p. 209-237, 2008. Disponível em: <Disponível em: <http://tragica.org/artigos/02/07-gustavo-camargo.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.>. Acesso em: 21 maio 2013.

BERTONI, Nilza. **Educação e linguagem matemática IV:** frações e números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BOURBAKI, Nicolas. The Architecture of Mathematics. **The American Mathematical Monthly**, Huntsville, v. 57, n. 4, p.221-232, 1950.

BRITO, Márcia Regina Ferreira. **Psicologia da educação matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005.

CAMARGO, Gustavo Arantes. Sobre o conceito de verdade em Nietzsche. **Revista Trágica**: estudos sobre Nietzsche, Rio de Janeiro, v. 1 n. 2, p.93-112, 2008. Disponível em: <http://tragica.org/artigos/02/07-gustavo-camargo.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

CANGUILHEM, Georges. O que é a Psicologia? **Impulso**, Piracicaba, v. 11, n. 26, p.11-26, 1999. Disponível em: <http://www.unimep.br/phpg/editora/revistaspdf/impulso26.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

CANOAS, Silvia Swain. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série).** 1997. 196 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/silvia_swain_canoas.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

SOUZA, Antônio Carlos Carrera de et al. Novas diretrizes para a licenciatura em matemática. **Temas e Debates**, São Paulo, n. 7, p.41-65, 1995.

CLARETO, Sônia Maria; SÁ, Érica Aparecida de. Formação de professores e construção de subjetividades: espaço escolar e o tornar-se educador. In: CALDERANO, Maria da Assunção; LOPES, Paulo Roberto Curvelo (Orgs.). **Formação de Professores no Mundo Contemporâneo:** Desafios, Experiências e Perspectivas. Juiz de Fora: UFJF, 2006. p. 19-38.

CLARETO, Sônia Maria. Espaço escolar: a escola como espaço de formação do professor de matemática. **Projeto de pesquisa submetido como parte de solicitação de concessão de auxílio financeiro à Pró-Reitoria de Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora**, 2007, p. 1-9.

CLARETO, Sônia Maria. Na sala de aula de matemática: inventividade e resistência. In: CLARETO, Sônia Maria; DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Rosa Monteiro (Orgs.). **Filosofia, Matemática e Educação matemática**: compreensões dialogadas. Juiz de Fora: UFJF, 2010. p. 73-86.

CLARETO, Sônia Maria. Na travessia: construção de um campo problemático. In: CLARETO, Sônia Maria; ROTONDO, Margareth Aparecida Sacramento; VEIGA, Ana Lygia Vieira Schil da (Orgs.). **Entre composições:** formação, corpo e educação. Juiz de Fora: UFJF, 2011. p. 17-32.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. **Psicologia da educação matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio; LESSA, Mônica Maria Lins. Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. **Psicologia**: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 18, n. 3, p.315-322, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/prc/v18n3/a04v18n3.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

DELEUZE, Gilles. **A ilha deserta e outros textos.** São Paulo: Iluminuras, 2006a.

DELEUZE, Gilles. **Diferença e repetição.** Rio de Janeiro: Graal, 2006b.

DETONI, Adlai Ralph. Contribuições de uma investigação sobre o espaço para a educação matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 16, n. 19 , p. 19-36, 2003.

DETONI, Adlai Ralph. A geometria se constituindo pré-reflexivamente: propostas. **Revista Eletrônica da Educação**, São Carlos, v. 6 n. 2, p. 187-202, 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/358 /197>. Acesso em: 21 maio 2013.

ESCÓSSIA, Liliana da; TEDESCO, Silvia. O coletivo de forças como plano de experiência cartográfica. In: PASSOS, Eduardo; KASTRUP, Virginia; ESCÓSSIA, Liliana da. **Pistas do método da cartografia:** pesquisa-intervenção e produção de subjetividade (Orgs.). Porto Alegre: Sulina, 2009. p. 92-108.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FREITAS, Maria Teresa Assunção. **Vygotsky e Bakhtin - Psicologia e Educação:** um intertexto. São Paulo: Ática, 1995.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Professor e professor de matemática: das informações que se tem acerca da formação que se espera. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 23, n. 1-2 , p.215-238, 1997.

GALLO, Sílvio. Filosofias da diferença e educação: o revezamento entre teoria e prática. In: CLARETO, Sônia Maria; FERRARI, Anderson (Orgs.). **Foucault, Deleuze & Educação.** Juiz de Fora: UFJF, 2010. p. 49-63.

GALLO, Sílvio. As múltiplas dimensões do aprender. In: CONGRESSO DE EDUCAÇÃO BÁSICA, 2012, Florianópolis . **Anais...** . Florianópolis: Secretaria Municipal de Educação, 2012. p. 01-10. Disponível em: http://www.pmf.sc.gov.br/arquivos/arquivos/pdf/13_02_2012_10.54 .50.a0ac3b8a140676ef8ae0dbf32e662762.pdf. Acesso em: 07 abril 2012.

GONÇALVES, Heitor Antônio. **Educação matemática e cálculo mental:** uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. 2008. 243 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

KASTRUP, Virginia. Aprendizagem, arte e invenção. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 6, n. 1, p. 17-27, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/pe/v6n1/v6n1a03.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

KASTRUP, Virginia. **A invenção de si e do mundo:** uma introdução do tempo e do coletivo no estudo da cognição. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

KASTRUP, Virginia. Políticas cognitivas na formação do professor e o problema do devir-mestre. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 26, n. 93, p. 1273-1288, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v26n93/27279.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

KASTRUP, Virginia; TEDESCO, Silvia; PASSOS, Eduardo (Orgs.). **Políticas da cognição.** Porto Alegre: Sulina, 2008.

LARA, Isabel Cristina Machado de. O uso da estrutura multiplicativa na resolução de problemas nos anos iniciais da escola básica. **Vidya**, Santa Maria, v. 31, n. 2, p.105-122, 2011. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/35/2011-2/07.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

LARROSA, Jorge. **Nietzsche & a educação.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

LINARDI, Patrícia Rosana. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática.** 2006. 375 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006. Disponível em:<http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2006/linardi_pr_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

LINS, Rômulo Campos. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa. **Revista da SBEM**, Campinas, n. 1, p. 75-91, 1993.

LINS, Rômulo Campos. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, Blumenal, v. 1, n. 7, p.29-39, 1994

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Rômulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani.**Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999. p. 75-94.

LINS, Rômulo Campos. The production of meaning for algebra: a perspective based on a theorical model of semantic fields. In: SHUTHERLAND, Rosamund et al. (Eds.). **Perspectives on school algebra.** Londres: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 37-60.

LINS, Rômulo Campos. **Análise sistemática e crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional.** 2002. 87 f. Tese (Livre-docência) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

LINS, Rômulo Campos. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 92-120.

MACHADO, Roberto. **Deleuze, a arte e a filosofia.** Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MENEGUETTI, Renata. O conhecimento matemático no realismo e no idealismo: compreensão e reflexão. **Episteme**, Porto Alegre, n. 16, p.137-149, 2003.

MORO, Maria Lúcia Faria. Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. **Psicologia**: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 17, n. 2, p. 251-266, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/prc/v17n2/22477.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

MORO, Maria Lúcia Faria. Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. **Psicologia**: Teoria e pesquisa, Brasília, v. 21, n. 2, p.217-226, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ptp/v21n2/a12v21n2.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

MUELLER, Fernand-lucien. **História da psicologia:** da Antiguidade aos dias de hoje. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky e o processo de formação de conceitos. In: LA TAILLE, Yves de; OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon:** teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992. p. 23-34.

PLATÃO. **Mênom.** Rio de Janeiro: Loyola, 2001.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **A psicologia da criança.** São Paulo: Difel, 1974.

PIAGET, Jean. **O estruturalismo.** Rio de Janeiro: Difusão Editorial, 1979.

PIAGET, Jean. **Epistemologia genética.** São Paulo: Martins Fontes, 1990.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia.** Rio de Janeiro: Forense, 1993.

PIMENTEL, Mariana Rodrigues. **Fabulação:** a memória do futuro. 2010. 152 f. Tese (Doutorado em Letras) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

PINO, Angel. O social e o cultural na obra de Vigotski. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 21, n. 71, p. 45-78, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v21n71/a03v2171.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

PRESTES, Zóia Ribeiro. **Quando não é quase a mesma coisa:** análise de traduções de Lev Seminionovith Vigotski no Brasil - Repercussões no campo educacional. 2010. 295 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

ROLNIK, Sueli. Pensamento, corpo e devir: uma perspectiva ético/estético/política no trabalho acadêmico. **Cadernos de Subjetividade**, São Paulo, v.1, n. 2, p. 241-251, 1993.

SANCOVSCHI, Beatriz. **Sobre a aprendizagem:** ressonâncias entre a abordagem enativa de F. Varela e a psicologia histórico-cultural de L.S. Vygotski. 2005. 143 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SANCOVSCHI, Beatriz. Contribuição da abordagem autopoiética-enativa ao conceito de adaptação psicológica. **Informática Na Educação**: teoria & prática, Porto Alegre, v. 12, n. 2, p. 59-69, 2009. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/9552/7242>. Acesso em: 21 maio 2013.

SANTOS PRATA, Maria Regina dos. A produção de subjetividade e as relações de poder na escola: uma reflexão sobre a sociedade disciplinar na configuração social da atualidade. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 28, p.108-116,

2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a09n28.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

SILVA, Amarildo Melchiades da. Impermeabilização no processo de produção de significados para a álgebra linear. In: ANGELO, Claudia Laus et al (Orgs.). **Modelos dos campos semânticos e educação matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 79-90.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática.** 2003. 244 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

TEDESCO, Silvia. As práticas do dizer e os processos de subjetivação. **Interação em Psicologia**, Curitiba, v. 10, n. 2, p.357-362, 2006. Disponível em: <http://ojs.c3sl.ufpr.br/ojs2/index.php/psicologia/article/view/7694/5486>. Acesso em: 21 maio 2013.

VARELA, Francisco. **Conhecer:** as ciências cognitivas, tendências e perspectivas. Lisboa: Instituto Piaget, 1994.

VERGNAUD, Gerard. Psicologia cognitiva y del desarrollo y didacticas de las matemáticas. In: HUARTE, Fernando (Org.). **Temas actuales sobre psicopedagogia y didactica.** Madri: Narcea, 1988. p. 239-254.

VERGNAUD, Gerard. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gerard. Longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. , p.15-27, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/02.pdf>. Acesso em: 21 maio 2013.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2009.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1996.

VIGOTSKI, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexei Nikolaevich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1988.