

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Pavel Zenon Sejas Paz**

**Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em  
um meio poroso contendo óleo**

Juiz de Fora  
2015

Pavel Zenon Sejas Paz

**Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em  
um meio poroso contendo óleo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sejas Paz, Pavel Zenon.

Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético  
em um meio poroso contendo óleo / Pavel Zenon Sejas Paz. – 2015.  
70 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Leis de Conservação. 3. Prin-  
cípio de Duhamel. 4. Recuperação avançada do óleo. 5. Aquecimento  
eletromagnético. 6. Injeção de água. I. Chapiro, Grigori. II. Título.

Pavel Zenon Sejas Paz

Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em um meio poroso contendo óleo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Luiz Gustavo Farah Dias  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Professor Dr. Grey Ercole  
Universidade Federal de Minas Gerais

*Dedico este trabalho*

*Aos meus pais, Ana Maria pelo exemplo de coragem, simplicidade e persistência em suas metas e Modesto “in memoriam” que sempre guia os meus passos.*

*Aos meus irmãos, Maria Jose, Ariel e Karina, que muito me ajudaram a chegar onde estou.*

*A minha esposa, Vivi, pelo incentivo, carinho e paciência que demonstrou durante este tempo.*

*A minha querida filha, que vem a caminho.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Grigori Chapiro, por todo apoio recebido ao longo do mestrado, desde a fase de escolha do projeto, até os incentivos para participação em congressos, apresentações de poster, andamento de artigo e na condução da própria dissertação em si. Obrigado pela amizade, paciência e valorosos ensinamentos, você fez valer a minha vinda e estes dois anos de mestrado supriram todas as minhas expectativas.

Ao professor Dr. Pacelli L. J. Zitha e sua equipe de trabalho, que disponibilizaram os dados do experimento para elaboração dessa dissertação.

A todos os professores da Pos-Graduação em matemática, em especial aos professores Dr. Sandro Rodrigues Mazorche, Dr. Laércio José dos Santos e Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria, sempre dispostos a me aconselhar e me ajudar.

À CAPES e FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

Gostaria de agradecer a todos meus colegas do Departamento de matemática, pelas conversas e amizade conquistada durante este tempo.

Agradeço também aos meus colegas no curso de Pos-graduação, minha estadia em Juiz de Fora foi muito tranquila graças a vocês.

Agradeço à coordenadora do programa Dr. Flaviana Andrea Ribeiro, às secretarias e os funcionários, pela atenção e gentileza constate que me dedicarem.

Finalmente, a todos que de uma maneira ou de outra, contribuíram para que este objetivo fosse alcançado.

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo analítico sobre a recuperação de óleo pesado utilizando injeção de água, que é aquecida por meio de ondas eletromagnéticas de alta frequência. Recentemente, foi feito um experimento (descrito em [12]), onde a água foi injetada num meio poroso, aquecida por meio de ondas eletromagnéticas. Os resultados do experimento mostram que o aquecimento mediante ondas EM melhora o deslocamento do óleo pela água. Desta maneira, apresenta-se a injeção de água com aquecimento por ondas EM como um método viável na recuperação de óleo. Consideraremos um modelo matemático simples descrevendo o experimento mencionado acima, que consiste de duas leis de balanço, uma para a energia e outra para a massa da água. O objetivo do trabalho é usar o Princípio de Duhamel e a Teoria das Leis de Conservação para encontrar soluções semi-analíticas deste modelo simplificado. Segundo [8], utilizamos o Princípio para achar a solução da equação de balanço de energia do tipo Convecção-Reação-Difusão para o problema de transporte de calor num meio poroso na presença de uma fonte de ondas eletromagnéticas. A equação de balanço para a massa da água é uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem do tipo *Buckley-Leverett* (Veja [4] e [7]). Ela será resolvida usando a Teoria das Leis de Conservação. Segundo [15], a solução deste problema contém ondas de rarefação e choque.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais. Leis de Conservação. Princípio de Duhamel. Recuperação avançada do óleo. Aquecimento eletromagnético. Injeção de água.

## ABSTRACT

In this work, we present the results obtained by analytical study of heavy oil recovery by water flooding and electromagnetic (EM) heating of high frequency. Recently, an experiment was made, where water was injected into a porous medium, warmed by means of electromagnetic waves. The experiment results show that EM heating improves the displacement of oil by water. Thus, the water flooding combined with EM heating is a viable method for oil recovery. We consider a simple mathematical model describing this experiment consisting of two balance laws for energy and water mass. The goal is to use Duhamel's Principle and the Theory of Conservation Laws to find semi-analytical solutions of this simplified model. We use the principle solve the energy balance equation of convection-reaction-diffusion type for heat transport problem in a porous medium in the presence of a source of electromagnetic waves. The balance equation for the mass of water is a nonlinear partial differential equation of first order of Buckley-Leverett type. It is solved using the Theory of Conservation Laws.

Key-words: Partial differential equations. Conservation laws. Duhamel's Principle. Enhanced oil recovery. Electromagnetic heating. Water flooding.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria do modelo: Injeção da água e radiação de ondas eletromagnéticas (EM) num meio poroso. . . . .	17
Figura 2 – Curva de Fluxo Buckley-Leverett . . . . .	21
Figura 3 – A curva $\Gamma$ com o seu vetor normal $\vec{n}$ e os estados a esquerda e direita resp. $\Omega^l$ e $\Omega^r$ . . . . .	30
Figura 4 – A curva $\Gamma$ que separa o aberto limitado $\Omega$ em $\Omega^l$ e $\Omega^r$ . . . . .	31
Figura 5 – Do lado esquerdo temos a função de fluxo Buckley-Leverett. Do lado direito, a sua derivada. . . . .	40
Figura 6 – No intervalo $(u^r, u^*)$ a função $f$ é convexa. No intervalo $(u^*, u^l)$ a função é côncava. O ponto $u_w^*$ devera satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot. . . . .	40
Figura 7 – O meio poroso está saturado com água (sem fluxo) e aquecido por ondas EM. . . . .	49
Figura 8 – O meio poroso foi previamente aquecido e posteriormente o gerador de energia EM desligado. . . . .	49
Figura 9 – Geração de energia EM e injeção da água simultaneamente no meio poroso. . . . .	50
Figura 10 – Meio poroso pre-aquecido: desliga-se o gerador de ondas EM e inicia-se a injeção da água. Do lado esquerdo mostra-se os resultados sem perdas térmicas e do lado direito com perdas térmicas, onde o valor ótimo foi atingido em $C_{ter} = -1.5e - 04$ , deixando em evidência perdas térmicas. . . . .	51
Figura 11 – Escoamento com aquecimento ao mesmo tempo. Do lado esquerdo os resultados sem perdas térmicas e do lado direito com perdas térmicas, onde o valor ótimo foi encontrado em $C_{ter} = -3.9e - 04$ , evidenciando perdas térmicas. . . . .	51
Figura 12 – Representação esquemática da configuração. . . . .	60
Figura 13 – A fotografia mostra a configuração do experimento dentro da caixa de alumínio. . . . .	61
Figura 14 – A figura mostra o conector através do qual o sensor óptico entra no cilindro da rocha. . . . .	62
Figura 15 – À esquerda à esquerda a tendência exponencial dos perfis da temperatura obtidos depois de 100 segundos de aquecimento a 300 W. Na direita é graficado a absorção de energia. Três saturações do óleo correspondem ao experimento 1 ( $S_w = 1$ ), 2 ( $S_w = 1 - s_{or}$ ) and 3 ( $S_w = s_{wc}$ ). . . . .	65
Figura 16 – Os perfis de temperatura no experimento 4 em diferentes etapas da injeção da água. O pico da temperatura se move na direcção do fluxo procurando a saída em 2.0 PV. . . . .	65
Figura 17 – As taxas do óleo e da água para os experimentos 5A, 5B, 6 e 7 juntos com o corte da água. . . . .	66

Figura 18 – Os perfis de queda de pressão dos experimentos 5A, 5B, 6 e 7. . . . .	67
Figura 19 – As temperaturas da rocha durante o experimento 6. A potência do aquecimento foi alta na primeira parte do experimento, mas teve que ser reduzida para evitar vazamentos. . . . .	68
Figura 20 – Distribuições da temperatura na rocha a intervalos de 1 PV injetado . Os gráficos mostram um declínio constante como resultado da potência de aquecimento inferior. . . . .	68
Figura 21 – As temperaturas na rocha durante o experimento 7. Do lado esquerdo em cada sensor. Do lado Direito a distribuição das temperaturas a intervalos de 1 PV injetado. . . . .	69
Figura 22 – Produção do óleo para os experimentos 5A, 5B, 6 e 7. . . . .	70

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos coeficientes de (2.1). . . . .	19
Tabela 2 – Valores dos parâmetros usados na Equação (2.8) . . . . .	21
Tabela 3 – Descrição dos experimentos . . . . .	48
Tabela 4 – Power cycles Samsung 900W Microwave . . . . .	63

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EM	Eletromagnético
PV	Volume Poroso
MW	Microondas (em termos de comprimento de onda)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c_o$	Capacidade térmica da fase óleo
$c_s$	Capacidade térmica do sólido
$c_w$	Capacidade térmica da fase água
$f_w$	função de fluxo fracional
$K_s$	Condutividade térmica do sólido
$k$	Permeabilidade absoluta
$k_{ro}$	Permeabilidade relativa do óleo
$k_o$	Permeabilidade efetiva do óleo
$k_w$	Permeabilidade efetiva da água
$\mu_o$	Viscosidade do óleo
$\mu_w$	Viscosidade de água
$\mu_l$	Velocidade total do fluido
$P_c$	Pressão capilar
$L$	Comprimento, medida no sentido do movimento.
$g$	Aceleração da gravidade
$\Delta\rho$	Diferença de densidade entre água e óleo = $\rho_w - \rho_o$
$\alpha_d$	Ângulo de injeção da formação com relação a horizontal
$k_{rw}^0$	Ponto final da permeabilidade da água
$k_{ro}^0$	Ponto final da permeabilidade do óleo
$s_o$	Saturação do óleo
$s_w$	Saturação da água
$s_{wc}$	Saturação de água residual
$s_{oc}$	Saturação do óleo residual
$n_w$	Expoente para a permeabilidade relativa da água
$n_o$	Expoente para a permeabilidade relativa do óleo

$T$	Temperatura
$T_0$	Temperatura ambiente
$W$	Absorção da Potência
$\lambda_o$	Mobilidade do óleo
$\lambda_w$	Mobilidade da água
$\rho_o$	Densidade do óleo
$\rho_w$	Mobilidade da água
$\rho_s$	Mobilidade do sólido
$\phi$	Porosidade
$C_{tot}$	Capacidade térmica do sistema
$C_{liq}$	Capacidade térmica da fase líquida
$K_m$	Condutividade térmica

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>O MODELO . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS . . . . .	20
2.2	SOLUÇÕES SEMI-ANALÍTICAS . . . . .	20
2.2.1	Aplicação das leis de conservação à equação de fluxo de massa de água . . . . .	20
2.2.2	Aplicação do Princípio de Duhamel à equação de balanço de energia . . . . .	22
<b>3</b>	<b>LEIS DE CONSERVAÇÃO . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1	LEIS DE CONSERVAÇÃO ESCALARES . . . . .	26
3.1.1	Solução clássica e o método das características . . . . .	27
3.1.2	Soluções fracas . . . . .	28
3.1.3	Solução contínua por partes e condição de choque . . . . .	29
3.1.4	Solução entrópica . . . . .	32
3.1.5	O problema de Riemann . . . . .	36
3.1.6	Equação de Buckley-Leverett . . . . .	37
<b>4</b>	<b>PRINCÍPIO DE DUHAMEL . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	EQUAÇÃO DO CALOR . . . . .	42
4.1.1	Solução fundamental . . . . .	44
4.1.2	Problema não-homogêneo . . . . .	45
<b>5</b>	<b>COMPARAÇÃO DO MODELO E DO EXPERIMENTO . . .</b>	<b>48</b>
5.1	EXPERIMENTOS . . . . .	48
5.1.1	Experimento A . . . . .	48
5.1.2	Experimento B . . . . .	48
5.1.3	Experimento C . . . . .	50
5.1.4	Otimização dos resultados . . . . .	50
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>7</b>	<b>TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>53</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>57</b>

	<b>APÊNDICE A – Adimensionalização . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>ANEXO A – O EXPERIMENTO . . . . .</b>	<b>60</b>
A.1	PRINCÍPIOS E CONFIGURAÇÃO . . . . .	60
A.2	MATERIAIS . . . . .	61
A.3	MEIO POROSO . . . . .	61
A.4	AQUECIMENTO MEDIANTE MW . . . . .	62
A.5	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL . . . . .	63
A.6	RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .	64
A.6.1	<b>Aquecimento sem fluxo (Experiências 1-3) . . . . .</b>	<b>64</b>
A.6.2	<b>Fluxo sem aquecimento (Experimento 4) . . . . .</b>	<b>64</b>
A.6.3	<b>Injeção da água sem aquecimento ( Experimentos 5A e 5B) . . . . .</b>	<b>65</b>
A.6.4	<b>Injeção da água e 114 W de aquecimento (Experimento 6) . . . . .</b>	<b>66</b>
A.6.5	<b>Injeção da água e 114 W de aquecimento (Experimento 7) . . . . .</b>	<b>69</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Na engenharia do petróleo, os métodos de recuperação se dividem em primária, secundária e terciária. A recuperação primária acontece usando a própria pressão do reservatório. A recuperação secundária utiliza a injeção de água, gás ou algum fluido para incrementar a pressão do reservatório e dessa maneira extrair o óleo do reservatório. Na recuperação terciária, em geral, concentra-se em melhorar o raio de mobilidade do óleo e a fase da água. Para mais detalhes veja [6].

O óleo pesado e extra-pesado representam uma grande fração das reservas de hidrocarbonetos no mundo, aproximadamente 40%, veja [2]. Existem dificuldades tanto econômicas como técnicas para obtê-lo e os métodos de recuperação primária e secundária dificilmente excedem 25%. Devido a isto, estudam-se outros métodos de extração do óleo. Entre estes métodos encontram-se: combustão in situ, injeção de espuma, etc.

O aquecimento por ondas eletromagnéticas é uma técnica térmica não convencional que diminui a viscosidade do óleo ao aumentar a temperatura do reservatório. Entre os métodos eletromagnéticos temos: a indução eletromagnética, a radiação a baixa frequência (aquecimento ôhmico) e a alta frequência dielétrica [1].

Este estudo está focado no aquecimento mediante radiação de alta frequência dielétrica induzida pelas ondas eletromagnéticas como é o caso dos microondas domésticos que trabalham numa frequência de 2,54 GHz.

O método pode ser considerado como um método terciário e tem a característica de aumentar a temperatura do reservatório quando é sujeito à radiação por ondas eletromagnéticas. Desta maneira, o óleo diminui a sua viscosidade e por conseqüência obtemos um raio de mobilidade mais favorável. Se o aquecimento por ondas eletromagnéticas é combinado com injeção da água um aumento na temperatura nas partes profundas do reservatório pode ser atingido.

O método de recuperação melhorada mais comum é a injeção de vapor, onde a água é previamente aquecida na superfície e logo injetada ao reservatório através do poço. Uma vez dentro do reservatório o fluido quente reduz a viscosidade do óleo, o que facilita a sua mobilidade. No entanto, há casos em que este método é menos efetivo: em reservatórios profundos ou de baixa permeabilidade; injeção de alta pressão é necessária a qual conduz à prematura condensação do vapor. Isto, junto com as perdas térmicas produzidas ao longo do poço injetor pode levar a um baixo aquecimento do reservatório.

A premissa deste estudo é localizar a fonte do aquecimento dos fluidos perto do reservatório, e desta maneira evitar as perdas térmicas produzidas ao longo do poço injetor, levando em consideração que os fluidos são aquecidos, e que o calor é absorvido principalmente pela água, mas também pelo óleo. Isto pode ser feito graças ao grande avanço da

tecnologia de transistores, os quais são cada vez menores e trabalham continuamente.

Recentemente, foi feito um novo experimento em baixa escala, descrito em [12], onde foi injetada água num meio poroso, a qual foi aquecida por meio de ondas eletromagnéticas (EM) numa determinada frequência. Os resultados do experimento mostram que o aquecimento mediante ondas EM melhora o deslocamento do óleo pela água. Desta maneira, apresenta-se a injeção de água com aquecimento por ondas EM como um método viável na recuperação de óleo.

Devido à novidade do método não temos na bibliografia atual uma teoria matemática que permita o seu estudo analítico.

O objetivo deste trabalho é estudar matematicamente o experimento acima mencionado, para encontrar soluções analíticas e compará-las com os dados obtidos em [12].

Consideraremos um modelo matemático simples que descreve o experimento acima que consiste de duas leis de balanço, uma para a energia e outra para a massa da água. Usaremos o Princípio de Duhamel e a Teoria das Leis de Conservação para encontrar soluções semi-analíticas deste modelo simplificado.

As Leis de Conservação são parte importante das equações diferenciais parciais, e são aquelas equações que modelam a conservação de sistemas que tem sua origem na física. Trata-se de leis físicas segundo as quais certas grandezas de um sistema mantém-se constantes ao longo do tempo. Exemplos clássicos são a lei de conservação de energia, de momento, de massa, saturação, etc. Usaremos a Teoria das Leis de Conservação para encontrar a solução do problema deslocamento do óleo pela água através de um meio poroso.

O Princípio de Duhamel, é um método geral para a obtenção de soluções de equações lineares de tipo evolução não homogêneas, como por exemplo a equação do calor, a equação da onda, e a equação da placa vibrante. O Princípio proporciona a solução de problemas de condução do calor através de um sólido com condição inicial dependente da variável espacial e condição de fronteira dependente do tempo com termo fonte referente à geração de energia.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No segundo capítulo, apresentamos os princípios do modelo físico e das equações governantes. No terceiro capítulo, veremos os fundamentos da Teoria de Leis de Conservação. No quarto capítulo, apresentamos a teoria do Princípio de Duhamel. No quinto capítulo, realizamos um estudo e os resultados obtidos são comparados com os dados do experimento. No sexto capítulo, apresentamos as conclusões. No último capítulo, apresentamos um estudo sobre o Princípio de Duhamel generalizado para representar soluções de algumas equações do tipo semi-linear hiperbólico. Finalmente em anexo, apresentamos uma descrição e detalhes do experimento.

## 2 O MODELO

Neste capítulo consideramos um modelo simples que descreve o deslocamento do óleo pela água, a qual é aquecida por meio de ondas eletromagnéticas. Num primeiro momento, faremos uma explicação do fenômeno físico. Depois, faremos suposições no modelo de tal forma que o modelo seja simplificado. Posteriormente, apresentaremos as equações que governam o modelo. Finalmente, usaremos uma mudança de variável que nos permita reduzir nosso problema ao caso da equação do calor. O objetivo do capítulo é usar o Princípio de Duhamel e a Teoria das Leis de Conservação para encontrar soluções semi-analíticas deste modelo simplificado.

Apresentamos na Figura 1 o esquema geométrico do experimento.

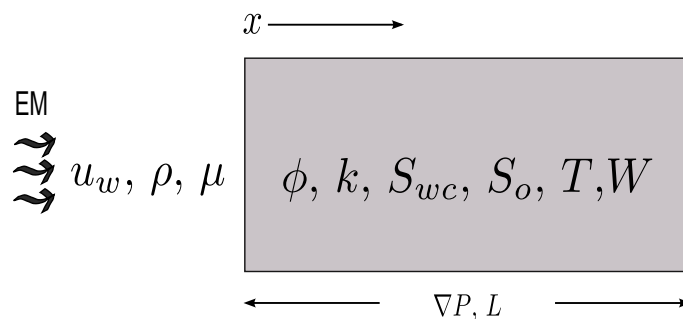


Figura 1 – Geometria do modelo: Injeção da água e radiação de ondas eletromagnéticas (EM) num meio poroso.

Considera-se um problema unidimensional (1D), onde temos duas fases imiscíveis; a fase do óleo e a fase da água. Primeiramente, consideramos um meio poroso cilíndrico de área transversal  $A$  [m<sup>2</sup>] e comprimento  $L$  [m], em que água é injetada por um dos lados e, para evitar vazamentos num sentido, o meio poroso é coberto por uma placa de metal cilíndrica. Uma vez que a água é injetada no meio poroso, ela é aquecida por meio de ondas eletromagnéticas; deve-se notar que o gerador de ondas EM é um forno de microondas que foi adaptado para o experimento. Para guiar as ondas EM ao meio poroso, é usado um cilindro de alumínio o que também evita vazamentos. Todos estes elementos encontram-se dentro de uma caixa de alumínio para proteger-se do perigo da radiação gerada pelas ondas EM. Para a obtenção dos dados, foram usados detectores térmicos colocados aos 2, 5, 9 e 14 centímetros do meio poroso de 17 cm de comprimento .

As propriedades consideradas da rocha são: a porosidade  $\phi$ , a permeabilidade  $k$  que depende da formação, a saturação da água conata  $s_{wc}$  e a absorção de energia eletromagnética  $W$ . Para a água, a velocidade  $u$  [m/s] com a que é injetada, a densidade  $\rho$  e a viscosidade  $\mu_w$ . Ver [12].

Estuda-se o deslocamento do óleo pela água ao interior de um meio poroso. O sistema de equações que descrevem o fenômeno físico consiste de duas leis de balanço; uma

para a energia (2.1), e outra para a massa da água (2.2).

$$C_{tot}(s_w) \partial_t T + C_{liq}(s_w) \partial_x(\mathbf{u} T) = k_m(s_w) \partial_x^2 T + C_{ter}(T - T_0) + W(x, s_w), \quad (2.1)$$

$$\phi \partial_t s_w + \partial_x(\mathbf{u} f_w(T, s_w)) = 0. \quad (2.2)$$

Nessas expressões encontram-se, a temperatura  $T$  [K], a saturação da água  $s_w$  (a qual aparece nas equações porque o sistema foi considerado bifásico e satisfazendo a relação  $s_o + s_w = 1$ ),  $\nabla P$  [Pa] a diferença de pressão, e a viscosidade  $\mu(T)$  [Pa s] que depende da temperatura, a velocidade de Darcy constante  $\mathbf{u}$  [m/s],  $C_{ter}$  o coeficiente do termo linear das trocas térmicas e absorção da energia EM  $W$  [J/s].

A taxa de absorção de energia EM é proporcional a função exponencial da distância entre o gerador de ondas EM e o meio poroso, onde  $\bar{x}$  depende do comprimento da onda (mas não só), usaremos  $\bar{y}$  para o óleo.  $k_w^{em}$  é o coeficiente de absorção de energia EM pela água. Esta relação está dada pela seguinte equação<sup>1</sup>:

$$W(x, s_w) = k_w^{em} s_w e^{-\frac{x}{\bar{x}}} + k_o^{em} s_o e^{-\frac{x}{\bar{y}}}. \quad (2.3)$$

Como o objetivo é encontrar soluções analíticas temos dois casos limites:

**Radiação de baixa frequência** Ondas de baixa frequência do MW. Neste caso:  $\bar{x} \rightarrow 0$  e assim  $W \rightarrow 0$ .

**Frequências ultra-elevadas** Ondas de alta frequência do MW. Neste caso:  $\bar{x} \rightarrow +\infty$  e assim  $W \rightarrow k_w^{em} s_w + k_o^{em} (1 - s_w)$ .

Os coeficientes de (2.1) estão dados por:  $C_{tot}$  a capacidade térmica do sistema,  $C_{liq}$  a capacidade térmica da fase líquida e a condutividade térmica que está dada por  $k_m$ , as expressões são as seguintes:

$$C_{tot}(s_w) = (1 - \phi)c_m \rho_m + \phi[c_o \rho_o + (c_w \rho_w - c_o \rho_o) s_w], \quad (2.4)$$

$$C_{liq}(s_w) = c_o \rho_o + (\rho_w c_w - \rho_o c_o) s_w, \quad (2.5)$$

$$k_m(s_w) = (1 - \phi)K_m + \phi[K_o + (K_w - K_o) s_w]. \quad (2.6)$$

Na Tabela 1 são listados os valores de  $c_m$ ,  $c_w$ ,  $c_o$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_w$ ,  $\rho_o$ ,  $K_m$ ,  $K_w$ ,  $K_o$  os quais usaremos no para calcular  $C_{tot}$ ,  $C_{liq}$  e  $K_m$ .

Com a finalidade de apresentar uma solução do sistema (2.1)-(2.2) faremos várias suposições as quais nos levarão a um caso mais simples. Uma vez tendo a redução do problema original, mediante a uma mudança de variável levaremos (2.1) a uma equação do tipo *Equação do Calor* e abordaremos a solução desta usando o *Princípio de Duhamel*.

<sup>1</sup> Comprimento de onda (Inversamente proporcional a frequência do MW)

Tabela 1 – Valores dos coeficientes de (2.1).

Símbolo	Grandeza física	Valor	Unidade (SI)
$\phi$	Porosidade	0.21	-
$c_o$	Capacidade calorífica do óleo	2.00e3	$[J/Kg K]$
$c_m$	Capacidade calorífica do meio poroso	0.92e3	$[J/Kg ^\circ K]$
$c_w$	Capacidade calorífica da água	4.20e3	$[J/Kg K]$
$K_o$	Condutividade térmica do óleo	0.14	$[W/m K]$
$K_m$	Condutividade térmica do meio poroso	2.30	$[W/m K]$
$K_w$	Condutividade térmica da água	0.58	$[W/m K]$
$P$	Pressão	-	$[Pa]$
$k$	Permeabilidade absoluta	2.5e-12	$[m^2]$
$\rho_o$	Densidade do óleo	0.8e3	$[Kg/m^3]$
$\rho_m$	Densidade do meio poroso	2.65e3	$[Kg/m^3]$
$\rho_w$	Densidade da água	1e3	$[Kg/m^3]$
$T_{inic}$	Temperatura inicial	298	$[K]$
$W$	Energia Eletromagnética	-	$[J/s]$
$L$	Comprimento do meio poroso	0.17	$[m]$
$r$	Raio do meio poroso	0.019	$[m]$
$A$	Área transversal	$\pi r^2$	$[m]$
$\mathbf{u}$	Velocidade de Darcy	4.6e-3	$[m/s]$

Depois resolvermos (2.2), onde a função  $f_w$  é a função de *Fluxo Buckley-Leverett*, para isto usaremos o a Teoria das Leis de Conservação, cuja solução segundo [15], contém ondas de Rarefação e de Choque.

Considerando a velocidade  $\mathbf{u}$  constante, suponhamos também que:

- Os fluidos são incompressíveis. A expressão matemática que descreve este fenômeno físico esta dada por  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , e quer dizer que a densidade dos fluidos é constante.
- $\mu_w$  é constante (i.e. não depende da Temperatura  $T$ ).
- A função  $f_w(T, s_w)$  depende somente do valor  $s_w$  e não da temperatura  $T$ .
- Os valores  $c_o = c_w = c_l$ ,  $\rho_o = \rho_w = \rho_l$ ,  $K_o = K_w = K_l$  constantes.
- $C_{tot}(s_w) = C_{tot}$ ,  $C_{liq}(s_w) = C_{liq}$ ,  $k_m(s_w) = k_m$  com sendo valores constantes.
- Devido a falta de dados experimentais é de particular interesse considerar a seguinte situação:  $k_o^{em} = 0$ .

Com estas suposições os coeficientes apresentados em (2.4), (2.5), (2.6) do sistema de equações formado por (2.1)-(2.2) são constantes e a Eq. (2.2) e uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem com função de fluxo  $f_w$ ; com estas considerações o

sistema tem a seguinte forma:

$$C_{tot} \partial_t T + C_{liq} \mathbf{u} \partial_x T = k_m \partial_{xx} T + C_{ter} (T - T_0) + W, \quad (2.7)$$

$$\phi(s_w)_t + \mathbf{u}(f_w(s_w))_x = 0. \quad (2.8)$$

## 2.1 EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS

Introduzindo novas variáveis faremos um processo de adimensionalização, isto nos ajuda a re-escrever o sistema (2.7) e (2.8) e facilitar a notação. Tome-se a seguinte mudança de variável:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{T - T_0}{\Delta T^*}, \quad t^* = \frac{\phi L}{u}, \quad x^* = L, \quad \Delta T^* = \frac{t^*}{C_{tot}}.$$

Obtendo como resultado a seguinte expressão, que para não sobrecarregar a notação escrevemos sem til:

$$\begin{cases} \partial_t \Theta + a \partial_x \Theta = b \partial_{xx} \Theta + c \Theta + W(x, s_w), \\ (s_w)_t + (f_w(s_w))_x = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Com  $a = \frac{C_{liq} \mathbf{u} \Delta T^*}{x^*}$ ,  $b = \frac{K_m \Delta T^*}{(x^*)^2}$ ,  $c = C_{ter} \Delta T^*$ . Veja os detalhes no Apêndice A.

## 2.2 SOLUÇÕES SEMI-ANALÍTICAS

### 2.2.1 Aplicação das leis de conservação à equação de fluxo de massa de água

Nesta sub-seção, vamos nos concentrar na equação de balanço (2.2). Com as suposições feitas ao início desta seção (2.2) tem a seguinte forma:

$$(s_w)_t + (f(s_w))_x = 0 \quad (2.10)$$

$$s_w(x, 0) = \begin{cases} s_w^l & x \leq 0 \\ s_w^r & x > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Esta última expressão é uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem com função de fluxo *Buckley-Leverett*, veja a Seção 3.1.6, e permeabilidades tipo *Corey*, veja [4]:

$$f_w(s_w) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w k_{ro}}{\mu_o k_{rw}}}, \quad k_{rw} = k_{rw}^0 (S)^{n_w}, \quad k_{ro} = k_{ro}^0 (1 - S)^{n_o}, \quad S = \frac{s_w - s_{wc}}{1 - s_{wc} - s_{or}}.$$

A qual trabalhamos com a Teoria das Leis de Conservação. O problema a valor inicial é chamado de problema de Riemann. Segundo a referência [15], a solução deste problema contém ondas de rarefação e de choque (i.e. descontinuidades). Os valores dos parâmetros usados são listados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros usados na Equação (2.8)

Símbolo	Grandeza física	Valor	Unidade (SI)
$\phi$	Porosidade	0.21	-
$k_{rw}^0$	Ponto final da permeabilidade Relativa da água	0.25	-
$k_{ro}^0$	Ponto final da permeabilidade Relativa do óleo	0.75	-
$s_{wc}$	Saturação da água conata	0.10	-
$s_{or}$	Saturação do óleo residual	0.35	-
$\mu_w$	Viscosidade da água	0.001	[Pa. s]
$\mu_o$	Viscosidade do óleo	0.015	[Pa. s]
$n_w$	Expoente para a permeabilidade relativa da água	2	-
$n_o$	Expoente para a permeabilidade relativa do óleo	2	-
$\mathbf{u}$	Velocidade de Darcy	4.6e-3	[m/s]

Na Fig. 6 vemos a função de fluxo *Buckley-Leverett*. Encontrar a solução de (2.10), consiste em achar o ponto de tangência  $s_w^T$  a partir do estado  $s_w^r$  à curva de *Buckley-Leverett*, ou seja, formamos a reta que vai desde o ponto A até o ponto C, o qual pode ser visto na seguinte Figura 6:

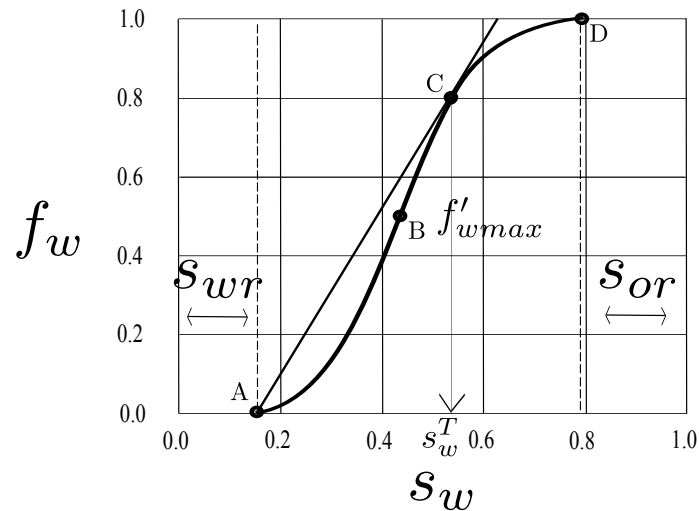


Figura 2 – Curva de Fluxo Buckley-Leverett

Segundo a Teoria das Leis de Conservação, o estado  $s_w^T$  tem que satisfazer a relação conhecida como condição de *Rankine-Hugoniot*

$$f(s_w^T) - f(s_w^r) = f'(s_w^T)(s_w^T - s_w^r). \quad (2.12)$$

Uma vez identificado o ponto  $s_w^T$ , pelo fato da função  $f_w$  ser convexa no intervalo  $[s_w^l, s_w^T]$ , teremos uma onda choque. Logo no intervalo  $[s_w^T, s_w^r]$  a função é côncava, gerando uma

onda de rarefação. A solução do problema será dada pela seguinte expressão:

$$s_w(x, t) = \begin{cases} s_w^l & x \leq t f'(s_w^l), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & t f'(s_w^l) < x < t f'(s_w^T), \\ s_w^T & t f'(s_w^T) < x < s t, \\ s_w^r & x > s t. \end{cases} \quad (2.13)$$

onde a velocidade do choque está dada pela relação de Rankine-Hugoniot;

$$s = \frac{f(s_w^T) - f(s_w^r)}{s_w^T - s_w^r}.$$

Note-se que com este estudo podemos achar a solução explícita de (2.8).

### 2.2.2 Aplicação do Princípio de Duhamel à equação de balanço de energia

Nesta subseção o nosso foco será achar a solução de (2.7). Consideramos as suposições feitas no início desta seção e também os detalhes envolvidos no experimento. Na Fig. 1 podemos ver o esquema geométrico do experimento, onde tanto a injeção da água como as ondas EM e direcionadas de um lado do meio poroso para o outro, esta informação é importante para encontrar a solução analítica (ou semi-analítica) do problema, pois usaremos a versão do *Princípio de Duhamel* definido no semiplano direito (i.e.  $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ). É importante notar que não aplicaremos o Princípio de Duhamel diretamente, usaremos primeiramente uma transformação (Detalhes ver Apêndice 2.2.2), que nos permite reduzir o problema (2.8) ao caso da típica *Equação do Calor* com termo fonte, onde já tem sentido a aplicação do *Princípio de Duhamel*. Usaremos as referências [16] e [3].

Dada a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} w_t = b w_{xx} + \Phi(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \\ w(x, 0) = f(x) & \text{Condição inicial} \\ w(0, t) = g(t) & \text{Condição de fronteira} \end{cases} \quad (2.14)$$

O Princípio de Duhamel, nos diz que a solução de (2.14) passa por resolver os seguintes três problemas independentes, onde  $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \infty)$ :

$$\begin{cases} w_{1t} = b w_{1xx} \\ w_1(x, 0) = f(x) \\ w_1(0, t) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w_{2t} = b w_{2xx} \\ w_2(x, 0) = 0 \\ w_2(0, t) = g(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_{3t} = b w_{3xx} + \Phi(x, t) \\ w_3(x, 0) = 0 \\ w_3(0, t) = 0 \end{cases}.$$

A Eq. (2.14) não contém o termo de transporte que esta presente na Eq. (2.8), desta maneira apresentaremos o seguinte problema padrão da Eq. (2.8) e aplicaremos uma



transformação para eliminar o termo de transporte dela e leva-la à forma da Eq. (2.14). Dado o problema:

$$\begin{cases} T_t + aT_x = bT_{xx} + cT + W \\ T(x, 0) = T_0 \\ T(0, t) = T_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Usamos a seguinte transformação, na equação  $T_t + aT_x - bT_{xx} - cT = W$ :

$$T(x, t) = e^{(\beta t + \alpha x)} u(x, t). \quad (2.16)$$

Com  $\alpha = \frac{a}{2b}$  e  $\beta = c - \frac{a^2}{4b}$ . Encontramos as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} T_t &= \beta e^{(\beta t + \alpha x)} u + e^{(\beta t + \alpha x)} u_t, \\ T_x &= \alpha e^{(\beta t + \alpha x)} u + e^{(\beta t + \alpha x)} u_x, \\ T_{xx} &= \alpha^2 e^{(\beta t + \alpha x)} u + 2\alpha e^{(\beta t + \alpha x)} u_x + e^{(\beta t + \alpha x)} u_{xx}. \end{aligned}$$

e substituindo os valores achados na expressão inicial, temos:

$$\begin{aligned} T_t &= \left( \cancel{c} - \frac{\cancel{a^2}}{4\cancel{b}} \right) e^{(\beta t + \alpha x)} u + e^{(\beta t + \alpha x)} u_t, \\ aT_x &= \left( \frac{\cancel{a^2}}{2\cancel{b}} \right) e^{(\beta t + \alpha x)} u + \cancel{a} e^{(\beta t + \alpha x)} u_x, \\ -bT_{xx} &= -\left( \frac{\cancel{a^2}}{4\cancel{b}} \right) e^{(\beta t + \alpha x)} u - \cancel{a} e^{(\beta t + \alpha x)} u_x - b e^{(\beta t + \alpha x)} u_{xx}, \\ -cT &= \cancel{-c} e^{(\beta t + \alpha x)} u. \end{aligned}$$

Produzindo:

$$\begin{aligned} e^{(\beta t + \alpha x)} u_t - b e^{(\beta t + \alpha x)} u_{xx} &= W, \\ u_t - b u_{xx} &= e^{[-(\beta t + \alpha x)]} W. \end{aligned}$$

As condições iniciais estarão dadas por:

$$u(x, 0) = e^{(-\alpha x)} T(x, 0), \quad \text{e} \quad u(0, t) = e^{(-\beta t)} T(0, t).$$

Chegado nesse ponto o sistema reduzido tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} u_t = b u_{xx} + e^{[-(\beta t + \alpha x)]} W \\ u(x, 0) = e^{(-\alpha x)} T_0 \\ u(0, t) = e^{(-\beta t)} T_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Estamos em condições de aplicar o Princípio de Duhamel ao nosso problema reduzido. Seguindo o procedimento feito em (2.14):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty G(x, y, t) e^{(-\alpha y)} T_0 dy + \int_0^t H(x, t-s) e^{(-\beta s)} T_2 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty G(x, y, t-s) e^{[-(\beta t + \alpha x)]} W(y, s) dy ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ainda temos uma última passagem para encontrar a solução do problema  $T$ , pois  $T(x, t) = e^{(\beta t + \alpha x)} u(x, t)$ , assim:

$$T(x, t) = e^{(\beta t + \alpha x)} \left( \int_0^\infty G(x, y, t) e^{(-\alpha y)} T_0 dy + \int_0^t H(x, t - s) e^{(-\beta s)} T_2 ds + \int_0^t \int_0^\infty G(x, y, t - s) e^{[-(\beta s + \alpha y)]} W(y, s) dy ds \right). \quad (2.19)$$

Agora dependendo da condição de fronteira podemos ter o problema de Dirichlet ou Neumann.

Consideremos a equação da forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x, t).$$

Esta equação descreve um processo térmico em 1D em um sólido com difusão térmica constante na presença de uma fonte que depende do tempo e a coordenada espacial. Usamos a referência [16].

Domínio  $0 \leq x < \infty$ . Condição de fronteira de Dirichlet

Dadas as seguintes condições:

$$\begin{cases} w(x, 0) = f(x) & \text{Condição Inicial} \\ w(0, t) = g(t) & \text{Condição de Fronteira} \end{cases} \quad (2.20)$$

A solução:

$$w(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x, \xi, t) dy + \int_0^t g(\tau) H(x, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) dy d\tau. \quad (2.21)$$

Onde  $G(x, t)$  é a solução fundamental da *Equação do Calor* no semiplano direito e  $H(x, t)$  é a solução fundamental considerando a condição de fronteira Dirichlet.

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4bt} \right] - \exp \left[ -\frac{(x + \xi)^2}{4bt} \right] \right\}$$

$$H(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi bt^3/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{4bt} \right).$$

Domínio  $0 \leq x < \infty$ . Condição de fronteira de Neumann

Dadas as seguintes condições:

$$\begin{cases} w(x, 0) = f(x) & \text{Condição Inicial} \\ \partial_x w(0, t) = g(t) & \text{Condição de Fronteira} \end{cases} \quad (2.22)$$

A solução:

$$w(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x, \xi, t) dy - b \int_0^t g(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) dy d\tau. \quad (2.23)$$

Onde  $G(x, t)$  é a solução fundamental da *Equação do Calor* no semiplano direito:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4bt} \right] + \exp \left[ -\frac{(x + \xi)^2}{4bt} \right] \right\}$$

$$G(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi bt}} \exp \left( -\frac{x^2}{4bt} \right).$$

### 3 LEIS DE CONSERVAÇÃO

As leis de conservação são uma parte muito importante das equações diferenciais parciais, pois como seu nome diz, são aquelas equações que modelam a conservação de sistemas que tem sua origem na física. Trata-se de leis físicas segundo as quais certas grandezas de um sistema mantêm-se constantes ao longo do tempo. Exemplos clássicos são a lei de conservação de energia, de momento, de massa, etc.

Uma lei de conservação pode ser expressa matematicamente da seguinte forma. Seja  $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial, a qual expressa o estado de um sistema em cada ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e em cada tempo  $t \in [0, \infty)$ . Então, o sistema de equações está dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f(u)) = 0. \quad (3.1)$$

Onde  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o fluxo de  $u$  e a divergência encontra-se nas variáveis espaciais.

Uma representação equivalente, que expressa o equilíbrio da grandeza  $u$ , e que por sua vez dá sentido ao nome deste tipo de equações, consiste em integrar (3.1) sobre  $\omega \subseteq \Omega$  e aplicar o Teorema da Divergência, produzindo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} u(x, t) + \int_{\partial\omega} f(u(x, t)) \cdot \vec{n}(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

sendo  $\vec{n}$  o vetor normal a  $w$ , unitário e que aponta para o exterior. Esta igualdade pode ser interpretada como o balanço entre a quantidade indicada por  $u$  e o fluxo deste na fronteira do domínio.

Muitas situações reais dão lugar à conservação de quantidades, e é por causa disto que podem ser modeladas por este tipo de equações. Porém, por trás da aparência simples de (3.1), escondem-se várias dificuldades, como a aparição de ondas de choque e de rarefação, com as quais haverá que ter um especial cuidado.

Ao longo deste capítulo, mostraremos os resultados sobre a resolução analítica das leis de conservação; não somente sobre a existência e unicidade, mas também como propriedades que estas possam ter.

Para o desenvolvimento deste capítulo foi utilizada a seguinte bibliografia, [18], [21] e [15].

#### 3.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO ESCALARES

Nesta seção estudaremos as leis de conservação escalares, ou seja, tomaremos  $m = 1$  em (3.1). Isto nos permitirá entender os diferentes casos base. Nos concentraremos no

caso unidimensional, onde alguns desses resultados podem ser estendidos para sistemas, no entanto o caso multidimensional ainda está em aberto, ver ainda [19].

Vamos considerar o seguinte problema a valor inicial para as leis de conservação escalares unidimensionais:

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.3)$$

Na equação, as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  estão dadas e  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é a função incógnita.

### 3.1.1 Solução clássica e o método das características

**Definição 3.1.** Dizemos que  $u$  é uma solução clássica de (3.3) num aberto de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , se  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e satisfaz (3.3) em todo ponto do domínio.

Em particular, se  $u_0 \in \mathcal{C}^1$ , a solução clássica é também de classe  $\mathcal{C}^1$  para  $t \geq 0$ . Com a finalidade de evitar fenômenos relacionados com a velocidade de propagação infinita, vamos supor que  $u_0$  está limitada em  $\mathbb{R}$ . Consideraremos também que o fluxo  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definição 3.2.** Seja  $u \in \mathcal{C}^1$  uma solução de (3.3). Definimos as curvas características em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  como as curvas  $t \mapsto (x(t), t)$  dadas por a equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t)). \quad (3.4)$$

A propriedade que satisfazem essas curvas características é que a solução  $u$  é constante ao longo delas:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{dx}{dt}u_x(x, t) + u_t(x, t) = (u_t + f'(u)u_x)(x, t) = 0.$$

A última igualdade é a aplicação da lei de conservação. Sendo assim,  $u$  é constante ao longo de cada  $x$ , tomando o valor  $u_0(x_0)$  com  $x_0$  ponto inicial (em  $t = 0$ ) da curva. Podemos ver que as curvas são linhas retas dadas por:

$$x(t) = x_0 + tf'(u_0(x_0)). \quad (3.5)$$

Encontrar uma solução clássica  $u$  para (3.3) se reduz a resolver a equação  $x = x_0 + tf'(u_0(x_0))$  para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$  e tomar  $u(x, t) = u_0(x_0)$ . Se  $u_0$  é contínua, pode-se provar a existência da solução usando o teorema do valor intermediário, mas não pode se garantir a unicidade.

Para simplificar a nossa notação usaremos  $c = f'$  e  $f$  sendo pelo menos  $\mathcal{C}^2$ .

**Teorema 3.3.** Suponha que  $c_0(x) = c(u_0(x))$  é uma função crescente em  $\mathbb{R}$ , então o problema (3.3) tem uma única solução clássica.

**Demonstração:** Fixamos  $t > 0$ . Como  $c_0$  é crescente então a função contínua  $F(y) = y + t c_0(y)$  define uma bijeção nos reais. Em efeito,  $F$  assim definida é estritamente crescente:

$$F'(y) = 1 + t (c_0(y))' > 0,$$

e além disso  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$  e  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = -\infty$  pois  $c_0(y) \geq c_0(0)$  para  $y > 0$  e  $c_0(y) \leq c_0(0)$  para  $y < 0$  respectivamente.

Então podemos afirmar que  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \exists y$  único tal que,

$$F(y) = x \quad \Rightarrow \quad x = y + t c_0(y). \quad (3.6)$$

Agora, vamos introduzir:  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$  e teremos que verificar se satisfaz (3.3).

$$u_t(x, t) + c(u)u_x(x, t) = u'_0(y(x, t))\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + c(u_0(y))\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right] \quad (3.7)$$

por outro lado derivando (3.6) com relação a  $x$  e  $t$ , obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)(1 + c'_0(y)) = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)(1 + c'_0(y)) = -c_0(y) \end{cases} \quad (3.8)$$

Levando em consideração que  $(1 + c'_0(y)) > 0$  pois  $c'_0(y) \geq 0$  pela hipóteses e substituindo (3.8) em (3.6) podemos deduzir que  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$  é uma solução clássica de (3.3). ■ No anterior resultado, se temos que  $f$  é uma função convexa podemos substituir a hipóteses  $c_0$  crescente, por  $u_0$  crescente.

Agora suponhamos que a função  $u_0$  do problema de Cauchy seja limitada nos reais, como consequência  $f'(u_0)$  é limitada. No seguinte resultado,  $f'(u_0)$  não sera necessariamente crescente.

No entanto, o que nos interessa é o fato que para as leis de conservação pode existir um instante  $t^*$  no qual a solução explode, no sentido que a solução pode deixar de ser contínua, limitada. Portanto, teremos que pedir menos das nossas hipóteses iniciais se queremos achar soluções de (3.3) para qualquer instante.

### 3.1.2 Soluções fracas

A ideia é multiplicar a equação (3.3) por uma função regular  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  de suporte compacto, ( $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , que recebe o nome de função teste), e integrar por partes, passando assim as derivadas para a  $\phi$ . Dessa maneira obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \phi(x, 0) dx = 0. \quad (3.9)$$

**Definição 3.4.** Dizemos que  $u$  é uma solução fraca da (3.3), se para toda função teste  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  verifica-se (3.9).

Pode ser provado que a definição de solução fraca é uma extensão da solução clássica; toda solução clássica é, de fato, solução fraca. A recíproca, no entanto, nem sempre é verdadeira. Como já tínhamos comentado, o conceito de solução fraca inclui funções que não são contínuas.

**Teorema 3.5.** Se  $u$  é uma solução clássica do PVI (3.3), então é uma solução fraca de (3.3).

**Demonstração:** Seja  $u$  uma solução clássica de (3.3). Multiplicando (3.3) por uma função teste  $\phi$  é integrando sobre  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  obtemos:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) \right) \phi \, dt \, dx, \quad (3.10)$$

Integrando por partes na primeira integral temos  $w = \phi$  com  $dw = \phi_t dx$  e  $dv = \frac{\partial u}{\partial t} dt$  com  $v = u$ . Desta maneira obtemos que;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dt \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \phi|_0^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \, dx.$$

De maneira similar na segunda integral tomamos:  $w = \phi$  com  $dw = \phi_x dx$  e  $dv = \frac{\partial f}{\partial t} dt$  com  $v = f$ , produzindo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial f(u)}{\partial x} \phi \, dt \, dx = \int_0^{\infty} f \phi|_{-\infty}^{\infty} dt - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \, dt.$$

Levando em consideração que  $\phi$  se anula em  $\pm\infty$  e somando as últimas duas expressões;

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( -u \frac{\partial \phi}{\partial t} - f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt \, dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \phi(x, 0) \, dx = 0. \quad (3.11)$$

E obtemos a equação (3.9). ■

### 3.1.3 Solução contínua por partes e condição de choque

Estamos interessados por certo tipo de soluções fracas: soluções de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes.

**Definição 3.6** (Função de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes). Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Dizemos que uma função  $v$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\Omega$ , se existe um número finito de curvas  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  da forma:

$$\Gamma_i : \begin{cases} x = \xi_i(t), \quad t \in [t_i^{(1)}, t_i^{(2)}], \\ \text{onde } \xi_i \text{ é uma função de classe } \mathcal{C}^1 \end{cases}$$

tais que  $v$  seja igual à restrição de uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  em cada componente conexa de  $\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$ .

Uma função  $v(x, t)$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , se é de classe  $\mathcal{C}^1$  para todo aberto limitado de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

Notamos que se uma função  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes então as funções  $u, u_t, u_x$  admitem valores em ambos lados da curva de descontinuidade  $\Gamma$ .

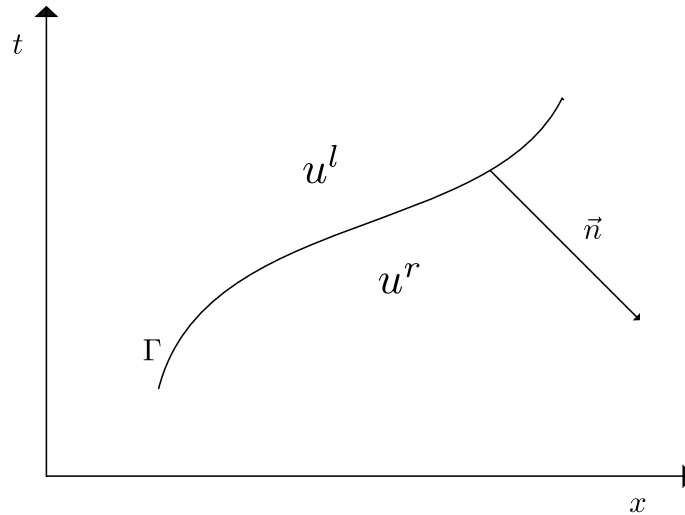


Figura 3 – A curva  $\Gamma$  com o seu vetor normal  $\vec{n}$  e os estados a esquerda e direita resp.  $\Omega^l$  e  $\Omega^r$ .

O seguinte resultado é muito importante e caracteriza as soluções fracas de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes do problema (3.3).

**Teorema 3.7.** Seja  $u$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Então  $u$  é uma solução fraca de (3.3) se e somente se  $u$  é solução clássica de (3.3) em todo o domínio aonde é de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $u$  satisfaz a condição:

$$f(u^r) - f(u^l) = \xi'(t)(u^r - u^l). \quad (3.12)$$

ao longo da curva de descontinuidade  $\Gamma$ .

**Demonstração:** A demonstração esta inspirada no resultado do livro ([18], pp. 29). Seja  $u$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  e seja  $\Gamma$  uma curva de descontinuidade de  $u$ . Consideramos o aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$  partido por  $\Gamma$  em duas componentes conexas que notaremos  $\Omega^l$  e  $\Omega^r$  com  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\Omega^l$  e  $\Omega^r$ . Definindo o vetor normal unitário  $\vec{n} = (n_x, n_t)$  à curva de descontinuidade  $\Gamma$  caracterizada por  $(\xi(t), t)$  e o vetor normal apontando para o estado a direita de maneira que:  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(1, -s)$  com  $s = \xi'(t)$ .



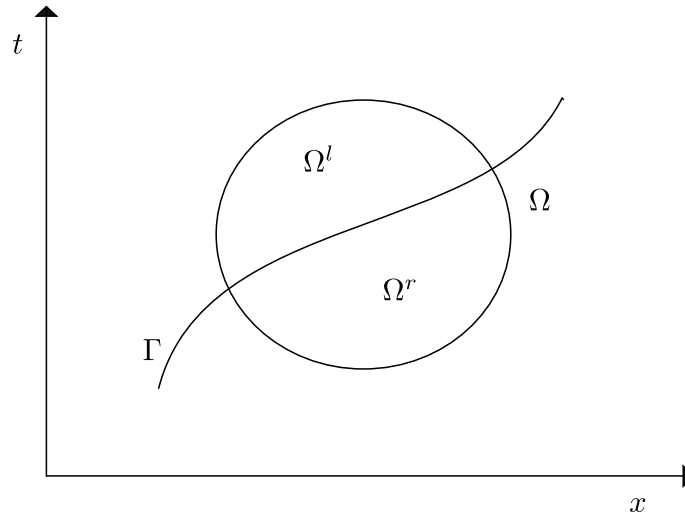


Figura 4 – A curva  $\Gamma$  que separa o aberto limitado  $\Omega$  em  $\Omega^l$  e  $\Omega^r$ .

Seja  $\phi$  função teste com suporte compacto em  $\Omega$ . Como  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\Gamma^l$  e  $\Gamma^r$  podemos aplicar o teorema de Gauss para encontrar que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^l} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{\Omega^l} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \phi dx dt + \int_{\Gamma} (u^l n_t + f(u^l) n_x) \phi d\gamma, \\ \int_{\Omega^r} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{\Omega^r} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \phi dx dt - \int_{\Gamma} (u^r n_t + f(u^r) n_x) \phi d\gamma. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{\Omega^l \cup \Omega^r} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \phi dx dt \\ &\quad - \int_{\Gamma} [(u^r - u^l) n_t + (f(u^r) - f(u^l)) n_x] \phi d\gamma. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Agora, como  $u$  é solução fraca de (3.3) e  $u$  é solução de (3.3) podemos concluir que:

$$\int_{\Gamma} [(u^r - u^l) n_t + (f(u^r) - f(u^l)) n_x] \phi d\gamma = 0. \quad (3.14)$$

Como esta expressão é válida para toda  $\phi$  função teste de suporte compacto e considerando a expressão o vetor normal  $\vec{n} = (n_x, n_t)$ , a última expressão nos diz:

$$(u^r - u^l)(-\xi'(t)) + (f(u^r) - f(u^l)) = 0. \quad (3.15)$$

ao longo de  $\Gamma \cap \Omega$ , obtendo o resultado.

Reciprocamente, se  $u$  é solução do problema (3.3) e  $u$  satisfaz (3.12), teremos:

$$\int_{\Omega} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = 0.$$

Para todo  $\phi$  função teste, de onde  $u$  é solução fraca do problema. ■

Denotando por  $[u] = u^r - u^l$  e  $[f(u)] = f(u^r) - f(u^l)$  os saltos das funções  $u$  e  $f(u)$  ao longo de  $\Gamma$ , a última identidade torna-se:

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]}, \quad \text{com} \quad s = \xi'(t).$$

Esta equação é chamada de **condição de Rankine-Hugoniot**, nos diz que  $s$  é a velocidade de propagação da descontinuidade ao longo de  $\Gamma$ .

**Definição 3.8.** Dizemos que um choque  $(u_r, u_l, s)$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot se e somente se verifica:

$$f(u^r) - f(u^l) = s(u^r - u^l). \quad (3.16)$$

**Exemplo 3.1.** Consideremos a equação de Burguers,  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ , a condição de Rankine-Hugoniot escreve-se:

$$s = \frac{u^r + u^l}{2}.$$

Isto é, a média dos valores dos estados à direita e à esquerda da descontinuidade é a velocidade de propagação do choque.

### 3.1.4 Solução entrópica

Com as soluções fracas agora estamos em condições de calcular soluções globais para o problema (3.3) em cenários onde o problema pode não ter soluções clássicas. No entanto, agora é a unicidade da solução fraca que não está garantida. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 3.2.** Consideremos a equação de Burguers,  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ , com a condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Apresentamos uma solução global do problema de Cauchy:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{se } x \geq t. \end{cases}$$

A função  $u$  é contínua e solução clássica da equação de Burguers. Graças ao teorema podemos afirmar que é solução fraca. Ainda podemos apresentar outra solução fraca ao problema calculando a velocidade de propagação do choque usando (??), mas que não é contínua.

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{se } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Podemos ver no exemplo anterior, que foi possível construir uma solução contínua a partir de uma condição inicial descontínua. Será visto mais adiante que a solução que tem sentido físico é a que temos que levar em consideração.

Vamos propor o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + (F(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon = u_0 & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $\varepsilon$  é pequeno e positivo.

**Lema 3.9.** Seja  $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$  um conjunto de soluções clássicas de (3.17) tais que:

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} < C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.18)$$

e

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ q.t.x de } \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (3.19)$$

Então  $u$  é uma solução fraca de (3.3).

**Demonstração:** Seja  $\varphi$  uma função teste. Multiplicando (3.17) por  $\varphi$  e integrando por partes, teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( -u^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(u^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon u^\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dt dx = 0.$$

Levando em consideração (3.18) e (3.19) e que o suporte de  $\varphi$  é compacto, podemos usar o Teorema de convergência dominada de Lebesgue, veja [9], para passar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  na expressão anterior e dessa maneira obter:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx.$$

O resultado segue da mesma definição de solução fraca. ■

Para caracterizar o limite  $u$  das soluções da equação parabólica (3.17) utilizamos a noção matemática de entropia.

**Definição 3.10** (Entropia). O par  $(U, F)$  de funções de classe  $\mathcal{C}^1$  nos reais forma uma entropia para (3.1), se:

- (i)  $U$  é uma função estritamente convexa.
- (ii)  $F'(u) = U'(u)f'(u)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ .

Note-se que sendo  $U$  e  $F$  funções regulares satisfazendo o segundo item anterior, e se  $u$  é uma solução clássica de (3.1), então

$$U'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + U'(u)f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Torna-se em

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0. \quad (3.20)$$

No entanto, se  $u$  é uma solução fraca de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes de (3.1), então a equação (3.20) não pode ser satisfeita no sentido fraco. De fato, de outro modo é necessário que  $s[U(u)] = [F(u)]$  ao longo de toda a curva de descontinuidade de  $u$  mas esta relação não pode se ser satisfeita ao mesmo tempo que a condição de Rankine-Hugoniot. No entanto temos o seguinte resultado, quando  $u$  é uma solução fraca de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes, (3.20) torna-se uma desigualdade.

**Teorema 3.11.** Seja  $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$  um conjunto de soluções regulares de (3.17) que verificam (3.18) e (3.19), e seja  $(U, F)$  uma entropia para (3.1). Então  $u$  verifica a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx \geq 0. \quad (3.21)$$

para toda função teste  $\phi \geq 0$ .

A condição (3.21) chama-se condição de entropia e sua notação (no sentido das distribuições) é,

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0.$$

A demonstração desse último fato é extensa e pode ser achada na referência ([8], pp. 607).

**Definição 3.12** (Solução Entrópica). Uma solução fraca de (3.17), chama-se solução entrópica se satisfaz a condição de entropia (3.21) para toda entropia  $(U, F)$  da equação (3.1).

**Teorema 3.13** (Entropia para soluções de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes). Seja  $u$  uma solução fraca de classe  $\mathcal{C}^1$  de (3.17). Então  $u$  é uma solução entrópica se e somente se, para toda entropia  $(U, F)$ , se verifica a condição:

$$\int_{\Gamma} \xi' [U(u^r(t)) - U(u^l(t))] \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma \geq \int_{\Gamma} [F(u^r(t)) - F(u^l(t))] \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma. \quad (3.22)$$

para toda função teste não negativa  $\varphi$  ao longo da curva de descontinuidade  $\Gamma = \{(\xi(t), t)\}$ .

Note que

$$\xi'(t) [U(u^r(t)) - U(u^l(t))] \geq [F(u^r(t)) - F(u^l(t))]. \quad (3.23)$$

é uma condição suficiente para que o critério (3.22) seja verificado. Para o caso de uma função  $f$  convexa esta condição se simplifica ainda mais.

**Teorema 3.14.** (Choque entrópico de Lax, caso convexo) Suponhamos que  $f$  é estritamente convexa. Então, a condição suficiente (3.23) para um choque entrópico equivale a

$$u^l > u^r. \quad (3.24)$$

ao longo da curva de descontinuidade  $\Gamma$ .

**Demonstração:** Definamos a função  $G$  por:

$$G(u) = \frac{f(u) - f(u^l)}{u - u^l} (U(u) - U(u^l)) - (F(u) - F(u^l)).$$

Mostraremos que  $G$  é uma função decrescente de  $u$ . Admitindo isto por um momento. Como  $G(u^l) = 0$  e (3.23) escreve-se como  $G(u^r) \geq 0$ , e como resultado de que  $G$  é

decrecente as condições (3.23) e (3.24) são equivalentes, e o teorema estaria demonstrado. Provaremos agora que  $G$  é decrescente. De fato se derivamos  $G$ :

$$G'(u) = \frac{f'(u)(u - u^l) - (f(u) - f(u^l))}{(u - u^l)^2} (U(u) - U(u^l)) + \frac{f(u) - f(u^l)}{u - u^l} U'(u) - F'(u).$$

Considerando que  $F'(u) = U'(u)f'(u)$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{f'(u)(u - u^l) - (f(u) - f(u^l))}{(u - u^l)^2} (U(u) - U(u^l)) + \frac{f(u) - f(u^l) - f'(u)(u - u^l)}{u - u^l} U'(u), \\ G'(u) &= \frac{(f'(u)(u - u^l) - f(u) + f(u^l))(U(u) - U(u^l)) - U'(u)(u - u^l)^2}{(u - u^l)^2}. \end{aligned}$$

Do fato que,  $f$  e  $U$  são convexas temos que

$$f'(u)(u - u^l) < f(u) - f(u^l).$$

para todo  $u$ , o mesmo para a função  $U$ ,

$$U'(u)(u - u^l) < U(u) - U(u^l).$$

Por tanto,  $G'(u) < 0$ . ■

**Corolário 3.15.** Seja  $u$  uma solução entrópica de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes de (3.1) com função de fluxo  $f$  estritamente convexa. Então  $u$  satisfaz

$$f'(u^r) < \xi'(t) < f'(u^l). \quad (3.25)$$

ao longo de toda a curva  $\Gamma$ .

**Demonstração:** Como  $f$  é estritamente convexa, definimos a função:

$$G(u) = \frac{f(u) - f(u^r)}{u - u^r},$$

$G$  é contínua e estritamente crescente sobre o intervalo  $[u^r, u^l]$ . Daqui resulta que:

$$f'(u^r) < \frac{f(u^l) - f(u^r)}{u^l - u^r}.$$

No entanto, pela condição de Rankine-Hugoniot, podemos escrever:  $f'(u^r) < \xi'(t)$ . A outra desigualdade mostra-se de igual maneira. ■

No que se segue, apresentamos a variação de entropia usada no Capítulo 2 para resolver a equação de fluxo de Buckley-Leverett em 3.1.6.

**Teorema 3.16.** (Choque entrópico de Oleinik, caso geral) A condição de choque entrópico (3.23) equivale a

$$\begin{cases} f(\alpha u^l + (1 - \alpha)u^r) \geq \alpha f(u^l) + (1 - \alpha)f(u^r) & \text{se } u^r > u^l \\ f(\alpha u^l + (1 - \alpha)u^r) \leq \alpha f(u^l) + (1 - \alpha)f(u^r) & \text{se } u^r < u^l \end{cases} \quad (3.26)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Geometricamente o teorema significa que um choque é entrópico de Oleinik, se verifica uma das seguintes condições:

- $u^r > u^l$  e o gráfico de  $f$  está acima do segmento formado por  $(u^r, f(u^r))$  e  $(u^l, f(u^l))$ .
- $u^r < u^l$  e o gráfico de  $f$  está abaixo do segmento formado por  $(u^r, f(u^r))$  e  $(u^l, f(u^l))$ .

Realçamos que, no caso de  $f$  convexa, a condição  $u^r > u^l$  é suficiente para garantir que o choque seja entrópico. No caso da  $f$  côncava, é suficiente  $u^r < u^l$ .

### 3.1.5 O problema de Riemann

Nesta subseção consideraremos a função de fluxo  $f$  convexa (isto é  $f'' > 0$ ), e calcularemos a solução entrópica do problema de Riemann:

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.27)$$

Onde  $u^l$  e  $u^r$  são constantes e correspondem aos estados iniciais à esquerda e direita respectivamente.

Estudaremos os seguintes dois casos:  $u^l < u^r$  e  $u^l > u^r$ .

**Lema 3.17** (Solução autosemelhante). A solução do problema de Riemann (3.27) é autosemelhante, i.e.,  $u(x, t) = v(x/t)$ . Além disso, se verifica que  $v'(x/t) = 0$  ou  $f'(v(x/t)) = x/t$  no domínio onde  $v$  é de classe  $C^1$ .

**Demonstração:** Seja  $\alpha > 0$ . Fazendo:  $\bar{x} = \alpha x$ ,  $\bar{t} = \alpha t$  e  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = u(x, t)$  é claro que  $\bar{u}$  é solução como  $u$  do problema (3.27). Dito de outra forma, Se  $u$  é de classe  $C^1$  num aberto  $K$  de  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , então para todo  $\alpha > 0$ :

$$u(x, t) = u(\alpha x, \alpha t).$$

Isto significa que  $u$  é autosemelhante. Além disso, se  $u \in C^1$ , deveremos ter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} v'(x/t) + \frac{1}{t} f'(v(x/t)) v'(x/t) = 0, \quad \forall (x, t) \in K.$$

e portanto,

$$v'(x/t)(f'(v(x/t)) - x/t) = 0, \quad \forall (x, t) \in K.$$

■

Com esta última ferramenta estamos em condições de encontrar as soluções explícitas de (3.27).

*Onda de Rarefação:  $u^l < u^r$*

O método das características nos permite construir a solução nas regiões  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : x \leq f'(u^l)t\}$  e  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : x \geq f'(u^r)t\}$  obtemos:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & \text{se } \frac{x}{t} \leq f'(u^l) \\ u^r & \text{se } \frac{x}{t} \geq f'(u^r) \end{cases} \quad (3.28)$$

para a região do centro  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : f'(u^l)t \leq x \leq f'(u^r)t\}$  utilizamos o lema anterior. Sendo que  $f'$  é crescente podemos escrever:

$$u(x, t) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{quando } f'(u^l) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u^r).$$

A solução obtida é contínua e é chamada onda de rarefação.

*Onda de Choque:  $u^l > u^r$*

Neste caso, a solução se determina usando a condição de Rankine-Hugoniot. O choque é entrópico ( $u^l > u^r$ ) e a solução é:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & \text{se } x \leq st \\ u^r & \text{se } x \geq st \end{cases} \quad (3.29)$$

com  $s = \frac{f(u^r) - f(u^l)}{u^r - u^l}$ .

### 3.1.6 Equação de Buckley-Leverett

Neste subseção estudaremos a equação de Buckley-Leverett, veja [4], e a sua aplicação à recuperação do óleo.

No ano 1941, *Leverett* apresentou o conceito de fluxo fracional. A partir da *Lei de Darcy* para a água e o óleo, foi obtida a expressão:

$$f_w = \frac{1 + \frac{k}{u_l} \frac{k_{ro}}{u_o} \left( \frac{\partial P_c}{\partial L} - g \Delta \rho \sin \alpha_d \right)}{1 + \frac{u_w}{u_o} \frac{k_o}{k_w}}. \quad (3.30)$$

Nessa expressão,  $f_w$  representa a taxa de fluxo de água que passa por qualquer ponto da rocha.  $k$  a permeabilidade relativa da formação.  $k_w, k_o$  permeabilidades efetivas da água e do óleo respectivamente.  $k_{rw}, k_{ro}$  as permeabilidades relativas da água e do óleo respectivamente.  $\mu_w, \mu_o$  a viscosidade da água e do óleo respectivamente.  $P_c = p_o - p_w$  a pressão capilar, que é a pressão da fase do óleo menos a pressão da fase da água.  $L$  o comprimento da formação, medida no sentido do movimento.  $g$  a aceleração da gravidade.  $\Delta \rho$  a diferença entre as densidades da água e do óleo  $= \rho_w - \rho_o$  e  $\alpha_d$  é ângulo de injeção da formação com relação a horizontal.

Note-se que devido que as permeabilidades relativas e a pressão capilar estão em função unicamente da saturação da água, a função  $f_w$  de *Fluxo Fracional* é função da saturação da água.

Entre todos os valores envolvidos na equação de  $f_w$ , aquele que causa mais dificuldades é o gradiente de pressão capilar, o qual pode ser expresso como:

$$\frac{\partial P_c}{\partial L} = \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial L}. \quad (3.31)$$

Mesmo com esta última modificação teremos dificuldades para o cálculo do gradiente de saturação,  $\frac{\partial S_w}{\partial L}$ , por isso, na prática este termo é considerado desprezível. Desta forma, podemos simplificar (3.30):

$$f_w = \frac{1 - \frac{k}{u} \frac{k_{ro}}{u_o} (g \Delta \rho \sin \alpha_d)}{1 + \frac{u_w}{u_o} \frac{k_o}{k_w}}. \quad (3.32)$$

Para uma simplificação adicional, tome-se em conta que num deslocamento horizontal esta equação se reduz a:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{u_w}{u_o} \frac{k_o}{k_w}}. \quad (3.33)$$

Esta última expressão (3.33), é chamada de *Forma Simplificada da Equação de Fluxo Fracional*. Nesta expressão estão incluídas tanto a permeabilidade relativa da água como do óleo. Portanto, esta equação também pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{k_{ro}}{k_{rw}}}. \quad (3.34)$$

Segundo [4], em geral as permeabilidades relativas estão dadas por:

$$k_{rw}(s_w) = k_{rw}^0 \left( \frac{s_w - s_{wc}}{1 - s_{oc} - s_{wc}} \right)^{n_w}, \quad k_{ro}(s_o) = k_{ro}^0 \left( \frac{1 - s_w - s_{oc}}{1 - s_{oc} - s_{wc}} \right)^{n_o}. \quad (3.35)$$

Desconsiderando as forças de capilaridade e substituindo as mobilidades, (3.33) torna-se:

$$f_w(s_w, T) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w(T)}{\mu_o(T)} \frac{k_{ro}(s_w)}{k_{rw}(s_w)}}. \quad (3.36)$$

Agora substituindo as permeabilidades relativas obtemos:

$$f_w(s_w, T) = \left( 1 + m(T) \frac{(1 - s_{oc} - s_w)^{n_o}}{(s_w - s_{wc})^{n_w}} \right)^{-1}. \quad (3.37)$$

onde  $m(T)$  está dada por:

$$m(T) = \frac{\mu_w(T)}{\mu_o(T)} \frac{k_{ro}^0(s_w)}{k_{rw}^0(s_w)} (1 - s_{oc} - s_w)^{n_w - n_o}. \quad (3.38)$$



Estamos particularmente interessados no caso onde  $n_w = n_o = 2$ , pois dele encontraremos a solução analítica. Levando em consideração que  $m(T) = \frac{\mu_w(T) k_{ro}^0(s_w)}{\mu_o(T) k_{rw}^0(s_w)}$ , segue que:

$$f_w(s_w, T) = \left( 1 + m(T) \frac{(1 - s_{oc} - s_w)}{(s_w - s_{wc})} \right)^{-1}, \quad (3.39)$$

$$= \frac{s_w - s_{wc}}{m(T) - m(T)s_{oc} - m(T)s_w}, \quad (3.40)$$

$$= \frac{\overbrace{s_w - s_{wc}}^{=s}}{s_w - s_{wc} + m(T)(1 - s_{oc}) - m(T)s_w}, \quad (3.41)$$

$$= \frac{s}{s + sm(T) - sm(T) + m(T)(1 - s_{oc}) - m(T)s_w}, \quad (3.42)$$

$$= \frac{s}{s + sm(T) - sm(T) + m(T)(1 - s_{oc}) - m(T)s_w}, \quad (3.43)$$

$$= \frac{s}{s(1 + sm(T)) - m(T)(1 - s_{oc} - s_w)}. \quad (3.44)$$

Onde chegamos na equação *clássica de fluxo Buckley-Leverett*.

$$f_w(s_w, T) = \frac{s}{s(1 + sm(T)) - m(T)(1 - s_{oc} - s_w)}. \quad (3.45)$$

Na primeira fase a recuperação do óleo acontece por diferença de pressão no reservatório, no entanto só uma pequena porcentagem do óleo é obtida. Por isto, na indústria do petróleo tem sido desenvolvidos métodos para complementar esta produção que consiste na injeção de água através dos poços para deslocar o óleo à superfície. Este processo pode ser simulado utilizando a equação de fluxo bifásico num meio poroso. Num modelo unidimensional, a evolução da saturação do óleo é governada pela lei de conservação escalar de Buckley-Leverett.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (3.46)$$

$$\text{Onde } f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}.$$

Do estudo feito nas anteriores seções sabemos que se  $f$  é convexa, a solução do problema de Riemann (3.27) é uma onda de choque ou de rarefação. Ora, se  $f$  é não convexa, a solução entrópica pode ter as duas ondas. Este é o caso da a equação de Buckley-Leverett.

Podemos ver, no lado esquerdo da Fig. 5, que a função tem um ponto de inflexão. denotamos esse ponto por  $u^*$ .

Segundo a teoria estudada ao longo desse capítulo, encontrar a solução do problema de Riemann associado a (3.46), consiste em encontrar o ponto de tangência  $u^*$  a partir do estado  $u^r$  à curva de Buckley-Leverett, o qual pode ser visto na seguinte Fig. 6:

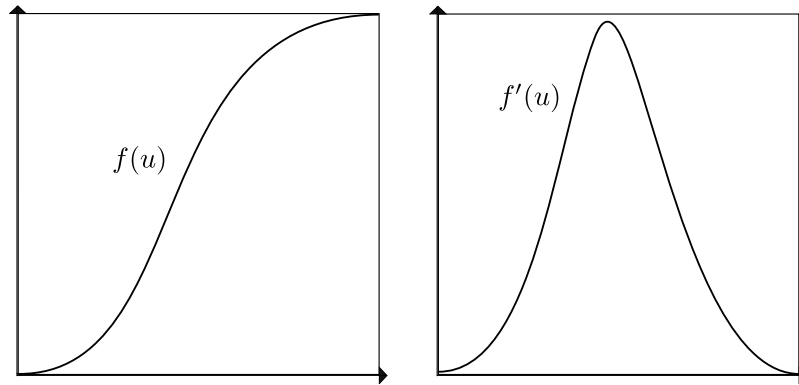


Figura 5 – Do lado esquerdo temos a função de fluxo Buckley-Leverett. Do lado direito, a sua derivada.

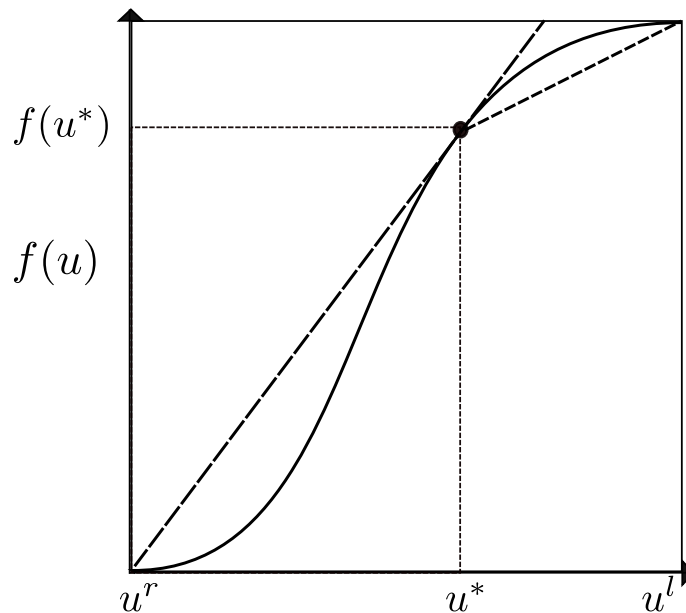


Figura 6 – No intervalo  $(u^r, u^*)$  a função  $f$  é convexa. No intervalo  $(u^*, u^l)$  a função é côncava. O ponto  $u_w^*$  deveria satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot.

O estado  $u_w^*$  deve satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot:

$$f(u^*) - f(u^r) = f'(u^*)(u^* - u^r).$$

Uma vez quantificado o ponto, do fato da função  $f$  ser convexa no intervalo  $(u^r, u^*)$ , teremos uma onda choque. No intervalo  $(u^*, u^l)$  a função é côncava, gerando uma onda de rarefação.

A solução do problema será dada pela seguinte expressão:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & x \leq t f'(u^l), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & t f'(u^l) < x < t f'(u^*), \\ u^* & t f'(u^*) < x < s t, \\ u^r & x > s t. \end{cases}, \quad s = \frac{f(u^*) - f(u^r)}{u^* - u^r}. \quad (3.47)$$

A solução  $u(x, t)$  obtida é solução entrópica do problema (3.27). O caso  $u_l < u_r$  é análogo, ver ([18], pp. 43).

## 4 PRINCÍPIO DE DUHAMEL

Na matemática, mais especificamente nas equações diferenciais parciais, o Princípio de Duhamel é um método geral para a obtenção de soluções de equações lineares de tipo evolução não homogêneas, como a equação do calor, a equação da onda, e a equação da placa vibrante. O Princípio de Duhamel reduz-se ao método de variação de parâmetros para resolver equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas.

O Princípio proporciona a solução de problemas de condução do calor com condição inicial dependente da variável espacial e condição de fronteira dependente do tempo com termo fonte referente à geração de energia.

Queremos resolver o seguinte problema a valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.1)$$

Neste capítulo, usamos as referências bibliográficas [11] e [8].

### 4.1 EQUAÇÃO DO CALOR

O fenômeno da condução de calor através de um sólido pode ser analisado matematicamente por meio do uso de equações diferenciais parciais. Utilizando argumentos físicos pode-se mostrar como é formulada a equação do calor num sólido. O estudo da equação do calor, não somente para o caso deste trabalho, mostra-se fundamental em numerosos campos científicos.

Para resolver o problema de valor inicial não homogêneo (4.1), começamos por resolver o problema a valor inicial homogêneo:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.2)$$

Para isto, procuramos soluções auto-semelhante da equação,

$$u_t - \Delta u = 0. \quad (4.3)$$

e consideraremos somas destas soluções, para obter mais soluções. Depois, encontraremos coeficientes adequados para que sejam verificadas as condições iniciais.

Vamos encontrar uma solução que seja invariante por dilatação  $u(x, t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ .

Queremos  $u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$  para todo  $\lambda > 0$  e  $\alpha, \beta$  constantes a serem determinadas. Tomaremos  $\lambda = \frac{1}{t}$ , ou seja:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} u\left(\frac{x}{t^\beta}, 1\right) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right).$$

Seja  $y = \frac{x}{t^\beta}$ . Acharmos uma equação para  $v$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j}\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \cdot \frac{-\beta x_j}{t^{\beta+1}} \\ &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}}D_x v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \cdot \frac{x}{t^\beta} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) &= \frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{1}{t^\beta} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x,t) &= \frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \frac{1}{t^{2\beta}}.\end{aligned}$$

Substituindo está informação em (4.3), teremos:

$$\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}v(y) + \frac{\beta}{t^{\alpha+1}}Dv(y) \cdot y + \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}}\Delta v = 0.$$

Levando em consideração que  $\lambda = \frac{1}{t}$ , e tomando  $\beta = \frac{1}{2}$ :

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} Dv(y) \cdot y + \Delta v = 0.$$

Suponhamos que  $v$  é uma solução radial, isto é,  $v(y) = w(r) = w(|y|)$ :

$$\begin{aligned}D_i w(|y|) &= w'(|y|) \frac{y_i}{|y|} \\ Dv(y) \cdot y &= w'(|y|) \frac{|y|^2}{|y|} = w'(r) r.\end{aligned}$$

A expressão para  $w$  fica:

$$\alpha w + \frac{1}{2} w'(r) r + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

Tomando  $\alpha = \frac{n}{2}$ :

$$\frac{n}{2} w + \frac{1}{2} w' r + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

Multiplicando por  $r^{n-1}$ :

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} r^{n-1} w + \frac{1}{2} r^n w' + r^{n-1} w'' + (n-1) r^{n-2} w' &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} r^n w\right)' + (r^{n-1} w')' &= 0.\end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$\frac{1}{2} r^n w + r^{n-1} w' = a = \text{constante}.$$

Suponhamos que  $r^n w \rightarrow 0$  e  $r^{n-1} w' \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , dessa maneira teremos  $a = 0$  e em conseqüência:

$$\begin{aligned}r^{n-1} w' &= \frac{1}{2} r^n w \\ w' &= \frac{1}{2} r w \quad \Rightarrow \quad w(r) = b e^{-\frac{1}{4} r^2} \\ v(y) &= w(|y|) = b e^{-\frac{|y|^2}{4}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}} \\ u(x,t) &= \frac{1}{t^\alpha} v(y) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.\end{aligned}$$

Esta última expressão verifica (4.3) em  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  e se a trasladamos na direção espacial numa direção dada  $y \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, consideramos  $u(x - y, t)$ , também verifica (4.3) em  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .

#### 4.1.1 Solução fundamental

Escolheremos o valor da constante  $b$  de maneira que a integral na variável espacial de  $u(x, t)$  seja 1.

**Definição 4.1.** A função

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada de *solução fundamental* da equação do calor ou *núcleo de Gauss*.

**Lema 4.2** (Integral da solução fundamental). Para cada tempo  $t > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dy = 1.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dy dx, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta, \\ &= 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty}, \\ &= \pi, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável,  $z = \frac{y}{\sqrt{4t}}$ , temos  $dz = \frac{1}{(4t)^{n/2}} dy$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = 1.$$

■

Agora estamos em condições de resolver o seguinte problema de valor inicial para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.4)$$

**Teorema 4.3.** Suponha que  $f$  é contínua e limitada em  $\mathbb{R}^n$ , defina-se

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) f(y) dy, \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy. \quad (4.6)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ . Então

- i.)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
- ii.)  $u_t - \Delta u = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
- iii.)  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$  se  $x_0 \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

**Demonstração:**  $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$  é varias infinitamente diferenciável

- i.) em  $x, t$  a integral existe e pode ser diferenciada a integral usando regra de Leibniz.
- ii.)  $u_t - \Delta u = 0$  com  $\Phi(y, t)$  é uma solução.
- iii.)  $f$  limitada:

$\epsilon > 0$ , escolha  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  para  $|x - x_0| < \delta$ . Então  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) [f(y) - f(x_0)] dy \right|, \\ &= \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y, t) |f(y) - f(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y, t) |f(y) - f(x_0)| dy, \end{aligned}$$

$|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ ,  $|y - x_0| > \delta$  logo:  $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y|$  então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy, \\ &\leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando  $t \rightarrow 0$ .

$|u(x,t) - f(x_0)| < 2\epsilon$  se  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$  e  $t$  pequeno, se  $|(x,t) - (x_0,t)|$  é pequeno. ■  
O teorema diz que a solução de (4.4) está dada por (4.5).

#### 4.1.2 Problema não-homogêneo

A equação não-homogênea:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.7)$$

*Princípio de Duhamel*

$\Phi(x-y, t-s)$  é solução da equação do calor.

Para  $x > 0$  fixo, a função

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) F(y, s) dy$$

resolve,

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot; s) = F(\cdot; s) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

O Princípio diz:

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \iff \quad (4.8)$$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) F(y, s) dy ds. \quad (4.9)$$

**Teorema 4.4.** Suponha que  $F \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,  $F$  tem suporte compacto, então a solução da (4.7) esta dada por (4.8).

**Demonstração:** Aplicaremos a seguinte mudança de variável:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) F(x - y, t - s) dy ds.$$

Podemos derivar a integral usando a regra de Liebnez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \frac{\partial F}{\partial t}(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) F(x - y, 0) dy, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned}$$

e todas as derivadas são contínuas.

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (\partial_t - \Delta_x) F(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) F(x - y, 0) dy \\ &= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\partial_s - \Delta_y) F(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) (-\partial_s - \Delta_y) F(x - y, t - s) dy ds + K \\ &= I_\epsilon + J_\epsilon + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_\epsilon| &\leq (\sup |\partial_t F| + \sup |D^2 F|) \cdot \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds \\ &= C \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Passando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos que  $|J_\epsilon| \rightarrow 0$ .

Logo para;

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} (-\partial_s - \Delta_y) \Phi(y, s) F(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) F(x - y, 0) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) F(x - y, t - \epsilon) dy. \quad (4.10) \end{aligned}$$



A primeira integral se anula, pois  $\partial_t F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^{-1} = \frac{\partial F}{\partial s} (-1)$  Daí:

$$\begin{aligned} (u_t - \Delta u)(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) F(x - y, t - \epsilon) dy \\ &= F(x, t). \end{aligned}$$

A solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t > 0\} \\ u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

é dada por pela soma da solução do problema (4.4) e do problema (4.7):

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) f(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) F(y, s) dy.$$

■

O resultado que foi mostrado acima é uma generalização da equação do calor para  $\mathbb{R}^n$ . Utilizamos uma adaptação deste resultado no caso  $n = 1$  para resolver a Eq. (2.7). Destacamos que o resultado não é aplicado diretamente, pois devido à física do problema devemos adaptar-lo à semi-reta na variável espacial, as versões dessa adaptação encontram-se em ([16], Seção. 1.1.5 ).

## 5 COMPARAÇÃO DO MODELO E DO EXPERIMENTO

### 5.1 EXPERIMENTOS

Nesta seção comparamos os resultados obtidos da solução semi-analítica com os dados obtidos do experimento em [12] e [10]. Consideramos os cenários descritos na Tabela 3:

Experimento	Descrição
Experimento A	Aquecimento sem escoamento.
Experimento B	O meio poroso é pre-aquecido. Escoamento sem ondas EM.
Experimento C	Escoamento com aquecimento.

Tabela 3 – Descrição dos experimentos

Nas seguintes três subseções serão descritas os experimentos desconsiderando-se perdas térmicas. Na quarta subseção, para os três experimentos, são incluídas as perdas térmicas e o valor do coeficiente  $C_{ter}$  é otimizado. Nas figuras apresentadas, as linhas ponteadas representam os dados reais do experimento, sendo que a linha em vermelho representa a solução semi-analítica encontrada através do método descrito nas seções anteriores.

#### 5.1.1 Experimento A

Neste experimento o meio poroso é saturado com água de tal maneira que possamos considerá-lo como  $s_w = 1$ . Não teremos injeção de água e uma vez nestas condições começaremos com a radiação de energia EM, com uma potência de 300 W. O objetivo é testar a absorção de calor. Os dados experimentais obtidos pelos quatro sensores foram comparados com a solução semi-analítica do problema com as seguintes condições físicas: devido a não existência de injeção de fluido a velocidade  $u$  é desconsiderada, anulando assim o termo de transporte em (2.1). Por outro lado, para a condição inicial consideramos a função constante da temperatura ambiente, no caso 20°C e a condição de fronteira como sendo a velocidade do fluido injetado que é zero. A solução semi-analítica foi encontrada usando a Equação do Calor com fonte e condição de Neumann, cuja solução é descrita em (2.22).

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 7:

#### 5.1.2 Experimento B

No segundo experimento o objetivo foi testar o transporte do calor. Para isto, o meio poroso foi aquecido a uma potência de 300 W, fazendo que a rocha aumente a temperatura. Logo o gerador de energia EM é desligado, o que permite isolar o transporte do calor. A água foi injetada a um fluxo alto 20 ml/min para que a convecção domine

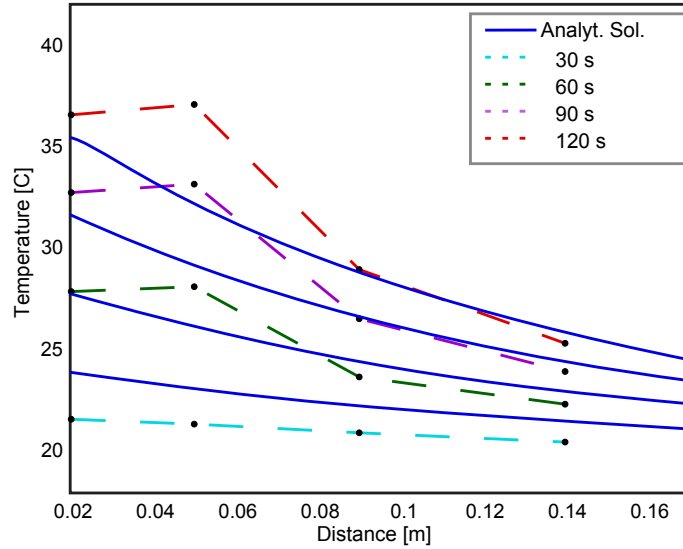


Figura 7 – O meio poroso está saturado com água (sem fluxo) e aquecido por ondas EM.

frente à difusão. Devido à física do problema espera-se que o meio poroso esteja quente, mas conforme se injete água e o tempo passar, a rocha vai se aproximar da temperatura ambiente. Devido as condições físicas, em (2.1) consideramos o termo de transporte e difusão, mas não temos o termo fonte (pois não temos transmissão de energia EM). A condição inicial foi tirada dos dados obtidos do experimento e a condição de fronteira como sendo a temperatura ambiente. A solução semi-analítica esta descrita em (2.20).

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 8:

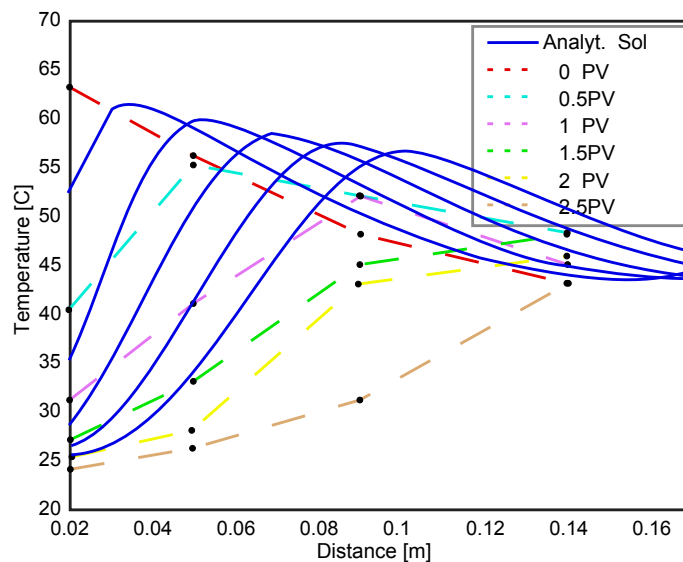


Figura 8 – O meio poroso foi previamente aquecido e posteriormente o gerador de energia EM desligado.

### 5.1.3 Experimento C

Neste experimento o objetivo é mostrar aumento da temperatura na presença de injeção da água e a ação da transmissão de energia EM. O Gerador de energia EM está inicialmente desligado, posteriormente começam a injeção da água e a transmissão de energia EM, a uma potência de 150 W. A temperatura inicial (temperatura ambiente) foi medida em 20°C e conforme o tempo passar espera-se que a temperatura aumente. A diferença para os experimentos anteriores em (2.2) é que temos a presença do termo de transporte e o termo fonte de absorção de energia EM. A condição inicial foi tirada dos dados obtidos do experimento e a condição de fronteira é considerada como sendo a temperatura ambiente. A solução semi-analítica está descrita em (2.20).

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 9:

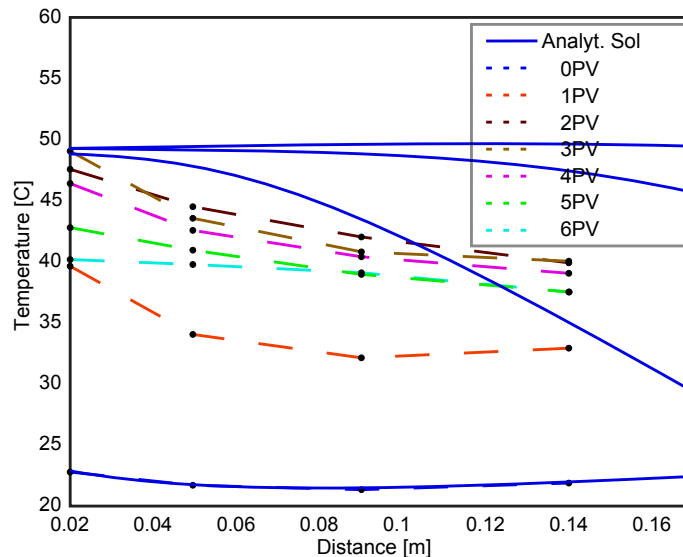


Figura 9 – Geração de energia EM e injeção da água simultaneamente no meio poroso.

### 5.1.4 Otimização dos resultados

Nos experimentos apresentados acima, foram comparadas as soluções experimentais e semi-analíticas, no entanto no experimento descrito em [12] foram reportados vazamentos de calor tanto pela caixa que contém os equipamentos, quanto pelo cilindro que é usado para guiar as ondas EM ao meio poroso e pelo cilindro que o envolve. Esses vazamentos geram trocas térmicas os quais influenciam os resultados. É por isso que consideraremos no modelo inicial (2.14) o termo linear das perdas térmicas e calculamos o coeficiente  $C_{ter}$ , que otimiza a aproximação usando o método dos mínimos quadrados: para isto, usamos a norma  $l_2$  e calculamos a diferença entre a solução obtida dos dados experimentais e a solução semi-analítica ( $\|T_{experimento} - T_{semi-analitica}\|_{l_2} \rightarrow \min$ ), depois usamos o método da bi-seção para encontrar o valor ótimo de  $C_{ter}$ , esta escolha foi feita de maneira que o

valor positivo de  $C_{ter}$  significa que temos ganho térmico e  $C_{ter}$  negativo, no caso de uma perda térmica.

No **Experimento A** o meio poroso é saturado com água e aquecido mediante ondas EM, sem escoamento. Depois do processo dos mínimos quadrados o valor ótimo foi atingido para o coeficiente das perdas térmicas é  $C_{ter} = 4.8e - 05$ , evidenciando assim um ganho térmico. Não são reportadas alterações qualitativas significativas.

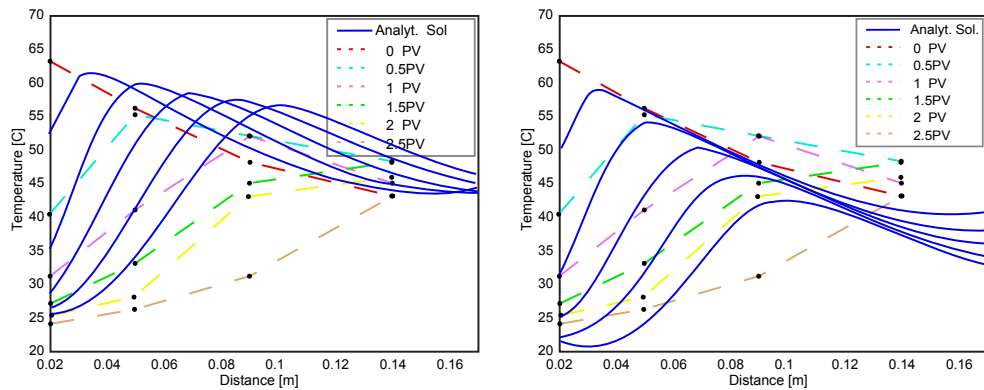


Figura 10 – Meio poroso pre-aquecido: desliga-se o gerador de ondas EM e inicia-se a injeção da água. Do lado esquerdo mostra-se os resultados sem perdas térmicas e do lado direito com perdas térmicas, onde o valor ótimo foi atingido em  $C_{ter} = -1.5e - 04$ , deixando em evidência perdas térmicas.

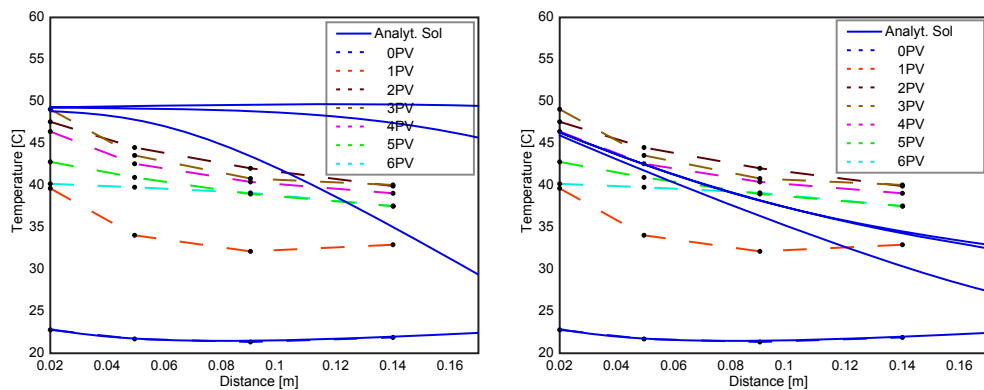


Figura 11 – Escoamento com aquecimento ao mesmo tempo. Do lado esquerdo os resultados sem perdas térmicas e do lado direito com perdas térmicas, onde o valor ótimo foi encontrado em  $C_{ter} = -3.9e - 04$ , evidenciando perdas térmicas.

Na Fig. 11, os dados nos mostram que existem oscilações no perfil da temperatura, mas com o decorrer do tempo elas estão procurando o equilíbrio, em ambas figuras tanto sem perdas térmicas como com perdas térmicas vemos que a solução semi-analítica comporta-se desta maneira o que nos ajuda a entender o experimento.

## 6 CONCLUSÕES

Injeção da água com aquecimento por meio de ondas eletromagnéticas no interior do meio poroso, foi estudada teoricamente. Para isto, supomos hipóteses que simplificam o modelo físico inicial e usamos a Teoria das Leis de Conservação e o *Princípio de Duhamel* para exibir soluções semi-analíticas.

1. Foi possível exibir soluções semi-analíticas ao problema (2.14). A Eq. (2.7) contém o termo de transporte e difusão e foi reduzida mediante a transformação (2.16) à forma da *Equação do Calor* com termo fonte. A Eq. (2.8) é trabalhada via a Teoria das Leis de Conservação e função de fluxo *Buckley-Leverett*.
2. A solução semi-analítica e os dados obtidos da referência [12] foram comparados, evidenciando que a solução semi-analítica comporta-se qualitativamente em concordância com o experimento e a física do problema.
3. No experimento [12], foram reportadas perdas térmicas da caixa que contém os equipamentos, do cilindro que envolve o meio poroso e do cilindro que guia as ondas EM. Depois de certo tempo, elas também se aqueciam o que influenciava o calor recebido pelo meio poroso. Isto pode ser visto nos três experimentos acima trabalhados. Foi possível incluir o termo linear das perdas térmicas no modelo (2.14) e mediante o procedimento dos mínimos quadrados, foi possível melhorar os resultados obtidos em comparação com o modelo sem considerar as perdas térmicas. No **Experimento A**: reportamos ganhos térmicos, no entanto a solução não melhorou e no **Experimento B** e **Experimento C** reportamos perdas térmicas. Em ambos experimentos obtivemos uma melhora significativa qualitativa e quantitativa da solução.
4. Nos três experimentos apresentados, foi possível entender e explicar melhor o experimento. No **Experimento A**, vemos que os ganhos térmicos são maiores que as perdas térmicas, isto devido às trocas de calor dos equipamentos. No **Experimento B**, vemos o transporte do perfil da temperatura, qualitativamente achamos a solução. No **Experimento C**, no perfil da temperatura, existem oscilações as quais se aproximam do equilíbrio, isso também acontece com a solução semi-analítica usando perdas térmicas, isto nos permite entender e explicar melhor o experimento. No experimento [12], o erro esperado é de no mínimo 20%, ou seja a solução semi-analítica encontrada no estudo representa bem a solução.
5. A análise e resultados obtidos deste estudo serão apresentados no artigo [22].

## 7 TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo apresentamos um resultado da aplicação do Princípio de Duhamel generalizado. A idéia é entender e generalizar os resultados apresentados em [13], para representar soluções de algumas equações do tipo semi-linear hiperbólico e usá-las e/ou adaptá-las, pensando num futuro trabalho, para representar soluções da equação (2.8).

Uma equação diferencial parcial semi-linear são aquelas EDP cujos coeficientes dos termos envolvendo a maior ordem de derivação de  $u$  dependem somente de  $x$ , não de  $u$  nem de suas derivadas.

**Exemplo 7.1.** Como exemplo de uma EDP semi-linear, temos  $u_t + xu_x = 0$  ou  $u_t + u_{xx} + u^2 = 0$ . Ora,  $u_t + uu_x = 0$  já não seria uma EDP semi-linear, pois temos o termo  $u$  no coeficiente de  $u_x$ .

Vamos considerar o seguinte problema para  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - P(\partial_x)^2 u = f(t, x, \partial_t u - P(\partial_x)u) \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) \end{cases} \quad (7.1)$$

Onde o operador diferencial  $P$  está definido da seguinte forma:

$$P(\partial_x) = \pm \partial_x. \quad (7.2)$$

**Exemplo 7.2.** Para o caso  $n = 1$ , obtemos em (7.1) com  $P(\partial_x) = \pm \partial_x$  a equação da onda

$$\partial_t^2 u \pm \partial_x^2 u = f(t, x, \partial_t u \pm \partial_x u).$$

Para o caso  $n = 2$ , obtemos em (7.1) com  $P(\partial_x) = \pm i \Delta_x$  a equação semi-linear da placa.

Quando  $f \equiv 0$ , podemos supor que  $v$  é solução de problema de Cauchy  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - P(\partial_x)^2 v = 0 \\ v(0, x) = \varphi(x) \\ \partial_t v(0, x) = \psi(x) \end{cases} \quad (7.3)$$

Agora para certo tipo de equações não lineares a existência já é conhecida. Podemos supor que  $\alpha$  é solução de:

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + P(\partial_x) \alpha = f(t, x, \alpha) \\ \alpha(0, x) = \psi(x) - P(\partial_x) \varphi(x) \end{cases} \quad (7.4)$$

No caso  $n = 1$ , mediante uma mudança de variável pode ser reduzida numa EDO de evolução. Já para o caso  $n = 2$ , chegamos numa equação tipo Schrödinger onde já existem resultados sobre a sua existência.

A ideia é resolver (7.1) usando (7.3) e (7.4). O resultado é enunciado no seguinte teorema.

**Teorema 7.1.** Suponha que  $v$  é solução de (7.3) e  $\alpha$  solução de (7.4), então a solução  $u$  de (7.1) está dada por:

$$u(t, x) = v(t, x) + \int_0^t w(t - s, x; s) ds. \quad (7.5)$$

onde  $w(t, x; s)$  é solução de:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - P(\partial_x)^2 w = 0 \\ w(0, x; s) = 0 \\ w_t(0, x; s) = f(s, x, \alpha(s, x)) \end{cases} \quad (7.6)$$

**Demonstração:** Verificando a condição inicial:

$$u(0, x) = v(0, x) = \varphi(x). \quad (7.7)$$

Ora, utilizando a regra de Leibniz,

$$\partial_t u(t, x) = \partial_t v(t, x) + w(t - t, x; s) + \int_0^t \partial_t w(t - s, x; s) ds. \quad (7.8)$$

$$\partial_t u(0, x) = \psi(x). \quad (7.9)$$

$$\partial_t^2 u(t, x) = \partial_t^2 v(t, x) + f(t, x, \alpha(t, x)) + \int_0^t \partial_t^2 w(t - s, x; s) ds.. \quad (7.10)$$

Agora com a derivada parcial em relação a  $x$ :

$$P(\partial_x)u(t, x) = P(\partial_x)v(t, x) + \int_0^t P(\partial_x)w(t - s, x; s) ds. \quad (7.11)$$

e a segunda derivada em relação a  $x$ :

$$P(\partial_x)^2 u(t, x) = P(\partial_x)^2 v(t, x) + \int_0^t P(\partial_x)^2 w(t - s, x; s) ds. \quad (7.12)$$

Fazendo (7.8)-(7.12), teremos:

$$\partial_t^2 u - P(\partial_x)^2 u = \partial_t^2 v - P(\partial_x)^2 v + f(t, x, \alpha(t, x)) + \int_0^t \partial_t w(t - s, x; s) - P(\partial_x)^2 w(t - s, x; s) ds,$$

$$\partial_t^2 u - P(\partial_x)^2 u = w(0, x; s),$$

$$\partial_t^2 u - P(\partial_x)^2 u = f(t, x, \alpha(t, x)).$$

Definimos  $\tilde{w}$  como sendo a solução do problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w} - P(\partial_x)^2 \tilde{w} = 0 \\ \tilde{w}(0, x; s) = 0 \\ \partial_t \tilde{w}(0, x; s) = \alpha(s, x) \end{cases} \quad (7.13)$$



Agora derivando (7.13) em  $s$ , teremos:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \partial_s \tilde{w} - P(\partial_x)^2 \partial_s \tilde{w} = 0 \\ \partial_s \tilde{w}(0, x; s) = 0 \\ \partial_t \partial_s \tilde{w}(0, x; s) = \partial_s \alpha(s, x) \end{cases} \quad (7.14)$$

Agora com a derivada em relação a  $x$ ,

$$\begin{cases} \partial_t^2 P(\partial_x) \tilde{w} - P(\partial_x)^2 P(\partial_x) \tilde{w} = 0 \\ P(\partial_x) \tilde{w}(0, x; s) = 0 \\ \partial_t P(\partial_x) \tilde{w}(0, x; s) = P(\partial_x) \alpha(s, x) \end{cases} \quad (7.15)$$

Combinando  $\partial_s \tilde{w}$  e  $\partial_x \tilde{w}$ , note que:

$$w(0, x; s) = f(s, x, \alpha(s, x)) = (\partial_s \alpha + \partial_x \alpha)(s, x), \quad (7.16)$$

$$w(t, x; s) = (\partial_s + P(\partial_x)) \tilde{w}. \quad (7.17)$$

Agora, juntando as expressões acima:

$$\begin{aligned} \partial_t u - P(\partial_x) u &= \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t \partial_t w(t-s, x; s) - P(\partial_x) w(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t (\partial_t - P(\partial_x)) w(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t (\partial_t - P(\partial_x)) (\partial_s + P(\partial_x)) \tilde{w}(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t (\partial_t - P(\partial_x)) (\partial_s + \partial_t + P(\partial_x)) \tilde{w}(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t ((\partial_t^2 - P(\partial_x)^2 + (\partial_t \partial_s - P(\partial_x) \partial_s)) \tilde{w}(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + \int_0^t (\partial_s (\partial_t - P(\partial_x))) \tilde{w}(t-s, x; s) ds \\ &\quad + \int_0^t (\partial_t \partial_x - P(\partial_x) \partial_x) \tilde{w}(t-s, x; s) ds, \\ &= \partial_t v - P(\partial_x) v + (\partial_t - P(\partial_x)) \tilde{w}(0, x; t) - (\partial_t - P(\partial_x)) \tilde{w}(t, x; 0), \\ &= \partial_t \{v(t, x) - \tilde{w}(t, x; 0)\} v - P(\partial_x) \{v(t, x) - \tilde{w}(t, x; 0)\} + \alpha(t, x). \end{aligned}$$

Desta última expressão, podemos ver que;

$$\partial_t u - P(\partial_x) u = \partial_t \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \tilde{v}(t, x) + \alpha(t, x). \quad (7.18)$$

Onde  $\tilde{v}$  é solução de;

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{v} - P(\partial_x)^2 \tilde{v} = 0 \\ \tilde{v}(0, x) = \varphi(x) \\ \partial_t \tilde{v}(0, x) = \psi(x) - \alpha(0, x) = P(\partial_x) \varphi(x) \end{cases} \quad (7.19)$$

Para terminar com a demonstração basta provar que  $\partial_t \tilde{v} \equiv P(\partial_x) \tilde{v}$ , o resultado é enunciado no seguinte lema. ■

**Lema 7.2.** Suponha que  $\tilde{v}$  é solução de (7.19), então  $\tilde{v}$  satisfaz  $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

$$\partial_t \tilde{v}(t, x) \equiv P(\partial_x) \tilde{v}(t, x). \quad (7.20)$$

**Demonstração:** Definimos,

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \tilde{v}(t, x)| dx. \quad (7.21)$$

Derivando a função  $E$  em relação a  $t$  e usando a propriedade  $|z|^2 = z\bar{z}$  dos números complexos e a relação (7.19), obtemos;

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \{\partial_t^2 \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \partial_t \tilde{v}(t, x)\} \overline{\partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx. \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \{P(\partial_x)^2 \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \partial_t \tilde{v}(t, x)\} \overline{\partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx. \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} P(\partial_x) \{P(\partial_x) \tilde{v}(t, x) - \partial_t \tilde{v}(t, x)\} \overline{\partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx. \\ &= -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} P(\partial_x) \{\partial_t \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \tilde{v}(t, x)\} \overline{\partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx. \\ &= -\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} P(\partial_x) \{\partial_t \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \tilde{v}(t, x)\} \overline{\partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \{\partial_t \tilde{v}(t, x) - P(\partial_x) \tilde{v}(t, x)\} \overline{P(\partial_x) \partial_t \tilde{v} - P(\partial_x) \tilde{v}} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo que  $E$  é contínua e  $E'(t) = 0$ , a função  $E(t)$  é constante, assim usando (7.19), concluímos que  $E(0) = E(t) = 0$ . ■

Logo, o resultado do teorema acima diz  $\partial_t u(t, x) - P(\partial_x) u(t, x) = \alpha(t, x)$ , e por conseguinte temos

$$\partial_t^2 u(t, x) - P(\partial_x)^2 u(t, x) = f(t, x, \partial_t u(t, x) - P(\partial_x) u(t, x)).$$

O trabalho da generalização para o caso da Equação (2.2) está sendo estudado, mais ainda não temos resultados para serem mostrados.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALOMAIR, O. *Improving Heavy Oil Recovery by Unconventional Thermal Methods.*, SPE Kuwait International Petroleum Conference and Exhibition. 2012.
- [2] ALBOUDWAREJ, H. *Highlighting Heavy Oil.*, Oilfield Review. 2006.
- [3] BHAMRA, K.S. *Partial Differential Equations: An Introductory Treatment with Applications.*, PHI Learning Pvt. 2010.
- [4] BROOKS, R. H. and COREY, A. T. *Hydraulic Properties of Porous Media.* Colorado State University, 1964.
- [5] CHEN Z. and HUAN G. and MA Y. *Computacional Methods for Muliphase Flows in Porous Media.* SIAM, 2006.
- [6] DAKE L. P. *Fundamentals of Reservoir Engineering.* ELSEVIER, 1983.
- [7] DINDORUK, D. M. and DINDORUK, B. *Analytical Solution of Nonisothermal Buckley-Leverett Flow Including Tracers*, SPE Reservoir Evaluation and Engineering, 2008.
- [8] EVANS, L. *Partial Differential Equations.* Second Ed. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2010.
- [9] FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley-Interscience, 2nd. ed., 1999.
- [10] HOLLMANN, T. H. *EM stimulation on water flooding in heavy oil recovery.* Master's Theses, TU DELFT, The Netherlands, 2013.
- [11] IÓRIO V.; *EDP um curso de graduação.* Rio de Janeiro, IMPA, 1991.
- [12] HOLLMANN, T. H.; CHAPIRO G.; HELLER K.; KERMEN E.; SLOB E; and ZITHA P. L. J. *EM Stimulated Flooding in Heavy Oil Recovery.* World Heavy Oil Congress-New Orleans-Loussiana, USA, 2014.
- [13] KINOSHITA, T. *Generalized Duhamel's Principle for some semi-linear hyperbolic type of equations.* Nonlinear Funtional Analysis and aplications, Vol. 15. No. 3, pp. 355-370, 2010.
- [14] LANDAU, L. D.; PITAEVSKII L.P.; LIFSHITZ E. M. *Electrodynamics of Continuous Media.* Vol 8, Second Edition, 1984.
- [15] LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservations laws.* Second ed. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [16] POLYANIN, A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman & Hall/CRC Press. 2001.
- [17] SAHNI, A. *Electromagnetic Heating Methods for Heavy Oil Reservoirs.* SPE/AAPG Western Regional Meeting, 2000.
- [18] SERRE, D. *Systems of conservation laws 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves.* Third Ed. Cambridge University Press, 2003.

- [19] SERRE, D. *La Transition vers L'instabilité pour les ondes de choc Multi-dimensionnelles*. Trans. Amer. Math. Soc., V. 353, 12 (2001), 5071-5093.
- [20] SIMJOO, M. *Novel insight into foam mobility control* SPE Journal 18(03), 2013.
- [21] VAN DUIJN, C. J. *An Introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-phase Flow*. Eindhoven University of Technology, 2003.
- [22] PAZ, P. Z. S.; HOLLMANN, T. H. ; CHAPIRO G.;KERMEN E.; SLOB E ; ZITHA P. L. J. *EM stimulated water flooding in heavy oil recovery: experimental and analytical study*. In preparation.

## APÊNDICE A – Adimensionalização

Faremos o processo de adimensionalização das equações.

$$\tilde{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{T - T_0}{\Delta T^*}, \quad t^* = \frac{\phi L}{u}, \quad x^* = L, \quad \Delta T^* = \frac{t^*}{C_{tot}}$$

Obtendo como resultado a seguinte expressão sem considerar as til, para não sobre-carregar a notação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_t + \check{\alpha} \Theta_x = \check{\beta} \Theta_{xx} + \check{\gamma} \Theta + W(x, s_w) \\ \Theta(x, 0) = 0 \\ \Theta(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Usaremos a regra da cadeia para simplificar a notação.

$$T_t = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}$$

Produzindo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_{tot} \Delta T^*}{t^*} \Theta_t + \frac{C_{liq} u \Delta T^*}{x^*} \Theta_x = \frac{k_m \Delta T^*}{(x^*)^2} \Theta_{xx} + C_{ter} \Delta T^* + K_w^{em} \alpha s_w e^{-\frac{x x^*}{x^* \tilde{x}}} \\ \Theta(x, 0) = 0 \\ \Theta(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

onde  $C_{tot}$ ,  $C_{liq}$ ,  $k_m$  estão definidos em (2.4), (2.5), (2.6) respectivamente.

## ANEXO A – O EXPERIMENTO

### A.1 PRINCÍPIOS E CONFIGURAÇÃO

A configuração do experimento descrita em [10], usada no estudo está representado esquematicamente na Fig. 12. É constituída por uma seção teste em linha com uma bomba de deslocamento que tem um pistão de alta precisão (ISCOTM), um acumulador de cilindro e um coletor de frações. A seção teste foi especialmente desenvolvido para este estudo e inclui o gerador de um forno de microondas (MW), um guia de ondas e, dentro da guia de ondas, o porta-núcleo do PEEK (poliéter).

O guia de onda é composto por uma seção cônica com diâmetros 8,0 e 7,0, 20,0 cm de comprimento e um cilindro oco, ver [10] para mais detalhes. Foi cuidadosamente concebido para conduzir a radiação proveniente do gerador de MW para o cilindro que contém o núcleo, evitando fugas de microondas para o ambiente do laboratório. O guia de ondas foi colocado em uma caixa de Faraday feito de um alumínio aterrado (Holland Blindagem Systems) para proteção contra radiações adicional, ver Fig. 13.

A água foi injetada diretamente no núcleo utilizando a bomba ISCOTM. Para a injeção do óleo, a água foi desviada para o cilindro acumulador e usado para forçar o óleo para dentro do núcleo.

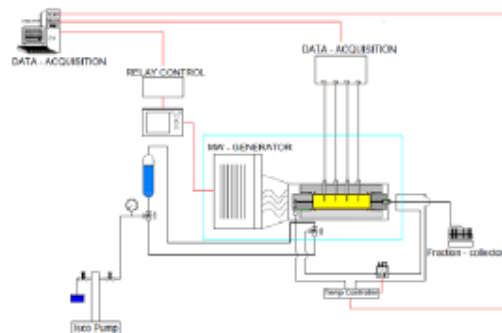


Figura 12 – Representação esquemática da configuração.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

As temperaturas de entrada e saída foram monitorados utilizando Ni-Cr/Ni-Al termo-pares com uma precisão de  $0,2^{\circ}$  C e tempo de resposta de 2,3 segundos. Estes dois termo-pares foram colocados aos 5 cm da entrada e da saída do núcleo. A leitura dos termo-pares foi feito usando um sistema de aquisição de temperatura, uma caixa de temperatura Tempress.

A temperatura ao longo do núcleo foi monitorado usando 5 m long OpsensQR sensores ópticos (OTP-A) revestido com PFA (perfluoroalcoxy, Teflon) e PTFE (politetra-

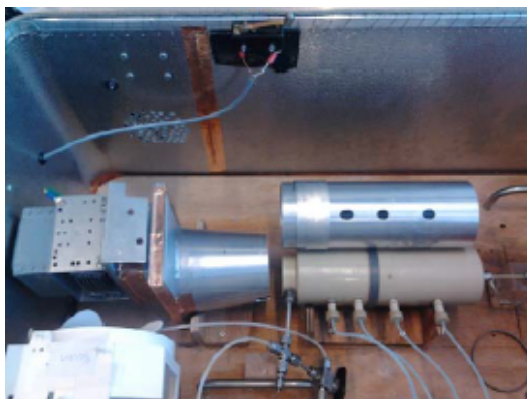


Figura 13 – A fotografia mostra a configuração do experimento dentro da caixa de alumínio.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

fluoretileno, Teflon) película protetora. Eles foram colocados aos 2, 5, 9 e 14 cm a partir do lado da injeção da água ao núcleo. Os sensores têm uma gama operacional de  $-40^{\circ}\text{C}$  a  $250^{\circ}\text{C}$  e precisão de  $\pm 1^{\circ}\text{C}$ . A leitura dos sensores ópticos foi feita usando um Multisens 4-canal tipo condicionador de sinal MUS-P4 fornecido por OpsensQR.

A queda de pressão sobre o núcleo foi medida utilizando um transdutor Endress + Hauser DeltaBar com um alcance de 0 – 10 bar e um erro nominal 0,075% sobre o alcance total (7,5 mbar). Um PC e um sistema de aquisição de dados foram usadas para registrar a queda de pressão sobre o núcleo e as temperaturas. O PC foi também utilizado para controlar o ligado/desligado do gerador de MW.

## A.2 MATERIAIS

O núcleo foi inundado com água regular. Os principais minerais dissolvidos são o cálcio (49 mg/L) e cloreto (51 mg/L) ( Lenntech Tratamento de Água Solutions QR). Não se espera que os minerais na água influenciem os resultados experimentais, a água regular foi, portanto, escolhida pela sua disponibilidade e baixo custo. O óleo usado nos experimentos foi o óleo de engrenagem Omala 150 da Shell. Este óleo foi escolhido pela resposta da sua viscosidade às mudanças de temperatura no intervalo ( $20 - 80^{\circ}\text{C}$ ), ver [10] para mais detalhes.

## A.3 MEIO POROSO

O núcleo e o porta-núcleo de arenito Bentheimer com um diâmetro de  $3,8 \pm 0,1\text{ cm}$  e comprimento de  $17,0 \pm 0,1\text{ cm}$ , porosidade  $\phi = 21 \pm 1$  (volume poroso  $40,5 \pm 0,1\text{ cm}^3$ ) e permeabilidade de cerca de  $k = 2D$ , foram utilizados para conduzir os experimentos. Eles foram extraídos a partir de um grande bloco de cerca de 40 cm de lado. Eles foram

cortados com o comprimento desejado, com uma serra de diamante arrefecida com água. Posteriormente os núcleos foram secados com uma estufa a  $60^{\circ}\text{C}$ . Logo, o núcleo arenito foi revestido com uma mistura de epoxi (Huntsman CW2215) e um endurecedor (Huntsman REN HY5160) para evitar o fluxo ao longo dos seus lados. As imagens mediante tomografia computadorizada (TC) mostraram que a cola penetra  $1 - 2\text{ mm}$  na amostra, consulte [20]. Isto reduz a área da seção transversal disponível para o escoamento e deve ser tida em conta quando se utiliza a equação de Darcy para calcular a permeabilidade absoluta. Em seguida, os núcleos foram arredondados em um torno transformando a precisão  $4,8 \pm 0,1\text{ cm}$  de diâmetro externo. Os sensores de temperatura ópticos penetraram  $1,7 \pm 0,1\text{ cm}$  para o núcleo em  $2,0, 5,0, 9,0$  e  $14,0 \pm 0,1\text{ cm}$  a partir da entrada central para monitorar a distribuição das temperaturas. Os sensores ópticos são guiados através dos conectores, onde a pressão é confinada pelos o-anéis em torno dos sensores, ver Fig. 14. Os conectores são aparafusados no suporte do núcleo, comprimindo os o-anéis na ponta do conector para evitar fugas ao longo dos sensores. A pressão de ruptura exata do projeto é desconhecida, mas é estimado em  $40\text{ bar}$ , suficiente para que a pressão máxima de  $6,0\text{ bar}$  durante os experimentos conduzidos neste estudo. Conectores Swagelok de aço inoxidável foram construídos nas tampas para permitir o fluxo dentro e para fora do suporte do núcleo. O espaço anular entre o suporte do núcleo e do núcleo foi selado com o-anéis.

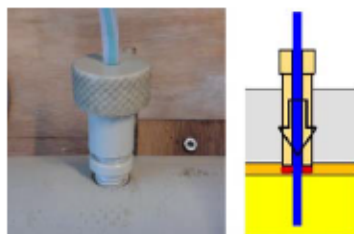


Figura 14 – A figura mostra o conector através do qual o sensor óptico entra no cilindro da rocha.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

#### A.4 AQUECIMENTO MEDIANTE MW

O gerador MW foi reciclado a partir de um forno de microondas doméstico. Tinha dentro um interruptor eletromecânico, que controlava a fonte de alimentação ao transformador. As configurações de potência padrão do gerador de microondas não têm demasiada resolução para controlar as temperaturas no interior do núcleo suficientemente. Em particular, a configuração padrão do gerador de MW conduz numa temperatura pulsante. Por conseguinte, a fim de melhorar o controle da temperatura, um segundo interruptor de retransmissão foi instalado entre o transformador e o gerador de MW. Isto permitiu-nos



controlar com mais precisão a potência de saída do forno de microondas e ter um perfil de aquecimento uniforme. Rodando o forno de microondas na potência máxima ( 900 W ), assegurando uma corrente elétrica constante do transformador, e controlar o interruptor entre o transformador e o gerador de MW que se poderia controlar melhor os ciclos de potência. A Tabela 4 mostra a saída de radiação para as várias configurações de potência.

	100 W	300 W	450 W
Radiating time	1	7	18
Non-radiating time	30	24	10

Tabela 4 – Power cycles Samsung 900W Microwave

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

Após testes iniciais, verificou-se que o gerador MW era instável e teve um tempo de arranque variável e dependente da temperatura. O ciclo de 15 s provou ser o melhor ajuste entre a estabilidade de aquecimento e um perfil de aquecimento suave (menos pulsações). Do eletromagnetismo básico sabe-se que a radiação pode se propagar através de orifícios maiores que  $1/4$  do comprimento de onda, consulte [14]. Como já foi mencionado, a antena de microondas utilizado no experimento opera a uma frequência de 2,45 GHz correspondente ao comprimento de onda de cerca de 12,2 cm. As ondas devem, portanto, ter sido capazes de sair de um intervalo maior do que 3,05 cm de diâmetro, um número que a saída cônica do guia de ondas (diâmetro mínimo de 7,0 cm) excede. Para assegurar que a caixa de alumínio satisfaz os requisitos de uma caixa de Faraday foram identificadas as possíveis fontes de vazamento da radiação EM e medidas as exigências para evitá-los. Um detector de fuga de microondas foi usado para medir a radiação que escapou ao longo da tampa e outros pontos de fugas potenciais da caixa de Faraday. O vazamento de radiação EM do guia de onda e do suporte cilíndrico (que constituem efetivamente uma caixa de Faraday em si mesmo) foi de cerca de  $0,030 \text{ W/m}^2$ . Este valor é muito inferior ao limite da segurança humana de  $1 \text{ W/m}^2$ .

## A.5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O procedimento experimental consiste nos seguintes passos. ( 1 ) O núcleo foi saturada com água, sob condições de quasi vácuo (0,1 bar) para garantir a saturação máxima. ( 2 ) O núcleo é pesado para quantificar o volume de poroso. ( 3 ) O óleo é colocado no suporte com o núcleo e inundado com óleo. Quando a queda de pressão máxima é atingida, assume-se que a saturação de água inato é atingido. ( 4 ) O núcleo é então pesado novamente, e utilizando a diferença de densidades entre a fase de óleo e fase da água a saturação do óleo é determinada. ( 5 ) O núcleo é inundada com a água a uma taxa de 1,0 ml/min no mesmo momento em que é monitorado a temperatura e a pressão.

No caso de experimentos não- isotérmicos o gerador MW é utilizado para fornecer calor durante esta fase. ( 6 ) Após o experimento, a água é evaporada a partir dos tubos de ensaio por meio de uma estufa, e as taxas de óleo são medidos.

## A.6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Oito experimentos foram realizados. Nos três primeiros experimentos, feitos sem fluxo, nós usamos a potência de  $P = 300W$ , ver Tab 4. Medimos a absorção de calor para o núcleo saturado com água  $s_w = 1$  (Experimento 1), núcleo com saturação máxima de óleo  $s_w = 1 - s_{or}$  (Experimento 2) e núcleo vazio na saturação de água conata  $s_w = s_{wr}$  (Experimento 3). O Experimento 4 mede o transporte de calor por água fria através do núcleo, que foi pré-aquecido com  $P = 300 W$ . Experimentos 5A e 5B medem o deslocamento de óleo pela injeção de água na ausência de aquecimento EM. Finalmente, nos experimentos 6 e 7 se observaram melhorias na injeção de água por radiação EM em  $P = 114 W$  e  $P = 150 W$  respectivamente.

No presente trabalho estamos interessados principalmente em perfis de temperatura usados para validar a solução semi-analítica apresentada na Seção 2.2. Para mais detalhes sobre as medidas relativas às taxas de produção e queda de pressão, ver [10].

### A.6.1 Aquecimento sem fluxo (Experiências 1-3)

Nesses experimentos o aumento do perfil da temperatura como resultado da absorção MW é representada no lado esquerdo na Fig. 15. Uma vez que a duração da experimento foi de pequena e não houve fluxo, a dependência de temperatura  $T$  no tempo  $t$  pode ser estimada pela

$$T(t) = t_0 + \frac{P}{\phi C_m} t, \quad (\text{A.1})$$

onde  $t_0$  é a temperatura inicial e  $\phi$  é a porosidade. A partir desta expressão da potência absorvida localmente  $P$  pode ser obtido como mostrado à direita na Figura 15. Note-se que o núcleo saturado com água tem maior absorção do que o mesmo com um quantidade inferior de água. Graficando os perfis da potência absorvida numa escala semi-log obtemos uma dependência estritamente linear. Isso indica que a potência absorvida é uma função de decaimento exponencial da distância da entrada principal, motivando o modelo descrito no Capítulo 2.

### A.6.2 Fluxo sem aquecimento (Experimento 4)

Um experimento com o núcleo inundação foi feito para isolar o efeito da convecção no transporte de calor ao longo da direção do fluxo. Em primeiro lugar, o núcleo foi submetido a radiação EM, que aumentou a sua temperatura. Em seguida, a potência de saída foi ajustada a zero para isolar o processo de transporte de calor. A água foi injetada

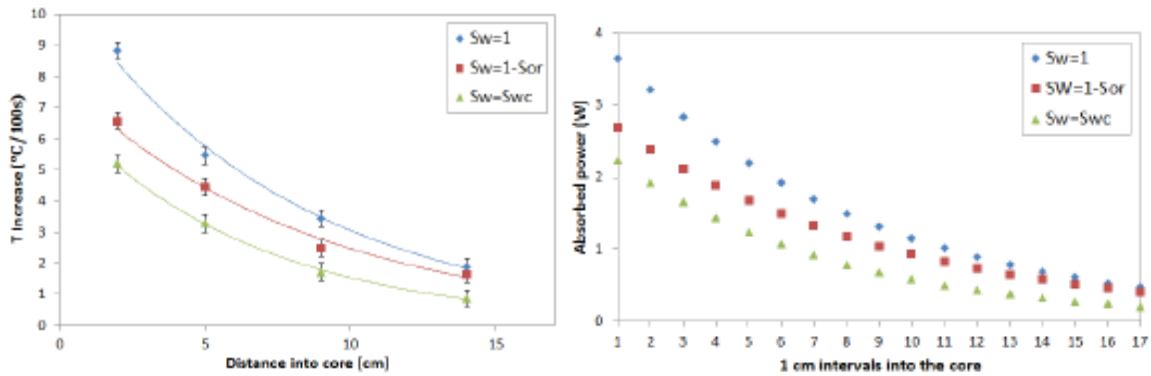


Figura 15 – À esquerda à esquerda a tendência exponencial dos perfis da temperatura obtidos depois de 100 segundos de aquecimento a 300 W. Na direita é graficado a absorção de energia. Três saturações do óleo correspondem ao experimento 1 ( $S_w = 1$ ), 2 ( $S_w = 1 - s_{or}$ ) and 3 ( $S_w = s_{wc}$ ).

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

a uma taxa de fluxo elevada ( 20 ml/min ) para garantir que a convecção seja dominante sobre a difusão. Figura 16 mostra os perfis de temperatura obtidos depois de desligar o forno de microondas ( inicial) em 0.5 intervalos PV. Os dados mostram uma onda de calor em movimento na direção do fluxo, o qual atinge a saída depois de aproximadamente 1,5 – 2,0 PV. Durante a injeção de água a temperatura na saída do núcleo aumenta de 25° C a 45° C. Se as perdas de calor são ignorados, 74% do calor gerado inicialmente foi transportado para fora do núcleo após 2,5 PV.

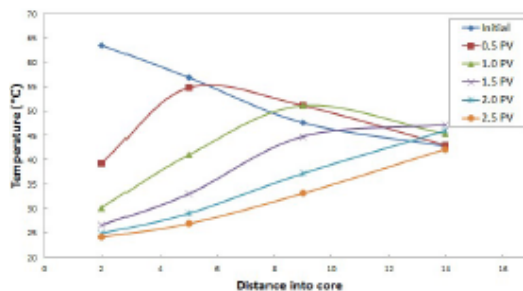


Figura 16 – Os perfis de temperatura no experimento 4 em diferentes etapas da injeção da água. O pico da temperatura se move na direção do fluxo procurando a saída em 2.0 PV.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

### A.6.3 Injeção da água sem aquecimento ( Experimentos 5A e 5B)

Dois experimentos de injeção de água foram realizados na ausência de aquecimento (microondas desligado). Os experimentos foram realizados duas vezes em exatamente as mesmas condições para verificar a sua reprodutibilidade. Figura 17 mostra as taxas de

produção da água e do óleo obtidos nos dois núcleo cheios, correspondente ao alagamento da água, sem experimentos de aquecimento 5A e 5B. Estas taxas de produção foram utilizados para calcular os fatores de recuperação. Não foi possível determinar com precisão a descoberta de água a partir dos dados de produção, porque a grande dimensão das frações de resíduo recolhido. No entanto, pode obter-los a partir de quedas de pressão, tal como explicado abaixo. Os fatores de recuperação após 6 PV são, respectivamente,  $0,38 \pm 0,01$  e  $0,41 \pm 0,01$ . Estes valores são semelhantes aos encontrados na literatura com o mesmo material do núcleo, mas com óleos menos viscosos, por exemplo ver [20].

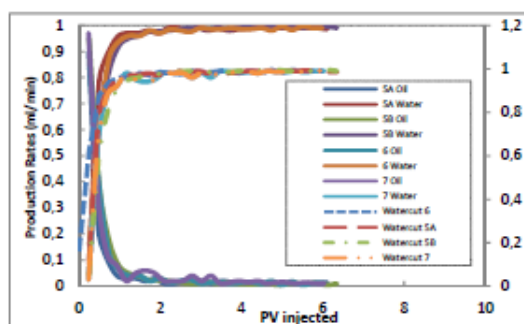


Figura 17 – As taxas do óleo e da água para os experimentos 5A, 5B, 6 e 7 juntos com o corte da água.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

A Figura 18 mostra a queda de pressão obtida durante os experimentos 5A e 5B. O valor máximo da diferença de pressão é ligeiramente inferior no experimento 5B. A razão para isto, pode ser a temperatura média ligeiramente superior no experimento duplicado ( $20,4^{\circ}\text{C} \pm 1,0$  vs  $21,0^{\circ}\text{C} \pm 1,0$ ). Devido a esta diferença na temperatura as viscosidades nos experimentos 5A e 5B podem variar de 533 cP a 405 cP, respectivamente, o que significa que a mobilidade do óleo de experimento 5B pode ser 25% superior (não tendo a alteração da permeabilidade relativa em conta). A partir da equação Darcy, podemos estimar que a queda de pressão máxima seria 25% inferior. Por conseguinte, pode concluir-se que a diferença na queda de pressão cai bem dentro desta faixa, e, portanto, não é possível determinar se a menor queda de pressão máxima foi causada por uma ligeira variação da temperatura. Os dois experimentos estão em bom acordo, o que mostra que os experimentos são reproduzíveis e o recém-desenvolvido set-up é adequado para estudar aquecimento EM na recuperação avançada em meios porosos mediante injeção da água.

#### A.6.4 Injeção da água e 114 W de aquecimento (Experimento 6)

Durante este experimento o microondas estava ligado na potência máxima, com 15 ciclos por segundo, ver Tabela 4. O interruptor foi criado para permitir a passagem de corrente durante 28% do pulso, ou 4,2 segundos. Levando isto em conta o tempo de

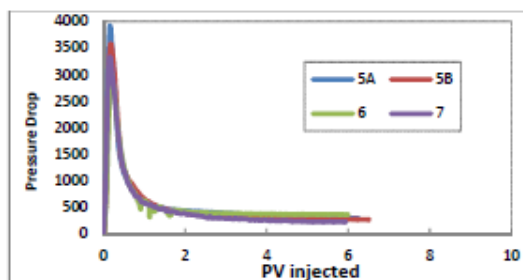


Figura 18 – Os perfis de queda de pressão dos experimentos 5A, 5B, 6 e 7.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

pré-aquecimento de 2,3 segundos, o forno de microondas emiti radiação nos restantes 1,9 segundos. Isto corresponde a 114 W de potência de saída média sobre 15 segundos por ciclo.

Do análise do aumento da temperatura inicial (as perdas de calor são no mínimo devido às baixas diferenciais de temperatura) deduz-se que, em média ao longo do comprimento total do núcleo 12 Watt é convertido em calor pela água em saturação da água conata. Na saturação do óleo residual esta é aumentada em cerca de 27 Watts. Como explicado anteriormente, existem grandes incertezas associadas a este número devido a (1) a variação do tempo de pré-aquecimento necessário, (2) a instabilidade do gerador MW e (3) os ajustes feitos para o fornecimento de energia durante os experimentos para evitar o sobre- e baixo-aquecimento.

A Figura 19 mostra as temperaturas no núcleo durante o experimento 6. A temperatura média no núcleo durante o experimento foi 33,8° C. As grandes variações nos perfis da temperatura são resultado da modulação na baixo de potência do microondas. A partir de 0 a 1 PV as temperaturas aumentam rapidamente, e depois de aproximadamente 0,8 PV houveram vazamentos, portanto, a potência de saída do microondas foi reduzido.

A Figura 20 mostra a distribuição de temperaturas no núcleo. Os perfis mostram que as temperaturas mais elevadas foram atingidas após 1 PV injetado, e que as temperaturas subiram mais rápido perto do sensor mais próximo da antena do microondas. Nas fases posteriores a temperatura na entrada é menor do que mais para dentro do núcleo devido à chegada da água fria injetada. Em geral, os perfis mostram uma tendência de esfriamento, um resultado de abaixamento da potência de saída MW para evitar vazamentos. As temperaturas ligeiramente mais elevadas registradas no terceiro sensor (9 cm) cai dentro do erro de medição dos sensores ópticos (1° C) e deve, portanto, ser ignorado.

Como pode ser visto na Fig. 17, de 0 a 1,5 PV as taxas do óleo são mais baixos do que para a injeção da água sem aquecimento (5A e 5B). No entanto, de 1,5 a 6 PV as taxas do óleo são ligeiramente mais elevadas, o que indica um fator de aumento de

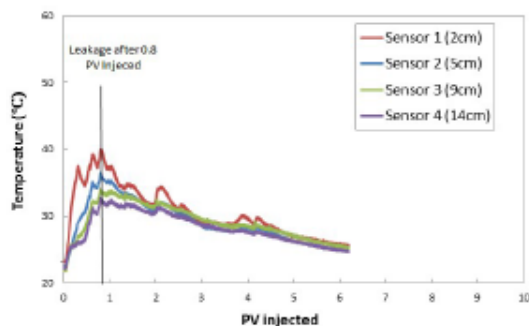


Figura 19 – As temperaturas da rocha durante o experimento 6. A potência do aquecimento foi alta na primeira parte do experimento, mas teve que ser reduzida para evitar vazamentos.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

recuperação (a duração dos experimentos é quase o mesmo). Isto é confirmado pelos fatores de recuperação representados na Figura 13, juntamente com as dos outros ensaios. O fator de recuperação para o experimento 6 após 6 PV foi  $0,44 \pm 0,02$ . Isto representa um aumento de 11%, em média, comparado com os casos de injeção da água sem aquecimento (5A e 5B). A questão que surge agora é saber se o incremento da recuperação também irá aumentar se aumentarmos a potência da radiação EM. Para responder a esta pergunta um experimento foi realizado numa potência mais elevada do MW.

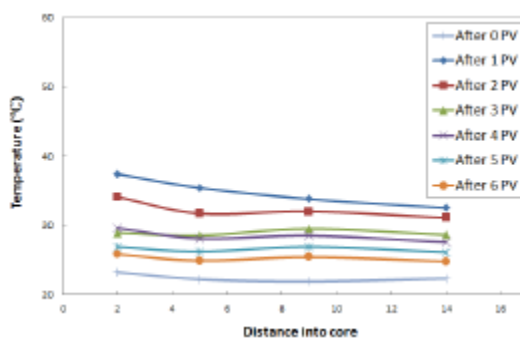


Figura 20 – Distribuições da temperatura na rocha a intervalos de 1 PV injetado . Os gráficos mostram um declínio constante como resultado da potência de aquecimento inferior.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

A queda de pressão obtida durante a injeção da água e 114 W aquecimento é mostrado na Fig. 18.. A queda de pressão máxima é ligeiramente mais baixa (menos do que 20%) do que nos experimentos sem aquecimento. Além disso, existem algumas variações em torno da principal tendência do perfil da queda de pressão. Estas variações são consequência de problemas de vazamento, explicado acima. O problema de vazamento foi resolvido durante o experimento, e o total de perdas de fluido foram menos de 1,0

mL. Portanto, o experimento ainda era considerado válido. Quando comparado com os casos isotérmicos, avanço água é em média demorado por 19%, consulte [10] para mais detalhes. Um aumento de temperatura iria diminuir a razão de mobilidade do óleo/água, levando a uma maior saturação de frente de choque e um atraso na descoberta da ruptura da água. No entanto, no momento da ruptura, as temperaturas ainda não aumentaram significativamente e o atraso da ruptura pode ser causada por heterogeneidades no núcleo arenito (meio poroso).

#### A.6.5 Injeção da água e 114 W de aquecimento (Experimento 7)

Durante o experimento, o interruptor foi criado para permitir a passagem da corrente durante 34% de os 15 segundos por ciclo, ou 4,8 segundos. Tendo em conta o tempo de arranque, espera-se que o forno de microondas produz 150 W de potência de saída para a duração do experimento. A partir do aumento da temperatura inicial deduz-se que, em média ao longo do comprimento total do núcleo 15 W é convertido em calor pela água na saturação da água conata. Na saturação do óleo residual, esta é aumentada em torno de 35 W.

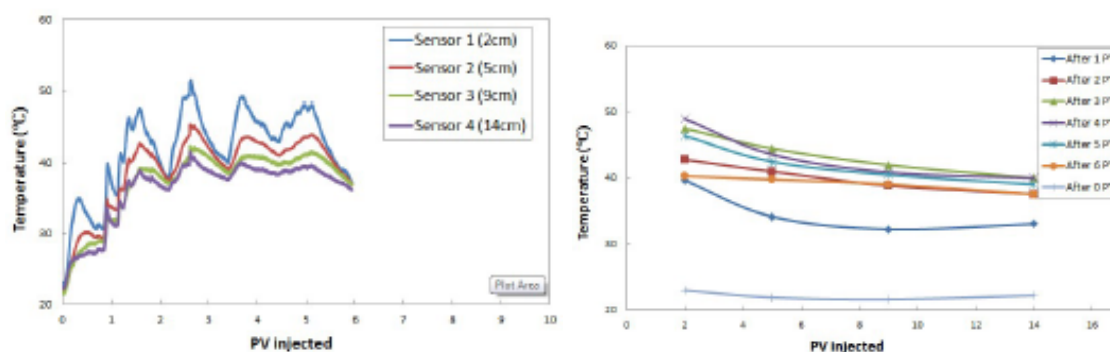


Figura 21 – As temperaturas na rocha durante o experimento 7. Do lado esquerdo em cada sensor. Do lado Direito a distribuição das temperaturas a intervalos de 1 PV injetado.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

Na parte esquerda da Figura 21. Mostra que a temperatura aumenta no geral numa tendência crescente, com razoáveis altas flutuações. As oscilações são devido a ajustes na potência do aquecimento. Na parte direita da Fig. 21. Mostra que a temperatura diminui ligeiramente a partir da entrada para a saída do núcleo como resultado de absorção de energia mais elevada na entrada. A taxa de produção do óleo nesta experiência é um pouco menor do que a de 114 W aquecimento (Exp. 6) até aproximadamente 1 PV. Após 1 PV a taxa de produção do óleo é um pouco maior, como consequência das elevadas temperaturas atingidas nas fases posteriores do experimento. O fator de recuperação após 6 PV de injeção da água foi de  $0,54 \pm 0,02$  e é mostrado na Figura 22. É 37% mais elevada

do que no caso da injeção da água sem aquecimento ( 5A e 5B ). Isto confirma que o factor de recuperação do óleo pode ser aumentada, acrescentando a potência da radiação EM.

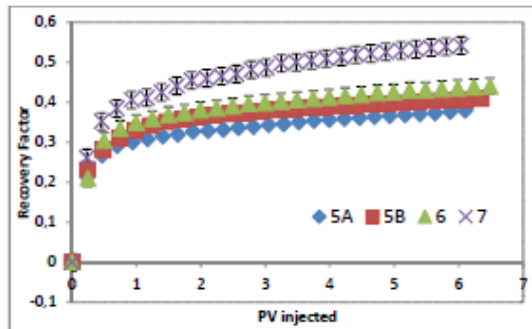


Figura 22 – Produção do óleo para os experimentos 5A, 5B, 6 e 7.

Fonte: Hollmann, T.H. et al.; [?], 2014.

A queda de pressão ao longo deste experimento foi representada na Fig. 18. Em comparação com o casos isotérmicos 5A e 5B, a ruptura da água não está significativamente demorado. A queda de pressão na ruptura é de 12% mais baixa do que os experimentos isotérmicos. Ela cai dentro da faixa do erro e, portanto, é insignificante, consulte [10] para mais detalhes.