Gildo de Almeida Leonel

Método para visualização de campos tensoriais tridimensionais baseado em rastreamento de partículas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Marcelo Bernardes Vieira

Coorientador: Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva Barra

Juiz de Fora

2011

Leonel, Gildo de Almeida.

Método para visualização de campos tensoriais tridimensionais baseado em rastreamento de partículas / Gildo de Almeida Leonel. – 2011.
75 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

Ciência da computação. 2. Campos tensoriais. 3. Partículas (Física). I. Título.

CDU 681.3

Gildo de Almeida Leonel

Método para visualização de campos tensoriais tridimensionais baseado em rastreamento de partículas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 17 de Janeiro de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Prof. D.Sc. Marcelo Bernardes Vieira - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. D.Sc. Antonio Alberto Fernandes de Oliveira
COPPE / Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profa. D.Sc. Flávia de Souza Bastos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Aos meus pais, Antônio Luiz e Maria Arlete. Vocês são a minha Vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Marcelo Bernardes Vieira, pela dedicação, pelo companheirismo e por acreditar neste trabalho; agradeço, especialmente, por todos os ensinamentos repassados a mim. Agradeço também ao meu co-orientador, Luis Paulo da Silva Barra, por tudo que me ensinou mas, principalmente, pelo o apoio e amizade que foram muito importantes em diversas etapas deste mestrado.

Também agradeço a todos os professores do Mestrado em Modelagem Computacional, em especial aos professes Flávio Barbosa, Michèle Farage, Marcelo Lobosco, Sandro Mazorche, Henrique Hippert e Rodrigo Weber. Aos professores Afonso Lemonge e Flávia Bastos com quem tive contato no NUMEC. À Natália Braga pela eficiência e dedicação ao Mestrado em Modelagem Computacional.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite, pela compreensão e por suas contribuições.

Aos amigos do MMC: Franciane Peters, Bárbara Quintela, Ricardo Campos, Victor Wegner, Gustavo Teixeira, Bernardo Lino, Anna Paula Guida, Carolina Xavier, Aline Cruz e Michelli Marlane por permitirem momentos de alegria e descontração. Aos amigos do GCG: Roger Correia, Patricia Pampanelli, Virgínia Mota, Alessandra Matos, Eder Perez, João Paulo Peçanha, Josué Barroso, Thiago Quinelato e José Luiz, por estarem juntos nessa caminhada e sempre dispostos a ajudar. A todos os companheiros de trabalho e aos amigos da Produtora de Multimeios pela compreensão e amizade. Agradeço especialmente a meu amigo e chefe Márcio Guerra, além dos amigos Marísia Pinto, Rodrigo Paschoalino, Fabiana Furtado e Flávio Galone. A todos os outros amigos, especialmente à Cristina Perantoni, ao Cláudio Lopes, ao Thiago Nery, ao Lucas Peths e à Clarissa Xavier, que foram de extrema importância em diversas fases da minha vida.

Aos meus pais, por serem as pessoas mais importantes da minha vida. É por meio deles que busco a força para seguir adiante, e é para eles que dedico todas as minhas realizações. Gostaria de agradecer também a todos os familiares pelo apoio.

Agradeço também àqueles que fizeram parte, de alguma forma, deste trabalho e da minha vida; infelizmente as palavras faltam e são insuficientes para agradecer a tantas pessoas importantes.

A Deus, pela vida.

"A nossa natureza está no movimento."

Blaise Pascal

RESUMO

Campos tensoriais arbitrários são úteis em diversas áreas do conhecimento como a física, engenharias e áreas da saúde. Um dos principais interesses de profissionais destas áreas é a investigação de objetos colineares e coplanares representados pelos tensores. Esses objetos são formados por subconjuntos estruturados de tensores presentes no campo e que capturam alguma continuidade geométrica. Pela sua natureza multivariada, a visualização de elementos organizados é uma tarefa desafiadora. Geralmente, utilizam-se métodos de detecção direta destas estruturas para que o observador possa analisá-las. A proposta desta dissertação é explorar o fato de que o movimento estimula percepções complexas de forma inata no sistema visual humano. A abordagem desenvolvida utiliza um sistema de rastreamento de partículas e é parametrizado por campos tensoriais de forma que o comportamento das partículas represente as características do campo e tenha um aprimoramento que possibilite o melhor entendimento e a interpretação da informação proveniente dos tensores.

Palavras-chave: Visualização de Campos Tensoriais. Traçado de Partículas. Tensorlines.

ABSTRACT

Arbitrary tensor fields are useful in several areas as physics, engineering and medicine. The investigation of collinear and coplanar objects represented by tensors is the main focus of research in these areas. These objects are formed by structured tensorial fields which captures some geometric continuity. The visualization of strutured elements is a challenging task because of their multivariate nature. To be analysed by the user, direct methods are usually used for detecting these structures. The proposal of this dissertation is to explore the fact that movement increases the perception of complex shapes, that are observed in a innate form by the human visual system. The approach developed uses a particle tracing system and is parameterized by tensor fields, so the particles flow represents the characteristics of the field and make an improvement that enables better understanding and interpretation of information derived from tensors.

Keywords: Tensor Field Visualization. Particle Tracing. Tensorlines.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO

Campos tensoriais são úteis em diversas áreas do conhecimento como a física, engenharias e áreas da saúde. Um dos principais interesses de profissionais destas áreas é a investigação de objetos colineares e coplanares representados pelos tensores. Esses objetos são formados por subconjuntos estruturados de tensores no campo que capturam alguma continuidade geométrica (fibras, por exemplo).

Pela sua natureza multivariada, a visualização de elementos organizados é uma tarefa desafiadora. Usualmente utilizam-se métodos de detecção direta destas estruturas para que o observador possa analisá-las, como por exemplo as imagens de ressonância magnética na medicina.

A proposta para desta dissertação é explorar o fato de que o movimento estimula percepções complexas de forma inata no sistema visual humano. E a partir de então utilizar a dinâmica de partículas para gerar fluxos suaves para que ressaltem as características presentes no campo. Assim, o sistema visual humano se encarrega de detectar estruturas salientes, possibilitando a análise do campo tensorial.

Atualmente a maioria dos métodos adotados utilizam somente as propriedades inerentes ao campo para realizar a visualização. Uma abordagem interessante é explorar a iteração do campo tensorial com o espaço de visualização onde ele será inserido.

1.1 Tensores

Este trabalho trata do problema de visualização de campos tensoriais simétricos positivo-definidos de segunda ordem. Um tensor de segunda ordem pode ser definido como uma transformação linear entre espaços vetoriais. Ao se modelar o mundo físico pode-se assumir $\mathbb{R}^3$ como sendo o domínio e a abrangência da transformação linear. Um tensor de segunda-ordem $\boldsymbol{T}$ irá mapear um vetor $\vec{u}$ em outro vetor $\vec{v}$ [1] através da operação :

$$\vec{v} = \boldsymbol{T}\vec{u},$$

desta forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}(\vec{u}+\vec{v}) &= \boldsymbol{T}\vec{u}+\boldsymbol{T}\vec{v} \quad \forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{T}(\alpha\vec{v}) &= \alpha\boldsymbol{T}\vec{v} \qquad\quad \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3. \end{cases},$$

alternativamente pode-se definir esta transformação linear como:

$$\boldsymbol{T}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\boldsymbol{T}\vec{u}+\beta\boldsymbol{T}\vec{v} \qquad \forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

sendo α e β escalares quaisquer. A Tabela 1.1 apresenta uma síntese de alguns elementos da álgebra tensorial.

Tabela 1.1: Álgebra Tensorial - Síntese

Notação	Tensor	Propriedade	
$\boldsymbol{I}$	Tensor Identidade	$\boldsymbol{I}\vec{v}=\vec{v}$	$\forall\vec{v}$
$\boldsymbol{O}$	Tensor nulo	$\boldsymbol{O}\vec{v}=\vec{o}$ (vetor nulo)	$\forall\vec{v}$
$\boldsymbol{C}\pm\boldsymbol{D}$	Soma ou Diferença entre C e D	$(\boldsymbol{C}\pm\boldsymbol{D})\vec{v}=\boldsymbol{C}\vec{v}\pm\boldsymbol{D}\vec{v}$	$\forall\vec{v}$
$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$	Produto interno entre C e D	$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})\vec{v}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}\vec{v})$	$\forall\vec{v}$
$\boldsymbol{D}^t$	Transposta de D	$\vec{v}\cdot\boldsymbol{D}^t\vec{u}=\vec{u}\cdot\boldsymbol{D}\vec{v}$	$\forall\vec{v},\vec{u}$
$\boldsymbol{D}^{-1}$	Inversa de D	$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$	
$\vec{u}\otimes\vec{v}$	Produto diádico entre u e v	$(\vec{u}\otimes\vec{v})\vec{w}=\vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{w})$	$\forall\vec{w}$

Uma definição muito utilizada na álgebra tensorial é o **delta de Kronecker** δ, definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i=j \\ 0, & se \quad i\neq j. \end{cases},$$

Um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{D}$ ou díade é uma entidade matemática que tem nove componentes e representa a magnitude e duas direções [2]. Tendo sua representação matricial definida como:

$$[\boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{31} & D_{31} \end{bmatrix},$$

e pode também ser representado utilizando a notação indicial [1]:

$$\boldsymbol{D} = D_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{1.2}$$

Um **autovalor** de um tensor $\boldsymbol{D}$ é um escalar λ para o qual existe um vetor $\vec{e}$ não nulo satisfazendo:

$$\boldsymbol{D}\vec{e} = \lambda\vec{e} \Leftrightarrow (\lambda\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I})\vec{e} = 0$$
$$\det([\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}]) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{D}]) = 0. \tag{1.3}$$

A Equação 1.3 define um polinômio cúbico e é denominada **equação característica** de $[\boldsymbol{D}]$.

A cada autovalor λ está associado um **autovetor** $\vec{e}$ para os quais $\boldsymbol{D}\vec{e} = \lambda\vec{e}$. Assumindo-se uma base ortonormal $\xi = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ denominada **base principal**, podemos reescrever a Equação 1.2:

$$\begin{aligned} ([\boldsymbol{D}]_\xi)_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \boldsymbol{D}\vec{e}_j \\ &= \vec{e}_i \cdot \lambda_j\vec{e}_j \\ &= \lambda_j\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Um tensor $\boldsymbol{D}$ é caracterizado como **simétrico** quando

$$D_{ij} = D_{ji}, \forall i \neq j.$$

Também pode-se realizar a seguinte classificação em relação aos tensores:

- **Positivo-definido** se, e somente se, todos os autovalores são maiores do que zero;
- **Negativo-definido** se, e somente se, todos os autovalores são menores do que zero;
- **Positivo-semidefinido** se, e somente se, todos os autovalores são maiores ou iguais a zero;
- **Negativo-semidefinido** se, e somente se, todos os autovalores são menores ou iguais a zero;
- **Indefinido** caso não se enquadre nas classificações anteriores.

1.1.1 Tensor de Orientação

Um **tensor de orientação local** é um caso especial de um tensor de segunda ordem simétrico positivo-definido. Este conceito foi definido por Westin [3] para estimar orientações em um campo. Este tensor pode ser definido como a soma ponderada de operadores de projeção:

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \vec{e}_i^{\,T}, \tag{1.5}$$

onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ é uma base em $\mathbb{R}^n$. Desta forma, $\boldsymbol{T}$ pode ser decomposto em:

$$\boldsymbol{T} = \lambda_n \boldsymbol{T}_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \, \boldsymbol{T}_i, \tag{1.6}$$

onde λ_i é o autovalor correspondente ao autovetor $\vec{e}_i$, $\boldsymbol{T}_n$ e $\boldsymbol{T}_i$ são os operadores de projeção definidos por Westin. Como revisto por Vieira [4] esta decomposição é interessante devido a sua interpretação geométrica. De fato, em $\mathbb{R}^3$, um tensor de orientação $\boldsymbol{T}$ decomposto usando a Equação 1.6 pode ser representado utilizando a contribuição de suas características linear, planar e esférica:

$$\boldsymbol{T} = (\lambda_1 - \lambda_2) \, \boldsymbol{T}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) \, \boldsymbol{T}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{T}_3. \tag{1.7}$$

Assumindo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, e a partir desta definição de Westin, pode-se realizar a seguinte interpretação geométrica, que também é apresentada na Figura 1.1.

- $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx \lambda_3$ - $\boldsymbol{T}$ corresponde a um tensor com forma aproximadamente linear e a orientação da reta é dada pelo autovetor $\vec{e}_1$.

- $\lambda_1 \approx \lambda_2 \gg \lambda_3$ - $\boldsymbol{T}$ corresponde a um tensor com forma aproximadamente planar e a normal ao plano é dada pelo autovetor $\vec{e}_3$.

- $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3$ - $\boldsymbol{T}$ corresponde a um tensor com uma vizinhança isotrópica, sem uma componente principal dominante.

Para muitas aplicações, somente as direções principais de um tensor são necessárias. Como por exemplo, a direção de uma fibra pode ser identificada pelo autovetor principal em uma imagem de um campo de tensor de difusão obtida por ressonância magnética (DT-MRI). Nestes casos, a forma de um tensor é normalmente mais importante do que sua magnitude. Ao se normalizar a soma dos autovalores de um tensor é possível obter os **coeficientes de anisotropia** definidos por Westin [5].

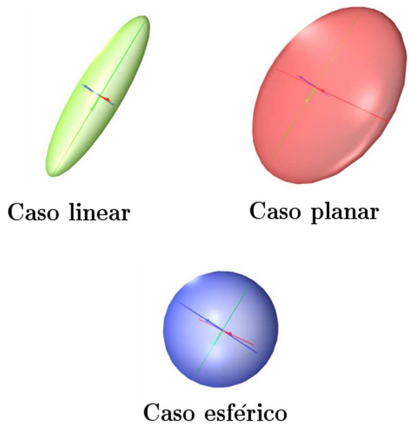


Figura 1.1: Representação da forma dos tensores em 3D utilizando elipsoides.

Coeficiente de anisotropia linear:

$$c_l = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \tag{1.8}$$

Coeficiente de anisotropia planar:

$$c_p = \frac{2\left(\lambda_2 - \lambda_3\right)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \tag{1.9}$$

Coeficiente de anisotropia esférica (isotropia):

$$c_s = \frac{3\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \tag{1.10}$$

Note que os coeficientes nas equações 1.9 e 1.10 são escalados por 2 e 3, respectivamente, assim:

$$\begin{cases} c_l + c_p + c_s = 1 \\ c_l, c_p, c_s \in [0, 1]. \end{cases}$$

Neste trabalho será assumido que todos os tensores adotados podem ser classificados utilizando o tensor de orientação de Westin.

1.1.2 Invariantes do tensor

Os autovalores de um tensor $\boldsymbol{D}$ podem ser computados solucionando o seguinte polinômio, proveniente da Equação 1.3:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) = 0$$

desta forma:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) &= \begin{vmatrix} \lambda - D_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ & \lambda - D_{yy} & -D_{yz} \\ & & \lambda - D_{zz} \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3 + (-D_{xx} - D_{yy} - D_{zz})\lambda^2 \\
&\quad + (D_{xx}D_{yy} + D_{xx}D_{zz} + D_{yy}D_{zz} - D_{xy}^2 - D_{xz}^2 - D_{yz}^2)\lambda \\
&\quad - (2D_{xy}D_{xz}D_{yz} + D_{xx}D_{yy}D_{zz} - D_{xz}^2D_{yy} - D_{yz}^2D_{xx} - D_{xy}^2D_{zz}) \\
&= \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3,
\end{aligned}$$

de onde define-se:

$$\begin{aligned}
J_1 &= D_{xx} - D_{yy} - D_{zz} \\
J_2 &= D_{xx}D_{yy} + D_{xx}D_{zz} + D_{yy}D_{zz} - D_{xy}^2 - D_{xz}^2 - D_{yz}^2 \\
J_3 &= 2D_{xy}D_{xz}D_{yz} + D_{xx}D_{yy}D_{zz} - D_{xz}^2D_{yy} - D_{yz}^2D_{xx} - D_{xy}^2D_{zz}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

O determinante de uma matriz não varia sob transformações de mudança de base e é classificado como um invariante algébrico [6]. Assim, o polinômio característico e os coeficientes J_1, J_2 e J_3 provenientes dele também são invariantes. Estes coeficientes são denominados **invariantes principais** de um tensor e podem ser expressos diretamente em função do traço e do determinante do tensor.

$$\begin{aligned}
J_1 &= tr(\boldsymbol{D}) \\
J_2 &= \frac{tr(\boldsymbol{D})^2 - tr(\boldsymbol{D}^2)}{2} \\
J_3 &= \det(\boldsymbol{D}).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

A relação entre os invariantes J_i e os autovalores λ_i pode ser analisada ao se computar o polinômio característico na base principal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) &= \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\
&= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \\
&= \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 \\
\Rightarrow J_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
J_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\
J_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Qualquer combinação de invariantes também é invariante, podendo ser computada através de algum outro termo definido em função de J_i [7]. Outro invariante utilizado para relacionar os autovalores é a **norma quadrada**:

$$\begin{aligned}
J_4 = \|\boldsymbol{D}\|^2 &= J_1^2 - 2J_2 \\
&= D_{xx}^2 + 2D_{xy}^2 + 2D_{xz}^2 + D_{yy}^2 + 2D_{yz}^2 + D_{zz}^2 \\
&= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.1.2.1 Roda de autovalores

Ao definir o conceito de roda de autovalores com base no trabalho de Nickalls [8], Kindlmann descreve mais três invariantes utilizando as fórmulas para resolver um polinômio cúbico:

$$Q = \frac{J_1^2 - 3J_2}{9} = \frac{J_4 - J_2}{9} = \frac{3J_4 - 3J_1^2}{18} \tag{1.15}$$

$$R = \frac{-9J_1J_2 + 27J_3 + 2J_1^3}{54} = \frac{-5J_1J_2 + 27J_3 + 2J_1J_4}{54} \tag{1.16}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right). \tag{1.17}$$

Kindlmann define a roda de autovalores como sendo "uma roda com três raios igualmente posicionados e com centro na posição $J_1/3$ da reta real. O raio da roda é $2\sqrt{Q}$, e Θ indica a orientação dos raios"[7]. Uma representação geométrica desta roda pode ser observada da Figura 1.2, nota-se que os autovalores são as projeções desses raios no eixo horizontal. Pode-se definir os três autovalores como sendo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= J_1/3 + 2\sqrt{Q}\cos(\Theta) \\ \lambda_2 &= J_1/3 + 2\sqrt{Q}\cos(\Theta - 2\pi/3) \\ \lambda_3 &= J_1/3 + 2\sqrt{Q}\cos(\Theta + 2\pi/3). \end{aligned} \tag{1.18}$$

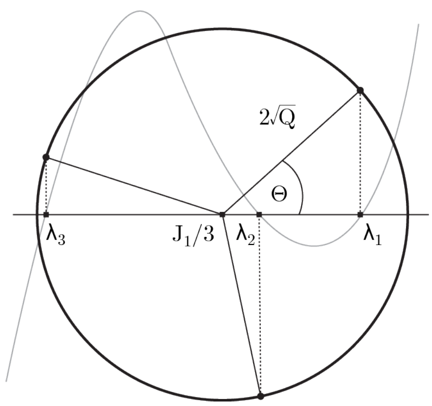


Figura 1.2: Roda de autovalores. Polinômio característico (cinza), suas raízes e os invariantes necessários para a Equação 1.18.[7]

1.1.2.2 **Momentos centrais do tensor**

Os momentos centrais de um tensor definem os parâmetros geométricos da roda de autovalores e são definidos como [7]:

$$\mu_1 = \frac{1}{3}\sum \lambda_i = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3} \tag{1.19}$$
$$= J_1/3$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}\sum (\lambda_i-\mu_1)^2 = \frac{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)}{9} \tag{1.20}$$
$$= 2Q$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{1}{3}\sum (\lambda_i-\mu_1)^3 \\ &= \frac{2(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3)-3(\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2)+\lambda_1^2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^2)+12\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{27} \\ &= \frac{2J_1^3-9(\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^2)}{27} \\ &= \frac{2J_1^3-9J_1J_2+27\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{27} = \frac{2J_1^3-9J_1J_2+27J_3}{27} \\ &= 2R.\end{aligned} \tag{1.21}$$

O segundo momento central μ_2 é a variância dos autovalores do tensor e o desvio padrão $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{2Q}$.

A assimetria A_3 dos autovalores é definida como:

$$A_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum(\lambda_i-\mu_1)^3}{3\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{R}{\sqrt{2Q^3}}. \tag{1.22}$$

Estas medidas estatísticas dos autovalores [7] estão diretamente relacionadas com a geometria da roda de autovalores: a média μ_1 é o seu centro, a variância μ_2 determina o tamanho do raio, e a assimetria define a orientação. Elas correlatamente correspondem à forma do tensor: tamanho, anisotropia e tipo de anisotropia. A média, a variância e a assimetria não só são invariantes independentes, como são **medidas ortogonais** da distribuição de autovalores [9].

1.1.2.3 **Anisotropia**

Existem diversas medidas de anisotropia, entre elas a anisotropia fracionada, anisotropia relativa e a razão de volume [10]. A anisotropia fracionada (FA) é definida pela seguinte equação:

$$FA = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \mu_1)^2 + (\lambda_2 - \mu_1)^2 + (\lambda_3 - \mu_1)^2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \tag{1.23}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_2}{J_4}} = 3\sqrt{\frac{Q}{J_4}} = \sqrt{\frac{J_4 - J_2}{J_4}}$$

e a anisotropia relativa (RA):

$$RA = \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \mu_1)^2 + (\lambda_2 - \mu_1)^2 + (\lambda_3 - \mu_1)^2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}$$
$$= \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2}\mu_1} = \frac{3\sqrt{Q}}{J_1}. \tag{1.24}$$

Ao observar os coeficientes de anisotropia definidos na Seção 1.1.1, tem-se que: Um tensor é denominado **isotrópico** quando todos todos seus autovalores são iguais e **anisotrópico** quando os valores são distintos. A assimetria de um tensor (Equação 1.22) está diretamente relacionada ao tipo de anisotropia presente nele, a forma do tensor varia de planar (alto valor de c_p) para linear (alto valor de c_l) à medida que a assimetria varia de negativa para positiva. Ao contrário do tensor anisotrópico o tensor isotrópico varia somente em relação ao seu tamanho.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor e implementar um método de visualização de campos tensoriais simétricos positivo-definidos, que seja dependente da visão do observador. Esta visualização deve representar as características do campo tensorial e deve permitir ao usuário analisar de forma suave e visualmente agradável as propriedades que mais lhe convier. Em particular, propõe-se um método que possibilite visualizar estruturas lineares e coplanares que o campo tensorial representa.

Campos tensoriais são conjuntos de dados muito densos que podem representar grandezas variadas. Assim, obter-se uma visualização que represente este conjunto de características é um dos desafios deste trabalho.

1.3 Organização do trabalho

No primeiro capítulo deste trabalho apresenta-se uma visão geral dos conceitos utilizados ao longo deste desenvolvimento. Destaca-se a definição de tensor de orientação e dos coeficientes de anisotropia propostos por Westin [3], que serão amplamente utilizados durante todo o trabalho. Também apresenta-se alguns conceitos básicos da álgebra tensorial e são introduzidos conceitos importantes como assimetria, anisotropia e a forma de um tensor.

Os trabalhos relacionados foram revisados no Capítulo 2. Propõe-se uma divisão dos principais trabalhos em três categorias: discretas, contínuas ou dinâmicas. Nas abordagens discretas, tem destaque a utilização de glifos, presentes nos trabalhos de Shaw *et al.* [11, 12] e Kindlmann *et al.* [13, 14]. Nas contínuas, o principal método é o de *tensorlines* proposta por Weinstein *et al.* [15], que é um dos pilares deste trabalho. Apresenta-se também sua antecessora, a abordagem de *hyperstreamlines* proposta por Delmarcelle *et al.* [16, 17]. As abordagens contínuas, apesar de serem menos utilizadas, têm uma grande importância neste trabalho, pois elas são o foco deste estudo. Nesta seção, verifica-se que Kondratieva *et al.* [18] também propõe um método de visualização utilizando rastreamento de partículas, porém utilizando GPU e sem levar em conta o observador.

Na primeira seção do Capítulo 3, é apresentado o método de *tensorlines* proposto por Weinstein *et al.*. Neste trabalho, a geração de *tensorlines* é parte da etapa de pré-processamento dos dados e gera um campo vetorial, que representa parte do campo tensorial de entrada. É este campo vetorial que permitirá a aplicação do método de rastreamento de partículas discutido na seção seguinte (Seção 3.2).

O método proposto é apresentado na Seção 3.2. Primeiramente são abordados quais os critérios para a geração das partículas. São apresentadas formas de se calcular algumas medidas relativas a um tensor e seus significados matemáticos. Na apresentação dos critérios, é dado enfoque nos atributos dependentes e independentes do observador. Nesta etapa, são definidos os escalares utilizados para determinar a posição de um tensor em relação ao observador. Na Seção 3.2.2, é definida uma equação chave (Equação 3.9) para o método em que é realizada a ligação entre o ponto de visualização do observador com os atributos do campo tensorial.

Logo em seguida na Seção 3.3.2 será definido outro ponto importante do método. O critério de destruição das partículas. A escolha deste parâmetro influenciará no aparecimento ou não de inconsistências durante o transporte da partícula. Também nesta seção é definido o modo como as partículas são reinseridas no campo após atingir um dos critérios de parada.

O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos pelo método. Nele são mostrados a aplicação em campos gerados sinteticamente e em um campo de dados clínicos. Os resultados buscam explorar a aplicabilidade dos atributos definidos na Seção 3.2.2. A diversidade de aplicações é verificada ao se notar que diferentes atributos são interessantes para diferentes campos. No último capítulo é apresentada uma conclusão geral do método, apresentando seus pontos fortes e fracos e propondo alguns trabalhos futuros. No apêndice apresenta a análise de dois integradores numéricos utilizados tanto para a geração das *tensorlines* quanto para a propagação das partículas.

2 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção serão apresentados alguns trabalhos que abordam a visualização de campos tensoriais. Nas **abordagens discretas**, o espaço é discretizado e a informação relativa ao campo tensorial é exibida individualmente para cada ponto do espaço. Esta abordagem é muito eficiente quando é necessário analisar pontualmente a informação representada, porém, pode não ser efetiva para uma análise macroscópica. Em muitos casos, é difícil para o sistema perceptual humano conseguir sintetizar uma informação a partir de um conjunto denso de informações pontuais.

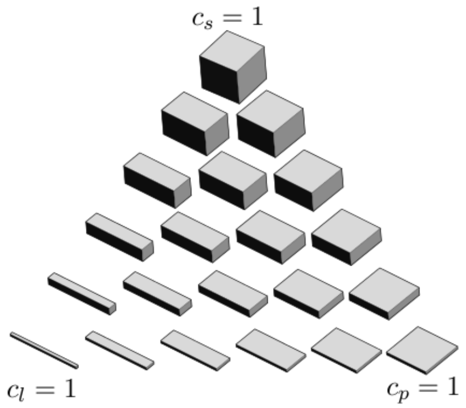
Nas **abordagens contínuas**, a informação presente em cada ponto do campo tensorial é de alguma forma agrupada fazendo com que a visualização ocorra de forma mais suave. Esta abordagem é interessante ao se analisar o campo tensorial de forma global, facilitando a detecção de características do campo, como por exemplo, elementos que consecutivamente formam curvas. Porém esta abordagem é menos eficiente ao se analisar a influência de dados pontuais no espaço.

Outra abordagem que busca explorar mais o sistema perceptual humano é a **abordagem dinâmica**, onde uma ou várias propriedades das ferramentas de visualização são modificadas ao longo do tempo, fazendo com que essas mudanças agucem a percepção e facilitem a síntese de informação. Porém, assim como as outras abordagens, se a saída visual não for analisada e processada de forma que evite a mistura de informação a percepção da informação pode não ocorrer ou até mesmo induzir a uma interpretação equivocada.

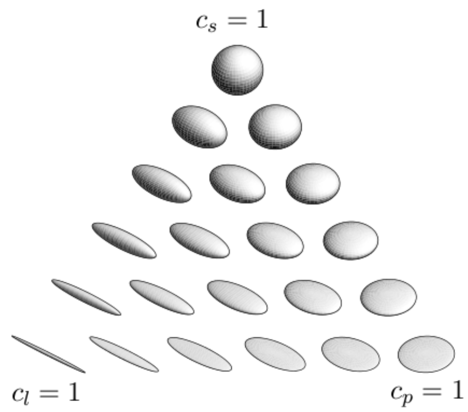
2.1 Abordagens discretas

Dentre os métodos discretos para visualização de campos tensoriais, os baseados em **glifos** são bastante utilizados. Cada glifo representa uma amostra no espaço tridimensional. Assim, pontualmente descreve-se a informação multidimensional mapeando os atributos multivariados em uma primitiva geométrica básica. Diversos primitivos como cuboides, elipsoides e cilindros (Figura 2.1) são utilizados como base para este método.

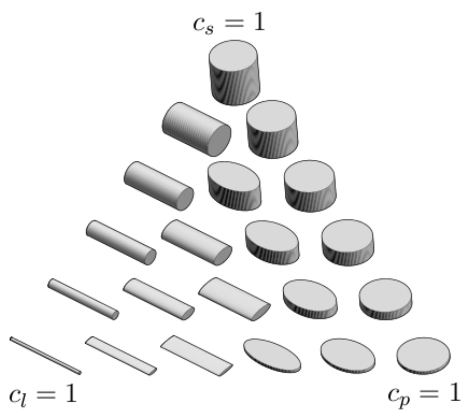
Com o foco na questão perceptual, Shaw *et al.* [11] propõem uma abordagem para visualização de dados multidimensionais utilizando as superquádricas como primitiva



(a) Glifos cuboides



(b) Glifos elipsoides



(c) Glifos cilíndricos

Figura 2.1: Tipos de glifos [13].

geométrica base. Superquádrica é uma família de objetos paramétricos tridimensionais flexíveis com os quais pode-se obter uma grande gama de formas distintas, a partir do ajuste de poucos parâmetros.

Utilizando-se da informação de que as formas podem ser discernidas no estágio pre-atentivo [19], Shaw *et al.* [11] buscam explorar a percepção visual humana utilizando a flexibilidade das superquádricas para interpolação de formas. Em sua primeira implementação é feito o uso das superelipses. Esta primitiva é parametrizada por sete expoentes que durante a geração dos glifos são associados aos dados. Cada variável do dado é normalizada para o intervalo [0,1] e mapeada no domínio do atributo correspondente. Por ser uma abordagem genérica para visualização de dados multidimensionais, esse mapeamento é realizado de acordo com a necessidade do usuário.

Em um trabalho posterior Shaw *et al.* [12] procuram quantificar experimentalmente o número de formas assumidas pelas superelipses que as pessoas podem identificar. Então, levando em consideração o quanto um estímulo deve ser alterado para que um observador note esta diferença, os autores propõem uma escala para os parâmetros das superelipses de forma que pequenas variações em sua geometria sejam detectadas.

Ao final deste experimento Shaw *et al.* chegaram à conclusão que existem 22 formas distintas de superelipsoides e afirmam que "um dos mais difíceis problemas na visualização de glifos é o desenvolvimento de glifos significativos". Assim, as "variações na forma do glifo devem ser capazes de transmitir de maneira compreensiva a mudança no dado associado" [12].

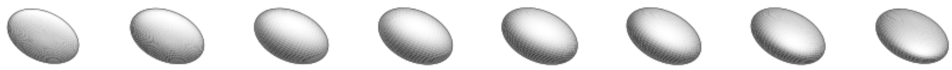
Posteriormente, Kindlmann *et al.* [13] fazem uso dos métodos de visualização de dados multidimensionais; como por exemplo os tensores; usando glifos e aplica este conceito para visualização de campos tensoriais. Ele reafirma as vantagens de se utilizar superquádricas para esta finalidade, apontando problemas envolvendo os métodos de visualização que utilizam primitivos como cubóides, cilindros ou elipsoides.

Em seu trabalho, Kindlmann *et al.* têm como objetivo "a seleção intuitiva de um subconjunto de espaços paramétricos das superquádricas que codifique a forma dos tensores e garanta que a visualização da orientação do tensor irá fielmente conduzir para a simetria que pode surgir no autosistema"[13]. Utilizando a métrica de anisotropia proposta por Westin *et al.* [5] (Figura 1.1) é realizada uma comparação dos glifos. A característica de que os tensores somente apresentam informação relativa à direção e não ao sentido, obriga que as primitivas geométricas utilizadas na visualização de tensores apresentem uma simetria rotacional de 180 graus.

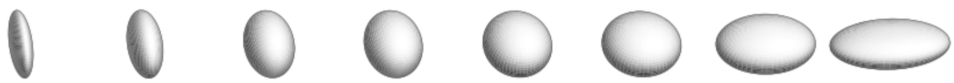
Kindlmann *et al.* apresenta o problema relativo aos glifos cubóides, que podem induzir a uma análise errada no caso de formas totalmente planas ou totalmente lineares. Em casos de anisotropia totalmente linear, a forma assumida dificulta a identificação dos autovetores correspondente aos dois autovalores secundários, pois eles podem ser quaisquer dois vetores perpendiculares, que estão contidos no plano normal ao autovetor principal. Analogamente, o mesmo problema ocorre para os tensores totalmente planares. Porém as arestas bem definidas nos cubóides são boas para descrever a orientação do tensor que faz parte do grupo intermediário entre as classificações planar, linear e esférica.

Este problema não existe em glifos cilíndricos, pois o eixo de rotação é alinhado com o autovetor principal. Mas este modelo não representa efetivamente os tensores esféricos que não possuem uma orientação definida.

Todos os problemas envolvendo simetria são resolvidos ao se utilizar glifos elipsoidais. Surgindo, porém, o problema relativo à ambiguidade. Kindlmann demonstra que utilizando elipsoides, sob determinados pontos de observação, tensores diferentes podem parecer semelhantes ou ainda tensores podem ser erroneamente identificados (Figura 2.2). Por exemplo, quando o ponto de vista do observador estiver alinhado com o autovetor principal os tensores lineares podem se assemelhar à tensores esféricos. A interpretação fica extremamente influenciada pelo ponto de vista do observador. Contudo esta representação é perfeitamente ajustável a tensores esféricos.



(a) Oito tensores diferentes visualizados com glifos elipsoidais.



(b) Mesmo tensor observado de pontos de vista diferentes.

Figura 2.2: Em determinados pontos de vista, glifos elipsoidais não demonstram corretamente a forma do tensor. [13].

Estes problemas de anisotropia e ambiguidade podem ser amenizados com glifos que modificam a primitiva geométrica utilizada de acordo com as propriedades do tensor. Ao utilizar cilindros para os casos planares e lineares; elipsoides para os casos esféricos e cuboides para os casos intermediários obtêm-se uma visualização menos ambígua e mais coerente.

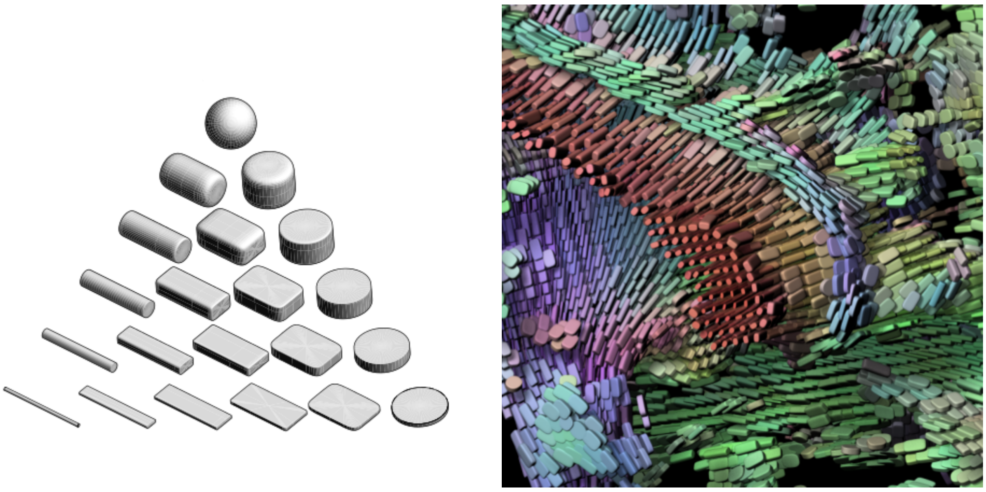
É proposto então, a parametrização de uma superquádrica que atende a estes pré-requisitos ao longo do eixo x:

$$\vec{q}_x(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} cos^{\beta}\phi \\ -sin^{\alpha}\theta sin^{\beta}\phi \\ cos^{\alpha}\theta sin^{\beta}\phi \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \tag{2.1}$$

$$q_x(x,y,z) = (y^{2/\alpha} + z^{2/\alpha})^{\alpha/\beta} + x^{2/\beta} - 1 = 0 \tag{2.2}$$

$$q_z(x,y,z) = (x^{2/\alpha} + y^{2/\alpha})^{\alpha/\beta} + z^{2/\beta} - 1 = 0. \tag{2.3}$$

Onde, α e β são os expoentes de parametrização da superquádrica e x, y e z compoêm a posição no espaço tridimensional.



(a) Glifo superquádrico. (b) Região de um conjunto DT-MRI do cerebro visualizado com glifos superquádricos.

Figura 2.3: Utilização do glifo superquádrico. [13]

Desta forma, o glifo tensorial superquádrico (Figura 2.3) é definido levando em consideração a métrica de anisotropia proposta por Westin *et al.* [5], cuja parametrização é dada por:

$$\begin{aligned} se\ \ c_l \geq c_p \Rightarrow &\begin{cases} \alpha = (1 - c_p)^\gamma \\ \beta = (1 - c_l)^\gamma \\ \vec{q}(\theta, \phi) = \vec{q}_x(\theta, \phi) \\ q(x, y, z) = q_x(x, y, z) \end{cases} \\ se\ \ c_l < c_p \Rightarrow &\begin{cases} \alpha = (1 - c_l)^\gamma \\ \beta = (1 - c_p)^\gamma \\ \vec{q}(\theta, \phi) = \vec{q}_z(\theta, \phi) \\ q(x, y, z) = q_x(x, y, z) \end{cases} . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Onde, c_p e c_l são respectivamente os coeficientes de anisotropia planar e linear definidos por Westin *et al.* (Equações 1.8, 1.9 e 1.10). γ é um parâmetro referente à suavização da interpolação da forma.

Atualmente, Kindlmann *et al.* [14] propõem um novo método para visualização de tensores de segunda ordem simétricos utilizando superquádricas. Este método generaliza o método anterior, utilizado somente para tensores positivo-definidos. É mostrado que codificar autovalores com sinais arbitrários requer uma configuração que difere fundamentalmente da proposta anterior. Com esta modificação é possível aplicar a abordagem de glifos para visualizar uma gama maior de campos tensoriais. Como por exemplo, os que envolvem tensores de tensão e deformação da mecânica do contínuo.

O avanço da tecnologia possibilita que a cada dia novos ferramentais sejam aplicados na visualização. Buriol *et al.* [20] apresentam uma proposta de interface para visualização de campos de direções anisotrópicas. Estes campos são obtidos a partir de dados de tomografia de estruturas orgânicas. A interface de visualização é composta por um monitor estereoscópico e um mecanismo para detecção do ponto de vista do observador. A técnica é baseada em conceitos de computação ubíqua e ambientes imersivos aplicados na visualização e análise de campos tensoriais em três dimensões.

2.2 Abordagens contínuas

Delmarcelle *et al.* [17] apresentam uma forma para visualização de tensores de segunda ordem. Eles generalizam o conceito de linhas de campos tensoriais proposto por Dickison [21], ou seja, linhas que em todos os pontos são tangente a um dos autovetores; e introduz o conceito de *hyperstreamlines* (**hiperlinhas de corrente**):

"Uma primitiva geométrica de tamanho finito que realiza uma varredura ao longo de um campo de autovetores $\boldsymbol{v}$ é estendida em seu plano transversal devido à ação combinada dos campos dos outros dois autovetores ortogonais. A superfície obtida pela ligação destas primitivas estendidas em diferentes pontos ao longo da trajetória é chamada hiperlinha de corrente. Sua coloração é dada por uma função definida pelo usuário levando em conta os 3 autovalores, geralmente a amplitude do autovalor longitudinal"[17].

A Figura 2.4 apresenta a visualização de um campo pelo método de *hyperstreamlines*. Ao apresentar este método, Delmarcelle *et al.* buscam representar toda a informação contida no dado tensorial ao longo de uma trajetória, dando ênfase na característica contínua dessa informação.

Este conceito é fundamentado para a visualização de campos tensoriais simétricos, nos quais os três campos dos autovalores são reais. Para a visualização de campos tensoriais reais não simétricos, como os que representam o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff e para campos tensoriais Hermitianos e campos complexos, como os utilizados na super-

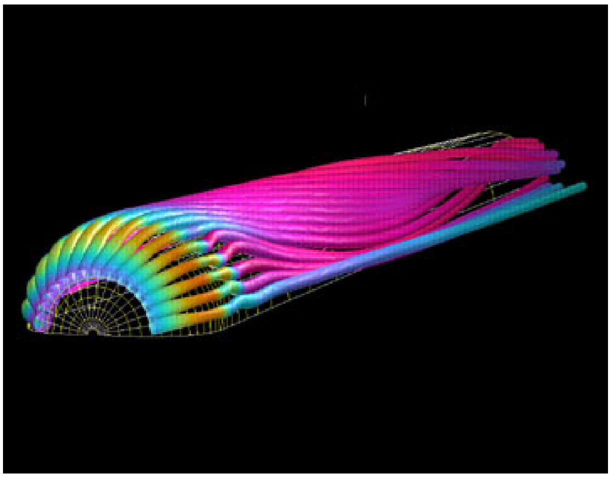


Figura 2.4: Visualização utilizando *hyperstreamlines*.[17]

simetrização do Lagrangiano [22]. É previamente necessário decompô-los em um campo tensorial real simétrico e um campo vetorial.

A trajetória das hiperlinhas de corrente corresponde às linhas de campos tensoriais propostas por Dickinson, e sua seção transversal codifica os dois campos de autovetores ortogonais à trajetória. Delmarcelle *et al.* também salientam os fatores que podem limitar a utilização das hiperlinhas de corrente, como por exemplo, quando um grande número de hiperlinhas produz uma massa desordenada de difícil visualização.

Em seu trabalho posterior, Delmarcelle *et al.* [16] reforçam outro problema envolvendo as hiperlinhas de corrente que é a degeneração. A degeneração ocorre quando dois autovalores são iguais. Para amenizar esse fato, assume-se que os campos tensoriais tratados são suaves, ou seja, entre dois pontos sucessivamente amostrados, a direção do autovetor principal não deve ter seu ângulo variado mais do que um valor pré-determinado. Caso esse ângulo se altere de forma abrupta suspeita-se que a trajetória atravessou um ponto de degeneração envolvendo o autovetor principal. Busca-se então a degeneração nos dois últimos pontos amostrados e, caso encontrado, termina-se a curva.

Posteriormente, Weinstein *et al.* [15] propõem um método que busca estabilizar a degeneração gerada nas hiperlinhas de corrente devido a dados com tensores planares e esféricos.

Com o foco em tensores de difusão de imagens de ressonância magnética (DT-MRI), Weinstein *et al.* demonstram que um tensor de difusão especifica a função de densidade de probabilidade para onde uma partícula Browniana irá se mover ao longo do tempo.

Também ressalta a instabilidade gerada por tensores de difusão isotrópicos, onde esta probabilidade de difusão é praticamente a mesma em todas as direções.

Weinstein *et al.* afirmam que, ao reduzir o problema referente à advecção através de um campo tensorial ao problema de realizar a advecção em um campo vetorial relativo a um autovetor; as linhas de correntes geradas pelo método de Delmarcelle *et al.* seriam de fato muito semelhantes a puras linhas de difusão, que poderiam em certos casos ser equivocadas, como, em regiões com a presença de degeneração. A advecção pode ser descrita como o transporte de uma quantidade de um atributo genérico através de um fluxo, e a difusão como a transferência de partículas de um meio para devido ao movimento aleatório.

Com o objetivo de solucionar este problema, Weinstein *et al.* propõem o método de *tensorlines*, que apresenta uma modificação com o intuito de estabilizar esta propagação, levando em consideração a direção de entrada em um *voxel* e a direção de saída (direção de entrada transformada pela matriz do tensor). Este método é descrito na Seção 3.1.1 e busca desta forma amenizar a criação de turbulências que podem dificultar a visualização.

Baseado no conceito de convolução linear integral (LIC) proposto por Leedom *et al.* [23], Pang *et al.* [24] propõem um método para visualização de campos tensoriais. O método proposto por Leedom *et al.* utiliza uma textura de ruído branco e o cálculo de linhas de corrente para realizar a visualização de campos vetoriais. Neste método, uma textura de alta freqüência é filtrada de acordo com um campo tensorial, gerando assim uma visão global deste campo. Para cada segmento da linha de corrente que passa por este ponto, uma convolução com um núcleo de integração é computada. O resultado é utilizado para calcular uma soma ponderada da contribuição de todos os pontos da textura que tem interseção com a linha específica. O resultado da soma representa o valor de saída para cada unidade.

Posteriormente, Pang *et al.* propõem o conceito de HyperLIC para visualização de campos tensoriais. A partir de um campo tensorial e um ruído de entrada com tamanho idêntico, uma primitiva geométrica é colocada sobre cada posição. Esta primitiva então é deformada de acordo com o campo tensorial. É realizado o cálculo da média dos valores da textura de ruído que estão sob cada primitiva deformada, este valor é associado à saída resultante para esta posição.

No trabalho de Pang *et al.* foram realizados experimentos com dois tipos de primitivas geométricas e verificou-se que ao se utilizar esferas, os tensores deformam estas primitivas gerando elipsoides e assim obtém-se melhores resultados em regiões isotrópicas. Ao se utilizar cubos com os lados alinhados com os autovetores ortogonais, obtêm-se paralelepípedos, sendo os autovalores os fatores de escala. Esta primitiva representa melhor regiões com anisotropia puramente linear.

2.3 Abordagens dinâmicas

Kondratieva *et al.* [18] propõem uma abordagem dinâmica utilizando o rastreamento de partículas em GPU, afirmando que este método "fornece um meio eficiente e intuitivo de visualizar a dinâmica presente nos campos dos tensores de difusão"[18]. Utiliza-se da advecção de um conjunto de partículas através de um fluxo contínuo para representar a dinâmica dos campos tensoriais tridimensionais.

São utilizadas as vantagens da unidade gráfica de processamento (GPU) presentes nas placas gráficas para a realização deste processo. "A posição das partículas é armazenada na memória gráfica e posteriormente enviadas para a GPU realizar a geração de imagens no *framebuffer*. Usando esta funcionalidade, o rastreamento de partículas nas grades cartesianas pode ser inteiramente executada na GPU sem nenhuma releitura à memória da aplicação"[18] .

Para realizar a advecção, primeiramente é necessário reconstruir, a partir dos tensores, os vetores de direção que a partícula deve seguir. Com base no rastreamento de partículas em um campo vetorial proposto por Krüger *et al.* [25], realiza-se a advecção no campo tensorial. Utilizando o método de *tensorlines* proposto por Weinstein (Seção 3.1.1), calcula-se a nova direção de propagação da partícula com base na direção atual e na direção calculada em um passo de tempo anterior da simulação.

Em relação aos critérios de criação de partículas, Kondratieva *et al.* [18] propõem que após o término da propagação, a partícula deve ser reiniciada em sua posição inicial. Posteriormente em um outro trabalho, Kondratieva [26] avalia que esta abordagem requer uma modificação por causar o aparecimento de tremulações devido à inserção de altas frequências em algumas regiões. Pois, pode acontecer que uma partícula seja repetidamente lançada para as regiões próximas de onde ela acabou de ser destruída. Isto ocorre quando a posição inicial da partícula foi definida perto do término da *tensorline*. Esta alta frequência pode desviar a atenção do usuário de outras regiões mais importantes do campo. Chegada a esta conclusão, os autores propõem que as partículas sejam sempre reiniciadas randomicamente em um uma nova posição.

Kondratieva *et al.* armazenam as seis entradas distintas do tensor de difusão em dois mapas de textura RGB tridimensionais. O rastreamento da partícula no campo tensorial tridimensional é realizado utilizando as velocidades calculadas. Para o cálculo da direção de propagação é realizada a combinação linear da direção de entrada e do autovetor principal, também de acordo com Weinstein. Esse método também possibilita a visualização de linhas de corrente.

Krüger *et al.* definem o "rastreamento de partículas como uma técnica para, em um campo vetorial de um fluxo, computar a trajetória ao longo do tempo de uma partícula com massa desprezível"[25].

O método de rastreamento de partículas é abordado na Seção 3.3. Krüger *et al.* citam que esse método pode ser solucionado por sistemas de integração com passo de tempo fixo, como por exemplo o Euler Clássico e o Runge-Kutta, e também sistemas adaptativos, onde o erro de integração local é utilizado para ajustar o passo de tempo da integração.

O foco de Krüger *et al.* é a execução destes procedimentos em GPU. Para isto os resultados intermediários são computados em GPU, salvos na memória gráfica e usados como entrada para as unidades geométricas sintetizarem as imagens no *frame buffer*. Na visualização, alguns atributos escalares presentes nos tensores são mapeados em cores que são então atribuídas como propriedade das partículas.

No trabalho de Krüger *et al.*, também é proposto um método para a visualização de linhas de corrente. Para sua construção, a posição das partículas é inicializada uma perto das outras, e é realizado uma troca em dois *buffers* para que subsequentemente cada um seja interpretado como alvo da síntese de imagem.

Durante o processo de construção, a imagem irá registrar as posições que todas as partículas assumiram desde o início da simulação, fazendo com que assim tenha-se a representação da linha de corrente daquele fluxo. A linha de corrente irá coincidir com a trajetória da partícula pois um campo de tensores de difusão representa um fluxo estacionário, onde o campo de velocidades ao qual as partículas são submetidas não varia em relação ao tempo.

O método apresentado nesta dissertação enquadra-se nas abordagens dinâmicas, diferenciandose dos anteriormente citados por ser um método dependente do observador. O método levará em conta o ângulo de incidência da visão do observador no campo tensorial e outros fatores que serão explicitados nas seções seguintes.

3 UM MÉTODO DE VISUALIZAÇÃO DEPENDENTE DO OBSERVADOR

3.1 Pré-processamento utilizando *Tensorlines*

Neste trabalho é proposto um método de visualização dependente do observador utilizando rastreamento de partículas. Para realizar a visualização de campos tensoriais utilizando rastreamento de partículas primeiro deve-se definir a partir do campo tensorial um campo vetorial que será associado a um campo de velocidades.

Este campo de velocidades será utilizado para realizar a propagação de uma partícula no espaço. Ao ser propagada a partícula irá visualmente representar as informações do campo tensorial. As partículas serão representadas por glifos contendo as informações daquele ponto e seu o movimento irá aguçar o sistema perceptual humano. Uma forma para se obter o campo campo de velocidades é a abordagem de *tensorline*.

Este processo é representado na Figura 3.1.

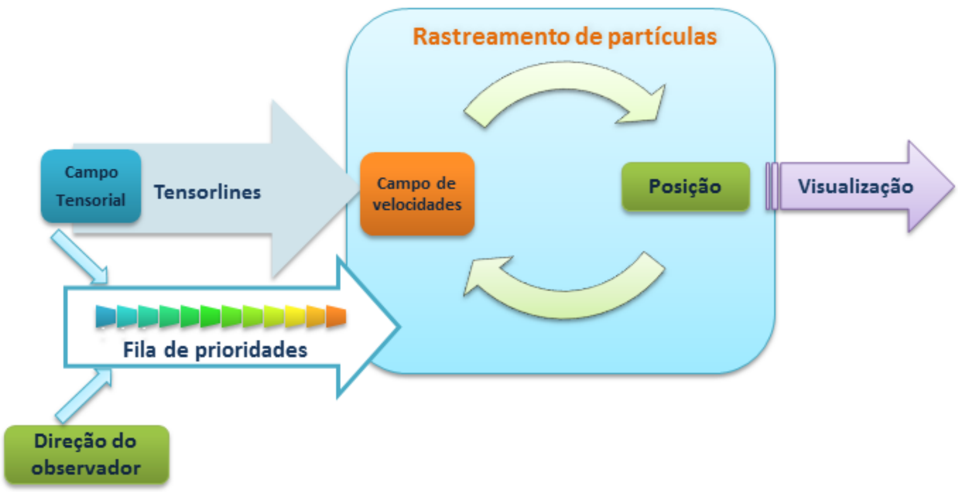


Figura 3.1: Diagrama representativo do método de visualização baseado no rastreamento de partículas.

Esta abordagem é baseada no método de visualização de campos tensoriais utilizando *hyperstreamlines* proposto por Delmarcelle *et al.* [17], no qual o conceito de linhas de corrente é aplicado no campos dos autovetores da região tensorial. *Hyperstreamlines* são úteis para a visualização de tensores à medida que elas buscam fornecer uma informação interligada de todos os tensores ao longo de um caminho. Porém, este caminho gerado pela *hyperstreamline* nem sempre é o ideal para alguns propósitos.

Por exemplo, pode-se utilizar o método de hyperstreamline em um processo de tractografia, ou seja realizar um procedimento para visualizar as vias neurais. Neste processo obtém-se um conjunto de dados DT-MRI clínicos [27]. DT-MRI é uma imagem de ressonância magnética dos tecidos biológicos ponderados por características microestruturais da difusão da água no local. Os Tensores de Difusão MRI (DT-MRI) podem fornecer informações sobre as conexões ao longo do cérebro. Neste conjunto, os voxels apresentam uma baixa resolução espacial comparado à fina estrutura das vias de axônios. Ressaltando que estas vias podem estar orientadas em diferentes direções, podem estar muito próximas uma das outras e ainda o conjunto pode apresentar ruídos.

Devido a todos esses problemas que os dados podem apresentar, se utilizarmos simplesmente o autovetor principal para a integração das fibras, o caminho pode se tornar instável e fornecer uma informação inconsistente em regiões isotrópicas. Então o método de *tensorlines* busca obter uma melhor estimativa ao utilizar todo o tensor no processo de integração. Podemos ver essa comparação na Figura 3.2. Observe que o caminho referente a tensorline mantém seu curso ao encontrar uma região isotrópica.

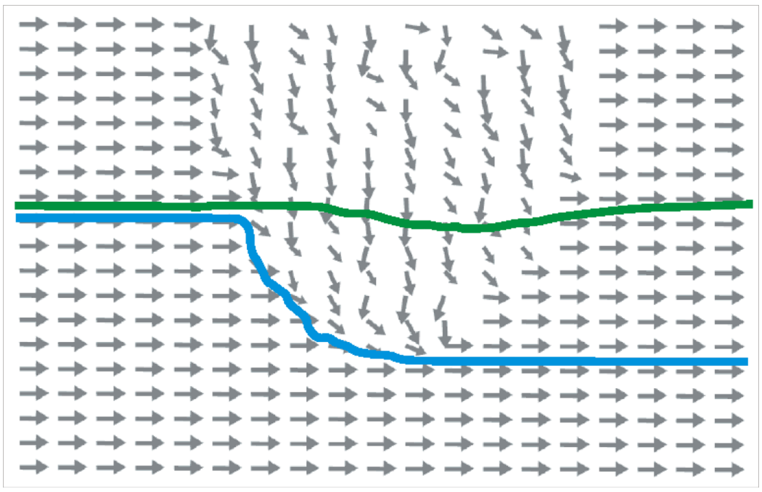


Figura 3.2: Comparação entre a propagação de uma *tensorline* (azul) e uma *hyperstreamline* (verde) em um conjunto de dados sintéticos.[15]

3.1.1 Tensorlines

Ao levar em conta somente o autovetor principal, Delmarcelle assume a geração das *hyperstreamlines* como um modelo puramente difusivo. Porém em regiões com anisotropia esférica ou planar, a primeira componente principal tem uma direção arbitrária. Isto resulta em ambiguidades causando uma propagação instável. O método de *tensorlines* estabiliza a propagação ao incorporar dois termos adicionais quando propagado em regiões ambíguas. Estes termos complementam o movimento difusivo com mais um termo de velocidade, denominado **vetor de advecção**. O vetor de advecção é a combinação de dois vetores com pesos definidos pelo usuário. Estes vetores são o vetor correspondente a velocidade de entrada, ou seja a direção da propagação no passo anterior da simulação, e a direção de deflexão, que é o vetor de entrada transformado pelo tensor naquele ponto. Assim tem-se:

$$\vec{v}_{def} = \boldsymbol{D}\vec{v}_{in}, \tag{3.1}$$

onde, $\vec{v}_{def}$ é a direção de deflexão, $\vec{v}_{in}$ a velocidade de entrada e $\boldsymbol{D}$ o tensor de difusão, este processo é exemplificado pela Figura 3.3. Na etapa de pré-processamento, o tensor $\boldsymbol{D}$ é normalizado pelo escalar $2/\lambda_{max}$, onde λ_{max} é o maior autovalor encontrado no campo tensorial. Esta normalização é realizada para que o termo difusivo fique mais apropriadamente escalado com relação aos termos advectivos.

A direção de propagação utilizada na integral de caminho é uma combinação linear de $\vec{e}_1$, $\vec{v}_{in}$ e $\vec{v}_{def}$. Como $\vec{e}_1$ e $-\vec{e}_1$ são ambos autovetores, em cada passo da integração o autovetor $\vec{e}_1$ é invertido caso $\vec{v}_{in}.\,\vec{e}_1 < 0$, evitando a duplicação.

A anisotropia do tensor pontualmente influencia o modo como estes vetores serão combinados para produzir o próximo vetor de propagação $\vec{v}_{prop}$. Usa-se o coeficiente de anisotropia linear c_l para determinar a contribuição relativa de $\vec{e}_1$.

$$\vec{v}_{prop} = c_l\vec{e}_1 + (1 - c_l)\left((1 - w_{punct})\,\vec{v}_{in} + w_{punct}\vec{v}_{def}\right), \tag{3.2}$$

onde, w_{punct} é um parâmetro definido pelo usuário que determina a contribuição relativa a $\vec{v}_{in}$ e $\vec{v}_{def}$. Definiu-se a equação anterior de modo que satisfizesse a Tabela 3.1 proposta por Weinstein *et al.*

Percebe-se que a segunda e terceira linha descrevem o comportamento do método

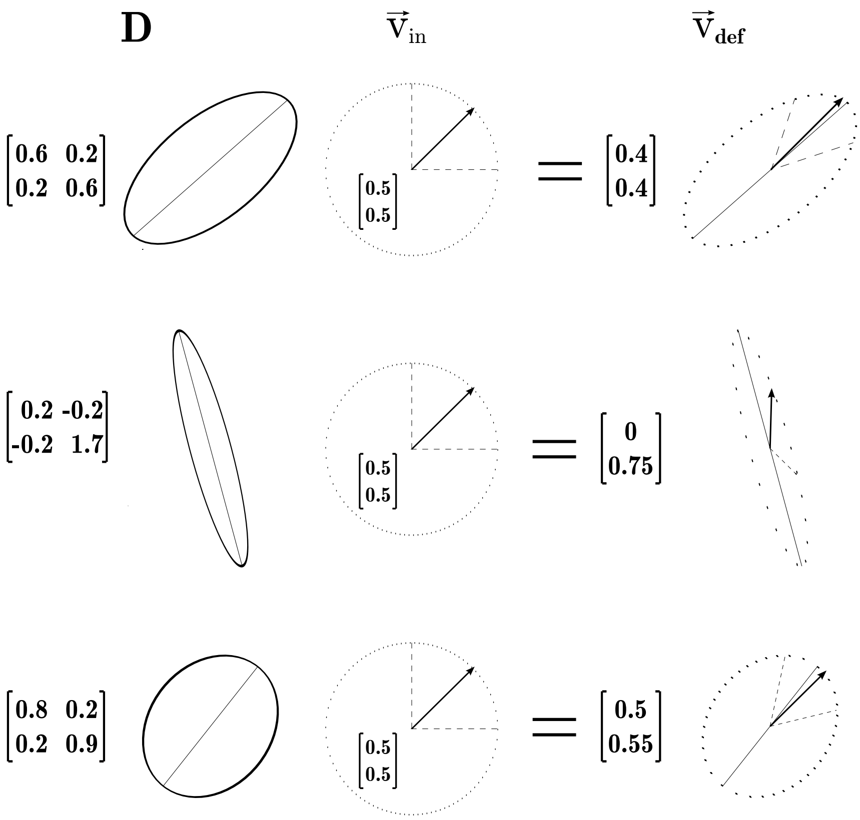


Figura 3.3: Exemplos de aplicação do tensor $\boldsymbol{D}$ no vetor de entrada $\vec{v}_{in}$, o eixo cinza na elipse representa $\vec{e}_1$ utilizado pelas *hyperstreamlines*, a seta na ultima coluna representa a direção de deflexão utilizada pelas *tensorlines*[15].

Tabela 3.1: Restrições para propagação da tensorline

Anisotropia	Direção de entrada	Saída Desejada
Linear	Qualquer	$\vec{e}_1$
Planar	Tangencial ao disco	$\vec{v}_{in}$ ou $\vec{v}_{def}$
Planar	Normal ao plano do disco	$\vec{v}_{def}$
Esférica	Qualquer	$\vec{v}_{in}$ ou $\vec{v}_{def}$

em regiões com anisotropia planar. Nestes dois casos a ambiguidade não é solucionada baseando-se somente na anisotropia, sendo necessário incluir o coeficiente w_{punct}. Este coeficiente assume valores entre 0 e 1, e afeta o quanto a propagação penetrará através de tensores planares orientados normais a este caminho. Esta característica depende fortemente do tipo de dado que está sendo investigado.

Para detectar todas as *tensorlines*, uma partícula de massa desprezível é propagada ao longo do campo tensorial utilizando a velocidade de propagação definida na Equação 3.2. Inicialmente, seleciona-se uma posição aleatória, e caso o vetor de propagação $\vec{v}_{prop_j}$ ainda não tenha sido calculado para o tensor $\boldsymbol{D}_j$ presente no voxel j, calcula-se $\vec{v}_{prop_j}$.

Nesta primeira iteração, $\vec{v}_{in}$ é um vetor nulo. A próxima posição a ser visitada é calculada utilizando um integrador numérico. Dois integradores são descritos no Apêndice A. Como dito, essa propagação ocorre a partir da posição inicial e é realizada em ambos os sentidos. Sendo propagada até que se encontre um dos critérios de parada. Este procedimento é repetido até que tenha-se *tensorlines* que representem todo o campo.

Os critérios de parada do método também dependem do tipo de dado que está sendo analisado, podendo ser levado em conta um limiar relativo. Por exemplo a anisotropia fracionada *FA* definida na Seção 1.1.2.3 e o indicador de validação que é um atributo fornecido pelo sistema de aquisição dos dados e indica quais tensores são válidos e quais são ruído. A propagação também é abortada quando a partícula for deslocada para um voxel contendo um tensor já visitado ou estiver fora do limite de simulação.

3.2 Equação de prioridade para geração de partículas

O método de visualização proposto é baseado no rastreamento de partículas, nesta seção serão definidas partículas p que permitirão a visualização das características do campo tensorial pois terão suas posições e atributos exibidos graficamente para o usuário. São diferentes das partículas discutidas na seção anterior, cuja única função era a geração das *tensorlines*.

Um dos pontos centrais deste trabalho é a definição de um critério para a geração de novas partículas que serão visualizadas. Isto deve ser feito de modo que ressalte as características do campo tensorial. Nesta seção propõe-se um escalar Υ_t que define a probabilidade de uma partícula p ser criada na posição do campo tensorial onde está inserido o tensor $\boldsymbol{T}$.

Para a definição dessa prioridade são utilizadas características do tensor (independentes do observador) e fatores geométricos da cena (dependentes do observador).

Os **termos independentes do observados** foram definidos na Seção 1.1.2, os termos dependentes do observador serão definidos a seguir.

3.2.1 Termos dependentes do observador

Como ressaltado por Kindlmann *et al.* [13] um dos problemas da visualização de campos tensoriais é a ambiguidade. Na abordagem de glifos por exemplo, tensores com formas diferentes podem parecer semelhantes sob determinados pontos de vista. Um tensor com anisotropia linear será interpretado como um tensor isotrópico, se o autovetor principal $\vec{e}_1$ estiver alinhado com o ponto de vista do observador ao se utilizar um elipsoide para esta representação . Deste modo, podemos adotar algumas métricas para avaliar a orientação do tensor em relação ao observador.

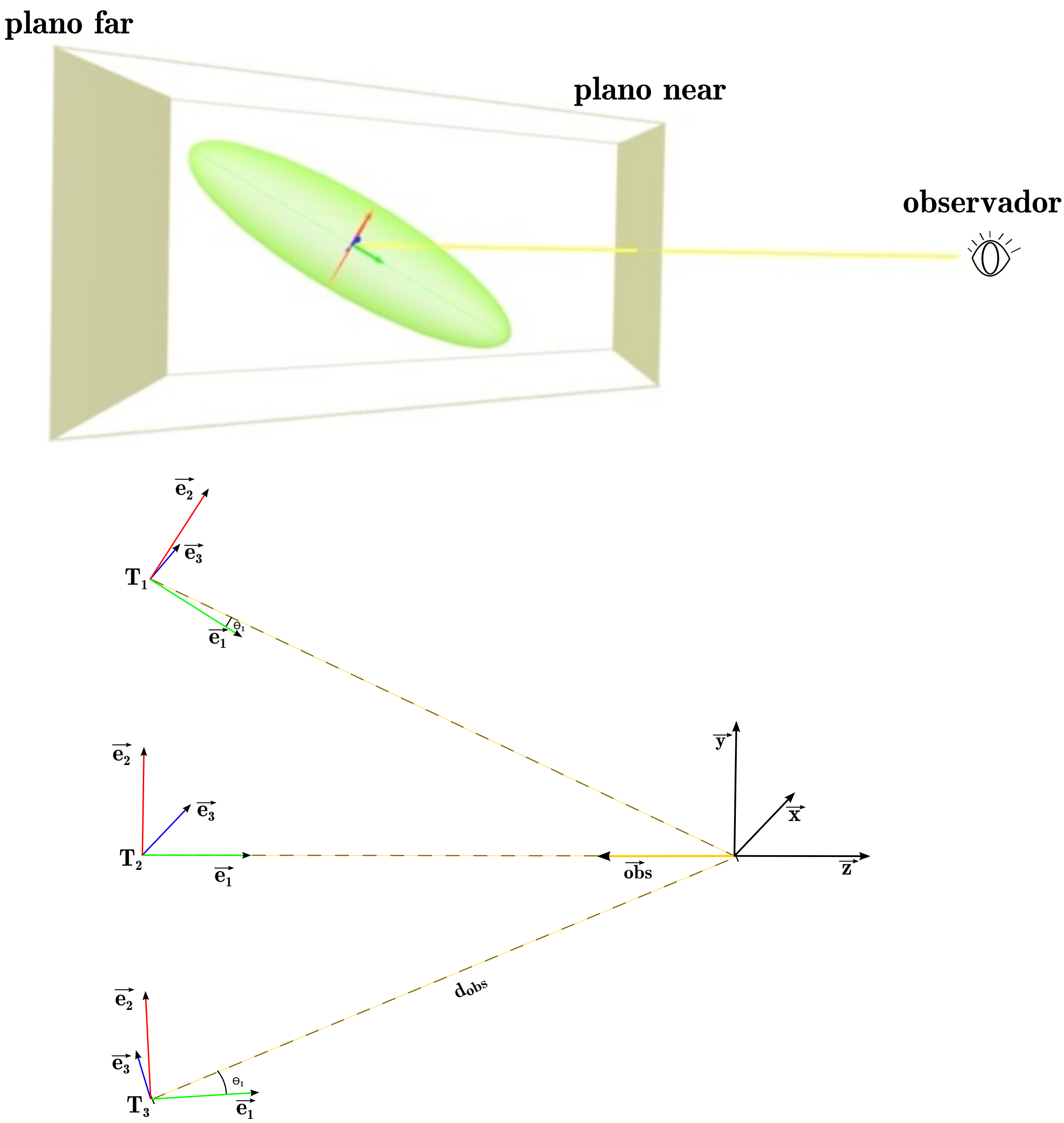


Figura 3.4: Representação simbólica de um campo tensorial em um ambiente gráfico com relação ao observador.

Da álgebra básica tem-se que: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não nulos são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Deste conceito, define-se neste trabalho os coeficientes k_1, k_2 e k_3 como a seguir:

$$k_1 = 1 - |\vec{e}_1 \cdot \vec{obs}| \tag{3.3}$$

$$k_2 = 1 - |\vec{e}_2 \cdot \vec{obs}| \tag{3.4}$$

$$k_3 = |\vec{e}_3 \cdot \vec{obs}|, \tag{3.5}$$

onde $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são os autovetores do tensor e $\vec{obs}$ é o vetor que corresponde ao sistema de visualização da câmera. A posição e a orientação deste vetor definem o ponto onde o observador se encontra, que é chamado de centro de projeção e a orientação espacial do observador, ou seja, para onde ele esta olhando (ângulo de elevação) e qual a inclinação (angulo de rotação).

Verifica-se então que a ortogonalidade dos autovetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ com o observador é diretamente relacionada aos coeficientes k_1 e k_2 respectivamente e a ortogonalidade de $\vec{e}_3$ é inversamente relacionada a k_3.

Outro termo definido é o inverso da distância euclidiana d_{obs} do tensor $\boldsymbol{T}$ ao observador. A distância é calculada no espaço da câmera e normalizada entre os valores 0 e 1, em seguida invertida. Sendo definida como:

$$d_{obs} = 1/\frac{|\vec{x}_T - \vec{x}_{obs}|}{MAX(d_{obs})}, \tag{3.6}$$

onde, $MAX(d_{obs})$ é a maior distância entre um tensor e o observador.

3.2.2 Valor de prioridade pela combinação linear dos termos

Neste trabalho, buscou-se estabelecer um valor escalar que melhor representasse características de um tensor através dos coeficientes anteriormente descritos. Este valor será posteriormente utilizado como critério de criação das partículas adotadas para a visualização.

Porém, devido a natureza multivariada dos tensores e as diversas aplicações que podem ser dadas ao visualizador, este valor será parametrizado pelo usuário, permitindo a este dar o enfoque na característica que melhor lhe adequar. Foram selecionados treze coeficientes, que de forma geral englobam uma grande gama de características dos tensores. São eles:

- A média dos autovalores do tensor (μ_1): está diretamente relacionada ao tamanho do tensor;

- A variância dos autovalores do tensor (μ_2): de maneira geral irá medir o quão dispersos os autovalores estão em relação aos outros, quanto maior a variância maior da probabilidade de se ter tensores com estruturas planares ou lineares;

- A assimetria dos autovalores do tensor (A_3): auxilia na diferenciação entre anisotropias planares e lineares;

- A norma quadrada do tensor (J_4): também está relacionada à amplificação imposta pelo tensor;

- O coeficiente de anisotropia fracionada (FA) e o coeficiente de anisotropia relativa (RA): são medidas comuns de anisotropia e permite detectar regiões isotrópicas;

- O coeficiente de ortogonalidade do observador com o primeiro autovalor (k_1), com o segundo autovalor (k_2) e com o terceiro autovalor (k_3) irão quantificar a posição relativa do observador com o tensor, podendo assim priorizar tensores que estão paralelos ou ortogonais a janela de visualização;

- A distância normalizada do tensor ao observador (d_{obs}): ressalta os tensores que estão mais próximos da tela.

- O coeficiente de anisotropia linear (c_l), o coeficiente de anisotropia planar (c_p) e o coeficiente de isotropia (c_s): também permitem enfatizar anisotropias;

Assim como $\{\mu_1, \mu_2, A_3\}$, $\{J_4, FA, A_3\}$, $\{A_3, FA, RA\}$ e $\{c_l, c_p, c_s\}$ são conjuntos de medidas que apresentam gradientes ortogonais [7]. Desta forma, dado um tensor $\boldsymbol{T}$ define-se o valor de prioridade (Υ_t) como sendo a combinação linear destes atributos ponderados por escalares α_i definidos pelo usuário:

$$\begin{aligned}\Upsilon_t =& \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 J_4 + \alpha_5 FA + \alpha_6 RA \\ &+ \alpha_7 k_1 + \alpha_8 k_2 + \alpha_9 k_3 + \alpha_{10} d_{obs} + \alpha_{11} c_l + \alpha_{12} c_p + \alpha_{13} c_s,\end{aligned} \tag{3.7}$$

com $\alpha_i \in [-1, 1]$.

Como definido pela Equação 1.11 o coeficiente c_s pode ser obtido pela combinação linear de c_p e c_l. Pode-se então, retira-lo do cálculo de Υ_t sem prejuízo na definição das características:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}c_l + \alpha_{12}c_p + \alpha_{13}c_s &= \\
\alpha_{11}c_l + \alpha_{12}c_p + \alpha_{13}(1 - c_l - c_p) &= \\
\alpha_{11}c_l + \alpha_{12}c_p + \alpha_{13} - \alpha_{13}c_l - \alpha_{13}c_p) &= \\
\alpha_{13} + c_l(\alpha_{11} - \alpha_{13}) + c_p(\alpha_{12} - \alpha_{13}) &= \\
\alpha_{13} + \alpha_{14}c_l + \alpha_{15}c_p&, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

como o escalar α_{13} não irá ponderar nenhuma características do tensor $\boldsymbol{T}$, este pode ser eliminado sem prejudicar o calculo do valor de prioridade. Assim:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t =& \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 J_4 + \alpha_5 FA + \alpha_6 RA \\
&+ \alpha_7 k_1 + \alpha_8 k_2 + \alpha_9 k_3 + \alpha_{10} d_{obs} + \alpha_{11}c_l + \alpha_{12}c_p. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

3.3 Dinâmica utilizando rastreamento de partículas

Nesta seção será abordada a dinâmica de rastreamento de partículas, utilizando as características anteriormente explanadas. Como saída do pré-processamento utilizando *tensorlines* tem-se um campo vetorial que representa as características do campo tensorial de entrada.

Para se visualizar este campo vetorial, insere-se partículas de massa desprezível e seus movimentos são coordenados de acordo com os componentes vetoriais do campo.

O conceito de *Linhas de Trajetória* é utilizado na mecânica dos fluidos para estudar a trajetória das partículas e avaliar a mudança dos atributos que acompanham a partícula ao longo desta trajetória [1].

Ao se descrever um fluxo de forma Euleriana tem-se um campo de velocidades $\vec{v}$ em função da posição no espaço $(\vec{x})$. Assim, pode-se computar a posição $\vec{x}$ de uma partícula em função do tempo t. De outro modo, adotando-se uma abordagem Lagrangiana, o vetor velocidade $\vec{v}_p$ não será mais um atributo do campo, mas sim da partícula p e será definido em função do tempo t e de sua posição atual $\vec{x}_p$. Neste trabalho utiliza-se a abordagem Euleriana para descrever o fluxo das partículas e o campo de velocidades é definido através das *tensorlines* geradas na etapa de pré-processamento.

O rastreamento de uma partícula pode ser matematicamente descrito pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{v}_p(\vec{x}_p, t) \quad t \in [t_0, t_\Omega] \\ \vec{x}_p|_{t=t_0} = \vec{x}_{p_0}. \end{cases}, \tag{3.10}$$

onde, $\vec{x}_{p_0}$ é a posição inicial de uma partícula p, com velocidade $\vec{v}_p(p,t)$. t_Ω é o tempo que uma partícula p leva para percorrer todo o domínio Ω.

As *tensorlines* geradas no pré-processamento tem dois sentidos de propagação. Por isto, é necessário a cada passo, verificar se o sentido da velocidade no passo anterior é o mesmo do campo vetorial. Caso isto não ocorra a velocidade do campo é invertida e a partícula propagada. Ao realizar esta verificação na primeira iteração, como não existe a velocidade do passo anterior, é utilizada uma direção principal definida na criação da partícula. Uma visão geral do rastreamento de partículas é mostrado na Figura 3.5.

Diversos métodos numéricos podem ser utilizados para resolver o problema de valor inicial definido pelo sistema de equações 3.10 e são abordados no Apêndice A.

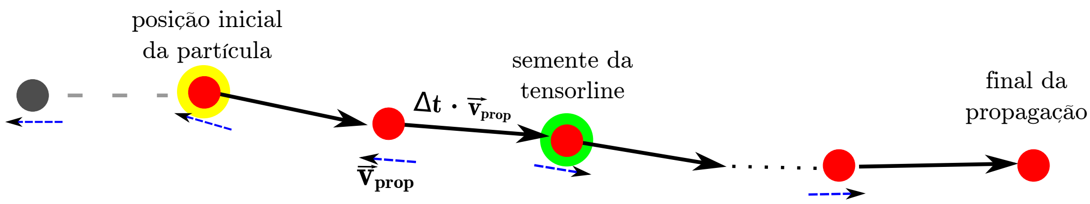


Figura 3.5: Visão geral do rastreamento de partículas

3.3.1 Criação de partículas

Um dos pontos mais críticos para visualização utilizando rastreamento de partículas é o critério de criação. Um número arbitrário de partículas serão inseridos no reticulado e sua posição inicial definirá qual *tersoline* será visualizada e por conseguinte quais características do campo tensorial serão ressaltadas.

Kondratieva *et al.* [18] propõem que a posição inicial da partícula seja definida randomicamente, mas devido a incerteza da probabilidade advinda desta abordagem, ela é eficiente somente para visualização de *tersorlines* aleatórias ou quando adotado um número de partículas suficientes para englobar uma grande região do campo. Não garantindo que as características desejadas serão ressaltadas.

Propõe-se então que a seleção da posição inicial da partícula seja dependente das características do campo tensorial. Na Seção 3.2.2 foi definido o escalar Υ_t, que quantifica de forma global as características que o usuário deseja visualizar. Este valor então é utilizado como parâmetro para a criação de uma lista de prioridades.

Todos os tensores pertencentes ao campos são inseridos nesta lista, calcula-se Υ_t para cada tensor $\boldsymbol{T}$ e em seguida ordena-se esta lista. Desta forma os elementos mais importantes estarão posicionados nas primeiras posições.

Gera-se um número randômico $\kappa \in [0, 1]$ utilizando uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão igual a um. Este número é utilizado para escolher um tensor da lista de prioridades representado na Figura 3.6.

A localização do tensor escolhido na fila de prioridades será dada por:

$$z = \frac{\kappa N}{\varsigma},$$

onde N é o número total de tensores e ς definirá a escala com que a a distribuição gaussiana será mapeada no suporte limitado pelo número de tensores do campo. Quanto maior ς maior a frequência de escolha de tensores de maior prioridade.

A nova partícula será criada na posição do tensor escolhido. A Figura 3.6 representa a função de densidade de probabilidade da distribuição sobre a fila de prioridades.

A medida que termos dependentes do observador são utilizados no cálculo de Υ, é necessário realizar a ordenação lista de prioridades **todas as vezes** que as coordenadas da câmera são alteradas. Por este motivo esta não pode ser uma operação com custo a ponto de prejudicar o tempo de processamento.

Vários algoritmos de ordenação podem ser aplicados nesta etapa [28, 29]. Depois da primeira iteração a lista de prioridades irá permanecer parcialmente ordenada sempre que a mudança na orientação da câmera for pequena, este pode ser o pior caso para alguns algoritmos de ordenação como o *quicksort*, mas utilizando a técnica Mediana de 3 [30, 31] para seleção do pivô ele obteve melhor desempenho.

Nesta etapa de criação também é definida uma direção base com um sentido, esta direção é usada no primeiro passo do rastreamento de partículas e define o sentido que a partícula irá adotar durante toda a simulação.

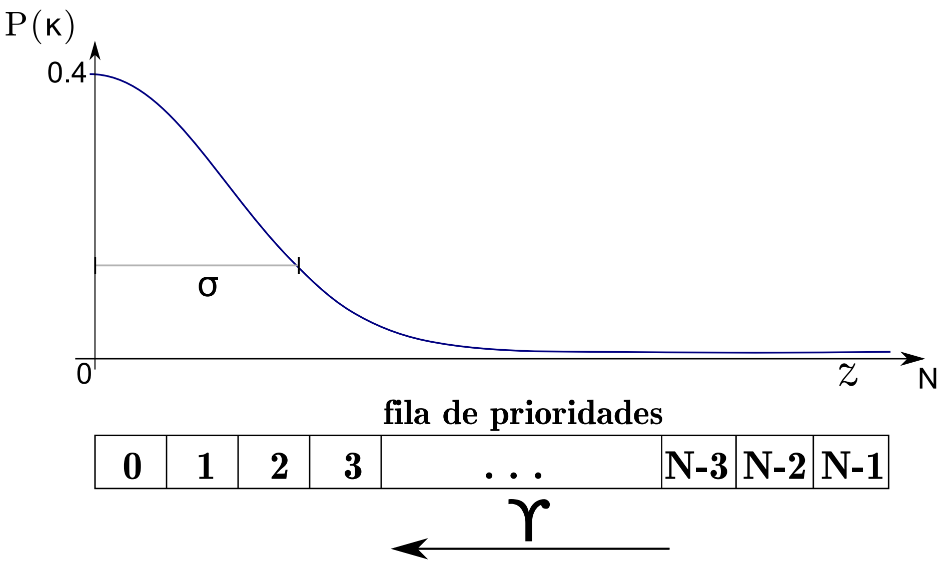


Figura 3.6: Função densidade probabilidade da distribuição normal sobre a fila de prioridades.

Definindo-se uma única direção base para todas as partículas, todo o fluxo terá também um único sentido. Pode-se definir também esta direção de forma singular para cada partícula. Utilizando por exemplo o gradiente de algum atributo do campo. Deste modo, o fluxo será orientado na direção deste gradiente. Ressaltando que neste caso, deve ser feito um tratamento para não ocorrer pontos onde as partículas fiquem presas em regiões de mínimos ou máximos locais.

3.3.2 Critério de parada de partículas

Outro ponto importante na visualização utilizando partículas é o critério adotado para definir quando uma partícula não será visível para o usuário, ou seja, quando ela será destruída. Isto ocorrerá sempre que uma partícula chegar ao fim de uma tensorline.

No método proposto, uma partícula é morta quando propagada para um voxel onde está um tensor que tem alta anisotropia fracionada *FA*. A partícula também é destruída quando o módulo do produto interno da direção de entrada em um voxel com a direção de propagação presente naquele voxel é menor que um limiar.

Neste trabalho, este limiar foi definido empiricamente por 0.3. Esta medida pretende fazer com que o fluxo seja mais suave, evitando assim que a visualização fique poluída devido a degenerações presentes no campo. Nesta etapa também são tratadas as condições de contorno que determinam se uma partícula foi propagada para fora dos limites espaciais da simulação.

Com o intuito de evitar desalocações e alocações desnecessárias de memória no final da propagação de uma partícula, ao invés desta ser destruída e uma nova ser gerada, a mesma partícula deve ser reiniciada em uma outra posição com seus atributos renovados. Assim, pode-se dar continuidade a visualização e gerenciar a memória de maneira mais eficiente.

Ao utilizar a fila de prioridades este trabalho apresenta uma modificação nas abordagens de Kondratieva [18]. Um número fixo de partículas é mantido durante toda a simulação. Ao ser destruída a mesma partícula tem seus atributos zerados e é recriada em uma nova posição, observando o critério de criação de partículas descrito na Seção 3.3.1.

Assim, as partículas reiniciadas podem ressaltar uma informação diferente a cada ciclo completo de propagação. Outra informação será ressaltada caso o usuário durante a execução altere manualmente os parâmetros α_i presentes em Υ ou realize uma mudança no sistema de visualização da câmera que altere os termos dependentes do observador.

4 RESULTADOS

Neste trabalho, para validar o método de visualização proposto, foram utilizados campos tensoriais gerados sinteticamente e um conjunto de dados DT-MRI clínicos. As partículas foram representas por um glifo tipo apontador ou por superquádricas [13]. O glifo tipo apontador é representado basicamente por uma seta, sua forma e tamanho não variam de acordo com tensor a ser representado e sua orientação coincide com o vetor velocidade da partícula.

A não ser que seja explicitado, a coloração utilizada nos glifos será definida de acordo com a característica desejada e segue a escala de cores definida na Figura 4.1. Todos os experimentos foram realizados em um Intel® Core$^{\text{TM}}$i5-450M; DDRIII 4GB (RAM) e placa de vídeo: ATI Radeon HD5850 / 1GB DDR5.

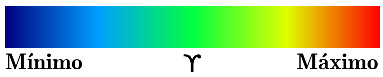


Figura 4.1: Escala de cores da simulação.

Figura 4.2: Glifo do tipo apontador.

4.1 Campos tensoriais sintéticos

4.1.1 Campo de influência de 3 pontos

Este campo tensorial define a influência de três pontos em todo o campo, formando uma grade regular de dimensão 38 x 39 x 40. O centro do campo está posicionado no centro da grade e os três pontos estão nas posições $\vec{c}_1 = (19, 19.5, 20)$, $\vec{c}_2 = (19, -19.5, 20)$ e $\vec{c}_3 = (-19, -19.5, -20)$.

Para cada voxel foi gerado um tensor $\boldsymbol{F}$ correspondente a soma da influência de cada um dos três pontos principais:

$$\vec{f}_{c_k} = (\vec{c}_k - \vec{x}_v)\frac{e^{-\sqrt{h_k}}}{h_k}\ \forall\, k \in \{1,2,3\},$$
$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{3}(f_{c_k i} f_{c_k j}). \tag{4.1}$$

Onde, h_k é a distância euclidiana do ponto $\vec{c}_k$ ao voxel e $\vec{x}_v$ é a posição do voxel.

Este campo pode ser visualizado na Figura 4.3 e algumas *tensorlines* podem ser visualizadas na Figura 4.4. Essas *tensorlines* foram geradas mantendo-se o *buffer* da imagem em cada *frame*. Assim toda a trajetória de uma partícula pode ser visualizada. Pode-se observar que várias *tensorlines* presentes na imagem 4.4 conectam pares de pontos principais posicionados nos vértices do volume.

Pode-se observar ainda na Figura 4.4 que aumentando o passo de tempo utilizado no rastreamento de partículas também aumenta a distância entre posições da partícula.

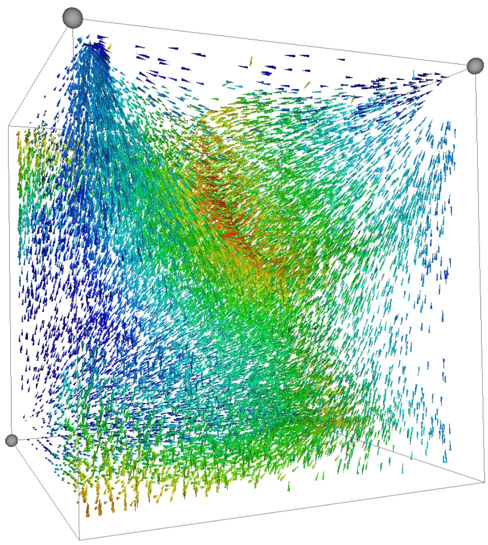


Figura 4.3: Campo de influência de 3 pontos: 25.000 partículas; coloração definida por c_p.

Uma das características mais importantes é a assimetria A_3 que indica o tipo de anisotropia presente no campo. Ela varia de negativa para positiva à medida que a forma de um tensor varia de planar para linear. Definindo $\Upsilon = A_3 + FA$, obtém-se o resultado visto na Figura 4.5(a). Esta característica pode ser validada ao se utilizar superquádricas para representar as partículas (Figura 4.5(b)). Note que as superquádricas são mais alongadas nos pontos em que os tensores são lineares, confirmando a distribuição mostrada

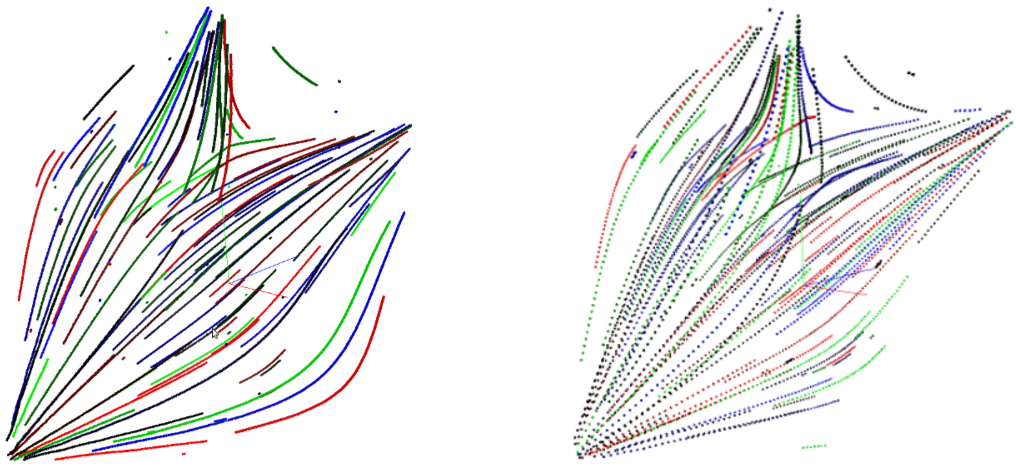
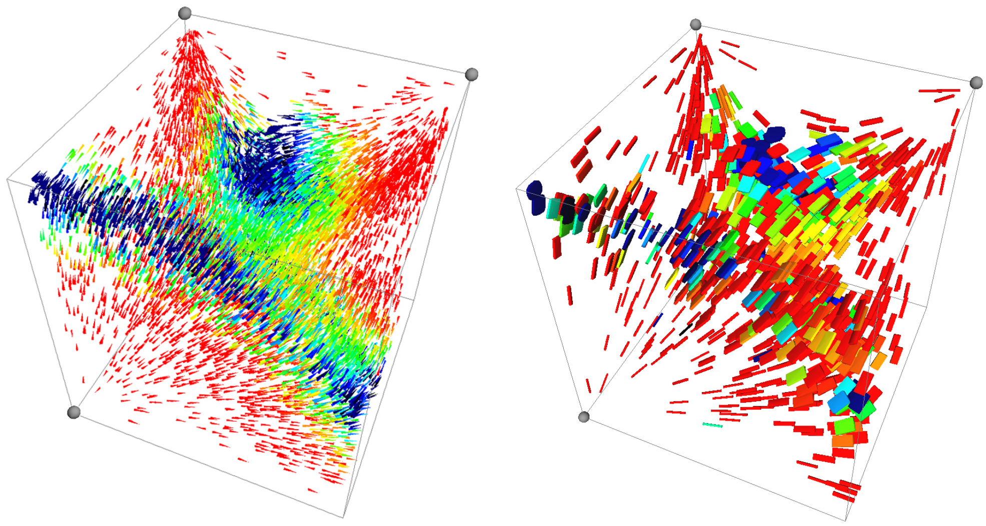


Figura 4.4: Algumas tensorlines presentes no campo de 3 pontas. Duas simulações, com Δ_t igual a 0.2 e 0.8 respectivamente.

na Figura 4.5(a).



(a) Glifo do tipo apontador (b) Superquádricas

Figura 4.5: Mapa de cor definido por $\Upsilon = A_3 + 0.5FA$. Regiões vermelhas representam tensores com anisotropia linear e regiões azul com anisotropia planar.

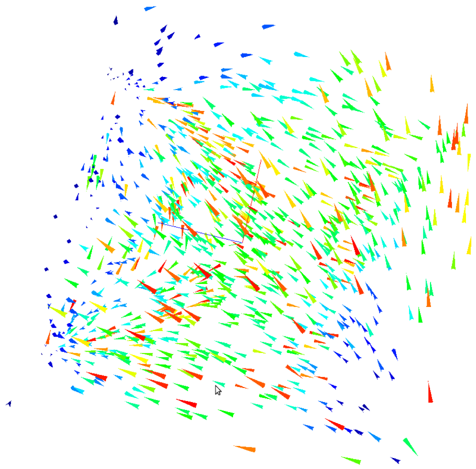
Na Figura 4.6 é representado o impacto dos coeficientes dependentes do observador (k_1, k_2 e k_3) na visualização.

Observa-se que sob um mesmo ponto de vista a distribuição de partículas em uma determinada região se altera de acordo com o peso dado para cada parâmetro.

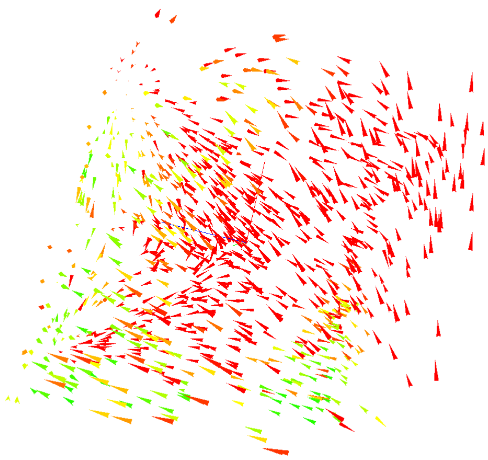
Na Figura 4.6(a), ao utilizar k_1, destacam-se os tensores que estão ortogonais à visualização (vermelho) em detrimento daqueles que estão paralelos à visão do observador (azul). Esta abordagem é interessante para ressaltar *tensorlines* que não estão alinhadas com o eixo Z do sistema da câmera.

Na Figura 4.6(b) além de ressaltar os tensores com a primeira componente ortogonal ao observador, também são ressaltados aqueles que tem a segunda componente ortogonal ao observador. Esta visualização é interessante para se visualizar tensores planares.

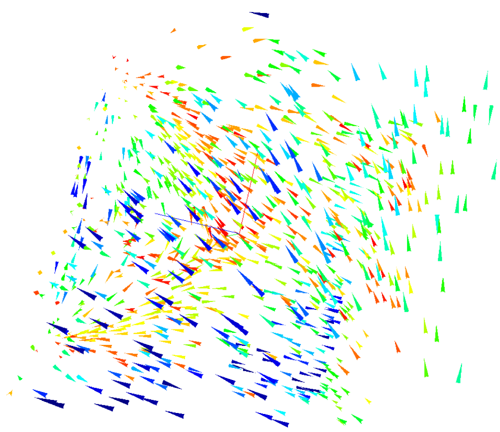
Na Figura 4.6(c) são ressaltadas aquelas estruturas com a terceira componente paralela ao observador. Esta abordagem é interessante para ressaltar *tensorlines* que estão alinhadas com o eixo Z do sistema da câmera.



(a) $\Upsilon = k_1$



(b) $\Upsilon = k_1 + k_2$



(c) $\Upsilon = k_3$

Figura 4.6: Comparação dos termos dependentes do observador na visualização. Coloração dada por Υ. Em vermelho: (a) e (b) glifos ortogonais ao observador; (c) glifos alinhados com observador .

O gráfico apresentado na Figura 4.7 mostra a comparação entre o número de partículas e o números de quadros por segundo gerados (Qps).

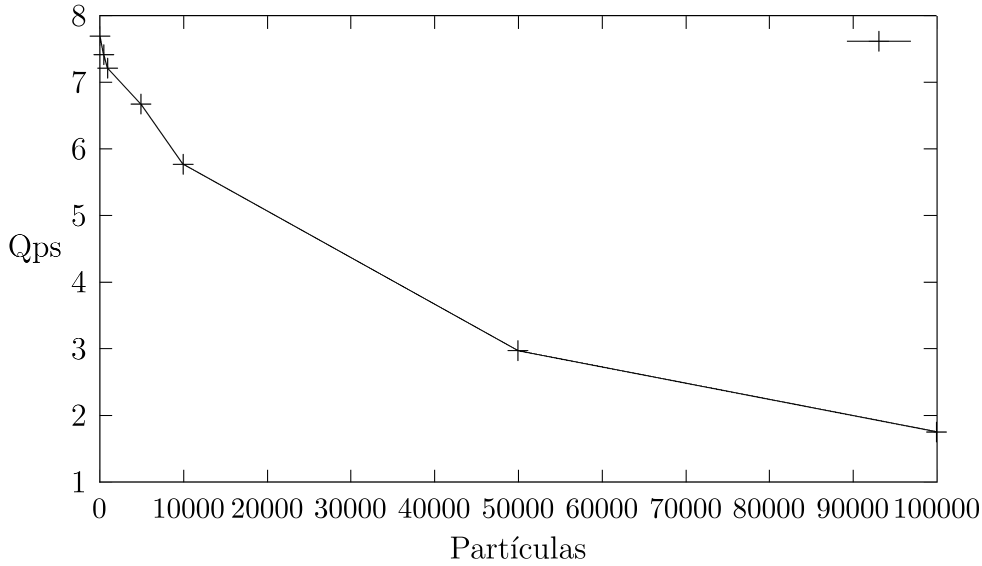


Figura 4.7: Número de partículas comparado com o número de quadros por segundo.

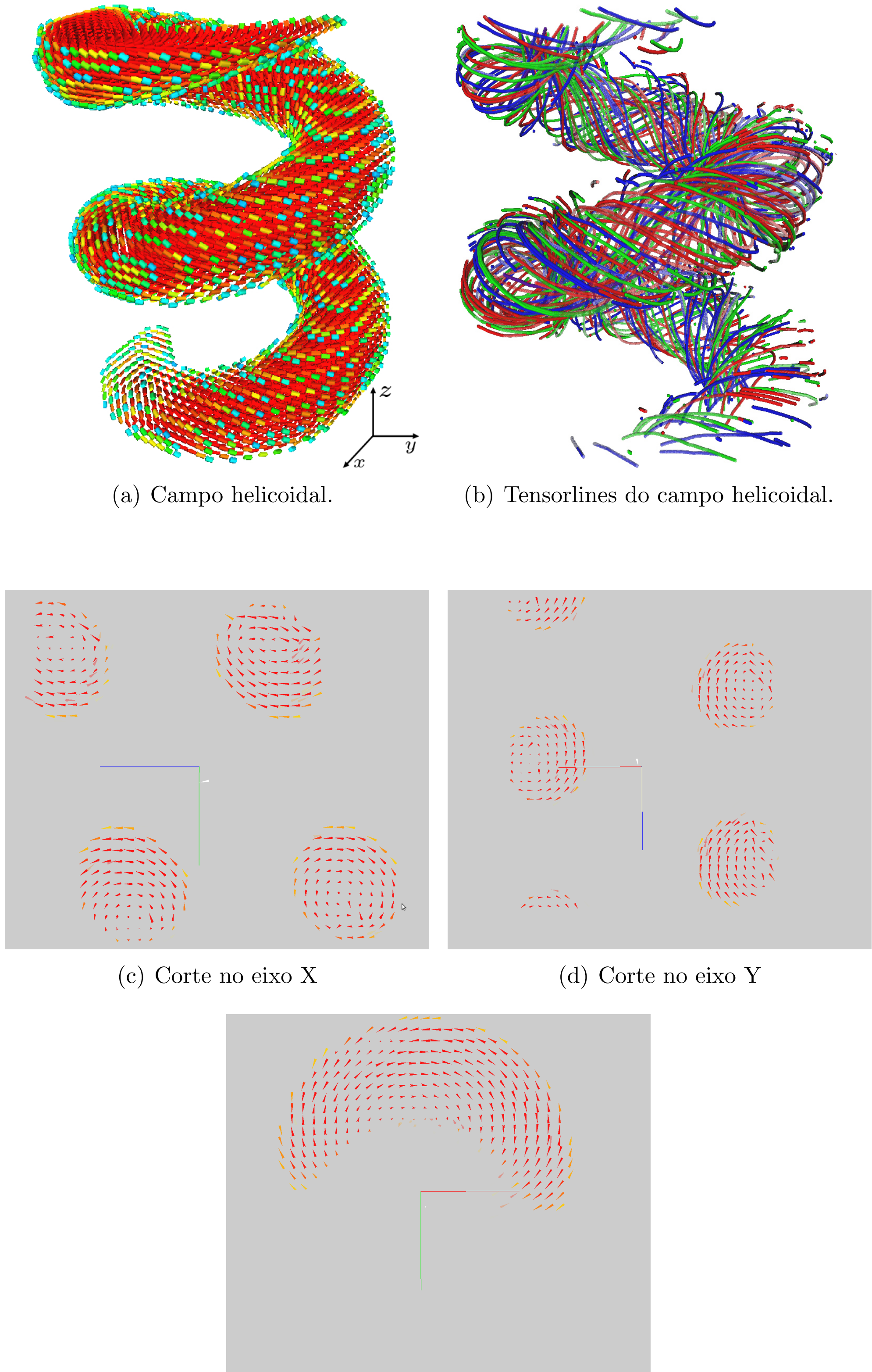
4.1.2 Campo helicoidal com torção

O campo tensorial tratado nesta seção tem resolução de 38 x 39 x 40 e foi gerado sinteticamente utilizando a biblioteca TEND de autoria de Kindlmann [32]. Os tensores deste campo são simétricos positivo-definidos e assumem a forma de uma hélice. Os tensores sofrem um processo de torção ao longo do eixo Z. Este campo é apresentado da Figura 4.8(a).

A torção realizada no campo pode ser verificada pelas rotações representadas nas *tensorlines* presentes na Figura 4.8(b).

Ao observar cortes realizados no campo (Figura 4.8), percebe-se que os tensores da borda da hélice tem uma amplitude ligeiramente menor em relação aos internos. Esta característica é observada ao se analisar a variação de J_4 no campo. Esta informação pode ser complementada ao utilizar a média dos autovalores como medida de interesse $\Upsilon = 2\mu_1$. Observa-se na Figura 4.9 que na posição inicial nenhuma partícula foi criada em alguma região com média baixa. Mas, com o decorrer do tempo as partículas percorrem as *tensorlines* e atingem regiões com médias menores, presentes nas bordas da hélice.

Neste campo também é importante notar a influência dos termos dependentes do observador. É interessante observar que os tensores mais ortogonais com o observador formam estreitas linhas no centro do campo helicoidal (Figura 4.10(a)) e que ao tornar o



(a) Campo helicoidal.

(b) Tensorlines do campo helicoidal.

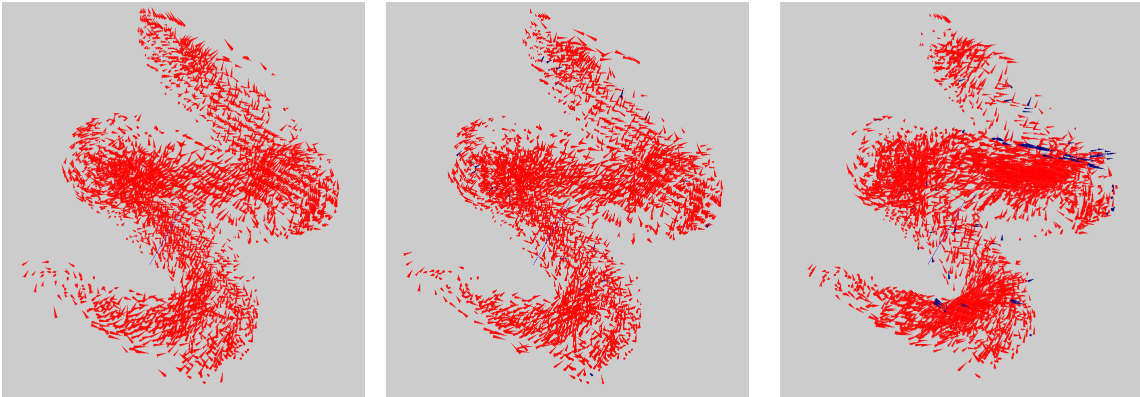
(c) Corte no eixo X

(d) Corte no eixo Y

(e) Corte no eixo Z

Figura 4.8: 3 cortes do campo helicoidal. Coloração dada por J_4.

eixo Z mais alinhado com observador pode-se notar no centro da hélice um gradiente de cores variando do verde ($k_3 \approx 0$) ao vermelho ($k_3 \approx 1$) à medida que os tensores começam



(a) $\Delta_t = 0$ (b) $\Delta_t = 15$ (c) $\Delta_t = 30$

Figura 4.9: Média dos autovalores em relação ao tempo. Coloração dada por μ_1.

a apontar para o observador (Figura 4.10(b)). Pode-se também utilizar a distância do tensor ao observador para ressaltar estruturas mais distantes no campo de visão (Figura 4.10(c)).

4.1.2.1 Campo helicoidal com torção: aplicação de elemento estruturante

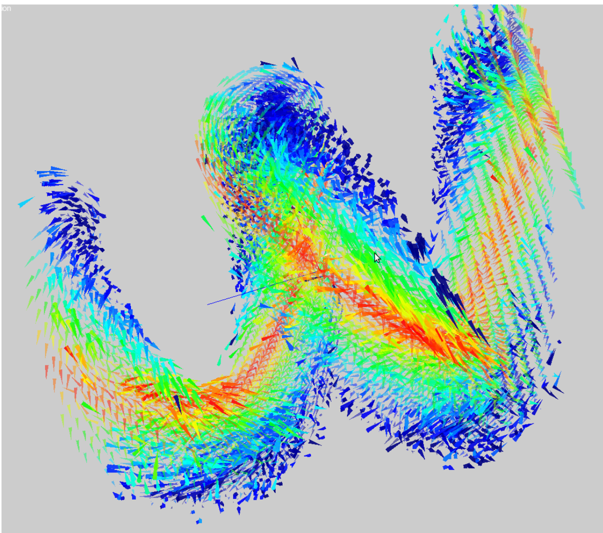
Utilizando uma classe de elementos estruturantes. Barroso [33] propõe um método para a acentuação de estruturas colineares em campos tensoriais.

Ao aplicar um elemento estruturante elipsoidal em dois pontos do campo helicoidal obtém-se um novo campo (Figura 4.11). Observa-se que, após a aplicação do elemento estruturante, apareceram algumas componentes lineares em lugares onde anteriormente existiam tensores isotrópicos e também foram ressaltados os tensores presentes no interior da hélice perto do ponto de aplicação.

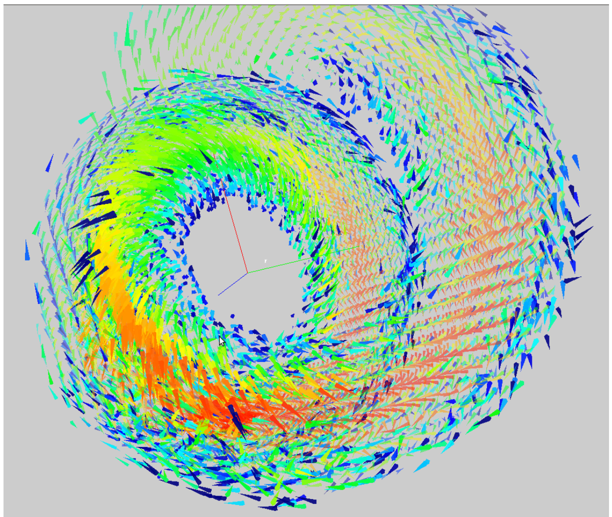
Utiliza-se μ_2 para verificar a tendência de existir tensores planares ou lineares (4.12). Para ressaltar o tipo de anisotropia presente no campo pode-se, por exemplo, realizar a combinação linear da variância com o componente de anisotropia linear $\Upsilon = \mu_2 + c_l$. Verificando-se realmente que os tensores ressaltados tem forma linear depois da aplicação do elemento estruturante neste ponto.

Verifica-se também um aumento da velocidade do fluxo das partículas nessa região, pode-se utilizar a média e norma quadrada do tensor para detectar onde ocorre este aumento (Figura 4.13).

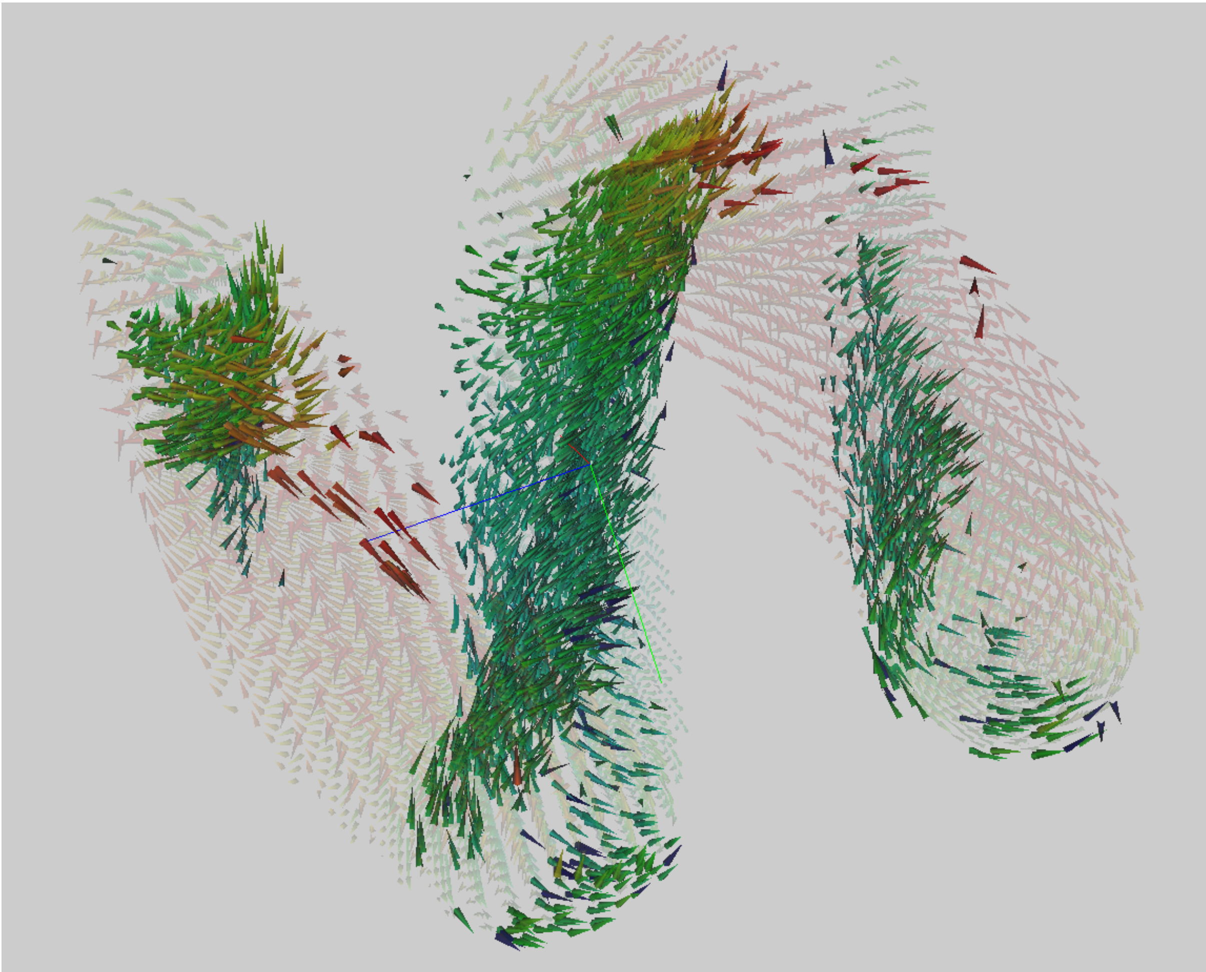
Outra definição importante é o critério de parada. Este critério também está relacionado às características do campo. Percebe-se isto ao utilizar o critério apresentado na



(a) Coloração dada por k_1



(b) Coloração dada por k_3



(c) Tensores mais distantes do observador privilegiados.

Figura 4.10: Termos dependentes do observador no campo helicoidal.

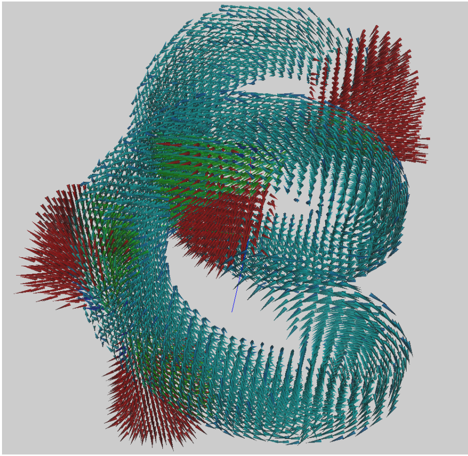
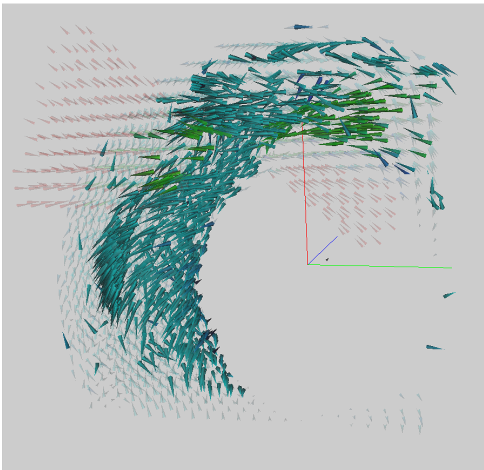
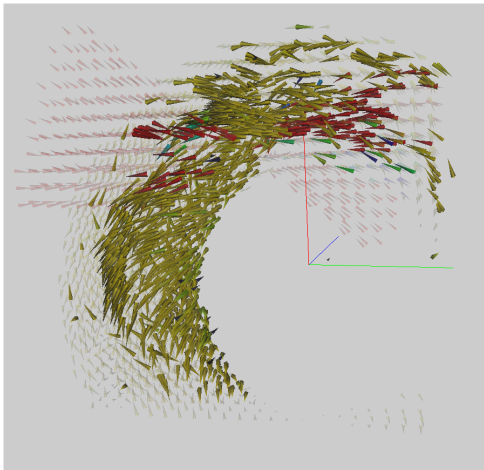


Figura 4.11: Campo helicoidal. Coloração da por c_l



(a) Coloração dada por μ_2



(b) Coloração dada por $\Upsilon = \mu_2 + c_l$

Figura 4.12: Corte no campo helicoidal focalizando a aplicação do elemento estruturante.

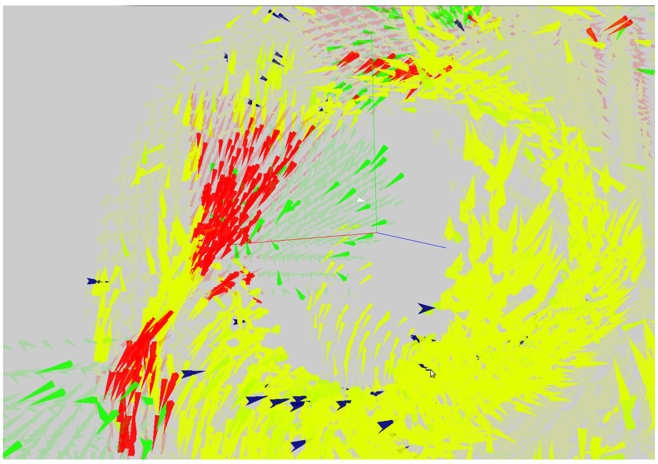
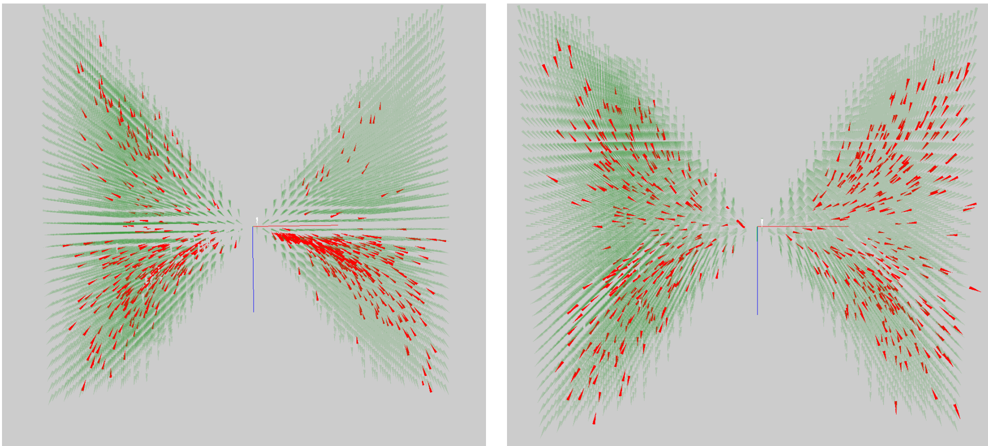


Figura 4.13: Campo helicoidal. Coloração da por $\Upsilon = \mu_1 + 0.25J_4$

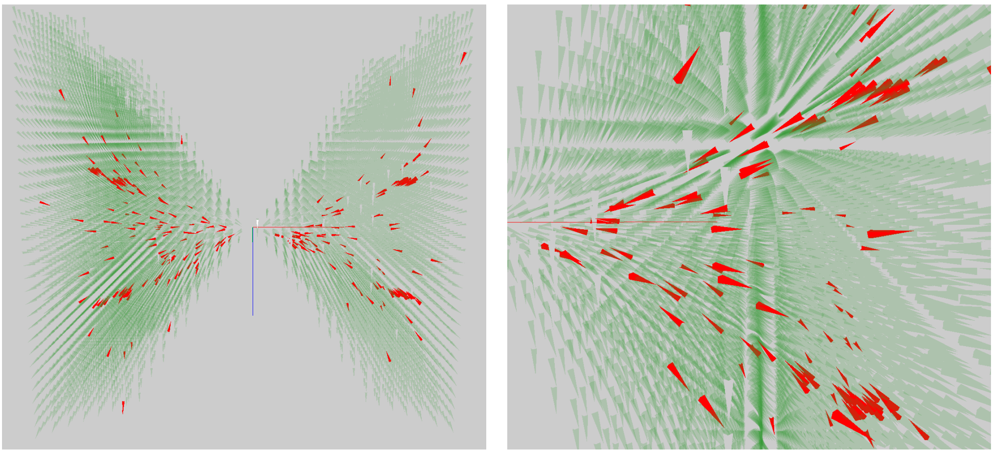
Seção 3.3.2 em campos que não são suaves por natureza. Ao utilizar o módulo do produto interno da direção de entrada em um voxel com a direção de propagação presente naquele voxel como critério de parada, pode-se destruir partículas que iriam representar algumas regiões importantes do campo.

Isto foi observado ao analisar isoladamente o campo que define o elemento estruturante elíptico utilizado por Barroso [33]. Observa-se na Figura 4.14 que, ao se utilizar o critério de parada anteriormente descrito, ocorrem falhas na visualização. Ao suprimir este critério de parada, as partículas são propagadas uniformemente por todo o campo. Porém cria-se regiões de altas frequências onde as partículas ficam presas.



(a) Rastreamento de partículas utilizando o critério de parada em regiões não suaves.

(b) Sem utilizar o critério de parada.



(c) Verifica-se um aglutinamento da partículas, que não são recriadas.

(d) Detalhe na região de aglutinamento.

Figura 4.14: Análise do critério de parada das partículas (vermelho) em um campo tensorial elíptico(verde).

4.2 Campo DT-MRI

Um conjunto DT-MRI é obtido por uma imagem de ressonância magnética dos tecidos biológicos que revela a difusão de moléculas de água dependendo da forma e orientação do tecido celular.

A probabilidade da difusão é caracterizada por um tensor que descreve a orientação e alinhamento das vias moleculares. "À medida que as vias moleculares revelam as conectividades entre regiões biológicas, a visualização de tensores de difusão ajuda a observar estruturas globais ou locais do tecido biológico"[26]. Várias referências podem ser encontradas sobre o assunto [26, 18, 7, 10, 19, 27].

O campo tensorial DT-MRI do cérebro aqui analisado foi disponibilizado pela Universidade de Utah [32]. O campo tem resolução de 74 x 9 5 x 80 e o tamanho do *voxel* é de 1mm x 1mm x 1mm (Figura 4.15).

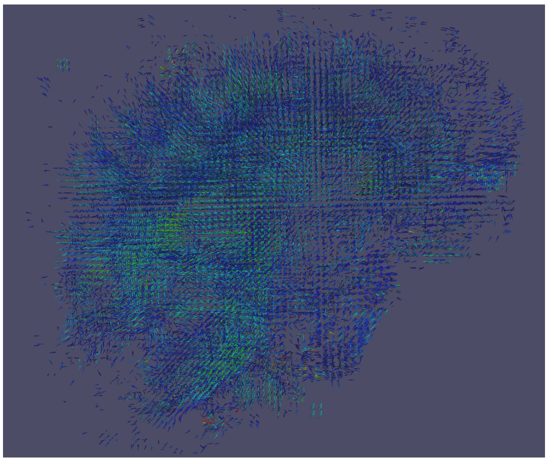
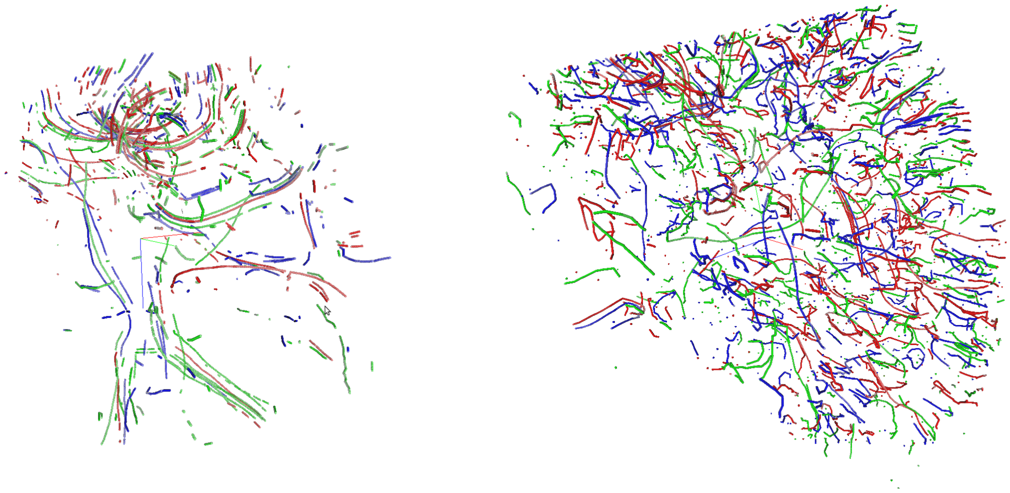


Figura 4.15: Campo DT-MRI. Coloração da por c_p

Por se tratar de um dado clínico, normalmente ocorrem ruídos e a distribuição das características não acontece de maneira suave. Este fato pode ser observado na Figura 4.16 ao analisar as *tensorlines* geradas.

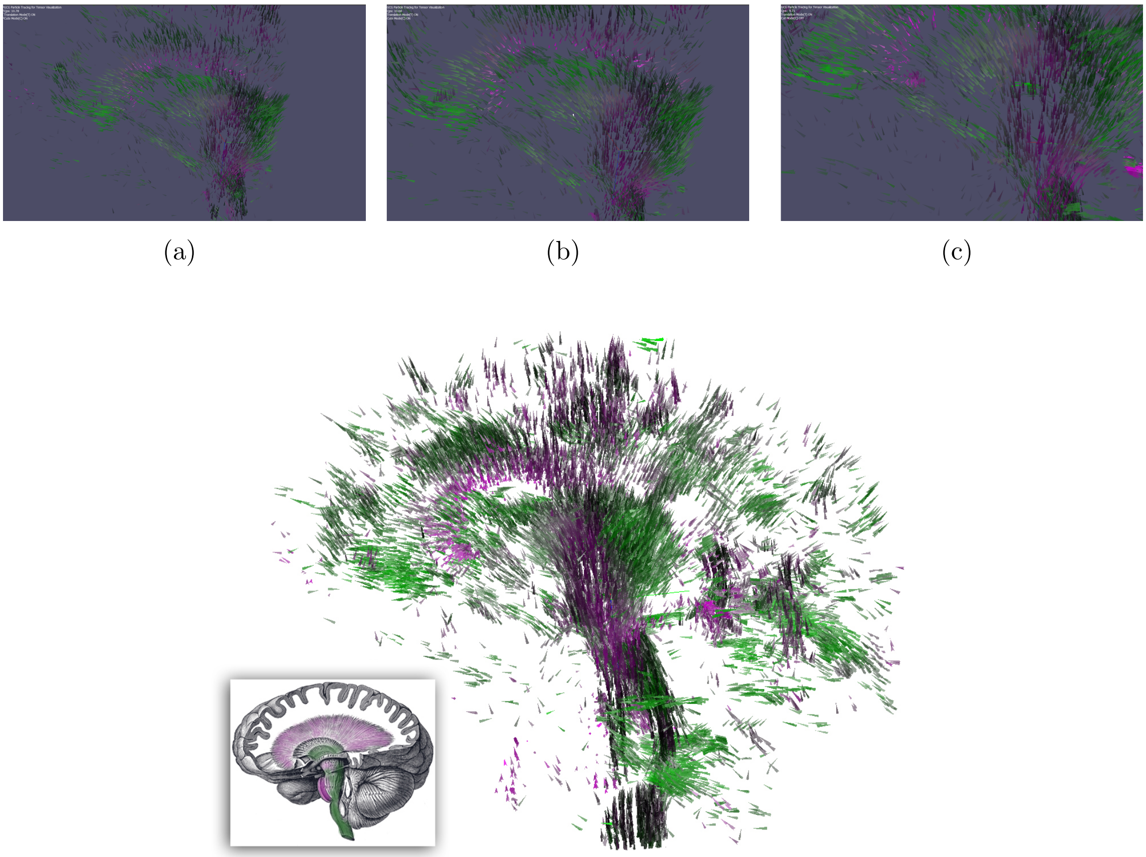
Alguns outros esquemas de colorações são propostos na literatura, Kondratieva *et al.* [18] propõem a utilização de alguma das bases ortogonais formadas pelos atributos do campo para definir o sistema de cor.

Adotando a distribuição RGB($FA|\vec{e}_{1_x}$, $FA|\vec{e}_{1_y}$, $FA|\vec{e}_{1_z}$) pode-se destacar tecidos específicos presentes no cérebro, como a *corona radiata* e *pirâmide* vistos na Figura 4.17.



(a) (b)

Figura 4.16: *Tensorlines* do campo DT-MRI.



(a) (b) (c)

(d)

Figura 4.17: Destaque para estruturas presentes do cérebro. *Corona radiata* em magenta [26]. Utilização de 100.000 partículas.

Kindlmann ressalta que, “quando dois ou mais materiais distintos e adjacentes ocupam a região representada por uma única amostra, o valor da amostra irá misturar as características dos materiais constituintes. Análises prévias do efeito de volume parcial demonstram que nestes casos existem uma tendência a ocorrer tensores com anisotropia linear proveniente da mistura de medidas tomadas ao longo de regiões lineares adjacentes.” “Comumente presentes no tronco cerebral.” [7]. Assim, observando a Figura 4.19 que apresenta um corte destacando o tronco cerebral e tem uma coloração definida por RGB(c_l,c_p,c_s), pode-se inferir que a região verde claro (maior c_p) tem uma grande chance de conter amostras que representam características mescladas de dois tecidos distintos.

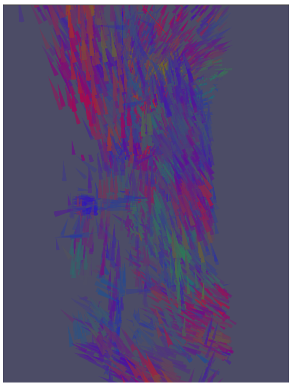


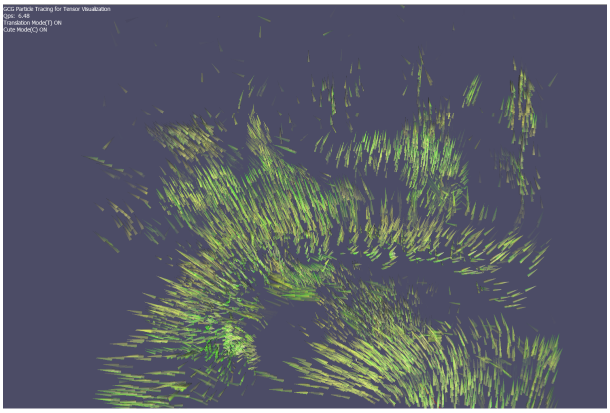
Figura 4.18: Corte ressaltando o tronco cerebral. Região esverdeada com alto c_p. $\Upsilon = c_p + 0.25 d_{obs}$.

Estes resultados foram geradas utilizando outras distribuições de cores. Pois, devido ao tamanho do campo e sua natureza mais heterogênea, ao utilizar um único atributo para definir as três componentes de cor não se obteve resultados satisfatórios. Outras colorações adotadas foram RGB(J_4, μ_2, A_3) e RGB(μ_1, μ_2, A_3), e podem ser analisadas na Figura 4.19.

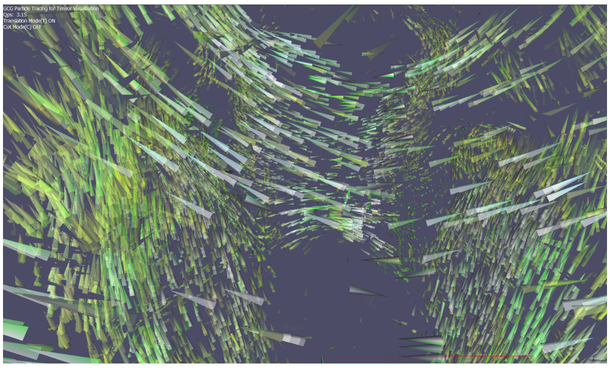
Na Figura 4.19(a) observa-se que a assimetria A_3 não tem muita influência nesta região, sendo que a maioria apresenta valores de norma quadrada próximos da variância. Isto indica que não ocorre muita variação da assimetria nesta região, pois ela é predominantemente amarela.

Também é observado que existem regiões do volume com os três momentos centrais com valores próximos (Figura 4.19(b)), estas regiões apresentam cor branca.

O movimento aguça a percepção humana. Desta forma, o método proposto tende a chamar a atenção do observador para os fluxos das partículas. Estes fluxos irão ressaltar as estruturas presentes no cérebro (Figura 4.20).

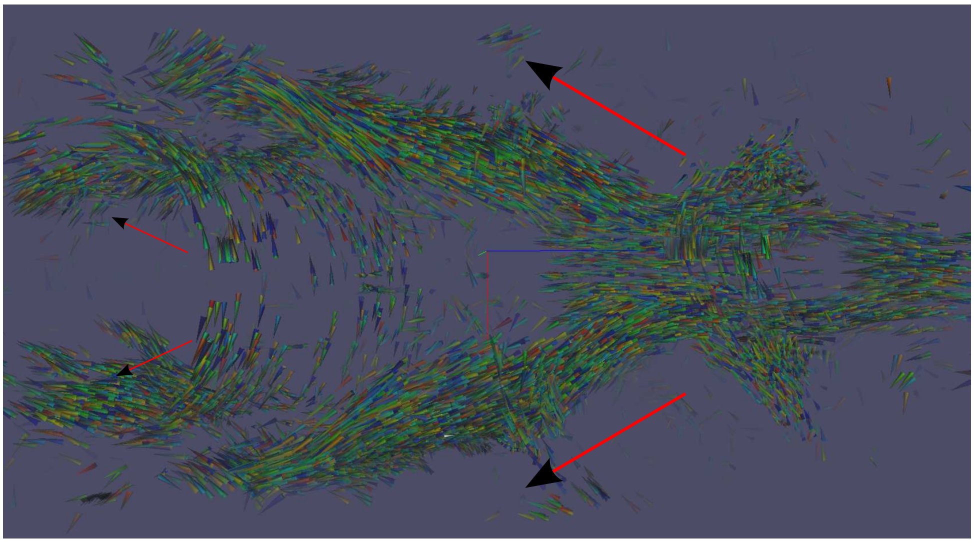


(a) RGB(J_4, μ_2, A_3). 50.000 partículas. $\Upsilon = J_4 + \mu_2$

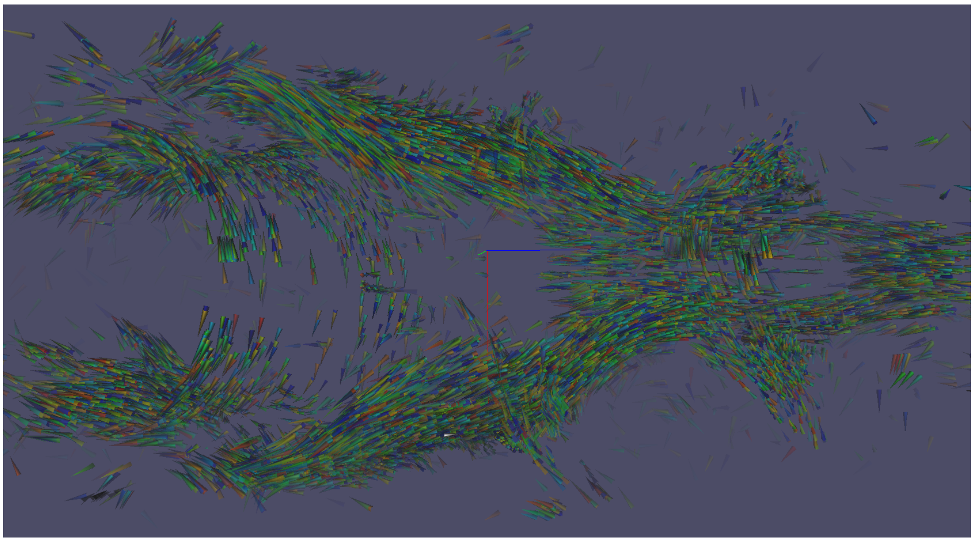


(b) RGB(μ_1, μ_2, A_3). 80.000 partículas. $\Upsilon = \mu_1 + \mu_2 + A_3$.

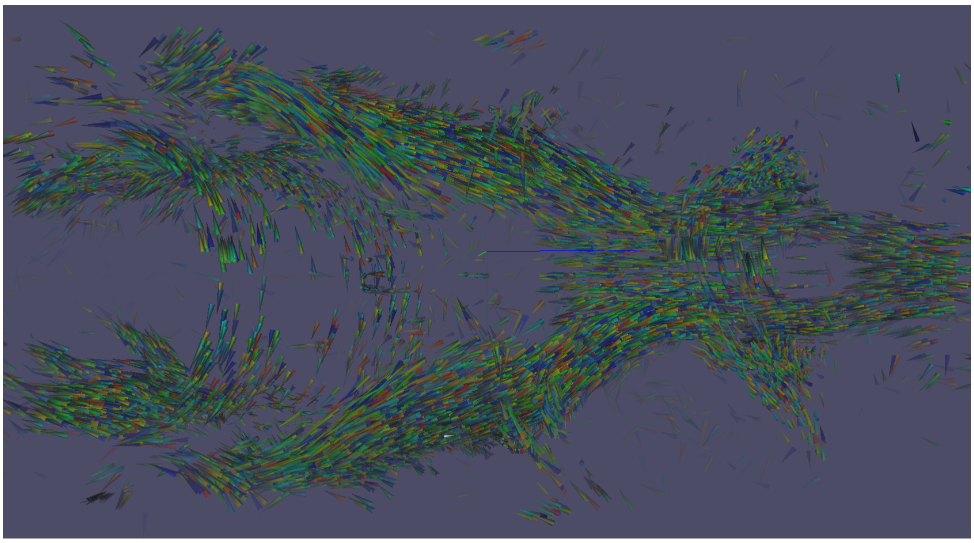
Figura 4.19: Diferentes colorações no campo.



(a) Sentido do fluxo indicado pelas setas vermelhas. Partículas com cor aleatória. $\Delta_t = 0$



(b) $\Delta_t = 20$



(c) $\Delta_t = 50$

Figura 4.20: 10.000 partículas variando em relação ao tempo.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se um método para visualização de campos tensoriais simétricos positivo-definidos. Foram revistos diversos métodos com o intuito de estabelecer parâmetros que possam auxiliar o observador a ressaltar as características do campo.

Verifica-se experimentalmente que a movimentação das partículas aguça a percepção, ressaltando os fluxos gerados pelas *tensorlines*. A visualização de campos tensoriais pode ser aplicada em diversas áreas. Obteve-se melhores resultados analisando campos tensoriais sintéticos, devido aos ruídos e a heterogeneidade das características dos campos gerados clinicamente.

As contribuições que este trabalho apresenta são relacionadas à utilização de atributos dependentes do observador na visualização dos campos tensoriais e a definição dos outros parâmetros de criação e destruição de partículas. Para isto, teve-se a necessidade de se calcular um atributo que avaliasse o campo tensorial e definisse regiões mais propícias para a criação. Teve-se então a definição da fila de prioridades, que ordena os tensores de acordo com este atributo. Esta fila deve ser reordenada sempre que ocorra uma alteração nos valores de seus componentes.

Assim, foi necessário definir um método de ordenação eficiente, que tivesse um bom desempenho levando em conta as características da fila de prioridades. Normalmente esta fila já se apresenta parcialmente ordenada.

Devido exatamente ao grande volume de informação presente em um campo tensorial, tem-se uma grande gama de atributos para serem analisados durante a visualização. Isto influenciou diretamente no grande número de parâmetros presentes na definição de Υ (Seção 3.2.2).

Os campos analisados são das mais variadas naturezas, por consequência não conseguiu-se parametrizar neste trabalho uma única equação que englobasse todos os campos tensoriais obtidos. Isso levou à decisão de deixar os parâmetros para serem definidos pelo usuário, de acordo com suas conveniências. A desvantagem é que o usuário deve ter um nível razoável de entendimento sobre o campo a ser visualizado e uma maturidade em relação à este tipo de visualização.

Ao analisar o campo de 3 pontos, o campo helicoidal e a visualização da aplicação dos elementos estruturantes nos mesmos, o método de visualização desenvolvido cumpriu o objetivo proposto. No campo helicoidal as *tensorlines* ressaltaram as torções presentes no campo, e o rastreamento de partículas permite uma análise da influência dos tensores no mesmo. Em todos os campos, a análise dos coeficientes de anisotropia permitiu verificar a distribuição das formas dos tensores ao longo do campo e a parametrização dos termos dependentes ao observador auxiliaram na visualização de estruturas paralelas ou ortogonais ao campo de visão.

Juntamente com os termos citados anteriormente, a assimetria (Eq. 1.22) define um dos mais importantes parâmetros dos tensores. É utilizada na maioria dos esquemas de cores para visualização do campo DT-MRI. Ao se analisar este atributo juntamente com a norma quadrada e o coeficiente de anisotropia fracionada, foi possivel ressaltar algumas estruturas cerebrais presentes no campo.

O campo do cérebro é o que apresenta mais ruído e foi o mais difícil de se parametrizar para destacar características fisiológicas.

O tratamento de ruídos é um dos pontos que devem ser aprimorados na abordagem proposta. Também deve ser aprimorada a análise de regiões com alta frequência (mudanças bruscas de orientação) que influenciam diretamente na criação das partículas. Em uma região com alta frequência, um tensor poderá ter um alto valor de Υ e ficar nas primeiras posições da fila de prioridades (atributo localmente interessante), sendo um forte candidato para a criação de uma partícula naquele ponto. Mas, se os tensores vizinhos divergirem muito dessas características (atributo globalmente deficiente) esta partícula irá morrer em um curto espaço de tempo ou ficará presa nesta região. Desta forma, a alta frequência presente no campo será diretamente transmitida para a visualização através de turbulências na propagação das partículas, e esta é uma característica não desejável.

O método proposto não engloba todos os campos tensoriais, somente os simétricos positivo-definidos. Deixando de fora uma grande gama de campos tensoriais presentes nas engenharias, mecânica dos fluidos e outras áreas (Figura 5.1). Isto está diretamente ligado à solução dos autovalores e autovetores e na geração das *tensorlines*. Como discutido na Seção 2 existem algumas soluções propostas para visualização de campos tensoriais simétricos genéricos utilizando a abordagem de glifos.

O campo vetorial gerado pelas *tensorlines* é uma das condições fortes do método proposto. Como mostra as referências analisadas [15, 7, 18], o campo gerado pelas *tensorlines*

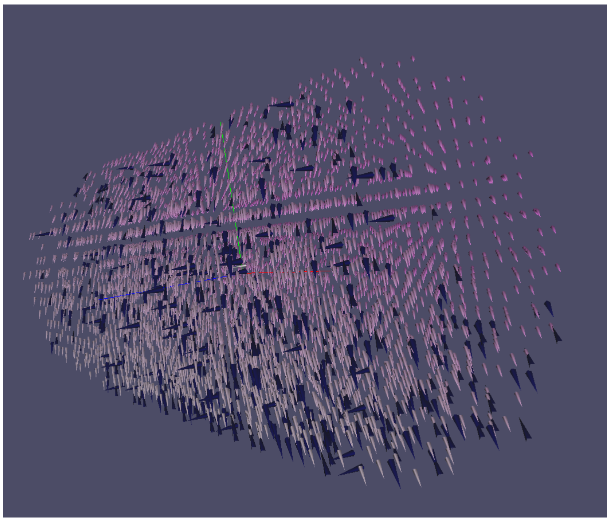


Figura 5.1: Falha na tentativa de visualizar um campo não positivo-definido utilizando o método baseado em tensorlines. Campo de torção em um cilindro circular.

tem grandes melhoras em relação às *hyperstreamlines.* Porém a qualidade da visualização ainda continua fortemente dependente da transformação do campo tensorial a ser analisado em um campo vetorial que permita a propagação das partículas.

Outra abordagem interessante, que pode ser futuramente analisada, é realizar a aplicação direta do campo tensorial no fluxo das partículas. Poderia-se também utilizar outros métodos de propagação de partículas mais complexos, baseados nas equações de Navier-Stokes, como por exemplo, a abordagem de *Smoothed-particle hydrodynamics*[34]. O grande desafio desta abordagem será desenvolver uma forma de mapear os atributos no campo tensorial de modo a influenciar o fluxo da partícula de forma coerente.

Pretende-se futuramente também estender o método proposto para que possibilite a visualização de outros campos tensoriais além dos simétricos positivo-definidos. Uma aplicação mais específica seria a visualização de um campo de direções anisotrópicas obtidas através da micro tomografia computadorizada de um osso trabecular.

Outros trabalhos futuros interessantes seriam a utilização de soluções em paralelo utilizando a GPU ou CPU e, como já explanado, aplicação de campos tensoriais em simulação computacional de fluidos.

REFERÊNCIAS

[1] LAI, W. M., RUBIN, D., KREMPL, E., *Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier, 2010.

[2] KOLECKI, J. C., CENTER., N. G. R., *An introduction to tensors for students of physics and engineering [microform] / Joseph C. Kolecki*. National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center ; Available from NASA Center for Aerospace Information, [Cleveland, Ohio] : Hanover, MD :, 2002.

[3] WESTIN, C.-F., *A Tensor Framework for Multidimensional Signal Processing*, Ph.D. Thesis, Linköping University, Sweden, S-581 83 Linköping, Sweden, 1994, Dissertation No 348, ISBN 91-7871-421-4.

[4] VIEIRA, M. B., *Inferência de orientação de dados esparsos para reconstrução de superfícies*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Minas Gerais and Université de Cergy-Pontoise, 2002.

[5] WESTIN, C.-F., PELED, S., GUDBJARTSSON, H., KIKINIS, R., JOLESZ, F. A., "Geometrical Diffusion Measures for MRI from Tensor Basis Analysis". In: *ISMRM '97*, p. 1742, Vancouver Canada, April 1997.

[6] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*. Prentice-Hall, Inc., 1971.

[7] KINDLMANN, G., *DTI visualization and analysis of diffusion tensor fields*, Ph.D. Thesis, University of Utah, 2004.

[8] NICKALLS, R., "A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed", *The Mathematical Gazette*, v. 77, pp. 354:359, 1993.

[9] BAHN, M., "Invariant and orthonormal scalar measures derived from magnetic resonance diffusion tensor imaging", *Journal of Magnetic Resonance*, v. 141, pp. 68:77, 1999.

[10] MASUTANI, Y., AOKI, S., ABE, O., HAYASHI, N., OTOMO, K., "MR diffusion tensor imaging: recent advance and new techniques for diffusion tensor visualization", *European Journal of Radiology*, v. 46, pp. 53–66, 2003.

[11] SHAW, C. D., EBERT, D. S., KUKLA, J. M., ZWA, A., SOBOROFF, I., ROBERTS, D. A., "Data Visualization Using Automatic, Perceptually-Motivated Shapes". In: *Proceeding of Visual Data Exploration and Analysis, SPIE*, 1998.

[12] SHAW, C. D., HALL, J. A., BLAHUT, C., EBERT, D. S., ROBERTS, D. A., "Using shape to visualize multivariate data". In: *NPIVM '99: Proceedings of the 1999 workshop on new paradigms in information visualization and manipulation in conjunction with the eighth ACM internation conference on Information and knowledge management*, pp. 17–20, ACM: New York, NY, USA, 1999.

[13] KINDLMANN, G., "Superquadric Tensor Glyphs". In: *Proceedings of IEEE TVCG/EG Symposium on Visualization 2004*, pp. 147–154, May 2004.

[14] SCHULTZ, T., KINDLMANN, G., "Superquadric Glyphs for Symmetric Second-Order Tensors", *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, v. 16, n. 6, pp. 1595 –1604, 2010.

[15] WEINSTEIN, D., KINDLMANN, G., LUNDBERG, E., "Tensorlines: advection-diffusion based propagation through diffusion tensor fields". In: *VIS '99: Proceedings of the conference on Visualization '99*, pp. 249–253, IEEE Computer Society Press: Los Alamitos, CA, USA, 1999.

[16] DELMARCELLE, T., HESSELINK, L., "Visualizing second-order tensor fields with hyper streamlines". In: *IEEE Computer Graphics and Applications, Volume 13, Issue 4*, pp. 25–33, IEEE Computer Society Press: Los Alamitos, CA, USA, 1993.

[17] DELMARCELLE, T., HESSELINK, L., "Visualization of second order tensor fields and matrix data". In: *VIS '92: Proceedings of the 3rd conference on Visualization '92*, pp. 316–323, IEEE Computer Society Press: Los Alamitos, CA, USA, 1992.

[18] KONDRATIEVA, P., KRÜGER, J., WESTERMANN, R., "The Application of GPU Particle Tracing to Diffusion Tensor Field Visualization". In: *Visualization, 2005. VIS 05. IEEE*, pp. 73–78, 2005.

[19] PARKER, A., CHRISTOU, C., CUMMING, B., JOHNSTON, E., HAWKEN, M., ZISSERMAN, A., "The Analysis of 3D Shape: Psychophysical Principles and Neural Mechanisms". In: *Understanding Vision, G.W. Humphreys, chapter 8. Blackwell*, 1992.

[20] BURIOL, T., ARGENTA, M., HECKE, M., SCHEER, S., "Proposta de interface para visualização de campos de direções anisotrópicas obtidas a partir de dados de tomografia de estruturas orgânicas." *Mecánica Computacional / CILAMCE*, v. Vol XXIX, pp. 6169–6176, 2010.

[21] DICKINSON, R. R., "A Unified Approach to the Design of Visualization Software for the Analysis of Field Problems". In: *Three-Dimensional Visualization and Display Technologies, SPIE Proceedings, Vol. 1083*, January 1989.

[22] NEY, W. G., *Supersimetrias estendidas em teorias de gauge com violação da simetria de Lorentz*, Ph.D. Thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2005.

[23] CABRAL, B., LEEDOM, L. C., "Imaging vector fields using line integral convolution". In: *SIGGRAPH '93: Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 263–270, ACM: New York, NY, USA, 1993.

[24] ZHENG, X., PANG, A., "HyperLIC". In: *VIS '03: Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03)*, p. 33, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2003.

[25] KRÜGER, J., KIPFER, P., KONDRATIEVA, P., WESTERMANN, R., "A Particle System for Interactive Visualization of 3D Flows", *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, v. 11, n. 6, pp. 744–756, 11 2005.

[26] KONDRATIEVA, P., *Real-Time Approaches for Model-Based Reconstruction and Visualization of Flow Fields*, Ph.D. Thesis, Institut fur Informatik Technische Universitat Munchen, 2008.

[27] STIELTJES, B., KAUFMANN, W. E., VAN ZIJL, P. C., FREDERICKSEN, K., PEARLSON, G. D., SOLAIYAPPAN, M., MORI, S., "Diffusion tensor imaging

and axonal tracking in the human brainstem", *Neuroimage*, v. 14, n. 3, pp. 723–35, 2001.

[28] ZIVIANI, N., *Projeto de algoritmos com implementações em pascal e c*. Cengage Learning, 2004.

[29] SEDGEWICK, R., *Algorithms in c++, parts 1-4: fundamentals, data structure, sorting, searching, third edition*. 3rd ed. Addison-Wesley Professional, 1998.

[30] MAHMOUD, H. M., *Sorting: a distribution theory*. John Wiley & Sons, 2000.

[31] LONDON, K., *Mastering algorithms with C*. O'Reilly & Associates, Inc.: Sebastopol, CA, USA, 1999.

[32] KINDLMANN, G., "Diffusion tensor MRI datasets", http://www.sci.utah.edu/~gk/DTI-data/.

[33] DOS SANTOS BARROSO, J., "Transformação Morfológica de Campos Tensoriais Utilizando Elementos Estruturantes Elípticos", 2010.

[34] DO CARMO, F. P., LEWINER, T. M., NETO, A. P., DOS SANTOS, G. T., *Simulação de Fluidos sem Malha: Uma introdução ao método SPH*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

[35] JOY, K. I., "Numerical Methods for Particle Tracing in Vector Fields", *UC Davis Graphics Group On-Line Visualization Notes*, 2007.

APÊNDICE A - INTEGRADOR NUMÉRICO

Tanto na criação de *tensorlines* como no rastreamento de partículas integradores numéricos são utilizados. Joy [35] faz uma revisão de três métodos utilizados no rastreamento de partículas. Em sua análise defini-se que o método de Euler, o método de Euler Melhorado e o algoritmo de Runge-Kutta tem os erros limitados respectivamente por $O(\Delta t^2)$, $O(\Delta t^3)$, $O(\Delta t^4)$, onde Δt é o passo de tempo adotado no procedimento. A seguir vamos descrever as duas abordagens adotadas nesta dissertação.

Método de Euler

Dada uma célula em reticulado linear com uma velocidade de propagação associada a ela, tem-se uma forma de traçar a trajetória de uma partícula p com posição atual $\vec{x}_p$, através do método de Euler:

$$\vec{x}_{p_{t+1}} = \vec{x}_p + \Delta t \vec{v}_{i_{prop}}, \tag{A.1}$$

assumindo Δt um espaço de tempo muito pequeno. As próximas posições são calculadas da mesma forma.

Inicialização:

Defina Δt;

$\vec{x}_p = \vec{x}_{p_0}$;

enquanto *não terminar a simulação* **faça**

  para cada p **faça**

    Determinar a célula do reticulado onde p está;

    $\vec{v}_{i_{prop}}$ = Interpolação trilinear das velocidades vizinhas a célula ;

    $\vec{x}_{p_{t+1}} = \vec{x}_p + \Delta t \vec{v}_{i_{prop}}$;

    $\vec{x}_p = \vec{x}_{p_{t+1}}$;

  fim

fim

Algoritmo 1: Método de Euler

Algoritmo de Runge-Kutta

O algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem utiliza 3 preditores para corrigir o passo da iteração e obter uma melhor aproximação do novo $\vec{x}_p$:

- $\vec{v}^1_{i_{prop_{t+1}}}$ - vetor correspondente ao ponto $\vec{x}_p + \frac{1}{2}\Delta t \vec{v}_{i_{prop}}$
- $\vec{v}^2_{i_{prop_{t+1}}}$ - vetor correspondente ao ponto $\vec{x}_p + \frac{1}{2}\Delta t \vec{v}^1_{i_{prop_{t+1}}}$
- $\vec{v}^3_{i_{prop_{t+1}}}$ - vetor correspondente ao ponto $\vec{x}_p + \Delta t \vec{v}^2_{i_{prop_{t+1}}}$

E este preditores são combinados da seguinte forma:

$$\vec{x}_{p_{t+1}} = \vec{x}_p + \frac{1}{6}\Delta t \vec{v}_{i_{prop}} + \frac{1}{3}\Delta t \vec{v}^1_{i_{prop_{t+1}}} + \frac{1}{3}\Delta t \vec{v}^2_{i_{prop_{t+1}}} + \frac{1}{6}\Delta t \vec{v}^3_{i_{prop_{t+1}}},$$

simplificando,

$$\vec{x}_{p_{t+1}} = \vec{x}_p + \frac{1}{6}\Delta t(\vec{v}_{i_{prop}} + 2\Delta t \vec{v}^1_{i_{prop_{t+1}}} + 2\Delta t \vec{v}^2_{i_{prop_{t+1}}} + \Delta t \vec{v}^3_{i_{prop_{t+1}}}). \qquad \text{(A.2)}$$

Inicialização:

Defina Δt;

$\vec{x}_p = \vec{x}_{p_0}$;

enquanto *não terminar a simulação* **faça**

para cada p **faça**

Determinar a célula do reticulado onde p está;

$\vec{v}_{i_{prop}}$ = Interpolação trilinear das velocidades vizinhas a célula ;

$\vec{k}_1 = \Delta t \vec{v}_{i_{prop}}$;

$\vec{x}^1_{i_{prop_{t+1}}} = \vec{x}_p + \frac{1}{2}\vec{k}_1$;

$\vec{k}_2 = \Delta t \vec{v}^1_{i_{prop_{t+1}}}$;

$\vec{x}^2_{i_{prop_{t+1}}} = \vec{x}_p + \frac{1}{2}\vec{k}_2$;

$\vec{k}_3 = \Delta t \vec{v}^2_{i_{prop_{t+1}}}$;

$\vec{x}^3_{i_{prop_{t+1}}} = \vec{x}_p + \vec{k}_3$;

$\vec{k}_4 = \Delta t \vec{v}^3_{i_{prop_{t+1}}}$;

$\vec{x}_{p_{t+1}} = \vec{x}_p + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$;

$\vec{x}_p = \vec{x}_{p_{t+1}}$;

fim

fim

Algoritmo 2: Algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem