Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Dissertação de Mestrado

Obtenção da solução cosmológica de Schwarzschild-de Sitter via transformação conforme local

Monalisa Silva de Oliveira

4 de Março de 2013
Juiz de Fora–MG, Brasil

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Dissertação de Mestrado

Obtenção da solução cosmológica de Schwarzschild-de Sitter via transformação conforme local

Autora: **Monalisa Silva de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física sob a orientação do Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto.

4 de Março de 2013
Juiz de Fora–MG, Brasil

Dedico este trabalho ao meu irmão, Gabriel.

Agradecimentos

Os meus agradecimentos vão para todos os

- familiares,
- amigos e
- professores
- e para o namorado, Dante, que me apoiaram, ajudaram e estiveram sempre presentes durante esta longa jornada;
- para o amigo, Sebastião, pelos esclarecimentos;
- para o meu orientador, Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto, pela orientação e ensinamentos, desde a iniciação científica até a conclusão do presente curso;
- para o professor, Prof. Dr. Ilya Shapiro, pelas sugestões e esclarecimentos;
- e para Capes, pelo apoio financeiro.

"Palavras são erros, e os erros são seus. Não quero lembrar que eu erro também."

Renato Russo

Resumo

Neste trabalho, fazemos uma pequena revisão sobre tensores e sua utilização na Relatividade Geral, apresentamos o método de transformação conforme e o teorema da fatorização e discutimos as soluções de Schwarzschild com e sem constante cosmológica. Então, a solução de Schwarzschild com constante cosmológica é derivada, a partir das equações de campo de Einstein, utilizando-se os conceitos abordados.

Palavras-chave : transformação conforme; solução de Schwarzschild; constante cosmológica.

Áreas do conhecimento : Gravitação e Cosmologia.

Abstract

In this work, we make a brief review of tensors and their use in General Relativity, we present the local conformal transformation method and the factorization theorem and we discuss Schwarzschild's solutions with and without cosmological constant. Then, the Schwarzschild's solution with cosmological constant is derived, from the Einstein's field equations, using the concepts addressed.

Keywords : conformal transformation; Schwarzschild's solution; cosmological constant.
Knowledge areas : Gravitation and Cosmology.

Conteúdo

Introdução

Einstein completou a sua teoria clássica da gravitação, a Relatividade Geral, em novembro de 1915, após um longo percurso de oito anos que se inicia com uma reflexão acerca da equivalência entre movimento acelerado e gravidade [1]. Em 1907, esta reflexão resultou no conhecido "princípio de equivalência", um dos pilares da fundação da teoria, mas Einstein só retoma a construção desta em 1911. Em 1913, Einstein e Grossmann [1] escrevem um artigo dizendo que as forças gravitacionais são nada mais que a expressão da curvatura do espaço-tempo, mesmo sem conseguirem encontrar as equações que relacionam a curvatura com a massa e a energia que nele existem. Einstein continua, então, a trabalhar neste problema até que, em 1914, discute as suas idéias com o famoso matemático David Hilbert. Este, em meados de 1915, "descobre" as equações do campo gravitacional alguns dias antes de Einstein, mas a sua dedução só foi corrigida depois de Einstein ter publicado as suas equações. Assim, ao descrever o campo gravitacional através da curvatura do espaço-tempo, a teoria geral da relatividade transforma o espaço-tempo de um palco passivo, onde os acontecimentos físicos decorrem, num participante ativo na dinâmica do cosmos, fazendo dos dez anos seguintes anos de recepção, afirmação e sucesso da teoria.

Mas, como as equações de campo de Einstein são equações às derivadas parciais, não lineares, em geral só é possível resolvê-las exatamente quando impõem-se simetrias que restrinjam o espaço das suas soluções. O caso mais simples e importante diz respeito a uma distribuição de massa estática e esfericamente simétrica e foi utilizado por K. Schwarzschild, em 1916, para derivar a sua solução cerca de dois meses após a publicação das equações da teoria da gravitação de Einstein [2] . Esta solução apresenta um comportamento patológico junto do chamado "raio gravitacional" ou "raio de Schwarzschild": a superfície que corresponde a este raio, conhecida como "horizonte de eventos", funciona como uma membrana que impede a passagem de informações para observadores externos a ela; daí o termo "buraco negro".

Em 1917, Einstein faz uma correção nas suas equações acrescentando a elas a chamada "constante cosmológica", acreditando que este termo conduzia à um Universo estático [3].

[1] Marcel Grossmann era diretor da faculdade Politécnica de Zurique na qual Einstein trabalhava como professor de física teórica.

Contradizendo esta idéia, Alexander Friedmann apresenta, em 1922, uma solução para as equações de campo, com a premissa de que o Universo é homogêneo e isotrópico; esta acaba por descrever um Universo em expansão/contração [4]. Em 1929, o astrônomo Edwin Hubble observa que as galáxias estão se afastando continuamente umas das outras e conclui que todo o Universo está se expandindo [5]. Em 1998, observações de supernovas mostram que esta expansão é acelerada [6, 7]. Sendo assim, faz sentido incluir a constante cosmológica nas equações de campo? Se sim, qual a sua interpretação [8, 9]? O acúmulo de observações recentes sugerem fortemente que, no âmbito da cosmologia inflacionária, uma constante cosmológica repulsiva diferente de zero, $\Lambda > 0$, deve ser invocada para explicar as propriedades observadas no Universo [10, 11].

A inclusão da constante cosmológica na solução de Schwarzschild é conhecida como solução de Schwarchild-de Sitter [2]. Esta é utilizada para analisar a influência da constante cosmológica no espaço-tempo dos buracos-negros [14] e nos testes de sistemas solares [15]. Essa solução também pode ser abordada do ponto de vista da gravitação massiva [16] ou de espaços de dimensões superiores a 4 [17].

Mesmo se valendo da simetria esférica, deduzir esta solução de maneira usual leva à uma extensa álgebra. Mas, se levarmos em conta as transformações conformes locais [18, 19, 20, 21], o volume dos cálculos pode ser reduzido . Neste trabalho, nos valemos dessas transformações para deduzir a solução de Schwarzschild-de Sitter, partindo das equações de campo de Einstein. Para isso, no Capítulo 1, realizamos uma breve revisão dos elementos básicos da Relatividade Geral, importantes para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2, introduzimos o conceito de transformação conforme local, que é aplicado em elementos do capítulo 1, e o teorema de fatorização, instrumento útil na análise dos elementos resultantes dessa transformação. O Capítulo 3 é dedicado à apresentação, de forma objetiva, das soluções de Schwarzschild e Schwarzschild-de Sitter (não descreveremos, minuciosamente, os passos percorridos para se chegar à essas soluções). Finalmente, no Capítulo 4, aplicamos os conceitos matemáticos descritos no Capítulo 2 para obter a solução de Scwarzschild-de Sitter. Aqui, todos os passos do desenvolvimento serão apresentados de forma clara para que a utilidade da técnica seja bem estabelecida.

Ao longo do texto, adotaremos unidades naturais tais que $c = 1$ (velocidade da luz no vácuo).

[2] A solução de de Sitter é a solução das equações de campo de Einstein, com constante cosmológica, mais simples [12, 13]. Ela é esfericamente simétrica e descreve um universo inflacionário.

1 Conceitos preliminares

As leis físicas devem ser independentes do sistema de coordenadas empregado: as equações matemáticas que expressam essas leis devem ser covariantes, isto é, invariantes na sua forma sob transformações de coordenadas. Nas próprias palavras de Einstein: "Que é que a Natureza tem a ver com os sistemas de coordenadas e respectivos estados de movimento? Afinal, não somos nós que os introduzimos para descrever matematicamente os fenômenos?". Com esta motivação, o capítulo consiste em uma breve revisão sobre tensores, entes através dos quais podemos formular leis de covariância geral.

1.1 Tensores

Os tensores são entes matemáticos que podem ser definidos em relação a todo sistema de coordenadas, sendo a definição feita por um certo número de funções espaciais, chamadas de componentes do tensor. Conhecendo a transformação que liga dois sistemas de coordenadas e as componentes de um tensor em um desses sistemas, é possível calcular essas componentes no outro sistema. As equações de transformação são lineares e homogêneas [22].

De modo geral, o conjunto de D^{n+m} funções $T_{i_1...i_n}{}^{j_1...j_m}(x)$, onde D é a dimensão da variedade adotada, formam um "tensor do tipo (m,n)" ou "tensor misto de ordem covariante n e contravariante m" se essas funções se transformam, sob a mudança de coordenadas de base, como:

$$T_{i'_1...i'_n}{}^{j'_1...j'_m}(x') = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{l_1}} ... \frac{\partial x^{j'_m}}{\partial x^{l_m}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^{i'_1}} ... \frac{\partial x^{k_n}}{\partial x^{i'_n}} T_{k_1...k_n}{}^{l_1...l_m}(x). \tag{1.1}$$

Observação.: Apesar das componentes de um tensor serem dependentes da escolha da base, o tensor por si mesmo é independente das coordenadas, podendo, então, ser visto como um objeto geométrico. Por definição, um tensor continua sendo um tensor sob mudança de coordenada.

Com relação às suas componentes, um tensor pode ser definido como:

- Tensor simétrico.: O tensor T^{ijk} é chamado "simétrico" nos índices i e j se:

$$T^{ijk} = T^{jik}; \tag{1.2}$$

- Tensor antissimétrico.:O tensor T^{ijk} é chamado "antissimétrico" nos índices i e j se:

$$T^{ijk} = -T^{jik}. \tag{1.3}$$

1.2 Operações sobre tensores

As regras para a álgebra de tensores são diferentes das utilizadas para a álgebra dos números. As operações matemáticas efetuadas sobre tensores são dadas por:

- **Adição**.: Definida por tensores de mesmo tipo, a soma de dois (m,n)-tensores é um (m,n)-tensor, cujas componentes são iguais à soma das componentes correspondentes dos tensores que estão sendo somados:

$$(A+B)_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m} = A_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m} + B_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m}; \tag{1.4}$$

- **Multiplicação**.: A multiplicação de um (m,n)-tensor por um escalar α produz um (m,n)-tensor e é definida como :

$$(\alpha A)_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m} = \alpha A_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m}. \tag{1.5}$$

  O produto de um (m,n)-tensor e um (t,s)-tensor resulta em um (m+t,n+s)-tensor, dado por:

$$A_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m} . B_{l_1 \ldots l_s}{}^{k_1 \ldots k_t} = C_{i_1 \ldots i_n}{}^{j_1 \ldots j_m}{}_{l_1 \ldots l_s}{}^{k_1 \ldots k_t}; \tag{1.6}$$

- **Contração**.: A contração dada pela adição sobre dois índices (um superior e um inferior), reduz um (n,m)-tensor em um (n-1,m-1)-tensor. Exemplo:

$$X_{ijk}{}^{ln} \rightarrow X_{ijk}{}^{lk} = \sum_{k=1}^{D} X_{ijk}{}^{lk}. \tag{1.7}$$

  O produto interno de tensores dos tipos (m,n) e (t,s) resulta num (m+t-1,n+s-1)-tensor. Exemplo:

$$A_{ijk}B^{lj} = \sum_{j} A_{ijk}B^{lj}; \tag{1.8}$$

- **Métrica**.: O produto interno de dois vetores de uma dada base é chamado "métrica":

$$\boldsymbol{e_i}.\boldsymbol{e_j} = g_{ij}. \tag{1.9}$$

Esta obedece às seguintes propriedades:

1 -

$$g_{ij} = g_{ji}; \tag{1.10}$$

2 - Se a base é ortonormal:

$$g_{ab} = \delta_{ab}. \tag{1.11}$$

onde δ_{ab} é o símbolo de Kronecker;

3 -

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j. \tag{1.12}$$

A métrica também pode ser chamada de "tensor métrico";

- **Mudança de índices**.: Abaixar e levantar os índices de um tensor consiste em realizar um produto interno entre o tensor e o tensor métrico correspondente. Exemplo:

$$B_{ik} = g_{ij} B^j{}_k. \tag{1.13}$$

1.3 Derivada covariante

Em geral, quando aplicamos uma derivada parcial em um tensor, não obtemos um tensor como resultado. Este fato pode ser contornado adicionando-se alguns termos à derivada parcial, tal que o resultado seja um tensor. A derivada de um tensor cujo resultado é um outro tensor é chamada de "derivada covariante" e é definida por:

$$\nabla_i A^{j_1 j_2 \dots}{}_{k_1 k_2 \dots} = \partial_i A^{j_1 j_2 \dots}{}_{k_1 k_2 \dots} + \Gamma_{li}{}^{j_1} A^{l j_2 \dots}{}_{k_1 k_2 \dots} + \Gamma_{li}{}^{j_2} A^{j_1 l \dots}{}_{k_1 k_2 \dots} + \dots - \Gamma_{k_1 i}{}^{l} A^{j_1 j_2 \dots}{}_{l k_2 \dots} -$$

$$- \Gamma_{k_2 i}{}^{l} A^{j_1 j_2 \dots}{}_{k_1 l \dots} - \dots, \tag{1.14}$$

onde o símbolo $\Gamma_{ji}{}^k$ é chamado "símbolo de Christoffel" ou "conexão afim" e $\partial_i = \partial / \partial x^i$. A sua forma mais usual é expressa via tensor métrico:

$$\Gamma_{ji}{}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \tag{1.15}$$

tal que os coeficientes $\Gamma_{ji}{}^k$ satisfazem às condições:

1- Simetria [1]:

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = \Gamma_{ji}{}^{k}; \tag{1.16}$$

2- Metricidade:

$$\nabla_i g_{jl} = \partial_i g_{jl} - \Gamma_{ij}{}^{a} g_{al} - \Gamma_{il}{}^{a} g_{ja} = 0. \tag{1.17}$$

Sob uma transformação de coordenadas, temos que ter:

$$\Gamma'^{a}_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial x'^b}\frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\Gamma^{d}_{ef} - \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\frac{\partial x^e}{\partial x'^c}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^e}, \tag{1.18}$$

para que a derivada covariante de um tensor, sob a mesma transformação de coordenadas, mantenha a forma dada em (1.14). Devido ao segundo termo do lado direito da equação acima, temos que Γ^{a}_{bc} não é um tensor. Os objetos que obedecem à regra de transformação (1.18) são chamados de "conexão afim", "conexão" ou "afinidade".

A derivada covariante ∇_i transforma-se como um tensor após atuar sobre um tensor e coincide com a derivada parcial em coordenadas Cartesianas; a derivada covariante de um escalar é a derivada ordinária.

1.4 Tensores relevantes na Relatividade Geral

Nesta seção, apresentamos os tensores fundamentais da teoria da Relatividade Geral [25, 26, 27].

1.4.1 Intervalo no espaço-tempo

A separação infinitesimal de dois eventos com coordenadas x_μ e $x_\mu + dx_\mu$ num referencial S é dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.19}$$

onde

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{1.20}$$

em que x^0 é a coordenada temporal e x^1, x^2 e x^3 são as coordenadas espaciais.

[1] Para os casos em que a condição de simetria não é válida, vide [23, 24]

1.4.2 Tensor de Riemann

Seja T^{α} um tensor qualquer, tal que [28]

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]T^{\alpha} = (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})T^{\alpha} = -R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}T^{\lambda}. \tag{1.21}$$

O tensor $R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}$ é chamado de "tensor de Riemann" ou "tensor de curvatura" e é dado por:

$$R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}. \tag{1.22}$$

Na forma covariante e em termos da métrica,temos:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = g_{\alpha\tau}R^{\tau}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\alpha}}\right] + g_{\tau\eta}\left[\Gamma^{\tau}_{\alpha\nu}\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\right], \tag{1.23}$$

tal que $R_{\alpha\mu\nu\lambda}$ obedece às propriedades:

- Simetria:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\alpha\mu}; \tag{1.24}$$

- Anti-simetria:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\alpha\nu\lambda} = -R_{\alpha\mu\lambda\nu} = R_{\mu\alpha\lambda\nu}; \tag{1.25}$$

- Permutação cíclica:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} \equiv 0; \tag{1.26}$$

- Identidade de Bianchi:

$$\nabla_{\alpha}R_{\lambda\tau\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\lambda\tau\alpha\mu} + \nabla_{\mu}R_{\lambda\tau\nu\alpha} \equiv 0. \tag{1.27}$$

1.4.3 Tensor de Ricci

O Tensor de Ricci é um tensor simétrico, definido através do tensor de Riemann como:

$$R_{\alpha\mu} = g^{\nu\lambda}R_{\lambda\alpha\nu\mu}. \tag{1.28}$$

O escalar de Ricci, também conhecido por "escalar de curvatura" é dado por:

$$R = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\mu}. \tag{1.29}$$

Em 2D, nós obtemos as relações

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \\ R_{\mu\alpha} &= \frac{1}{2}Rg_{\mu\alpha}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

1.4.4 Tensor de Einstein

As equações de movimento para o campo métrico são dadas por [29]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{1.31}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, Λ é a constante cosmológica e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia. As equações descritas pela relação anterior são chamadas de equações de Einstein e são elas que nos relatam a dinâmica do espaço-tempo.

O tensor $G_{\mu\nu}$ é conhecido como "tensor de Einstein" e obedece à relação:

$$\nabla_\nu G^\nu_\mu \equiv 0, \tag{1.32}$$

devido à identidade de Bianchi dada em (1.27).

2 Transformação conforme local

As transformações conformes são transformações muito utilizadas em Gravitação por sua relevante simplificação dos cálculos das equações de Einstein para métricas relacionadas às aplicações mais fundamentais da Relatividade Geral, tais como as soluções cosmológicas e de Schwarzschild [30, 31, 32, 33, 34].

Neste capítulo, considera-se o espaço D-dimensional.

2.1 Notações

Devido à simplicidade, usaremos as notações condensadas:

$$(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma, \qquad (\nabla^2\sigma) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma. \tag{2.1}$$

2.2 Transformação conforme local

A chamada transformação conforme local pode ser entendida como uma parametrização da métrica via novas variáveis:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}e^{2\sigma}, \qquad g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}e^{-2\sigma}, \qquad g = \bar{g}e^{2D\sigma}, \tag{2.2}$$

onde a função $\sigma = \sigma(x)$ é conhecida como "fator conforme".

Devido à essa transformação, os símbolos de Christoffel (definidos pela expressão (1.15)) se relacionam por:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\lambda_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + \delta^\lambda_\beta\bar{\nabla}_\alpha\sigma - \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^\lambda\sigma = \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}. \tag{2.3}$$

Na equação anterior, bem como nas próximas, as quantidades com barra (por exemplo, $\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}$) correspondem à métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Nosso interesse está nas leis de transformação para o tensor de Ricci e para o escalar de curvatura. Para derivá-las, considere o tensor de Riemman (definido por (1.22)), após a aplicação da transformação conforme:

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu(\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}) - \partial_\nu(\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}) + (\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\chi\mu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\chi\mu})(\bar{\Gamma}^{\chi}_{\lambda\nu} + \delta\Gamma^{\chi}_{\lambda\nu}) \\
&- (\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\chi\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\chi\nu})(\bar{\Gamma}^{\chi}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\chi}_{\lambda\mu}) \\
&= \bar{R}^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \bar{\nabla}_\nu\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\tau}_{\alpha\mu} - \delta\Gamma^{\tau}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\tau}_{\alpha\nu} \\
&= \bar{R}^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} + (\delta^{\alpha}_{\nu}\bar{g}_{\mu\lambda} - \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{g}_{\nu\lambda})(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \delta^{\alpha}_{\nu}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\lambda\sigma) - \delta^{\alpha}_{\mu}(\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}_\lambda\sigma) \\
&+ \bar{g}_{\mu\lambda}(\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma) - \bar{g}_{\nu\lambda}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma) + \delta^{\alpha}_{\mu}(\bar{\nabla}_\nu\sigma)(\bar{\nabla}_\lambda\sigma) - \delta^{\alpha}_{\nu}(\bar{\nabla}_\mu\sigma)(\bar{\nabla}_\lambda\sigma) \\
&+ \bar{g}_{\nu\lambda}(\bar{\nabla}_\mu\sigma)(\bar{\nabla}^\alpha\sigma) - \bar{g}_{\mu\lambda}(\bar{\nabla}_\nu\sigma)(\bar{\nabla}^\alpha\sigma). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

onde utilizou-se a equação (2.3). Assim, temos que o tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}^2\sigma) + (D-2)[(\bar{\nabla}_\mu\sigma)(\bar{\nabla}_\nu\sigma) - (\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma) - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2] \qquad (2.5)$$

e o escalar de curvatura por

$$R = e^{-2\sigma}[\bar{R} - 2(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma) - (D-1)(D-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2]. \qquad (2.6)$$

2.3 Teorema de fatorização

Alguns problemas da Relatividade Geral podem ser resolvidos partindo-se de uma métrica particular, ao invés de uma métrica geral. Com essa motivação, segue o teorema:

Teorema 2.3.1 *Considere um espaço Riemanniano D-dimensional ou um múltiplo pseudo-Riemanniano com as coordenadas* $x^\mu = (x^a, x^i)$*, onde* $a, b, c, ... = 1, 2, ..., n$ *e* $i, j, k, ... = n+1, n+2, ..., D$*. Vamos assumir que a métrica é fatorizada:*

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab}(x^c) & 0 \\ 0 & g_{ij}(x^k) \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

isto é, os elementos com índices mistos g_{ai} *são nulos; além disso, os elementos da métrica em cada bloco* g_{ab} *e* g_{ij} *dependem apenas das suas próprias coordenadas* x^c *e* x^k*, respectivamente. Então, o tensor de Riemann e, consequentemente, o tensor de Ricci, são também fatorizados.*

Demonstração: Antes de começarmos a demonstração, note que inversa $g^{\mu\nu}$ é também fatorizada,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{ab}(x^c) & 0 \\ 0 & gij^(x^k) \end{pmatrix}^{.} \tag{2.8}$$

Sendo o símbolo de Christoffel dado por

$$\Gamma^a_{ib} = g^{ac}(\partial_i g_{bc} + \partial_b g_{ic} - \partial_c g_{ib}), \tag{2.9}$$

temos que $\Gamma^a_{ib} = 0$, pois $g_{ic} = 0$ e $\partial_i g_{bc} = 0$. Analogamente, $\Gamma^i_{jb} = \Gamma^i_{ab} = \Gamma^a_{ij} = 0$. Portanto, apenas as componentes "puras" do símbolo de Christoffel $\Gamma^a_{bc}(x^a)$ e $\Gamma^i_{jk}(x^i)$ são não nulas.

Agora considere as componentes mistas do tensor de Riemann. De acordo com a equação (1.22), estas componentes são nulas, pois as derivadas "mistas" (como $\partial_i \Gamma^a_{bc}$) e os termos do tipo $\Gamma\Gamma$ com índices mistos são nulos (estes últimos por não poderem ser construídos por símbolos do tipo Γ com índices "puros"). Idem para o tensor de Ricci.

Assim, podemos realizar uma transformação conforme de modo a obtermos uma métrica fatorizada, diminuindo, assim, o número de componentes dos tensores de Ricci a serem calculados. Para mais detalhes veja [35].

3 Soluções de Schwarzschild e Schwarzschild-de Sitter

Em 1916, K. Schwarzschild encontrou a primeira solução exata das equações de Einstein. Esta, constitui uma solução para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ representando um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico, derivada para a região exterior de uma distribuição de massa com simetria esférica, e está na base de quatro testes da Relatividade Geral: o avanço do periélio dos planetas, o encurvamento dos raios luminosos, o atraso do eco na sondagem radar e o efeito geodésico. O efeito espectral também pode ser incluído na lista [36].

Vamos derivar esta solução a partir das equações de Einstein e, para isso, seguiremos os mesmos passos realizados na derivação original de Schwarzschild.

Considere um sistema de coordenadas $x^{\mu} = (t, r, \theta, \varphi)$ onde t é uma coordenada tipo tempo, r é uma certa coordenada radial, e θ e φ são coordenadas angulares polares, tal que

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2, \tag{3.1}$$

isto é, o campo tem simetria esférica e o espaço-tempo é assimptoticamente plano. Se além disso, exigirmos que o espaço-tempo exterior à distribuição de massa seja vazio, segundo o teorema de Birkhoff, teremos um campo estático cuja solução é única [37, 38]. Assumindo que a métrica proposta em 3.1 é uma solução para o problema, devemos determinar as funções arbitrárias $A(r)$ e $B(r)$ a partir de

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \tag{3.2}$$

Para maior generalidade, denotemos $A = e^{\nu(r,t)}$ e $B = e^{\lambda(r,t)}$, e calculemos, então, os símbolos de Christoffel (1.15)[1]:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{tr} = \frac{\nu'}{2}, \qquad \Gamma^r_{tt} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, \qquad \Gamma^r_{rr} = \frac{\lambda'}{2}, \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-\lambda}, \\
&\Gamma^t_{rr} = \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}, \qquad \Gamma^t_{tt} = \frac{\dot\nu}{2}, \qquad \Gamma^r_{rt} = \frac{\dot\lambda}{2}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\,\mathrm{sen}^2\theta e^{-\lambda}, \\
&\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde a linha indica $\partial/\partial r$ e o ponto indica $\partial/\partial t$. As demais componentes são nulas. Assim, temos que os tensores de Ricci (1.28) não nulos são

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \partial_\gamma\Gamma^\gamma_{tt} - \partial_t\Gamma^\tau_{t\tau} + \Gamma^\gamma_{tt}\Gamma^\tau_{\gamma\tau} - \Gamma^\tau_{t\gamma}\Gamma^\gamma_{t\tau} \\
&= \partial_r\Gamma^r_{tt} - \partial_t\Gamma^r_{tr} + \Gamma^t_{tt}\Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} - (\Gamma^r_{tr})^2 - \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + 2\Gamma^r_{tt}\Gamma^\theta_{r\theta} \\
&= \frac{\ddot\nu}{2} + \partial_r\left(\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\right) - \frac{\ddot\nu}{2} - \frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\nu}{2}\left(\frac{\dot\nu}{2} - \frac{\dot\lambda}{2}\right) + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) \\
&- \frac{\dot\nu^2}{4} - \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\nu'^2}{2}e^{\nu-\lambda} \\
&= -\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4} - \frac{\dot\lambda^2}{4} + e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}(\dot\nu\dot\lambda - 2\ddot\lambda - \dot\lambda^2) + e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right], \qquad (3.4) \\
R_{rr} &= \partial_\gamma\Gamma^\gamma_{rr} - \partial_r\Gamma^\tau_{r\tau} + \Gamma^\gamma_{rr}\Gamma^\tau_{\gamma\tau} - \Gamma^\tau_{r\gamma}\Gamma^\gamma_{r\tau} \\
&= \partial_t\Gamma^t_{rr} - \partial_r\Gamma^t_{tr} - 2\partial r\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^t_{tr} + 2\Gamma^r_{rr}\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^t_{rr}\Gamma^t_{tt} - \Gamma^r_{tr}\Gamma^t_{rr} - (\Gamma^t_{rt})^2 - 2(\Gamma^\theta_{r\theta})^2 \\
&= \frac{\lambda''}{2} + \frac{\ddot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot\lambda^2}{2}e^{\lambda-\nu} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}e^{\lambda-\nu} - \frac{\lambda''}{2} - \frac{\nu''}{2} + \frac{2}{r^2} + \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) \\
&+ \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}\left(\frac{\dot\nu}{2} + \frac{\dot\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\dot\lambda^2}{2}e^{\lambda-\nu} - \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{1}{4}\left[4\frac{\lambda'}{r} - 2\nu'' - \nu'^2 + \lambda'\nu'\right) + e^{\lambda-\nu}\left(\frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2} + \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4} + \frac{\dot\lambda^2}{4}\right) \\
&= \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + e^{\lambda-\nu}\left[\frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4} + \frac{\dot\lambda^2}{4}\right], \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

[1] vide Apêndice

$$\begin{aligned}
R_{tr} &= \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{tr} - \partial_t \Gamma^\gamma_{r\gamma} + \Gamma^\gamma_{tr}\Gamma^\tau_{\gamma\tau} - \Gamma^\tau_{t\gamma}\Gamma^\gamma_{r\tau} \\
&= \partial_r \Gamma^r_{tr} - \partial_t \Gamma^r_{rr} - 2\partial t \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^r_{tr}\Gamma^\gamma_{r\gamma} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^\gamma_{t\gamma} - \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tr} \\
&- \Gamma^r_{tr}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tr} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rr} \\
&= \frac{\dot{\nu}'}{2} + \frac{\dot{\lambda}'}{2} - \frac{\dot{\lambda}'}{2} - \frac{\dot{\nu}'}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \frac{\nu'}{2}\left(\frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\right) - \frac{\dot{\nu}}{2}\frac{\nu'}{2} \\
&- \frac{\lambda'}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\nu'}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}.\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} \\
&= \frac{\dot{\lambda}}{r}, \qquad (3.6) \\
R_{\theta\theta} &= -\partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\gamma_{\theta\gamma} + \Gamma^\gamma_{\theta\theta}\Gamma^\tau_{\gamma\tau} - \Gamma^\tau_{\theta\gamma}\Gamma^\gamma_{\theta\tau} \\
&= \partial r \Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} + \Gamma^r_{\theta\theta}(\Gamma^r_{rr} + \Gamma^t_{tr} + 2\Gamma^\varphi_{r\varphi}) - (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2 - 2\Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} \\
&= \partial_r(-re^{-\lambda}) - \partial_\theta(\cot\theta) - re^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \cot^2\theta + 2e^{-\lambda} \\
&= -e^{-\lambda} + r\lambda' e^{-\lambda} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{r\lambda' e^{-\lambda}}{2} - \frac{r\nu' e^{-\lambda}}{2} - 2e^{-\lambda} - \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2e^{-\lambda} \\
&= 1 - e^{-\lambda} + \frac{r}{2}e^{-\lambda}(\lambda' - \nu'), \qquad (3.7) \\
R_{\varphi\varphi} &= \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^\tau_{\varphi\tau} + \Gamma^\gamma_{\varphi\varphi}\Gamma^\tau_{\gamma\tau} - \Gamma^\tau_{\varphi\gamma}\Gamma^\gamma_{\varphi\tau} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} + \partial_r \Gamma^r_{\varphi\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\tau_{\theta\tau} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\tau_{r\tau} - 2\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} - 2\Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} \\
&= -\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda} + r\lambda' \operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda} - \cos^2\theta + 2\cos^2\theta \\
&- r \operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) + 2r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}.\frac{1}{r} \\
&= \operatorname{sen}^2\theta\left[1 - e^{-\lambda} + \frac{r}{2}e^{-\lambda}(\lambda' - \nu')\right] \\
&= R_{\theta\theta}\operatorname{sen}^2\theta. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Logo, o escalar de curvatura é dado por

$$\begin{aligned}
R &= g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} \\
&= e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{-\lambda'}{r} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) \\
&- \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r}e^{-\lambda}(\nu' - \lambda') \\
&= -\frac{2}{r^2} + e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} - \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{2}{r^2} + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}\right). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos as equações de Einstein:

$$\begin{aligned}
G^t_t &= R^t_t - \frac{1}{2}\delta^t_t R = g^{tt}R_{tt} - \frac{1}{2}R = e^{-\nu}R_{tt} - \frac{1}{2}R \\
&= \frac{1}{4}e^{-\nu}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2) + e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \\
&+ e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{-1}{r^2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4}\right) \\
&= \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) = 0, \qquad (3.10) \\
G^r_r &= R^r_r - \frac{1}{2}\delta^r_r R = g^{rr}R_{rr} - \frac{1}{2}R = -e^{-\lambda}R_{rr} - \frac{1}{2}R \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{-\lambda'}{r} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{-\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) + \frac{1}{r^2} \\
&+ e^{-\nu}\left(\frac{-\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{-1}{r^2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) \\
&= \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) = 0, \qquad (3.11) \\
G^r_t &= R^r_t \\
&= -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0, \qquad (3.12) \\
G^\theta_\theta &= G^\varphi_\varphi = R^\theta_\theta - \frac{1}{2}\delta^\theta_\theta R = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}R = \frac{-1}{r^2}R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}R \\
&= \frac{-1}{r^2} + \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} - \frac{1}{2r}e^{-\lambda}(\lambda' - \nu') + \frac{1}{r^2} + e^{-\nu}\left(\frac{-\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{2r} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right) = 0. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Da equação (3.12), temos $\lambda = \lambda(r)$ e somando as equações (3.10) e (3.11), obtemos $\lambda(r) = -\nu(r)$. Fazendo a mudança de variável $u(r) = e^{-\lambda(r)}$ na equação (3.10), obtemos

$$-\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0, \qquad (3.14)$$

cuja solução é

$$u = e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{C}{r} = 1 + \frac{2GM}{r}. \qquad (3.15)$$

A constante C foi derivada comparando-se o resultado obtido com o limite newtoniano.

Portanto, a solução de Schwarzschild fica sendo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} - r^2 d\Omega. \qquad (3.16)$$

O parâmetro $C = 2GM$ é conhecido como "raio de Schwarzschild R_S".

Note que a solução de Schwarzschild demonstra ter singularidades para $r = 0$ e para $r = R_S$, mas a última é apenas uma ilusão chamada de "singularidade de coordenada". Como diz o nome, a singularidade vem da escolha das coordenadas e pode ser eliminada tomando-se um sistema de coordenadas conveniente. Para $r = 0$ é diferente, pois temos uma "singularidade física".

Agora, analisemos o domínio de existência da coordenada radial r. Como a solução obtida só é válida para o vácuo, isto é, no exterior do objeto, esta pode decrescer desde o infinito até a fronteira do objeto, que chamaremos de r_O : $r_O < r < +\infty$. Caso r_O seja menor que R_S, devido à singularidade: $R_S < r < +\infty$. Se isto ocorre, dizemos que o objeto se transforma em um "buraco negro" (para estudar o movimento para valores de $r \leq R_S$, é necessário recorrer a outro sistema de coordenadas).

3.1 A solução de Schwarzschild-de Sitter

Na presença da constante cosmológica, devemos determinar as funções arbitrárias $\nu(r,t)$ e $\lambda(r,t)$ a partir de

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \qquad (3.17)$$

isto é, devemos acrescentar o termo da constante cosmológica nas equações (3.10), (3.11) e (3.12):

$$G_t^r = \frac{-\dot{\lambda}}{r} e^{-\lambda} = 0, \qquad (3.18)$$

$$G_r^r = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \Lambda = 0, \qquad (3.19)$$

$$G_t^t = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) - \Lambda = 0, \qquad (3.20)$$

tal que obtemos a equação

$$u' + \frac{u}{r} - \frac{1}{r} + r\Lambda = 0 \qquad (3.21)$$

cuja solução é

$$u = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{r^2\Lambda}{3}. \tag{3.22}$$

Assim, obtemos a solução de Schwarzschild-de Sitter

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} - r^2 d\Omega, \tag{3.23}$$

e a métrica deixa de ser assimptoticamente plana quando $r \to \infty$ (note que não podemos usar o teorema de Birkhoff para afirmar que a solução é única). Essa solução é conhecida como solução de Schwarzschild-de Sitter.

Como os dados da radiação cósmica de fundo indicam um Λ muito pequeno (da ordem de $10^{-47}GeV^4$), os espaços-tempo de Schwarzschild e Schwarzschil-de Sitter mantem as mesmas propriedades para pequenos valores de r. Contudo, à medida que r cresce, as diferenças se tornam mais evidentes. Por exemplo, a influência de uma constante cosmológica não nula aparece nos cones de escape dos fótons e nos diagramas de imersão [14]. Outra diferença entre as soluções está no que diz respeito ao horizonte de eventos. Como dito anteriormente, R_S descreve o horizonte de eventos da solução de Schwarzschild. Para a solução de Schwarzschild-de Sitter, temos que

$$\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad = R_{SdS\pm} = \frac{3 \pm 3\sqrt{1 - \frac{8\Lambda GM}{3}}}{2\Lambda}, \tag{3.24}$$

isto é, esta solução possui dois horizontes de eventos: R_{SdS+} e R_{SdS-}, onde o primeiro é chamado de “horizonte cosmológico” e o segundo de “horizonte de Schwarzschild”.

4 Derivação da solução de Schwarzschild-de Sitter via transformação conforme local

O objetivo deste capítulo é deduzir a métrica de Schwarzschild-de Sitter a partir das equações de Einstein para uma dada métrica esférica.

Comumente, a derivação da solução de Schwarzschild inicia-se a partir da métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2 d\Omega, \tag{4.1}$$

onde $d\Omega = \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$. Mas, para simplificação dos cálculos, partiremos de uma outra métrica, considerada um pouco mais complicada:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - e^{2\Phi(r,t)}d\Omega, \tag{4.2}$$

em que $\Phi(r,t)$ é uma função escalar arbitrária. Note que, para $\Phi(r,t) = \ln r$, obtemos a métrica dada em (4.1).

Considere, então, a primeira etapa da transformação conforme, dada por:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}e^{2\Phi}. \tag{4.3}$$

A nova métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ é diagonal e fatorizada:

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ab} &= diag(\bar{g}_{00}, \bar{g}_{11}) = diag(e^A, -e^B), \\
\bar{g}_{ij} &= diag(\bar{g}_{22}, \bar{g}_{33}) = diag(-1, -\operatorname{sen}^2\theta),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
A = A(r,t) = \nu(r,t) - 2\Phi(r,t), \\
B = B(r,t) = \lambda(r,t) - 2\Phi(r,t).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Com a tranformação conforme, podemos relacionar os tensores de Ricci e escalares de curvatura através das equações :

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \bar{R}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}^2\Phi) + 2(\bar{\nabla}_\mu\Phi)(\bar{\nabla}_\nu\Phi) - 2(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\Phi) - 2g_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\Phi)^2, \\
R &= e^{-2\Phi}[\bar{R} - 6(\bar{\nabla}^2\Phi) - 6(\bar{\nabla}\Phi)^2]. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

De acordo com o teorema de fatorização (2.7), as componentes do tensor que possuem índices mistos são nulas; assim, precisamos calcular apenas as quantidades referentes às métricas bidimensionais em (4.4). Para a métrica $\bar{g}_{ab}$, temos[1]:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^t_{tt} &= \frac{\dot{A}}{2}, \qquad \bar{\Gamma}^r_{tt} = \frac{A'}{2}e^{A-B}, \qquad \bar{\Gamma}^t_{rt} = \frac{A'}{2} \\
\bar{\Gamma}^r_{tr} &= \frac{\dot{B}}{2}, \qquad \bar{\Gamma}^t_{rr} = \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}, \qquad \bar{\Gamma}^r_{rr} = \frac{B'}{2}, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

onde o ponto significa $\partial/\partial t$ e a linha significa $\partial/\partial r$.

Seja $\bar{K}$ o escalar de curvatura para esta métrica. Podemos calculá-lo através da equação (1.29):

$$
\begin{aligned}
\bar{K} &= \bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} = \bar{g}^{ab}\bar{g}^{cd}\bar{R}_{cbda} = \bar{g}^{ab}\bar{g}^{cd}\bar{g}_{ce}\bar{R}^e_{bda} \\
&= \bar{g}^{ab}\delta^d_e(\partial_d\bar{\Gamma}^e_{ba} - \partial_a\bar{\Gamma}^e_{bd} + \bar{\Gamma}^f_{ba}\bar{\Gamma}^e_{fd} - \bar{\Gamma}^f_{bd}\bar{\Gamma}^e_{fa}) \\
&= \bar{g}^{ab}(\partial_e\bar{\Gamma}^e_{ba} - \partial_a\bar{\Gamma}^e_{be} + \bar{\Gamma}^f_{ba}\bar{\Gamma}^e_{fe} - \bar{\Gamma}^f_{be}\bar{\Gamma}^e_{fa}) \\
&= \bar{g}^{tt}(\partial_e\bar{\Gamma}^e_{tt} - \partial_t\bar{\Gamma}^e_{te} + \bar{\Gamma}^f_{tt}\bar{\Gamma}^e_{fe} - \bar{\Gamma}^f_{te}\bar{\Gamma}^e_{ft}) + \bar{g}^{rr}(\partial_e\bar{\Gamma}^e_{rr} - \partial_r\bar{\Gamma}^e_{re} + \bar{\Gamma}^f_{rr}\bar{\Gamma}^e_{fe} - \bar{\Gamma}^f_{re}\bar{\Gamma}^e_{fr}) \\
&= \bar{g}^{tt}[\partial_r\bar{\Gamma}^r_{tt} - \partial_t\bar{\Gamma}^r_{tr} + \bar{\Gamma}^t_{tt}\bar{\Gamma}^r_{rt} + \bar{\Gamma}^r_{tt}\bar{\Gamma}^r_{rr} - \bar{\Gamma}^r_{tt}\bar{\Gamma}^t_{rt} - (\bar{\Gamma}^r_{rt})^2] \\
&+ \bar{g}^{rr}[\partial_t\bar{\Gamma}^t_{rr} - \partial_r\bar{\Gamma}^t_{rt} + \bar{\Gamma}^r_{rr}\bar{\Gamma}^t_{rt} + \bar{\Gamma}^t_{rr}\bar{\Gamma}^t_{tt} - (\bar{\Gamma}^t_{rt})^2 - \bar{\Gamma}^t_{rr}\bar{\Gamma}^r_{rt}] \\
&= e^{-A}\left[\frac{A''}{2}e^{A-B} + \frac{A'}{2}(A'-B')e^{A-B} - \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} + \frac{A'}{2}e^{A-B}\frac{B'}{2} - \frac{A'}{2}e^{A-B}\frac{A'}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2}\right] \\
&- e^{-B}\left[\frac{\ddot{B}}{2}e^{B-A} + \frac{\dot{B}}{2}(\dot{B}-\dot{A})e^{B-A} - \frac{A''}{2} + \frac{B'A'}{4} + \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}\frac{\dot{A}}{2} - \frac{A'^2}{4} - \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}\frac{\dot{B}}{2}\right] \\
&= e^{-A}\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4} - \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{2} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{B}^2}{4}\right) \\
&+ e^{-B}\left(\frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'B'}{2} + \frac{A'B'}{4} - \frac{A'^2}{4} + \frac{A''}{2} - \frac{B'A'}{4} + \frac{A'^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-A}\left(-2\ddot{B} + \dot{A}\dot{B} - \dot{B}^2\right) + \frac{1}{2}e^{-B}\left(2A'' + A'^2 - A'B'\right). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Agora, seja $\bar{k}$ o escalar de curvatura para a métrica $\bar{g}^{ij}$. Note que $\bar{k}$ é o escalar de

[1] O cálculo explícito dos símbolos de Christoffel encontra-se no Apêndice

curvatura da esfera em $D = 2 : \bar{k} = -2$. Assim, usando (4.5):

$$
\begin{aligned}
\bar{R} &= \bar{K} + \bar{k} = \bar{K} - 2 \\
&= \frac{1}{2}e^{-A}(\dot{A}\dot{B} - 2\ddot{B} - \dot{B}^2) + \frac{1}{2}e^{-B}(2A'' - A'B' + A'^2) - 2 \\
&= \frac{1}{2}e^{-\nu+2\Phi}[(\dot{\nu} - 2\dot{\Phi})(\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi}) - 2(\ddot{\lambda} - 2\ddot{\Phi}) - (\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi})^2] \\
&+ \frac{1}{2}e^{-\lambda+2\Phi}[2(\nu'' - 2\Phi'') - (\nu' - 2\Phi')(\lambda' - 2\Phi') + (\nu' - 2\Phi')^2] - 2 \\
&= \frac{1}{2}e^{-\nu+2\Phi}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi}\dot{\nu} - 2\dot{\Phi}\dot{\lambda} + 4\dot{\Phi}^2 - 2\ddot{\lambda} + 4\ddot{\Phi} - \dot{\lambda}^2 + 4\dot{\Phi}\dot{\lambda} - 4\dot{\Phi}^2) \\
&+ \frac{1}{2}e^{-\lambda+2\Phi}(2\nu'' - 4\Phi'' - \nu'\lambda' + 2\Phi'\nu' + 2\Phi'\lambda' - 4\Phi'^2 + \nu'^2 - 4\Phi'\nu' + 4\Phi'^2) - 2 \\
&= \frac{1}{2}e^{-\nu+2\Phi}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi}\dot{\nu} + 2\dot{\Phi}\dot{\lambda} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + 4\ddot{\Phi}) \\
&+ \frac{1}{2}e^{-\lambda+2\Phi}(2\Phi'\lambda' - 2\Phi'\nu' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + 2\nu'' - 4\Phi'') - 2. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Como [2]

$$
\begin{aligned}
(\bar{\nabla}\Phi)^2 &= e^{-A}\dot{\Phi}^2 - e^{-B}\Phi'^2 \\
\bar{\nabla}^2\Phi &= e^{-A}\left(\ddot{\Phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{\Phi}\right) + e^{-B}\left(\frac{1}{2}B'\Phi' - \frac{1}{2}A'\Phi' - \Phi''\right), \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

[2] Vide Apêndice

temos, a partir da segunda equação (4.6):

$$
\begin{aligned}
R &= e^{-2\Phi}[\bar{R} - 6(\bar{\nabla}^2\Phi) - 6(\bar{\nabla}\Phi)^2] \\
&= \frac{1}{2}e^{-\nu}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi}\dot{\nu} + 2\dot{\Phi}\dot{\lambda} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + 4\ddot{\Phi}) + \frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\Phi'\lambda' - 2\Phi'\nu' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + 2\nu'' - 4\Phi'') \\
&- 2e^{-2\Phi} - 6(e^{-\nu}\dot{\Phi}^2 - e^{-\lambda}\Phi'^2) \\
&- 6\left[e^{-\nu}\left(\ddot{\Phi} - \frac{1}{2}(\dot{\nu}\dot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2) + \frac{1}{2}(\dot{\lambda}\dot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2)\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}(\lambda'\Phi' - 2\Phi'^2) - \frac{1}{2}(\nu'\Phi' - 2\Phi'^2) - \Phi''\right)\right] \\
&= -2e^{-2\Phi} + e^{-\nu}\left[\frac{1}{2}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi}\dot{\nu} + 2\dot{\Phi}\dot{\lambda} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + 4\ddot{\Phi}) - 6\dot{\Phi}^2 - 6\ddot{\Phi} + 3\dot{\nu}\dot{\Phi} - 6\dot{\Phi}^2 - 3\dot{\lambda}\dot{\Phi} + 6\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}(2\Phi'\lambda' - 2\Phi'\nu' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + 2\nu'' - 4\Phi'') + 6\Phi'^2 - 3\lambda'\Phi' - 6\Phi'^2 + 3\nu'\Phi' + 6\Phi'^2 + 6\Phi''\right] \\
&= -2e^{-2\Phi} + e^{-\nu}\left[\frac{1}{2}(\dot{\nu}\dot{\lambda} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2) + 2\dot{\nu}\dot{\Phi} - 2\dot{\lambda}\dot{\Phi} - 4\ddot{\Phi} - 6\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}(2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') - 2\lambda'\Phi' + 2\nu'\Phi' + 4\Phi'' + 6\Phi'^2\right] \\
&= -2e^{-2\Phi} + e^{-\nu}\left[\dot{\nu}\left(\frac{\dot{\lambda}}{2} + 2\dot{\Phi}\right) - \dot{\lambda}\left(\frac{\dot{\lambda}}{2} + 2\dot{\Phi}\right) - \ddot{\lambda} - 4\ddot{\Phi} - 6\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\left[\nu'\left(2\Phi' + \frac{\nu'}{2}\right) - \lambda'\left(2\Phi' + \frac{\nu'}{2}\right) + \nu'' + 4\Phi'' + 6\Phi'^2\right] \\
&= -2e^{-2\Phi} + e^{-\nu}\left[(\dot{\nu} - \dot{\lambda})\left(2\dot{\Phi} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\right) - \ddot{\lambda} - 4\ddot{\Phi} - 6\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\left[\left(2\Phi' + \frac{\nu'}{2}\right)(\nu' - \lambda') + \nu'' + 4\Phi'' + 6\Phi'^2\right].
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Analogamente, usando a primeira equação (4.5), as relações [3]

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_t\Phi &= \ddot{\Phi} - \frac{\dot{A}}{2}\dot{\Phi} - \frac{A'}{2}e^{A-B}\Phi', \\
\bar{\nabla}_r\bar{\nabla}_r\Phi &= \Phi'' - \frac{B'}{2}\Phi 1 - \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}\dot{\Phi}, \\
\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_r\Phi &= \dot{\Phi}' - \frac{A'}{2}\dot{\Phi} - \frac{\dot{B}}{2}\Phi',
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

e (4.4) e a segunda equação (1.30), nós obtemos as componentes do tensor de Ricci:

$$
\begin{aligned}
R_{tr} &= \bar{R}_{tr} - \bar{g}_{tr}(\bar{\nabla}^2\Phi) + 2\bar{\nabla}_t\Phi\bar{\nabla}_r\Phi - 2\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_r\Phi - 2\bar{g}_{tr}(\bar{\nabla}\Phi)^2 \\
&= 2\Phi'\dot{\Phi} - 2\dot{\Phi}' + A'\dot{\Phi} + \dot{B}\Phi',
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

[3] Vide Apêndice

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= \bar{R}_{rr} - \bar{g}_{rr}(\bar{\nabla}^2\Phi) + 2(\bar{\nabla}_r\Phi)^2 - 2\bar{\nabla}_r\bar{\nabla}_r\Psi - 2\bar{g}_{rr}(\bar{\nabla}\Psi)^2 \\
&= \frac{1}{4}e^{B-A}(2\ddot{B} + \dot{B}^2 - \dot{A}\dot{B}) + \frac{1}{4}(A'B' - A'^2 - 2A'') + e^{B-A}\left(\ddot{\Phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{\Phi}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}B'\Phi' - \frac{1}{2}A'\Phi' - \Phi''\right) + 2\Phi'^2 - 2\Phi'' + B'\Phi' + \dot{B}\dot{\Phi}e^{B-A} + 2e^{B-A}\dot{\Phi}^2 - 2\Phi'^2 \\
&= e^{B-A}\left[\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}}{4} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} + \ddot{\Phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{\Phi} + \dot{B}\dot{\Phi} + 2\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ \left[\frac{A'B'}{4} - \frac{A'^2}{4} - \frac{A''}{2} + \frac{1}{2}B'\Phi' - \frac{1}{2}A'\Phi' - \Phi'' + 2\Phi'^2 - 2\Phi'' + B'\Phi' - 2\Phi'^2\right] \\
&= e^{B-A}\left[\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}^2}{4} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} + \frac{3\dot{B}\dot{\Phi}}{2} + \ddot{\Phi} + 2\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ \left[\frac{A'B'}{4} - \frac{A'^2}{4} - \frac{A''}{2} - \frac{1}{2}A'\Phi' + \frac{3B'\Phi'}{2} - 3\Phi''\right],
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \bar{R}_{tt} - \bar{g}_{tt}(\bar{\nabla}^2\Phi) + 2(\bar{\nabla}_t\Phi)^2 - 2\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_t\Phi - 2\bar{g}_{tt}(\bar{\nabla}\Phi)^2 \\
&= \frac{1}{4}(\dot{A}\dot{B} - 2\ddot{B} - \dot{B}^2) + \frac{1}{4}e^{A-B}(2A'' - A'B' + A'^2) - \ddot{\Phi} + \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} - \frac{1}{2}\dot{B}\dot{\Phi} \\
&+ e^{A-B}\left(\frac{1}{2}A'\Phi' - \frac{1}{2}B'\Phi' + \Phi''\right) + 2\dot{\Phi}^2 - 2\ddot{\Phi} + \dot{A}\dot{\Phi} + A'\Phi'e^{A-B} - 2\dot{\Phi}^2 + 2e^{A-B}\Phi'^2 \\
&= e^{A-B}\left(\frac{A''}{2} - \frac{A'B'}{4} + \frac{A'^2}{4} + \frac{3A'\Phi'}{2} - \frac{B'\Phi'}{2} + \Phi'' + 2\Phi'^2\right) \\
&+ \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4} - 3\ddot{\Phi} + \frac{3\dot{A}\dot{\Phi}}{2} - \frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

As componentes do tensor de Einstein podem ser calculadas através da equação (1.33). Abaixando um dos índices e utilizando as relações (4.4), temos:

$$
\begin{aligned}
G_t^r &= g^{rr}G_{tr} \\
&= g^{rr}\left(R_{tr} - \frac{1}{2}Rg_{tr} - \Lambda g_{tr}\right) \\
&= g^{rr}R_{tr} - \frac{1}{2}R\delta_t^r - \Lambda\delta_t^r \\
&= -e^{-\lambda}(2\Phi'\dot{\Phi} - 2\dot{\Phi}' + A'\dot{\Phi} + \dot{B}\Phi') \\
&= -e^{-\lambda}[2\Phi'\dot{\Phi} - 2\dot{\Phi}' + (\nu' - 2\Phi')\dot{\Phi} + (\dot{\lambda} - 2\dot{\Phi})\Phi'] \\
&= e^{-\lambda}(2\dot{\Phi}\Phi' + 2\dot{\Phi}' - \nu'\dot{\Phi} - \dot{\lambda}\Phi'),
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
G_r^r &= g^{rr}G_{rr} \\
&= g^{rr}\left(R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} - \Lambda g_{rr}\right) \\
&= R_r^r - \frac{1}{2}R\delta_r^r - \Lambda\delta_r^r \\
&= e^{-2\Phi} + e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \dot{\lambda}\dot{\Phi} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \dot{\lambda^2 4} - \dot{\nu}\dot{\Phi} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + 2\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}^2\right) \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu''}{2} + 2\Phi'' - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \lambda'\Phi' + 2\Phi'^2 - \frac{\nu''}{2} + \lambda 1\Phi' + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \nu'\Phi' - \frac{\nu'^2}{4} - 2\Phi'' - 3\Phi'^2\right) \\
&- \Lambda \\
&= e^{-2\Phi} + e^{-\nu}(2\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}^2 - \dot{\nu}\dot{\Phi}) - e^{-\lambda}(\nu'\Phi' + \Phi'^2) - \Lambda, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_t^t &= g^{tt}G_{tt} \\
&= g^{tt}\left(R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} - \Lambda g_{tt}\right) \\
&= R_t^t - \frac{1}{2}R\delta_t^t - \Lambda\delta_t^t \\
&= e^{-2\Phi} + e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \nu'\Phi' + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu''}{2} + \lambda'\Phi' + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \nu'\Phi' - \frac{\nu'^2}{4} - 2\Phi'' - 3\Phi'^2\right) \\
&+ e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \dot{\nu}\dot{\Phi} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - 2\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2 + \dot{\lambda}\dot{\Phi} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \dot{\nu}\dot{\Phi} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + 2\ddot{\Phi} + 3\dot{Phi}^2 - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) - \Lambda \\
&= e^{-2\Phi} + e^{-\lambda}(\lambda'\Phi' - 2\Phi'' - 3\Phi'^2) + e^{-\nu}(\dot{\lambda}\dot{\Phi} + \dot{\Phi}^2) - \Lambda. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

O cálculo das componentes R_b^a encontra-se no Apêndice.

Para obtermos a solução de Schwarzschild-de Sitter, aplicamos $\Phi(r,t) = \ln r$ nas equações (4.16), (4.17) e (4.18), tal que:

$$
\begin{aligned}
G_t^r &= -e^{-\lambda}\dot{\lambda}\Phi' = \frac{-\dot{\lambda}}{r}e^{-\lambda}, \qquad (4.19) \\
G_r^r &= \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \Lambda, \qquad (4.20) \\
G_t^t &= \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^2}\right) - \Lambda = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) - \Lambda. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Como no vácuo $T_\mu^\nu = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
(4.19) \quad &\longrightarrow \quad \dot{\lambda} = 0, \qquad (4.22) \\
(4.20) \quad &\longrightarrow \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 0, \qquad (4.23) \\
(4.21) \quad &\longrightarrow \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 0. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

De (4.22), sabemos que $\lambda = \lambda(r)$. Somando (4.23) e (4.24), obtemos

$$\lambda' + \nu' = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda + \nu = f(t) \qquad \rightarrow \qquad \nu = f(t) - \lambda(r).$$

Assim,

$$ds^2 = e^{-\lambda(r)+f(t)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\Omega. \tag{4.25}$$

Essa dependência temporal de ν pode ser absorvida pela mudança de variável $\bar{d}t = e^{\frac{f(t)}{2}}dt$, tal que

$$ds^2 = e^{-\lambda(r)}\bar{d}t^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\Omega, \tag{4.26}$$

isto é, as novas variáveis da métrica são independentes do tempo. Isso implica que a solução esfericamente simétrica é necessariamente estática, tal que sempre podemos escolher a coordenada temporal de modo a ter

$$\lambda(r) + \nu(r) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda(r) = -\nu(r).$$

Reescrevendo (4.24), temos

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} + \Lambda &= 0 \qquad \rightarrow \\ e^{-\lambda}\left(\lambda' - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} - r\Lambda &= 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = e^{-\lambda}$, obtemos

$$u' + \frac{u}{r} - \frac{1}{r} + r\Lambda = 0 \tag{4.28}$$

tal que [4]

$$
\begin{aligned}
u(r) &= \exp\left[-\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\bar{r}}d\bar{r}\right]\left\{\int\left(\frac{1}{r}-r\Lambda\right)\exp\left[\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\bar{r}}d\bar{r}\right]dr+C_1\right\}\\
&= \exp\left[\ln\bar{r}\Big|_{r}^{r_0}\right]\left\{\int\left(\frac{1}{r}-r\Lambda\right)\exp\left[\ln\bar{r}\Big|_{r_0}^{r}\right]dr+C_1\right\}\\
&= \exp\left[\ln r_0-\ln r\right]\left\{\int\left(\frac{1}{r}-r\Lambda\right)\exp\left[\ln r-\ln r_0\right]dr+C_1\right\}\\
&= \exp\left(\ln r_0\right)\exp\left(\ln r^{-1}\right)\left\{\int\left(\frac{1}{r}-r\Lambda\right)\exp\left(\ln r\right)\exp\left(\ln r_0^{-1}\right)dr+C_1\right\}\\
&= \frac{r_0}{r}\left\{\int\left(\frac{1}{r}-r\Lambda\right)\frac{r}{r_0}dr+C_1\right\}\\
&= \frac{1}{r}\left\{\int(1-r^2\Lambda)dr+r_0C_1\right\}\\
&= \frac{1}{r}\left(r-\frac{r^3\Lambda}{3}\right)+r_0C_2\\
&= 1-\frac{r^2\Lambda}{3}+\frac{C_2}{r}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Para fixar a constante C_2, basta considerar a solução sem a constante cosmológica e reduzí-la ao limite newtoniano:

$$
g_{00}=1-\frac{2GM}{rc^2}\qquad\equiv\qquad 1-\frac{2GM}{r}\qquad (c=1),
$$

tal que $C_2=-2GM$; esse parâmetro é conhecido como “raio de Schwarzschild”. Temos,então,

$$
u=e^{-\lambda}=1-\frac{2GM}{r}-\frac{r^2\Lambda}{3}. \tag{4.30}
$$

Assim, obtemos a solução de Schwarzschild-de Sitter

$$
ds^2=\left(1-\frac{2GM}{r}-\frac{r^2\Lambda}{3}\right)dt^2-\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{r}-\frac{r^2\Lambda}{3}\right)}dr^2-r^2d\Omega, \tag{4.31}
$$

como havíamos proposto.

[4]Para a passagem de (4.28) para (4.29), vide Apêndice

Conclusão

Apesar de ser a solução esfericamente simétrica mais simples das equações de campo de Einstein com constante cosmológica, a solução de Schwarzschild-de Sitter apresenta cálculos extensos ao ser deduzida de maneira usual. O uso da simetria conforme local e do teorema da fatorização faz com que o volume dos cálculos diminua, reduzindo significativamente o número de componentes a serem calculadas (o cálculo destas componentes pode parecer mais complexo do que da maneira usual, mas se desenvolve mecanicamente, sem maiores prejuízos).

Esta solução é de extrema importância no estudo da gravitação do sistema solar, pois testa localmente a validade da Relatividade Geral e descreve objetos que não estavam previstos pela teoria Newtoniana, tal como buracos negros.

Apêndice

Símbolos de Christoffel, Capítulo 3:

Os símbolos de Christoffel podem ser calculados a partir da equação (1.15). Assim,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{tt}) = \frac{\dot{\nu}}{2}, && \text{(A-1)}\\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{rr}) = \frac{\lambda'}{2}, && \text{(A-2)}\\
\Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial_r g_{tt}) = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, && \text{(A-3)}\\
\Gamma^t_{rr} &= \frac{1}{2}g^{tt}(-\partial_t g_{rr}) = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}, && \text{(A-4)}\\
\Gamma^t_{rt} &= \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_r g_{tt}) = \frac{\nu'}{2}, && \text{(A-5)}\\
\Gamma^r_{rt} &= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{rr}) = \frac{\dot{\lambda}}{2}, && \text{(A-6)}\\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(-\partial_\theta g_{\phi\phi}) = \frac{-1}{2r^2}\partial_\theta r^2 \operatorname{sen}^2\theta = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, && \text{(A-7)}\\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2r^2\operatorname{sen}^2\theta}.2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cot\theta, && \text{(A-8)}\\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{-1}{2}e^{-\lambda}\partial_r(r^2\operatorname{sen}^2\theta) = -r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}, && \text{(A-9)}\\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial r g_{\theta\theta}) = \frac{-1}{2}e^{-\lambda}2r = -re^{-\lambda}, && \text{(A-10)}\\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2r^2\operatorname{sen}^2\theta}.2r\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{r}. && \text{(A-11)}
\end{aligned}
$$

Símbolos de Christoffel, Capítulo 4:

Analogamente aos anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^t_{tt} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}(\partial_t \bar{g}_{tt}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}\dot{A}e^{A} = \frac{1}{2}\dot{A}e^{-A}e^{A} = \frac{\dot{A}}{2}, && \text{(A-12)}\\
\bar{\Gamma}^t_{tr} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}(\partial_r \bar{g}_{tt}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}A'e^{A} = \frac{1}{2}A'\bar{g}^{tt}\bar{g}_{tt} = \frac{A'}{2}, && \text{(A-13)}\\
\bar{\Gamma}^t_{rr} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}(-\partial_t \bar{g}_{rr}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}\dot{B}e^{B} = \frac{1}{2}\dot{B}e^{-A}e^{B} = \frac{1}{2}\dot{B}e^{B-A}, && \text{(A-14)}\\
\bar{\Gamma}^r_{rr} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}(\partial_r \bar{g}_{rr}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}B'\bar{g}_{rr} = \frac{B'}{2}, && \text{(A-15)}\\
\bar{\Gamma}^r_{tr} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}(\partial_t \bar{g}_{rr}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}(-\dot{B}e^{B}) = \frac{\dot{B}}{2}, && \text{(A-16)}\\
\bar{\Gamma}^r_{tt} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}(-\partial_r \bar{g}_{tt}) = \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}(-A'e^{A}) = \frac{-A'}{2}e^{A}(-e^{-B}) = \frac{A'}{2}e^{A-B}. && \text{(A-17)}
\end{aligned}$$

Derivadas Covariantes:

Usando (1.14) e (4.7), temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_t\Phi &= \bar{\nabla}_t(\partial_t\Phi) = \partial_t^2\Phi - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{tt}\partial_\lambda\Phi\\
&= \ddot{\Phi} - \bar{\Gamma}^t_{tt}\dot{\Phi} - \bar{\Gamma}^r_{tt}\Phi' = \ddot{\Phi} - \frac{\dot{A}}{2}\dot{\Phi} - \frac{A'}{2}e^{A-B}\Phi', && \text{(A-18)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_r\bar{\nabla}_r\Phi &= \bar{\nabla}_r(\partial_r\Phi) = \partial_r^2\Phi - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{rr}\partial_\lambda\Phi\\
&= \Phi'' - \bar{\Gamma}^t_{rr}\dot{\Phi} - \bar{\Gamma}^r_{rr}\Phi' = \Phi'' - \frac{B'}{2}\Phi' - \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}\dot{\Phi}, && \text{(A-19)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_t\bar{\nabla}_r\Phi &= \bar{\nabla}_t(\partial_r\Phi) = \partial_t\partial_r\Phi - \bar{\Gamma}^{\lambda}_{rt}\partial_\lambda\Phi\\
&= \dot{\Phi}' - \bar{\Gamma}^t_{rt}\dot{\Phi} - \bar{\Gamma}^r_{rt}\Phi' = \dot{\Phi}' - \frac{A'}{2}\dot{\Phi} - \frac{\dot{B}}{2}\Phi', && \text{(A-20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}\Phi)^2 &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Phi\bar{\nabla}_\nu\Phi = \bar{g}^{rr}(\bar{\nabla}_r\Phi)^2 + \bar{g}^{tt}(\bar{\nabla}_t\Phi)^2\\
&= e^{-A}\dot{\Phi}^2 - e^{-B}\Phi'^2, && \text{(A-21)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}^2\Phi &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\Phi = \bar{g}^{rr}\bar{\nabla}_r^2\Phi + \bar{g}^{tt}\bar{\nabla}_t^2\Phi\\
&= e^{-A}\ddot{\Phi} - e^{-A}\frac{\dot{A}}{2}\dot{\Phi} - \frac{A'}{2}e^{-B}\Phi' - e^{-B}\Phi'' + e^{-B}\frac{B'}{2}\Phi' + \frac{\dot{B}}{2}e^{-A}\dot{\Phi}\\
&= e^{-A}\left(\ddot{\Phi} - \frac{\dot{A}}{2}\dot{\Phi} + \frac{\dot{B}}{2}\dot{\Phi}\right) + e^{-B}\left(\frac{B'}{2}\Phi' + \frac{A'}{2}\Phi' - \Phi''\right) && \text{(A-22)}
\end{aligned}$$

Componentes R^a_b:

Para obter as componentes R^a_b, basta levantar um dos índices de R_{ab} e substituir as relações (4.5):

$$
\begin{aligned}
R^r_r &= g^{rr}R_{rr} \\
&= -e^{-B}R_{rr}e^{-2\Phi} \\
&= e^{-2\Phi-A}\left[\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4} + \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\Phi} - \frac{3\dot{B}}{2}\Phi' - \ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-2\Phi-B}\left[\frac{A'^2}{4} + \frac{A''}{2} - \frac{A'B'}{4} + \frac{1}{2}A'\Phi' - \frac{3B'}{2}\Phi' + 3\Phi''\right] \\
&= e^{-\nu}\left[\frac{(\dot{\nu}-2\dot{\Phi})(\dot{\lambda}-2\dot{\Phi})}{4} - \frac{(\ddot{\lambda}-2\ddot{\Phi})}{2} - \frac{(\dot{\lambda}-2\dot{\Phi})^2}{4} + \frac{1}{2}(\dot{\nu}-2\dot{\Phi})\dot{\Phi} - \frac{3}{2}(\dot{\lambda}-2\dot{\Phi})\dot{\Phi} - \ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\Big[\frac{(\nu'-2\Phi')^2}{4} + \frac{(\nu''-2\Phi'')}{2} - \frac{(\nu'-2\Phi')(\lambda'-2\Phi')}{4} + \frac{1}{2}(\nu'-2\Phi')\Phi' - \frac{3}{2}(\lambda'-2\Phi')\Phi' \\
&+ 3\Phi''\Big] \\
&= e^{-\nu}\left[\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\Phi}}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\Phi}}{2} + \dot{\Phi}^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \ddot{\Phi} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \dot{\lambda}\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^2 + \frac{\dot{\nu}\dot{\Phi}}{2} - \dot{\Phi}^2 - \frac{3}{2}\dot{\lambda}\dot{\Phi} + 3\dot{\Phi}^2 - \ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2\right] \\
&+ e^{-\lambda}\Big[\frac{\nu'^2}{4} - \nu'\Phi' + \Phi'^2 + \frac{\nu''}{2} - \Phi'' - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'\Phi'}{2} + \frac{\lambda'\Phi'}{2} - \Phi'^2 + \frac{\nu'\Phi'}{2} - \Phi'^2 - \frac{3}{2}\lambda'\Phi' + 3\Phi'^2 \\
&+ 3\Phi''\Big] \\
&= e^{-\nu}\left[\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \dot{\lambda}\dot{\Phi} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right] + e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu''}{2} + 2\Phi'' - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \lambda'\Phi' + 2\Phi'^2\right], \qquad \text{(A-23)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^t_t &= g^{tt}R_{tt} \\
&= e^{-A}e^{-2\Phi}R_{tt} \\
&= e^{-2\Phi-B}\left(\frac{A''}{2} - \frac{A'B'}{4} + \frac{A'^2}{4} + \frac{3A'\Phi'}{2} - \frac{B'\Phi'}{2} + \Phi'' + 2\Phi'^2\right) \\
&+ e^{-2\Phi-A}\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} + \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4} - 3\ddot{\Phi} + \frac{3\dot{A}\dot{\Phi}}{2} - \frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{2}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \Phi'' - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'\Phi'}{2} + \frac{\lambda'\Phi'}{2} - \Phi'^2 + \frac{\nu'^2}{4} - \nu'\Phi' + \Phi'^2 + \frac{3\nu'\Phi'}{2} - 3\Phi'^2 - \frac{\lambda'\Phi'}{2} + \Phi'^2 + \right. \\
&+ e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\nu}\dot{\Phi}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\Phi}}{2} + \dot{\Phi}^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \ddot{\Phi} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \dot{\lambda}\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^2 - 3\ddot{\Phi} + \frac{3\dot{\nu}\dot{\Phi}}{2} - 3\dot{\Phi}^2 - \frac{\dot{\lambda}\dot{\Phi}}{2} + \dot{\Phi}^2\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \nu'\Phi' + \frac{\nu'^2}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \dot{\nu}\dot{\Phi} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - 2\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}^2 - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Método do fator integrante:

O método do fator integrante é um método geral usado para resolver equações da forma

$$u'(r) + p(r)u(r) = q(r) \tag{A-25}$$

e consiste em multiplicar todos os membros da equação por um fator integrante, I(r), tal que

$$I(r)u'(r) + I(r)p(r)u(r) = I(r)q(r), \tag{A-26}$$

de modo que

$$\frac{d[I(r)u(r)]}{dr} = I(r)q(r). \tag{A-27}$$

Mas, para que isso ocorra,

$$I'(r)u(r) = I(r)p(r)u(r) \qquad \longrightarrow \qquad I'(r) = I(r)p(r), \tag{A-28}$$

de onde obtemos

$$I(r) = \exp\left(\int_{r_0}^{r} p(\bar{r})d\bar{r}\right). \tag{A-29}$$

Substituindo o resultado anterior na equação (A-27) e realizando a integração, temos

$$u(r)\exp\left(\int_{r_0}^{r} p(\bar{r})d\bar{r}\right) = \int q(r)\exp\left(\int_{r_0}^{r} p(\bar{r})d\bar{r}\right)dr + C. \tag{A-30}$$

Logo,

$$u(r) = \exp\left(-\int_{r_0}^{r} p(\bar{r})d\bar{r}\right)\left[\int q(r)\exp\left(\int_{r_0}^{r} p(\bar{r})d\bar{r}\right)dr + C\right]. \tag{A-31}$$

Referências

[1] Einstein, A., “Die Feldgleichungen der Gravitation”, Preuss. Akad. Wiss., 48, 2, 844-847 (1915).

[2] Schwarzschild, K., “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, Preuss. Akad. Wiss., 3, 189-196 (1916).

[3] Einstein, A.,“Kosmologische Betrachtungen zur allgeimeinen Relativitätstheorie”, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 142-152 (1917).

[4] Friedmann, A., “Über die Krümmung des Raumes”, Zeitschrift für Physik, 10 (1), 377-386 (1922).

[5] Hubble, E.P.,“A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebula”, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 15, 168-173 (1929).

[6] Riess, A. G., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, Astronomical J., 116 (3), 1009-38 (1998).

[7] Perlmutter, S., “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae”, Astrophysical J., 517 (2), 565-86 (1999).

[8] Abbott, L., “The mistery of the cosmological constant”, Sc. Amer. 258 (5), 82-88 (1988).

[9] Weinberg, S., “ The cosmological constant problem”, Rev. Mod. Phys., 61, 1-23 (1989).

[10] Krauss, L. M. e Turner, M. S., “The cosmological constant is back”, Gen. Relativ. Gravit. 27, 1137-1144 (1995).

[11] Ostriker, J. P. e Steinhart, P. J., “The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant”, Nature (London) 377, 600-602 (1995).

[12] de Sitter. W., “On the relativity of Inertia: Remarks concerning Einstein’s latest hypothesis”, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., 19, 1217-1225 (1917).

[13] de Sitter, W., “On the curvature of space”, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., 20, 229-243 (1917).

[14] Stuchlík, Z. e Hledík, S., “Some properties of the Schwarzschild-de Sitter and Schwarzschild-anti-de Sitter spacetimes”, Phys. Rev. D 60, 044006 (1999).

[15] Kagramanova, V., Kunz, J. e Lämmerzahl, C., “Solar system effects in Schwarzschild-de Sitter spacetime”, Phys. Lett. B 634, 465-470 (2006).

[16] Nieuwenhuizen, Th. M., "Exact Schwarzschild-de Sitter black holes in a family of massive gravity models", Phys. Rev. D 84, 024038 (2011).

[17] Fonseca-Neto, J. B. e Romero, C., "The Schwarzschild-de Sitter solution in five-dimensional general relativity briefly revisited", Class. Quant. Grav. , 24, 3515-20 (2007).

[18] Schottenloher, M., "A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory", Lect. Notes Phys. 759 (Springer, Berlin Heidelberg 2008).

[19] Blumenhagen, R. e Plauschinn, E., "Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory", Lect. Notes Phys. 779 (Springer, Berlin Heidelberg 2009).

[20] Shapiro, I., "Local Conformal Symmetry and its Fate at Quantum Level", PoS (IC 2006), 030 (2006).

[21] Ginsparg, P., "Applied Conformal Field Theory", Fields, Strings and Critical Phenomena, (Les Houches, Session XLIX, 1998).

[22] McConnell, A.J., "Applications of Tensor Analysis", (Dover Publications, Inc., New York, 1957).

[23] Shapiro, I.L., "Physical Aspects of the Space-Time Torsion", Phys. Rep. 357, 113 (2002).

[24] Buchbinder, I.L., Odintsov, S.D. e Shapiro, I.L., "Nonsingular Cosmologial Model Induced by Vacuum Quantum Effect in Curved Space-Time with Torsion", Phys.Lett. B 162, 92-96 (1985).

[25] Weinberg, S., "Gravitation and Cosmology", (Wiley, New York, 1972).

[26] Misner, C.W., Thorn, K.S. e Wheeler, J.A., "Gravitation", (Freeman, San Francisco, 1973).

[27] Wald, R.M., "General Relativity", (University of Chicago Press., U.S., 1984).

[28] Landau, L.D. e Lifshits, E.M., "Field Theory", (Pergamon Press, London, 1961).

[29] de Souza, S. e Silva, A., "Teorema de Nash aplicado ao estudo de wormhole atravessável", (Instituto de Física da Universidade de Brasília, Brasília-DF, 2012).

[30] Deser, S., "Scale invariance and gravitational coupling", Ann.Phys. (NY) 59, 248-253 (1970).

[31] Deser, S., Duff, M.J. e Isham, C., "Nonlocal Conformal Anomalies". Nucl. Phys B 111, 45-55 (1976).

[32] Duff, M.J., "Observations on Conformal Anomalies". Nucl. Phys. B 125, 334-348 (1977).

[33] Shapiro, I.L., "On the conformal transformation and duality in gravity", Class. Quantum Grav. 14, 391-406 (1997).

[34] Shapiro, I.L. e Takata, H., "Conformal transformation in gravity". Phys.Lett. B 361, 31-37 (1996).

[35] Carneiro, F. D., *et al*, "On useful conformal transformations in general relativity", Gravitation and Cosmology 10, 305-312 (2004).

[36] Crawford, P., "Notas de Relatividade e Cosmologia", (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal, 2003).

[37] Birkhoff, G. D., "Relativity and Modern Physics", (Cambrigdge, MA: Harvard University Press, 1923).

[38] Deser, S. e Franklin, J., "Schwarzschild and Birkhoff a la Wyel", Am. J. Phys. 73, 261-264 (2005).