Tese de doutorado

Anomalia multiplicativa não-local para férmions no espaço curvo com torção

Alan Espinosa Maicá

2016

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

À memória de

Maria Angélica Espinosa da Silva, minha mãe
e Ronaldo Espinosa da Silva, meu irmão.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos

• a minha esposa, Suzana Teixeira Nunes Espinosa Maicá, pelo companheirismo, apoio e dedicação;

• aos meus irmãos, Clodoaldo, Claudete, Reinaldo, Rodolfo, Janete e Jane, pelo apoio e incentivo;

• ao Prof. Guilherme de Berredo Peixoto, pela orientação, esclarecimentos técnicos e científicos, pela análise de resultados e pela ajuda na preparação do texto da tese;

• ao Prof. Ilya L. Shapiro, pelos cursos, pelos esclarecimentos e por sugerir o tema de estudos da tese;

• aos colegas da Pós-Graduação, em especial ao Lucas Tavares Cardoso e aos do Grupo de Teoria de Campos da UFJF, pelas discussões, apoio e amizade;

• ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, pela estrutura e suporte;

• às agências brasileiras de apoio à pesquisa CAPES e FAPEMIG pelo suporte financeiro;

Resumo

Nesta tese investigamos o aparecimento da *anomalia multiplicativa não-local* no contexto das correções quânticas a 1-loop para a ação fermiônica no espaço-tempo curvo com torção. A anomalia multiplicativa não-local foi primeiro observada para o campo vetorial e, mais recentemente, para o campo escalar. Portanto, uma sequência natural é estender os estudos para outras teorias, a fim de obter maior compreensão da sua natureza e para constatar a sua presença, ou não, nestas teorias. Sendo assim, vamos obter o funcional ação efetiva e analisar as arbitrariedades intrínsecas ao compor um operador de segunda ordem. A partir das diferentes possibilidades de obtenção deste operador, vamos calcular a contribuição não-local da ação efetiva a 1-loop associada a cada uma dessas possibilidades a fim de verificar a presença de possíveis discrepâncias entre os resultados, que levam ao aparecimento da anomalia multiplicativa não-local. Algumas generalizações contribuirão para obtenção e análise dos resultados. Também, alguns critérios para eliminar eventuais inconsistências nos resultados serão investigados, a fim de garantir a consistência da teoria.

Abstract

This thesis investigated the appearance of nonlocal multiplicative anomaly in the context of one-loop quantum corrections for the fermionic action in curved space-time with torsion. The non-local multiplicative anomaly was first observed for the vector field and, more recently, for the scalar field. Therefore, a natural sequence is to extend the studies to other theories, in order to gain greater understanding of their nature and to establish the presence or not in these theories. Then we shall obtain the effective action functional and analyze the inherent arbitrariness when composing an operator of second order. From the different possibilities of obtaining this operator, we calculate the nonlocal contribution of the 1-loop effective action associated with each of these possibilities in order to verify the presence of possible discrepancies between the results, which lead to the appearance of the nonlocal multiplicative anomaly. Some generalizations will contribute to obtaining and analyzing the results. Also, some criteria to eliminate any inconsistencies in the results will be investigated in order to ensure the consistency of theory.

Sumário

1. Introdução

Um dos problemas centrais da física teórica nos dias de hoje, e que persiste a quase um século, consiste em como conciliar a teoria da relatividade geral com a mecânica quântica, ou seja, como formular uma teoria quântica de campos para a interação gravitacional, seguindo os modelos bem sucedidos da física das partículas elementares como, por exemplo, a eletrodinâmica quântica. A eletrodinâmica quântica concilia a teoria da relatividade especial com a mecânica quântica e em concordância inigualável com a fenomenologia. Esta conciliação tornou possível a descrição completa da interação eletromagnética, à medida que representa a contraparte quântica do eletromagnetismo clássico, fornecendo, com isso, a total descrição, dentro de seus limites de aplicabilidade, da interação entre matéria e luz.

Das formas de interação da natureza, aquela que temos consciência mais imediata é a interação gravitacional; paradoxalmente, esta é a forma menos compreendida das interações, no nível quântico. A relatividade geral e a mecânica quântica, embora duas das mais surpreendentes teorias da natureza, desenvolvidas no início do século XX, de fato nunca encaixaram-se numa descrição completa de modo a tornar possível a construção de uma teoria quântica de campos para a interação gravitacional. No entanto, conciliar estas duas teorias não consiste apenas em encontrar uma maneira de acomodá-las numa mesma estrutura matemática que preserve simetrias e princípios físicos os quais elas representam individualmente, mas também de permitir acesso a um universo de fenômenos mediados pela interação gravitacional em um cenário inédito, o cenário do universo quântico. Muitos modelos para uma teoria quântica de campos da gravitação já foram propostos, porém, consistem apenas em hipóteses. Quais seriam as grandezas físicas associadas à interação gravitacional que poderiam ser complementadas por uma teoria quântica de campos da gravitação? Ou quais resultados, inéditos, uma teoria quântica de campos da gravitação poderia nos fornecer? Embora muito tenha sido especulado pelos pesquisadores, em quase um século, nada de concreto ainda foi revelado. Não há outra questão na área da Física (ou até mesmo das ciências) tão instigante e, ainda, tão incompreendida.

Em busca de uma teoria quântica de campos para a gravitação, mecanismos bem sucedidos na formulação de outras teorias quânticas de campos, como os utilizados na formulação da eletrodinâmica quântica, naturalmente, são experimentados. Assim, um procedimento utilizado para conciliar mecânica quântica e relatividade especial, é a chamada quantização. Existem diferentes métodos de quantização, o primeiro foi a quantização canônica, inicialmente utilizado para conciliar relatividade especial e mecânica quântica [1, 2]. Esta abordagem baseia-se em operadores e na formulação hamiltoniana da teoria. Uma alternativa à quantização canônica é a quantização por integrais de caminho de Feynman [3]. A vantagem desta última consiste, principalmente, no fato de estar baseada na formulação lagrangiana e, portanto, de preservar explicitamente todas as simetrias da teoria. O advento da quantização por meio de integrais de caminho, o método funcional, permitiu acesso às correções quânticas da teoria através de uma quantidade que chamamos de ação efetiva. No entanto, a ação efetiva pode ser um funcional muito complicado de campos de fundo e, por isso, pode ser impossível obtê-la explicitamente para o caso geral com um campo de fundo arbitrário. Logo, é necessário elaborar esquemas de aproximação para calcular a ação efetiva. A principal característica que as técnicas utilizadas para calcular a ação efetiva devem apresentar, no caso de teorias de calibre, como a gravitação, é a covariância manifesta. Daí a importância de empregar um método de cálculo que preserve explicitamente as simetrias. Como observado por Schwinger, "a extração de resultados invariantes de gauge de uma teoria formalmente invariante de gauge é assegurada se empregamos métodos de solução que envolvem apenas quantidades invariantes" [4]. Em [4] já está implícito o método do campo de fundo desenvolvido, posteriormente, por DeWitt [5] a fim de manter a covariância de gauge de forma explícita. Neste contexto, o conteúdo do campo é dividido em duas partes: o campo de fundo é o campo clássico e a flutuação quântica é o campo livre. As funções de Green são obtidas diferenciando o funcional da ação efetiva com relação ao campo de fundo. No método do campo de fundo, além de podermos considerar o campo quântico com auto interação, também é possível considerar a interação do campo quântico com um campo externo, ou seja, um campo de fundo. Referências padrões para um estudo mais completo e aprofundado de teorias de campos no espaço-tempo curvo, incluíndo o método do campo de fundo, são [6–8].

Nesta tese estamos interessados na interação do férmion (campo quântico) com o campo gravitacional com torção (campo externo)[1]. Assim, estaremos estudando a propagação de partículas associadas ao campo fermiônico no espaço-tempo curvo com torção. O campo externo, como dito, não é quantizado, mas é utilizado como fonte, a qual, após gerar as funções de Green, é tomada como nula. O uso da expansão em loops no método do campo de fundo leva, naturalmente, ao inverso do determinante do operador da flutuação[2]. Se $\hat{\mathscr{O}}$ é o operador da flutuação, então, $\hat{\mathscr{O}}$ determina as flutuações quadráticas dos campos quânticos na presença do campo de fundo. O inverso do operador de flutuação implica na função de Green, o propagador do campo. Para aplicarmos a expansão em loops podemos adotar a representação do tempo próprio de Schwinger [4] para o propagador, em termos do seu heat kernel [10, 11]. No entanto, não basta adotar a representação do tempo próprio de Schwinger pois esta, da maneira como proposta por Schwinger [4], restringe-se ao espaço plano e, como estamos interessado no espaço curvo, é necessário uma generalização deste método. Esta generalização foi desenvolvida por DeWitt [5, 12] de modo a torná-lo aplicável, também, ao espaço-tempo curvo, com isso, o método foi denominado de método do tempo próprio de Schwinger-DeWitt (SDW)[3].

No contexto do método do campo de fundo, o determinante funcional do operador de campo é definido pela integração de sua variação, $\delta \ln\det\hat{\mathscr{O}} = Tr\left(\hat{\mathscr{O}}^{-1}\delta\hat{\mathscr{O}}\right)$, em que, $\hat{\mathscr{O}}^{-1}$, o inverso do operador de campo, representa o propagador do campo. As correções quânticas originam-se da expansão do $\det\hat{\mathscr{O}}$ ou, analogamente, da expansão do $\ln\hat{\mathscr{O}}$ por meio da igualdade $\ln\det\hat{\mathscr{O}} = tr\ln\hat{\mathscr{O}}$. Assim, ao aplicar a representação do tempo próprio, ao propagador, estamos escrevendo a expansão do $\ln\hat{\mathscr{O}}$ em termos de integrais sobre o parâmetro "s" do tempo próprio. Dessa forma, obtemos as divergências da teoria, a nível 1-loop. Estas integrais divergentes são regularizadas, de modo a separar a parte finita da divergente e, com isso, obter a correção quântica aos parâmetros físicos. A parte divergente, remanescente, é

[1] Uma ótima referência para o estudo de aspectos clássicos e quânticos do espaço-tempo curvo com torção é [9].
[2] Flutuações quânticas representam as correções quânticas a uma teoria clássica.
[3] O método do tempo próprio de Schwinger-DeWitt cosiste numa forma de representar a ação efetiva por meio de uma série, por isso, faremos referência ao método por meio da expressão "expansão SDW".

eliminada com o processo de renormalização. A grande vantagem da representação do tempo próprio é que o parâmetro "s" é independente das eventuais transformações de simetria dos campos de fundo. A teoria, portanto, é regularizada de forma manifestamente invariante deixando a integração sobre o parâmetro do tempo próprio para a última etapa. Entretanto, a expansão SDW não pode ser aplicado diretamente para teorias com campo fermiônico, pois o operador de campo para férmions é um operador de Dirac, isto é, um operador hiperbólico de primeira ordem, logo, é necessário reescrever o operador de Dirac de modo a formar um operador elíptico[4] de segunda ordem, positivo definido. Basicamente é necessário implementar uma rotação de Wick, com uma assinatura de métrica do tipo $(++++)$, para levar o operador de Dirac do espaço pseudo-riemmaniano para um espaço riemmaniano, isto implica em torná-lo um operador elíptico e, depois de compor com o auxílio de um segundo operador, um operador de segunda ordem. Assim, teremos um determinante funcional com a estrutura necessária para aplicar a expansão SDW para obter a ação efetiva da teoria de forma explícita.

Em teorias quânticas de campos é comum a presença de divergências ultravioletas e a manipulação destas é necessária para poder estudar a teoria. Na expansão SDW as divergências ultravioletas aparecem como integrais do tempo próprio "s" e correspondem ao limite inferior. As divergências ultravioletas são naturalmente removidas pelo procedimento de renormalização [12, 13]. Para teorias de campo massivas, há um fator de massa, e^{-sm^2}, no traço do heat kernel, o qual torna a integral convergente no limite superior $s \to \infty$, restringindo as divergências apenas ao limite ultravioleta, $s \to 0$. Portanto, a expansão de Schwinger-DeWitt pode reproduzir o comportamento assintótico do traço do heat kernel apenas para $s \to 0$, como resultado, estas integrais do tempo próprio, para teorias de campo sem massa, divergem no limite superior. Estas divergências, aparentemente de natureza infravermelha, são geradas por uma limitação do método e, portanto, não possuem significado físico, logo, não representam o limite infravermelho da teoria, por isso, são irrelevantes para o estudo da teoria quântica de campos e, é necessário que este tipo de implicação do método seja evitado para garantir que a teoria esteja revelando apenas resultados consistentes e, de fato, associados com algum fenômeno da natureza, sem gerar qualquer resultado associado a quantidades espúrias. Isto é claramente visível a partir do fato de que, mediante a integração do tempo próprio "s", a expansão do heat kernel para tempos pequenos corresponde ao inverso da expansão de massa grande da ação efetiva, ou das funções de Green[5]. Portanto, é necessário um método que permita calcular o traço do heat kernel para todas as ordens e valores do tempo próprio. Tal método, proposto por G. A. Vilkovisky [15] e chamado de teoria perturbativa covariante[6], foi sistematicamente desenvolvido numa série de trabalhos [16–19]. A expansão covariante trata-se de uma expansão do traço do heat kernel em potências de curvaturas e contém um número infinito de derivadas, expressas como *fatores de forma*, atuando sobre curvaturas de campos de fundo. Portanto, trata-se de uma expressão *não-local*, e os fatores de forma do heat kernel tornam-se funções de Green atuando sobre as curvaturas. E é justamente neste caráter não-local dos fatores de forma que estamos interessados. Os fatores de forma produzem, após a regularização das divergências, uma parte divergente regularizada e uma parte

[4]Um operador elíptico por si só não representa um operador positivo definido, esta característica está associada à escolha da assinatura da métrica. Veremos esta questão no capítulo que segue. O caráter elíptico do operador garante apenas que este possui um espectro positivo (ou negativo) definido, necessário para associá-lo à expansão do heat kernel.

[5]Veja em [12] os comentários na página 155 e em [14] a seção intitulada "*6.18. The infrared problem*", página 353, na qual é dedicada a discução desta limitação do método.

[6]Para simplificar chamaremos a teoria perturbativa covariante apenas de "*expansão covariante*".

finita não-local, ou seja, o caráter não-local dos fatores de forma recai sobre a parte finita da ação efetiva regularizada. Como dito acima, a parte divergente regularizada deve ser eliminada com o processo de renormalização da teoria [12, 13], enquanto que, a parte finita representará a correção quântica da teoria, portanto, a parte finita desempenha papel fundamental nos estudos de um teoria quântica de campos.

Observamos que para obter as correções, várias etapas são necessárias e em cada etapa uma técnica de cálculo diferente é aplicada até que se possa acessar estas correções. Portanto, o papel das técnicas de cálculo é de fundamental importância para o sucesso de qualquer teoria, já que estas podem influenciar diretamente nos resultados e, se houver alguma inconsistência ou interpretação equivocada devido à aplicação dessas técnicas, a teoria pode ser comprometida. Por isso, a consistência das técnicas de cálculo e a sua correta interpretação em cada etapa são fundamentais e, é com o objetivo de verificar esta consistência, no contexto da expansão covariante, que propomos este estudo, tendo em vista, recentes trabalhos que revelaram uma nova fonte de ambiguidade associada à ação efetiva fermiônica no espaço curvo. Tal ambiguidade foi denominada de *anomalia multiplicativa não-local*[7]. Num primeiro momento, a ANL foi observada para o operador de campo do férmion modificado pela presença do campo vetorial no espaço curvo [20, 21], em seguida para o caso do campo escalar [22] e, mais recentemente, para o campo de torção [23]. Nestes trabalhos, a parte finita não-local, oriunda dos fatores de forma, mostrou-se dependente da forma como compõe-se o operador de segunda ordem para o férmion a partir do operador de campo do funcional ação. Essa dependência provoca uma violação da identidade multiplicativa do determinante, no caso, o determinante funcional. Isto é, dado o operador fermiônico de primeira ordem $\hat{\mathscr{H}}$, ao ser composto com um operador auxiliar $\hat{\mathscr{H}}^*$, com o intuito de formar um operador de segunda ordem, temos diferentes escolhas possíveis, porém equivalentes do ponto de vista da invariância do funcional ação frente estas escolhas, para o operador auxiliar $\hat{\mathscr{H}}^*$ e, conforme constatado [20–22], estas diferentes escolhas geram diferentes partes finitas, não-locais, o que torna a teoria ambígua e como consequência acaba por comprometer a identidade multiplicativa do determinante, pois, a parte finita não-local oriunda de $det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}^*$, depende da escolha do operador auxiliar $\hat{\mathscr{H}}^*$, assim, por mais que as possíveis escolhas de $\hat{\mathscr{H}}^*$ estejam relacionadas entre si, a parte finita não-local não preserva a relação $det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}^* = det\hat{\mathscr{H}} \cdot det\hat{\mathscr{H}}^*$. Logo, essa discrepância revela uma nova propriedade da expansão covariante, de extrema importância para a consistência da teoria, por isso, estamos interessados em verificar se tal propriedade também é observada no contexto do espaço curvo com torção e, em caso positivo, se há alguma preferência entre estas possíveis escolhas do operador auxiliar, ou seja, se há uma única escolha que garanta a consistência da teoria ou, se de fato, as diferentes escolhas preservam as simetrias da teoria e, neste caso, a ambiguidade é inevitável.

Anomalia, em teoria quântica de campos, tipicamente surge do fato de que alguma simetria no nível clássico, que reflete na invariância da ação clássica sob algum grupo de simetria, não é preservada no nível quântico, assim, diz-se que a simetria foi quebrada, porém, a expressão “anomalia multiplicativa”, que surge no contexto da teoria matemática [24], não está, ao menos de forma direta, relacionada com a quebra de simetria da teoria física. Na literatura especializada, a expressão surge primeiro em [25, 26], para designar a violação da propriedade multiplicativa do determinante funcional, associada à utilização da regularização zeta [27, 28]. Foi mostrado em [29] que todos determinantes multiplicativos[8], de ope-

[7] Por simplicidade chamaremos apenas de anomalia não-local (ANL).

[8] Determinantes multiplicativos são aqueles que satisfazem a propriedade multiplicativa do determinante.

radores elípticos, podem ser construídos de dois tipos básicos de determinantes, porém eles não incluem o zeta-determinante[9]. Além disso, a anomalia multiplicativa nesse contexto, que é um tipo local de anomalia, pode ser identificada como o resíduo de Wodzicki [24], ou seja, ela pode ser pensada como uma "medida" da falta da propriedade comutativa do determinante, envolvendo o produto de dois operadores diferenciais regularizados por meio da função zeta. Portanto, a expressão "anomalia multiplicativa" generaliza as possíveis violações da identidade multiplicativa do determinante, assim, a ANL refere-se a uma dessas possibilidades, porém, diferente daquela associada à regularização zeta.

Além da preocupação em identificar possíveis ambiguidades associadas ao determinante funcional, e de estabelecer a sua relação com técnicas de cálculo ou com a própria teoria, existe, também, a possibilidade de verificar a validade, ou não, da propriedade multiplicativa do determinante para matrizes de dimensão infinita, no caso, os operadores de campo. Esta questão, como vimos acima, instiga tanto a físicos como a matemáticos e, ainda, carece de uma demonstração formal de que a propriedade é válida para matrizes de dimensão infinita, ou de contra-exemplos que comprovem o contrário. Dessa forma, a ANL tem se mostrado como uma possibilidade de um contra-exemplo. Já a anomalia multiplicativa (local) associada à regularização zeta, levanta suspeitas por parte de alguns autores [30,31], quanto à sua consistência, à medida que esta pode ser removida por uma escolha adequada do (ambíguo) parâmetro de escala da renormalização, explicitando com isso, uma vulnerabilidade da regularização zeta.

Com o objetivo de analisar a presença, ou não, da ANL no espaço curvo com torção e suas consequências para teoria, organizamos nossos estudos da seguinte forma: no capítulo 2 teremos parte da formulação do problema; para tanto, faremos uma breve revisão do método do campo de fundo, da expansão em loops da ação efetiva e a definição do determinante funcional. Também neste capítulo, comentamos alguns aspectos da expansão SDW, importantes para introduzir a expansão covariante, ferramenta principal de nossos estudos. Assim, de posse desse conjunto de ferramentas, teremos acesso às quantidades, nas quais, aparecerá o problema, objeto de nossas investigações.

Já no capítulo 3, aplicaremos o algoritmo obtido com a revisão das técnicas do capítulo 2 e obteremos a parte finita não-local, para as diferentes escolhas possíveis e analisamos os resultados comparando a expressão não-local termo-a-termo para as diferentes escolhas.

Por fim, no capítulo 4, o capítulo referente à conclusão, discutiremos os resultados e as perspectivas futuras do trabalho.

[9]Zeta-determinante é o determinante de algum operador outo-adjunto reescrito em termos da função zeta.

2. Ação efetiva a 1-loop

2.1. Introdução

Este capítulo refere-se exclusivamente a um capítulo de revisão, sendo porém, essencial para definirmos determinadas estruturas, como o determinante funcional, sobre as quais se manifestarão os efeitos da discrepância entre partes finitas não-locais associadas às arbitrariedades intrínsecas a estas estruturas. Também, apresentaremos os métodos que empregaremos para obtenção das correções quânticas a 1-loop; mais especificamente para obtenção da parte finita não-local, objeto de nossos estudos. Portanto, no intuito de obtermos as correções quânticas, vamos primeiro revisar a ideia do método do campo de fundo [5] e as suas características e vantagens em utilizá-lo. Em seguida, partimos para obtenção do funcional da ação efetiva no contexto do campo de fundo, assim, teremos acesso às correções quânticas propriamente ditas. Como as correções quânticas são representadas por integrais, em geral, divergentes, necessitamos de técnicas capazes de manipular estas divergências de forma consistente, a preservar as simetrias da teoria, assim sendo, passamos à revisão dos métodos de cálculo da ação efetiva. Logo, discutiremos alguns aspectos da expansão SDW [12] e a expansão perturbativa covariante [13, 16–19], a principal ferramenta de nossos estudos. É com o auxílio da expansão covariante que teremos acesso à parte finita não-local, oriunda das integrais divergentes que representam as correções quânticas a 1-loop.

Embora a expansão SDW não seja capaz de fornecer uma parte finita não-local, objeto central de nossas investigações, será importante comentar alguns aspectos dessa técnica pois a expansão covariante compreende uma evolução deste método à medida que supera algumas de suas restrições, como a não analiticidade do traço do heat kernel para o limite superior da integral do tempo próprio ($s \to \infty$).

2.2. A ação efetiva

A ação efetiva é largamente usada em teorias quânticas de campos como um método de cálculo poderoso. Uma extensiva revisão do formalismo e de aplicações da ação efetiva estão fora do escopo desta tese. Empregaremos a ação efetiva apenas como uma ferramenta para descrever a interação de um sistema quântico com o campo externo clássico, o campo de fundo. Para aprofundar-se neste assunto, veja [6].

2.2.1. Considerações gerais sobre o método do campo de fundo

O método do campo de fundo é uma forma muito conveniente de calcular a ação efetiva pois possui a vantagem de ser covariante de gauge, ou seja, para todas as funções de Green off-shell e contratermos de renormalização, a simetria de gauge deve ser explicitamente preservada [5]. Outra vantagem do campo de fundo, também chamado de campo externo, é o fato de ser adequadamente descrito por uma teoria clássica e, por isso, não necessita ser quantizado. O método consiste, basicamente, em implementar um shift no campo, $Q \to Q+\eta$, em que Q representa um campo clássico e η um campo quântico livre. Com isso, o conteúdo do campo é dividido em duas partes: o campo de fundo é o campo clássico e a flutuação quântica é o campo livre. As funções de Green são obtidas diferenciando o funcional da ação efetiva com relação ao campo de fundo. No método do campo de fundo, além de podermos considerar o campo quântico com auto interação, também é possível considerar a interação do campo quântico com um campo externo, ou seja, um campo de fundo. O campo externo não é quantizado, mas é utilizado como fonte, a qual, após gerar as funções de Green, é tomada como nula. Como, para nossos propósitos o campo de fundo será representado pela torção, no que se segue, faremos uma breve contextualização da torção como o "background" do campo fermiônico livre[1].

A ação fermiônica no campo gravitacional externo com torção

Vamos fazer uma revisão muito sucinta da notação básica para a gravitação com torção objetivando um acoplamento não-mínimo do férmion com a torção. Podemos encontrar uma explanação mais detalhada sobre o assunto em [6], trabalho do qual utilizamos a notação que segue.

A métrica $g_{\mu\nu}$ e a torção $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$ devem ser consideradas estruturas independentes do espaço-tempo já que estamos interessados apenas nos efeitos da torção. Em uma teoria com torção a derivada covariante $\tilde{\nabla}$ é definida com a conexão não simétrica $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, por

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}-\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} \;=\; T^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{2.1}$$

A condição de metricidade $\tilde{\nabla}_{\mu} g_{\alpha\beta}=0$ nos habilita expressar a conecção através da métrica e da torção de forma única,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} \;=\; \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + \frac{1}{2}\left(T^{\alpha}_{\beta\gamma} - T^{\alpha}_{\beta\cdot\gamma} - T^{\alpha}_{\gamma\cdot\beta}\right), \tag{2.2}$$

na qual $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ é o símbolo de Christoffel. O termo entre parenteses na última expressão não pode ser eliminado com uma simples mudança de coordenadas, por isso, é conveniente separar o campo de torção em três componentes irredutíveis: o traço $T_{\beta}=T^{\alpha}_{\beta\alpha}$, o pseudo-traço $S^{\nu}=\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}T_{\alpha\beta\mu}$ e o tensor $q^{\alpha}_{\beta\gamma}$, o qual satisfaz as condições $q^{\alpha}_{\beta\alpha}=0$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}q_{\alpha\beta\mu}=0$. Na ação, a qual depende da torção, apenas o pseudo-vetor S_{μ} está presente e, portanto, podemos sempre escrever $\frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}S^{\nu}=T_{\alpha\beta\mu}$.

A ação para o campo espinorial, de Dirac, no campo gravitacional externo com torção segue do procedimento mínimo (veja [6]) trocando a derivada parcial ∂_{μ} pela derivada covariante $\tilde{\nabla}_{\mu}$; a métrica plana $\eta^{\mu\nu}$ pela geral $g^{\mu\nu}$; e a medida de integração d^4x por $\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$. Assim, introduzimos a ação clássica para o campo de fundo na presença do campo quantizado, descrita por S_{ψ}, no espaço curvo com

[1] O campo de fundo é o campo clássico, campo externo, a fonte. O campo livre é o campo quântico, representa as flutuações quânticas.

torção, através da seguinte equação[2]

$$S\left[g_{\mu\nu}, S_\mu, \bar{\psi}, \psi\right] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \left(\nabla_\mu - i\eta S_\mu \gamma^5 \right) + m \right] \psi \right\}, \tag{2.3}$$

na qual, g é o determinante da métrica, S_μ é o campo de fundo, ψ o campo livre do férmion, m a massa do férmion e ∇_μ a derivada covariante. O campo do férmion é um campo livre, embora esteja acoplado com o campo de fundo, por meio de um acoplamento não-mínimo, $\nabla_\mu \to \nabla_\mu - i\eta S_\mu \gamma^5$[3]. Problemas típicos, que podem ser abordados com este modelo são:

- o cálculo do valor esperado da transição entre estados do campo quântico no campo de fundo. A transição entre os estados quânticos pode descrever, por exemplo, o processo de criação de partículas pelo campo clássico;
- determinação do shift dos níveis de energia de um estado quântico produzidos pela presença do campo de fundo. O shift de energia não pode ser ignorado pois a energia de ponto zero do oscilador quântico já está subtraída, portanto, é provável que o shift de energia adicional possa contribuir para a gravitação via equação de Einstein;
- o cálculo da back-reaction de uma teoria de campos sobre um fundo clássico. A presença do campo quântico tende a provocar alterações no espaço curvo de modo que o campo gravitacional induz correções para o tensor energia-momento do campo de matéria. As correções são da ordem do quadrado do escalar de curvatura de Riemann, e contribuem para a equação de Einstein.

A ação no método do campo de fundo representa uma ação constituída por uma mistura de campos de diferentes naturezas, ou seja, o campo de fundo S_μ é um campo clássico, porém, o campo livre ψ é um campo de natureza quântica. Embora possa parecer errado referir-se à ação (2.3) como uma ação clássica, devido à presença do campo quântico ψ, veremos, ao obter a ação efetiva, que apenas as variações com relação ao campo de fundo, S_μ, influenciam para obtenção das correções quânticas. No entanto, o método do campo de fundo não deixa de ser bastante peculiar pois, como comentado anteriormente, podemos abordar problemas em que o campo quântico modifica o campo de fundo (back-reaction) bem como, problemas nos quais a presença do campo de fundo modifica as propriedades do estado de vácuo do campo quântico (criação de partículas). O campo de fundo é, por si só, um campo dinâmico descrito pela ação clássica, veja [9], no entanto, a ação clássica inclui a interação do campo quântico com o campo de fundo, por meio do acoplamento não-mínimo, neste caso, mediado pelo campo de torção. Veremos, na próxima seção, que a ação efetiva é um funcional de S_μ, mas não de ψ.

2.2.2. Definição da ação efetiva a 1-loop

Como dito acima, as correções quânticas a 1-loop são obtidas por meio do funcional da ação efetiva, no entanto, para obter a ação efetiva há um desenvolvimento sistemático o qual foge do escopo desta tese e,

[2] Estamos considerando um espaço riemanniano, no qual, quantidades como a métrica, a medida de integração, o operador de campo, etc, são submetidos a uma rotação de Wick.
[3] O acoplamento é mínimo para $\eta = \frac{1}{8}$.

por isso, para detalhes deste procedimento e um aprofundamento da técnica, indicamos a referência [6], na qual, a ação efetiva é construída de forma sistemática com todos os detalhes e rigor necessários. Por uma questão didática vamos considerar campos genéricos, ou seja, não importa a sua representação (vetor, escalar, espinor, etc), mas sim a sua natureza, clássica ou quântica, e nos restringimos a um espaço euclidiano plano para evitar que particularidades do espaço curvo, bem mais complexo, venham a distrair a atenção na busca de compreender o significado da ação efetiva para a teoria de campos. Buscamos, dessa forma, sermos objetivos, tanto quanto necessário, para apresentar com clareza os elementos fundamentais para nossos estudos. Portanto, partimos do funcional gerador das funções de Green[4]

$$e^{-W[J]} = \int \mathscr{D}\varphi\, e^{-\left\{S[\varphi]+\int \mathrm{d}^4x\, \varphi(x)J(x)\right\}}, \tag{2.4}$$

na qual $J(x)$ é a fonte e $\varphi(x)$ representa um campo qualquer, sem especificar a sua representação. Agora aplicamos uma transformada de Legendre sobre o funcional gerador $W[J]$, de modo que

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int \mathrm{d}^4x\, \varphi(x)\, J(x)\,. \tag{2.5}$$

O intuito de aplicar esta transformação é obter um funcional do campo e não mais da fonte, além disso, observamos que a própria fonte $J(x)$ passa a ser, também, um funcional do campo, $J(x) \equiv J(x|\,\varphi)$. O novo funcional, $\Gamma[\varphi]$, obedece à seguinte relação

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x)\,, \tag{2.6}$$

que é análoga à equação de movimento clássica

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x)\,, \tag{2.7}$$

portanto, $\Gamma[\varphi]$ desempenha, para teoria quântica, o mesmo papel que $S[\varphi]$ para teoria clássica. Por isso, o funcional $\Gamma[\varphi]$ é chamado de *ação efetiva*. Agora, retornamos à equação (2.4) substituindo a transformada de Legendre (2.5), assim,

$$e^{-\left\{\Gamma[\phi]+\int \mathrm{d}^4x\, \phi(x)J(x)\right\}} = \int \mathscr{D}\varphi\, e^{-\left\{S[\varphi]+\int \mathrm{d}^4x\, \varphi(x)J(x)\right\}}, \tag{2.8}$$

na qual, trocamos, do lado esquerdo da equação, o campo φ pelo campo de fundo ϕ, portanto, $J(x)$ passa a ser um funcional do campo de fundo, $J(x) = -\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x)$. Essa troca é permitida se houver alguma relação entre os campos φ e ϕ de modo que do lado direito da equação (2.8) haja uma compensação, portanto, apliquemos a troca de variáveis $\varphi \to \varphi + \phi$, e expandimos o funcional $S[\varphi+\phi]$ em série de

[4] Veja a seção "2.4 The loop expansion", página 53, da referência [6]. No entanto, a referência apresenta o funcional gerador no espaço pseudo-euclidiado (espaço de Minkowski), por isso, a ausência do fator "i" na nossa expressão e a presença do sinal negativo.

Taylor sobre o campo ϕ de modo que

$$e^{-\{\Gamma[\phi]-S[\phi]\}} = \int \mathscr{D}\varphi \; e^{-\left\{\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2+\sum\limits_{n=3}\frac{1}{n!}S_n[\phi]\varphi^n-\varphi(\Gamma_1[\phi]-S_1[\phi])\right\}}, \tag{2.9}$$

em que, $\frac{1}{2}S_2[\phi]\,\varphi^2$ representa o propagador,

$$S_n[\phi]\;\varphi^n \equiv \int \mathrm{d}^4x_1...\mathrm{d}^4x_n \,\frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1)...\delta\phi(x_n)}\,\varphi(x_1)...\varphi(x_n),$$

representa termos de interação, e

$$\int \mathrm{d}^4x\,\varphi(x)\,\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \equiv \varphi\Gamma_1[\phi],$$

representa simplesmente a interação da fonte $J(x)$, como um funcional do campo de fundo ϕ, com o campo φ. Observamos ainda, que as combinações $\Gamma[\phi]-S[\phi]$ e $\Gamma_1[\phi]-S_1[\phi]$, se repetem conforme "n" aumenta, logo, definimos essa diferença como sendo o funcional $\overline{\Gamma}[\phi]$ de modo que

$$\overline{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=1}\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi]. \tag{2.10}$$

Portanto, o funcional $\overline{\Gamma}[\phi]$ representa todas as correções quânticas da ação clássica $S[\phi]$, por isso, dizemos que a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ é a ação clássica com todas as correções quânticas, $\overline{\Gamma}[\phi]$. A expansão (2.10) é chamada de expansão em número de loops em diagramas de Feynman ou, simplesmente, expansão em loops. Portanto, a aproximação em primeira ordem, ou a 1-loop, que é a que nos interessa, possui a forma

$$e^{-\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi]} = \int \mathscr{D}\varphi\; e^{-\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2}, \tag{2.11}$$

logo,

$$e^{-\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi]} = \{\det(S_2[\phi])\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.12}$$

ou

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi] &= \frac{1}{2}\ln\det S_2[\phi] \\ &= \frac{1}{2}Tr\ln S_2[\phi],\end{aligned} \tag{2.13}$$

na qual $S_2[\phi]$ define o propagador do campo livre ou, analogamente, o inverso do operador de campo. Assim, obter a ação efetiva a 1-loop, de forma explícita, se reduz ao problema de calcular o determinante funcional de algum operador diferencial ou, como veremos, a expansão do traço do heat kernel deste operador.

Antes de voltarmos a ação fermiônica no espaço curvo, vale observar que $\overline{\Gamma}^{(1)}$ é um funcional apenas do campo de fundo ϕ e $\{S_2[\phi]\}^{-1}$ é um operador de segunda ordem. Também é verdade que neste desenvolvimento não consideramos variáveis de Grassmann, cuja álgebra está associada com a natureza dos férmions, e o fato de que o operador de campo fermiônico, obtido da ação (2.3), é um operador de primeira ordem. Estas considerações nos levam a reescrever a equação (2.11) considerando a integração funcional de Grassman [32], de modo a obter uma expressão válida para férmions. Assim,

$$\begin{aligned} e^{-\overline{\Gamma}_{\psi}^{(1)}[S_\mu]} &= \int [\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi]\ e^{-S[\bar{\psi},\psi,S_\mu]} \\ &= \int [\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi]\ e^{-\int d^4x g^{1/2}\ \bar{\psi}\hat{\mathscr{H}}(S_\mu)\psi} \\ &= N \det S_\psi, \end{aligned} \tag{2.14}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{\psi}^{(1)}\left[S_\mu\right] &= -\ln\det S_\psi \\ &= +Tr\ln\hat{\mathscr{H}}\left(S_\mu\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

a menos da constante de normalização N, irrelevante e por isso totalmente negligenciável. S_ψ é o propagador do férmion (**ainda não está na forma de um propagador de Feynman**) e relaciona-se com o operador de campo do férmion pela sua inversa, ou seja, $S_\psi = \hat{\mathscr{H}}^{-1}$.

Da equação (2.3) obtemos que o operador de campo $\hat{\mathscr{H}}\left(S_\mu\right)$ é dado por

$$\hat{\mathscr{H}}\left(S_\mu\right) = i\gamma^\mu\nabla_\mu + \eta\gamma^\mu S_\mu\gamma^5 + m\hat{1}. \tag{2.16}$$

Este é um operador elíptico de primeira ordem, veremos na próxima seção que, para aplicarmos o método do heat kernel, será necessário compor um operador de segunda ordem. O operador composto será formado pelo produto do operador original $\hat{\mathscr{H}}\left(S_\mu\right)$ com um operador auxiliar, ambos de primeira ordem, dessa forma, estaremos interessados nas possibilidades para o operador auxiliar, ou seja, quais as formas que o operador auxiliar pode admitir, de modo a preservar a consistência da ação efetiva a 1-loop.

2.3. A expansão do heat kernel

Vimos na seção 2.2 que para um campo de fundo genérico $\phi(x)$, a ação clássica produz o inverso do propagador, equação (2.12),

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{(1)}[\phi] &= -\ln\left(\{\det S_2[\phi]\}^{-1}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}Tr\ln G[\phi], \end{aligned}$$

na qual, $G[\phi] = S_2[\phi]$ é a função de Green ou propagador de Feynman. $G[\phi]$ está associado com o operador de campo $F(\nabla)$ por meio de $F(\nabla)G[\phi] = 1$. Para teoria com torção $\phi \to S_\mu$ e $\nabla_\mu \to \nabla_\mu - i\eta S_\mu\gamma^5$, de modo que a ação efetiva é um funcional da torção e se relaciona com o operador de campo $F(\nabla)$ pela expressão

$$\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi] \quad = \quad \frac{1}{2} Tr \ln F(\nabla) . \tag{2.17}$$

Veremos que, para o caso fermiônico, $F(\nabla)$ admite pelo menos duas formas possíveis de ser representado já que $\hat{\mathscr{H}}$, equação (2.16), é um operador linear e $F(\nabla)$ necessita ser um operador de segunda ordem, conforme o método de SDW [4, 12].

Para aplicar o método de SDW a fim de obter a ação efetiva a 1-loop associada a um campo de fundo genérico, devemos relacionar o operador $F(\nabla)$ com o heat kernel, $K(s|x,y)$, tal que

$$K(s|x,y) \quad = \quad e^{-sF}\delta(x,y) \tag{2.18}$$

na qual, "s" é o parâmetro do tempo próprio e o kernel $K(s|x,y)$ satisfaz a equação de calor com a condição inicial $(s=0)$,

$$\frac{\partial K(s)}{\partial s} = -F(\nabla)K(s), \qquad K(0) = \hat{1}, \tag{2.19}$$

de modo que, a integral do kernel $K(s|x,y)$, por meio da expressão (2.19) junto com a equação (2.18) gera o propagador do operador F, ou seja,

$$G[\phi] = \frac{1}{F(\nabla)}\delta(x,y) \quad = \quad \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}s\, K(s|x,y) . \tag{2.20}$$

Como a ação efetiva é um funcional do campo de fundo, efetuando uma variação em termos do campo de fundo, encontramos

$$\begin{aligned} \delta\overline{\Gamma}^{(1)}[\phi] \quad &= \quad \frac{1}{2} Tr[\delta \ln F] \\ &= \quad \frac{1}{2} Tr\left[\frac{1}{F}\delta F\right] \end{aligned}$$

sabendo que $\frac{1}{F} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}s\, K$ e que $\frac{1}{F}\delta F = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}s\, K\delta F = \delta\left\{-\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s} K\right\}$ (lembrando que $K = e^{-sF}$), encontramos a representação do tempo próprio para ação efetiva em termos do heat kernel $K(s)$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{(1)}[\phi] \quad &= \quad \frac{1}{2} Tr \ln F(\nabla) \\ &= \quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}s\, \frac{1}{s} Tr K(s) , \end{aligned} \tag{2.21}$$

na qual,

$$Tr K(s) \quad = \quad \int \mathrm{d}x\, K(s|x,y) . \tag{2.22}$$

A eficiência do uso do heat kernel e do método do tempo próprio está associada ao universal e bem conhecido comportamento de $K(s|x,y)$ para um operador de segunda ordem genérico $F(\nabla)$ quando

$s \to 0$. Este limite é responsável pelas divergências ultravioletas em teoria quântica de campos. De outra forma, termos não locais aparecem como uma contribuição do limite superior na integral do tempo próprio (2.21), os quais tornam o comportamento assintótico de $TrK(s)$[5] muito importante para efeitos como a criação de partículas.

Para simplificar a apresentação da técnica do heat kernel, durante toda essa seção estaremos trabalhando no espaço-tempo plano com a métrica $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$, de modo que $\delta = (++++)$ é a assinatura da métrica euclidiana positiva definida. Também consideramos o campo de fundo ϕ genérico, sem as propriedades de uma variável espinorial. Neste caso, o comportamento do heat kernel para valores pequenos de "s", o tempo próprio, é

$$K(s|x,y) = \frac{1}{(4\pi s)^{\omega}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \Omega(s|x,y), \tag{2.23}$$

$$\Omega(s|x,y) \to 1, \qquad s \to 0, \tag{2.24}$$

em que, $\omega = d/2$ e d é a dimensão do espaço-tempo. Esse ansatz semiclássico para o heat kernel garante que ele tende à função delta $\delta(x,y)$ quando $s \to 0$ e contém toda informação não trivial sobre o termo de potência do operador $F(\nabla)$ na função $\Omega(s|x,y)$[6], a qual é analítica para $s = 0$. A expansão do heat kernel em potências de s resulta na expansão SDW [5,12,14], que representa uma expansão local do heat kernel, como veremos a seguir.

2.3.1. A expansão SDW (local)

Da equação do heat kernel (2.19), é possível derivar um conjunto de equações recursivas para coeficientes de s-pequeno da expansão de $\Omega(s|x,y)$,

$$\Omega(s|x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y)\, s^n, \qquad s \to 0. \tag{2.25}$$

Os coeficientes a_n desempenham um papel muito importante na teoria quântica de campos e são freqüentemente chamados de coeficientes de Schwinger-DeWitt, na literatura física. As equações para $a_n(x,y)$ podem ser resolvidas com o limite de coincidência $a_n(x,x)$ em função do potencial $V(x)$, do operador $F(\nabla) = \Box - V(x)$, e as suas derivadas. Para o operador $F(\nabla)$, os primeiros coeficientes para argumentos coincidentes, $a_n(x,x)$, são

$$\begin{cases} a_0(x,x) &= 1, \\ a_1(x,x) &= -V(x) + \frac{1}{6}R(x), \\ a_2(x,x) &= \frac{1}{2}V^2(x) + \frac{1}{6}\Box V(x) - \frac{1}{6}R(x)V(x) + O\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\right), \end{cases} \tag{2.26}$$

[5] Observe que, seguindo a notação de [6], o símbolo Tr com a letra t maiúscula refere-se à integração sobre o espaço-tempo enquanto que tr com t minúsculo, refere-se ao traço normal, ou seja, soma sobre os elementos da diagonal de uma matriz de dimensão finita como será o caso do traço sobre as matrizes de Dirac que veremos mais adiante.

[6] $\Omega(s|x,y)$ está definida na equação (2.39).

nos quais, também incluímos a contribuição do espaço-tempo do escalar de curvatura R e, a sua contribuição quadrática para o coeficiente de segunda ordem. O tensor de curvatura, para o coeficiente de segunda ordem, foi indicado simbolicamente. Podemos observar que estas quantidades são funções locais dos coeficientes do operador diferencial original e suas derivadas. A dimensionalidade de $a_n(x,x)$, em unidades do inverso do comprimento, aumenta com n e é composta de potências da dimensão das quantidades $V(x)$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ e suas derivadas.

Agora, vamos supor que, em vez da teoria com o operador $F(\nabla) = \Box - V(x)$, consideramos uma teoria massiva com massa m muito grande. Isto corresponde a substituir o operador original por $F(\nabla) \to F(\nabla) - m^2$. Diante desta mudança o heat kernel (2.23) adquire um fator exponencial e^{-sm^2} amortecendo valores grandes de s na integral do tempo próprio (2.21)

$$K(s|x,y) = \frac{1}{(4\pi s)^{\omega}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s} - sm^2} \Omega(s|x,y). \tag{2.27}$$

Considerando a expansão (2.25) e substituíndo esta expressão em (2.21) e integrando a série termo a termo, obtemos a ação efetiva a 1-loop em termos de uma expansão assintótica de m^{-2} [12, 13, 17, 33],

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} Tr \ln\left[F(\nabla) - m^2\right] &= -\frac{1}{2(4\pi)^{\omega}} \int d^{2\omega}x \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\omega-1}}\, e^{-sm^2} \sum_{n=0}^{\infty} s^n a_n(x,x) \\
&= \overline{\Gamma}^{(1)}_{div} + \overline{\Gamma}^{(1)}_{log} \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{4\pi}\right)^{\omega} \int d^{2\omega}x \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\omega)}{(m^2)^n} a_n
\end{aligned} \tag{2.28}$$

As primeiras ω integrais ($\omega = d/2$) (supomos que d é par) são divergentes no limite s-pequeno e geram divergências ultravioletas Γ_{div} dadas pelos primeiros $d/2$ coeficientes de Schwinger-DeWitt. Com o auxílio da regularização dimensional, obtem-se

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{(1)}_{div} &= -\frac{1}{2(4\pi)^{\omega}} \int d^{2\omega}x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega-2} - \Gamma'(\omega-n+1)\right] \\
&\times \frac{(-m^2)^{\omega-n}}{(\omega-n)!} a_n(x,x).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

As divergências logarítmicas são acompanhadas do termo logarítmo

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{log} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int d^{d/2}x \sum_{n=0}^{d/2} \frac{(-m^2)^{d/2-n}}{(d/2-n)!} \ln\frac{m^2}{\mu^2} a_n(x,x) \tag{2.30}$$

contendo o parâmetro de renormalização da massa μ^2, que reflete a ambigüidade da renormalização.

Na presente forma, cada termo finito no lado direito da equação (2.28) é local, porém, este caráter local é assegurado apenas na gama de aplicabilidade desta expansão, para a qual a massa é grande e os termos da série assintótica diminuem rapidamente à medida que n aumenta. Isso ocorre quando o parâmetro de massa m é grande em comparação com ambos, as derivadas do potencial e do próprio potencial:

$$1 \gg \frac{a_n}{(m^2)^n} \sim \left(\frac{V}{m^2}\right)^n . \tag{2.31}$$

Na presença do campo gravitacional, estas restrições também incluem a pequenez da curvatura do espaço-tempo e suas derivadas covariantes em comparação ao parâmetro de massa. A expansão local de Schwinger-DeWitt é, portanto, aplicável somente para campos variando lentamente e amplitudes pequenas, quando comparadas com a escala de massa do modelo. Isto impossibilita a descrição de fenômenos não locais, como o da criação de partículas, pois estes correspondem a efeitos muito pequenos quando consideramos partículas pesadas em um campo externo fraco. Apesar de sua universalidade, a expansão SDW torna-se ineficiente quando as razões na equação (2.31) tornam-se da ordem da unidade e, falha completamente para campos sem massa. No último caso, todas as integrais sobre o tempo próprio correspondem à divergências infravermelhas. Estas divergências não possuem, é claro, nenhum significado físico e são um artefato da técnica de aproximação utilizada. Ou seja, a expansão SDW torna-se inaplicável e explode, diverge completamente, para campos intensos ou que variam rapidamente ou, equivalentemente, para o limite de massa zero, $m \to 0$. Nessa situação, em que falha a expansão SDW, surge a questão: qual deve ser a estrutura da ação efetiva e como calcula-la? Abaixo, vamos considerar um método de perturbação que melhora a expansão SDW e possibilita estendê-la a uma classe de modelos sem massa além de apresentar a possibilidade de um setor não-local na ação efetiva.

2.3.2. A expansão perturbativa covariante (não-local)

Na teoria perturbativa covariante, o potencial $V(x)$ é tratado como uma perturbação, e a solução da equação do heat kernel é dada por uma série de suas potências. Do ponto de vista da expansão de Schwinger-DeWitt, isto corresponde a uma re-soma infinita de todos os termos com uma dada potência do termo de potencial e um número arbitrário de derivadas. O resultado é

$$TrK(s) \equiv \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\, K(s|x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} TrK_n(s), \tag{2.32}$$

em que,

$$TrK_n(s) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\, F_n(s|x_1,\ldots,x_n)\, V(x_1)\ldots V(x_n). \tag{2.33}$$

Os fatores de forma não-locais $F_n(s|x_1,\ldots,x_n)$ foram obtidos explicitamente em [16, 17, 34], inclusive para $n = 3$. Na presença de campos de gauge ou do campo gravitacional, esta expansão pode ser facilmente generalizada incluíndo o comutador de curvatura $\left[\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right]\phi = \mathscr{R}_{\mu\nu}\phi$ e a curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$, e pela covariantização dos correspondentes fatores de forma não-locais.

Foi mostrado em [17] que para $s \to \infty$, os termos nesta expansão comportam-se como

$$TrK_n(s) = O\left(\frac{1}{s^{d/2-1}}\right), \quad n \geq 1, \tag{2.34}$$

e a integral em (2.21) é, portanto, convergente para o limite infravermelho em dimensões do espaço-tempo $d \geq 3$,

$$\Gamma \sim \int^{\infty} \frac{ds}{s} O\left(\frac{1}{s^{d/2-1}}\right) < \infty. \tag{2.35}$$

Nas dimensões $d=1$ e $d=2$, esta expansão para Γ não existe exceto para casos especiais de teorias sem massa em um expaço-tempo curvo bidimensional, o qual ela produz a ação de Polyakov [17, 35, 36], a qual pode ser obtida, alternativamente, integrando a anomalia conforme [35, 36],

$$\Gamma_P = \int d^2x\, g^{1/2} R \frac{1}{\Box} R. \tag{2.36}$$

A teoria perturbativa covariante pode ser aplicada sempre que $d \geq 3$ e o potencial V for suficientemente pequeno tal que a sua ação efetiva tem, explicitamente, a analiticidade no potencial em $V=0$. Portanto, sua desvantagem é que esta teoria não permite ir além dos limites do esquema de perturbação e, em particular, a descoberta de estruturas não analíticas na ação, quando existirem.

No espaço-tempo curvo

A passagem para o espaço-tempo curvo é feita trocando a métrica plana pela curva, e o ansatz (2.27) torna-se a *função mundo*, $\sigma(x,y)$, a metade do quadrado da distância geodésica entre os pontos x e y,

$$\delta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \frac{|x-y|^2}{2} \to \sigma(x,y). \tag{2.37}$$

O ansatz semiclássico (2.27) torna-se

$$K(s|x,y) = \frac{1}{(4\pi s)^{\omega}} e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2s}} \Omega(s|x,y)\, g^{1/2}(y), \tag{2.38}$$

em que, $\Omega(s|x,y)$ é uma quantidade bi-escalar que, ao invés de (2.25), satisfaz, para o limite de s-pequeno,

$$\begin{cases} \Omega(s|x,y) & \to \triangle^{1/2}(x,y), \qquad s \to 0, \\ \triangle(x,y) & = g^{-1/2}(x)\left[det \partial^x_\mu \partial^y_\nu \sigma(x,y)\right] g^{-1/2}(y) \neq 0, \end{cases} \tag{2.39}$$

em termos do determinante de Pauli-Van Vleck-Morette [12, 13].

Considerando a ação efetiva (2.21), no espaço-tempo curvo e, seguindo a referência [17], o traço do kernel $K(s)$ será dado por,

$$\begin{aligned} TrK(s) &= \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi s)^{\omega}} \int d^d x g^{1/2}\, e^{-sm^2} tr\{\hat{1} + s\hat{P} \\ &+ s^2 \left[R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} \hat{1} + R f_2(-s\Box) R \hat{1} + \hat{P} f_3(-s\Box) R \right. \\ &+ \left. \hat{P} f_4(-s\Box) \hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu} f_5(-s\Box) \hat{S}^{\mu\nu}\right]\}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

para termos até segunda ordem na curvatura. Com esta expressão temos acesso às divergências logarítmicas correspondentes aos termos proporcionais a s^2. As funções f_i correspondem aos fatores de forma, desenvolvidos no próximo capítulo, e μ^2 o parâmetro de renormalização da massa que, por ser arbitrário reflete a ambigüidade de renormalização. A continuação analítica da dimensão "d" do espaço-tempo para 2ω-dimensão, $2\omega = d$, é requisito para o uso da técnica da regularização dimensional [37, 38]. Desconsiderando termos de vácuo e restringindo a ação efetiva aos termos na ordem de s^2, que correspondem as divergências logarítmicas, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} &= \int \frac{d^{2\omega}x\, g^{1/2}}{(4\pi)^{\omega}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} ds\, \frac{e^{-sm^2}}{s^{\omega-1}} tr\left\{\hat{P} f_3\left(-s\Box\right) R\right. \\ &+ \left.\hat{P} f_4\left(-s\Box\right)\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu} f_5\left(-s\Box\right)\hat{S}^{\mu\nu}\right\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Os fatores de forma assim como os traços serão calculados no próximo capítulo. Segue agora uma análise das arbitrariedades associadas ao operador de campo para a ação fermiônica.

2.4. O operador composto

Existem, pelo menos, dois mecanismos para compor um operador de campo fermiônico de segunda ordem[7], utilizando-se de um operador auxiliar para, junto com o operador original, formar o operador de segunda ordem. Estes mecanismos são equivalentes e baseiam-se em propriedades gerais da ação efetiva e, em identidades matemáticas conhecidas e bem definidas da teoria matemática referente à análise de funcionais [32, 39]. O primeiro mecanismo baseia-se na condição *on-shell* da ação efetiva, $S_\mu = 0$, ou seja, $\left\{\delta\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi}/\delta S_\mu\right\}\Big|_{S_\mu=0} = 0$, e na propriedade aditiva do logaritmo, enquanto que o segundo mecanismo utiliza-se das propriedades da matriz γ^5 e da identidade multiplicativa do determinante funcional. Cada um desses mecanismos, para obter um operador composto, representa uma forma de justificar uma estrutura específica para o operador auxiliar, de modo que, esta estrutura esteja de acordo com as propriedades gerais da ação efetiva e, por isso, geram operadores compostos equivalentes, embora obtidos por meio de operadores auxiliares distintos, devido aos diferentes mecanismos. Dessa forma, estaremos aptos a comparar os diferentes mecanismos esperando que, após calcular a ação efetiva a 1-loop, explicitamente, de fato, os resultados sejam equivalentes. Seguimos, então, para obtenção dos operadores compostos explorando os diferentes mecanismos.

2.4.1. Operador composto por meio da condição on-shell

A derivada funcional da ação clássica (2.3), com respeito à torção, fornece sua respectiva equação dinâmica. Sabendo que a ação efetiva a 1-loop (2.15) corresponde às correções quânticas de primeira ordem da ação clássica, podemos escrever as equações clássicas modificadas por estas correções quânticas,

[7] O operador de campo fermiônico de segunda ordem é obtido multiplicando-se o operador original com um operador auxiliar, ambos de primeira ordem. Portanto, utilizamos dois operadores para compor outro, assim, ao invés de nos referirmos ao operador composto como "operador de campo fermiônico de segunda ordem", simplificaremos a sua denominação com a expressão "*operador composto*".

da seguinte forma,

$$\frac{\delta S_\psi}{\delta S_\mu} + \frac{\delta \overline{\Gamma}^{(1)}_\psi}{\delta S_\mu} = 0, \tag{2.42}$$

de modo que, qualquer escolha de $\overline{\Gamma}^{(1)}_\psi$ que não modifique as equações clássicas não estará modificando nosso sistema físico, logo, uma escolha que satisfaça a condição on-shell $\frac{\delta \overline{\Gamma}^{(1)}_\psi}{\delta S_\mu} = 0$ é uma escolha consistente.

Consideramos, portanto, a ação efetiva a 1-loop (2.15) modificada pela adição de uma constante

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_\psi + \overline{\Gamma}^{(1)}_{const} = Tr \ln \hat{\mathscr{H}}\left(S_\mu\right) + Tr \ln\left(-i\gamma^\mu \nabla_\mu + m\hat{1}\right) \tag{2.43}$$

de modo que,

$$\frac{\delta \overline{\Gamma}^{(1)}_\psi}{\delta S_\mu} + \frac{\delta \overline{\Gamma}^{(1)}_{const}}{\delta S_\mu} = \frac{\delta \overline{\Gamma}^{(1)}_\psi}{\delta S_\mu}, \tag{2.44}$$

ou seja, o termo constante $\overline{\Gamma}^{(1)}_{const}$ não modifica nosso sistema físico. Por outro lado, podemos utilizar a propriedade aditiva do logaritmo, $\ln \mathscr{A} + \ln \mathscr{B} = \ln \mathscr{A}\mathscr{B}$, para compor um operador de segunda ordem, com o auxílio do termo constante $\overline{\Gamma}^{(1)}_{const}$, assim,

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(0)} = Tr \ln \hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(0)} \tag{2.45}$$

na qual, definimos

$$\hat{\mathscr{H}}_{(0)} \equiv -i\gamma^\mu \nabla_\mu + m\hat{1} \tag{2.46}$$

como sendo o operador do termo constante (o índice “0” em $\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$ refere-se a ausência de S_μ), e suprimimos $\overline{\Gamma}^{(1)}_{const}$ já que as equações de campo, que regem o sistema físico, estão associadas a variação da ação. Dessa forma, obtemos a estrutura do primeiro operador auxiliar, $\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$, e o seu respectivo operador composto, $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$. Isto implica que temos a primeira forma do operador fermiônico de segunda ordem, obtido por meio de considerações gerais a cerca das propriedades da ação efetiva. Assim, a ação efetiva a 1-loop, equação (2.15), pode ser cálculada com a expressão,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{(1)}_\psi &= Tr \ln \hat{\mathscr{H}} \\ &= Tr \ln \hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(0)}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

É importante salientar que o operador $\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$ não é covariante de gauge, no entanto, este operador não contribui para a ação efetiva pois satisfaz a relação (2.44). O operador que nos interessa é $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$.

2.4.2. Operador composto por meio da matriz γ^5

Assim como o determinante usual, o determinante funcional, ou superdeterminante, também satisfaz [32, 39] a identidade multiplicativa dos determinantes, $\det(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \det \mathscr{A} \cdot \det \mathscr{B}$. Portanto, visto que a ação efetiva a 1-loop (2.15) depende do determinante funcional do operador de campo, podemos utilizar a identidade multiplicativa do determinante para compor um operador de segunda ordem. Entretanto, não basta simplesmente multiplicar o determinante do operador original $\hat{\mathscr{H}}$ pelo determinante de um operador auxiliar qualquer, pois devemos levar em conta a invariância da ação, de modo que o operador auxiliar não venha gerar alterações nas equações de campo e, consequentemente, modificar o sistema físico original. Sendo assim, lançamos mão das propriedades das matrizes gamma de Dirac[8] para, com o auxílio da matriz γ^5, formar um operador quadrático, ou seja, devemos obter um operador auxiliar que equivale o próprio operador original e com isso podemos tomar o operador composto como o quadrado do operador original, $\hat{\mathscr{H}}^2$, garantindo, dessa forma, que a ação efetiva a 1-loop não estará sendo modificada.

Vamos redefinir a ação efetiva a 1-loop (2.15) multiplicando o operador $\hat{\mathscr{H}}$, equação (2.16), pelo quadrado da matriz γ^5, observando que $\gamma^5\gamma^5 = \hat{1}$, ou seja, $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}\hat{1} = \hat{\mathscr{H}}\gamma^5\gamma^5$, e que $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)} &= \ln\det\left(\hat{\mathscr{H}}\gamma^5\gamma^5\right) \\
&= \ln\det\left\{\gamma^5\left(-i\gamma^\mu\nabla_\mu - \eta\gamma^\mu S_\mu\gamma^5 + m\hat{1}\right)\gamma^5\right\} \\
&= \ln\det\left(-i\gamma^\mu\nabla_\mu - \eta\gamma^\mu S_\mu\gamma^5 + m\hat{1}\right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

na qual, definimos

$$\hat{\mathscr{H}}_{(-1)} \equiv -i\gamma^\mu\nabla_\mu - \eta\gamma^\mu S_\mu\gamma^5 + m\hat{1} \tag{2.49}$$

como sendo o operador auxiliar equivalente ao operador original $\hat{\mathscr{H}}$ já que foi obtido a partir deste por meio de uma identidade, ou seja, $\det\hat{\mathscr{H}} = \det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$. É fácil demonstrar esta identidade, bastando observar que

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{\mathscr{H}}\gamma^5\gamma^5\right) &= \det\gamma^5\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}\det\gamma^5 \\
&= \det\gamma^5\gamma^5\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)} \\
&= \det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)},
\end{aligned}$$

ou ainda, considerando o fato de que

$$\begin{aligned}
\ln\det\left(\hat{\mathscr{H}}\gamma^5\gamma^5\right) &= \ln\left\{\det\gamma^5\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}\det\gamma^5\right\} \\
&= \ln\det\gamma^5 + \ln\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)} + \ln\det\left(\gamma^5\right) \\
&= \ln 1 + \ln\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)} + \ln 1 \\
&= \ln\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}
\end{aligned}$$

Em fim, tudo isso deve corroborar com o fato de que, tanto γ^μ quanto $\gamma^{\mu'} = -\gamma^\mu$ satisfazem a álgebra de Clifford definida pela relação de anticomutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. O índice[9] "-1" em

[8] Veja a seção A.2 do apêndice B para detalhes da álgebra das matrizes de Dirac.

[9] A escolha do índice do operador auxiliar tem levado em conta o coeficiente do termo da torção, por isso, quando em $\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$

$\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$ refere-se ao coeficiente do termo S_μ. Assim, já que as estruturas $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)}$ e $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi}$ são idênticas, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi}+\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)} &= \ln\det\hat{\mathscr{H}}+\ln\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)} \\
2\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi} &= \ln\left[\det\hat{\mathscr{H}}\cdot\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}\right] \\
2\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi} &= \ln\det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)},
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)} = \frac{1}{2}\ln\det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}, \tag{2.50}$$

$$= \frac{1}{2}Tr\ln\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}, \tag{2.51}$$

em que, $\det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}=\det\hat{\mathscr{H}}\cdot\det\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}=\left(\det\hat{\mathscr{H}}\right)^2$, e $\ln\left(\det\hat{\mathscr{H}}\right)^2=2\ln\det\hat{\mathscr{H}}$, logo, $\ln\det\hat{\mathscr{H}}=\frac{1}{2}\ln\det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$. Portanto, $\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$ é um operador auxiliar, para fins de cálculo da ação efetiva, idêntico ao operador original $\hat{\mathscr{H}}$ e, por isso, $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$ corresponde ao quadrado de $\hat{\mathscr{H}}$, na ação efetiva.

Outra forma de confirmar a validade da igualdade $\ln\det\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}=\ln\left(\det\hat{\mathscr{H}}\right)^2$ é pelo fato de que $\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$ difere de $\hat{\mathscr{H}}$ pelo sinal negativo da massa, a menos de uma constante infinita[10], totalmente negligenciável. Porém, na ação efetiva a 1-loop, os termos proporcionais a massa aparecem sempre em potências pares desta, de modo que a troca $m\to -m$, não muda o sinal do termo de massa, o que garante a equivalência entre os operadores $\hat{\mathscr{H}}^2$ e $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$. Este resultado foi confirmado, por meio de demonstração, em [41].

2.5. Conclusões e comentários

O que segue no próximo capítulo é o cálculo explícito da ação efetiva a 1-loop para os diferentes operadores compostos, $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(0)}$ e $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$. Podemos dizer que estes operadores compostos correspondem a estruturas diferentes, porém equivalentes, a nível da ação, e que conduzem as mesmas divergências, ou seja, o método funcional nos permite diferentes caminhos que nos levam a um único resultado, neste caso, a mesma ação efetiva. Queremos analisar a parte finita não-local obtida com cada um desses operadores e comparar se, a equivalência entre os dois mecanismos, desenvolvidos a nível da ação, será mantida após manipular as divergências correspondentes aos determinantes destes operadores. Vale ressaltar que a equivalência entre $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(0)}$ e $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)}$, embora utilizando-se de propriedades gerais da ação e de identidades matemáticas bem definidas, é estabelecida para quantidades divergentes, ou seja, sabemos que o produtório de autovalores de um operador de dimensão finita é igual ao seu determinante,

temos o índice “0” é porque o coeficiente de S_μ, neste operador, é “0”. O mesmo vale para o operador auxiliar $\hat{\mathscr{H}}_{(-1)}$.

[10] O termo “constante infinita” pode gerar alguma desconfiança, afinal, constante é uma quantidade que não varia, enquanto que, uma quantidade infinita, em geral, refere-se a alguma estrutura que diverge com relação a variação de algum parâmetro. No entanto, são comuns em teorias de campos, estruturas que divergem em relação a algum parâmetro, mas que, em relação ao funcional ação, são constantes e, por isso, não modificam o seu teor físico, sendo assim, totalmete negligenciáveis. Veja, por exemplo, em [40], páginas 67 e 70.

portanto, assumimos que, por meio de uma generalização adequada, o determinante funcional dos operadores compostos também possa ser definido, mesmo tratando-se de operadores de dimensão infinita. Assim, escrevemos a ação efetiva a 1-loop em termos do determinante funcional, porém, é natural que o produtório dos autovalores, associados ao operador diferencial de campo, cresçam indefinidamente de modo que o determinante funcional do operador composto corresponda a divergências. Um resultado finito pode ser obtido apenas após regularizar e renormalizar o determinante. Portanto, vamos representar este determinante em termos de uma série de potências da curvatura na qual, cada termo em segunda ordem na potência da curvatura, corresponde a uma divergência de grau logarítmico representada por fatores de forma, com isso, ao regularizar estes fatores de forma, para obter a parte finita, esperamos que, tanto as divergências logarítmicas quanto a parte finita não-local, sejam as mesmas para $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(0)}$ e $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)}$, comprovando, dessa forma, as suas equivalências.

Antes de qualquer manipulação (regularização[11] ou renormalização) nas quantidades $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(0)}$ e $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)}$, estas representam estruturas essencialmente divergentes que, são totalmente equivalentes com relação as propriedades gerais da ação efetiva as quais fizemos uso para definir tais quantidades. Dessa forma, se após manipularmos estas divergênicas, a equivalência entre as ações não for verificada, então, haverá indícios de que as propriedades gerais da ação efetiva foram violadas em alguma etapa intermediária do cálculo ou, de outra forma, as identidades matemáticas, como a propriedade multiplicativa do determinante, podem não ser bem definidas, para operadores de campo com dimensão infinita e, as possíveis discrepâncias entre $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(0)}$ e $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\psi(-1)}$, representarão uma constatação, se este for o caso.

A forma de garantir que as manipulações efetuadas sobre a ação efetiva não comprometerão a sua integridade matemática, exige a adoção de um método consistente para representá-la em termos de uma série e, principalmente, uma técnica de regularização para manipular as divergências (os termos da série) sem comprometer as simetrias da teoria. A adoção do heat kernel como procedimento para representar a ação efetiva em termos de uma série, permite que o caráter divergente da ação efetiva recaia sobre o parâmetro do tempo próprio, possibilitanto, com isso, que a regularização das divergências seja feita sem que parâmetros físicos sejam manipulados, dessa forma, com uma técnica de regularização adequada, é possível garantir a consistência da ação efetiva. Vale ressaltar, que a ambiguidade do regulador [42, 43] ou, analogamente, da parte finita, refere-se a diferença entre os resultados (finitos) obtidos com técnicas de regularização diferentes, este resultado é inevitável, no entanto, estaremos comparando nossos resultados no contexto de uma única técnica, a regularização dimensional [37, 38], de modo que, a ambiguidade do regulador não estará presente em nossos resultados.

[11] É importante ressaltar que métodos de regularização são técnicas de cálculo que manipulam integrais essencialmente divergentes a fim de extrair destas uma parte finita, portanto, quando a ação efetiva, que em teoria de campos em geral corresponde a uma integral divergente, é regularizada, esse processo redefine a ação efetiva levando uma estrutura essencialmente divergente à uma nova com dois setores, um que mantem o mesmo caráter divergente e outro de natureza finita. Esse procedimento é necessário pois desejamos que as grandezas físicas sejam representadas por quantidades finitas a fim de podermos fazer previsões a serem comparadas com dados experimentais, por isso, as técnicas de regularização representam uma etapa fundamental em teoria de campos.

3. A anomalia multiplicativa não-local (ANL)

3.1. Introdução

No capítulo anterior abordamos ferramentas e elaboramos as ideias necessárias ao nosso estudo. Obtemos a ação efetiva a 1-loop por meio do método do campo de fundo e introduzímos a representação do tempo próprio de Schwinger para o propagador, por meio da qual podemos calcular o determinante funcional utilizando a expansão SDW [5, 12] e a expansão covariante [15] e, com isso, obter explicitamente as correções quânticas a 1-loop da teoria. Dado o caráter geralmente divergente dessas correções quânticas, necessitamos de um método de regularização para que possamos ter acesso a quantidades finitas para as correções, ou seja, extrair dessas divergências alguma estrutura essencialmente finita para que possamos dar interpretação física a estas correções. Como a nossa intenção é obter uma contribuição finita não-local, este processo, de separar a parte finita da divergente, será feito por meio de fatores de forma, utilizando a expansão covariante. Portanto, este capítulo será de obtenção dos resultados, ou seja, vamos efetuar o cálculo dos fatores de forma para cada uma das possíveis escolhas do operador auxiliar. Com o intuito de facilitar este cálculo e sistematizar a análise dos resultados, vamos propor uma generalização do operador auxiliar, seção 3.3, de modo a incluir as duas escolhas possíveis, (2.46) e (2.49), numa única expressão e, com isso, associar esta arbitrariedade a um parâmetro único para, com isso, podermos avaliar a dependência dos resultados, com relação a este parâmetro e, consequentemente, com relação às possíveis escolhas do operador de campo. Dessa forma, a parte finita será dependente da escolha do operador auxiliar, por meio deste parâmetro e poderemos avaliar as possíveis discrepâncias entre as partes finitas (locais ou não-locais) ao comparar as diferentes escolhas do operador auxiliar.

Iniciamos nossa análise pelo cálculo dos fatores de forma, seção 3.2, que aparecem em estruturas gerais do método da expansão covariante, independentes da escolha dos operadores auxiliares. Em seguida, na seção 3.3, procedemos com o cálculo do traço das curvaturas, procedimento para o qual tornam-se relevantes os operadores auxiliares.

3.2. Fatores de forma

O cálculo dos fatores de forma, considerando uma expansão até segunda ordem no parâmetro "s", equação (2.41), consiste em separar a parte divergente logarítmica[1] da parte finita local e/ou não-local. A parte divergente logarítmica deve ser universal [22, 44], ou seja, deve independer da escolha do operador

[1] A expansão até segunda ordem no parâmetro "s" define as divergências logarítmicas no espaço quadridimensional, $d = 4$.

auxiliar, portanto, além de confirmar esta universalidade das divergências logarítmicas, devemos avaliar a situação da parte finita frente estas possíveis escolhas do operador auxiliar. A parte divergente nos servirá como um mecanismo para comparar os resultados obtidos com as diferentes possibilidades do operador auxiliar a fim de confirmar o caráter universal das divergências logarítmicas e a consistência dos cálculos. Por isso, a utilização de dois métodos distintos de obtenção das divergências, a expansão SDW e a expansão covariante, pois, dessa forma, podemos comparar não apenas as divergências obtidas em cada escolha do operador auxiliar mas também entre diferentes formas de expandir o determinante funcional a fim de obter as correções quânticas[2]. A total equivalência das divergências logarítmicas, qualquer que seja o método, é necessária para garantir a consistência dos cálculos. Qualquer discrepância nos resultados, quando houver, devido às arbitrariedades associadas ao operador auxiliar, deve recair sobre a parte finita. Entender as razões que originam estas discrepâncias é fundamental para evitar resultados ambíguos que comprometam qualquer interpretação física da teoria. É importante ressaltar que as possíveis discrepâncias na parte finita não são devido à ambiguidade do regulador já que utilizamos apenas a regularização dimensional e, portanto, quando houver, tais discrepâncias serão essencialmente devido à arbitrariedade do operador de campo fermiônico, mais precisamente, devido a forma do operador auxiliar.

Iniciamos, considerando a seguinte mudança de variáveis na ação efetiva (2.41) e adequando-a, com um fator "-1", ao caso fermiônico,

$$sm^2 = t, \quad tu = -s\Box, \tag{3.1}$$

logo,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{s^2} &= -\frac{\mathscr{N}}{2\,(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^{2\omega}x\, g^{1/2}\int_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{-t}\,\frac{1}{t^{\omega-1}} \\ &\times\; tr\left\{\hat{P}f_3\,(tu)\,R+\hat{P}f_4\,(tu)\,\hat{P}+\hat{S}_{\mu\nu}f_5\,(tu)\,\hat{S}^{\mu\nu}\right\},\end{aligned} \tag{3.2}$$

na qual, definimos,

$$\mathscr{N} \equiv \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\omega-2}. \tag{3.3}$$

A ação (3.2) corresponde às correções quânticas a 1-loop, sem termos de vácuo[3], em segunda

[2] Aqui nos referimos às correções quânticas num momento anterior a aplicação de qualquer método de regularização, ou seja, um momento que antecede a obtenção da parte finita. Estamos nos referindo às correções quânticas na sua forma natural, ou seja, uma estrutura essencialmente divergente.

[3] Por não terem relevância em nossos estudos, estamos negligenciando os termos de vácuo nesta expressão (3.2) da ação efeitiva.

ordem no parâmetro “s” e em termos dos fatores de forma, os quais são definidos como

$$\begin{cases} f_1\,(tu) & = \frac{f}{(tu)^2} - \frac{1}{(tu)^2} + \frac{1}{6(tu)}, \quad f_4\,(tu) = \frac{f}{2}, \\ f_2\,(tu) & = \frac{f}{288} + \frac{f}{24(tu)} - \frac{3}{48(tu)} - \frac{f}{8(tu)^2} + \frac{1}{8(tu)^2}, \\ f_3\,(tu) & = \frac{f}{12} + \frac{f}{2(tu)} - \frac{1}{2(tu)}, \quad f_5\,(tu) = \frac{1}{2(tu)} - \frac{f}{2(tu)}, \end{cases} \tag{3.4}$$

nos quais,

$$f\,(tu) \quad = \quad \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathrm{d}\alpha\, e^{-\alpha(1-\alpha)tu}, \tag{3.5}$$

é a forma básica para os fatores de forma. Uma análise detalhada dos fatores de forma pode ser vista em [17].

Substituíndo a forma explícita dos fatores de forma, equação (3.4), na expressão (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} \quad &= \quad -\frac{\mathscr{N}}{2\,(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^{2\omega}x\, g^{1/2}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{-t}tr \\ &\times \quad \left\{\hat{P}\left[\frac{1}{12}\frac{f}{t^{\omega-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{ut^{\omega}} - \frac{1}{ut^{\omega}}\right)\right]R + \hat{P}\left[\frac{1}{2}\frac{f}{t^{\omega-1}}\right]\hat{P}\right. \\ &+ \quad \left.\hat{S}_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2\,(ut^{\omega})} - \frac{f}{2\,(ut^{\omega})}\right]\hat{S}^{\mu\nu}\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, redefinimos os fatores de forma, de modo a incorporar a integral em dt. Com isso, reescrevemos a última expressão da seguinte forma,

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} \quad = \quad -\frac{1}{2\,(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^{2\omega}x g^{1/2} tr\left\{\hat{P}\mathscr{F}_3 R + \hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}\right\}, \tag{3.7}$$

na qual, definimos,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_3 \quad &= \quad \mathscr{N}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{e^{-t}}{t^{\omega-1}} f_3\,(tu) \\ &= \quad \frac{1}{12}\mathscr{I}^1 + \frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

As quantidades $\mathscr{F}$ e $\mathscr{I}$ estão definidas no apêndice A. Procedemos da mesma maneira para os outros fatores de forma,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_4 \quad &= \quad \mathscr{N}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{e^{-t}}{t^{\omega-1}} f_4\,(tu) \\ &= \quad \frac{1}{2}\mathscr{I}^1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_5 &= \mathscr{N} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{e^{-t}}{t^{\omega-1}} f_5(tu) \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathscr{I}^4 - \mathscr{I}^2\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Com este desenvolvimento, definimos as integrais que devemos calcular para obter a forma explícita dos fatores de forma e, consequentemente, da parte finita. Observamos, com este procedimento, que algumas integrais se repetem em diferentes fatores de forma, assim, evitamos o cálculo desnecessário de integrais repetidas e, para nossos propósitos, basta calcularmos as integrais $\mathscr{I}^1$, $\mathscr{I}^2$ e $\mathscr{I}^4$. O resultado para estas integrais já foi obtido em [45], mesmo assim, na seção A.1 do apêndice, elaboramos um breve desenvolvimento a fim de ilustrar o cálculo das integrais e, também, para detalhar a estrutura divergente e finita dos fatores de forma.

3.2.1. A ação efetiva em termos de integrais

A ação efetiva em termos dessas integrais fica,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^{2\omega}x\, g^{1/2} tr \left\{ \hat{P}\left[\frac{1}{12}\mathscr{I}^1 + \frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right)\right] R \right. \\ &+ \left. \hat{P}\left[\frac{1}{2}\mathscr{I}^1\right]\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right)\right]\hat{S}^{\mu\nu}\right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esta expressão representa as divergências logarítmicas correpondentes as correções quânticas a 1-loop, nas quais, os traços das estruturas $\hat{P}\mathscr{F}_3 R$, $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$ determinam os termos que contribuem para as correções, e as suas formas. Lembramos que não estamos considerando termos de vácuo. No entanto, a representação da ação efetiva em termos das integrais $\mathscr{I}^1$, $\mathscr{I}^2$ e $\mathscr{I}^4$ nos permite fazer importantes observações, e até conclusões, mesmo antes do cálculo explícito dessas integrais.

3.2.2. Aspectos da ação efetiva associados às integrais

Ao observar a expressão (3.11) podemos afirmar que, termos que se repetem nas diferentes estruturas, $\hat{P}\mathscr{F}_3 R$, $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, originam-se com diferentes coeficientes já que, cada uma das estruturas está associada a uma combinação diferente de integrais, $\mathscr{F}_3$, $\mathscr{F}_4$ ou $\mathscr{F}_5$. Isso nos permite inferir que o coeficiente de cada termo está associado às estruturas das quais ele se origina, ou seja, se um termo em específico possui origem no traço de $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, então, seu coeficiente, após o cálculo dos traços, dependerá da combinação $\frac{1}{2}\mathscr{I}^1 x - \frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right) y$, em que, x e y correspondem aos fatores numéricos devido ao cálculo dos traços de $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, respectivamente. Uma possível combinação[4] de x e y é $x = -1/6$ e $y = 1$ de modo que, se o termo estiver presente nas três estruturas, observe a equação (3.11), então, a combinação de seus coeficientes será nula, ou seja, antes mesmo de calcular as

[4] Veremos na seção 3.5 que esta é uma situação real.

integrais já podemos ter alguma informação definitiva, ou indicativa, sobre o comportamento dos termos após o cálculo dos traços.

Outro fato muito importante que podemos observar diz respeito às diferentes escolhas, (2.46) ou (2.49), para compor o operador de campo de segunda ordem para o férmion. Considerando um termo em específico que, para uma escolha do operador composto, tenha sua origem associada ao traço de $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e que, para outra, sua origem esteja associada ao traço de $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, então, necessariamente, este termo terá um coeficiente dependente da escolha do operador auxiliar já que, $\mathscr{I}^1 \neq \mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4$, ou seja, a estrutura dos fatores de forma (3.4) não permitirá a equivalência entre as escolhas (2.46) e (2.49) para formar o operador de segunda ordem para o férmion, pois, em cada escolha o termo possui origem em estruturas diferentes e, por consequência, cada escolha fornecerá uma contribuição à ação efetiva, também diferente. No entanto, para este caso, a análise, a nível das integrais, representa apenas uma informação indicativa e, portanto, é necessário efetuar o cálculo explícito das integrais para confirmar ou não a indicação desta análise.

É importante lembrar que a universalidade das divergências logarítmicas [22,44] deve garantir uma equivalência entre as diferentes escolhas do operador composto no que se refere à parte divergente de cada termo, portanto, a contribuição finita das integrais é que deve revelar a real situação da comparação entre as diferentes escolhas, (2.46) e (2.49), para formar o operador composto. Assim, organizar a ação efetiva em termos destas integrais nos permite, num estágio intermediário dos cálculos, antecipar alguns resultados e obter indícios da possibilidade de outros que, aí sim, necessitarão do cálculo explícito das integrais para serem confirmados ou não.

3.2.3. Extraindo o setor não-local

Retornando com os resultados da seção A.1, do apêndice, no qual estão definidas as quantidades a e A que aparecem na expressão abaixo e que representam a presença da não-localidade, obtemos a contribuição dos fatores de forma, associados a cada uma das estruturas $\hat{P}\mathscr{F}_3R$, $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, à ação efetiva, começando por $\hat{P}\mathscr{F}_3R$,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\hat{P}\left[\left(a^2-4\right)\frac{A}{6a^2}-\frac{1}{18}\right]R \\ &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right),\end{aligned} \tag{3.12}$$

note que a regularização de $\mathscr{F}_3$, seção A.1 do apêndice, provoca o cancelamento das divergências logarítmicas de modo que a estrutura $\overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R}$ é essencialmente finita e, além disso, possui um setor local já observado em [17] (página 476). Porém, a expressão acima, inclui também um setor não-local[5].

[5] O setor não-local, neste caso, é gerado pela inserção do fator exponencial e^{-sm^2}, necessário para garantir a analiticidade da ação efetiva, promovendo um amortecimento para valores grandes do parâmetro "s" na integral do tempo próprio ou, equivalentemente, controlando as divergências infravermelhas no limite $m \to 0$. Veja a discussão na seção 2.3.1 do capítulo 2. Veja também a expressão (2.40) e compare com a expressão (2.1), página 473, de [17].

Seguindo, escrevemos a contribuição à ação efetiva dos termos $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\left[\hat{P}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}+A\right)\hat{P}\right] \\ &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\left(\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\hat{P}\hat{P}+\hat{P}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\hat{P}\right),\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\left[\hat{S}_{\mu\nu}\left(\frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{18}+\frac{2A}{3a^2}\right)\hat{S}^{\mu\nu}\right] \\ &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^{2\omega}x g^{1/2} tr\left(\frac{\varepsilon^{-1}}{12}\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}+\hat{S}_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}^{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

O parâmetro ε, definido na seção A.1 do apêndice, representa a divergência logarítmica para $d = 4$.

Nas expressões (3.12), (3.13) e (3.14) designamos o setor finito da seguinte forma,

$$\begin{cases}\Sigma_{\hat{P}R} &= \frac{1}{6}A - \frac{2A}{3a^2} - \frac{1}{18}, \\ \Sigma_{\hat{P}\hat{P}} &= A, \\ \Sigma_{\hat{S}\hat{S}} &= \frac{2A}{3a^2} + \frac{1}{18},\end{cases} \tag{3.15}$$

e observamos que $\Sigma_{\hat{P}R} = \frac{1}{6}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}} - \Sigma_{\hat{S}\hat{S}}$. Reunindo estes resultados, seguindo a expressão abaixo,

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} = \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R} + \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}}, \tag{3.16}$$

ou, separando a parte finita da divergente podemos escrever a expressão da seguinte forma

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} &= \overline{\Gamma}^{Fin}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R} + \overline{\Gamma}^{Div}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R} + \overline{\Gamma}^{Fin}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{Div}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{Fin}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}} + \overline{\Gamma}^{Div}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}} \\ &= \overline{\Gamma}^{Fin}_{\Sigma_{\hat{P}R}} + \overline{\Gamma}^{Fin}_{\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}} + \overline{\Gamma}^{Log}_{\hat{P}\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{Fin}_{\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}} + \overline{\Gamma}^{Log}_{\hat{S}\hat{S}}\end{aligned}$$

na qual, a parte finita possui indices $\Sigma_{\hat{P}R}$, $\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}$ e $\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}$ e a parte divergente refere-se as divergências logarítmicas. É importante ressaltar que ao regularizar a estrutura $\overline{\Gamma}^{Div}_{\hat{P}\mathscr{F}_3R}$ esta gera apenas um termo finito pois há um cancelamento das divergências. Considerando $d = 4$,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x g^{1/2} tr\left\{\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right. \\ &+ \left.\hat{P}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}+\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\right)\hat{P}+\hat{S}_{\mu\nu}\left(\frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon}+\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\right)\hat{S}^{\mu\nu}\right\}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Separando a parte finita da divergente,

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{Fin} = -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x g^{1/2} tr\left\{\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R+\hat{P}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\hat{P}+\hat{S}_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}^{\mu\nu}\right\}, \tag{3.18}$$

$$\overline{\Gamma}^{(1)}_{Div} = -\frac{\varepsilon^{-1}}{2(4\pi)^2}\int d^4xg^{1/2}\left\{\frac{1}{2}tr\left(\hat{P}\hat{P}\right)+\frac{1}{12}tr\left(\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}\right)\right\}. \tag{3.19}$$

Agora nos resta calcular o traço das estruturas $\hat{P}\mathscr{F}_3R$, $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$ (ou, equivalentemente, das estruturas $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R$, $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}^{\mu\nu}$), para analisar as possíveis escolhas, (2.46) e (2.49), de operador auxiliar a fim de verificar a presença, ou não, da ANL para ação fermiônica no espaço-tempo curvo com torção.

É importante ressaltar que as estruturas $\Sigma_{\hat{P}R}$, $\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}$ e $\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}$ possuem caráter não-local e que, por isso, atuam sobre os campos de curvatura, de modo que $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R \neq \hat{P}R\Sigma_{\hat{P}R}$. No entanto, $tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right)$ refere-se ao cálculo do traço das matrizes de Dirac , as mesmas matrizes da estrutura $tr\left(\hat{P}R\right)$, de modo que o traço de $\hat{P}R$ e $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R$ concordam já que as estruturas $\Sigma_{\hat{P}R}$, $\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}$ e $\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}$ não interferem nas matrizes de Dirac[6].

3.3. Cálculo dos traços das curvaturas

Vimos na seção 2.4 a existência de duas possibilidades legítimas de se obter um operador de segunda ordem a partir de escolhas diferentes de operadores auxiliares, representadas por (2.46) e (2.49). Nesta seção vamos utilizar de fato estas escolhas para obter as correções quânticas a 1-loop, referentes à ação efetiva, equação (2.41), sem considerar termos de vácuo. Antes, porém, precisamos calcular os traços das curvaturas $\hat{P}R$, $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$, assim, definimos abaixo, as seguintes quantidades:

$$F(\nabla) = \hat{1}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + 2\hat{h}^\mu\nabla_\mu + \hat{\Pi}, \tag{3.20}$$

é o operador de campo, de segunda ordem, na forma covariante, ou seja, incluindo a redefinição da derivada covariante, $\nabla_\mu \to \nabla_\mu + \hat{h}_\mu$, na presença do campo de fundo. O termo de potencial $\hat{\Pi}$, que inclui a massa, também é corrigido por esta redefinição, logo, definimos

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{1}{6}R\hat{1} - \nabla_\mu\hat{h}^\mu - \hat{h}^\mu\hat{h}_\mu, \tag{3.21}$$

e, por fim, o comutador das derivadas covariantes atuando sobre o campo espinorial, $\left[\nabla_\mu,\nabla_\nu\right]\psi = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu}\psi$, que, corrigido pelo termo de campo de fundo, adquire a forma covariantizada

$$\hat{S}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} - \nabla_\mu\hat{h}_\nu + \nabla_\nu\hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu\hat{h}_\mu. \tag{3.22}$$

De posse dessas estruturas podemos calcular os traços de $\hat{P}R$, $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$ e, assim, concluir o cálculo explícito da ação efetiva a 1-loop, equação (2.41). No entanto, antes de prosseguir, vamos implementar uma generalização no operador auxiliar, de modo a incluir as duas possibilidades numa única expressão e, com isso, reduzir os cálculos a um único operador generalizado.

[6]Desambiguação: o traço representado pelo símbolo tr (letras minúsculas) refere-se ao traço das matrizes de Dirac, enquanto o supertraço Tr (com a primeira letra maiúscula) refere-se a integral sobre as coordenadas do espaço-tempo $Tr \to \int d^4xg^{1/2}$. Por vezes a medida de integração é representada de forma simplificada $\int dxg^{1/2}$, quando a especificação da dimensão não for fundamental.

3.3.1. Operador auxiliar generalizado

A generalização do operador auxiliar não permite apenas uma redução nos cálculos, a medida que efetuamos um único cálculo para todas as possibilidades, mas, também, a possibilidade de avaliar a dependência das arbitrariedades, associadas ao operador fermiônico, de forma explícita, em uma única expressão final. Ou seja, trata-se de um mecanismo que otimiza totalmente a análise das arbitrariedades associadas a ação efetiva fermiônica. Sendo assim, propomos o seguinte operador auxiliar generalizado

$$\hat{\mathscr{H}}_{(\kappa,\alpha)} \equiv -i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} + \kappa\eta\gamma^{5}\gamma^{\mu}S_{\mu} + \alpha m\hat{1}, \tag{3.23}$$

no qual, o parâmetro $\kappa = 0, -1$ representa uma das duas escolhas possíveis, (2.46) ou (2.49), respectivamente. Dessa forma, o operdor de segunda ordem (3.20) será dado pelo operador composto generalizado, ou seja, $F(\nabla) \equiv \hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(\kappa,\alpha)}$, no qual, $\hat{\mathscr{H}}$ é o operador de campo da ação clássica (2.3). O parâmetro α é introduzido com o intuito de dar mais consistência aos cálculos à medida que generaliza o sinal da massa considerando também, conforme mostrado em [41], a independência dos resultados com relação à transformação de reversão da massa[7], $m \to -m$.

Portanto, considerando $\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}}_{(\kappa,\alpha)}$, a partir da expressão (3.20), obtemos que

$$\begin{cases} h^{\mu}(\kappa) & = \frac{1}{2}i\eta S_{\nu}\left(\kappa\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\gamma^{5} + \frac{1}{2}(\alpha-1)\,im\gamma^{\mu} \\ \hat{\Pi}(\kappa) & = \kappa\left[-\eta^{2}S^{2}\hat{1} + \eta m S_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma^{5} + i\eta\left(\nabla\cdot S\right)\gamma^{5} + \frac{1}{2}i\eta S_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\right] \\ & \quad + \alpha m^{2}\hat{1} - \frac{1}{4}R\hat{1} + \alpha\eta m S_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma^{5}, \end{cases} \tag{3.24}$$

de modo que, $S_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu}S_{\nu} - \nabla_{\nu}S_{\mu}$ é um análogo do tensor $F_{\mu\nu}$ do eletromagnetismo. Agora estamos aptos a calcular os traços das estruturas $\hat{P}R$, $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$, as quais nos fornecerão os termos referentes às correções quânticas a 1-loop.

3.3.2. A estrutura $\hat{P}\mathscr{F}_3R$

Com o auxílio da expressão (3.21) e da forma explícita das quantidades h^{μ} e $\hat{\Pi}$, expressão (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} tr\hat{P}_{(\kappa,\alpha)} &= \frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{4}\left\{\left[4\alpha + d\,(\alpha-1)^{2}\right]m^{2} - \frac{1}{3}R\right\} \\ &+ \frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{4}(\kappa+1)^{2}(2-d)\,\eta^{2}S^{2}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

essa quantidade corresponde ao coeficiente a_1 de Schwinger-DeWitt, veja [20] para o caso vetorial e [22] para o caso escalar. Para $d = 4$ essa estrutura corresponde à divergência quadrática da teoria e o coeficiente do termo de massa, $4\left[\alpha + (\alpha-1)^{2}\right]$, mostra-se não ser invariante frente à transformação de reversão da massa. Há uma dependência explícita do parâmetro α que monitora o sinal da massa de tal forma que, se $\alpha = 1$, o termo de massa é multiplicado pelo fator numérico 4, porém, se $\alpha = -1$, este

[7] Essa transformação foi primeiro estudada por Tiomno [46], e foi chamada por ele de transformação de reversão da massa. Em seguida vários estudos se seguiram dentre eles um trabalho de Sakurai [47].

fator torna-se diferente, ou seja, 12. Logo, divergências quadráticas mostram-se sensíveis à transformação de reversão da massa sobre o operador auxiliar (3.23). No entanto, divergências quadráticas não são universais como as logarítmicas e também não estão associadas aos parâmetros físicos já que estes são renormalizados com a adição de contratermos para eliminação de quantidades com grau de divergência, unicamente, logarítmico. Portanto, este fato mostra, apenas, o caráter ambíguo das divergências quadráticas. A mesma dependência aparece com relação ao parâmetro κ, que designa a escolha do operador composto, portanto, mesmo ao manter o sinal da massa com a escolha $\alpha = 1$, as divergências quadráticas ainda apresentam a dependência da escolha do operador auxiliar (3.23), mostrando-se assim, ambíguas com relação a esses dois aspectos.

Para obter o traço da estrutura $\hat{P}\mathscr{F}_3 R$, basta multiplicar $\hat{P}$ pelo escalar de curvatura R[8], assim

$$tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right)_\kappa = \frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{4}(2-d)(\kappa+1)^2\eta^2 S^2\Sigma_{\hat{P}R}R, \tag{3.26}$$

na qual, omitimos os termos de vácuo. Observamos que esta quantidade não é invariante frente a escolha do operador auxiliar, assim como $tr\hat{P}$ não o é, porém $tr\left(\hat{P}\mathscr{F}_3 R\right)$ corresponde a uma das contribuições a ação efetiva a 1-loop e, por isso, deve ser analisada junto com o traço das demais estruturas $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$. De qualquer forma, já é possível observar que para $\kappa = -1$, esta estrutura está ausente. Veremos, ao considerar a contribuição das demais estruturas, se este fato aponta para uma vantagem da escolha (2.49) do operador auxiliar, ou não.

3.3.3. A estrutura $P\mathscr{F}_4\hat{P}$

A obtenção de $\hat{P}$ é praticamente direta a partir da equação (3.21) e com o auxílio da expressão (3.24), no entanto, $\hat{P}\hat{P}$ requer um trabalho algébrico bem maior, por isso omitimos detalhes deste cálculo e apresentamos de forma direta o traço de $\hat{P}\hat{P}$,

$$\begin{aligned}
&tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\hat{P}\right)_{(\kappa,\alpha)} = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]} \\
\times\; &\left\{\left[\alpha+\frac{1}{4}d(\alpha-1)^2\right]\left(\left[\alpha+\frac{1}{4}d(\alpha-1)^2\right]m^4\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}-\frac{1}{6}m^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}R\right)\right. \\
+\; &(\kappa+1)^2(2-d)\left[\frac{1}{16}(\kappa+1)^2(2-d)\eta^4 S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^2-\frac{1}{24}\eta^2 S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}R\right] \\
+\; &\frac{1}{8}(\kappa-1)^2\eta^2 S_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^{\mu\nu}-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\eta^2(\nabla\cdot S)\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}(\nabla\cdot S) \\
+\; &\frac{1}{2}\left[\alpha+\frac{1}{4}d(\alpha-1)^2\right](\kappa+1)^2(2-d)\eta^2 m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^\mu+\frac{1}{144}R\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}R \\
+\; &\left.\left[\frac{1}{2}(\alpha-1)(\kappa+1)(1-d)+(\alpha-\kappa)\right]^2(-)\eta^2 m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^\mu\right\},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

[8]Já que $tr\left(\hat{P}R\right)$ e $tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right)$ referem-se ao cálculo do traço das mestras matrizes de Dirac.

na qual, omitimos a parte divergente de $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$, proporcional a ε^{-1}. Omitindo, também, os termos de vácuo, a expressão se reduz a

$$\begin{aligned}
& tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}\hat{P}\right)_{(\kappa,\alpha)} = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]} \\
\times & \left\{\left[\frac{1}{2}(\alpha-1)(\kappa+1)(1-d)+(\alpha-\kappa)\right]^2(-)\,\eta^2 m^2 S_\mu \Sigma_{\hat{P}\hat{P}} S^\mu\right. \\
+ & (\kappa+1)^2(2-d)\left[-\frac{1}{24}\eta^2 S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}R+\frac{1}{16}(\kappa+1)^2(2-d)\,\eta^4 S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^2\right] \\
+ & \frac{1}{8}(\kappa-1)^2\eta^2 S_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^{\mu\nu}-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\eta^2(\nabla S)\,\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}(\nabla S) \\
+ & \left.(\kappa+1)^2\frac{1}{2}\left[\alpha+\frac{1}{4}d(\alpha-1)^2\right](2-d)\,\eta^2 m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^\mu\right\}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Comparando com $tr\left(\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R\right)$ observamos a presença de novos termos, $m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^\mu$, $S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^2$, $(\nabla S)\,\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}(\nabla S)$ e $S_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^{\mu\nu}$, e do único termo do traço de $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R$ que não é de vácuo, $S^2\Sigma_{\hat{P}R}R$. Porém, assim como no traço de $\hat{P}\Sigma_{\hat{P}R}R$, também aqui esse termo é eliminado pela escolha $\kappa=-1$, no entanto, esta escolha elimina também os termos $S^2\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}S^2$ e $(\nabla S)\,\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}(\nabla S)$. Veremos, adiante, as implicações desta escolha e estaremos interessados em $d=4$, dimensão para a qual, esta estrutura também corresponde a divergências logarítmicas.

3.3.4. A estrutura $\hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}$

Finalmente, utilizando a equação (3.22) e os resultados da expressão (3.24) obtemos o traço da estrutura $\hat{S}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}$,

$$\begin{aligned}
& tr\left(\hat{S}_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}^{\mu\nu}\right)_{(\kappa,\alpha)} = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]} \\
\times & \left\{\frac{(\alpha-1)^2}{4}\left[(\alpha-1)^2 d(1-d)\,m^4\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}+2m^2\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}R\right]-\frac{1}{8}R_{\mu\nu\alpha\beta}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right. \\
+ & (\alpha-1)^2(3\kappa+1)(3+\kappa)(d-1)\frac{1}{2}\eta^2 m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}S^\mu \\
+ & \left[(\kappa+1)^2(d-3)+4\kappa\right]\frac{1}{4}\eta^2 S_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}S^{\mu\nu} \\
+ & (\kappa+1)^2\left\{(4-d)\frac{1}{2}\eta^2 R_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}S^\mu S^\nu-\frac{1}{2}\eta^2 S^2\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}R\right\} \\
+ & (\kappa+1)^2(n-1)\left\{(\kappa+1)^2(2-d)\frac{1}{4}\eta^4 S^2\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}S^2+\frac{1}{2}\eta^2(\nabla S)\,\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}(\nabla S)\right\} \\
+ & \left.(\kappa+1)^2(\alpha-1)^2[(3d-7)(d-2)-4]\frac{1}{2}\eta^2 m^2 S_\mu\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}S^\mu\right\}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Mais uma vez omitimos detalhes de cálculo devido ao grande desenvolvimento algébrico necessário para obtenção dessas expressões. Omitindo os termos de vácuo, a expressão se reduz a

$$\begin{aligned}
tr\hat{S}_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}\hat{S}^{\mu\nu}_{(\kappa,\alpha)} &= 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(\alpha-1)^2(3\kappa+1)(3+\kappa)(d-1)\frac{1}{2}\eta^2 m^2 S_\mu \Sigma_{\hat{S}\hat{S}} S^\mu \\
&+ 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\left[(\kappa+1)^2(d-3)+4\kappa\right]\frac{1}{4}\eta^2 S_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}} S^{\mu\nu} \\
&+ 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(\kappa+1)^2\left\{(4-d)\frac{1}{2}\eta^2 R_{\mu\nu}\Sigma_{\hat{S}\hat{S}} S^\mu S^\nu - \frac{1}{2}\eta^2 S^2 \Sigma_{\hat{S}\hat{S}} R\right\} \\
&+ 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(\kappa+1)^2(d-1)\left\{(\kappa+1)^2(2-d)\frac{1}{4}\eta^4 S^2\Sigma_{\hat{S}\hat{S}} S^2 + \frac{1}{2}\eta^2(\nabla S)\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}(\nabla S)\right\} \\
&+ 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(\kappa+1)^2(\alpha-1)^2\left[(3d-7)(d-2)-4\right]\frac{1}{2}\eta^2 m^2 S_\mu \Sigma_{\hat{S}\hat{S}} S^\mu, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

e, assim, completamos o cálculo de todas as estruturas necessárias para obtenção da ação efetiva (2.41) ou, analogamente, (3.2).

3.3.5. Análise dos traços

Antes de seguir adiante e analisar a dependência da forma explícita da ação efetiva com relação a escolha do operador auxiliar, dependência do parâmetro κ, a fim de confirmar ou não a peresença da ANL, na presença da torção, vamos comentar alguns aspectos dessas expressões que, por terem sido obtidas através de um mecanismo de generalização, nos permitem algumas inferências gerais e independentes dos resultados do cálculo dos fatores de forma, (A.11), (A.12) e (A.13), obtidos na seção A.1.4 do apêndice B.

- Primeiro observamos que apenas termos proporcionais a massa carregam o parâmetro α, assim como, apenas termos proporcionais a torção carregam o parâmetro κ. Termos de vácuo, como $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ e R^2, não possuem dependência alguma com relação a estes parâmetros. O termo de massa pura m^4 possui dependência apenas com o parâmetro α. E termos contendo apenas a torção, S^4, $(\nabla S)^2$ e $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$, possuem dependência apenas do parâmetro κ;

- Observamos que, para o traço das três estruturas $\hat{P}R$, $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$, o termo RS^2 é nulo (independentemente da dimensão) para a escolha $\kappa = -1$, ou seja, para o operador auxiliar (2.49) esse termo de fato não está presente nas correções quânticas;

- A escolha $\kappa = -1$ também elimina os termos S^4 e $(\nabla S)^2$ do traço das estruturas $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$, nas quais, eles aparecem;

- O termo $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ está presente tanto no traço de $\hat{P}\hat{P}$ quanto no traço de $\hat{S}\hat{S}$, independente da escolha do parâmetro κ;

- O termo m^2S^2 é o mais rico de possibilidades pois apresenta dependência tanto do parâmetro κ quanto de α. Quando $\kappa = -1$ ele está presente no traço de $\hat{P}\hat{P}$ para $\alpha = 1$, porém quando tomamos $\alpha = -1$, ele migra para o traço de $\hat{S}\hat{S}$ e, como cada um desses traços está associado a fatores de forma distintos, veja seção 3.2.2, isso apresenta um indicativo de que este termo possa apresentar diferenças no setor não-local quando consideramos a transformação de reversão da massa. Ao confirmarmos essa dependência do setor não-local com relação ao parâmetro α dentro da mesma escolha de operador auxiliar, ou seja, não estamos, por exemplo, comparando $\kappa = -1$ com $\kappa = 0$, estaremos revelando um novo aspecto da ANL associado a transformação de reversão da massa e muito importante porque não depende do parâmetro κ;

- Ainda com relação ao termo m^2S^2, só que agora considerando $\kappa = 0$, observamos o mesmo ocorrido para $\kappa = -1$, com a diferença que para $\alpha = -1$, este termo aparece tanto no traço de $\hat{P}\hat{P}$ quanto no traço de $\hat{S}\hat{S}$, enquanto que para $\alpha = 1$ ele permanece apenas no traço de $\hat{P}\hat{P}$. Assim, tanto para $\kappa = 0$ quanto para $\kappa = -1$ deve ser observado uma diferença entre as partes finitas quando a comparação levar em consideração apenas o parâmetro α;

- E, por fim, o termo $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$, presente apenas no traço de $\hat{S}\hat{S}$, é completamente eliminado para $d = 4$, a dimensão física a qual estamos interessados, ou para $\kappa = -1$;

Prosseguimos agora com uma análise a cerca das divergências logarítmicas, um passo intermediário importante, antes de reunir os resultados obtidos com o cálculo dos traços, nesta seção, com aqueles obtidos com o cálculo dos fatores de forma, na seção 3.2.

3.4. Divergências logarítmicas (DL)

No decorrer desta seção vamos buscar explicitar a universalidade das divergências logarítmicas[9] utilizando-se dos resultados obtidos na seção anterior com o cálculo do traço das estruturas $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$.

A expansão de Schwinger-DeWitt é a expansão do kernel $K(s|x,y)$ em potências do parâmetro s do tempo próprio. Para o traço de $K(s)$ a expansão assume a forma [12]

$$TrK(s) \equiv \frac{1}{(4\pi s)^\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int dx\, g^{1/2} tr a_n(x,x), \tag{3.31}$$

em que, $a_n(x,x)$ são os coeficientes de Schwinger-DeWitt com argumentos coincidentes. Estes, são funções locais dos campos externos que entram no operador do heat kernel. Para o operador (3.20), na dimensão espaço-temporal $d = 4$, as divergências logarítmicas[10] são definidas com $n = 2$, de modo que

$$\int dx\, g^{1/2} tr a_2(x,x) = \int dx\, g^{1/2} tr \left\{ \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{12}\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu} \right\}, \tag{3.32}$$

na qual, omitimos os termos de vácuo proporcionais ao tensor de curvatura de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ e ao tensor de Ricci $R^\rho{}_{\sigma\rho\nu} = R_{\sigma\nu}$. A teoria perturbativa covariante [13, 16, 17] corresponde a uma *resoma* da série de Schwinger-DeWitt, para a qual, as divergências logarítmicas correspondem a termos de segunda

[9] Utilizaremos a abreviação DL para a expressão "divergências logarítmicas" apenas para simplificar os títulos das subseções, desta seção.

[10] É claro que para perceber as divergências logarítmicas é necessário efetuar a integração sobre o tempo próprio, como na equação (2.21).

ordem em potências de curvatura e estão associadas a fatores de forma não locais (3.4)

$$\int dxg^{1/2} tr a_2(x,x) = \int dxg^{1/2} tr\left\{\hat{P} f_4(\tau)\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu} f_5(\tau)\hat{S}^{\mu\nu}\right\}, \tag{3.33}$$

em [17] é demonstrado que as funções $f_i(\tau)$, para τ-pequeno[11], recuperam a forma (3.32) da série de Schwinger-DeWitt. Assim, espera-se que, após regularizar as integrais divergentes oriundas dos fatores de forma, além de extrair uma estrutura finita, a forma (3.32) das divergências seja recuperada confirmando, assim, a universalidade das divergências logarítmicas, ou seja, a estrutura das divergências logarítmicas de uma teoria não deve depender das diferentes técnicas que podem ser utilizadas para obtê-las, ao representar o determinante funcional por meio de uma série, ou para manipulá-la a fim de extrair uma contribuição finita correspondente a correção quântica à teoria.

Assim sendo, consideraremos os resultados de (3.27) e (3.29), incluíndo os termos de vácuo contidos nestas estruturas, para confirmar a independência das divergências logarítmicas com relação aos parâmetros κ, que acompanha o termo referente a torção no operador auxiliar, e α, que refere-se a transformação de reversão da massa. Vale ressaltar que num primeiro momento não estaremos considerando os fatores de forma, ou seja, estaremos trabalhando no contexto da expansão local de Schwinger-DeWitt para, num momento seguinte, incluir os fatores de forma e analisar o setor divergente quanto a preservação da sua forma no contexto da expansão perturvativa covariante. Assim, teremos mais um mecanismo para comprovar a independência dos resultados com relação aos parâmetros κ e α.

Para simplificar as expressões, vamos repetir o mesmo resultado porém especificando um dos parâmetros κ, α ou d (dimensão do espaço-tempo) para evidenciar a dependência com os demais.

3.4.1. DL com κ e α arbitrários

Num primeiro momento, fixamos $d = 4$ e mantemos os parâmetros κ e α arbitrários nas expressões (3.27) e (3.29), e substituímos estes resultados na expressão (3.33) para o coeficiente a_2 na expansão covariante de modo que

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}Tr\left(\hat{P}\hat{P}\right) + \frac{1}{12}Tr\left(\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}\right)\right]_{(\kappa,\alpha)} \\
=\ & \left(\alpha^4+1\right)m^4 + \frac{1}{3}\left(\kappa^2+1\right)\eta^2 S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \\
+\ & 4\left\{-\frac{1}{24}\left(\alpha^2+1\right)m^2 R + \frac{1}{288}R^2 - \frac{1}{96}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right\} \\
+\ & \left[\frac{1}{2}(\alpha-1)^2(\kappa+3)(3\kappa+1) - \left(\alpha^2+1\right)(\kappa+1)^2\right]\eta^2 m^2 S^2 \\
-\ & 2\left[\frac{3}{2}(1-\alpha)(\kappa+1) - \kappa + \alpha\right]^2 \eta^2 m^2 S^2,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e observamos que termos de vácuo como R^2 não dependem de nenhum dos parâmetros, κ ou α, como já foi observado na subseção 3.3.5. O termo $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$, dependente do campo de fundo S_μ, é proporcional

[11] O parâmetro τ relaciona-se com o parâmetro do tempo próprio pela igualdade $\tau = -s\Box$.

apenas a κ^2+1 e o termo de massa pura m^4 é proporcional apenas a α^4+1. O termo misto m^2S^2 possui um fator numérico mais complexo, ele depende tanto de κ quanto de α, conforme observado na subseção 3.3.5.

É importante perceber que apesar da aparente dependência com o parâmetro de massa α, veremos que qualquer das escolhas $\alpha=\pm 1$, levam ao mesmo coeficiente, comprovando assim, a independência das divergências logarítmicas com relação à transformação de reversão da massa, conforme mostrado em [41]. Por exemplo, o coeficiente do termo de massa pura m^4 é $\left(\alpha^4+1\right)$, assim, este coeficiente resultará num fator numérico igual a 2 independente do sinal da massa, ou seja, independente do valor do fator α $(=\pm 1)$.

3.4.2. DL para κ e d arbitrários e $\alpha=\pm 1$

Como explanado acima, todos os coeficientes na expressão (3.34) não dependem do sinal de α de modo que para $\alpha=\pm 1$,

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}Tr\left(\hat{P}\hat{P}\right)+\frac{1}{12}Tr\left(\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}\right)\right]_{\kappa}^{\alpha=\pm 1} \\
= \;& 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\left\{\frac{1}{2}m^4-\frac{1}{12}m^2R+\frac{1}{288}R^2-\frac{1}{96}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right\} \\
+ \;& 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(1+\kappa)^2\frac{(d-4)}{24}\left[\frac{1}{2}\eta^2S^2R-\eta^2R_{\mu\nu}S^{\mu}S^{\nu}\right] \\
+ \;& 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(1+\kappa)^2\frac{(d-4)}{24}\left[(1+\kappa)^2(d-2)\frac{1}{4}\eta^4S^4+\eta^2(\nabla S)^2\right] \\
+ \;& 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{1}{48}\left[(1+\kappa)^2(d-3)+3(1-\kappa)^2+4\kappa\right]\eta^2S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \\
+ \;& 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{1}{4}\left[(d-2)(\kappa+1)^2+2(1-\kappa)^2\right](-)\eta^2m^2S^2,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

em que, deixamos o parâmetro d, que designa a dimensão do espaço-tempo, a ser definido, para observar que para $d=4$ não existem divergências logarítmicas associadas aos termos S^2R, $R_{\mu\nu}S^{\mu}S^{\nu}$, S^4 e $(\nabla S)^2$. As divergências logarítmicas associadas a estes termos além de estarem ausentes para $d=4$ também estão para $\kappa=-1$ como já haviamos observado nas expressões (3.27) e (3.29), correspondentes, respectivamente, ao traço de $\hat{P}\hat{P}$ e traço de $\hat{S}\hat{S}$.

3.4.3. DL com $\alpha=\pm 1$, $d=4$ e κ arbitrário

Fazendo $d=4$ em (3.35) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}Tr\left(\hat{P}\hat{P}\right)+\frac{1}{12}Tr\left(\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}\right)\right]_{(\kappa,d=4)}^{(\alpha=\pm 1)} \\
= \;& 4\left\{\frac{1}{2}m^4-\frac{1}{12}m^2R+\frac{1}{288}R^2-\frac{1}{96}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right\} \\
+ \;& \left(\kappa^2+1\right)\left[\frac{1}{3}\eta^2S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}-4\eta^2m^2S^2\right],
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

ou seja, as divergências logarítmicas de fato independem da transformação de reversão da massa e nenhum outro termo além daqueles que contém a torção, dependem do parâmetro κ. Porém, a dependência com o parâmetro κ, neste caso, a nível das divergências logarítmicas, não implica numa diferença nos resultados devido à dependência da escolha do operador auxiliar. A presença de κ no coeficiente que acompanha os termos $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ e m^2S^2 representa apenas uma lembrança dos diferentes mecanismos que utilizamos para justificar as duas possibilidades de operador auxiliar, (2.46) e (2.49). Lembramos que a ação efetiva a 1-loop (2.15) foi reescrita em termos do operador composto, o operador fermiônico de segunda ordem, de duas formas distintas. Na primeira, para $\kappa = 0$, obtivemos (2.45), e na segunda, para $\kappa = -1$, obtivemos (2.51). A relação entre estas duas escolhas se dá por meio de um fator $1/2$ que surge na ação (2.51), ou seja, ao escolher $\kappa = -1$ devemos multiplicar este fator por $1/2$ e, aí então, podemos comparar com a escolha $\kappa = 0$. Com isso, estamos comprovando o óbvio, ou seja, apesar da ação (2.51) compreender todos os termos em (3.36) o fator $1/2$ que a acompanha não atua sobre os termos de vácuo, mas apenas sobre termos com o campo de fundo. Se considerássemos o fator $1/2$ atuando em toda a equação (3.36), estaríamos cometendo um grave erro ao comparar as duas ações, (2.45) e (2.51).

Agora, finalmente, vamos reunir os resultados do cálculo dos fatores de forma (3.17) com os resultados obtidos com o cálculo dos traços (3.26), (3.27) e (3.29). Esperamos que a parte divergente satisfaça a relação das divergências logarítmicas (3.36) e, também, esperamos observar onde ocorre a diferença entre as ações (2.45) e (2.51) na parte finita não-local, já que as análises preliminares, seção 3.2.2 e 3.3.5, indicam a presença da ANL, ao menos devido à transformação de reversão da massa.

3.5. Reunindo resultados

Para melhor analisarmos os resultados vamos dividir nossa análise em quatro partes. A primeira contendo os termos S^2R, $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$, a segunda os termos S^4 e $(\nabla S)^2$ e, em seguida, a terceira e quarta partes, dedicadas a cada um dos termos $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ e m^2S^2, respectivamente.

3.5.1. Os termos S^2R e $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$

O termo S^2R é o único que aparece no traço das três estruturas $\hat{P}R$, $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$. O termo $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$ aparece apenas no traço de $\hat{S}\hat{S}$. Vamos extrair das expressões (3.26), (3.27) e (3.29), correspondentes aos traços destas estruturas, apenas as parcelas correspondentes aos termos S^2R e $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$, ou seja,

$$tr\hat{P}_\kappa R = \frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{4}(\kappa+1)^2(2-d)\,\eta^2S^2R, \tag{3.37}$$

$$tr\hat{P}\hat{P}_\kappa = -\frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{24}(\kappa+1)^2(2-d)\,\eta^2S^2R, \tag{3.38}$$

$$tr\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}_\kappa = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{(\kappa+1)^2}{2}\left\{(4-d)\,\eta^2R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu - \eta^2S^2R\right\}, \tag{3.39}$$

agora reunimos estes resultados com os fatores de forma seguindo a expressão (3.7),

$$
\begin{aligned}
& tr\left[\hat{P}\mathscr{F}_3 R + \hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}\right]_\kappa \\
= \; & 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{(\kappa+1)^2}{24}\eta^2 S_\mu S^\mu\left[(2-d)(6\mathscr{F}_3-\mathscr{F}_4)-12\mathscr{F}_5\right]R \\
+ \; & 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{(\kappa+1)^2}{2}(4-d)\,\eta^2 R_{\mu\nu}\left[\mathscr{F}_5\right]S^\mu S^\nu, \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

a partir da qual, observamos que para $d=4$ o termo $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$ não contribui para a ação efetiva e o termo S^2R gera a seguinte contribuição

$$
\overline{\Gamma}^{(1)}_{RS^2} = -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^4x g^{1/2}\frac{(\kappa+1)^2}{3}\eta^2 S_\mu S^\mu\left[6\mathscr{F}_3-\mathscr{F}_4+6\mathscr{F}_5\right]R, \qquad (3.41)
$$

porém, observamos na seção A.1.4, do apêndice, que $\mathscr{F}_3$ é essencialmente finito[12] e a combinação $-\mathscr{F}_4+6\mathscr{F}_5$ resulta exatamente em $-6\mathscr{F}_3$, logo, a contribuição $\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^2R}$ para a ação efetiva é identicamente nula, independentemente da escolha de κ. Com isso, a ação efetiva (3.16), para $d=4$, se reduz à

$$
\overline{\Gamma}^{(1)}_{s^2} = \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}}. \qquad (3.42)
$$

Este resultado foi antecipado na seção 3.2.2, e comprova a vantagem de organizar os resultados em termos das integrais da seção 3.2.1 antes de efetuar qualquer cálculo evitando, com isso, cálculos desnecessários.

3.5.2. Os termos S^4 e $(\nabla S)^2$

Isolamos das expressões (3.27) e (3.29) as contribuições referentes apenas aos temos S^4 e $(\nabla S)^2$, assim,

$$
tr\hat{P}\hat{P}_\kappa = \frac{2^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{16}(\kappa+1)^2\left\{(\kappa+1)^2(2-d)^2\eta^4 S^4 - 4\eta^2(\nabla S)^2\right\}, \qquad (3.43)
$$

$$
\begin{aligned}
tr\hat{S}_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}_\kappa = \; & 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}(\kappa+1)^2(d-1) \\
\times \; & \left\{(\kappa+1)^2(2-d)\frac{1}{4}\eta^4 S^4 + \frac{1}{2}\eta^2(\nabla S)^2\right\}. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Ao reunir estes resultados com os fatores de forma, seguindo a expressão (3.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
& tr\left[\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu}\mathscr{F}_5\hat{S}^{\mu\nu}\right]_\kappa \\
= \; & 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{(\kappa+1)^4}{4}\eta^4 S_\mu S^\mu(\mathscr{F}_4-6\mathscr{F}_5)S_\nu S^\nu \\
- \; & 2^{\left[\frac{d}{2}\right]}\frac{(\kappa+1)^2}{4}\eta^2\nabla_\mu S^\mu(\mathscr{F}_4-6\mathscr{F}_5)\nabla_\nu S^\nu, \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

[12]Veja também a discussão na seção 3.2.3.

assim, observamos de imediato que estes termos não estão presentes para $\kappa = -1$, mas sobrevivem para $\kappa = 0$, o que indica algo estranho, pois, se as divergências logarítmicas são de fato universais e por isso devem independer da escolha do operador auxiliar, então, o setor divergente desses termos deve ser cancelado, pois eles não estão presentes na estrutura (3.36), no entanto, certamente deixarão uma contribuição finita. É possível observar que $6\mathscr{F}_3 = \mathscr{F}_4 - 6\mathscr{F}_5$, na qual, $\mathscr{F}_3$ é um fator de forma essencialmente finito. Esta não é uma diferença de um fator numérico que multiplica um mesmo termo presente nas duas escolhas, mas sim, uma diferença de termos, que numa escolha estão presentes e na outra não, ou seja, para $\kappa = 0$ temos os termos (a parte finita) adicionais S^4 e $(\nabla S)^2$, ausentes para $\kappa = -1$. Estes termos são produto essencialmente do setor finito pois eles não estão presentes nas divergências logarítmicas.

Ou seja, o setor finito dos fatores de forma está gerando termos novos quando $\kappa = 0$, estas quantidades são geradas artificialmente pois as divergências logarítmicas naturais da teoria (3.36) não contemplam estes termos, todavia, após representar estas divergências pelos fatores de forma, ao regularizá-las, as divergências se cancelam mantendo a estrutura original, mas, uma parte finita sem a sua contra parte divergente é gerada, dessa forma, é como se estas contribuições finitas estivessem sendo geradas do nada.

Vejamos esta questão com mais detalhes. Designamos a contribuição à ação efetiva, devido a estes termos, por $\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2}$. A ação efetiva em $d = 4$ e, portante, esta sua parcela, correspondem a divergências logarítmicas. Esta parcela origina-se da contribuição de cada uma das estruturas $\hat{P}\hat{P}$ e $\hat{S}\hat{S}$. Considerando um momento anterior a manipulação das divergências, vemos, na subseção 3.4.1, eq. (3.34), que ao fixarmos a dimensão do espaço-tempo em $d = 4$, $\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2} = 0$. Na subseção 3.4.2, eq. (3.35), também é possível observar que a escolha $d = 4$ elimina estes termos das divergências. Finalmente na seção 3.4.3, eq. (3.36), vemos que as divergências logarítmicas, excetuando-se os termos de vácuo, contemplam apenas os termos $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ e m^2S^2.

Porém, ao regularizar as divergências introduzindo os fatores de forma, ou seja, $\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}$ e $\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}$, a fim de extrair uma parte finita, a estrutura finita não-local das divergências, de tal farma que

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2} &= \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{P}\mathscr{F}_4\hat{P}} + \overline{\Gamma}^{(1)}_{\hat{S}\mathscr{F}_5\hat{S}} \\
&= \overline{\Gamma}^{(1)\hat{P}\hat{P}}_{Div} + \overline{\Gamma}^{(1)\hat{P}\hat{P}}_{Fin} + \overline{\Gamma}^{(1)\hat{S}\hat{S}}_{Div} + \overline{\Gamma}^{(1)\hat{S}\hat{S}}_{Fin} \\
&= \overline{\Gamma}^{(1)\hat{P}\hat{P}}_{Fin} + \overline{\Gamma}^{(1)\hat{S}\hat{S}}_{Fin},
\end{aligned}
$$

assim, a parte divergente é eliminada, porém, a estrutura finita é não trivial e acaba por gerar uma situação inusitada nas correções quânticas, ou seja, a ação efetiva adquire uma contribuição finita para termos não presentes nas divergências da teoria. Considerando $d = 4$ e $\kappa = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x g^{1/2}\left\{\eta^2\nabla_\mu S^\mu\left(-\mathscr{F}_4 + 6\mathscr{F}_5\right)\nabla_\nu S^\nu\right. \\
&- \left.\eta^4 S_\mu S^\mu\left(-\mathscr{F}_4 + 6\mathscr{F}_5\right)S_\nu S^\nu\right\}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

a dependência deste resultado com a estrutura específica dos fatores de forma é comprovada pela relação $6\mathscr{F}_3 = \mathscr{F}_4 - 6\mathscr{F}_5$, com a qual é possível perceber que a combinação dos fatores de forma associada a estes termos é idêntica a um fator de forma essencialmente finito, o $\mathscr{F}_3$. Seguindo adiante e substituíndo explicitamente os resultados obtidos com o cálculo dos fatores de forma obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2} &= -\frac{1}{2\,(4\pi)^2}\int d^4x\, g^{1/2}\left\{\eta^2\nabla_\mu S^\mu\left(-\frac{1}{2\varepsilon}-A+\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{4A}{a^2}+\frac{1}{3}\right)\nabla_\nu S^\nu\right.\\ &- \left. S_\mu S^\mu\left(-\frac{1}{2\varepsilon}-A+\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{4A}{a^2}+\frac{1}{3}\right)S_\nu S^\nu\right\},\end{aligned} \tag{3.47}$$

ou,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(1)}_{S^4,(\nabla S)^2} &= -\frac{1}{2\,(4\pi)^2}\int d^4x\, g^{1/2}\left\{\eta^2\nabla_\mu S^\mu\left(\frac{4}{u}A+\frac{1}{3}\right)\nabla_\nu S^\nu\right.\\ &- \left.\eta^4 S_\mu S^\mu\left(\frac{4}{u}A+\frac{1}{3}\right)S_\nu S^\nu\right\},\end{aligned} \tag{3.48}$$

na qual, usamos o fato de que $a^{-2}=u^{-1}+4^{-1}$. Percebemos, ainda, que há uma estrutura não-local e outra local, proporcional a $1/3$.

3.6. Grupo de Renormalização e Função Beta

Nesta seção, descreveremos o efeito da ANL na renormalização do cálculo do parâmetro de acoplamento η e mostraremos que a função beta confirma a versão generalizada do teorema de desacoplamento de Appelquist e Carazzone [48], porém, para cada escolha de κ e α ou, equivalentemente, para cada escolha do operador auxiliar, um mesmo termo pode apresentar fatores numéricos distintos confirmando a presença da ANL. Vamos considerar o cálculo da função beta no esquema de renormalização dependente de massa [49,50], no qual, a partir do fator de forma, subtraímos os contratermos no momento $p^2=M^2$, com M sendo o ponto de renormalização.

Para obter a função beta para o parâmetro de acoplamento efetivo η, vamos aplicar o operador

$$-\lim_{n\to 4} p\frac{d}{dp} = \lim_{n\to 4}\frac{4-a^2}{4}a\frac{d}{da}, \tag{3.49}$$

aos fatores de forma, ou a suas partes finitas, $\Sigma_{\hat{P}R}(a)$, $\Sigma_{\hat{P}\hat{P}}(a)$ e $\Sigma_{\hat{S}\hat{S}}(a)$, pois os termos gerados pela teoria, a partir do cálculo da ação efetiva a 1-loop, aparecem em combinações destes. Na expressão acima temos a relação $u=p^2/m^2=4a^2/\left(4-a^2\right)$. Por conveniência, definimos $\frac{d}{da}\equiv'$, ou seja, o sobre-índice "linha" representará a derivada em relação ao parâmetro "a", e atuamos com o operador (3.49) sobre os fatores de forma para obter

$$\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}R} = \frac{(4-a^2)}{4}a\left[\left(12-a^2\right)\frac{A}{6a^3}+\frac{1}{6a}\right], \tag{3.50}$$

$$\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}\hat{P}} = -\frac{a^2}{4}-\frac{(4-a^2)}{4}\left[1+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right], \tag{3.51}$$

$$\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{S}\hat{S}} = -\frac{1}{6} - \frac{(4-a^2)}{2a^2}\left[1+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right]. \tag{3.52}$$

Reunindo os resultados acima com os das expressões[13] (3.26), (3.28) e (3.30), e tomando $d=4$, obtemos os resultados da tabela abaixo correspondentes a função beta de cada termo obtido pela teria (excetuando-se os termos de vácuo) nas correções a 1-loop da ação efetiva,

Tabela 3.1.: Função Beta.

	$-\lim\limits_{n\to 4} p\frac{d}{dp} = \lim\limits_{n\to 4} \frac{4-a^2}{4}a\frac{d}{da}$
$\eta^2 S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$	$\beta_\eta^{S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{\frac{1}{2}(\kappa-1)^2\left(-\frac{a^2}{4}-\frac{(4-a^2)}{4}\left[1+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right]\right) + \left[(\kappa+1)^2+4\kappa\right]\left(-\frac{1}{6}-\frac{(4-a^2)}{2a^2}\left[1+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right]\right)\right\}$
$\eta^2 S^2 R$	$\beta_\eta^{S^2R}=0$
$\eta^4 S^4$	$\beta_\eta^{S^4} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{6(\kappa+1)^4\frac{(4-a^2)}{24a^2}\left[12+\frac{(12-a^2)}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right]\right\}$
$\eta^2(\nabla S)^2$	$\beta_\eta^{(\nabla S)^2} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{-6(\kappa+1)^2\frac{(4-a^2)}{24a^2}\left[12+\frac{(12-a^2)}{a}\ln\left(\frac{a-2}{a+2}\right)\right]\right\}$

3.6.1. Regime UV

Para o regime UV, tomamos o limite de $a\to 2$ sobre os resultados das tabelas anteriores, (3.1) e (**??**), de modo que

$$\lim_{a\to 2}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}R}\right] = 0,$$

$$\lim_{a\to 2}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}\hat{P}}\right] = -1,$$

$$\lim_{a\to 2}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{S}\hat{S}}\right] = -\frac{1}{6},$$

e obtemos a tabela dos termos no regime UV dada por

Na tabela (3.2), acima, é possível observar que qualquer escolha de κ fornecerá um fator 2/3[14] para o termo $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$, ou seja, a função beta no UV não é sensível a escolha de operador auxiliar. Os demais termos não apresentam correção a 1-loop à função beta no regime UV.

[13] Lembramos que estas expressões desconsideram os termos de vácuo.

[14] É importante lembrar que para as escolhas de operador auxiliar $\kappa=\pm 1$ fizemos uso da identidade $\ln\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2}\ln\hat{\mathscr{H}}$ e, ainda, para teorias fermiônicas as variáveis de Grassman geram um fator negativo na ação efetiva, de modo, que para visualizar o fator 2/3 para $\kappa=\pm 1$ devemos multiplicar a expressão por $-1/2$. Para o caso de $\kappa=0$ basta considerar o fator negativo.

Tabela 3.2.: Tabela para o regime UV ($a \to 2$).

$\eta^2 S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$	$\left(\beta_\eta^{S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\right)_{UV} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{-\frac{1}{2}(\kappa-1)^2 - \frac{1}{6}(\kappa+1)^2 - \frac{2}{3}\kappa\right\}$
$\eta^2 S^2 R$	$\left(\beta_\eta^{S^2 R}\right)_{UV} = 0$
$\eta^4 S^4$	$\left(\beta_\eta^{S^4}\right)_{UV} = 0$
$\eta^2 (\nabla S)^2$	$\left(\beta_\eta^{(\nabla S)^2}\right)_{UV} = 0$

3.6.2. Regime IR

Para o regime IR, tomamos o limite de $a \to 0$ sobre os resultados das tabelas (3.1) e (**??**), de modo que

$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{S}\hat{S}}\right] = -\frac{1}{60}\frac{p^2}{m^2} + \mathscr{O}\left(\frac{p^4}{m^4}\right), \tag{3.53}$$

$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}\hat{P}}\right] = -\frac{1}{6}\frac{p^2}{m^2} + \mathscr{O}\left(\frac{p^4}{m^4}\right), \tag{3.54}$$

$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{4-a^2}{4}a\Sigma'_{\hat{P}R}\right] = -\frac{1}{90}\frac{p^2}{m^2} + \mathscr{O}\left(\frac{p^4}{m^4}\right). \tag{3.55}$$

Nestas expressões os resulados estão escritos em termos do quadrado do momento externo p^2 e da massa do férmion m. Observamos que os termos dominantes são proporcionais a p^2/m^2 o qual é muito peque no regime IR ($p^2 \ll m^2$), portanto, o teorema de desacoplamento de Appelquist e Carazzone definitivamente é preservado no caso da torção.

Substituindo estes resultados nas tabelas (3.1) e (**??**) obtemos

Tabela 3.3.: Tabela para o regime IR ($a \to 0$).

	$-\lim\limits_{n\to 4} p\frac{d}{dp} = \lim\limits_{n\to 4}\frac{4-a^2}{4}a\frac{d}{da}$
$\eta^2 S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$	$\beta_\eta^{S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{12}\left\{-(\kappa-1)^2 - \frac{1}{5}\left[(\kappa+1)^2 + 4\kappa\right]\right\}\frac{p^2}{m^2}$
$\eta^2 S^2 R$	$\beta_\eta^{S^2 R} = 0$
$\eta^4 S^4$	$\beta_\eta^{S^4} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{-\frac{1}{15}(\kappa+1)^4\frac{p^2}{m^2}\right\}$
$\eta^2 (\nabla S)^2$	$\beta_\eta^{(\nabla S)^2} = \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}\left\{\frac{1}{15}(\kappa+1)^2\frac{p^2}{m^2}\right\}$

Neste limite, $\kappa = 0, 1$ fornece valore aos termos S^4 e $(\nabla S)^2$. E $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ possui um fator distinto para cada escolha.

4. Conclusão e comentários finais

Ao longo deste trabalho nos valemos de propriedades gerais da ação efetiva fermiônica no espaço-tempo curvo com torção para obter diferentes porém equivalentes formas de gerar um operador fermiônico de segunda ordem e, consequentemente, as correções quântica a 1-loop. Deduzimos um operador auxiliar para o qual existem 6 formas distintas de escreve-lo, tais formas foram associadas aos parâmetros $\kappa = 0, \pm 1$ e $\alpha = \pm 1$, os quais representam coeficientes do termo de torção e massa, respectivamente, expresso pela equação (3.23). Estas possibilidades foram produzidas observando, por exemplo, a invariância da ação ou, analogamente, das equações clássicas, frente o termo de torção, $k = 0$, ou ainda, a equivalência da álgebra das matrizes de Dirac (álgebra de Clifford) com relação a troca $\gamma^\mu \to -\gamma^\mu$, ou seja, $\kappa = \pm 1$. Também nos valemos da invariância frente a transformação de reversão do termo de massa, $\alpha = \pm 1$. Associando estas generalizações com o fato de que a ação efetiva pode ser escrita em termos de um determinante funcional de uma matriz de dimensão infinita, decompomos a estrutura divergente representada por esta matriz em uma parte finita não-local e outra logaritmicamente divergente. Em seguida, constatamos a universalidade das divergências logarítmicas, a independência das estruturas logaritmicamente divergentes com relação as possíveis escolhas do operador auxiliar, comprovando dessa forma que estas escolhas de fato são equivalentes, por outro lado, verificamos que a propriedade multiplicativa do determinante, $\det \hat{\mathscr{H}} \hat{\mathscr{H}}_{(\kappa\alpha)} = \det \hat{\mathscr{H}} \cdot \det \hat{\mathscr{H}}_{(\kappa\alpha)}$, não é satisfeita pelos termos finitos, ou seja, há uma dependência da parte finita com relação a escolha do operador auxiliar de modo que, a identidade $\det \hat{\mathscr{H}} \hat{\mathscr{H}}_{(1,\alpha)} = \det \hat{\mathscr{H}} \hat{\mathscr{H}}_{(-1,\alpha)}$ se mostra falha para os termos finitos mesmo que as escolhas devam ser equivalentes.

As consequências desse fato é que as arbitrariedades intrinsecas a ação efetiva a 1-loop geram ambiguidades nas correções quânticas da teoria. Dessa forma, no cálculo da função beta, constatamos que o regime IR é sensível a ANL, estando assim, altamente contaminado por discrepâncias devido as possíveis escolha do operador auxiliar.

4.1. Contribuições do presente trabalho

Implementamos a generalização das possíveis escolhas do operador auxiliar que nos permitiram efetuar um único cálculo para todas as seis possibilidades e com isso, analisar cada termo gerado pela expansão a 1-loop da ação efetiva, para as seis possibilidades por meio de uma única expressão;

Determinamos ambiguidades que comprometem a consistência da teoria, como a presença dos termos S^4 e $(\nabla S)^2$ essencialmente finitos;

Identificamos a melhor escolha de método da expansão da ação a 1-loop no contexto do heat kernel a fim de evitar quantidades espurias;

Comprovamos a universalidade das divergências logarítmicas;

Pela primeira vez verificou-se a ANL associada ao termo massivo;

Nossos resultados forma obtidos no contexto de um único regulador de modo que não existem ambiguidades devido a comparação de diferentes técnicas de regularização;

Garantimos que a ANL não está associada a nenhum parâmetro externo como o parâmetro de renormalização, já que em nenhum momento fizemos qualquer referência a este parâmetro, além da sua simples presença no contexto do esquema de subtração mínima;

E, ainda, deixamos um legado para trabalhos futuros que envolvam o cálculo da ação efetiva por meio do operador de campo fermiôncio acoplado ao axial vetor, que é o fato de que a forma como se dará a expansão em termos desse operador, deve depender de suas possíveis escolhas;

4.2. Resumo da análise dos termos

Aqui, apresentaremos uma síntese de resultados.

4.2.1. Correções a 1-loop

Constatação da universalidade das divergências logarítmicas;

Constatação da ANL para férmions no espaço-tempo curvo com torção;

4.2.2. Regime UV

Para $\kappa = 0,1$ identificamos termos, S^4 e $(\nabla S)^2$, essencialmente finitos para os quais a parte divergente se cancela.

No regime UV, da função beta, o termo $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ produz um único fator indepentente da escolha de κ, os termos S^2R, S^4, $(\nabla S)^2$ desaparecem. Já o termo massivo m^2S^2, para $\alpha = 1$ gera o mesmo fator independente de κ.

4.2.3. Regime IR

No regime IR, ao contrário do regime UV, a função beta do termo $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ não mantém o mesmo fator. O termo S^2R desaparece, porém os termos S^4 e $(\nabla S)^2$ prevalecem para $\kappa = 0,1$ com fatores diferentes para $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$. E o termo de massa m^2S^2 apresenta o mesmo comportamento, com relação ao fator numérico gerado pelas aproximações, do que no regime UV,ou seja, para para $\alpha = 1$ o fator independe de κ mas para $\alpha = -1$ o fator muda para cada valor de κ e em nenhum caso coincide com o valor de $\alpha = 1$

O teorema de Appelquist e Carazzone [48] é satisfeito, porém com fatores distintos conforme escolha dos parâmetros κ e/ou α;

4.3. Perspectivas futuras

Cálculo (inédito) do resíduo de Wodzicki [24] não-local, a fim de dar consistência matemática ao resultado;

Mostrar a presença da ANL obtendo a ação efetiva por meio das integrais de caminho de Feynman ao invés do método do campo de fundo;

Mostrar os efeitos da ANL no espaço plano;

Chamar a atenção da comunidade científica para cálculos que foram efetuados no contexto dessas arbitrariedades para possíveis ambiguidades da parte finita, local ou não-local;

A. Resultados úteis

A.1. Integrais dos fatores de forma

Para o cálculo das integrais contamos com o auxílio da definição

$$f(t\mu) = \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \, e^{-\alpha(1-\alpha)tu} \tag{A.1}$$

e da expansão de $\mathscr{N}$

$$\begin{aligned} \mathscr{N} &\doteq \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\omega-2} \\ &= \left[1+(2-\omega)\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right]+O(\omega-2) \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.1.1. Cálulo da integral $\mathscr{I}^1$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}^1 &= \mathscr{N}\int_0^\infty \mathrm{d}t \, e^{-t} M^1 \\ &= \mathscr{N}\int_0^\infty \mathrm{d}t \, e^{-t} \frac{f}{t^{\omega-1}} \\ &= \mathscr{N}\int_0^\infty \mathrm{d}t \, e^{-t} \frac{1}{t^{\omega-1}} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \, e^{-\alpha(1-\alpha)tu} \\ &= \mathscr{N}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty \mathrm{d}t \, t^{1-\omega} e^{-[1+\alpha(1-\alpha)u]t} \end{aligned}$$

Consideramos a troca de variáveis,

$$k = [1+\alpha(1-\alpha)u]\,t$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}^1 &= \mathscr{N}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, t^{1-\omega} e^{-k} \\
&= \mathscr{N}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{1-\omega} e^{-k} \left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right]^{\omega-2}
\end{aligned}
$$

agora fizemos $1-\omega = \omega' - 1$, assim

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}^1 &= \mathscr{N}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \left\{\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{\omega'-1} e^{-k}\right\} \left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right]^{\omega-2} \\
&= \mathscr{N}\Gamma\left(\omega'\right)\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\, e^{\ln\left[1+\alpha(1-\alpha)\mu\right]^{\omega-2}} \\
&= \mathscr{N}\left[\frac{1}{(2-\omega)} - \gamma + \mathscr{O}\left(2-\omega\right)\right] \\
&\times \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\, \left\{1+\left(\omega-2\right)\ln\left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right]\right\} \\
&= \left[1+\left(2-\omega\right)\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right]\left[\frac{1}{(2-\omega)} - \gamma\right] \\
&\times \left\{1+\left(\omega-2\right)\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\, \ln\left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right]\right\} \\
&= \frac{1}{(2-\omega)} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\, \ln\left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right] \\
&= \frac{1}{(2-\omega)} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + 2A
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\, \ln\left[1+\alpha\left(1-\alpha\right)u\right] \\
&= 1 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+2}{a-2}\right)
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

e,

$$
a^2 = \frac{4u}{4+u}. \tag{A.5}
$$

Para as demais integrais seguimos o mesmo procedimento.

A.1.2. Cálculo da integral $\mathscr{I}^2$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}^2 &= \mathscr{N}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-t}\frac{f}{ut^{\omega}} \\
&= \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{1}{(2-\omega)}-\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+1\right]-\frac{4A}{3a^2}+\frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

A.1.3. Cálculo da integral $\mathscr{I}^4$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}^4 &= \mathscr{N}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-t}\frac{1}{ut^{\omega}} \\
&= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{1}{(2-\omega)}-\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+1\right]
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

A.1.4. Cálculo dos fatores $\mathscr{F}_i$

Observamos que $\mathscr{F}_3=\frac{1}{6}\mathscr{F}_4-\mathscr{F}_5$, logo, obteremos primeiro $\mathscr{F}_4$ e $\mathscr{F}_5$ para depois, a partir destes, obter $\mathscr{F}_3$.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_4 &= \frac{1}{2}\mathscr{I}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2-\omega)}-\gamma+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)+2A\right]
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_5 &= \frac{1}{2}\left[\mathscr{I}^4-\mathscr{I}^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{1}{(2-\omega)}-\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+1\right]\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{1}{(2-\omega)}-\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+1\right]+\frac{4A}{3a^2}-\frac{1}{18}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{(2-\omega)}+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+\frac{1}{6}+\frac{4A}{3a^2}-\frac{1}{18}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{(2-\omega)}-\frac{1}{6}\gamma+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+\frac{4A}{3a^2}+\frac{1}{9}\right]
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_3 &= \frac{1}{12}\mathscr{I}^1 + \frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right) \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{(2-\omega)} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + 2A\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{(2-\omega)} - \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{9}\right] \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3a^2}\right)A - \frac{1}{18} \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{(2-\omega)} - \gamma + \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \qquad \text{(A.10)}$$

e resumimos nossos resultados

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_3 &= \frac{1}{12}\mathscr{I}^1 + \frac{1}{2}\left(\mathscr{I}^2 - \mathscr{I}^4\right) \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3a^2}\right)A - \frac{1}{18} \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_4 &= \frac{1}{2}\mathscr{I}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon} + 2A\right] \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_5 &= \frac{1}{2}\left[\mathscr{I}^4 - \mathscr{I}^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{9}\right] \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

A.2. Álgebra das matrizes de Dirac

$$\begin{aligned}
tr\left(\hat{1}\right) &= 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} && \text{(A.14)} \\
\gamma_\mu\gamma^\mu &= n\hat{1} && \text{(A.15)} \\
g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} &= n\hat{1} && \text{(A.16)} \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\mu &= (2-n)\gamma^\lambda && \text{(A.17)} \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}\hat{1} + (n-4)\gamma^\alpha\gamma^\beta && \text{(A.18)} \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu &= -2\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha - (n-4)\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda && \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

$$tr\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\lambda\right) = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\alpha\nu}\right) \qquad \text{(A.20)}$$

$$tr\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho}\right) = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho} - \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\rho} + \delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\lambda}\right) \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} & tr\left(\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[g^{\lambda\mu}\left(g^{\rho\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\rho\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\rho\beta}g^{\nu\alpha}\right)\right. \\ & -g^{\lambda\rho}\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right) \\ & +g^{\lambda\nu}\left(g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta} + g^{\mu\beta}g^{\rho\alpha}\right) \\ & -g^{\lambda\alpha}\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\rho\beta} + g^{\mu\beta}g^{\rho\nu}\right) \\ & \left.+g^{\lambda\beta}\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha} + g^{\mu\alpha}g^{\rho\nu}\right)\right] \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$tr\left(\gamma^{5}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right) = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(-i\varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta}\right) \tag{A.23}$$

A.3. Obtendo algumas expressões

Identidade de Biancci (três índices contraídos)

$$R_{\lambda\rho\mu\nu}\varepsilon^{\lambda\rho\nu\alpha} = 0 \tag{A.24}$$

Alguns traços

$$R_{\alpha\beta\lambda\rho}S_{\mu}S_{\nu}tr\left(\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right) = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{-4R_{\beta\rho}S^{\beta}S^{\rho} + 2RS^{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mu}S_{\lambda}\nabla_{\nu}S_{\alpha}tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\nabla_{\mu}S_{\lambda}\nabla_{\nu}S_{\alpha}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\alpha\nu}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\nabla_{\mu}S_{\lambda}\nabla_{\nu}S_{\alpha}g^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda} - \nabla_{\mu}S_{\lambda}\nabla_{\nu}S_{\alpha}g^{\mu\nu}g^{\alpha\lambda}\right. \\ + \; & \left.\nabla_{\mu}S_{\lambda}\nabla_{\nu}S_{\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\alpha\nu}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\nabla_{\mu}S_{\nu}\nabla^{\nu}S^{\mu} - \nabla^{\nu}S^{\alpha}\nabla_{\nu}S_{\alpha} + \nabla_{\mu}S^{\mu}\nabla_{\nu}S^{\nu}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\left[\nabla_{\mu}S_{\nu} - \nabla_{\nu}S_{\mu}\right]\nabla^{\nu}S^{\mu} + \left(\nabla_{\mu}S^{\mu}\right)^{2}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}S_{\mu\nu}\frac{1}{2}\left[\left(\nabla^{\nu}S^{\mu} - \nabla^{\mu}S^{\nu}\right) + \left(\nabla^{\nu}S^{\mu} + \nabla^{\mu}S^{\nu}\right)\right] \\ + \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\nabla_{\mu}S^{\mu}\right)^{2} \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\nu\mu} + \left(\nabla_{\mu}S^{\mu}\right)^{2}\right) \\ = \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(-\frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \left(\nabla_{\mu}S^{\mu}\right)^{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \nabla_\mu S_\lambda \nabla_\nu S_\alpha tr\left(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\lambda\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[\gamma^\alpha \gamma^\nu \nabla_\nu S_\alpha\right]\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[\frac{1}{2}\{(\gamma^\alpha \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\alpha) + (\gamma^\alpha \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\alpha)\} \nabla_\nu S_\alpha\right]\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[g^{\alpha\nu} \nabla_\nu S_\alpha + \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\alpha) \nabla_\nu S_\alpha\right]\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[\nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\nu \nabla_\nu S_\alpha - \gamma^\nu \gamma^\alpha \nabla_\nu S_\alpha)\right]\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[\nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{2}\gamma^\alpha \gamma^\nu (\nabla_\nu S_\alpha - \nabla_\alpha S_\nu)\right]\right) \\
= \; & \nabla_\mu S_\lambda tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \left[\nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{2}\gamma^\alpha \gamma^\nu S_{\nu\alpha}\right]\right) \\
= \; & tr\left(\left[\nabla_\mu S^\mu + \frac{1}{2}\gamma^\lambda \gamma^\mu S_{\mu\lambda}\right]\left[\nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{2}\gamma^\alpha \gamma^\nu S_{\nu\alpha}\right]\right) \\
= \; & tr\left(\nabla_\mu S^\mu \nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{2}\gamma^\alpha \gamma^\nu \nabla_\mu S^\mu S_{\nu\alpha}\right. \\
+ \; & \left.\frac{1}{2}\gamma^\lambda \gamma^\mu S_{\mu\lambda} \nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{4}\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu S_{\mu\lambda} S_{\nu\alpha}\right) \\
= \; & \left(\nabla_\mu S^\mu\right)^2 tr\left(\hat{1}\right) + \frac{1}{2}\nabla_\mu S^\mu S_{\nu\alpha} tr(\gamma^\alpha \gamma^\nu) \\
+ \; & \frac{1}{2} S_{\mu\lambda} \nabla_\nu S^\nu tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu\right) + \frac{1}{4} S_{\mu\lambda} S_{\nu\alpha} tr\left(\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu\right) \\
= \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\left(\nabla_\mu S^\mu\right)^2 + \frac{1}{4}\left(-S_{\mu\lambda} S^{\mu\lambda} - S_{\mu\lambda} S^{\mu\lambda}\right)\right\} \\
= \; & 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\left(\nabla_\mu S^\mu\right)^2 - \frac{1}{2} S_{\mu\lambda} S^{\mu\lambda}\right\}
\end{aligned}
$$

A.4. Identidades matemáticas

$$
\begin{aligned}
S_\mu S_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= S^2 \hat{1} && \text{(A.25)} \\
\nabla_\mu S_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \nabla_\mu S^\mu && \text{(A.26)} \\
S_\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2 S^\nu \gamma^5 - S_\mu \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu && \text{(A.27)} \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu &= \Box \hat{1} - \frac{1}{4} R \hat{1} && \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

$$
\nabla_\nu S_\mu \nabla^\mu S^\nu = -R_{\mu\alpha} S^\alpha S^\mu + (\nabla \cdot S)^2 \tag{A.29}
$$

$$
\nabla_\mu S_\alpha \nabla^\mu S^\alpha = \frac{1}{2} S_{\mu\alpha} S^{\mu\alpha} - R_{\mu\alpha} S^\alpha S^\mu + (\nabla \cdot S)^2 \tag{A.30}
$$

$$\nabla_\mu S_\nu \nabla^\mu S^\nu - \nabla_\nu S_\mu \nabla^\mu S^\nu \quad = \quad \frac{1}{2} S_{\mu\alpha} S^{\mu\alpha} \tag{A.31}$$

Referências Bibliográficas

[1] Dirac, P.a.M.: The fundamental equations of quantum mechanics. Proc. R. Soc. Lond. A **109**(752), 642–653 (1925). doi:10.1098/rspa.1925.0150 (p. 1)

[2] Dirac, P.A.M.: The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press (1981) (p. 1)

[3] Feynman, R.P., Hibbs, A.R.: Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill (1965) (p. 1)

[4] Schwinger, J.: On gauge invariance and vacuum polarization. Phys. Rev. **82**(5), 664–679 (1951). doi:10.1103/PhysRev.82.664 (p. 2, 12)

[5] DeWitt, B.S.: Quantum theory of gravity. II. the manifestly covariant theory. Phys. Rev. **162**(5), 1195–1239 (1967). doi:10.1103/PhysRev.162.1195 (p. 2, 6, 13, 22)

[6] Buchbinder, I.L., Odintsov, S., Shapiro, L.: Effective Action in Quantum Gravity. CRC Press (1992) (p. 2, 6, 7, 9, 13)

[7] Birrell, N.D., Davies, P.C.W.: Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press (1984) (p. 2)

[8] Parker, L., Toms, D.: Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity. Cambridge University Press (2009) (p. 2)

[9] Shapiro, I.L.: Physical aspects of the space–time torsion. Physics Reports **357**(2), 113–213 (2002). doi:10.1016/S0370-1573(01)00030-8 (p. 2, 8)

[10] Gilkey, P.B.: The Index Theorem and the Heat Equation. Publish or Perish, Incorporated (1974) (p. 2)

[11] Gilkey, P.B.: The spectral geometry of a riemannian manifold. Journal of Differential Geometry **10**(4), 601–618 (1975) (p. 2)

[12] DeWitt, B.S.: Dynamical theory of groups and fields. Gordon and Breach (1965) (p. 2, 3, 4, 6, 12, 13, 14, 16, 22, 33)

[13] Barvinsky, A.O., Vilkovisky, G.A.: The generalized schwinger-dewitt technique in gauge theories and quantum gravity. Physics Reports **119**(1), 1–74 (1985). doi:10.1016/0370-1573(85)90148-6 (p. 3, 4, 6, 14, 16, 33)

[14] DeWitt, B.S.: Quantum field theory in curved spacetime. Physics Reports **19**(6), 295 – 357 (1975). doi:http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(75)90051-4 (p. 3, 13)

[15] Vilkovisky, A.G.: The gospel according to DeWitt in quantum theory of gravity - essays in honor of the 60th birthday of bryce s. DeWitt p. 169 (1984) (p. 3, 22)

[16] Barvinsky, A.O., Vilkovisky, G.A.: Beyond the schwinger-DeWitt technique: Converting loops into trees and in-in currents. Nuclear Physics B **282**, 163–188 (1987). doi:10.1016/0550-3213(87)90681-X (p. 3, 6, 15, 33)

[17] Barvinsky, A., Vilkovisky, G.: Covariant perturbation theory (II). second order in the curvature. general algorithms. Nuclear Physics B **333**(2), 471–511 (1990). doi:10.1016/0550-3213(90)90047-H (p. 3, 6, 14, 15, 16, 24, 26, 33, 34)

[18] Barvinsky, A.O., Vilkovisky, G.A.: Covariant perturbation theory (III). spectral representations of the third-order form factors. Nuclear Physics B **333**(2), 512–524 (1990). doi:10.1016/0550-3213(90)90048-I (p. 3, 6)

[19] Barvinsky, A.O., Gusev, Y.V., Vilkovisky, G.A., Zhytnikov, V.V.: Asymptotic behaviors of the heat kernel in covariant perturbation theory. Journal of Mathematical Physics **35**(7), 3543–3559 (1994). doi:10.1063/1.530428 (p. 3, 6)

[20] Gonçalves, B., de Berredo-Peixoto, G., Shapiro, I.L.: One-loop corrections to the photon propagator in curved-space QED. Phys. Rev. D **80**(10), 104,013 (2009). doi:10.1103/PhysRevD.80.104013 (p. 4, 29)

[21] Gonçalves, B., De Berredo-Peixoto, G., Shapiro, I.L.: Exact form factores in the one-loop curved-space qed and the nonlocal multiplicative anomaly. International Journal of Modern Physics A **25**(11), 2382–2390 (2010). doi:10.1142/S0217751X10049669 (p. 4)

[22] de Berredo-Peixoto, G., Pereira, D.D., Shapiro, I.L.: Universality and ambiguity in fermionic effective actions. Phys. Rev. D **85**(6), 064,025 (2012). doi:10.1103/PhysRevD.85.064025 (p. 4, 22, 26, 29)

[23] Berredo-Peixoto, G.d., Maicá, A.E.: Form factors and non-local multiplicative anomaly for fermions with background torsion. Classical and Quantum Gravity **31**(12), 125,002 (2014). doi:10.1088/0264-9381/31/12/125002 (p. 4)

[24] Wodzicki, M.: Noncommutative residue chapter i. fundamentals. In: Y. Manin (ed.) K-Theory, Arithmetic and Geometry, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1289, pp. 320–399. Springer Berlin Heidelberg (1987). URL `http://dx.doi.org/10.1007/BFb0078372` (p. 4, 5, 44)

[25] Elizalde, E., Filippi, A., Vanzo, L., Zerbini, S.: One-loop effective potential for a fixed charged self-interacting bosonic model at finite temperature with its related multiplicative anomaly. Physical Review D **57**(12), 7430–7443 (1998). doi:10.1103/PhysRevD.57.7430 (p. 4)

[26] Elizalde, E., Cognola, G., Zerbini, S.: Applications in physics of the multiplicative anomaly formula involving some basic differential operators. Nuclear Physics B **532**(1-2), 407–428 (1998). doi:10.1016/S0550-3213(98)00442-8 (p. 4)

[27] Ray, D.B., Singer, I.M.: R-torsion and the laplacian on riemannian manifolds. Advances in Mathematics **7**(2), 145–210 (1971). doi:10.1016/0001-8708(71)90045-4 (p. 4)

[28] Hawking, S.W.: Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. Communications in Mathematical Physics **55**(2), 133–148 (1977). doi:10.1007/BF01626516 (p. 4)

[29] Lesch, M., Pflaum, M.J.: Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant. arXiv:math/9804136 (1998). arXiv: math/9804136 (p. 4)

[30] Evans, T.S.: Regularization schemes and the multiplicative anomaly. Physics Letters B **457**(1–3), 127–132 (1999). doi:10.1016/S0370-2693(99)00503-1 (p. 5)

[31] Dowker, J.S.: On the relevance of the multiplicative anomaly. arXiv:hep-th/9803200 (1998). arXiv: hep-th/9803200 (p. 5)

[32] Berezin, F.A.: The method of second quantization. Academic Press (1966) (p. 11, 17, 18)

[33] Barvinsky, A.O., Mukhanov, V.F.: New nonlocal effective action. Phys. Rev. D **66**(6), 065,007 (2002). doi:10.1103/PhysRevD.66.065007 (p. 14)

[34] Barvinsky, A.O., Gusev, Y.V., Zhytnikov, V.V., Vilkovisky, G.A.: Covariant perturbation theory (IV). third order in the curvature. arXiv:0911.1168 [hep-th] (2009) (p. 15)

[35] Frolov, V.P., Vilkovisky, G.A.: Spherically symmetric collapse in quantum gravity. Physics Letters B **106**(4), 307–313 (1981). doi:10.1016/0370-2693(81)90542-6 (p. 16)

[36] Polyakov, A.M.: Quantum geometry of bosonic strings. Physics Letters B **103**(3), 207–210 (1981). doi:10.1016/0370-2693(81)90743-7 (p. 16)

[37] ’t Hooft, G., Veltman, M.: Regularization and renormalization of gauge fields. Nuclear Physics B **44**(1), 189–213 (1972). doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9 (p. 17, 21)

[38] Bollini, C.G., Giambiagi, J., Sirlin, A.: Remarks concerning the renormalized coupling constants of the gauge theories. Nuov Cim A **16**(2), 423–436 (1973). doi:10.1007/BF02819429 (p. 17, 21)

[39] Berezin, F.A.: Introduction to Superanalysis. Springer (1987) (p. 17, 18)

[40] Haag, P.D.R.: General quantum field theory. In: Local Quantum Physics, Texts and Monographs in Physics, pp. 53–104. Springer Berlin Heidelberg (1996). URL `http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-61458-3_2` (p. 20)

[41] de Berredo-Peixoto, G.: A note on the heat kernel method applied to fermions. Modern Physics Letters A **16**(38), 2463–2468 (2001). doi:10.1142/S0217732301005965 (p. 20, 29, 35)

[42] Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S.: Topologically massive gauge theories. Annals of Physics **140**(2), 372–411 (1982). doi:10.1016/0003-4916(82)90164-6 (p. 21)

[43] JACKIW, R.: WHEN RADIATIVE CORRECTIONS ARE FINITE, BUT UNDETERMINED. International Journal of Modern Physics B **14**(19n20), 2011–2021 (2000). doi:10.1142/S021797920000114X (p. 21)

[44] Salam, A.: Divergent integrals in renormalizable field theories. Phys. Rev. **84**(3), 426–431 (1951). doi:10.1103/PhysRev.84.426 (p. 22, 26)

[45] Gorbar, E.V., Shapiro, I.L.: Renormalization group and decoupling in curved space, II. the standard model and beyond. Journal of High Energy Physics **2003**(06), 004–004 (2003). doi:10.1088/1126-6708/2003/06/004 (p. 25)

[46] Tiomno, J.: Mass reversal and the universal interaction. Nuovo Cim **1**(1), 226–232 (1955). doi:10.1007/BF02731766 (p. 29)

[47] Sakurai, J.J.: Mass reversal and weak interactions. Nuovo Cim **7**(5), 649–660 (1958). doi:10.1007/BF02781569 (p. 29)

[48] Appelquist, T., Carazzone, J.: Infrared singularities and massive fields. Physical Review D **11**(10), 2856–2861 (1975). doi:10.1103/PhysRevD.11.2856 (p. 39, 43)

[49] Ramond, P.: Field Theory. Westview Press (1997) (p. 39)

[50] Manohar, A.V.: Effective Field Theories. arXiv:hep-ph/9606222 **479**, 311–362 (1997). doi:10.1007/BFb0104294. ArXiv: hep-ph/9606222 (p. 39)

Convenções e abreviações