UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO 8 º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE POLÍGONOS

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

Juiz de Fora (MG)
Março, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE POLÍGONOS

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Março, 2017

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rezende, Dayselane Pimenta Lopes.
Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos / Dayselane Pimenta Lopes Rezende. -- 2017.
155 f. : il.

Orientador: Reginaldo Fernando Carneiro
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, 2017.

1. Educação Matemática. 2. Geometria. 3. Polígonos. 4. Tarefas exploratório-investigativas. 5. Ensino Fundamental. I. Carneiro, Reginaldo Fernando, orient. II. Título.

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

"ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO 8 º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE POLÍGONOS"

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Reginaldo Fernando Carneiro
___
Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro
(UFJF)

Passos
___
Profa. Dra. Cármen Lúcia Brancaglion Passos
(UFSCar)

___
Profa. Dr. Amarildo Melchíades da Silva
(UFJF)

Aprovada em 14/03/2017

Dedico esse trabalho à memória do meu pai, *Jovaní Lopes Pirozi* e da minha avó, *Carlinda de Oliveira Pimenta*, que partiram enquanto eu estava nesta caminhada, transformando a saudade num privilégio de quem sempre os amou.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado essa oportunidade de realizar um sonho, cheio de obstáculos e que aos poucos foram superados.

À minha mãe, Margarida, pelo apoio incondicional e por incentivar minha caminhada profissional.

Aos meus filhos, Bianca e Thiago, por me incentivarem e apoiarem, me encorajando quando me sentia cansada e desanimada.

Ao meu esposo, Antônio Carlos, pela confiança depositada e por compreender quando necessitava me ausentar, dando apoio e acreditando na minha capacidade.

As diretoras da Creche e Escola Municipal Maria Puddó Murucci, Stela e Adriane, pelo apoio, incentivo e pela possibilidade de realizar esse trabalho em minhas aulas de matemática.

A meus colegas de trabalho, Simone, Lidiana, Lucas, Tatiane, Samara, Cyene e Elzira pelo incentivo e apoio.

Aos Secretários Municipais de Educação do município de Porciúncula e Varre-Sai, Silméia e Carlos Alberto, respectivamente, pelo apoio e incentivo.

Aos queridos colegas de Mestrado pelo apoio e amizade.

As minhas queridas amigas, Rosane, Marinalva e Thaís, pela contribuição, apoio e pela amizade verdadeira construída nesse percurso.

A professora Cármen e ao professor Amarildo por aceitarem fazer parte da minha banca e pelas contribuições que enriqueceram ainda mais meu trabalho.

Ao professor Reginaldo, meu orientador, pela dedicação, paciência e disponibilidade, por quem tenho profundo respeito e gratidão.

Aos meus alunos, pela colaboração. Sem vocês essa pesquisa não teria o mesmo sentido.

A todos que de alguma forma contribuíram para que conseguisse chegar ao fim de um ciclo e quem sabe início de uma próxima caminhada.

“Cada indivíduo tem sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo – aqueles indivíduos que são considerados “o professor nato”. Mas sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que a vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre a teoria e prática é o que chamamos pesquisa”.

(Ubiratan D’Ambrosio)

RESUMO

O ensino da Geometria por muitos anos foi deixado em segundo plano e isso trouxe consequências graves que até hoje permeiam as salas de aulas de nossas escolas. Nesse sentido, percebe-se a necessidade da utilização de diferentes metodologias para o ensino da geometria. Diante de tantas inquietações sobre a forma como os conceitos geométricos são abordados em sala de aula, a presente pesquisa tem como foco responder as seguintes indagações: Quais contribuições para o processo de aprendizagem de estudantes do ensino fundamental podem ocorrer a partir do ensino de polígonos com tarefas exploratório-investigativas e com o uso de material didático manipulativo? Quais as contribuições que um trabalho com tarefas exploratório-investigativas com a utilização de material didático manipulável traz para a mudança da prática docente da professora-pesquisadora? Procurando responder essas questões, o estudo tem como objetivo geral ampliar a compreensão acerca de polígonos, trazendo elementos que possam contribuir para a elaboração de atividades que estimulem o desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínio lógico e a habilidade argumentativa dos alunos. Para tal, procuramos identificar e analisar de que forma as aulas de cunho exploratório-investigativas, mediadas pelo uso de material didático manipulável, do trabalho em grupo e a intervenção do professor podem favorecer a aquisição do conhecimento geométrico produzido pelos alunos. Também procuramos descrever e refletir sobre as mudanças ocorridas na prática pedagógica da professora-investigadora para a formação e produção do conhecimento. Nesse sentido, a pesquisa foi de cunho qualitativo e realizada com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola do interior do Estado do Rio de Janeiro. A coleta e análise de dados foram realizadas a partir do desenvolvimento de uma sequência didática que abordou conceitos relativos a polígonos, utilizando tarefas exploratório-investigativas e materiais didáticos manipuláveis. Os resultados desta pesquisa apontam para a importância das aulas de cunho investigativo para a aprendizagem de polígonos, destacando que esse tipo de tarefa oportuniza a participação individual e coletiva, tornando o aluno mais autônomo e facilitando o desenvolvimento do pensamento geométrico. Também destaca que investigar a própria prática possibilita ao professor refletir e rever seus saberes, propiciando assim, a produção de novos saberes para si e para outros professores de matemática. Por outro lado, o trabalho com investigações matemáticas propiciou a mudança da perspectiva da sala de aula, pois tanto o professor quanto o aluno têm uma alternância de papéis, no qual um novo modelo de comunicação foi estabelecido, permitindo assim, que ambos adquirissem uma postura mais livre e autônoma, permeada por indagações e troca de saberes.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria, polígonos, tarefas exploratório-investigativas, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The teaching of geometry for many years was left in the background and it brought serious consequences that pervade classrooms of our schools. In this regard, the need for the use of different methodologies for the teaching of geometry. Faced with so many concerns about how geometric concepts are covered in the classroom, the present research focuses on answering the following questions: What contributions to the learning process of students of elementary school learning of polygons can occur with exploratory-investigative tasks with the use of manipulative courseware? What are the contributions that a job with exploratory-investigative tasks with the use of courseware manipulative brings to the change of the teaching practice of teacher-researcher? Seeking to answer these questions, the study aims to extend the general understanding about polygons, bringing elements that may contribute to the development of activities to stimulate the development of critical thinking, logical reasoning and argumentative ability of students. For this, we seek to identify and analyze how exploratory-oriented classes, mediated by the use of investigative teaching material work group handle and the intervention of the teacher can encourage the acquisition of geometric knowledge produced by the students. Also we seek to describe and reflect on the changes in pedagogical practice of the teacher-researcher for the formation and production of knowledge. In this sense, the research was qualitative measures and held with students in the eighth grade of elementary school to a school in the State of Rio de Janeiro. The data collection and analysis were performed from the development of a didactic sequence which addressed concepts related to polygons, using exploratory-investigative tasks courseware manipulative. The results of this research points to the importance of investigative nature classes for learning of polygons, noting that this type of task it gives individual and collective participation, making the student more and facilitating the development of geometric thinking. Also highlights that investigate the practice allows the teacher to reflect and review their knowledge, thus, the production of new knowledge for themselves and other math teachers. On the other hand, working with mathematical investigations led to the change from the perspective of the classroom as the teacher as student have an alternating roles, in which a new model of communication was established, allowing both to acquire a more free and autonomous, permeated by questions and exchange of knowledge.

Keywords: Mathematics Education, geometry, polygons, exploratory-investigative tasks, elementary school.

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na atualidade, a escola enfrenta grandes desafios quanto ao processo de ensino e aprendizagem. Kaleff (2011) afirma que um dos desafios está pautado no desenvolvimento da tecnologia.

> O desenvolvimento científico e tecnológico traz para a escola outro grande desafio, ou seja, o de despertar no aluno a compreensão dos novos conhecimentos como processos transformadores que ampliam seus saberes e os formam como seres humanos e cidadãos. As novas ferramentas educacionais, principalmente aquelas advindas da informática, devem poder motivar o aluno a usufruir os saberes escolares e a reconhecer o seu valor como manancial de conhecimento e como práticas sociais (KALEFF, 2011, p. 5).

Nesse sentido, torna-se necessário buscar metodologias alternativas para o ensino da matemática, visto que os meios tecnológicos estão cada vez mais presentes no cotidiano dos nossos alunos e nem sempre no cotidiano escolar. Porém, antes de utilizar qualquer tecnologia na sala de aula, devemos ter consciência de que ela sozinha não leva o aluno a aprender e ampliar seus conhecimentos. Desta maneira, Scheffer (2012) afirma que a discussão de “diferentes alternativas para a sala de aula gera certa preocupação com os objetivos da matemática, sua apropriação, e com aspectos didático-pedagógicos que abrangem o fazer do professor” (SCHEFFER, 2012, p. 93). As discussões acerca de alternativas para que o aluno realmente aprenda a matemática, possibilitam um ambiente propício para o ensino e aprendizagem da matemática, no qual tanto o professor quanto o aluno possam trocar os seus conhecimentos e, desta forma, dar significado ao que se ensina.

Considerando as diversas possibilidades para o ensino da matemática, uma alternativa é a utilização de tarefas exploratório-investigativas nas aulas de matemática com o uso de materiais didáticos manipuláveis. Assim, essa alternativa tornou-se foco dessa pesquisa, onde realizamos as tarefas exploratório-investigativas possibilitando aos alunos investigarem e compreenderem cada etapa do processo de aprendizagem, lançando mão do uso de materiais didáticos manipuláveis.

O trabalho com tarefas investigativas em sala de aula possibilita ao aluno indagar, discutir e estabelecer relações entre vários conceitos geométricos. Entranto, o material didático manipulável pode permitir partir do experimental e indutivo para a exploração e tarefas exploratórias, propiciando aos alunos observar, registrar e documentar os fatores que podem surgir através da investigação matemática (SCHEFFER, 2012).

Diante desse contexto investigativo, propomos investigar as possíveis contribuições que as tarefas exploratório-investigativas proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, utilizando como aliado nesse processo o material didático manipulável.

A abordagem de conteúdos relativos a polígonos teve sua origem, primeiramente, no pouco contato que a professora-pesquisadora teve com esses conteúdos durante sua escolarização. Praticamente, não foram estudados esses conceitos quando a mesma cursou o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Ao iniciar a graduação em matemática, percebeu-se que a falta desses conteúdos geométricos na Educação Básica não propiciou o desenvolvimento do pensamento geométrico como, por exemplo, orientação espacial, percepção, representação, visualização, entre outros, acarretando muitas dificuldades na trajetória profissional e acadêmica da professora-pesquisadora. Como ensinar o que não tinha aprendido? Assim, com a preocupação em promover mudanças na prática pedagógica e buscar alternativas para suprir as dificuldades da professora-pesquisadora e também de seus alunos, buscou-se responder, neste estudo, as seguintes questões de pesquisa:

Quais contribuições para o processo de aprendizagem de estudantes do ensino fundamental podem ocorrer a partir do ensino de polígonos com tarefas exploratório-investigativas e com o uso de material didático manipulativo?

Quais as contribuições que um trabalho com tarefas exploratório-investigativas com a utilização de material didático manipulável traz para a mudança da prática docente da professora-pesquisadora?

Como objetivo geral desta investigação, temos:

Investigar as possíveis contribuições que as tarefas exploratório-investigativas, aliadas ao uso de material didático manipulável, proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e para o processo de reflexão sobre a própria prática docente da professora-pesquisadora.

São objetivos específicos desta pesquisa:

- Identificar e analisar os conhecimentos geométricos produzidos pelos alunos durante as aulas exploratório-investigativas;
- Identificar e analisar de que forma as aulas de cunho exploratório-investigativas, mediadas pelo uso de material didático manipulável, do trabalho em grupo e da intervenção do professor podem favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico;
- Descrever e refletir sobre as mudanças ocorridas na prática pedagógica da professora-pesquisadora para a formação e produção do conhecimento;
- Identificar e refletir sobre as possíveis dificuldades e avanços na aprendizagem de conceitos geométricos, mais especificamente, de polígonos.

Em busca de respostas para as questões norteadoras dessa pesquisa, iniciou-se um estudo do referencial teórico e uma revisão de literatura sobre o tema.

A estrutura desta pesquisa foi organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos os motivos que despertaram o interesse pela temática, descrevendo a trajetória acadêmica e profissional da professora-pesquisadora, bem como suas impressões e expectativas. Também, apresentamos uma análise de artigos publicados em 10 periódicos de Educação Matemática, no período de 2000 a 2014[1], que tratam de algum conceito relacionado a polígonos, com o intuito de mapear os estudos realizados e localizar a relevância desta investigação para a área de conhecimento.

No capítulo 2, apresentamos o referencial teórico que orientou e contribuiu para a contextualização do estudo proposto. Discutimos também sobre o ensino de

---

[1] O levantamento desses artigos faz parte de uma pesquisa realizada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GREPEM – da Universidade Federal de Juiz de Fora.

geometria e algumas consequências dessa área da matemática estar em segundo plano nas salas de aula.

No capítulo 3, fazemos uma discussão sobre as investigações matemáticas e sua importância no âmbito da Educação matemática. Nessa temática, descrevemos o papel do professor em aulas investigativas, por meio das ideias de vários autores, bem como as possibilidades do uso de materiais didáticos manipuláveis para o estudo de polígonos.

No capítulo 4, há a descrição da metodologia utilizada na realização da pesquisa, dando enfoque a uma metodologia de natureza qualitativa. Além disso, também destacamos os sujeitos da pesquisa, os instrumentos de coletas de dados e o produto educacional.

No capítulo 5, apresentamos e analisamos os resultados decorrentes da experiência da professora-pesquisadora, em sala de aula, durante a realização de tarefas exploratório-investigativas, descrevendo a transformação ocorrida em sua prática pedagógica, bem como as contribuições que essas tarefas proporcionaram para o processo de aprendizagem de polígonos.

E por fim, delineamos algumas considerações sobre esta investigação, fazendo uma reflexão sobre as contribuições das tarefas exploratório-investigativas tanto para a ressignificação da prática docente quanto para a aprendizagem dos alunos.

1. MOTIVAÇÃO PARA A PESQUISA

Neste capítulo, descrevo a minha trajetória acadêmica e profissional, apontado minhas expectativas e motivos que me levaram a realizar esta pesquisa. Também apresento uma análise dos artigos publicados nos periódicos de Educação Matemática, no período de 2000 a 2014, que tratam de algum conceito relacionado a polígonos, evidenciando assim a relevância deste trabalho.

1.1. Origem e interesse pela pesquisa

Nesta seção do trabalho apresento primeiramente, um memorial descritivo, procurando trazer minha vivência e experiência acadêmica e profissional, a fim de compreender e refletir sobre a minha prática pedagógica, apontando, posteriormente, motivos que me levaram a desenvolver esta investigação.

Iniciei meus estudos com 7 anos de idade, diretamente na Classe de Alfabetização (CA), pois na época só permitiam a matrícula na escola com essa idade. Assim, não frequentei a Pré-Escola, chegando à escola com experiências vividas com meus irmãos mais velhos, que já estavam alfabetizados.

Estudei os meus primeiros anos escolares em uma escola da zona rural do município de Varre-Sai, Estado do Rio de Janeiro, em turmas multisseriadas. Nessa época, tinha uma professora que atendia todos os anos de escolaridade – 1º ao 5º anos de escolaridade (antiga Classe de Alfabetização e 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental). Para chegar até a escola, tinha que andar 6 quilômetros na ida e essa mesma distância na volta.

Foi nesse período que muitas descobertas aconteceram, principalmente, quanto ao gosto pela matemática, mesmo que seu ensino tivesse ênfase nos resultados e não no processo propriamente dito. Isso aconteceu durante o meu Ensino Fundamental. Tudo que era ensinado estava voltado apenas para a aplicação de fórmulas e resolução de listas de exercícios repetitivos e cansativos.

Quando concluí o ensino primário, como eram conhecidos os anos iniciais do Ensino Fundamental, tive que ir para outra escola para continuar os estudos, agora situada na zona urbana do mesmo município. Foi uma mudança radical: saí de uma escola com um único professor para uma escola com vários, cada um com uma formação específica para a disciplina que lecionava. Não existia transporte escolar e como a distância era maior, o meio de transporte utilizado por mim foi a bicicleta. Um período de muito esforço e dificuldades, mas não desisti, apesar de dias de desânimo.

O gosto pela matemática permanecia. Tive professores que marcaram essa fase da minha vida, mas os conteúdos ensinados davam ênfase a Álgebra e Aritmética. Quanto à geometria, aprendi o Teorema de Pitágoras e algumas razões trigonométricas, mas apenas aplicação de fórmulas. Mesmo assim, sentia que havia algo interessante por trás da matemática ensinada na escola.

Essa sensação só foi confirmada quando iniciei o Ensino Médio (antigo 2º grau), no Curso de Formação de Professores, ao cursar as disciplinas de Metodologia do Ensino da Matemática e Estágio Supervisionado, por meio das quais descobri outras possibilidades para se ensinar a matemática, com o uso de materiais manipuláveis, histórias, entre outras.

Concluí o Ensino Médio em 1994 e, no ano seguinte, comecei a lecionar e por coincidência na mesma escola[2] que cursei os primeiros anos do Ensino Fundamental, para os 2º e 3º anos do Ensino Fundamental. Agora, a escola deixou de ser uni docente, mas ainda tinha classes multisseriadas.

Nessa etapa, deparei-me com diversas situações preocupantes no que tange à matemática, por exemplo, muitos alunos não conseguiam aprender com a forma que eu ensinava. Então, comecei a buscar novas maneiras de ensinar os conteúdos matemáticos, utilizando recursos didáticos variados e, assim, refletir sobre minha prática pedagógica foi importante para o processo de ensino e aprendizagem dos meus alunos.

Nessa escola, trabalhei por um longo período e com todos os anos de escolaridade, inclusive com a Educação Infantil. Desenvolvi projetos interdisciplinares que propiciaram a contextualização da matemática e demais

---

[2] Escola Municipal Cruz da Ana, localizada na zona rural do município de Varre-Sai/RJ

disciplinas, visto que também era de minha responsabilidade ensinar todos os outros componentes curriculares.

Dentre os projetos interdisciplinares, destaco o que realizei com os alunos do 4º e 5º anos de escolaridade (turma multisseriada), que propiciou o desenvolvimento de atividades de maneira integrada com todas as disciplinas, cuja proposta era explorar os conteúdos presentes no currículo por meio do conhecimento trazido pelos alunos (história do lugar onde moravam e estudavam) e estudos dos fatos históricos, culturais, econômicos e geográficos do município.

Nesse período não consegui prosseguir os meus estudos. Lecionei por 7 anos apenas com a formação em Nível Médio. A vontade de continuar meus estudos era grande, por isso, em 2001, tive a oportunidade de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pela Universidade Federal Fluminense, na modalidade a distância, por meio do Consórcio CEDERJ[3], no Polo de Itaperuna, Estado do Rio de Janeiro.

Quando iniciei minha graduação já tinha uma concepção de que ser professor não era uma tarefa fácil. Para ser um bom professor é preciso dedicação e preocupação com os alunos, como afirma D'Ambrosio (2012):

> Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, sem preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo aquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante, por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário (pois, se assim fosse, melhor seria ficar calado 49 minutos!), mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e os macetes que conhece (D'AMBROSIO, 2012, p.77).

---

[3] Criado em 2000, com o objetivo de levar educação superior, gratuita e de qualidade a todo o Estado do Rio de Janeiro, o Consórcio Cederj (Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro) é formado por sete instituições públicas de ensino superior: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Universidade Federal Fluminense (UFF), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Universidade do Rio de Janeiro (UNIRIO), Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), e conta atualmente com mais de 45 mil alunos matriculados em seus 15 cursos de graduação a distância (Fonte: http://cederj.edu.br/cederj/sobre/).

Nesse sentido, pensei que a graduação pudesse me ajudar a encontrar esses “truques” e “macetes” necessários para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem. Logo no primeiro período tive uma grande decepção, principalmente com as disciplinas de Pré-Cálculo e Geometria Básica. O motivo foi a dificuldade com os conteúdos matemáticos que não tive durante o Ensino Fundamental e Médio, principalmente, porque optei pela Formação de Professores em Nível Médio e, por isso, a matemática estudada não foi suficiente para entender os conteúdos dessas disciplinas.

Mais preocupante e desafiador foi a disciplina de Geometria Básica, pois praticamente não havia estudado conteúdos geométricos durante a minha escolarização. Por que existiu essa omissão no ensino da Geometria? Lorenzato (1995) aponta duas causas que ajudam a explicar esse fato.

> São inúmeras causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. [...] A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho que estão submetidos (LORENZATO, 1995, p. 3).

Fazendo uma reflexão sobre o que foi ensinado nas minhas aulas, pude notar que as causas apontadas por Lorenzato (1995) estavam presentes no cotidiano da escola. Na graduação, deparei-me com outra abordagem da geometria, que não estava voltada para aplicação de fórmulas e sim para a demonstração do porquê dos conceitos e de como encontrar cada fórmula. Apesar de achar muito complexa e quase não conseguir notas para aprovação nessa disciplina, comecei a ter outro olhar sobre os conceitos geométricos.

Esse outro olhar foi se consolidando durante toda a graduação. A confirmação que os conceitos geométricos deveriam ser ensinados de outro modo, valorizando suas diferentes representações, se consolidou quando cursei as disciplinas de Instrumentação no Ensino da Geometria, Instrumentação de Álgebra e Aritmética, Informática no Ensino da Matemática e os Estágios Supervisionados. Com essas disciplinas pude observar e aprender outras metodologias para o ensino da matemática, bem como utilizar outros recursos além do quadro, giz e livro didático.

Nesse momento, percebi que poderia fazer algo diferente, mudar minha prática pedagógica.

O desejo de mudar era grande. Tudo que aprendia na graduação e que poderia ajudar na compreensão de conceitos matemáticos tentava adaptar e utilizar na sala de aula com os meus alunos. Nessa época lecionava apenas para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em 2006, ano em que conclui a graduação, além de ser professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, recebi o convite para ser tutora presencial no Polo de Itaperuna - RJ, do curso de Licenciatura em Matemática, o mesmo em que fui aluna. Mais um desafio pela frente, pois fui tutora da disciplina que mais tive dificuldades na graduação: Geometria Básica.

Para superar esse desafio, fiz uma reflexão sobre o meu período como aluna desse curso a distância, levantando os anseios e dificuldades que passei para poder orientar os alunos ingressantes, visto que a disciplina de geometria era cursada no primeiro período. Já tinha notado que no início da minha graduação duas coisas tiveram que ser superadas: a metodologia de um curso a distância, que é diferente do ensino presencial, e a dificuldade com alguns conceitos matemáticos, pois os mesmos não foram ensinados no meu Ensino Médio.

Mas algo ainda me incomodava. Então, no ano de 2007, iniciei o curso de Pós-Graduação Latu Sensu em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, também na modalidade a distância, coordenado pelo LANTE/UFF[4]. Esse curso propiciou a consolidação de que outras metodologias são necessárias para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos e aprendidos pelos alunos.

Ao desenvolver o Trabalho de Conclusão de Curso sobre como as tecnologias podem auxiliar na formação do professor e do aluno, tive a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos sobre essa temática aprendendo a utilizar recursos tecnológicos no ensino da geometria, fazendo com que novas possibilidades surgissem e outros desafios também.

Mudanças já estavam acontecendo em minha sala de aula referente ao ensino da matemática, mas a questão da geometria ainda me preocupava. Tinha o

---

[4] Laboratório de Novas Tecnologias da Universidade Federal Fluminense.

desejo de aprender cada vez mais, quando concluí o curso de Pós-Graduação, iniciei, no ano de 2010, outro em Planejamento, Implementação e Gestão em Educação a Distância (PIGEAD), também na modalidade a distância, oferecido pelo LANTE/ UFF.

Com esse curso pude compreender todo o processo de um curso a distância. Nessa época, estava exercendo minhas funções em duas extremidades do processo de ensino e aprendizagem: de um lado lecionava para os anos iniciais do Ensino Fundamental, e de outro lado, ensinando os futuros professores de matemática. Foi um período de muitas trocas de experiências.

No ano de 2011, assumi um segundo cargo de professora, no município de Porciúncula[5], vizinho ao município de Varre-Sai. Agora, comecei a lecionar a disciplina de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental – 6º ao 9º anos de escolaridade. Nessa época, tive uma grande decepção com os resultados da disciplina: muitos alunos não conseguiam compreender o que estava sendo ensinado, notei que acontecia o ensino sem a aprendizagem. Percebi que os resultados insatisfatórios poderiam ter relação com lacunas na formação dos professores quanto ao ensino da matemática, principalmente a geometria. Não queria me tornar apenas mais uma professora na vida dessas crianças, queria fazer diferente, transformar o "repúdio" que os alunos tinham em relação à matemática no prazer em aprender.

Segundo Gómez-Chacón (2000), o aluno ao aprender a matemática recebe estímulos, que podem fazê-lo reagir emocionalmente de maneira negativa ou positiva. Essa forma de reação, satisfação ou frustação, pode se solidificar em atitudes, que vão influenciar sua formação. Nesse sentido, a experiência de aprendizagem em matemática dos alunos fez com que reagissem negativamente a disciplina. Essa situação poderá ser superada se buscarmos estimulá-los com ações que levem a satisfação em aprender, o que me fez repensar as estratégias de ensino da matemática que colocava em prática.

---

[5] Município localizado na Região Noroeste do Estado do Rio de Janeiro.

Buscando superar essas reações negativas, desenvolvi um projeto chamado "Lab Mat" (Laboratório de Ensino da Matemática)[6], com o intuito de amenizar as dificuldades dos alunos, utilizando o material manipulável para o ensino de diversos conteúdos matemáticos. Com esse projeto, coloquei em prática muita coisa que aprendi na graduação, na especialização e em outros cursos que realizei. Observei que ao desenvolver as atividades propostas, muito alunos se quer tinham visto geometria. Mal sabiam identificar um polígono.

Assim, para cada conteúdo matemático proposto no currículo, buscava uma maneira de trabalhar com materiais alternativos e manipulativos, assumindo uma postura de orientadora da aprendizagem. Segundo Lorenzato (2012), "o LEM [Laboratório de Ensino de Matemática] é o lugar da escola onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível aos alunos" (LORENZATO, 2012, p.7). Com esse projeto busquei ensinar a matemática de maneira mais compreensível, levando os alunos a experimentarem, levantarem hipóteses, analisarem e chegarem a suas próprias conclusões.

Entretanto, algumas lacunas ainda precisavam ser preenchidas. Os alunos estavam compreendendo melhor a matemática, mas ainda não tinha encontrado a minha identidade como professora de matemática. Ainda não estava satisfeita com a minha prática pedagógica.

Estava incomodada com essa situação. Sentia que podia aprender mais para ensinar melhor. Em 2015, resolvi participar de um processo seletivo para o Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora. Fui aprovada e retornei à Universidade, com a expectativa de aproximar a minha experiência em sala de aula com a teoria, procurando compreender minha prática pedagógica no contexto da Educação Matemática, refletindo e propondo mudanças.

Quando cursei a disciplina "Concepções e Tendências em Educação Matemática" tive a oportunidade de conhecer as diversas tendências de pesquisa nessa área, ficando muito interessada na investigação matemática. Percebi que essa tendência estava próxima do que já tinha proposto no Projeto "Lab Mat". A partir daí, comecei a pesquisar e refletir sobre a investigação matemática e como

---

[6] Projeto desenvolvido com os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental da Creche e Escola Municipal Maria Puddó Murucci, localizada no 3º. Distrito de Porciúncula/RJ.

essa tendência poderia colaborar com a mudança da minha prática pedagógica, tornando uma metodologia de ensino.

Então, concomitante com o ingresso no Mestrado, também comecei a participar do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GREPEM[7] – da Universidade Federal de Juiz de Fora. Nesse grupo realizamos uma pesquisa que tinha como propósito compreender o que estava sendo publicado sobre conceitos geométricos, nos periódicos de Educação Matemática, no período de 2000 a 2014, pois os textos publicados que conhecíamos sobre geometria eram da década de 1990, como Pavanello (1993), Lorenzato (1995) e Perez (1995).

Assim, desenvolvemos uma pesquisa documental na qual fizemos um levantamento de artigos que tratam de assuntos referentes à geometria, publicados em 10 periódicos de Educação Matemática, a saber: Bolema, Zetetiké, Gepem, Educação Matemática Pesquisa, Educação Matemática em Revista, Perspectivas da Educação Matemática, Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Revista Paranaense de Educação Matemática, Revista Eletrônica de Educação Matemática, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.

Para realizar essa investigação, primeiramente, cada integrante do grupo ficou responsável por buscar em um ou dois periódicos, artigos referentes à geometria como, por exemplo: ângulos, simetria, conceitos geométricos, área de figuras, volume, formação de professores, etc. Foram encontrados 168 artigos no período do ano 2000 a 2014, os quais foram divididos, inicialmente, em 10 categorias: 1) Ensino e aprendizagem; 2) Formação de professores; 3) Artes; 4) Inclusão; 5) Tecnologias; 6) História da Matemática; 7) Avaliação; 8) Visualização; 9) Estado da Arte; 10) Filosofia.

Esse estudo documental me auxiliou no delineamento do caminho a ser percorrido nessa pesquisa de mestrado. Então, decidi que a pesquisa seria voltada para o ensino e aprendizagem de geometria, observando os estudos de polígonos, pois como professora já tinha notado as dificuldades dos alunos em relação a esse

---

[7] Grupo de Pesquisa coordenado pelo Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro e cadastrado no diretório de grupo de pesquisas do CNPq.

tema, e enquanto aluna do Ensino Fundamental e Médio não tive a oportunidade de estudar os conceitos geométricos.

Para mostrar a relevância desta pesquisa, apresentaremos e analisaremos os artigos categorizados como de ensino e aprendizagem, que discutem temas referentes a polígonos e suas propriedades, problemática que propus investigar. Foram encontrados 72 artigos que se enquadraram na categoria Ensino e aprendizagem, sendo que 16 deles discutem algum conceito geométrico ligado a polígonos, foco deste estudo, conforme indicado no quadro 1.

Quadro 1: Artigos encontrados

Autor (es)	**Título do artigo**	**Objetivo**	**Nível de Ensino**
Abrahão (2009)	Perímetro ou Área?	Propor atividades que permitam respostas abertas e que explorem simultaneamente área e perímetro, baseado numa pesquisa realizada nos EUA.	Ensino superior
Braga; Dorneles (2011)	Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental	Analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico em estudantes da 8ª série, descrevendo como os níveis do casal Van Hiele podem contribuir para a prática cotidiana escolar.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Henriques (2013)	A Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Tarefas Geométricas	Criar uma série de tarefas embasada teoricamente e que nos permitisse identificar dificuldades discentes acerca dados temas área e perímetro, levantando possibilidades de intervenção nos processos de aprendizagem desses temas geométricos, nos anos finais do ensino fundamental.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Leivas; Scherer (2010)	Construindo o conceito de alturas de triângulo com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade?	Analisar a experiência realizada durante a disciplina Recursos Tecnológicos e Educação Matemática, no Programa de Pós-Graduação em Educação – Linha de Educação Matemática, desenvolvida no primeiro semestre de 2008, através do uso de software de geometria dinâmica para o estudo do conceito de altura do triângulo.	Pós - Graduação
Murari; Perez (2002)	O uso de espelhos e caleidoscópios em atividades	Apresentar algumas atividades educacionais à luz de uma prática pedagógica diferente da tradicional, fundamentada no método de ensino	Anos Finais do Ensino Fundamental

	educacionais de geometria para 7ª e 8ª séries	Resolução de Problemas, através da utilização de espelhos e caleidoscópios no ensino-aprendizagem de alguns conceitos de Geometria para o Ensino Fundamental.	
Pereira (2010)	Número de diagonais de um polígono: Relato de uma experiência	Apresentar uma possibilidade para a contagem das diagonais de um polígono, proposta por alunos do curso de Pedagogia, que pode servir como estímulo para levar um aluno, inclusive da Educação Básica, a generalizar esse conteúdo por meio de uma expressão equivalente à expressão que, geralmente, é conhecida.	Ensino Superior
Proença; Pirola (2009)	Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono,	Apresentar a investigação realizada sobre o conhecimento de alunos do Ensino Médio referente aos atributos definidores do conceito de polígono.	Ensino Médio
Santos (2014)	Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área de figuras planas	Evidenciar os problemas de ensino e de aprendizagem relacionados às Grandezas Geométricas perímetro e área de figuras planas.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Santos; Bellemain (2007)	A área do paralelogramo no livro didático de matemática: uma análise sob a ótica do contrato didático e as variáveis didáticas	Identificar regularidades em uma coleção de livros didáticos, relativas a área do paralelogramo, à luz de conceitos da Didática Matemática francesa, mais especificamente das noções de contrato didático e variável didática.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Silva (2009)	As relações entre área e perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação	Investigar como adolescentes e adultos, que frequentaram a escola e obtiveram êxito na aprendizagem de geometria, elaboram explicações a propósito de problemas que envolvem o cálculo da área e do perímetro de figuras planas.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Silva; Lopes (2013)	A construção de conceitos da geometria plana com o uso de materiais concretos e digitais: uma	Apresentar uma proposta de atividades elaboradas com o uso do Tangram que abordam os conceitos de perímetro e área de figuras planas no ensino fundamental.	Anos Iniciais do Ensino Fundamental

	experiência com Tangram,		
Teles; Sá (2010)	Um estudo sobre a área do retângulo em livros didáticos de matemática,	Mapear e analisar situações que envolvem área do retângulo, como recurso para outras temáticas e como objeto de estudo, em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental.	Anos Iniciais do Ensino Fundamental
Vargas (2013)	Geometria Dinâmica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo,	Promover um aprendizado diferenciado e relevante desse conceito, aliado com uma revisão de outros conceitos e elementos geométricos, como estudo das retas, segmentos, polígonos e rotação.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Vargas (2012)	Geometria no Estádio de Futebol	Promover um aprendizado diferenciado e relevante no ensino dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.	Anos Finais do Ensino Fundamental
Vasconcellos (2008)	A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores.	Identificar e analisar o conhecimento que têm os alunos da 4ª série do Ensino Fundamental sobre a diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas e contrastar esse conhecimento com o ponto de vista dos seus professores.	Anos Iniciais do Ensino Fundamental
Vodušek; Lipovec (2014)	The Square as a Figural Concept (O quadrado como conceito figural).	Investigar a imagem conceitual dos professores, no caso de uma praça, seja oco ou preenchido e qual o papel que desempenha na resolução de problemas.	Ensino Superior

Fonte: elaborado pela autora.

Ao fazer a leitura dos artigos encontrados, resolvemos fazer uma subcategorização quanto ao tipo de conteúdo geométrico abordado, indicado no quadro 2.

Quadro 2: Subcategorização dos artigos

Temas/ categorias	Quantidade
Área e perímetro	08
Formação de conceitos geométricos	04
Resolução de problemas	02
Tecnologias: Geometria dinâmica	02

Fonte: elaborado pela autora

De acordo com o quadro 2, metade dos artigos encontrados tratam de perímetro ou área de polígonos. De acordo com Baldini (2004), o conceito que trata de área e perímetro tem importância de cunho social quando o mesmo pode interligar os outros conteúdos matemáticos e demais áreas de conhecimento. A autora também afirma que “os problemas de medida de terra e de cálculo de área de terrenos estão presentes ainda hoje no cotidiano e são de muita relevância tanto nas práticas rurais quanto nas urbanas” (BALDINI, 2004, p. 10). Provavelmente, essas considerações possam explicar o fato de 8 artigos encontrados tratarem dessa temática.

Procurando compreender um pouco mais sobre as pesquisas que discutem os conceitos geométricos, primeiramente, apresentaremos e analisaremos os artigos, destacando as ideias dos autores e alguns resultados apresentados.

O artigo, *A área do paralelogramo no livro didático de matemática: uma análise sob a ótica do contrato didático e as variáveis didáticas,* de Santos e Bellemain (2007), por meio dos conceitos da Didática da Matemática Francesa, em particular, as noções de contrato didático e variável didática, buscaram identificar regularidades sobre o estudo de área de paralelogramo apresentado no livro didático *Matemática 5ª a 8ª séries,* de Imenes e Lellis. Dessa forma, as autoras (2007) consideram que

> Por meio do conceito de contrato didático, procuramos investigar os direitos e as deveres implícitos dos alunos e do professor, com relação ao objeto do

> saber matemático em foco, ou seja, a área do paralelogramo. A variável didática, por sua vez, é uma ferramenta teórico-metodológica importante na categorização dos problemas matemáticos propostos pelos alunos, na elaboração de problemas adaptados para desestabilizar regras de ação errôneas, na escolha de problemas que contribuam significativamente para a aprendizagem e na análise dos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos, inclusive nos erros cometidos (SANTOS; BELLEMAIN, 2007, p. 29)

Nessa perspectiva, torna-se necessário um diálogo entre os envolvidos no processo, que não fiquem submissos apenas ao que o livro didático possa oferecer, mas que proporcione procedimentos e problemas que realmente contribuam para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

O artigo intitulado *As relações entre área e perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação* de Silva (2009) teve como um dos objetivos investigar como adolescentes e adultos, que frequentaram a escola e obtiveram êxito na aprendizagem de geometria, elaboram explicações a propósito de problemas que envolvem o cálculo da área e do perímetro de figuras planas. O estudo baseou-se nas contribuições de Piaget para estabelecer a construção da explicação sobre conteúdos elementares da geometria, apontando os aspectos psicológicos da inteligência e sua relação com os conteúdos ensinados na escola.

Com esse estudo, o autor evidencia que o sucesso da resolução de um problema não garante a compreensão dos fenômenos, pois “[...] a memorização das relações entre área e perímetro não fornece ao sujeito uma compreensão real do que se passa. O que há é a identificação de uma lei que interpreta a regularidade dos fatos” (SILVA, 2009, p. 101).

Da autoria de Abrahão (2009), o trabalho *Perímetro ou Área?* é um relato de experiência que a luz dos resultados de uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Fundamental nos EUA, propõe a mesma temática, realizando-a com os alunos do 4º período do Curso de Formação de Professores dos Anos Iniciais, no Rio de Janeiro.

A proposta sugere a exploração de questões voltadas para o conceito de área e perímetro, por meio de um projeto (CHAPELL; THOMPSON apud ABRAHÃO, 2009). A autora chega a resultados semelhantes aos da pesquisa realizada nos

EUA, e conclui que “mesmo após anos de escolarização, alunos podem apresentar algumas dificuldades semelhantes às apresentadas pelos os alunos do 7º, 8º e 9º anos” (ABRAHÃO, 2009, p.57).

Segundo Abrahão (2009) os alunos podem ter vivenciado experiências de ensino e aprendizagem voltadas para o uso de fórmulas, sem contextualização e sem significado, o que proporcionou que os conceitos de área e perímetro não fossem construídos corretamente.

O trabalho *Um estudo sobre a área do retângulo em livros didáticos de matemática*, de Teles e Sá (2010), apresenta o mapeamento, análise e situações que envolvem área do retângulo, em três coleções de livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, escolhidas aleatoriamente dentre as indicadas pelo PNLD (2007). Como resultado do estudo, os autores confirmam que “o contexto da área do retângulo é frequentemente usado nos livros didáticos analisados para dar sentido à multiplicação, mas na maioria das vezes não se explicita tratar-se do cálculo da área do retângulo” (TELES; SÁ, 2010, p. 59).

O artigo intitulado *Geometria no Estádio de Futebol*, de autoria de Vargas (2012), traz uma discussão em torno da Geometria no estádio de futebol, utilizando o conceito de área de figuras planas para encontrar a capacidade aproximada de torcedores que podem ocupar as arquibancadas. De acordo com a autora, o objetivo central “foi promover aos alunos um aprendizado diferenciado e relevante no ensino da Geometria Plana” (VARGAS, 2012, p. 147).

Nesse trabalho, Vargas (2012) aproveita a temática copa do mundo para contextualizar o conceito de área, por meio do tetraedro metafórico: percepção; representação; construção e concepção (LAURO apud VARGAS, 2012). Para tal, a autora desenvolveu e aplicou uma engenharia didática que contemplou os quatro critérios do tetraedro metafórico, o que permitiu compreender os conceitos necessários para a realização e construção de uma maquete de um estádio de futebol, bem como estimar a lotação máxima de torcedores nesse estádio.

Uma situação apontada pela mesma autora foi em relação a dificuldade dos alunos em reconhecer a “diferença entre quadrado e retângulo, pois, para eles, essas figuras são as mesmas” (VARGAS, 2012, p. 148), o que demonstra a falta de conhecimento prévio sobre esse conceito. A autora ainda afirma que essa dificuldade ora notada por ela, pode ter relação com a falta do ensino do conceito de figuras planas nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

O artigo, *Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área de figuras planas,* de Santos (2014), teve como objetivo investigar problemas de ensino e de aprendizagem relacionados ao conceito de perímetro e área de figuras planas, apontando as dificuldades de alunos e de professores. Para tal, a autora selecionou do SARESP[8] 2007 e 2008, duas questões que tratam do cálculo de área e perímetro e solicitou que os alunos do sétimo ano do ensino fundamental resolvessem e anotassem suas conclusões e dificuldades.

A autora utilizou a entrevista semiestruturada como instrumento de coleta de dados. Também eram sujeitos de sua pesquisa três professores de matemática do Ensino Fundamental, que foram entrevistados e solicitados que analisassem as respostas dos alunos referentes às questões.

Nessa pesquisa, a autora constatou que existe um problema em todo o processo: os alunos não apreendem os conceitos corretamente e há lacunas na formação do professor. Apontou que as dificuldades dos alunos podem estar relacionadas com problemas na formação do professor,

> Os professores entrevistados não aprenderam profundamente essa área de conhecimento da Matemática e, portanto, encontram dificuldades de ensiná-la aos alunos. Demonstraram insegurança ao responder sobre a importância da Geometria no Ensino Fundamental, enfatizaram a relevância de seu estudo, porém limitaram à sua aplicabilidade na vida cotidiana. (SANTOS, 2014, p. 229)

A autora também afirma que a maneira como se ensina pode contribuir para que os alunos não aprendam significativamente esses conceitos.

> Percebe-se que não houve uma aprendizagem significativa dos conceitos científicos, eles foram repassados e não (re)construídos pelos alunos. O ensino aconteceu pela transmissão da informação e sua recepção pelos estudantes, de forma passiva. Isso pode ser decorrente de atividades pouco diversificadas, não desafiadoras e com aulas de Matemática tradicionais:

---

[8] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

> definições, exemplos, atividades de aplicação direta do conteúdo, acarretando na memorização temporária de algoritmos e definições (SANTOS, 2014, p. 230).

Essa questão abordada por Santos (2014) retrata a realidade da maioria das nossas escolas. Provavelmente, a dificuldade dos alunos em matemática pode estar relacionada com o fato das aulas de matemática ainda se basearem na memorização e em atividades pouco desafiadoras. Outro fato apontado pela autora é quanto ao processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, pois o mesmo está "pautado no modelo psicopedagógico da mera transmissão-recepção" (SANTOS, 2014, p. 232).

Já o artigo *A Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Tarefas Geométricas*, de Henriques (2013), teve como objetivo levantar as possibilidades de intervenção no processo de aprendizagem de perímetro e área, nos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de uma série de tarefas teoricamente fundamentadas no Modelo dos Campos Semânticos como base teórico-epistemológica e instrumento para a leitura das produções dos significados. Para o autor é necessário que os alunos escrevam suas justificativas de resolução das tarefas para que o professor possa realizar uma leitura de seus significados. Ele comenta que:

> Apresentando as tarefas em folhas com espaço para a escrita e para os possíveis desenhos feitos pelos estudantes, o professor pode ter acesso às suas produções de significados. Para tanto, é necessário estimular os alunos a escreverem suas justificativas para os cálculos e afirmações próprios. Embora essa prática não seja tão usual nas aulas de Matemática, com a constância de sua utilização seus resultados se mostram bastante eficientes, ao permitir que o Método de Leitura Plausível, baseado no Modelo dos Campos Semânticos, seja utilizado pelo professor, que, por sua vez, aprende a *ler* os alunos através de suas afirmações e respectivas justificativas (HENRIQUES, 2013, p. 445).

De autoria de Silva e Lopes (2013), o artigo *A construção de conceitos da geometria plana com o uso de materiais concretos e digitais: uma experiência com Tangram,* propôs uma possibilidade para o estudo de área e perímetro de figuras planas, utilizando uma sequência de atividades com material concreto e digital, por meio do jogo Tangram para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Como motivação da pesquisa, os autores procuraram respostas para a pergunta: “Como é possível envolver os alunos das séries iniciais em atividades que auxiliem na construção dos conceitos de perímetro e área de figuras planas?” (SILVA; LOPES, 2013, p. 180). Partindo desse pressuposto, os autores elaboram uma sequência didática com o uso do Tangram, na qual os alunos foram colocados diante de situações que possibilitariam a construção do conceito de área e perímetro.

Silva e Lopes (2013) consideraram que durante a realização das atividades os alunos desenvolveram o raciocínio e a argumentação, se tornando uma fonte de conhecimento em sala de aula. Para os autores:

> [...] a matemática abordada através das atividades desenvolvidas no Tangram, produzidas juntamente com os alunos e pelos alunos é uma grande fonte de conhecimento na sala de aula, uma vez que nessa pesquisa foi possível analisar diversas maneiras de argumentação e formas de desenvolver os raciocínios durante a execução das atividades pelos alunos, e consideramos que isso seja um fator que produza alguma reflexão sobre a prática docente no ensino básico (SILVA; LOPES, 2013, p. 181).

Os trabalhos citados anteriormente contribuem para o estudo do conceito de área e perímetro. Proporcionam uma discussão de como esses conceitos são apresentados nos livros didáticos, as percepções dos alunos e professores, bem como apontam algumas causas das dificuldades em ensinar e aprender esses conceitos. Porém, todos convergem para um único ponto: estão centrados na geometria métrica.

Outro fato perceptível é que o ensino de conceitos geométricos deve ser iniciado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com tarefas significativas e contextualizadas.

Os quatro trabalhos apresentados a seguir discutem a formação dos conceitos geométricos por alunos e professores, permitindo assim, analisar o conhecimento que eles têm em relação essa temática.

Vasconcellos (2008), em seu trabalho intitulado *A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores*, teve como objetivo verificar e analisar os conhecimentos que os alunos das séries iniciais possuem em relação a diferença entre figuras planas e não-planas. Também buscaram identificar as concepções dos professores, a fim de verificar se as dificuldades dos alunos tinham alguma relação com o ponto de vista dos professores sobre os conceitos em questão.

Nesse trabalho, Vasconcellos (2008) também propôs discutir a falta de sintonia entre a teoria e a prática dos professores. Dessa forma, nem sempre o que é apresentado pelos estudiosos, na teoria, é compreendido e dominado pelos docentes. A autora esclarece que a falha na formação do professor pode ser um fator relevante para a desvalorização do ensino da Geometria.

> [...], temos a intenção de esclarecer que não dependem apenas da boa vontade de um ou de outro professor da Educação Básica o resgate e a valorização do ensino da Geometria. Não basta chegarem às mãos dos profissionais em exercício os fragmentos de publicações ou determinações governamentais, se as concepções e os conhecimentos que possuem não lhes asseguram o domínio e a clareza da importância dos saberes que precisam trabalhar. Cabe, sem dúvida, à formação o papel de problematizar, juntamente com os futuros professores, as questões que dizem respeito à sua prática, aos seus acertos, às suas falhas, às dúvidas que possuem e às possíveis modificações por eles implementadas que apresentaram resultados satisfatórios (VASCONCELOS, 2008, p. 84).

Nesse sentido, a dificuldade dos alunos em diferenciar figuras planas de não-planas ultrapassa a sala de aula. Fatores intrínsecos estão ligados à formação do professor, e como consequência, a inserção de questões poucas significativas e descontextualizadas.

Com vistas a diminuir essa lacuna na formação do professor e compreender como o aluno aprende, o artigo *Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental,* de Braga e Dorneles (2011), objetivou analisar o desenvolvimento dos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos van Hiele.

Um dos resultados dessa pesquisa refere-se a "necessidade do aprimoramento contínuo das estratégias utilizadas pelos professores no ensino de geometria, [...]" (BRAGA; DORNELES, 2011, p. 287). Propiciar tarefas que permitam aos alunos levantarem suas conjecturas, validarem ou refutarem algum conceito, compreenderem ou aprimorarem seus argumentos lógicos, contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Outro artigo que trata dessa questão conceitual é o *The Square as a Figural Concept – O quadrado como conceito figural –, de* Vodušek e Lipovec (2014), que investigaram o conceito de quadrado, como imagem vazia ou preenchida, e o papel dessa imagem na resolução de problemas. Os resultados apresentados tinham relação com o conceito de quadrado analisado a partir de respostas de 186 futuros professores do Ensino Fundamental. Como resultado, as autoras observaram que os sujeitos da pesquisa tiveram dificuldades para definir o quadrado, e a definição mais comum é quando se trata de um quadrado vazado, apenas segmentos de reta.

Uma das conclusões relatadas pelas autoras merece destaque e corrobora com as ideias já descritas por Pavanello (1993), Lorenzato (1995), Perez (1995), entre outros pesquisadores quando se trata da formação do professor: ainda existem problemas nessa formação quando nos referimos a conceitos geométricos.

Proença e Pirola (2009) apresentaram no artigo, *Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Médio na identificação de atributos definidores de polígono*, resultados de uma pesquisa que buscou investigar os conhecimentos dos alunos do Ensino Médio sobre os atributos definidores do conceito de polígonos. A pesquisa foi realizada com 253 alunos de uma escola pública de uma cidade de São Paulo.

Os resultados da pesquisa evidenciaram que os sujeitos da pesquisa tiveram dificuldades na identificação dos atributos que definem os polígonos, o que pode ter relação com o ensino da geometria ainda ser relegado a um segundo plano ou ser realizado de maneira distante da pretendida na escola (PROENÇA; PIROLA, 2009).

Dessa maneira, os autores afirmam que existe a necessidade de se trabalhar esse conceito por meio de “situações como o uso de material manipulativo (geoplano, tangram), construção de figuras planas e oportunidades de estabelecer semelhanças e diferenças entre as figuras parecem envolver os alunos e dar grandes contribuições à aquisição desse conceito” (PROENÇA; PIROLA, 2009, p. 41).

Os mesmos autores destacam que pesquisas relacionadas à formação conceitual e de resolução de problemas, envolvendo geometria, fazem parte da área da Psicologia da Educação Matemática e que podem ajudar na compreensão conceitual de polígonos.

A partir dos artigos analisados percebemos que a dificuldade dos alunos em compreender um conceito geométrico pode estar relacionada com a deficiência na formação dos professores, bem como pelo fato da geometria ter sido deixada em segundo plano. Como consequência, destacamos a falta de estratégias do professor para o ensino da geometria, pois como ensinar aquilo que não aprendemos. E realmente, essa situação reflete na sala de aula e no processo de ensino e aprendizagem.

Na subcategoria Resolução de Problemas encontramos dois artigos que serão apresentados e analisados a seguir.

Da autoria de Murari e Perez (2002), o artigo *O uso de espelhos e caleidoscópios em atividades educacionais de geometria para 7ª e 8ª séries*, apresentou uma sequência de atividades baseada na resolução de problemas, utilizando espelhos e caleidoscópios para o ensino e aprendizagem de simetria, polígonos e pavimentação de planos.

Para os autores, a metodologia de resolução de problemas é a melhor forma para propiciar que o aluno e professor interajam, "porque, através da apresentação de uma situação desafiadora, os alunos são encorajados a pensar de maneira autônoma, a criar, a experimentar, a estabelecer estratégias para chegar às soluções" (MURARI; PEREZ, 2002, p. 3). Os autores ainda afirmam,

> Dessa interação professor/alunos, podem surgir problemas cujas soluções venham a exigir amplas discussões, gerando grande aprendizado. Quando as tarefas tem significado para os alunos, eles sentem-se encorajados a ser criativos e a desenvolver estratégias para realizá-las, resultando na assimilação dos conceitos e algoritmos necessários para a resolução de seus problemas (MURARI; PEREZ, 2002, p. 3).

Nesse contexto, adequar um ambiente que seja propício à aprendizagem significativa é uma ação necessária e imprescindível. Assim, as atividades desafiadoras podem levar os alunos a pensarem de maneira mais crítica, reflexiva e autônoma.

Corroborando com Murari e Perez (2002), no que diz respeito à metodologia de resolução de problemas, o trabalho *Número de diagonais de um polígono: relato de uma experiência*, de Pereira (2010), apresentou uma possibilidade para a contagem das diagonais de um polígono, utilizando estratégias para resolver situações desafiadoras realizadas por estudantes da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática de um curso de Pedagogia.

Segundo o autor, apesar das atividades terem sido desenvolvidas com futuros professores, a proposta também pode ser utilizada com alunos da Educação Básica, visto que "a interação entre os estudantes propiciou a troca de informações, e dessa forma, alguns alunos que não haviam compreendido a definição de diagonais em polígonos, da aula anterior, passaram a compreendê-la" (PEREIRA, 2010, p. 46). Essa troca de experiências permite a construção do conhecimento pelo aluno, por meio da mediação do professor e da utilização de atividades que propiciem a comparação, dedução e generalização de conceitos geométricos.

De acordo com Pereira (2010), para elaborar atividades que promovam a construção do conhecimento, devemos considerar alguns fatores:

> "[...] na construção dessas atividades, alguns fatores precisam ser considerados, como, por exemplo, a possibilidade de os alunos aplicarem conhecimentos provenientes de sua própria experiência, a interação entre os alunos para a discussão dos procedimentos utilizados ou dos possíveis erros cometidos e a possibilidade da utilização de tecnologias." (PEREIRA, 2010, p. 49).

Independente do tipo de material ou procedimento a ser utilizado, o importante é que as atividades propiciem a construção do conhecimento de maneira significativa para os alunos.

A utilização de tecnologias também é um recurso muito usado para a construção de atividades que permitam aos alunos levantarem suas conjecturas. Os dois artigos apresentados e analisados a seguir tratam diretamente do uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da geometria, a chamada geometria dinâmica.

De autoria de Vargas (2013), o trabalho intitulado *Geometria Dinâmica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo,* teve como objetivo promover um aprendizado diferenciado e relevante sobre relações métricas no triângulo retângulo, utilizando o software Geogebra como ferramenta de interação e execução das atividades.

A autora elaborou uma sequência didática que abordou as relações métricas no triângulo retângulo para ser desenvolvida utilizando o software Geogebra, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A preocupação ao elaborar essas atividades era com a possibilidade dos alunos em construir o seu conhecimento de forma interativa e dinâmica.

Outro trabalho que também usou softwares de geometria dinâmica para construir conceitos geométricos é o de Leivas e Scherer (2010), intitulado *Construindo o conceito de alturas de triângulo com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade?,* cujo objetivo foi o de identificar ações que favorecessem o caráter dinâmico da construção do conceito de altura do triângulo, com o uso do Cabri-Géomètre. O estudo foi realizado com sete alunos que cursavam a disciplina Recursos Tecnológicos e Educação Matemática do Programa de Pós- Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná. Para a coleta de dados foi utilizado a observação, análise dos registros das atividades realizadas e o debate em torno dessas atividades.

Para Leivas e Scherer (2010), o uso de softwares de geometria dinâmica auxilia na construção de conceitos, visto que as possiblidades de arrastar, colorir, medir, comparar, construir, entre outras, permitiram que o conceito de altura fosse construído, de tal forma que os alunos conseguissem observar que o triângulo tem mais de uma altura, o que é bem diferente do que é normalmente apresentado nas salas de aula. Os mesmos autores concluem que

> [...] mesmo que provisoriamente, é que o uso do Cabri-Géomètre, em uma abordagem construcionista no uso de computadores, com movimentos de cooperação, favoreceu que os sujeitos observados (re)construissem conceitos geométricos. Este processo de (re)construção se concretizou pelo movimento dinâmico de representação, viabilizada pelo software. Quanto ao conceito de alturas de triângulos, os sujeitos descobriram a existência de três alturas no triângulo e que estas alturas dependem de cada vértice e da reta suporte do lado oposto ao mesmo. Pode-se arriscar a afirmar que, atividades de construção de conceitos em Matemática, usando o Cabri-Géomètre, desenvolvidas em uma abordagem construcionista, favoreceriam a construção do conceito de altura de triângulo, por diferentes sujeitos (LEIVAS; SCHERER, 2010, p. 132).

As afirmações de Leivas e Scherer (2010) proporcionaram uma possibilidade para o ensino de geometria. Outros conceitos geométricos podem ser trabalhados e explorados usando algum software de geometria dinâmica.

Percebe-se que apenas aulas expositivas não são suficientes para o ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos, é preciso buscar outras estratégias. Torna-se necessário um leque de metodologias para o ensino da matemática, sendo uma possibilidade a utilização de tarefas exploratório-investigativas.

Diante do exposto, observamos que ainda existem lacunas no ensino e aprendizagem de polígonos nos anos finais do Ensino Fundamental e também de pesquisas sobre essa temática. Essa lacuna pode estar relacionada com a falta de oportunidade de um trabalho realizado com os alunos desde os anos iniciais, como apontam Proença e Pirola (2009, p. 38), “um trabalho que envolva o ensino e a aprendizagem de polígonos como figuras simples deve ocorrer desde as primeiras séries do Ensino Fundamental” e também em relação à formação dos professores.

Portanto, essas discussões e esses questionamentos deram origem a essa pesquisa de mestrado desenvolvida.

2. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico trazendo, inicialmente, um histórico sobre o ensino e aprendizagem da geometria, e, em seguida, discutindo sobre a importância da geometria no processo de aprendizagem dos alunos, orientando e contribuindo, assim, para a contextualização do estudo proposto e análise dos dados.

2.1. O ensino e a aprendizagem da geometria: algumas discussões

Atualmente, o ensino da geometria vem ganhando força nas salas de aula e os conteúdos geométricos já estão mais presentes nos currículos de matemática. Isso demonstra sua importância, pois “a geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a matemática possui: ela interliga com a Aritmética e com a Álgebra” (LORENZATO, 1995, p. 7). Nesse sentido, percebe-se que a geometria pode ser o caminho para ajudar o aluno na compreensão de percursos algébricos e aritméticos, pois os conceitos, propriedades e questões aritméticas e algébricas podem ser descritas por meio da geometria.

Porém, por muitos anos não se preocupou com a possibilidade do ensino de geometria relacionar-se a álgebra e a aritmética. O que acontecia era a valorização exagerada dessas outras áreas da matemática nos currículos e a geometria sempre era apresentada no final dos currículos e também dos livros didáticos. Esse fato foi descrito pela pesquisa realizada por Perez (1995) com professores do Estado de São Paulo sobre o ensino da geometria. Com esse estudo, o autor mostrou em um primeiro momento que

> [...] a quantidade de aulas semanais de Matemática em cada série, segundo os professores, era insuficiente para cumprir todo o programa planejado no início dos anos letivos, principalmente no 2º grau. E, ao colocar a Geometria no final do programa, concluía-se que ela era pouco, ou nada, ensinada (PEREZ, 1995, p. 57).

Essa questão apresentada pelo autor permeou o âmbito das escolas brasileiras por muito tempo, e até hoje se observa vestígios desse resultado. Ainda encontramos um volume exagerado de conteúdos que devem ser ensinados, tornando inviável que o professor cumpra o currículo.

Outro resultado, apresentado por Perez (1995 apud PEREZ, 1991, p. 120-135), é o fato de que os professores “afirmaram também que, para o ensino de Geometria, lhes faltava conteúdos e metodologia adequada sobre como desenvolver esse ensino”. Essas lacunas na formação do professor podem ter causado como consequência o não ensino dos conteúdos geométricos ou ainda uma abordagem metodológica pautada na memorização e reprodução.

O autor supracitado propõe uma prática pedagógica que contribua com o desenvolvimento de uma sociedade mais igualitária, tornado necessário “um ensino de geometria (assim como de toda matemática) que permita aos alunos liberdade de imaginação, expressão, descoberta, inciativa, originalidade e crítica, onde a criatividade não seja sufocada, ignorada” (PEREZ, 1995, p. 61). É preciso pensar em um currículo mais flexível e menos engessado, que dê liberdade para os professores planejarem e selecionarem o que é relevante para ser ensinado em cada ano de escolaridade, valorizando conteúdos próximos da realidade dos alunos.

Pavanello (1993) afirma que um dos problemas na formação do professor tem relação com o formato dos cursos de licenciatura existentes na década de 1960. Esses cursos tinham críticas em relação à falta de unidade entre as disciplinas de conteúdo e as de cunho pedagógico, além de terem sido organizados como licenciatura curta, o que não garantia o domínio dos conteúdos. E como consequência desse tipo de curso, ocorreram problemas na formação dos professores de matemática que atuavam na época, tendo a necessidade de realizar cursos de formação em serviço, “como treinamento e reciclagem para complementar sua formação” (PAVANELLO, 1993, p. 14).

Nesse sentido, não só os professores de matemática tinham problemas na sua formação, mas o professor formador dos mesmos também poderia não ter uma formação adequada, pois era vítima de medidas governamentais e influenciados por movimentos ocorridos na época. Esses aspectos referentes à formação ainda existem atualmente em que as disciplinas de conteúdo específico e as pedagógicas são desconexas e descoladas da realidade das escolas, ambiente em que os professores irão atuar.

Quanto à geometria, durante décadas esses conteúdos não foram ensinados e esse fato teve relação com medidas governamentais, pois refletia mudanças sócio-político-econômicas que ocorreram na sociedade brasileira. Essas mudanças tiveram impactos diretos nos currículos escolares, bem como nos cursos de formação de professores (PAVANELLO, 1993).

A mesma autora também destaca que o Movimento da Matemática Moderna – MMM – teve influência na concepção do ensino da geometria, pois nessa época foram lançados os primeiros livros didáticos que tiveram como preocupação apresentar as estruturas algébricas e a linguagem da Teoria de Conjuntos. A autora afirma que,

> [...] Neles, como nos demais que serão publicados a partir daí, está presente a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Quanto à geometria, opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de interseção de figuras como conjuntos de ponto no plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria de conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem 'intuitiva' que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode - se resolver alguns problemas. (PAVANELLO, 1993, p. 13).

O uso do livro didático refletia os princípios do MMM quanto ao ensino da matemática, ligados a valorização exagerada da álgebra e da aritmética.

Porém, Leme da Silva (2010) comenta que não houve o abandono do ensino da geometria causado pelo MMM, pois já estaria acontecendo na década de 1950, período este, anterior a esse movimento, ou seja, a geometria nunca foi enfatizada nas salas de aula de matemática. Ela afirma:

> [...] que as propostas modernizadoras tentaram revigorar o ensino da geometria propondo-lhe uma abordagem mais experimental e intuitiva, exatamente em conformidade com o desejo expresso pelos debates presentes nos Congressos Nacionais. Entretanto, essa tentativa num momento de algebrização excessiva, de valorização da teoria dos conjuntos, fez com que a efetiva proposta para o ensino de geometria acabasse despercebida (LEME DA SILVA, 2010, p.17-18).

Percebe-se que o MMM não é o vilão, porém sua influência foi percebida nos currículos, na legislação da época e nos livros didáticos, fazendo com que outras propostas para o ensino da geometria fossem deixadas em segundo plano. Ainda de acordo com Leme da Silva (2010),

> [...] a pesquisa de Pavanello não tem como objetivo priorizar o MMM, muito pelo contrário, apresenta uma retrospectiva ampla sobre os diferentes momentos da educação matemática no Brasil, em relação ao ensino de geometria. Entretanto, acreditamos que essas análises contribuíram para a construção de uma representação sobre o ensino de geometria: o MMM, por propor um ensino de geometria segundo a abordagem das transformações geométricas, é um dos responsáveis pelo abandono desse ensino a partir dos anos de 1960, assumindo desta forma o papel de “culpado” pelos problemas decorrentes do ensino de geometria nas últimas décadas do século XX (LEME DA SILVA, 2010, p. 67).

Nota-se que o problema quanto ao ensino da geometria sempre existiu, mas foi a partir do Movimento da Matemática Moderna que se acentuou, pois se discutiu a introdução de abordagens para o ensino da geometria baseadas nas transformações geométricas, amplamente sustentadas pela álgebra por meio do conceito de espaços vetoriais.

Para superar as consequências deixadas por anos em que a geometria não foi ensinada, Lorenzato (1995) afirma que os estudos de geometria do 6º ao 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental (antiga 5ª a 8ª série) devem possibilitar oportunidades aos estudantes para que iniciem suas primeiras explorações, construam as primeiras deduções lógicas e discutam os resultados e processos, tendo como objetivo principal a compreensão e o significado. Para tal, é necessário utilizar “o apoio do material didático, visual ou manipulável” (LORENZATO, 1995, p. 10). Nesse sentido, o papel do professor muda, pois ele deixa de ser um mero transmissor de conhecimento e passa a ser orientador da aprendizagem, não dando resposta ao aluno, mas levando-o à descoberta.

O mesmo autor destaca que o professor deve se preocupar com o vocabulário próprio da geometria, permitindo que os alunos já se familiarizem com os termos e com as definições apresentadas.

> [...] o objetivo é o processo pelo qual se chega ao resultado visando à compreensão e ao significado. Assim sendo, a exploração informal da Geometria é muito adequada e necessária para os estudantes da 5ª/8ª séries, para os quais devem ser oferecidas oportunidades de comparação, classificação, medição, representação, construção, transformação [...] (LORENZATO, 1995, p. 10).

Nesse processo, o ensino de geometria pode tornar-se significativo para os alunos, permitindo que eles façam suas reflexões e tirem suas próprias conclusões sobre o que estão aprendendo, buscando entender, por exemplo, que o quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado, que o quadrado é losango, mas nem todo losango é quadrado, fazendo com percebam que existem características peculiares que os tornam diferentes. A geometria passa a ser vista de uma maneira mais profunda e completa.

Perez (1995, p.10) aponta que os professores devem ser compromissados com a formação dos seus alunos, estando dispostos a repensar sua prática pedagógica no ensino de geometria que:

> [...] permita aos alunos liberdade de imaginação, liberdade de expressão, descoberta, iniciativa, originalidade e crítica, onde a criatividade não seja sufocada, ignorada. E o principal construtor desse ambiente, em sala de aula, é, sem dúvida, o professor, que não poderá esquecer-se que cada criança é um indivíduo com qualidades únicas, com ideias e valores próprios (PEREZ, 1995, p.10).

Nessa perspectiva, o autor destaca a importância do professor no processo de ensino e aprendizagem de geometria, agora assumindo um papel de mediador e orientador de todo processo, dando condições para que o aluno construa seu conhecimento.

Kaleff (1994) comenta sobre a maneira como a geometria foi ensinada por muitos anos e que o professor era apenas um transmissor de conhecimentos quando aponta que, “durante séculos, a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam à memorização (decorando) para enfrentar as dificuldades lógicas apresentadas pelo método dedutivo”(KALEFF, 1994, p. 20).

Segundo a autora, só a partir da década de 70, o ensino da geometria contou com um movimento a seu favor, “visando ampliar a participação na formação integral do educando” (KALEFF, 1994, p. 20). Leme da Silva (2010) considera essa década como o segundo momento do MMM, ocorrendo mudanças na legislação brasileira e na prática pedagógica, sendo o ensino da geometria visto em outro contexto. Nesse sentido, seu ensino passou a ter importância dentro do cenário da matemática. Isso pode ser percebido também, quando Kaleff (1994) delineia os objetivos que foram priorizados, a partir dessa década:

> (a) Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;
> (b) Desenvolver no aluno a capacidade de ler e do interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações Matemáticas;
> (c) Proporcionar ao aluno meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;
> (d) Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade (KALEFF, 1994, p. 20-21).

Proença (2008) afirma que para a promoção da aprendizagem significativa tem-se que considerar os conhecimentos conceituais que o aluno já possui. Segundo o autor, “o ensino em sala de aula deveria levar em consideração a formação de conceitos geométricos por meio de atividades que permitam que o aluno realize uma aprendizagem com significado” (PROENÇA, 2008, p. 31). Assim, o papel do professor é fundamental para que os objetivos propostos anteriormente sejam atingidos.

Sejam quais forem as causas de não se ensinar geometria, não se deve relacioná-las a um só período histórico. É notório que muitos estudos apontaram essas causas, mas todas elas de algum modo convergem para a excessiva valorização da álgebra, da aritmética e da geometria intuitiva. Como consequência, pode-se ressaltar as dificuldades, tanto por parte do aluno quanto por parte do professor.

Repensar o ensino da geometria pode ser uma solução para amenizar as consequências desse passado em que ela não era enfatizada nas salas de aula. É preciso um olhar diferenciado para essa temática, buscando alternativas significativas e que realmente façam a diferença. Lorenzato (2015), com o intuito de contribuir para a discussão sobre a aprendizagem dos alunos, apresentou uma alternativa que permitisse atender tanto os anseios dos professores quanto dos alunos. Assim, formou um grupo de pesquisa e de estudos composto por professores, os quais investigaram sua própria prática pedagógica.

Segundo o autor, a dinâmica do grupo era a seguinte: primeiramente faziam o planejamento das tarefas e, no grupo, vivenciavam as atividades a fim de torná-las mais significativas. Ao final, chegaram a conclusão que os professores necessitavam ter contato com os conteúdos e conceitos geométricos, nesse caso, referiam-se a poliedros e a polígonos. A partir daí, a grande preocupação desse pesquisador foi responder a questão: “Mas como geometrizar com as crianças?” (LORENZATO, 2015, p. 22).

Certamente, encontrar respostas para essa questão é um desafio. A própria formação do professor apresenta lacunas, pois ainda carregamos vestígios do muitos anos em que a geometria não foi ensinada inclusive nos cursos de formação. Lorenzato (2015) apresenta um propósito que pode ajudar a encontrar respostas para essa questão: “[...] construir, uma alternativa que fosse baseada em atividades a serem desenvolvidas *com* os alunos ou *pelos* os alunos, e não *para* os alunos, isto é, que possibilitasse aos alunos aprender fazendo e experimentando, e não só assistindo”. (LORENZATO, 2015, p. 22, grifo do autor).

Assim, procurar conhecer a maneira como os alunos pensam sobre algum assunto geométrico permite tornar as atividades mais significativas, valorizando a linguagem que o aluno já traz consigo sobre algum conceito geométrico.

Uma questão levantada na pesquisa apresentada por Santos e Nacarato (2014) referiu-se às lacunas quanto à formação dos professores dos anos iniciais em relação à geometria, bem como as questões conceituais, o que demonstra uma deficiência no ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Como resultado apontaram que

> É certa a necessidade de que essas deficiências sejam eliminadas, e algumas ações despontam: vislumbramos algumas alternativas de formação continuada para que esse campo seja mais acessível aos professores – também conhecidos como polivalentes – que ensinam Matemática nos anos iniciais. (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 10)

É fato que a formação do professor é essencial para que o ensino da geometria seja consolidado. Existem lacunas nessa formação, muitas delas diretamente ligadas ao abandono desses conteúdos por muitos anos. É preciso aliar a teoria à prática, pois só assim as deficiências destacadas na formação poderão ser superadas e, dessa maneira, as tarefas matemáticas podem ser pensadas para ou com os alunos, como propõe Lorenzato (2015).

Vários estudos apontam caminhos para que o ensino de geometria seja significativo, independente do conteúdo geométrico estudado, apresentando propostas que podem ajudar na aprendizagem.

Proença (2008) realizou um estudo que investigou o conhecimento declarativo de polígonos e poliedros, em termos de atributos definidores, com alunos do Ensino Médio. O estudo indicou que a maioria dos alunos possui dificuldades para conceituar os polígonos e poliedros. Essa situação é preocupante, pois é no Ensino Médio que os alunos deveriam compreender os conceitos de geometria estudados.

Uma alternativa para que o aluno realmente aprenda pode estar relacionada com o uso de atividades que oportunizem a reflexão do que se ensina e se aprende.

Rezende (2015) relatou diversas possibilidades que o laboratório de ensino da matemática pode propiciar para a aprendizagem de conceitos matemáticos para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de materiais didáticos visuais e manipulativos, o que corrobora com as ideias de Lorenzato (1995). A mesma autora afirmou que o laboratório de ensino da matemática possibilitou a reflexão sobre a aprendizagem e "isso aconteceu quando foi preciso buscar respostas para as questões que foram surgindo durante a exploração das atividades" (REZENDE, 2015, p. 8). Nesse sentido, diversas estratégias de ensino foram utilizadas, abordando os conteúdos matemáticos por meio de tarefas exploratório-investigativas.

A reflexão sobre a própria prática do professor possibilita participar ativamente no processo de ensino e aprendizagem, ajudando o aluno em todas as etapas da sua aprendizagem, assumindo assim um papel de protagonista de todo o processo. Proença (2008) reafirma que o papel do professor torna-se essencial para que se promova um ensino de geometria em níveis mais apropriados para os alunos, e destaca que "é importante que o professor reflita sobre quais os conteúdos geométricos que apresenta dificuldade e buscar alternativas para saná-las [...]" (PROENÇA, 2008, p. 173). Dessa forma, a troca de experiências, a formação continuada e a busca por procedimentos adequados são fatores que merecem destaque para o ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Rancan (2011) afirma que o ensino da geometria é importante para o desenvolvimento do pensamento reflexivo no aluno, fazendo as observações a seguir:

> Os conceitos geométricos possibilitam ao aluno desenvolver um pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de maneira organizada, o mundo em que vive. O ensino da Geometria possibilita levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações humanas. Essa possibilidade pode ser explorada levando o aluno a fazer observações de formas geométricas em flores, animais, obras de arte, mosaicos, pisos, pinturas e tantos outros exemplos. Dessa forma, pode se tornar uma base ainda mais forte para determinadas compreensões e representação de relações, possibilitando o aluno, dessa forma, relacionar e encontrar afinidades com as demais áreas do conhecimento (RANCAN, 2011, p. 15).

A autora evidencia a importância da geometria quando descreve as diversas possibilidades para a compreensão dos conceitos geométricos. É evidente que esse ramo da matemática está presente no cotidiano dos alunos, fazendo parte da realidade em que estão inseridos e isso propicia a compreensão de vários conceitos geométricos. Assim, a observação e a experimentação são duas possibilidades próprias da geometria, pois a partir delas, o aluno pode desenvolver o pensamento geométrico.

Desta forma, notamos que a dificuldade em ensinar a geometria pode estar relacionada com duas categorias recorrentes, ou seja, "a geometria é relegada a segundo plano. Falta metodologia apropriada ao professor para o Ensino da Geometria" (PEREZ, 1995, p. 59). Provavelmente, essas duas categorias apresentadas pelo autor são reflexos das lacunas encontradas nas nossas salas de aula quando se trata do ensino da geometria, e também são percebidas na forma como os livros didáticos abordam esse tema, "carregada de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligada de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica" (RANCAN, 2011, p. 17).

No entanto, algumas mudanças estão ocorrendo quanto à forma de ensinar e perceber a geometria. Isso pode ser notado na relevância dada aos conceitos geométricos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os aspectos da geometria abordados por esse documento corroboram com as ideias de autores já citados no que tange a sua importância para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Em âmbito nacional, está em discussão, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tocante a Matemática se aproxima dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pois se trata de um referencial que está sendo construído, valorizando uma prática escolar que contribua para que “todos os estudantes brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura” (BRASIL, 2016, p. 134). Dessa maneira, percebe-se que existe uma preocupação com o ensino que valorize a matemática da realidade dos alunos, com o intuito de estabelecer inter-relações entre vários fatores da realidade, lançando mão de conhecimentos relacionados à aritmética, à geometria, às medidas, álgebra, entre outros campos da matemática.

Percebe-se uma preocupação em abordar os conceitos geométricos desde a Educação Infantil, por meio da observação do espaço que rodeia os alunos, e, gradativamente, os conceitos geométricos serão sistematizados em cada etapa de escolaridade do Ensino Fundamental e Médio (BRASIL, 2016). A geometria transforma-se em um recurso importante para a compreensão do cotidiano, na medida em que existe a possibilidade de medir, comparar, relacionar e analisar algum conceito geométrico com a realidade em que o aluno está inserido.

Pensando nisso, utilizar recursos didáticos que podem ajudar nessa aproximação com a realidade dos alunos pode ser um caminho para o ensino e aprendizagem de geometria. Uma opção seria o material didático[9] manipulável, que pode ser um "excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático" (LORENZATO, 2012, p. 21). É claro que não podemos considerar exageradamente o uso de material didático manipulável, como sendo a única opção para a aprendizagem dos alunos, mas esses materiais auxiliam na interpretação e na visualização de um objeto geométrico, a partir da sua manipulação, construção e exploração. Conforme afirma Kaleff (2003):

> [...] é aconselhável que se leve o aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguce sua curiosidade (KALEFF, 2003, p. 17).

Oportunizar as vivências com diferentes materiais didáticos manipuláveis ou visuais podem propiciar aos alunos conhecer os atributos definidores de um conceito geométrico, evitando alguns erros comuns que surgem na sala de aula. Proença e Pirola (2011) apontam que

> [...] conhecer os atributos definidores permite que o aprendiz possa identificar novos exemplos de um conceito e diferenciá-los dos não-exemplos, sendo que o desenvolvimento nos níveis cognitivos possibilita reduzir ou mesmo evitar erros de generalização. [...] quando se ensina o conceito de polígono, é de fundamental importância haver um trabalho com as figuras planas e não planas para que os estudantes não façam inferência de forma equivocada de que uma pirâmide é um triângulo e vice-versa. Se, na formação do conceito de triângulo, são apresentados, como exemplos, apenas triângulos equiláteros, o aluno pode, também, generalizar incorretamente o conceito por meio de um único tipo de exemplo (PROENÇA; PIROLA, 2011, p. 204).

---

[9] Segundo Lorenzato (2012), o material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem.

Além de utilizar materiais manipuláveis, é muito importante desenvolver atividades que possibilitem aos alunos relacionarem os atributos definidores com outros exemplos, permitindo assim, a generalização. A preocupação com a formação conceitual a respeito de polígonos, por exemplo, evita que os alunos apresentem erros ao identificar uma figura e diferenciá-la de outra. Isso não significa que é apenas saber o nome de uma figura, mas sim observar as regularidades que aparecem em qualquer tipo de figura e suas propriedades. Um exemplo dado pelos autores trata da inferência errônea que os alunos podem fazer quando trabalham com pirâmides e triângulos. Os alunos chamam pirâmides de triângulos, não conseguem diferenciar corretamente uma pirâmide de triângulos, ou seja, tem dificuldades em diferenciar figuras planas de espaciais. Assim, a importância do trabalho com figuras planas e não planas.

É importante ressaltar que a construção do conhecimento é um processo intrínseco do indivíduo, é ele quem concretiza o conceito, na medida em que é oportunizado o contato com diversos contextos, em todo o processo de escolarização, ou seja, "os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam" (PASSOS, 2012, p. 81).

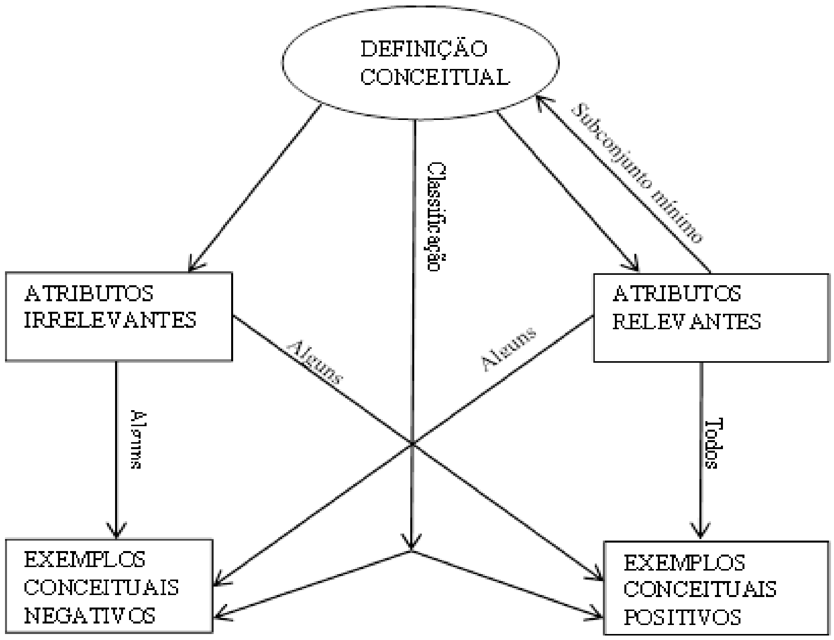
Proença e Pirola (2011) destacam a importância que os termos "como *atributos definidores, atributos irrelevantes, exemplos e não-exemplos*[10] podem fazer parte do vocabulário de sala de aula dos alunos na aprendizagem de polígono e poliedro" (PROENÇA; PIROLA, 2011, p. 213) . Isso possibilita ao aluno descrever e compreender as características relevantes de cada um, realizando assim, uma possível generalização, fazendo a diferenciação entre as figuras geométricas.

Hershkowitz (1994) considera relevante a análise dos conceitos geométricos sob a ótica dos seus atributos relevantes ou não, exemplos e não-exemplos. Para a autora, os atributos relevantes são os elementos que definem um conceito, e os não relevantes são os elementos que só alguns exemplos positivos possuem. Como exemplo, figura plana, segmento de reta, figura fechada, são alguns atributos que definem polígonos, mas tamanho, cor, etc., não são relevantes para a formação do conceito de polígonos. Esses termos apresentados para a definição conceitual em

[10] Termos utilizados por Klausmeier e Goodwin (1977, apud PROENÇA; PIROLA, 2011).

geometria, utilizados pela autora, corroboram com a definição dos termos apresentados por Klausmeier e Goodwin (1977, apud PROENÇA; PIROLA, 2011). O esquema apresentado na figura 1 descreve suscintamente as inter-relações entre os elementos conceituais abordados anteriormente.

Figura 1: Inter-relação entre os elementos conceituais



Fonte: (HERSHKOWITZ, 1994, p. 16)

Percebe-se que os atributos relevantes (críticos) são importantes na definição de um conceito matemático. A maioria dos alunos não consegue reconhecer o que é relevante na definição de um conceito matemático, principalmente o geométrico, propiciando assim, uma definição errônea de um objeto matemático. Dessa forma, os alunos podem confundir poliedros com polígonos. Essa dificuldade foi constatada na pesquisa realizada por Proença e Pirola (2009).

> A partir dos resultados apresentados nesta pesquisa, verificou-se um desempenho longe do desejável para alunos que estão na última etapa da educação básica. Tanto no teste como nas entrevistas, as dificuldades na identificação de atributos definidores básicos de polígono foram percebidas, e isso é um indicativo de que uma atenção maior deveria ser dada ao seu ensino (PROENÇA; PIROLA, 2009, p. 40).

Isso evidencia que, apesar da Geometria ser um campo importante, a omissão do seu ensino por muitos anos e a insistência em ensinar conceitos geométricos através de atividades que valorizam a memorização podem representar falhas graves no processo de ensino e aprendizagem.

As questões apontadas anteriormente revelam que a geometria foi pouco explorada, e como consequência percebem-se deficiências no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Essas deficiências encontram-se na formação do professor, na sua prática pedagógica e na falta de estratégias que possibilitem ao aluno refletir, analisar, conjecturar, registrar e compreender os conceitos geométricos.

3. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, apresentaremos uma discussão sobre as investigações matemáticas, descrevendo as contribuições de alguns autores, bem como sua importância no âmbito da Educação Matemática. Em um segundo momento, discutiremos o papel do professor em aulas de cunho investigativo, bem como apresentaremos algumas reflexões sobre as investigações geométricas como possibilidade para o estudo de polígonos, trazendo as concepções de vários autores, e a ênfase dada às tarefas exploratório-investigativas para o ensino da matemática, em especial, a geometria. E por fim, teceremos algumas reflexões em torno do material didático manipulável e sua utilização para o ensino de conceitos geométricos, destacando sua as possibilidades e limites, e associação a uma tarefa exploratório-investigativa.

3.1. Investigação matemática na Educação Matemática

Dentre as diversas tendências da Educação Matemática temos a investigação matemática como um campo de pesquisa amplo e atual, pois segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) esse percurso iniciou-se em Portugal, na década de 80 e 90, cujo interesse no tema está pautado na ideia de que investigar compõe uma poderosa ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem.

Ponte (2003) destaca que a investigação matemática em Portugal surgiu, incialmente, a partir da resolução de problemas, e só depois foi ganhando força, constituindo-se em uma tendência da Educação Matemática.

A investigação matemática surge de uma “incomodação matemática” em conseguinte uma exploração de atividades relevantes ao processo de investigação culminando na constituição de um currículo interessante, que promova o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho. (PONTE, BORCARDO; OLIVEIRA, 2003).

Ponte, Brocado e Oliveira (2003) explicitam que

> Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 16).

Aliada a necessidade do professor em buscar metodologias alternativas e materiais didáticos para ensinar, principalmente, quando se trata da matemática, disciplina repudiada pela maioria dos alunos, a investigação matemática surge como atividade de ensino e de aprendizagem, por meio da qual "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

A mudança no papel do professor e uma gestão da sala de aula diferenciada tornam-se importante e vão surgindo de maneira sistemática. É fundamental que o aluno saiba desde o início o que se pretende com a tarefa, ou seja, o professor deve ajudar o aluno a compreender o que significa investigar, e, como consequência, aprender a investigar.

Nesse sentido, propor ao aluno situações que permitam uma investigação, fazendo com que levante conjecturas, experimente e chegue a suas conclusões podem propiciar uma aprendizagem significativa. Assim, pensar em investigação matemática "como atividade de ensino e aprendizagem, ajuda trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo assim, uma poderosa metáfora educativa." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) investigar envolve quatro momentos, os quais são essenciais para que a investigação matemática aconteça, a saber:

> O primeiro momento abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 20).

Os autores ainda afirmam que esses momentos podem acontecer de maneira simultânea e em cada um deles uma variedade de atividades podem ser realizadas, como o indicado no quadro 3. Torna-se importante que o aluno tenha suas ideias valorizadas desde o início do desenvolvimento das atividades investigativas, sendo que a intervenção do professor faz-se necessária sempre que se observar a desmotivação do aluno.

Quadro 3: Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática. • Explorar e situação problemática. • Formular questões.
Conjecturas	• Organizar dados. • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes. • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura. • Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio.

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 21).

Observando esses momentos, as atividades investigativas, em sala de aula, aliadas ao estudo de algum conteúdo oportunizam a apreciação e a descoberta matemática. Elas funcionam como mecanismos essenciais que permitem incorporar e aprofundar conceitos matemáticos. Dessa forma, torna-se relevante que sejam propostas aos alunos pelo professor.

O primeiro momento de uma investigação é essencial para que as demais etapas sejam efetivadas, pois é nessa etapa que o aluno se familiariza com a tarefa e busca compreendê-la. Uma maneira para potencializar essa etapa é o trabalho em grupo, pois há troca de ideias, oferecendo várias alternativas para a resolução da tarefa, o que permite a passagem para a etapa da exploração e formulação das questões.

Nessa etapa os alunos passam a ter contato com os dados gerados, buscando organizá-los, surgindo assim às primeiras conjecturas. É importante registrar todas as possíveis conjecturas para testá-las posteriormente. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que essa fase permite aos alunos interiorizar certa conjectura para refutá-la ou não. Aqui a intervenção do professor torna-se essencial, pois ele deve estimular os alunos a apresentarem contraexemplos, para confirmar ou não se a conjectura é válida.

Os mesmos autores demonstram uma grande preocupação com o último momento de uma investigação, pois, na maioria das vezes, os alunos transformam suas conjecturas em conclusões, sem se preocupar em justificá-las. Se essa situação não for percebida e inibida, o processo de investigação pode perder o sentido e não atingir o objetivo proposto inicialmente.

Por fim, a discussão de uma investigação propicia a sistematização das principais conjecturas, bem como a reflexão do trabalho de investigação realizado. É uma fase fundamental para os alunos, pois

> Por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre os eu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Certamente, as investigações matemáticas apontam para um percurso metodológico que permita aos alunos vivenciar cada momento da aprendizagem, propondo questionamentos, discutindo e estabelecendo relações da matemática com problemas de sua realidade.

No Brasil, a pesquisa *Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática*, de autoria de Juliana Facanali Castro, foi a primeira dissertação de mestrado realizada sobre essa temática no ano de 2004, cujo objetivo foi o de analisar o papel desempenhado pelas experiências pedagógicas com investigações matemática em sala de aula no seu processo de constituição profissional como professora de Matemática.

A autora fez uma análise e reflexão sobre o uso de tarefas investigativas nas suas aulas de matemática e as contribuições para repensar e ressignificar sua prática pedagógica. Ela destaca:

> Ser professor numa aula que privilegia a atividade investigativa dos alunos, pois está centrada em tarefas investigativas, exige deste, abertura e disposição para aprender sempre e por diversas vias além de uma atitude reflexiva e investigativa sobre a própria prática. Embora essas exigências profissionais, sob um ponto de vista, possam representar obstáculos para os professores optarem por esta perspectiva didático-pedagógica, sob outro, podem se constituir em um desafio (CASTRO, 2004, p. 43).

Aulas com cunho investigativo é um desafio, pois o professor passa ser mediador e precisa refletir sobre todo o processo de realização de uma tarefa investigativa.

O fato de aprender sempre, como Castro (2004) afirma, também direcionou esta pesquisa de mestrado. Ao ler a dissertação da autora e refletir sobre a prática pedagógica da professora-pesquisadora, constatamos que realizar uma pesquisa sobre a própria prática permite muitas aprendizagens e de maneira reflexiva.

Ainda no cenário da investigação matemática, Wichnoski e Klüber (2015) realizaram uma pesquisa que teve como objetivo “mapear e discutir criticamente a produção brasileira com enfoque na tendência Investigação Matemática, visto que é um campo de pesquisa pouco explorado no país” (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015, p. 2). Com esse estudo, constataram que os primeiros trabalhos que tratam dessa temática foram catalogados no banco de dados da BTBD[11] a partir de 2006. Eles também ressaltaram que no período da realização da investigação, alguns trabalhos poderiam não ter sido catalogados no banco de dados da BTBD. Além disso, eles utilizaram apenas como termos de pesquisa a expressão “Investigação Matemática”, encontrando 12 trabalhos que tratavam dessa temática.

Esses autores compreendem a investigação matemática no campo da Educação Matemática “como sendo uma metodologia de ensino, que busca, por meio de atividades investigativas, conduzir o aluno a pensar e construir o

---

[11] Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - http://bdtd.ibict.br.

conhecimento de maneira um pouco mais autônoma criando situações que o leve a raciocinar e entender o novo conceito” (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015, p. 3).

Assim, a investigação matemática passa a ser muito utilizada como uma metodologia no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Nesse contexto, diversas pesquisas vêm sendo realizadas no que se refere às atividades investigativas em sala de aula e na formação de professores.

A partir dessas reflexões, discutiremos a seguir o papel do professor em aulas que são propostas tarefas de cunho investigativo.

3.2. O papel do professor nas aulas investigativas

Certamente, a postura interrogativa do professor é fundamental nas aulas investigativas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) apresentam como vantagem dessa postura “o fato de ajudar os alunos a compreenderem que o papel principal do professor que é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 52).

Desse modo, o papel do professor muda completamente. Ele passa a ser moderador de todo processo, desempenhado um “conjunto de papéis no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles” (PONTE et al., 1998, p. 47).

Entretanto, desafiar os alunos é uma tarefa primordial para que o trabalho investigativo ocorra. Nessa etapa, atividades desafiantes e motivadoras podem instigar o aluno a realizar a tarefa. Para Ponte et al. (1998) essa fase é importante e ao mesmo tempo requer muita atenção.

> A fase de introdução da tarefa constitui um dos principais momentos onde o professor tem de evidenciar a sua capacidade de colocar boas questões. Isso pode ser feito usando uma variedade de linguagens, incluindo a escrita e a oral. Um enunciado escrito tem a vantagem de fixar a situação de partida, permitindo aos alunos regressar a ela sempre que o entenderem (PONTE et al, 1998, p. 53)

A exploração inicial da situação apresentada permite aos alunos se familiarizem com a situação, com os dados e aprimoram o sentido da tarefa, ou seja, é nessa fase que a tarefa passa a ter sentido para os alunos, possibilitando-os a formularem questões e conjecturas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

Porém, o professor deve se preocupar não só com o enunciado, mas sim com todo o processo durante a realização de uma tarefa investigativa. Os mesmos autores afirmam que “mesmo depois do arranque da investigação, o professor precisa continuar a desafiar os alunos decorrer da atividade de maneira que essa avance normalmente” (PONTE; BORCARDO; OLIVIERA, 2003, p. 48).

No entanto, o professor deve se preocupar em avaliar o progresso dos mesmos. Nesse momento, é preciso saber se os alunos estão compreendendo a tarefa, formulando conjecturas, testando e justificando os resultados. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que “o professor procura acompanhar o mais possível o trabalho de cada um” (PONTE; BORCARDO; OLIVIERA, 2003, p. 49). Então, o professor deve procurar levantar suas dificuldades, com intuito de orientá-los no desenvolvimento da tarefa.

Ponte et al. (1998) destacam quais atitudes o professor deve ter para avaliar o progresso dos alunos.

> Fazer boas perguntas é essencial para saber o que os alunos estão a pensar. Com base nas informações que recolhe, o professor pode adaptar diversas estratégias – não interferir no trabalho dos alunos, interferir de forma discreta e ligeira, ou dedicar uma atenção considerável a um dado aluno ou grupo de alunos. A avaliação do trabalho já realizado pelos alunos e a identificação das suas dificuldades, pode, em certos momentos, dar origem a uma transição para outro momento da aula, ou a uma decisão no sentido de prolongar por mais tempo o trabalho que está a ser realizado (PONTE et al., 1998, p. 55).

O professor pode ser desafiado a racionar matematicamente, pois podem surgir questões não pensadas previamente. Ponte et al. (1998) destacam a importância do professor ter um raciocínio matemático espontâneo, promovendo assim conexões com outros conceitos matemáticos até então não abordados.

> Por muito que uma aula esteja bem preparada, se as questões forem realmente interessantes e o modo de as abordar encorajador da diversidade

> de estratégias e do cruzamento de argumentos, tenderão a surgir com frequência situações novas para o professor. Ser capaz de raciocinar matematicamente, à vista dos alunos, constitui neste tipo de trabalho, uma competência importante da sua parte (PONTE et al, 1998, p. 57).

Por outro lado, o professor deve estar atento às diversas situações que poderão surgir durante a realização de uma atividade investigativa. Ponte et al. (1998) afirmam que o trabalho do professor exige uma boa cultura matemática, bem como uma capacidade de decisão, estabelecendo assim ligações com demais conceitos matemáticos ou extra matemáticos.

Por fim, o professor deve apoiar o trabalho dos alunos nas aulas investigativas, por meio de perguntas adequadas. Assim, Ponte et al. (1998) consideram dois aspectos: “ (a) a exploração matemática da tarefa proposta e (b) a gestão da situação didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos na atividade da aula” (PONTE et al, 1998, p. 58).

Nota-se que ambos os aspectos são importantes e estão interligados. Aqui merece destaque a postura interrogativa do professor. Para promover um diálogo reflexivo, em busca da compreensão das ideias de todos os envolvidos, o professor deve promover a participação ativa dos alunos, valorizando assim a contribuição de cada um.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que um “aspecto importante do papel do professor ao apoiar os alunos é o de promover a reflexão desses sobre o seu trabalho” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 53). É necessário que o professor ajude os alunos durante toda a execução da tarefa, fazendo questionamentos para que os mesmos entendam o que realmente se pretende com a atividade.

Algumas considerações apresentadas evidenciam a mudança no papel no professor. Passos, Lamonato, Piton-Gonçalves (2006) ressaltam que tarefas desse tipo têm um caráter reflexivo, e,

> [...] isso exige do professor um novo papel. A união do domínio matemático com os fundamentos pedagógicos é fundamental para que as intervenções sejam adequadas. Além disso, o professor precisa estar atento para perceber quando uma investigação matemática, pretendida por ele, precisa

> ser interrompida, ou quando ela pode ser transformada em outra (PASSOS; LAMONATO; PITON-GONÇALVES, 2006, p.11).

Portanto, o papel do professor em aulas investigativas é de orientador de todo o processo de aprendizagem. Ele deve estar atento a todas as etapas da tarefa investigativa. Além disso, o professor deve conhecer bem os seus alunos, tornando a sala de aula um ambiente de aprendizagem agradável para que as tarefas investigativas sejam realizadas com sucesso.

3.3. Investigações geométricas: uma possibilidade para o ensino de polígonos

Numa perspectiva investigativa, o ensino da geometria propicia a "realização de atividades de natureza exploratória e investigativa" (ABRANTES, 1999, p. 53). Assim, o ensino da geometria vai além da memorização e é preciso pensar em atividades que contribuam para a percepção significativa do aluno quanto à aprendizagem de conceitos geométricos. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) as investigações geométricas podem ser uma alternativa para desenvolver essa percepção, visto que,

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE; BORCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 71).

Os autores destacam as diversas possibilidades que a investigação geométrica pode proporcionar. O mais interessante é a possível contribuição no que tange tornar concreta essa relação entre a realidade e a matemática. A geometria pode possibilitar que o aluno formule e teste suas conjecturas para posterior demonstração e generalização.

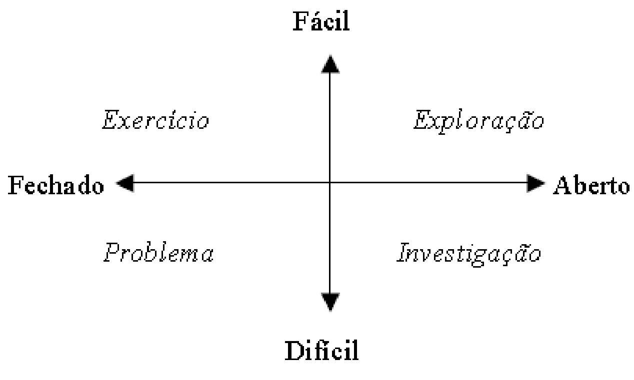
Abrantes (1999) considera que na "geometria existe um enorme âmbito para tarefas exploratórias e investigativas a ser desenvolvida em sala de aula, sem exigir muitos pré-requisitos" (ABRANTES, 1999, p. 54), o que evita, sem dúvidas, atividades mecânicas e sem sentido para o aluno.

Para o autor essa variedade de tarefas só valoriza a geometria no currículo e nas aulas de matemática, na medida em que o aluno pode explorar, conjecturar, construir, visualizar, generalizar e demonstrar, sem se preocupar com os resultados e sim com o processo.

Scheffer (2012) considera a geometria "como um campo fértil para um ensino baseado na exploração e investigação [...]" (SCHEFFER, 2012, p. 96). A contribuição da geometria vai muito além da memorização e aplicação de técnicas na resolução de problemas, pois ela propicia a compreensão dos fatos e relações matemáticas estudadas.

As investigações geométricas são realizadas a partir de atividades exploratório-investigativas, por meio das quais os alunos vão investigando e compreendendo cada etapa do processo de aprendizagem. Ponte (2003) distingue as atividades matemáticas em quatro tipos diferentes, cada um com seu grau de dificuldade, conforme figura 2.

Figura 2: Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura.



Fonte: (PONTE, 2003, p. 29).

Observando o esquema apresentado na figura 2, nota-se que as atividades de investigação são mais difíceis que as de exploração, mas por serem abertas proporcionam aos alunos uma gama de possibilidades de exploração e investigação.

Já os exercícios e problemas são de natureza fechada, sendo que o último tem um grau dificuldade maior. As atividades de exploração e investigação devem ser realizadas de acordo com os quatro momentos descritos no quadro 3, citado anteriormente.

Ponte (2003) considera que as tarefas de exploração e investigação são importantes na sala de aula, mas existe um desinteresse por esse tipo de tarefas, devido a alguns argumentos:

> (i) a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou investigações matemáticas; (ii) os alunos têm dificuldade em perceber como investigar; (iii) antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos; e (iv) a actividade do aluno e a do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino (PONTE, 2003, p. 36).

É fato que esses argumentos fazem parte da realidade das salas de aulas de matemática. O que não podemos é simplesmente aceitá-los, sem se quer tentar superá-los. Cabe ao professor, primeiramente, compreender a importância desse tipo de tarefa, para depois despertar o interesse dos alunos.

O trabalho *Investigações geométricas: Reflexões sobre aprendizagens compartilhadas em um grupo*, da autoria de Passos, Lamonato e Piton-Gonçalves (2006) teve como objetivo inicial verificar as potencialidades didáticas pedagógicas de tarefas exploratório-investigativas de geometria no âmbito brasileiro. Porém, os autores relatam que o objetivo da pesquisa foi modificado no decorrer de sua realização, na medida em que buscaram construir uma tarefa genuinamente de investigação geométrica.

A tarefa proposta pelos autores originou-se da proposta descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 72-73) chamada de Dobragens e Cortes, na qual foram realizadas modificações no comando da atividade.

> A proposta 1 dos autores (Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue nos pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm) foi substituída por: numa folha de papel, dobrada ao meio, fazendo apenas

> dois cortes partindo da lateral da dobra, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos (PASSOS; LAMONATO; PITON-GONÇALVES, 2006, p. 6).

Os sujeitos do estudo foram os alunos da 7ª série (atual 8° ano) do Ensino Fundamental. Os autores relataram algumas dificuldades e dilemas para a realização de atividades desse tipo, o que corrobora com alguns argumentos apresentados por Ponte (2003).

> a) o número excessivo de alunos na sala de aula; b) o tempo de duração das aulas; c) dificuldades dos alunos em ler e interpretar enunciados; d) a professora ser a própria pesquisadora, portanto aquela que ao mesmo tempo propõe a tarefa e faz os registros de campo; e) a resistência dos alunos em registrarem suas conclusões; f) conflito na definição criteriosa dos instrumentos de avaliação; g) projetos internos do contexto escolar não previstos e não relacionados à tarefa; h) momentos do trabalho de campo em que revela-se a autonomia da professora (PASSOS; LAMONATO; PITON-GONÇALVES, 2006, p.2).

A resistência dos alunos em registrar suas conclusões, bem como as dificuldades de leitura e interpretação, podem ter relação com a falta de compreensão do que é investigar. Cabe então ao professor estar preparado para superar esses obstáculos. Nesse tipo de tarefa, o ideal é que o aluno perceba a importância de registrar cada etapa de sua investigação, a fim de construir seu conhecimento matemático.

Fiorentini (2006) define as aulas exploratório-investigativas como “aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação” (FIORENTINI, 2006, p. 29). O autor afirma ainda que dependendo do tipo de abordagem dada às tarefas durante as aulas, elas podem ser apenas exploratórias ou se transformar em uma aula de investigação matemática.

Lamonato e Passos (2008) consideram que o ensino da geometria possibilita o desenvolvimento de habilidades nos alunos, bem como a compreensão da sua realidade. Elas observam que:

> O ensino de geometria, por sua natureza para a percepção do espaço, dos deslocamentos, do desenvolvimento de habilidades de percepção e orientação espacial, é fundamental para a compreensão, adaptação e exploração do indivíduo no mundo em que vive (LAMONATO; PASSOS; 2008, p. 7).

Para Abrantes (1999) as “explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento” (ABRANTES, 1999, p. 54). O autor destaca ainda que, esse tipo de atividade desencadeia outros aspectos da matemática ligada com questões próprias da investigação, bem como a possiblidade de rever conceitos, definições e valorizar as demonstrações matemáticas.

Lamonato e Passos (2008) destacam que tarefas exploratório-investigativas devem ser trabalhadas desde a Educação Infantil, oportunizando assim, o desenvolvimento da reflexão e da crítica dos alunos.

Assim, as investigações geométricas podem ser uma alternativa para o ensino da geometria, visto que muitos autores apontam a geometria como um campo próprio de investigação, no qual, por meio da representação e da visualização, diversas tarefas exploratório-investigativas podem ser produzidas.

Por mais que o não ensino da geometria tenha trazido consequências sérias para a aprendizagem de conceitos geométricos, muitas pesquisas apontam caminhos para superar os problemas causados. Várias causas foram levantadas pelos autores apresentados neste capítulo. Porém, a revisão da literatura aponta algumas investigações que enfatizam o estudo da geometria sob outro ponto de vista.

Esse fato permitiu entender que não adianta lamentar o ocorrido, é preciso buscar novas maneiras para superar essa lacuna, o que não é diferente quando se refere ao estudo de polígonos. Muitas pesquisas apresentam resultados que demonstram dificuldades dos alunos, como Proença e Pirola (2009) e propostas para o estudo de algum conceito relacionado a polígonos de maneira investigativa, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

Porém, ainda constata-se que existe a necessidade de buscar alternativas capazes de ampliar os conceitos geométricos, de maneira significativa para o aluno. Assim, trilhando esse caminho e baseando-se nas concepções dos autores citados, essa pesquisa apresenta uma proposta para o estudo de polígonos, que será detalhada no próximo capítulo.

3.4. O uso do material didático manipulável para o ensino e aprendizagem de geometria com tarefas exploratório-investigativas

Nesta pesquisa, buscamos utilizar o material didático manipulável com o intuito de facilitar a percepção dos estudantes quanto aos conceitos geométricos referentes a polígonos, concomitantemente, com tarefas exploratório-investigativas. Assim, procuramos discutir, nesta seção, a partir das ideias de diversos pesquisadores, sobre o material didático manipulável (MD)[12] para o ensino da Matemática.

Uma definição clássica de MD pode ser expressa como “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia” (REYS, 1971, apud, MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 193). Também podemos entender que MD “é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem” (LORENZATO, 2012, p. 18). Portanto, todo o tipo de instrumento que favoreça o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes pode ser considerado um material didático, por exemplo, um livro, quebra-cabeça, calculadora, filme, jogos, entre outros.

No entanto, a utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino não é um recurso didático recente. Nacarato (2005) diz que esse tipo de material foi usado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, pois o mesmo defendia “[...] que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (NACARATO, 2005, p.1). Assim, é importante pensar no ensino da matemática que permita ao aluno “ver com as

---

[12]Consideramos MD como material didático manipulável.

mãos", no sentido de tocar, sentir, movimentar e manipular, com o intuito de compreender conceitos matemáticos.

No Brasil, a defesa pelo uso de MD nas aulas de matemática iniciou-se na década de 1920, concomitantemente, com o surgimento de uma tendência no ensino da Matemática conhecida como empírico-ativista (NACARATO, 2005). Essa tendência defendia mudanças no papel do professor e do aluno, no currículo e no método de ensino, tornando o ensino da matemática mais experimental e com a utilização de materiais concretos, como destaca Fiorentini (1995):

> Aqui o professor deixa de ser o elemento fundamental do ensino, tornando-se orientador ou facilitador da aprendizagem. O aluno passa a ser considerado o centro da aprendizagem – um ser "ativo". O currículo, nesse contexto, deve ser organizado a partir dos interesses do aluno e deve atender ao seu desenvolvimento psicobiológico. Os métodos de ensino consistem nas "atividades" desenvolvidas em pequenos grupos, com rico material didático e em ambiente estimulante que permita a realização de jogos e experimentos ou contato – visual e táctil- com materiais manipulativos (FIORENTINI, 1995, p. 9, grifo do autor).

O tipo de educação proposta por Pestalozzi e pela tendência empírico-ativista assemelha-se às ideias propostas por pesquisadores atuais, como Kaleff (2012) que destaca os princípios norteadores do ensino da geometria escolar no século XXI[13], e os apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), quando comenta que:

> Em ambos os documentos são ressaltadas a emergência, na escola, de conteúdos geométricos nem sempre tratados nos livros-texto, e a importância da utilização de materiais concretos e de registros gráficos, na construção do conhecimento. Além disso, é apontada a relevância da utilização de materiais didáticos inovadores e de registros semióticos apropriados, na forma de diagramas, figuras, esquemas e desenhos para o desenvolvimento do raciocínio e de habilidades matemáticas do aluno (KALEFF, 2012, p. 119).

A utilização de materiais didáticos manipuláveis poderá ser relevante para o ensino e aprendizagem em geometria, porém, o "uso inadequado ou pouco

---

[13] Direcionados pelo documento conhecido como Questionário de Catânia – originalmente apresentado em 1994 e também em Mammana e Villani, 1998 (KALEFF, 2012, p. 118).

exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática" (NACARATO, 2005, p. 4). Assim, percebemos que não é suficiente ter disponível esse tipo de material, e não saber utilizá-lo com intuito de possibilitar o desenvolvimento de habilidades e raciocínio matemático nos alunos.

Lorenzato (2012) destaca que o modo de utilizar o MD depende do professor e suas concepções pedagógicas em relação à matemática e ao processo de ensino-aprendizagem. Se o professor utiliza o MD apenas para apresentar ao aluno algum conceito, ele reproduz um reforço à memorização do conceito matemático, conforme apresentado nos livros didáticos. Contudo, aquele professor que utiliza o MD propiciando que o aluno faça suas descobertas, percepções, constatações e soluções, possibilita o "desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno" (LORENZATO, 2012, p. 25).

Os materiais didáticos devem possuir características que facilitem sua aplicabilidade para modelar o maior número possível de ideias e conceitos matemáticos, pois essa gama de aplicações possibilita que os alunos "estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material" (PASSOS, 2012, p. 87).

Corroborando com Passos (2012), Lorenzato (2012) descreve algumas potencialidades do MD, de acordo com a intenção do seu uso pelo professor. O autor destaca que o MD pode ser um "raio X", na medida em que permite ao professor observar os conceitos que devem ser revistos ou aprofundados. Pode ser um regulador, uma vez que permite ao aluno aprender no seu próprio ritmo; pode ser um modificador, pois favorece mudanças na ordem de abordagem do conteúdo previsto; bem como pode ser utilizado em diferentes níveis de ensino (LORENZATO, 2012).

Tantas são as características favoráveis quanto a utilização do MD no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, Nacarato (2005) alerta para seu uso inadequado pelo professor quando esse não propicia um ambiente de interação dos alunos com o material, de modo que eles possam perceber quais relações podem ser observadas com os conceitos matemáticos estudados.

Bezerra (1962, apud RÊGO; RÊGO, 2012) destacou as principais funções do MD:

> i) auxiliar o professor a tornar o ensino da matemática mais atraente e acessível;
> ii) acabar com o medo da matemática que, criado por alguns professores e alimentado pelos pais e pelos que não gostam de matemática, está aumentando cada vez mais a dificuldade do ensino dessa matéria e,
> iii) interessar maior número de alunos no estudo dessa ciência (BEZERRA, 1962 apud RÊGO; RÊGO, 2012, p. 42).

Observando as funções descritas pelo autor supracitado, percebe-se que o MD tem um grande potencial no que tange a questão da aversão à matemática. Além disso, se a matemática é concebida em um âmbito propício a experimentação, a descoberta, a reflexão e a criatividade do aluno, isso possibilita estruturar as ideias e as informações, ocorrendo assim à aprendizagem de um conceito estudado.

Quanto à geometria, Pais (2000) discutiu a utilização do MD para o seu ensino, destacando a existência de duas concepções antagônicas:

> Quanto ao uso de materiais didáticos no ensino da geometria, este estudo coloca em evidência duas concepções igualmente extremas e redutoras dos valores educacionais deste conteúdo: uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos (PAIS, 2000, p. 14).

O ensino da geometria requer um processo voltado para a visualização, sendo relativo à segunda concepção apontada por Pais (2000), isto é, ensinar a geometria de maneira experimental, manipulando os materiais e desenhos diversos. Assim, para que o aluno desenvolva a sua capacidade de visualizar, a forma de explorar os modelos ou materiais devem possibilitar "ao aluno a construção de imagens mentais" (NACARATO, 2005, p.4).

Também é importante considerar qual percurso pedagógico devemos seguir para o uso do MD no ensino da geometria, visto que não é sua simples utilização que vai garantir a aprendizagem do aluno. Pais (2000) afirma que "o uso de materiais didáticos no ensino da geometria deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica para que, evitando os riscos de permanência em um realismo ingênuo ou de um empirismo, contribua na construção do aspecto racional" (PAIS, 2000, p. 14).

Ao utilizar o MD, o professor deve buscar meios para estimular tanto uma abordagem experimental quanto dedutiva, sendo que as duas devem andar de "mãos dadas", possibilitando assim, a "elaboração conceitual por parte dos alunos" (NACARATO, 2005, p. 6).

Diante do exposto, o MD pode ser um aliado da prática pedagógica dos professores, na medida em que facilita a observação, a análise, o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, entre outras possibilidades. Porém, não é simplesmente ter o material didático na sala de aula, é preciso explorar todos os conceitos possíveis dentro de cada tarefa. A "exploração de vários tipos de investigação geométrica pode contribuir para a concretização e relação entre situações matemática" (SCHEFFER, 2012, p. 95).

Portanto, a utilização de materiais didáticos manipuláveis com tarefas exploratório-investigativas, torna possível que os alunos vivenciem experiências de aprendizagem importantes, pois pode permitir que os alunos passem a indagar, a discutir e a estabelecer relações entre a matemática escolar e a sua realidade.

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição da metodologia utilizada na realização da pesquisa, dando enfoque à perspectiva de investigação qualitativa. Descreveremos alguns elementos que com constituem o contexto da pesquisa, os participantes e o todo o processo de coleta de dados. Também teceremos alguns comentários sobre o produto educacional, parte integrante desta dissertação, que envolve tarefas exploratório-investigativas para o ensino e aprendizagem de polígonos.

4.1. Metodologia adotada

A metodologia adotada neste estudo buscou alcançar o objetivo que é investigar as possíveis contribuições que as atividades exploratório-investigativas, aliadas ao uso de material didático manipulável, proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e para o processo de reflexão sobre a própria prática docente da professora-pesquisadora.

Optou-se pela abordagem qualitativa, pois ela caracteriza-se pela observação do meio natural do indivíduo, bem como possui um enfoque interpretativo. D’Ambrosio (2012) ressalta que a pesquisa qualitativa tem diversas nomenclaturas, mas em todas elas o “essencial é o mesmo: a pesquisa é focalizada no indivíduo, com toda sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural” (D’AMBROSIO, 2012, p. 93).

Bogdan e Biklen (2013) consideram cinco características que definem uma pesquisa qualitativa, mas isso não significa que todas as características tem que estar presentes em uma investigação em mesmo grau e nível.

> 1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
> 2. A investigação qualitativa é descritiva.

> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 47-50).

A primeira característica apontada pelos autores tem relação com a imersão do pesquisador no ambiente de pesquisa. A forma como observa, registra e coleta os dados é essencial para a validação de seu estudo. Não importa o equipamento utilizado, mas os apontamentos descritos pelo pesquisador, pois ele se torna instrumento dessa coleta. Assim, já estamos imersos no ambiente de pesquisa, pois se desempenhou o papel de pesquisadora e de professora da turma na qual as atividades foram desenvolvidas.

A segunda característica destaca que os dados, geralmente, são imagens, textos, vídeos, relatos, entrevistas, fotografias, documentos pessoais, registros oficiais, entre outros e não apenas números. Bogdan e Biklen (2013) apontam que a análise dos dados descritivos não é feita de maneira trivial, todas as situações tem seu potencial e devem ser consideradas na análise dos dados. Todo e qualquer tipo de dado será considerado para posterior análise e validação do estudo. Procuramos registrar da maneira mais fiel possível da realidade, as informações que serão pertinentes para responder as questões de pesquisa e alcançar os objetivos propostos.

A terceira característica indica que em uma pesquisa qualitativa, a preocupação do pesquisador deve estar voltada para o processo. O interesse e a ênfase da pesquisa estão em “como” os sujeitos percebem o problema e suas relações e o “modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diários” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 49). A preocupação inicial foi compreender como os alunos procuraram investigar as situações propostas na sequência didática. Durante todo o processo, utilizamos diversos meios para registrar seus anseios, suas discussões, suas habilidades e dificuldades.

A quarta característica destaca que o processo de análise dos dados é feita na medida em que os dados particulares recolhidos são agrupados, inferindo assim, em abstrações pertinentes à questão de pesquisa. Os autores explicitam que nessa fase não há a preocupação em comprovar hipóteses. O pesquisador constrói sua teoria de “baixo para cima”, fazendo a inter-relação dos dados à medida que são recolhidos.

Bogdan e Biklen (2013) afirmam que “não se trata de montar um quebra-cabeça, cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 50). Na medida em que as tarefas foram sendo realizadas pelos alunos, os dados foram analisados, buscando delinear mecanismos que sirvam para uma intervenção futura. Nesse momento, o agrupamento dos dados coletados é de suma importância para a análise e apresentação dos resultados. E nessa pesquisa, os dados foram agrupados ora a partir das conclusões dos grupos, ora individualmente, de acordo com o que se pretendia analisar.

A quinta característica explicitada pelos autores refere-se a que o pesquisador deve ter a percepção dos significados atribuídos pelos sujeitos participantes da pesquisa. Nesse sentido, a vivência de uma situação pelos sujeitos é foco da pesquisa qualitativa. Ainda para os autores “ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 51). A observação e o registro de todas as situações ocorridas durantes a realização das tarefas, não estão desprovidas de significados. Torna-se essencial considerar também a percepção dos sujeitos da pesquisa diante das tarefas propostas, tentando observar as entrelinhas de cada etapa, bem como as transformações observáveis durante a prática.

As características apontadas por Bogdan e Biklen (2013) evidenciam que a postura do pesquisador é essencial para a validação da pesquisa. Consideramos que todas as características estão presentes nesta pesquisa, pois a pesquisadora estava imersa no ambiente de investigação, como professora-pesquisadora. Assim, procuramos desenvolver este estudo, considerando os alunos participantes como indivíduos contextualizados social e culturalmente, preocupando-se mais com o processo do que com o produto, apresentando dados munidos de significados.

Destacamos que durante a realização desta pesquisa, decidimos investigar as possíveis contribuições que as atividades exploratório-investigativas, aliadas ao uso de material didático manipulável, proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, e, nesse contexto, investigar a prática docente da professora-pesquisadora, visto que poderia promover uma compreensão do seu processo de formação enquanto professora de matemática.

D’Ambrosio (2012) descreve algumas etapas para a realização de uma pesquisa com carácter qualitativo,

> 1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do investigador.
> 2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação.
> 3. Identificação das relações entre esses elementos.
> 4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados.
> 5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3.
> 6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2.
> 7. Redefinição de estratégias definidas no item 4.
> 8. Coleta e análise dos dados (D’AMBROSIO, 2012, p. 94).

Certamente, as etapas descritas por D’Ambrosio permitem a compreensão do processo investigativo no contexto de uma pesquisa qualitativa. É preciso esclarecer que em pesquisas desse tipo, a subjetividade está presente em todo o processo, visto que a mesma não se preocupa com o produto e sim com o processo.

Qualquer que seja a investigação requer do investigador muita atenção e cuidado, pois quando se investiga a própria prática, ele passa ser um dos sujeitos de pesquisa. Ponte (2008) descreve algumas condições apontadas por Beillerot (2001) que são fundamentais para a construção de uma atividade de investigação: “(a) produz conhecimentos novos, ou pelo menos, novos para quem investiga, (b) segue uma metodologia rigorosa, e (c) é pública” (PONTE, 2008, p. 156).

As condições citadas por Beilletot (2001), apesar de servir para qualquer tipo de pesquisa, podem ser observadas neste estudo, pois procuramos buscar conhecimentos novos, quando nos propusemos a pesquisar a própria prática, a partir de uma metodologia que requer cuidado e rigor no que se refere à coleta e análise dos dados, e por fim, essa investigação se tornará pública, pois será submetida a uma banca de avaliadores para posterior divulgação em periódicos e eventos de Educação e de Educação Matemática.

Com vistas a entender o termo professor-pesquisador, Ponte (2002), explica que um professor-pesquisador "é um professor que realiza investigação, normalmente sobre a sua prática, mas, também por vezes, sobre outros assuntos" (PONTE, 2002, p. 5). Assim, esta pesquisa procura olhar para o papel das investigações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem de polígonos, bem como apresenta uma reflexão sobre a prática da professora-pesquisadora, possibilitando analisar as possíveis mudanças ocorridas durante a realização das tarefas exploratório-investigativas pelos alunos.

Diante do exposto, e considerando que a investigação foi realizada com os alunos e ao mesmo tempo com a professora-pesquisadora, o carácter qualitativo tornou-se mais adequado.

4.2. A escola e os participantes da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da Creche e Escola Municipal Maria Puddó Murucci localizada em Santa Clara, 3º Distrito do município de Porciúncula, Rio de Janeiro. A escola oferece desde a Educação Infantil até o 9º ano do Ensino Fundamental.

A opção por realizar o estudo nessa turma tem dois motivos: primeiro, é uma turma que a professora-pesquisadora tem acompanhado desde o 6º ano, e nesse período, observou suas dificuldades de aprendizagem, bem como a aversão à disciplina de matemática, e em segundo, essas dificuldades referem-se ao conceito de polígonos, pois esse conteúdo faz parte do currículo desse ano de escolaridade.

Verificamos nas tarefas exploratório-investigativas e no uso de material didático manipulável uma possibilidade de tornar o ensino da matemática, em especial, o ensino de polígonos mais atrativo, buscando promover a aprendizagem e amenizar as dificuldades desses alunos.

Observar e refletir sobre os alunos atendidos pela escola foi o primeiro passo para preparar as tarefas. Eles são oriundos de diversas regiões do distrito. Nos anos finais do Ensino Fundamental, recebem alunos da zona urbana e rural do município, oriundos de escolas de campo, todas multisseriadas, sendo que ainda existem escolas com um único professor para todos os níveis de ensino (Educação Infantil ao 5º ano do Ensino Fundamental).

A turma do 8º ano possuía 29 alunos, sendo que 21 alunos são oriundos de escolas localizadas na zona rural. Alguns já são repetentes e, portanto, há distorção idade/ano.

Outra questão refere-se às condições socioeconômicas. A maioria das famílias dos alunos é beneficiária de um Programa de Transferência de Renda do Governo Federal e trabalham na lavoura de café, atividade agrícola mais importante do distrito e que movimenta a economia local.

Quanto ao acesso à informação, a televisão é o meio de comunicação principal das famílias. Somente os alunos que residem na sede do distrito é que tem acesso a internet em casa ou na casa de familiares. Os alunos residentes na zona rural só tem acesso quando chegam à zona urbana, por meio de celulares, *lan houses* ou no Telecentro mantido pelo poder público.

Quanto às questões relacionadas ao ensino e aprendizagem, nota-se uma grande dificuldade com os conteúdos, inclusive de leitura, escrita e interpretação.

4.3. Procedimentos para coleta e análise dos dados

Com o intuito de alcançar o objetivo proposto neste estudo, procuramos dar atenção ao ambiente da sala de aula, observando as atitudes, as expressões dos alunos, os gestos, etc., realizando os registros no diário de campo, além dos registros escritos pelos alunos e das gravações em áudio e vídeo. Preocupamos em recolher os dados com o máximo de detalhes possíveis.

Para fazermos a análise, os dados foram apresentados como a discussão final de cada grupo, considerando as conclusões registradas no término de cada tarefa e na discussão final em sala de aula, ou ora, apresentados como uma discussão de cada indivíduo do grupo, variando de acordo com as tarefas, visto que foram coletados inúmeros dados e para a sua análise foram necessários agrupá-los.

Primeiramente, para a realização da pesquisa, solicitamos a autorização da direção da escola, dos pais ou responsáveis pelos alunos e também dos próprios alunos por meio da assinatura de um termo de consentimento. Nesse termo, aos alunos que indicaram como gostariam de ser identificados na pesquisa, usando nomes fictícios, garantindo assim, o anonimato.

Para a coleta de dados, utilizamos os procedimentos descritos no quadro 4 a seguir.

Quadro 4: Instrumentos para a coleta de dados.

Instrumentos de coleta de dados	**Descrição**
Observações da professora-pesquisadora	Registro escrito das observações consideradas pertinentes à pesquisa realizadas pela pesquisadora no diário de campo.
Áudio e vídeo	Gravação em áudio e vídeos da realização das tarefas pelos alunos.
Fotografias	Relatório fotográfico dos diversos momentos do desenvolvimento das tarefas.
Discussão nas aulas	Relatos dos alunos individualmente ou em grupo durante a realização das tarefas, bem como as estratégias utilizadas por eles.
Atividades escritas	As próprias tarefas desenvolvidas pelos alunos.

Fonte: elaborado pela autora.

Consideramos como objeto de pesquisa as tarefas exploratório-investigativas realizadas pelos alunos e todo o contexto das aulas de cunho investigativo, tais como: intervenções feitas pela professora-pesquisadora ou pelos alunos, estratégias, discussões, representações, registros escritos, e também as percepções da professora sobre seu desenvolvimento profissional.

Os dados foram coletados no período de setembro a novembro de 2016, durante as aulas de matemática, em que foram desenvolvidas as tarefas exploratório-investigativas pelos alunos, usando os instrumentos mencionados no quadro 4. Para o desenvolvimento das tarefas nesse período, conversamos com a direção da escola e a orientação pedagógica, propondo uma mudança no planejamento anual da disciplina de matemática, adiantando alguns conteúdos, e, deixando os conteúdos referentes a estudo de polígonos para o período de setembro a novembro de 2016.

Durante esse período de coleta de dados, também foram aplicadas avaliações e abordados outros conteúdos do currículo de matemática, de modo que os conceitos apresentados nas tarefas pudessem ser utilizados para compreender os demais conceitos matemáticos. É importante destacar que as tarefas propostas podem ser aplicadas durante todo o ano letivo, intercaladas com as demais atividades da escola. E por se tratarem de tarefas exploratório-investigativas, o tempo gasto para a realização das mesmas pode variar, dependendo do envolvimento dos alunos e professor.

Todas as tarefas foram realizadas em grupos, e para tal, a turma foi dividida em 7 grupos, sendo 6 grupos com 4 alunos e 1 grupo com 7 alunos, possibilitando a troca de ideias entre os integrantes e, posterior discussão com os demais alunos da turma. Na formação dos grupos, deixamos livre para que os próprios alunos se dividissem de acordo com a afinidade já observada em sala de aula. Esses grupos não tinham uma formação rígida, ou seja, eles poderiam se alterar a cada tarefa, o que ficou a critério da turma.

Por fim, como se trata de um Mestrado Profissional, também é parte integrante desta dissertação o produto educacional, que descrevemos na próxima seção.

4.4. Produto Educacional

Foi a partir da elaboração e aplicação das tarefas exploratório-investigativas, analisadas no próximo capítulo, que surgiu o produto educacional, tornando-se uma proposta para auxiliar o professor no processo de ensino e aprendizagem do conceito de polígonos.

Leodoro e Balkins (2010) consideram que existe uma contradição quanto à produção e aplicação do produto educacional, pois “de um lado, o professor é visto como um elaborador do seu instrumento de ensino. Mas, também, se advoga que ele produza para os demais professores que, então, seriam usuários do produto educacional” (LEODORO; BALKINS, 2010, p. 3), ou seja, o professor é o produtor e usuário do próprio produto. O produto educacional produzido para esta pesquisa poderá ser aplicado em outras salas de aulas para a formação dos alunos, pois pode permitir interações e intervenções do docente e discente no processo de ensino e aprendizagem, especificamente de polígonos, podendo também ser adaptado para qualquer ano de escolaridade ou para abordagem de outros conceitos geométricos, que não foram foco das tarefas propostas.

Para Moreira e Nardi (2009), o produto educacional deve ter identidade própria, se preocupando com sua aplicação em diversos espaços.

> O mestrando deve desenvolver, por exemplo, alguma estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto; enfim, um processo ou produto de natureza educacional e implementá-lo em condições reais de sala de aula ou de espaços não formais ou informais de ensino, relatando resultados dessa experiência. No momento atual, particular atenção deve ser dada à atualização curricular e ao uso das tecnologias de comunicação e informação na educação básica; mas, independente disso, o trabalho de conclusão deve necessariamente gerar um produto educacional que possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores (MOREIRA; NARDI, 2009, p. 4).

O produto educacional será validado se realmente for disseminado, analisado e utilizado por outros professores em suas salas de aulas, tornando-se uma estratégia ou metodologia para o ensino da matemática.

No produto educacional desta dissertação apresentamos uma sequência didática com tarefas exploratório-investigativas e uso de material didático manipulável que tem como objeto de estudo o conceito de polígonos.

Num primeiro momento, nos preocupamos com tarefas que envolvessem, além de área e perímetro, conceitos como ângulos internos e externos, diagonais, rigidez do triângulo, propriedades dos paralelogramos e triângulos, entre outros. Isso porque a pesquisa realizada pelo GREPEM com objetivo de identificar o que estava publicado em geometria em periódicos de Educação Matemática evidenciou que a metade dos artigos encontrados discutia apenas sobre a temática área e perímetro, quando se tratava do estudo de polígonos, conforme já apresentado no quadro 1.

Para elaborar a sequência didática, buscamos na literatura uma definição para tal com o intuito de compreender como a mesma deveria ser elaborada. Para Zabala (1998) a sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Nessa linha de pensamento, a sequência didática produzida para este trabalho possibilitou desenvolver um trabalho coletivo, onde ocorreu a troca de ideias, de maneira colaborativa entre os alunos e a professora-pesquisadora, favorecendo assim, a socialização das reflexões e expectativas dos alunos em torno dos conceitos geométricos abordados.

A sequência didática está apresentada na íntegra com sugestões de mudanças, orientações para o professor e algumas considerações observadas durante a realização das tarefas pelos alunos, no produto educacional intitulado “Tarefas exploratório-investigativas para o estudo de polígonos no 8º ano do Ensino Fundamental”.

5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

Neste capítulo, apresentaremos a análise dos dados coletados, a partir dos registros produzidos com a realização das tarefas exploratório-investigativas sobre polígonos, bem como reflexões sobre a prática pedagógica da professora-pesquisadora.

5.1. Análise dos dados

A análise dos dados envolveu dois momentos: no primeiro, procuramos compreender como os alunos se envolveram com as tarefas exploratório-investigativas e quais contribuições essas tarefas trouxeram na aprendizagem de polígonos. No segundo, buscamos refletir sobre a prática da professora-pesquisadora, apresentando as mudanças ocorridas durante o desenvolvimento desse tipo de tarefa.

É importante esclarecer que os dados foram analisados a partir de recortes das aulas durante a realização das tarefas propostas na sequência didática.

Trazemos trechos de diálogos individuais ou das conclusões finais dos grupos, ocorridos durante a realização das tarefas e das intervenções realizadas pela professora-pesquisadora, para que os alunos prosseguissem seu trabalho de investigação, refletindo e discutindo sobre suas conclusões.

O primeiro desafio enfrentado foi referente à postura em sala de aula da professora: tinha que mediar às relações entre alunos, entre eles e a professora e entre eles e o conhecimento matemático. Pensar em uma sala de aula totalmente democrática, onde todos ensinam e aprendem ao mesmo tempo. O desenvolvimento de tarefas desse tipo requer do professor muito planejamento e ao mesmo tempo uma boa gestão da sala de aula, permitindo assim, um ambiente propício para a aprendizagem, no qual todos tem voz.

Como se tratou de uma sequência didática, a ordem em que as tarefas foram sendo realizada teve como propósito oportunizar aos alunos a aprendizagem de alguns conceitos referentes a polígonos de modo gradual. Para facilitar a análise dos dados fizemos o agrupamento das tarefas, de acordo com o conceito geométrico estudado, conforme apresentado no quadro 5.

Quadro 5: Agrupamento das tarefas

Conceito	Tarefas	Objetivos
Estudo dos triângulos	Tarefa 1: Canudos e linhas: o que podemos construir?	Compreender o conceito de triângulos e a desigualdade triangular, por meio da manipulação de canudos e linha.
	Tarefa 2: Rígido ou não?	Investigar e identificar a propriedade de rigidez do triângulo.
	Tarefa 3: Medindo, classificando e comparando triângulos	Investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação às variações de triângulos formados, por meio da observação das regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.
Estudo dos quadriláteros	Tarefa 4: Medindo, classificando e comparando paralelogramos	Investigar e identificar as propriedades principais dos paralelogramos por meio da observação dos atributos relevantes; Investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação as variações de paralelogramos formados, por meio da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.
	Tarefa 5: Investigando os quadriláteros	Propiciar ao aluno a compreensão das relações entre quadriláteros e analisar as propriedades dos quadriláteros estudados, por meio da observação e da exploração dos elementos de todas as figuras obtidas.
Diagonais	Tarefa 6: Traçando diagonais	Compreender o conceito de diagonais de um polígono e a partir da identificação de um vértice traçar as diagonais desse polígono.

Ângulos	Tarefa 7: Investigando os ângulos internos e externos de um polígono	Investigar as medidas dos ângulos internos de um polígono e a relação existente entre o número de lados desse polígono e o cálculo da soma desses ângulos internos. Investigar as medidas dos ângulos externos de um polígono e a relação existente entre o número de lados e a soma dos ângulos externos.
Propriedades	Tarefa 8: Dobras e cortes	Investigar os polígonos obtidos e suas propriedades
	Tarefa 9: Construindo mosaicos	Investigar quais condições são necessárias para que os polígonos regulares ou não, possam formar mosaicos no plano, propiciando assim, o aprofundamento do conceito de ângulos, propriedades e relação entre lados, vértices e ângulos de um polígono.

Fonte: Elaborado pela autora

Com base no quadro 5, a análise de dados foi realizada de acordo com o agrupamento das tarefas, visto que as tarefas agrupadas geralmente tratam do mesmo conceito geométrico.

Para a realização das tarefas, a turma além de ser dividida em grupos, foi realizada a escolha do líder e do relator de cada grupo, que tiveram como função, respectivamente, coordenar as atividades e registrar as informações para posterior apresentação à classe. Essas funções foram variando entre os membros dos grupos, mesmo durante a realização das tarefas.

Para a realização da tarefa 1, os alunos foram divididos em grupo e receberam três dados e pedaços de canudos com medidas correspondendo aos valores das unidades do dado (1 a 6), sendo que cada unidade correspondeu a dois centímetros, ou seja, a unidade 1 corresponde a 2 cm, a unidade 2 corresponde a 4 cm, e assim sucessivamente. Cada uma das unidades continha três peças diferenciadas pelas cores. Também receberam algum tipo de linha (por exemplo, de pipa ou de anzol) e uma folha com instruções, detalhadas no quadro 6.

Quadro 6: Instruções da tarefa 1

Número de jogadas

Jogadas	Medidas dos canudos			Soma das medidas dos canudos menores	Medida do canudo maior	Formou triângulo?
1ª						
2ª						
3ª						

1. Analisando a soma da medida dos canudos menores, o que você observa em relação ao canudo de maior unidade de medida?
2. Quando os três canudos formam um triângulo? Registre suas conclusões.
3. Quando os três canudos não formam triângulo? Registre suas conclusões.
4. Então, podemos dizer que três segmentos de qualquer medida formam um triângulo? Por quê? Qual condição você deve observar para construir um triângulo?

Fonte: elaborado pela autora.

Cada aluno jogou os três dados simultaneamente, e, conforme, a unidade da face superior dos dados, pegou os canudos e tentou construir triângulos. As informações de cada rodada foram anotadas no espaço próprio. Após, os alunos discutiram e registraram suas conclusões referente aos itens 1 ao 4, conforme quadro 6.

Para a realização da tarefa 2, os alunos receberam canudos de diversos tamanhos, linha (tipo anzol ou pipa), transferidor, régua, etc. Eles construíram os polígonos, conforme a orientação descrita no quadro 7.

Quadro 7: Orientações da tarefa 2

1. Utilizando os pedaços de canudinhos e linhas, construam polígonos de três, quatro, cinco, seis e sete lados.
2. Meça seus lados e seus ângulos e anote no quadro 8.

Quadro 8: Medida dos lados e ângulos

Polígonos	Medidas dos lados	Medidas dos ângulos
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
heptágono		

3. Agora, experimentem movimentar os polígonos construídos. É possível movimentar os lados de todos os polígonos? Discuta com os colegas.
4. Meça novamente os lados e os ângulos dos polígonos após movimentá-los e anote o resultado no quadro 9.

Quadro 9: Medida dos lados e ângulos, após movimentação.

Polígonos	Medidas dos lados	Medidas dos ângulos
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		

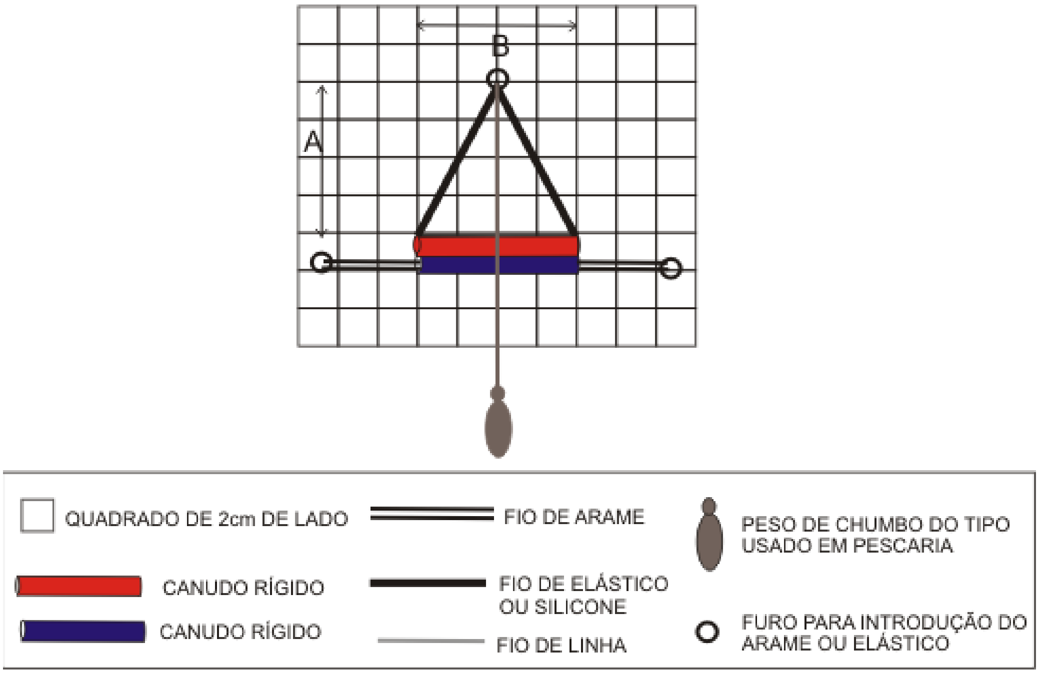
5. Observe as duas tabelas. O que você pode observar em relação à medida dos lados? E em relação à medida dos ângulos? Anote suas conclusões.
6. Existe algum polígono que você não conseguiu movimentar? Por quê?
7. E as medidas dos seus ângulos foram alteradas?
8. Escreva suas conclusões e apresente para a turma.

Fonte: elaborado pela autora.

A observação de quais polígonos se movimentam ou não, permitem ao aluno compreender as características que tornam um triângulo como uma figura rígida. Podemos destacar a invariância da medida dos ângulos, como característica principal.

A tarefa 3 foi desenvolvida e adaptada de Kaleff (2008), utilizando os artefatos modeladores de triângulos, conforme figura 3. A tarefa foi dividida em partes e cada uma evidenciou o estudo de algum conceito sobre triângulos.

Figura 3: Artefato modelador de triângulos



Fonte: (KALEFF, 2008, p. 90)

Primeiramente, foi construído o artefato modelador de triângulos proposto por Kaleff (2008), utilizando os seguintes materiais: folha de papelão, uma folha de papel tamanho A4 com traçado de malha quadriculada, canudos de plástico rígido, arame rígido, plástico adesivo, tesoura, um chumbinho (tipo de pescaria), elástico ou fio de silicone bem resistente e cola.

Os alunos manipularam o artefato construído, seguindo as orientações descritas no quadro 10. Nessa etapa, o registro das considerações dos alunos foi muito importante para a formulação de suas conjecturas e discussão em sala de aula.

Quadro 10: Orientações da tarefa 3

1. Utilizando artefato modelador de triângulos, empurre o par de canudos ao longo do arame e obtenha outras figuras na forma de triângulo.
2. As figuras triangulares obtidas tem a mesma forma? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
3. Agora, deixe o artefato em pé, perpendicularmente sobre a mesa, faça com que o chumbo funcione como um fio de prumo. Empurre o par de canudos para obter triângulos, quais sejam: que o fio divida-o em duas partes iguais, isto é, de maneira que se tenha o mesmo número de quadradinhos em ambos os lados da linha; que o fio coincida com o elástico que forma o lado triângulo; e que o fio fique na região externa do triângulo.
4. Agora, desenhe os triângulos em papel quadriculado. Usando a régua, meça os lados, a base e a altura de cada triângulo, colocando suas medidas no quadro 11, chamando o primeiro triângulo de Nº. 1, o segundo de Nº. 2 e o terceiro de Nº. 3. Considere como base o lado formado pelo par de canudos.

Quadro 11: Medidas observadas

Triângulo Nº.	Lado (canudo)	Lado	Lado	Altura
1				
2				
3				
4				
5				

5. O que você observa em relação à medida dos lados de cada triângulo? Existe alguma relação entre as medidas dos lados de cada triângulo? Qual?
6. Movimente o par de canudos anterior e repita o item 4, por mais duas vezes, formando triângulos diferentes dos anteriores. Chame-os de triângulos Nº 4 e 5 e complete a tabela.

7. Comparando a medida dos lados, as bases e as alturas de todos os triângulos o que você observa?
8. Usando o transferidor, meça os ângulos de cada um dos triângulos desenhados anteriormente e complete o quadro 12.

Quadro 12: Medidas dos ângulos

Triângulo Nº.	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo 3
1			
2			
3			
4			
5			

9. Comparando os ângulos de todos os triângulos o que você pode observar quanto às suas medidas? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
10. Agora, considerando cada quadradinho como unidade de medida, tente contar quantos quadrinhos ou parte destes, que compõem a região interna de cada triângulo desenhado.
11. Relacione as medidas indicadas por A e B, com a medida da base e da altura de cada triângulo, respectivamente.
12. Tente relacionar o número de quadradinhos que você encontrou com os valores de A e B. Discuta com os colegas sobre suas conclusões e anote-as.
13. O que você percebe em relação à medida da base e da altura dos triângulos? E em relação à área de cada triângulo, o que você observa? Discuta com os colegas.
14. Anote suas conclusões e apresente a turma.

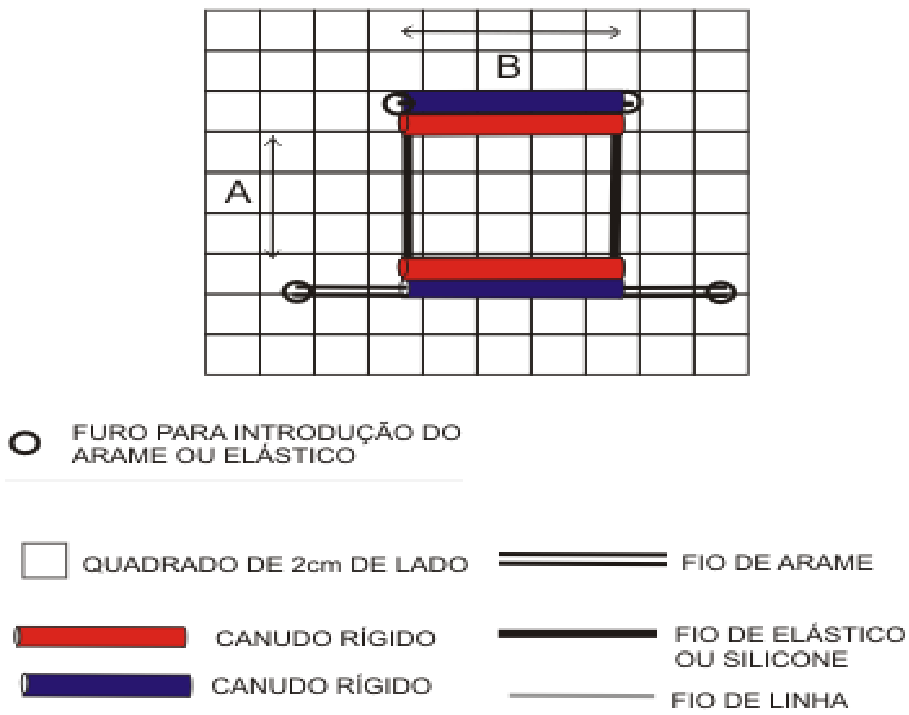
Fonte: adaptado de Kaleff (2008, p. 88-89)

A realização das três primeiras tarefas propiciou aos alunos a compreensão do conceito de triângulos e suas propriedades. As discussões em sala de aula foram riquíssimas e levantaram questões ainda não abordadas nas aulas de matemática, que serão analisadas posteriormente.

A tarefa 4 e 5 permitiu a discussão dos conceitos relacionados aos quadriláteros. A exploração e investigação possibilitaram a compreensão de alguns atributos relevantes (PROENÇA; PIROLA, 2009) para a conceituação de quadriláteros, bem como sua diferenciação.

Na tarefa 4 foi utilizado o artefato modelador de paralelogramos, construído com uma placa de papelão coberta com papel quadriculado e isolada com plástico autoadesivo, conforme figura 4. Sobre essa placa foram adaptados arame, inseridos em furos e dobrados no verso da placa, que servem como guias a pares de canudos de plásticos rígidos, e colados entre si. Por dentro de cada canudo sem arame, colocam-se elásticos finos ou fios de silicone, que são amarrados na parte de trás da placa de papelão.

Figura 4: Artefato modelador de paralelogramos



Fonte: (KALEFF, 2008, p.90).

Os alunos manipularam esse artefato e registraram suas conclusões conforme orientação da tarefa descrita no quadro 13.

Quadro 13: Orientações da tarefa 4

1. Movimente o par de canudos ao longo do arame do artefato. As figuras obtidas têm a mesma forma? Anote suas conclusões.
2. Movimente o par de canudos novamente de maneira que os lados (elásticos) das formas geométricas coincidam com as linhas da malha quadriculada. O que você observa? Anote suas conclusões.
3. Agora, desenhe as figuras geométricas obtidas em uma folha de papel quadriculado. Veja como os colegas fizeram.
4. Depois de desenhado a figura geométrica meça, com a régua, os seus lados e anote os valores no quadro 14. Depois, com o auxílio do transferidor, meça os ângulos internos de cada figura modelada e anote no quadro 15.

Quadro 14: Medida dos lados

Figura	Lado (canudo)	Lado (canudo)	Lado	Lado
1				
2				
3				
4				
5				

Quadro 15: Medida dos ângulos internos da figura geométrica modelada

Figura	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo 3	Ângulo 4
1				
2				
3				
4				
5				

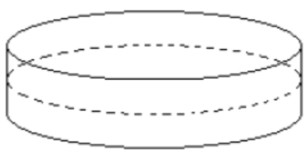
5. Comparando as medidas dos lados da figura geométrica modelada o que você observa? Discuta com os colegas.
6. Comparando a medida dos ângulos de todas as figuras o que você observa? Discuta com seus colegas.
7. Podemos afirmar que essa figura é um quadrilátero? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
8. O que você concluiu até o momento? Anote suas conclusões.
9. Você acha que os lados opostos são paralelos? Explique.
10. Podemos afirmar que essa figura é um paralelogramo? Justifique sua resposta e discuta com os colegas.
11. Agora, tente contar os quadradinhos que ocupam a região interior da figura geométrica. O que você observa?
12. Existe alguma relação entre a medida dos lados da figura e a quantidade de quadradinhos da sua região interna? Ou existe alguma relação entre a medida do lado dessa figura e a distância desse lado ao seu lado oposto?
13. Como você poderia registrar essa relação?
14. O que você observou quanto à área dos paralelogramos com mesmo valor de comprimento (base) e largura (altura)? Anote suas conclusões.

Fonte: adaptado de Kaleff (2008).

A tarefa 4 permitiu a discussão de conceitos relacionados a medida dos ângulos, lados e área dos quadriláteros chamados paralelogramos.

Para a realização tarefa 5 foi utilizado papel, cola e tesoura. Primeiramente, os alunos cortaram algumas tiras de papel com aproximadamente 30 cm de comprimento e 4 cm de largura cada uma e marcadas ao meio e depois colaram as tiras formando um anel comum de papel, conforme figura 5.

Figura 5: Anel formado a partir das tiras de papel, coladas nas extremidades.



Fonte: (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p.44)

Após a preparação das tiras de papel, os alunos seguiram as orientações e realizaram a tarefa 5, conforme quadro 16.

Quadro 16: Orientações da tarefa 5

1. O que acontece quando cortamos o anel ao meio. Corte e confira o resultado. O que você observou?
2. Agora, você vai colar os dois anéis iguais ao primeiro, um perpendicular ao outro, como indicado na figura 3. Em seguida, recorte ao meio os dois anéis colados, como foi feito no item 1. O que aconteceu? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
3. Agora, pegue dois novos anéis. Que modificações devem ser feitas no tamanho dos anéis ou na forma de colar as fitas para que o resultado seja um losango e não um quadrado? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
4. Que modificações devem ser feitas no tamanho dos anéis ou na forma de colar as fitas para que o resultado seja um retângulo e não um quadrado? Discuta com os colegas.
5. Como devem ser os anéis, e como colá-los para que o resultado seja um paralelogramo (não retângulo)? Discuta com os colegas.
6. Observando as figuras formadas, o que você conclui? Escreva suas conclusões.
7. O que acontece se colar três anéis de mesmo tamanho, cada um perpendicular ao seguinte e cortar os três ao meio? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
8. O que acontece se colar três anéis de tamanhos diferentes, dispostos como no item 7? Discuta com os colegas e anote os resultados.
9. O que acontece se colar três anéis iguais inclinados um em relação ao outro? Verifique o resultado e anote suas conclusões.
10. Cole os anéis de uma forma diferente das anteriores e observe o resultado. Anote suas conclusões.
11. Após observar cada figura formada, descreva suas conclusões.

Fonte: adaptado de Rêgo, Rêgo e Vieira (2012).

Os alunos investigaram cada item da tabela, registrando suas conclusões.

Resumidamente, as duas tarefas do agrupamento de discute conceitos de polígonos possibilitaram a compreensão do conceito de quadriláteros de maneira generalizada e também de quadriláteros específicos, como os paralelogramos.

Para a realização da tarefa 6 foi necessário o geoplano quadrado, elásticos coloridos, papel de malha pontilhada que imita um geoplano de papel, lápis, borracha, régua, etc. A tarefa foi desenvolvida de acordo com as orientações da figura 17.

Quadro 17: Orientações da tarefa 6

1. Utilizando o geoplano, você irá construir as formas geométricas solicitadas. Imagine que você irá decorar o pátio de sua escola para uma festa junina. Para pendurar as bandeirinhas de um canto a outro do pátio, os organizadores da festa decidiram que:

   1º) nenhuma corda pode ligar cantos vizinhos;

   2º) um mesmo par de cantos não pode ser ligado por mais de uma corda.

   Se a escola tivesse um pátio quadrado, quantas cordas seriam penduradas? E se a escola tivesse um pátio em forma pentagonal? E se fosse um pátio hexagonal? E se fosse um pátio octogonal? E se fosse triangular? Qual a forma, com menor número de lados, que permitiria pendurar cordas? Existe alguma forma que não permitiu pendurar cordas? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

2. Usando geoplano em madeira e folha com malha pontilhada, construa outros polígonos e trace suas diagonais e complete a quadro 18.

Quadro 18: Diagonais de um polígono.

Número de lados	Diagonais traçadas a partir de um vértice	Número total de diagonais traçadas a partir de cada vértice	Número total de diagonais distintas do polígono
3			
4			
5			
6			
7			

8			
9			
10			
11			
12			
N			

3. Observando o quadro 18, existe alguma relação entre o número de lados e o número de diagonais? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.

Fonte: adaptada de Bairral (2004, p. 32).

A tarefa 7 permitiu o estudo dos ângulos internos e externos de um polígono, utilizando a exploração-investigação no processo de aprendizagem desse conceito. Para a realização da tarefa 7 foi necessário folha de papel em malha pontilhada, régua, lápis, transferidor e cola. Em seguida, foram seguindo as orientações apresentadas no quadro 19, discutindo e registrando suas conclusões.

Quadro 19: Orientações da tarefa 7

1. Construa um triângulo na folha de malha pontilhada e marque seus ângulos internos. Depois recorte o triângulo e o divida-o em 3 partes, a partir de seus lado, de modo que os seus ângulos internos permaneçam inalterados. Em seguida, trace uma reta sobre uma folha de papel e tente montar uma nova figura, unindo os ângulos internos do triângulo, de modo que eles fiquem adjacentes. O que você observou?
2. Meça com o transferidor o ângulo formado pelos três ângulos de um triângulo e anote no quadro 20.
3. Agora, construa um quadrilátero e faça o mesmo procedimento do item 1, porém dividindo-o em 4 partes. O que você observou?
4. Meça com o transferidor o ângulo formado pelos ângulos internos do quadrilátero. Anote o resultado no quadro 20.

5. Desenhe o mesmo quadrilátero, fixe um vértice e trace todas as diagonais que saem desse vértice. Quais figuras se formaram? Qual a relação do ângulo medido no item 4 e os ângulos das figuras somadas.
6. Desenhe um pentágono, fixe o vértice e trace todas as diagonais que saem desse vértice. Anote o resultado do quadro 20.
7. Faça o mesmo procedimento do item 6 para os hexágonos, heptágonos e octógonos.
8. Analise o quadro 20. Existe alguma relação entre o número de lados e a soma dos ângulos internos do polígono? Discuta com os colegas.

Quadro 20: Soma dos ângulos internos de um polígono.

Polígonos	Nº de lados	Nº de ângulos	Nº de triângulos	Soma dos ângulos internos
Triângulo				
Quadrilátero				
Pentágono				

9. E se o polígono tiver n lados como poderíamos determinar a soma de seus ângulos internos? Escreva uma relação para tal. Discuta com os colegas suas conclusões.
10. Agora, desenhe um quadrilátero numa folha de malha pontilhada. Construa os ângulos externos desse quadrilátero. Lembre-se que o ângulo externo é formado com o lado do quadrilátero e o prolongamento do outro lado. Marque esses ângulos. Depois, recorte os ângulos externos e coloque um perto do outro, formando uma circunferência.
11. Utilizando o transferidor, meça o ângulo formado e anote no quadro 21.
12. Faça o mesmo procedimento do item 10 e 11, para o pentágono, hexágono e heptágono. O que você observou? Discuta com os colegas.

Quadro 21: Soma dos ângulos externos do polígono.

Polígonos	Nº de lados	Nº de ângulos externos	Soma dos ângulos externos
Quadrilátero			
Pentágono			

Hexágono			
Heptágono			

13. Utilizando os resultados do quadro 20, seria possível determinar a medida do ângulo interno do polígono? Descreva o que você pensou e discuta com os colegas.
14. Utilizando os resultados do quadro 21, seria possível determinar a medida do ângulo externo do polígono? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

Fonte: elaborado pela autora.

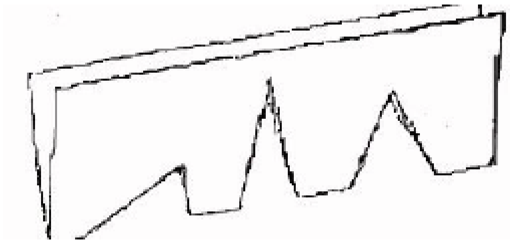
A tarefa 8 foi retirada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), cujo objetivo é investigar os polígonos obtidos e suas propriedades, por meio de dobras e cortes numa folha de papel. Para a realização dessa tarefa foi necessário várias folhas de papel, tesoura, lápis e régua.

A partir de dobras e cortes os alunos puderam observar as figuras formadas e de que maneira teriam que dobrar e cortar a folha para obter quadrado, triângulo equilátero, triângulo isósceles, etc. O quadro 22 traz as orientações para a realização dessa tarefa.

Quadro 22: Orientações da tarefa 8

1. Uma dobragem e dois cortes.

a) Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue os pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm.



b) Com apenas dois cortes, e se quiser obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes deve fazer? Desenhe o esboço que mostre os cortes que

fez e comente as suas descobertas.
2. Mais dobragens e um só corte.
a) Agora você vai investigar o que acontece quando se faz mais do que uma dobra mantendo ajustados os lados da folha de papel.
b) Com duas dobras e um corte, que tipo de figura obtém? De que maneira consegue obter um quadrado?
c) Agora com três dobras, experimente fazer a mesma investigação. De que maneira consegue obter um quadrado?
d) E com quatro dobras?

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 72-74)

Entre todas as tarefas, a tarefa 8 foi a que os alunos tiveram mais dificuldade para realizar. Talvez isso possa ser justificado pela característica investigativa desta tarefa, apontada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). A presença da professora-investigadora foi solicitada frequentemente e percebeu-se a insegurança dos alunos diante das suas conclusões.

A tarefa 9 foi a última tarefa da sequência didática proposta. Para sua realização foi necessário folhas impressas com vários polígonos regulares e irregulares, com números de lados diferentes, tesoura, transferidor, régua, folha com malha pontilhada, lápis e borracha. O primeiro passo foi explicar o que é um mosaico, através de diversos exemplos. Em seguida, os alunos seguiram as orientações apontadas no quadro 23.

Quadro 23: Orientações da tarefa 9

1. Entregar aos alunos diversos polígonos coloridos para recortar.
a) Dentre os polígonos que vocês recortaram, quais polígonos regulares e congruentes entre si pavimentam perfeitamente o plano? Discuta com os colegas.
b) Existe uma relação entre os ângulos internos e os mosaicos construídos? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
c) O que acontece se colocar mais um polígono do mesmo tipo, de modo que seus lados

se encaixem perfeitamente e seus vértices coincidam? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

d) E se combinar polígonos regulares diferentes, o que você percebe? Discuta com os colegas.

e) Agora, construa os mosaicos dos itens anteriores na folha de papel pontilhado, meça os ângulos e anote suas conclusões.

f) Agora utilizando polígonos irregulares, tente construir mosaicos. Existe uma relação entre lados e os ângulos? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

Fonte: elaborado pela própria autora.

A primeira etapa da tarefa 9 possibilitou aos alunos verificarem quais condições necessários para que possamos formar mosaicos com polígonos regulares. Eles perceberam que nem todos os polígonos cobrem completamente o plano, sem deixar espaço entre os polígonos.

Apresentadas as tarefas nessa seção, nas próximas subseções, apresentaremos e analisaremos os dados, respeitando os dois momentos, ora citados, um foco no aluno e outro na prática da professora-pesquisadora. Também ressaltamos que os títulos das subseções são algumas conclusões dos alunos que surgiram durante a discussão final de cada tarefa.

5.1.1. “Nem todas as medidas juntas formam um triângulo”

O primeiro agrupamento das tarefas representadas no quadro 5 permitiu o estudo dos triângulos. Na tarefa 1, os alunos, jogando os dados, pegavam os canudinhos que correspondiam aos números da face do dado, sendo que cada unidade correspondia a 2 cm. Unindo os canudinhos com linha, observavam as medidas dos canudos e se as mesmas formavam ou não um triângulo, conforme tarefa apresentada no quadro 6.

A tarefa 1 foi interessante, pois a primeira frase mencionada pelos grupos, na discussão final foi que “nem todas as medidas juntas formam um triângulo”. Analisando essa conclusão dos grupos, percebemos que a tarefa 1 possibilitou a observação que para formar um triângulo não adianta ter apenas três pedaços de canudos. É necessário que a medida desses canudos tenha uma relação entre elas, caso contrário, não conseguimos formar triângulo.

A socialização das conclusões dos grupos foi muito importante para que os alunos entendessem a condição de existência de um triângulo, pois foi nessa discussão final que os alunos compreenderam que a soma da medida de dois lados tem que ser maior que a medida de um terceiro lado. Essa situação comprova que a interação entre os alunos é um âmbito de reflexão que pode gerar grandes aprendizagens (MURARI; PEREZ, 2002).

Para a exploração e discussão dessa tarefa foram necessárias duas aulas de 50 minutos cada. Por ser a primeira tarefa exploratório-investigativa, os alunos solicitaram muitas vezes a presença da professora-pesquisadora para tirar dúvidas. Percebemos muita insegurança, então, foi necessária a presença assídua nos grupos, fazendo questionamentos que os ajudassem a entender e a investigar as regularidades.

Após preencher os dados com os resultados das jogadas, os grupos deveriam discutir e anotar suas conclusões, conforme os itens 1 a 4, do quadro 6. Transcrevemos no quadro 7, algumas considerações dos grupos que foram discutidas, em sala de aula, quando foi perguntado se três segmentos de qualquer medida formam um triângulo.

Quadro 24: Considerações dos grupos

Pergunta: Então, podemos dizer que três segmentos de qualquer medida formam um triângulo? Por quê? Qual condição você deve observar para construir um triângulo?   Grupo 1: Não. Porque nem sempre são medidas iguais e diferentes. Porque tem que ter três lados, a soma das duas medidas tem que ser maior que a terceira.   Grupo 2: Não. Porque se forem de medidas diferentes, não tem triângulo. Que dois lados têm que ser da mesma medida ou todos os lados da mesma medida.   Grupo 3: Não. Porque nem todas as medidas juntas formam um triângulo. Quando formam o triângulo os números são diferentes, sendo menor do que o outro.   Grupo 4: Não. Porque a soma dos canudos menores tem que ser maior que a base, para formar um triângulo.

Grupo 5: Não. Porque não são do mesmo tamanho, que os canudos têm de ser de mesma medida. Grupo 6: Não. Que as laterais sejam iguais ou as três sejam iguais. Grupo 7: Não. Alguns dão triângulo - tipo 2, 4, 4 e 8, 8, 6 dá triângulo. Já 12, 6, 6 não dá triângulo. A coluna das somas das medidas dos canudos menores tem que ser maior que a medida do canudo maior.

Fonte: dados da pesquisa

As conclusões dos grupos apresentadas no quadro 7 foram socializadas para toda a turma. No momento da socialização cada grupo expôs suas conclusões e as mesmas foram discutidas por todos, com a orientação da professora-pesquisadora. É importante destacar que esse momento permitiu "uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 40).

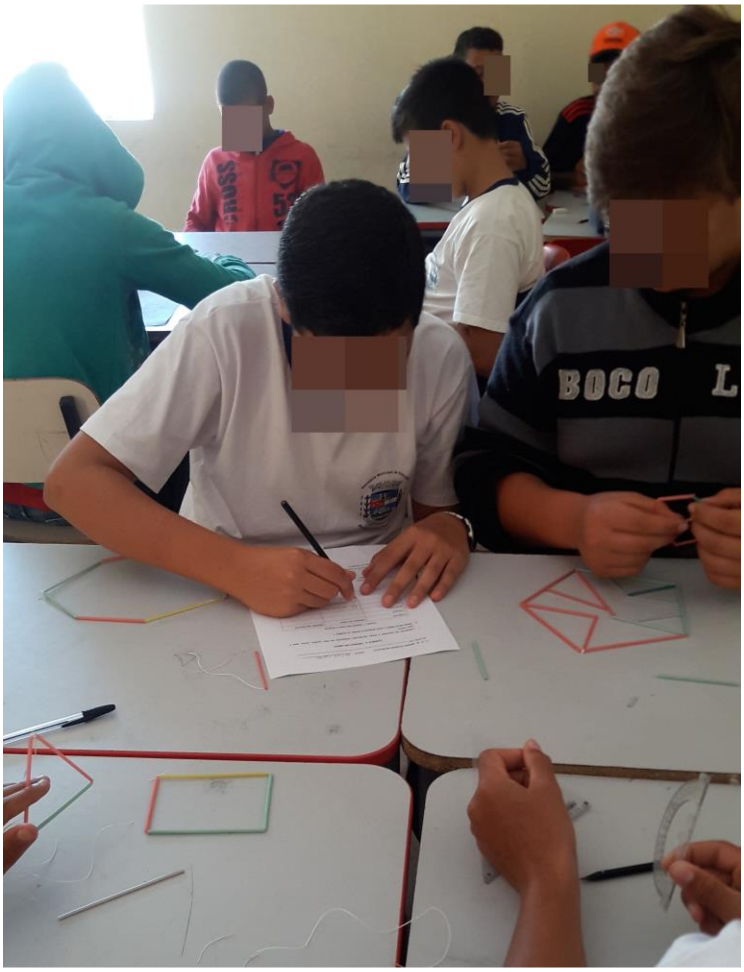
Observando as conclusões dos grupos 2, 3, 5 e 6, podemos notar que eles perceberam que não conseguimos construir triângulos com segmentos de quaisquer medidas, mas não conseguiram explicar com clareza o motivo pelo qual isso acontece. Isso pode ser notado na resposta do grupo 2 "porque se forem de medidas diferentes, não tem triângulo. Que dois lados têm que ser da mesma medida ou todos os lados da mesma medida." Na resposta desse grupo, percebemos que eles consideraram que formam triângulos somente quando se tratar de triângulos isósceles ou equilátero.

Então, durante as discussões, procuramos utilizar exemplos diferentes de triângulos construídos por outros grupos, e levamos os demais alunos a perceberem que existe uma relação entre as medidas dos lados do triângulo e que se essa relação não for válida, não podemos formar triângulos. Fato este que já tinha sido percebido pelos grupos 1, 4 e 7.

O momento final da tarefa exploratório-investigativa foi muito importante para que todos os alunos compreendessem a condição de existência de um triângulo. Apesar da tarefa aparentemente ser simples, ela propiciou uma situação desafiadora, encorajando os alunos a criar, a experimentar, a refletir e a estabelecer estratégias para justificar suas considerações (MURARI; PEREZ, 2002, p. 3).

A próxima tarefa desenvolvida teve como objetivo identificar a propriedade de rigidez do triângulo, por meio da observação das regularidades das medidas dos ângulos de vários polígonos. Os alunos investigaram em quais polígonos os lados se movimentavam e, como consequência, a medida dos ângulos também se alterava.

Figura 6: Tarefa 2 sendo realizada pelos alunos.



Fonte: Registro fotográfico da realização da tarefa (dados da pesquisa).

Na figura 6, temos a imagem de um grupo de alunos realizando a Tarefa 2. Durante a realização dessa tarefa, observamos que os alunos não tinham habilidade em manusear o transferidor para medir os ângulos dos polígonos antes e após a movimentação. Com isso algumas perguntas surgiram como: “Professora como usa isso aqui?” “Professora como mede esse ângulo?”. Observando essa falta de habilidade foi utilizada uma aula de 50 minutos para ensinar os alunos a usarem o transferidor, mas enquanto os orientava a tarefa ia sendo realizada. Por outro lado, o material utilizado – canudos e linhas – facilitou a construção dos polígonos, mas não ajudou quando foi preciso medir os ângulos com o transferidor, pois os canudos ligados pela linha se movimentavam facilmente.

Assim, os ângulos eram medidos, mas não existiu a possibilidade de verificar a soma dos ângulos internos de um polígono, fato esse que seria abordado posteriormente na Tarefa 7.

Muitas discussões e questionamentos dos alunos chamaram a atenção, mas é transcrito a seguir um trecho de um diálogo de um grupo quando foi necessária a intervenção da professora-pesquisadora.

Quadro 25: Transcrição do trecho do diálogo do grupo de alunos durante a realização da Tarefa 2

L1. João: Professora como usa isso aqui? L2. Prof.ª: Como é que mede o ângulo? L3. Fulano de tal: (risos) Pega o transferidor. L4. Prof.ª: Vamos medir os ângulos internos do triângulo. Você coloca o centro do transferidor onde se encontram os dois canudinhos. Onde está o grau zero, você coloca sobre um dos canudinhos e a meia lua do transferidor fica para a parte interna do triângulo. Você começa a contar do zero, 0, 10, 20, 30, ... Quanto mede esse ângulo? L5. Fulano de tal: 60º. L6. Prof.ª: Agora meça o outro ângulo. Qual a medida? L7. Francis: 60º. L8. Prof.ª: E o outro ângulo? L9. João: 60º. L10. Prof.ª: Agora, pegue a outra figura. L11. Fulano de tal: Essa figura já tem quatro lados, a gente já sabe que é um quadrado já. L12. Prof.ª: Tem certeza? L13. Fulano de tal: Ué, tem quatro lados já é um quadrado! L14. João: Tem que saber o nome? L15. Prof.ª Por que você tem certeza que é um quadrado? Toda figura que tem quatro lados é um quadrado? L16. Fulano de tal: A gente sabe que é um quadrado, tem quatro lados. L17: Prof.ª: o que que te garante que é um quadrado? L18: Fulano de tal: Ué, porque eu mesmo montei a figura. L19: Prof.ª: Ah, então você quis fazer um quadrado! L20: Fulano de tal: É. Mas essa aqui não! (apontou para outro polígono) Essa eu tenho que medir. Me empresta uma folha aí, João? L21: Prof.ª: Mas meça os ângulos dessa figura de quatro lados ...

Fonte: dados da pesquisa – registros gravados em áudio e vídeo.

Esse diálogo foi importante, pois só confirmou o que já havia notado quanto a uma figura de quatro lados: eles sempre diziam que era um quadrado, não importando se os lados eram diferentes ou não. Isso sugere a ausência do conhecimento dos atributos definidores para a construção do conceito do que seja um quadrado, um losango ou qualquer polígono. Proença (2008) afirma que essa situação pode ser causada por erros de generalização e problemas na formação conceitual. Isso pode ser notado quando o aluno afirma que o polígono construído é um quadrado porque tem quatro lados de mesma medida.

Após essa discussão com o grupo e ter solicitado que os alunos fizessem a medição dos ângulos da figura de quatro lados e dos canudos, eles concluíram que os ângulos não mediam 90 graus, apesar de todos os canudos terem a mesma medida, e desta forma, aquele quadrilátero não poderia ser um quadrado, visto que os ângulos internos não eram retos.

Essa dificuldade em compreender um conceito geométrico pode estar relacionada a falta de “um ensino que priorize o trabalho com os polígonos a partir de seus atributos definidores” (PROENÇA; PIROLA, 2009, p. 40). O trecho do diálogo do quadro 25, L13, quando o aluno diz: “Ué, tem quatro lados já é um quadrado!”, evidencia que o aluno não tem a compreensão que para ser quadrado é necessário os seguintes atributos relevantes: ter quatro lados congruentes e todos os ângulos internos medirem 90 graus.

Procuramos questionar os alunos explicitando que é muito importante identificar as características específicas daquela figura e ter quatro lados não garante que a figura seja um quadrado. Isso foi realizado por meio de exemplos e não exemplos, fazendo com que eles comparassem as figuras e suas medidas, formulando suas conjecturas. Por fim, esse grupo compreendeu que nem toda figura que possui quatro lados pode ser chamada de quadrado. Isso vai depender da medida dos ângulos e dos lados da figura e que o pode ser dito que é um quadrilátero.

Com a tarefa 2, queríamos apenas discutir a propriedade de rigidez de um triângulo, contudo percebemos que durante sua realização, outras questões importantes foram surgindo, permitindo que conceitos relativos a diversos polígonos fossem investigados e discutidos na turma.

A pergunta inicial da tarefa 2: “Rígido ou não?” foi respondida com êxito. Observando as regularidades e variações das medidas dos ângulos dos polígonos, os alunos conseguiram notar que o único polígono que as medidas dos ângulos permaneceram invariantes foi o triângulo, independente da medida dos seus lados.

A tarefa 3 teve como objetivo investigar e medir dimensões, e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação as variações de triângulos formados, por meio da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.

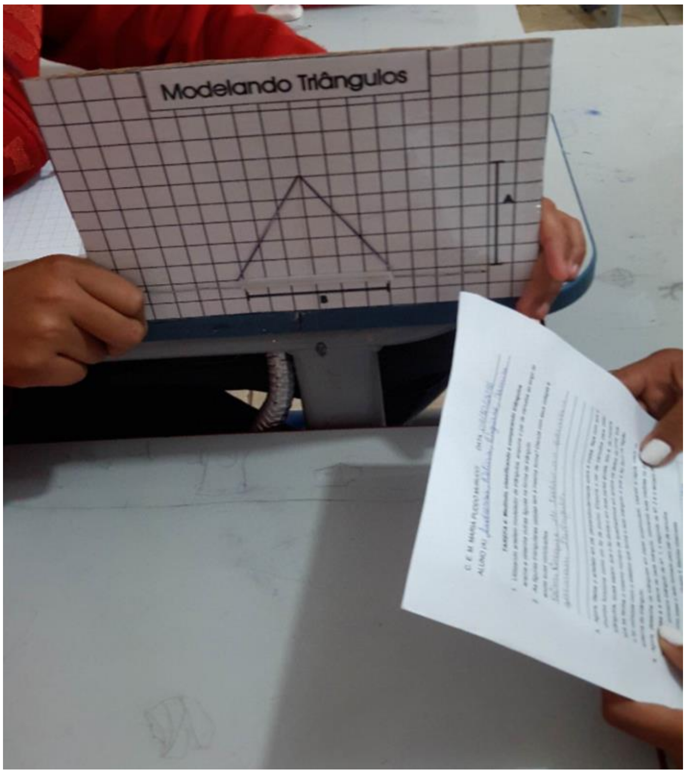
Essa tarefa foi uma adaptação da tarefa apresentada por Kaleff (2008), utilizando os chamados artefatos modeladores de triângulos. Esses artefatos permitiram, ao serem manipulados, que os alunos formassem vários triângulos.

A tarefa foi dividida em dois momentos: no primeiro, os alunos investigaram os triângulos formados a partir da movimentação do par de canudos sobre o arame, reproduzindo os triângulos formados em malha quadriculada. Em seguida, tinham que medir os lados e ângulos, anotando os resultados na folha com as instruções da tarefa. O segundo momento foi destinado ao estudo da área dos triângulos, em que por meio da contagem dos quadradinhos, os alunos investigaram a relação entre as medidas da base e da altura e a área – quantidade de quadradinhos – que ocupavam a região interna do triângulo.

Foram necessárias três aulas de 50 minutos cada para a realização do primeiro momento da tarefa e 2 aulas de 50 minutos para o segundo momento. Na figura 3 podemos ver um modelo desse artefato.

A manipulação do artefato modelador permitiu aos alunos observarem as diversas figuras triangulares formadas. O ato de movimentar o par de canudos proporcionou a observação de medidas variantes e invariantes e de algumas propriedades de triângulos.

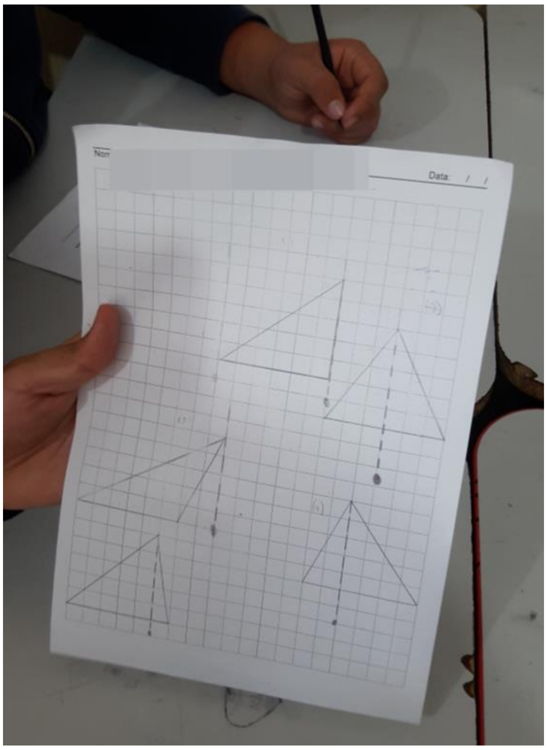
Figura 7: Registro fotográfico da realização da tarefa 3.



Fonte: dados da pesquisa

A presença de um “prumo” feito com linha e chumbo de anzol para pesca acrescentou uma possiblidade para os alunos observarem a posição da altura em relação à base do triângulo, pois ora esse “prumo” coincidia com o lado do triângulo, ora estava na região externa ou na região interna, e, em um momento específico, dividia o triângulo ao meio. O registro dos triângulos formados em malha quadriculada pode exemplificar a situação descrita anteriormente. Na figura 8 está representada uma malha quadriculada com os triângulos.

Figura 8: Registro fotográfico dos triângulos em malha quadriculada



Fonte: dados da pesquisa

Observando a figura 8, notamos que os cinco triângulos desenhados tem suas alturas em posição diferentes. A partir do desenho, os alunos mediram os ângulos, os lados e a altura de cada triângulo para posterior investigação. O uso do material didático manipulativo foi uma mola propulsora para o desencadear da tarefa. No quadro 26 transcrevemos os registros escritos dos grupos referentes a dois questionamentos existentes na tarefa.

Quadro 26: Transcrição das respostas dos grupos referente a dois itens da tarefa 3

Pergunta 1: Comparando a medida dos lados, as bases e as alturas de todos os triângulos o que você observa?
Grupo 1: Que a base foi sempre 6 cm e a altura são todas 5 cm, e os lados são diferentes, pois eles se movem.
Grupo 2: A base é sempre 6 e a altura é 5.
Grupo 3: Que a base e altura são sempre as mesmas.
Grupo 4: A base é igual em todas as figuras e a altura também.
Grupo 5: Que os lados nem sempre são iguais, as bases e a altura são diferentes.

Grupo 6: Que a altura será a mesma.
Pergunta 2: Existe alguma relação entre as medidas dos lados dos triângulos e as medidas dos seus ângulos?
Grupo 1: Não.
Grupo 2: Os ângulos maiores estão sempre de frente para os lados maiores.
Grupo 3: Não.
Grupo 4: Não.
Grupo 5: Sim.
Grupo 6: Sim.

Fonte: registros escritos dos alunos

Observando as respostas dos alunos no quadro 26, percebemos que os grupos não se preocuparam em justificar suas conclusões. Muitas respostas foram curtas, o que dificultou consolidar a relevância dessa tarefa. Porém, como em toda tarefa, a discussão final das conclusões foi uma etapa importante da investigação, mesmo quando alguns grupos tiveram dificuldade para justificar suas respostas. Como sempre a socialização das conclusões contribui para o processo de ensino e aprendizagem.

Analisando as respostas dos grupos à primeira pergunta, notamos que os alunos perceberam que a base e a altura não variavam independente da figura triangular formada. Porém, o grupo 1 ainda observou que os lados tinham medidas diferentes pois se moviam, e quando foram questionados, falaram que existem triângulos diferentes, com a medida da base e altura iguais.

Quanto a segunda pergunta, apenas o grupo 2 escreveu uma relação entre as medidas dos lados e dos ângulos, destacando uma propriedade dos triângulos. Os demais grupos não registraram as justificativas das respostas, e quando indagados, tiveram dificuldades em descrever suas observações. Foi frustrante, pois já tinha percebido uma adaptação da turma para esse tipo de tarefa exploratório-investigativa.

O segundo momento da tarefa 3 possibilitou a “modelagem do cálculo de áreas” do triângulo (KALLEF, 2012, p. 124). Nesse momento, foi solicitado que os alunos fizessem a contagem dos quadradinhos que cobriam a região interna de cada triângulo, investigando sua relação com as medidas da base e da altura. No quadro 27, apresentamos a conclusão dos alunos sobre o cálculo da área dos triângulos.

Quadro 27: Transcrição do registro dos grupos de alunos sobre área dos triângulos.

Investigação: Tente relacionar o número de quadradinhos que você encontrou com as medidas de A e B.
Grupo1: A metade do produto de A e B é igual a soma do número de quadradinho interno do triângulo.
Grupo 2: Quando formamos um retângulo desse triângulo encontramos o dobro do número de quadrados. A base vezes a altura do retângulo dividida por dois dá área do triângulo.
Grupo 3: O produto da base e a altura dividido por dois é igual a área do triângulo.
Grupo 4: A base vezes a altura é igual a 30 dividido por 2 é 15. (não encontramos o valor exato). O produto de A x B, dividido por 2 é igual a soma dos quadradinhos internos de um triângulo desenhado.
Grupo 5: O produto de A x B dividido por 2 dá a quantidade de quadradinho.
Grupo 6: Que 35/2 é igual a 17,5.

Fonte: Registros escritos dos grupos

Para investigar a segunda parte da tarefa 3, os grupos de alunos foram orientados a chamar a medida de A de base e B de altura do triângulo, por isso, alguns grupos utilizaram o nome base e altura nas respostas.

Percebemos que todos os grupos fizeram uma relação entre as medidas de A e B com a quantidade de quadradinhos do interior dos triângulos desenhados. O grupo 2 fez um retângulo, a partir do triângulo retângulo desenhado, relacionaram a área do triângulo como a metade dos quadradinhos encontrados no retângulo construído. Quando foram indagados do porquê desenharam um retângulo, disseram que ficou mais fácil para contar os quadradinhos, pois todos ficavam inteiros. Foi uma boa estratégia do grupo e percebemos que eles fizeram para os outros triângulos também, mas só que já não formavam retângulos diretamente. Então, eles foram decompondo e compondo a figura até formar o retângulo para facilitar a contagem.

Após o término das discussões em grupo, as anotações de cada um foram apresentadas para a turma. Realizamos a discussão das conclusões propiciando a observação de conceitos ora considerados importantes para o estudo de triângulos. Com o primeiro agrupamento de tarefas foi possível o estudo de algumas propriedades dos triângulos, de maneira exploratório-investigativa, possibilitando a discussão de conceitos, num linguajar próprio dos alunos, observando que realmente algo era apreendido.

Ressaltamos a importância do material didático manipulável para a realização das tarefas. A utilização dos mesmos permitiu a visualização, a manipulação e a reflexão sobre os conceitos abordados nas tarefas.

5.1.2. "As figuras são quadriláteros porque possuem quatro lados"

As tarefas discutidas nessa subseção tratam do estudo dos quadriláteros e algumas propriedades. O subtítulo dessa seção é uma frase que foi discutida e compartilhada em sala de aula, durante a socialização das conclusões pela turma.

As discussões realizadas no final de cada tarefa consolidaram para os alunos que as figuras formadas tinham aparências diferentes, mas no final "as figuras são quadriláteros porque possuem quatro lados". Podemos notar que essa frase possui um atributo relevante na definição de quadrilátero, que é uma figura de quatro lados.

Para chegar a essa conclusão, os alunos realizaram a exploração-investigação das tarefas 4 e 5, que tratavam do estudo dos paralelogramos e suas propriedades.

Primeiramente, apresentaremos alguns dados que foram importantes para a formação dos conceitos geométricos abordados na tarefa 4, e, em seguida, destacaremos alguns trechos da tarefa 5.

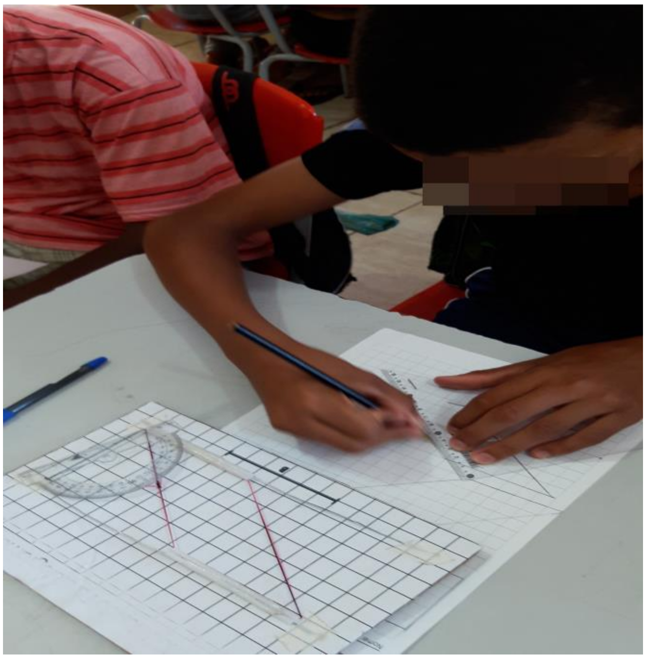
A tarefa 4 tem como objetivos propiciar aos alunos a construção de significados para o conceito de paralelogramos, bem como identificar suas propriedades principais por meio da observação dos atributos relevantes; investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação as variações de paralelogramos formados, a partir da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.

Para a realização da tarefa, utilizamos o artefato modelador de paralelogramos proposto por Kallef (2008). Esse material didático manipulável permitiu aos alunos observarem algumas propriedades dos paralelogramos, que ajudaram a diferenciar esses quadriláteros dos demais. Proença e Pirola (2009) afirmam que os materiais manipulativos aliados ao envolvimento com tarefas que possibilitem a exploração de semelhanças e diferenças entre as figuras, envolvem e podem contribuir para aquisição de conceitos geométricos.

A possibilidade de visualizar as formas geométricas e analisar as regularidades de algumas características foi facilitada pelo uso do artefato modelador de paralelogramos, proposto por Kaleff (2008). Na verdade, o artefato foi de fato facilitador da observação dessas regularidades, permitindo aos alunos identificarem algumas propriedades dos paralelogramos, sem se preocupar com a memorização das mesmas.

Além disso, os alunos reproduziram, em malha quadriculada, os paralelogramos formados ao movimentarem o par de canudos, para posterior, medição dos lados e ângulos de cada figura formada, conforme apresentado na figura 9. No momento da reprodução desses paralelogramos, os alunos tinham que ter muita atenção, pois precisavam reproduzir figuras semelhantes as geradas pela manipulação do artefato.

Figura 9: Registro fotográfico da tarefa 4



Fonte: dados da pesquisa

Durante a realização da tarefa 4, observamos que os alunos já estavam mais organizados e se identificando com tarefas exploratório-investigativas, pois os grupos dividiram as responsabilidades de cada membro rapidamente e executaram as orientações sem precisar da ajuda da professora-pesquisadora.

A tarefa 4 foi dividida em duas partes: a primeira destinada ao estudo dos paralelogramos e suas propriedades e a segunda, referente ao estudo da área dos paralelogramos. Foram necessárias três aulas de 50 minutos cada, sendo que duas aulas para a primeira parte e uma aula para a segunda parte.

O desenvolvimento da investigação propiciou a aprendizagem de conceitos, como: congruência de ângulos e lados do paralelogramo, paralelismo, soma dos ângulos internos e área dos paralelogramos. No quadro 28, apresentamos os registros de algumas considerações dos grupos referentes às perguntas dos itens 5, 6, 7 e 8 da tarefa 4 descritos no quadro 13, que ressaltam as propriedades dos paralelogramos.

Quadro 28: Considerações dos grupos

Item 5: Comparando as medidas dos lados da figura modelada o que você observa? Grupo 1: Os lados opostos são congruentes. Grupo 2: Que a soma de todos os ângulos é igual a 360°. Grupo 3: Todos têm quatro lados. Grupo 4: Sempre um lado é igual ao outro. Grupo 5: Que as medidas dos lados não são iguais. Grupo 6: Tem lados que se coincidem. Grupo 7: Que o tanto que você muda vão surgindo outras figuras. Item 6: Comparando as medidas dos ângulos de todas as figuras o que você observa? Grupo 1: Os ângulos opostos são congruentes e a medida deles é equivalente a 360º. Grupo 2: Algumas figuras as medidas dos ângulos são iguais. Grupo 3: Que os ângulos opostos são iguais. Grupo 4: Os ângulos opostos são iguais. Grupo 5: Que todos os ângulos não são iguais, a soma 360º. Grupo 6: Que os ângulos variam de acordo com a figura. Grupo 7: Que se a figura mudar sempre, vai mudar os ângulos.

Item 7: Podemos afirmar que essa figura é um quadrilátero?
Grupo 1: Sim, porque tem 4 lados e a soma dos ângulos é 360º.
Grupo 2: Sim, as figuras são quadriláteros porque possuem 4 lados.
Grupo 3: Sim, porque eles têm 4 lados.
Grupo 4: Sim, porque todas as figuras têm 360º e tem sempre 4 lados.
Grupo 5: Sim, porque tem quatro lados e que a soma dos ângulos internos é 360º.
Grupo 6: Sim, pois todas as figuras têm 4 lados.
Grupo 7: Sim, porque todas as figuras que nós fizemos tinham 4 lados.
Item 8: Como podemos verificar se os lados opostos são paralelos ou não? Explique.
Grupo 1: Tem que vê se eles tem a mesma distância de um para o outro e os lados são sempre paralelos.
Grupo 2: Usando o transferidor.
Grupo 3: Porque as medidas dos ângulos são iguais.
Grupo 4: São paralelas porque a distância dos lados é sempre a mesma, nunca vão se encontrar.
Grupo 5: Que os lados nunca se encontram.
Grupo 6: Eles têm a mesma medida de lados e de ângulos.
Grupo 7: Porque se movimentam os lados e podem fazer outras figuras, sei que eles são paralelos.

Fonte: Registros escritos dos grupos de alunos (dados da pesquisa)

Analisando as respostas dos grupos percebe-se que os alunos apresentaram dificuldades para registrar o seu pensamento de acordo com a investigação. Em todos os itens, a maioria dos grupos conseguiram descrever alguma propriedade dos paralelogramos, fato este, que pode ser notado nos registros do grupo 1. Em todos os itens, esse grupo trouxe, com suas palavras, algumas propriedades dos paralelogramos, quando disseram que os lados e os ângulos opostos são congruentes.

Observando os registros escritos do grupo 2, destacamos a resposta dada em relação ao item 7, em relação a medida dos lados da figura formada. Quando registraram “que a soma de todos os ângulos é igual a 360°” percebemos que a resposta não tem relação com a medida dos lados e sim com a medida dos ângulos. Porém, na socialização das conclusões dos grupos, o grupo 2 conseguiu perceber que o item 7 tratava da medida dos lados e não cabia ali as respostas referentes aos ângulos.

Essa situação só enriqueceu a discussão final da tarefa e conclusão da turma. Nesse momento, podemos aceitar as conjecturas ou refutá-las, pois novamente os grupos foram levados a testar suas conjecturas e verificarem se as mesmas eram válidas para quaisquer paralelogramos. Essa fase da investigação é importante para a consolidação da investigação realizada (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

A discussão das conclusões do item 8 permitiu aos alunos testarem suas conjecturas. O significado de lados paralelos é importante para que se compreenda o que é um paralelogramo e, como consequência, a validade das propriedades citadas. Diante de registros diferenciados, a resposta do grupo 1 e 4 são muito próximas e destacam uma característica importante quando se trata de paralelismo, que a distância entre os lados tem que ser sempre a mesma, ou seja, não pode variar quando movimentamos os canudos.

O artefato foi de grande contribuição para que os alunos refinassem e testassem suas conjecturas, na medida em que podiam movimentar o par de canudos sobre o arame, observando as características das figuras formadas, se configurando assim, em um momento do trabalho investigativo, descrito por Ponte, Oliveira e Brocardo (2003).

A segunda parte da tarefa 4 foi uma exploração-investigação da área dos paralelogramos. Esse tipo de investigação possibilitou aos alunos relacionar as medidas da base e da altura com a quantidade de quadradinhos da região interna dos paralelogramos. Dessa maneira, não era apenas uma aplicação de fórmulas de área, mas sim uma investigação que propiciou o entendimento que para calcular a área de um paralelogramo, bastariam multiplicar o comprimento (no caso chamado de base) e a largura (no caso chamado de altura).

Na socialização das conclusões dos grupos, percebemos que a segunda parte da tarefa 4 foi realizada sem muita dificuldade e a possibilidade de relacionar a quantidade de quadradinhos com as medidas da base e da altura permitiu entender o conceito de área de um paralelogramo.

Na tarefa 5, os alunos tiveram a curiosidade aguçada, pois ao explicar que para realizar a tarefa utilizaríamos os anéis de papel para formar quadriláteros, eles não acreditaram que de um objeto circular poderia formar um quadrilátero.

O objetivo da tarefa era possibilitar a compreensão das relações entre os quadriláteros e analisar suas propriedades, a partir da observação e da exploração dos elementos de todas as figuras obtidas.

Utilizando tesoura, papel e cola, os alunos foram seguindo as orientações e formando quadriláteros diversos. Na figura 10, podemos ver um grupo desenvolvendo a tarefa 5, conforme as orientações fornecidas no quadro 16.

Durante a realização da tarefa os alunos tiveram a oportunidade de investigar os diversos quadriláteros e suas propriedades, observando o tamanho do anel e a forma como colá-los.

Figura 10: Tarefa 5- Investigando os quadriláteros

Fonte: Dados da pesquisa – registro fotográfico.

Esta tarefa permitiu a discussão de diversas propriedades dos quadriláteros. Para formar um retângulo ou quadrado, os anéis deveriam ser colados perpendicularmente para formar ângulos retos. Para os demais quadriláteros, os anéis deveriam ser colados de maneira inclinada. Na figura 11 podemos observar alguns quadriláteros formados.

Figura 11: Quadriláteros formados pelo corte dos anéis

Fonte: Dados da pesquisa – registro fotográfico

Com essa tarefa, os alunos identificaram os atributos que são necessários para conceituar um quadrado, retângulo, losango, trapézio, entre outros polígonos. Segundo Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), essa tarefa pode oportunizar, de maneira intuitiva, questões relativas aos quantificadores universais e existenciais de um polígono. A observância da maneira de colar os anéis e o tamanho influenciou na formação do quadrilátero. Por exemplo, se quisessem construir um quadrado, os anéis teriam que ser do mesmo tamanho e deveriam ser colados de forma perpendicular. Caso quisessem formar um losango que não fosse quadrado, os anéis deveriam ser de mesmo tamanho, mas a forma de colá-los não seria a mesma, deveria ser inclinada.

Assim, quanto aos itens referentes às modificações necessárias para formar um losango ou um retângulo, os alunos observaram que a maneira como os anéis foram colados ou o seu tamanho determinavam quais figuras que seriam formadas. Isso pode ser comprovado nas discussões e nos registros escritos dos grupos, como apresentado no quadro 29.

Quadro 29: Conclusões dos grupos referente ao item 11 da tarefa 5.

Grupo 1: Quando os anéis são iguais e colamos na perpendicular forma um quadrado e se em vez de colar na perpendicular colamos na diagonal forma um losango. Se os anéis são diferentes, podemos formar retângulo ou paralelogramo. E quando colamos 4 anéis de formas diferentes, formaram dois hexágonos.
Grupo 2: Todas as figuras são quadriláteros. Quando colamos perpendicular formou um quadrado ou um retângulo. E se colar dois anéis de mesmo tamanho meio torto forma um losango. E se colar os anéis de tamanho diferentes meio torto forma um paralelogramo.
Grupo 3: Todas as figuras têm vários tamanhos e não são iguais.
Grupo 4: Para formar um losango é só colocar um anel com o outro um pouco torto e para formar o quadrado os anéis foram colados na perpendicular. Dependendo da posição e do tamanho dos anéis formam figuras diferentes.
Grupo 5: Quando os anéis foram colados na perpendicular formou um quadrado e nós não colamos os anéis na perpendicular, aí formou um losango. Nós pegamos dois anéis de formato diferente, colamos de modo perpendicular e cortamos e formou um retângulo. Quando colamos dois anéis de tamanho diferente meio torto, cortamos e formou um paralelogramo. É possível formar várias figuras utilizando argolas de vários tamanhos.
Grupo 6: Os anéis colados na perpendicular virou um quadrilátero. E se colocar os anéis “mucadinho” torto vai virar um losango. Nós colocamos um anel pequeno e um grande e deu um paralelogramo.
Grupo 7: Recortando os 2 anéis ao meio forma um quadrado, quando eles foram colados na perpendicular. Colando os anéis meio tortos formam losango ou paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa – registro escrito dos grupos

Observando as conclusões dos grupos, percebemos que eles classificaram os quadriláteros de acordo com seus atributos relevantes. Por exemplo, para ser um quadrado, observaram que os anéis tinham que ser de mesmo tamanho e colado perpendicularmente. Para chegar a essa conclusão foi solicitado que medissem os ângulos e os lados de cada figura formada, com o objetivo de comprovarem algumas características dos quadriláteros formados, para depois poder nomeá-los. Isso possibilitou aos alunos analisarem e explorarem os elementos das figuras obtidas.

A partir das anotações dos grupos, iniciamos a discussão final da tarefa. Nesse momento, foram explorados alguns elementos que ainda não tinha sido percebido inicialmente. O primeiro elemento estava relacionado aos atributos relevantes para ser um paralelogramo: os lados opostos tinham que ser paralelos. Assim, concluímos que todas as figuras formadas até o item 6 do quadro 16 eram paralelogramos, pois os lados opostos eram paralelos e congruentes. Isso foi comprovado através da medição dos lados e ângulos da figura formada.

Também destacamos algumas interseções entre as figuras que puderam ser observadas e discutidas coletivamente, que todo quadrado é um retângulo, mas o inverso não é verdade, que todo quadrado é um losango, mas o inverso não é verdade, entre outras características. Para chegar nessas conclusões podemos notar a importância de identificar os atributos relevantes de cada figura construída, visto que os mesmos são essenciais para a definição de cada uma (HERSHKOWITZ, 1994).

5.1.3. “O triângulo não permite pendurar as cordas”

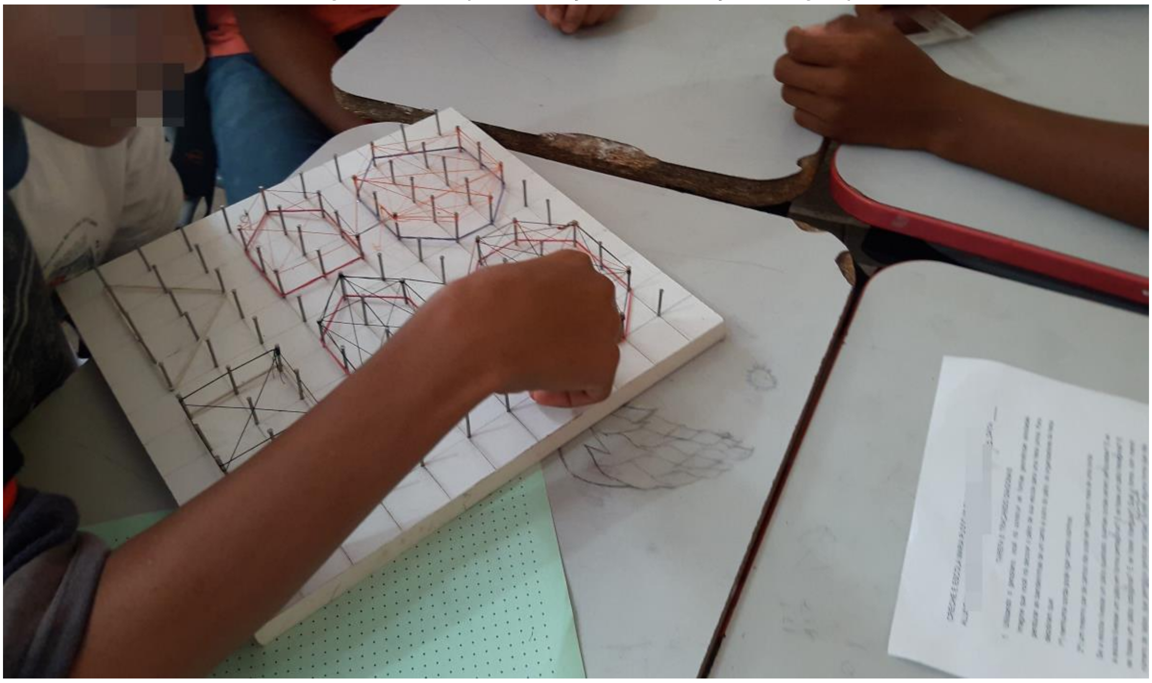
A tarefa 6 traz uma proposta para o estudo das diagonais de um polígono. O objetivo dessa tarefa é compreender o conceito de diagonais de um polígono e a partir da identificação de um vértice traçar suas diagonais. Foram necessárias duas aulas de 50 minutos cada para essa tarefa.

Para a realização dessa tarefa, utilizamos o geoplano quadrado, elásticos coloridos, malha pontilhada para a reprodução dos polígonos representados no geoplano. Primeiramente, propomos uma situação que falava que o pátio da escola deveria ser enfeitado com bandeirinhas para uma festa junina, mas para pendurá-las de um canto a outro, duas regras deveriam ser obedecidas: nenhuma corda poderia ligar cantos vizinhos e um mesmo par de cantos não poderia ser ligado por mais de uma corda. Foi solicitado aos alunos que seguissem essas regras e tentassem verificar quantas cordas deveriam ser penduradas se o pátio da escola tivesse o formato triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

Para auxiliar na realização da tarefa foi utilizado o geoplano e elásticos coloridos, conforme figura 12. A primeira conclusão da turma foi que “o triângulo não permite pendurar as cordas”. Assim, os alunos concluíram que o triângulo não possui diagonal, pois não tem como seguir as regras apontadas na situação da tarefa.

.

Figura 12: Representação da situação no geoplano



Fonte: Registro fotográfico da tarefa 6

A representação das situações da forma do pátio da escola no geoplano permitiu aos alunos utilizarem as duas regras de maneira concreta. Isso facilitou a compreensão da tarefa e a conclusão dos grupos, mediante as observações das regularidades.

No quadro 30, trazemos um trecho do diálogo de um grupo de alunos na tentativa de responder ao item 3 da tarefa 6, com o objetivo de apresentar como se procedeu a conclusão da investigação.

Quadro 30: Trecho de um diálogo de um grupo de alunos.

L1. Iander: Aqui sempre é esse número menos três. (apontou para a segunda coluna do quadro 18). L2. Professora: Vocês chegaram a essa conclusão? L3. Iander: É. O valor da 3ª coluna é sempre o valor da primeira vezes o valor da segunda coluna. E o valor da terceira coluna é sempre a metade do valor da segunda, não é? L4. Marcos Victor: Então, aqui vai ser n dividido para dois. (apontou para a última linha da terceira coluna). L5. Iander: É n dividido para dois? Não, é esse daqui dividido para dois, né? (apontou para a última linha da segunda coluna).

L6. Marcos Victor: É.
L7. Iander: Então, é n menos 3 vezes n dividido para dois. Escreve aí que já fiz demais.
L8. Professora: Como vocês chegaram a essa conclusão?
L9. Iander: Sei lá tia, nós estávamos observando aqui e fizemos.
L10. Professora: Uh! Na hora de preencher vocês foram observando o que estava acontecendo?
L11. Iander: Na hora que eu cheguei... eu queria fazer um negócio para eu aprender rápido e fui vendo que aqui é sempre esse menos três (apontou para a primeira coluna). Esse aqui era esse vezes esse. (apontou para a primeira e segunda coluna) e esse aqui (apontou para a quarta coluna) é a metade desse (apontou para a terceira coluna).
L12. Professora: Por que para achar o número de diagonais distintas é sempre a metade do número total de diagonais traçadas a partir de um vértice?
L13. Marcos Victor: Porque segundo a regra a corda só podia ligar uma vez.
L14. Professora: Agora responda o item 3.
L15. Darlon: O número de lados vezes o vértice.
L16. Iander: Isso não.
L17. Iago: Que o número de lados menos três... 6 x 3=18.
L18. Professora: Sim, mas o que nos interessa é o número de diagonais distintas. Como fazer para encontrar esse número?
L19. Iander: Dividir por 2.
L20. Professora: Então, registre isso aí.
L21. Iago: O número de lados menos 3 vezes o número de lados dividido por 2 é igual ao número de diagonais.
L22. Darlon: É isso!

Fonte: Parte da transcrição das gravações realizadas em áudio e vídeo durante a realização da tarefa.

O trecho desse diálogo permite-nos observar as estratégias utilizadas pelos alunos para completar o quadro 18. Destacamos parte desse diálogo quando o aluno Iander foi indagado pela professora-pesquisadora sobre como chegaram aquele resultado.

> Na hora que eu cheguei ... eu queria fazer um negócio para eu aprender rápido e fui vendo que aqui é sempre esse menos três (apontou para a primeira coluna). Esse aqui era esse vezes esse. (apontou para a primeira e

> segunda coluna) e esse aqui (apontou para a quarta coluna) é a metade desse (apontou para a terceira coluna) (L 11: IANDER).

Analisando esse trecho do diálogo percebemos que o aluno pensou em uma estratégia para completar o quadro rapidamente, sem precisar desenhar todos os polígonos no geoplano e suas diagonais. Até porque quanto maior o número de lados do polígono, mais difícil ficava para traçar as diagonais. A observação das regularidades permitiu que o aluno completasse o quadro, sem precisar traçar as diagonais.

Destacamos também o desenvolvimento da autonomia do aluno quando o mesmo procura estratégias de investigação. E as discussões de fato induziram os alunos a fazerem suas explorações, estabelecendo conjecturas na definição de diagonais de um polígono, definindo assim, uma relação algébrica para o cálculo do número de diagonais de um polígono.

Para promover o envolvimento dos alunos na tarefa, a utilização do material didático manipulável foi muito importante, pois propiciou um espaço adequado para que eles apresentassem suas descobertas, concordando ou não com as ideias do outro, se tornado assim, um momento de construção do conhecimento. Assim, não só os conhecimentos que esses alunos trazem emergiram, mas algumas competências foram desenvolvidas, como a capacidade de generalizar e relacionar.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que o uso de material didático manipulável em tarefas de investigação é adequado ao estudo de vários conceitos geométricos, constituindo assim, um “ponto de partida que entusiasma os alunos a fazer explorações, apoia a obtenção e a formulação de conjecturas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 87). De fato, em todas as tarefas, o material didático manipulável foi o propulsor da exploração-investigação.

5.1.4. “Unindo os três ângulos do triângulo formou um ângulo de 180 graus”

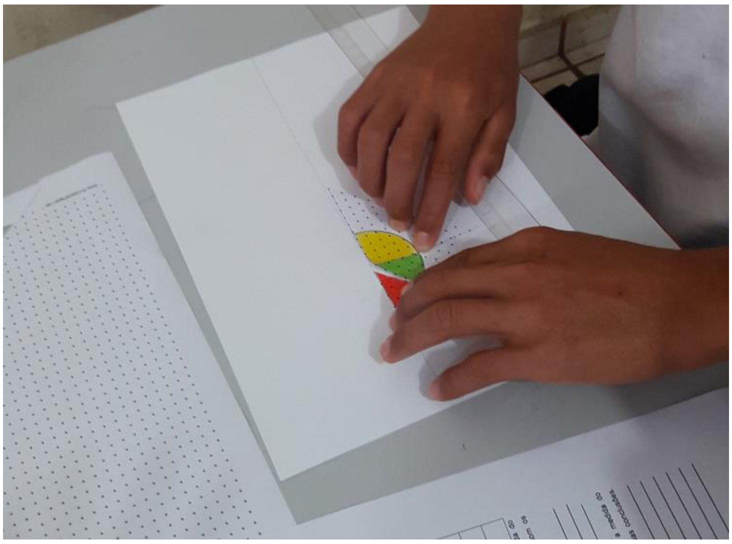
A tarefa 7 apresenta uma proposta de estudo dos ângulos internos e externos de um polígono e tem como objetivo reconhecer esses ângulos, bem como relacionar a soma dos ângulos internos e externos com o número de lados de um polígono.

A tarefa foi realizada em duas etapas: a primeira foi dedicada ao estudo dos ângulos internos de um polígono, destacando as suas medidas e a sua soma. Já a segunda estava voltada para o estudo dos ângulos externos e sua soma. Foram necessárias quatro aulas de 50 minutos cada, sendo que a última foi utilizada para a discussão e a socialização das conclusões dos grupos.

Utilizando folha de papel em malha pontilhada, régua, lápis, transferidor e cola, os alunos foram seguindo as instruções da tarefa, observando e analisando suas conclusões, de acordo com as orientações descritas no quadro 19.

O item 1 dessa tarefa foi destinado ao estudo dos ângulos internos de um triângulo e sua soma. Para tal, os alunos desenharam, marcaram, recortaram e uniram os ângulos internos do triângulo. Foi uma atividade que permitiu a compreensão do valor da soma dos ângulos internos dessa figura geométrica, sem se preocupar com a aplicação de fórmulas. Os alunos tiveram a oportunidade de descobrir, por meio de uma atividade de recorte e colagem, a relação existente entre os ângulos internos, ou seja, que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180 graus. Na figura 13, podemos observar o resultado do item 1 da tarefa 7.

Figura 13: Soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Registro fotográfico da tarefa 7

Podemos notar que os ângulos destacados na figura 13 são os ângulos internos do triângulo que foi divido em três partes de tal modo que os seus ângulos ficassem preservados. E conforme orientação do item 1, os ângulos foram unidos de forma que seus lados ficassem adjacentes. Para comprovar a medida do novo ângulo formado, os alunos utilizaram o transferidor. Assim, puderam concluir que “unindo os três ângulos do triângulo formou um ângulo de 180 graus”.

No item 5 da tarefa 7, notamos uma relação entre o número de diagonais traçadas a partir de um vértice fixo, a figura formada e a soma de seus ângulos internos. Nesse momento, percebemos que a capacidade de generalizar dos alunos estava se desenvolvendo, pois todos os grupos entenderam que a diagonal traçada no quadrilátero formou dois triângulos e que a soma dos ângulos dos dois triângulos dava 360º, igual à soma já calculada no item 3.

Outro fato observado pelos alunos foi que o número de triângulos formados a partir das diagonais traçadas no polígono era sempre igual ao número de lados menos dois, o que ajudou na conclusão do item 9 da tarefa, conforme descrito no quadro 31.

Quadro 31: Registro escrito do item 9 da tarefa

Existem sempre 2 a menos e o número de triângulos é multiplicado por 180º. Então, multiplicamos (n-2) por 180º para achar a soma dos ângulos internos do polígono de n lados.

Fonte: Registro escrito do grupo 1 referente a tarefa 7.

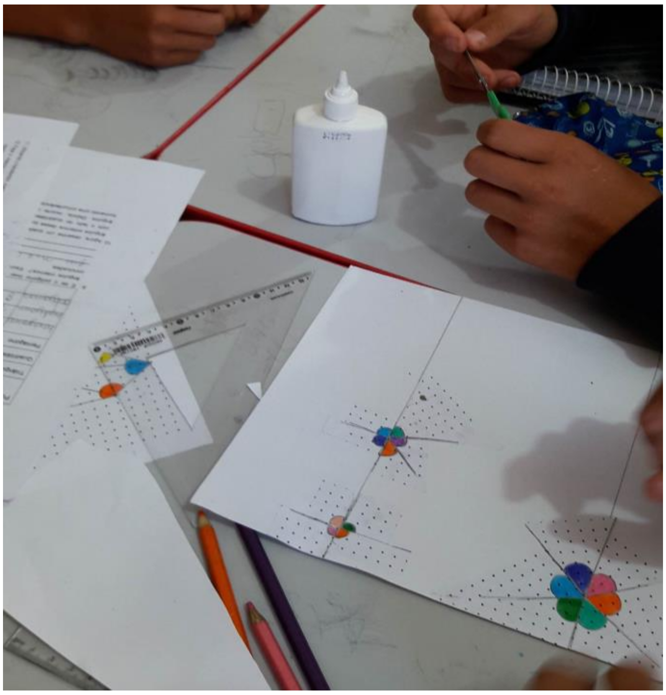
Mais uma vez a capacidade de criar estratégias de investigação estava presente nos registros dos grupos. A observação das regularidades permitiu compreender que a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer sempre vai ser a quantidade de lados menos dois, multiplicado por 180 graus. E quando indagados porque tinham que multiplicar por 180 graus, os alunos explicaram que as diagonais sempre formam triângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

Destacamos que não houve a preocupação em trabalhar somente com polígonos regulares. Os alunos ficaram a vontade para desenhar qualquer polígono, regular ou não. Tentamos preservar de alguma maneira a ideia de tarefa aberta proposta pela investigação matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

A segunda parte da tarefa possibilitou a discussão da relação dos ângulos externos de um polígono e a medida de sua soma. Inicialmente, os alunos construíram os ângulos externos de um quadrilátero, recortaram e colaram um perto do outro, formando uma circunferência. Desta maneira, perceberam que a soma deles dava 360º. Na figura 14 temos o registro fotográfico da realização da segunda parte da tarefa por um grupo de alunos.

Podemos observar na figura 14 que quando os alunos uniram os ângulos externos de polígonos, independente do número de lados, sempre formava um ângulo de 360º.

Figura 14: Soma dos ângulos externos

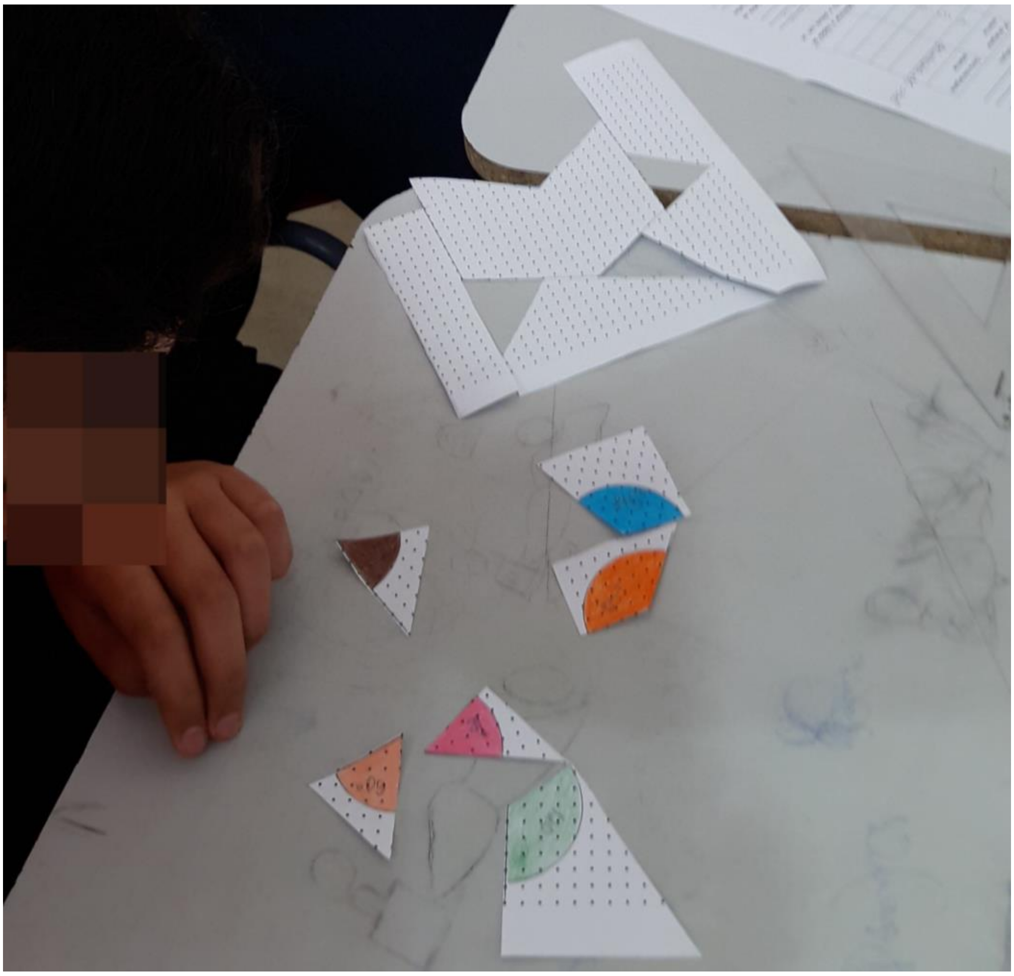


Fonte: Registro fotográfico da tarefa 7

O envolvimento dos alunos na exploração dessa tarefa foi grande. Isso pode ser constatado pelo fato de discutirem as tarefas, socializando suas descobertas. O trabalho em grupo também propiciou a discussão de cada item.

As discussões estavam acontecendo naturalmente, os alunos estavam envolvidos, até que um grupo solicitou a presença da professora-pesquisadora, que quando se aproximou um integrante do grupo, logo perguntou: “Tia por que não consigo fechar um círculo, sempre sobra um ângulo aqui”. Então, observando o que estava acontecendo, percebemos que eles tinham construído um pentágono não convexo. Na figura 15 podemos observar o polígono não convexo e seus ângulos externos.

Figura 15: ângulos externos de um polígono não convexo



Fonte: Dados da pesquisa- registro fotográfico

A professora-pesquisadora ficou sem resposta e pensativa: não estava preparada para tal situação. Quando as atividades foram elaboradas pensamos apenas nos polígonos convexos, que são os mais usados. E nos livros didáticos quando se fala de ângulos externos, todos os exemplos são de polígonos convexos.

Não havíamos pensado nessa possibilidade e, por um instante, a professora-pesquisadora torcia para aula terminar. Como ainda faltava bastante tempo, a primeira atitude, após refletir, foi perguntar como eles marcaram os ângulos externos do polígono. E nesse momento, a professora-pesquisadora percebeu que o ângulo externo adjacente ao vértice reentrante (está voltado para a região interna do polígono, não formando uma ponta externa) não foi marcado conforme a definição de ângulo externo, ou seja, o ângulo externo é formado pelo lado de um ângulo interno e o prolongamento do outro. Então, a professora-pesquisadora solicitou que eles fizessem novamente o polígono e agora representassem o ângulo externo segundo a definição. Novamente, eles perguntaram: "Mas nesse vértice o ângulo fica dentro do polígono e não fora. Pode isso?" Outra pergunta inesperada. Percebemos que para o aluno o ângulo externo tinha que ficar fora do polígono.

Novamente, a professora-pesquisadora ficou sem saber o que responder. Precisava de ajuda para orientar os alunos, e, naquele momento, não tinha a quem recorrer. Então, a aula terminou e a continuidade da atividade teve que ser adiada para a próxima aula.

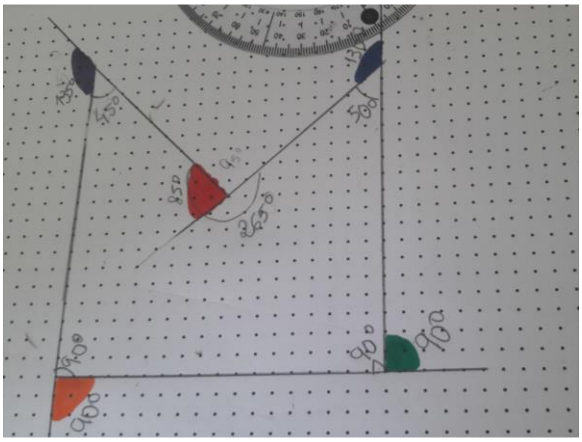
Em casa e um pouco mais calma, também foi investigar a tarefa. Pesquisou e fez leituras de diversos textos para tentar encontrar um caminho para orientar os alunos. Percebemos que a investigação sobre a soma dos ângulos externos, a partir de recorte e colagem, como era a proposta inicial da tarefa, não era possível quando se tratava de polígonos não convexos. E assim, buscou-se algum caminho para ajuda-los a investigar e resolver tal empasse.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que aulas desse tipo "caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo dele uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 53). Assim, a situação imprevista vivenciada pela professora-pesquisadora foi inerente à tarefa investigativa desenvolvida com os alunos. Porém, quando o professor conhece bem seus alunos é possível, a partir dessa imprevisibilidade, estabelecer um ambiente propício para a aprendizagem em matemática.

Continuando a investigação com os alunos, mais uma vez a intervenção da professora-investigadora foi importante, pois solicitou que observassem a figura do polígono não convexo e usassem o transferidor para medir seus ângulos internos, e logo perceberam que o ângulo referente ao vértice reentrante media mais que 180 graus. Depois, foi solicitado que representassem todos os seus ângulos externos, seguindo a definição. Assim, eles observaram que no vértice reentrante o ângulo externo não podia ficar na região externa do polígono, senão não respeitava a definição.

Então, representaram o ângulo para a região interna. Foi solicitado que eles encontrassem a medida de cada ângulo externo, lembrando que eles deveriam ser suplementares. Assim, foi feito e quando chegaram ao vértice reentrante, observaram que quando somavam o ângulo interno mais o ângulo externo dava um ângulo maior que 180º, conforme figura 16 e trecho da discussão no quadro 32

Figura 16: Polígono não convexo desenhado pelos alunos



Fonte: Registro fotográfico da tarefa 7

Quadro 32: Investigação sobre a soma dos ângulos externos de um polígono não convexo

L1. Iander: Professora a soma dos dois ângulos não dá 180º. É maior. L2. Professora: Tente fazer a relação e veja o que acontece. L3. Iander: Que relação? L4. Professora: Que a soma do ângulo interno e o ângulo externo é igual a 180º. L5. Iago: Mais isso nós já fizemos e não dá. L6. Professora: Mas o que tem que acontecer para ficar igual a 180º? L7. Marcos Victor: Não dá certo! L8. Iander: 265º + 85º = 180º. Isso não é verdade.

L9. Professora: Pense mais um pouco. Para ser igual a 180º, o que você tem que fazer? L10. Darlon: Isso é difícil! É tia que coisa complicada. Tinha que ser mais fácil. L11. Iander: Tá difícil mesmo! Se a gente somar vai dar 350º e não pode. L12: Iago: Tem que ser 180º. L13. Professora: Pensem assim, qual número que somado com 265º dá 180°? Talvez ajude. L14. Marcos Victor: Não dá certo de jeito nenhum. L15: Iander: Mais 265° é maior que 180º. Não somar nada! Tem que tirar! L16: Professora. Lembre-se que não existem apenas números positivos! L17: Iander: Posso fazer assim, professora? Quanto falta para chegar a 265º. L18: Professora: Pode sim. Investigue. L19: Iander: Falta 85º. L20: Darlon: Mas se falta a gente tem que tirar e não somar, né? L21: Iago: Fica assim, 265° - 85º = 180º. L22: Marcos Victor: O ângulo fica negativo? Mas não pode ser negativo! L23. Darlon: Que coisa esquisita! Isso é difícil, tia! L24. Professora: Então, tentem investigar a soma dos ângulos externos agora. L25. Iander: Faz aí, gente! L26. Darlon: Dá certo? L27. Marcos Victor: Deixa eu fazer. 135º + 130° + 90° + 90° - 85º = 360º (pegou a calculadora e fez). L28. Iander: Professora, por isso que sobrava um ângulo quando a gente tentava colar para formar o círculo? Mas como vai dar certo, então? L29. Professora: É sim. Pense que o que sobra é o resto. Tente fazer agora sabendo que tem que tirar a medida do ângulo e não somar. L30. [...]

Fonte: Transcrição de parte do diálogo com o grupo 4 – dados da pesquisa.

Podemos notar no diálogo descrito no quadro 32 que a possibilidade de existir um ângulo negativo é questionada pelos alunos, pois sempre foi ensinado para eles que a medida dos ângulos externos de um polígono é sempre positiva. Quando observaram que para a soma ser igual a 360º, o ângulo do vértice reentrante tinha que ser negativo, os alunos logo refutaram essa conjectura. Certamente, essa situação inesperada só enriqueceu as discussões na sala de aula, oportunizando a todos refletir e analisar sobre cada conjectura levantada.

Destacamos que apenas um grupo construiu polígonos não convexos. No final disseram que tentaram fazer um desenho mais fácil e acabaram complicando.

Esse trecho do diálogo mostra claramente a importância da intervenção do professor, bem como a necessidade de refletir sobre a própria prática em todo momento, instigando os alunos a investigar e refletir sobre situações desafiadoras que vão surgindo. É muito importante a postura do professor, visto que o mesmo poderia falar simplesmente que era só para fazer com polígonos convexos, e, pronto. Mas mesmo se sentido sozinha, a professora-pesquisadora buscou respostas para o que a inquietava.

Em momentos anteriores a esta pesquisa, certamente não haveria prosseguimento com a investigação. No primeiro obstáculo já desistiria. Porém, após as leituras realizadas e analisando outras situações vivenciadas por outros professores, percebemos que precisamos refletir sempre sobre a nossa prática.

Essa observação do aluno só foi possível devido à característica investigativa da aula, o que levou o aluno apresentar outras possibilidades para a tarefa. Essa situação serviu para repensar a forma de abordar o conceito de polígonos. É preciso pensar na aprendizagem como um "processo de significação que, na sala de aula, gera movimentos individuais e coletivos em torno de algumas formas canônicas de compreensão do mundo" (COLINVAUX, 2007, p. 43). E essa tarefa realmente foi um desafio a ser superado, mas que realmente produziu a aprendizagem, pois permitiu confrontar ideias e pensamentos de maneira significativa. Abreu (2008) afirma que:

> O confronto de opiniões que ocorre entre os alunos durante uma atividade de investigação é, portanto, um momento rico da atividade, pois a interação que acontece entre eles irá favorecer o desenvolvimento da capacidade de argumentação das descobertas entendidas como de sua autoria (ABREU, 2008, p. 157).

Portanto, a oportunidade de ensinar a partir de aulas exploratório-investigativas possibilita um ambiente de troca de saberes, descobertas e reflexões sobre o conhecimento.

5.1.5. "Quando unimos os lados dos polígonos devem formar um ângulo de 360 graus"

O último agrupamento de tarefas apresenta uma proposta para o estudo de propriedades dos polígonos. Devido às dificuldades já observadas na realização das demais tarefas exploratório-investigativas, nessas duas tarefas fizemos uma adaptação, retirando alguns itens e deixando outros que focassem algumas propriedades dos polígonos, como por exemplo, paralelismo, ângulos internos e externos, etc.

A tarefa 8 foi adaptada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), cujo objetivo é investigar os polígonos obtidos e suas propriedades, a partir de dobras e cortes numa folha de papel.

Incialmente, pensamos que essa tarefa seria fácil para os alunos, mas a maioria dos grupos teve dificuldades em realizá-la. Assim, a postura interrogativa do professor se fez necessária com o intuito de auxiliá-los a superar as dificuldades. No quadro 33, apresentamos um trecho do registro de um grupo de alunos referente à realização da tarefa 8.

Quadro 33: Trecho do registro do grupo de alunos da tarefa 8

1. Uma dobra e dois cortes.
   a) As figuras obtidas são um triângulo, um losango e um quadrilátero que não soubemos dizer o nome.
   b) Tem que fazer cortes laterais.

2. Mais dobras e um só corte.
   a) Obtemos um quadrilátero – o paralelogramo. Para o quadrado é preciso cortar na diagonal.
   b) Cortando a lateral.
   c) Cortando a lateral.

Fonte: Registro escrito dos alunos

Observando o registro dos alunos, percebemos que pelas respostas registradas, faltou a intervenção professora-pesquisadora durante a realização da tarefa, para que eles se organizassem sistematicamente, realizando um trabalho investigativo. Apesar de dobrar, de cortar e de observar, notamos que os alunos não tiveram a maturidade necessária para registrar os resultados e que, de fato, a falta da intervenção foi um fator determinante para que o trabalho investigativo não atingisse o objetivo proposto.

Essa tarefa não teve o resultado esperado, pois houve falhas enquanto professora da turma, não assumindo uma postura interrogativa a fim de que os alunos pudessem explorar e discutir mais sobre a tarefa. Por não haver solicitação da presença da professora, concluímos que os alunos estavam registrando de maneira mais clara e objetiva, o que não aconteceu.

Este fato pode ter ocorrido pela a inexperiência da professora-investigadora no trabalho com tarefas exploratório-investigativas, que não traz em seu enunciado “uma questão a responder, mas apresenta uma situação aberta que permite a quem se propõe realizá-la fazer explorações, propor questões, buscar respostas, levantar conjecturas, justificar, registrar, argumentar e socializar os resultados obtidos” (LAMONATO; PASSOS, 2009, p. 99). Desta forma, o trabalho com esse tipo de tarefa não é fácil, pois os processos necessários durante sua realização, geralmente não estão presentes nas aulas de matemática.

Certamente, essa vivência proporcionou a professora-investigadora repensar sua postura, buscando superar esse tipo de obstáculos, tendo mais atenção na próxima vez que utilizar tarefas de cunho investigativo nas suas aulas de matemática.

A última tarefa, a número 9, teve como objetivo investigar quais condições são necessárias para que polígonos regulares ou não, possam formar mosaicos no plano, possibilitando o aprofundamento do conceito de ângulos, de propriedades e da relação entre lados, vértices e ângulos de um polígono.

Para a realização dessa tarefa, utilizamos modelos de vários polígonos regulares e não regulares, tesoura, transferidor, régua, malha pontilhada, lápis, borracha, etc.

Primeiramente, os alunos recortaram os polígonos regulares e em seguida, tentaram pavimentar o plano, observando quais eram condições para que os eles pavimentassem completamente o plano. Para a realização da tarefa foram necessárias 4 aulas de 50 minutos cada.

Nessa etapa da tarefa, os alunos fizeram a pavimentação na própria carteira. Quando foram perguntados quais polígonos regulares pavimentaram perfeitamente o plano, todos os grupos responderam o quadrado, o triângulo e o hexágono. Na figura 17 podemos ver um grupo de alunos realizando a pavimentação do plano.

Figura 17: Pavimentação do plano realizada por um grupo de alunos

Fonte: Registro fotográfico da tarefa 9

Os alunos não apresentaram dificuldades para fazer esse tipo de tarefa. Ao investigar como ocorre a pavimentação, todos os grupos perceberam que os lados e os vértices dos polígonos devem formar um ângulo de 360º, caso contrário, fica faltando um polígono para completar o espaço vazio. Isso pode ser notado nos registros realizados pelos grupos em relação ao item b da tarefa, conforme apresentado no quadro 34.

Quadro 34: Registro da conclusão de alguns grupos ao item b

Grupo 1: Para se encaixar perfeitamente o ângulo tem que formar 360 graus. Grupo 2: Para formar um mosaico regular a soma dos ângulos internos do polígonos tem que chegar a 360 graus. Grupo 3: Sim, eles são iguais e quase todos se unem. Grupo 4: Não. Porque os ângulos internos formam losangos e os mosaicos construídos não formam losangos.

Fonte: Registro escrito dos grupos de alunos

Os registros apresentados no quadro 34 mostram as diferentes conclusões de cada grupo. Os outros registros estão muito próximos desses. Verificamos que as duas primeiras conclusões citam a questão dos ângulos formarem 360º. A conclusão do grupo 3 demonstra que esse grupo de alunos não conseguiu relacionar e generalizar as situações de pavimentação do plano. Eles reconheceram que existe uma relação entre os ângulos internos e os mosaicos, mas não explicitaram qual era.

Já o grupo 4, foi totalmente antagônico a todos os outros grupos. Utilizou a ideia de losango para explicar a situação. Quando indagados sobre a sua conclusão, explicaram que quando tentaram pavimentar o plano usando o pentágono, sempre ficava um espaço vazio, formando um losango, conforme figura 18.

Desta forma, percebemos que o grupo 4 não percebeu que o espaço vazio deveria ser preenchido por um polígono que tivesse um ângulo com medida que permitisse completar 360°. Porém, quando as conclusões foram apresentadas para os demais grupos, um ambiente próprio para a verificação e validação das conjecturas de cada grupo permitiu essa discussão.

Assim, quando os alunos foram indagados sobre qual condição seria necessária para formar um mosaico, sem espaço vazio, eles logo responderam: “Quando unimos os lados dos polígonos devem formar um ângulo de 360º”. Ressaltamos que essa conclusão só foi possível no momento da discussão final da tarefa, após todos os grupos apresentarem suas conclusões à turma.

Figura 18: Pavimentação do plano

Fonte: Registro fotográfico da tarefa 9

Depois de todas as discussões em sala de aula, os alunos não tiveram dificuldades para pavimentar um plano utilizando polígonos não regulares. Eles já haviam percebido que os vértices dos polígonos deveriam se unir e formar exatamente um ângulo de 360 graus. Alguns alunos relacionaram essa situação com a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono, que sempre é 360 graus.

É importante destacar a importância de uma postura interrogativa do professor em aulas exploratório-investigativa, visto que os alunos podem passar a compreender que o papel do professor é o de apoiar todo o processo investigativo e não precisam esperar respostas prontas para suas indagações (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

Outro fato que merece destaque foi a etapa da discussão da investigação. Essa fase permitiu a sistematização e a reflexão das ideias em torno das tarefas realizadas, despertando nos alunos o entendimento do que é investigar, possibilitou o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de elaborar estratégias que facilitaram a exploração-investigação. Nesse sentido, as tarefas desenvolvidas contribuíram de alguma maneira para a aprendizagem de polígonos, mesmo aquelas cujo processo de investigação não foi tão satisfatório.

5.2. Contribuições das tarefas exploratório-investigativas aliadas ao uso de MD para a aprendizagem de polígonos

Nas tarefas propostas, preocupamo-nos, na abordagem do conteúdo referente a polígonos, com que os alunos realizassem as atividades de forma que os ajudassem na compreensão dos conceitos.

Propusemos a utilização do MD como um recurso importante para a aprendizagem dos alunos. Dessa forma, aliar as tarefas exploratório-investigativas e o uso do MD foi uma estratégia de ensino que funcionou bem, já que esses materiais foram fundamentais para a compreensão de alguns conceitos.

Em todas as tarefas, o MD foi um catalisador das investigações realizadas pelos alunos, pois possibilitou “ao aluno aprender em seu próprio ritmo”

(LORENZATO, 2012, p. 30), orientado por questões que auxiliaram suas reflexões e suas descobertas.

Nesse sentido, as tarefas exploratório-investigativas contribuíram para que os alunos compreendessem os conceitos, indo muito além da memorização, promovendo a observação, a análise, a manipulação, o registro e a generalização dos conteúdos abordados. O ensino baseado na exploração e na investigação possibilitou o estudo de várias propriedades de polígonos, que não se basearam na memorização e técnicas.

Durante a realização das tarefas, todos sabiam como se iniciava cada etapa, mas não tínhamos a noção de quais resultados seriam apresentados. É claro que alguns contratempos surgiram, a realização de algumas tarefas não foram satisfatórias, mas de um modo geral, todas contribuíram de alguma forma para a aprendizagem de polígonos.

Ao rever os registros em vídeos das tarefas, percebemos o quanto os alunos se envolveram e gostaram das aulas de matemática. O que mais nos surpreendeu foi ver aquele aluno rotulado de “bagunceiro”, “indisciplinado” procurar realizar a tarefa com motivação.

Nesse momento, notamos que o material didático manipulável foi importante para o desenvolvimento das tarefas, pois facilitou a observação e a análise, o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, a possibilidade de experimentar, relacionar e generalizar os conceitos (LORENZATO, 2012). É fato que inicialmente parecia que os alunos não estavam aprendendo nada, mas no momento da socialização das conclusões conseguimos identificar as aprendizagens, e, principalmente, o desenvolvimento da autonomia.

Ressaltamos que tarefas de cunho investigativo eram algo totalmente novo para a turma, pois sempre lhes foi oferecido um ensino centrado no professor, por isso, esse processo não foi fácil para a professora-pesquisadora.

5.3. Reflexões sobre a própria prática da professora-pesquisadora num ambiente exploratório-investigativo

Investigar a própria prática não foi uma tarefa simples, pois muitas concepções e paradigmas tiveram que ser rompidos, e, lidar com o novo traz muita insegurança. Ponte (2002) afirma que a investigação sobre a própria prática é “um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional [...]” (PONTE, 2002, p. 3).

Realmente refletir sobre a própria prática permitiu entender melhor o processo de formação da professora-pesquisadora e realizar essa reflexão num contexto de aulas exploratório-investigativas mostrou-se adequado para a produção e reorganização dos saberes docentes que já possuía, pois a busca de caminhos para elaborar tarefas e mediar o trabalho dos alunos foi sempre necessária.

Essa dinâmica de aulas exploratório-investigativas transformou o ambiente da sala de aula em um espaço de troca de saberes, pois Lima e Nacarato (2009) compreendem que tarefas desse tipo proporcionam “o envolvimento dos alunos e do(a) professor(a) em uma dinâmica permeada por troca de conhecimentos, criatividade, desenvolvimento de atitudes indagadoras e de linguagem matemática [...]” (LIMA; NACARATO, 2009, p. 248).

Com essa dinâmica, o papel do professor muda completamente, pois ele é instigado a refletir sobre sua própria prática, a mediar o processo de ensino e aprendizagem, propondo questionamentos e não dando respostas prontas.

O trabalho com as tarefas exploratório-investigativas foi de fato um propulsor para a pesquisa sobre própria prática da professora-pesquisadora, pois durante o processo, ela tornou-se “uma aprendiz e ampliou seu repertório de saberes – a escolha e a seleção de tarefas; a forma de implementar a dinâmica nas aulas; e o momento de socialização e discussão [...]” (LIMA; NACARATO, 2009, p. 249).

Realmente todas as etapas citadas pelas autoras contribuíram para a construção de outra postura enquanto professora. Postura que emergiu a partir das observações e das análises do desempenho dos alunos, durante a realização das tarefas, também apoiada pelas leituras. Uma nova prática surgiu, permeada por um olhar crítico e reflexivo sobre prática pedagógica.

Também é relevante considerar que o trabalho com investigações matemáticas foi transformando a perspectiva da sala de aula. O papel do aluno e do professor mudou significativamente, pois um novo modelo de comunicação foi estabelecido: ambos, professor e alunos, adquirem uma postura mais livre e autônoma, regrada de indagações e troca de saberes (ABREU, 2008). Isso foi percebido claramente durante todo o processo de desenvolvimento desta pesquisa. Primeiramente, quando se iniciaram as leituras e a elaboração das tarefas, e, depois, no ambiente da sala de aula, a partir da realização das tarefas pelos alunos.

O ambiente da sala de aula, sem dúvidas, foi determinante para repensar a prática pedagógica da professora-pesquisadora. Episódios que aconteceram durante a realização das tarefas permitiram repensar todo o processo de ensino e aprendizagem.

Percebemos que a intervenção/mediação da professora-pesquisadora foi muito importante para a aprendizagem dos alunos, mas a sua ausência não proporcionou um trabalho propriamente exploratório-investigativo, porque os alunos se contentaram com uma possibilidade e não se preocuparam em procurar outras possíveis alternativas.

Como pesquisadora, torna-se importante a preocupação em registrar todos os momentos da realização da tarefa pelos alunos, porém ocorreram algumas interferências externas que atrapalharam a coleta de dados, como o barulho, a chegada de outras pessoas na sala de aula, o cartão de memória da filmadora que encheu, a bateria que descarregou, a insistência do uso do celular pelos alunos em momento não apropriado, entre outros, aspectos que fazem parte do movimento da pesquisa científica. Mas de modo geral, os dados coletados possibilitaram responder as questões de pesquisa, permitindo que o olhar sobre a prática e sobre a gestão da sala de aula fosse totalmente modificados.

Por outro lado, ao analisar a postura dos alunos no desenvolvimento das tarefas foi notável a mudança de atitude de cada um. Eles passaram a ter uma postura mais crítica, mais investigativa. Não tinham medo de errar, foram encorajados a responder e a questionar. Nesse ambiente de trabalho, ocorreu sistematicamente a inversão de papéis: “o aluno se liberta da passividade de assistente, característica marcante da cultura escolar, e o professor se liberta da responsabilidade de “transmissor” para assumir uma postura de orientador, mediador e assistente [...]” (ABREU, 2008, p. 138).

De fato, essa inversão de papéis foi claramente observada, embora houvesse muita resistência inicial. Esse fato pode ser explicado porque toda mudança gera insegurança e medo. Muitas interrogações surgiram e ajudaram a trilhar os caminhos para uma prática pedagógica repleta de significado. Colinvaux (2007) afirma que aprender está associado a processos que pressupõem “geração, apropriação, transformação e reorganizações de significações” (COLINVAUX, 2007, p. 32). Nesse sentido, o ambiente investigativo é o espaço propício para que ocorra uma aprendizagem repleta de significados, pois permite ao aluno levantar hipóteses, conjecturar, discutir, refletir, relacionar, generalizar e registrar suas conclusões.

Dessa forma, o contexto de aulas exploratório-investigativas possibilitou a integração entre a prática e a teoria, como professora-pesquisadora, viabilizando de certa maneira, a criação de um ambiente cheio de motivações, interesses e valores, permitindo assim, a produção de saberes docentes ainda não vivenciados pela professora-pesquisadora.

Refletindo sobre o antes e o depois do trabalho com tarefas exploratório-investigativas, observamos o quanto a prática da professora-investigadora se transformou. Antes trabalhava com polígonos a partir da explicação da definição, das propriedades e, em seguida, passava exercícios que eram corrigidos no quadro, os alunos copiavam as respostas e faziam suas correções, sem indagar. Aceitavam tudo como verdade e pronto.

Depois do trabalho com esse tipo de tarefa, a reflexão e o planejamento são ações sistematicamente presentes na prática da professora-pesquisadora, de modo que os alunos possam contribuir mais. Mesmo em exercícios simples, ao invés de dar a resposta, a postura interrogativa é predominante na prática pedagógica, estimulando a participação dos alunos.

A experiência vivida com aulas investigativas possibilitaram mudanças significativas na prática pedagógica da professora-pesquisadora, o que permitiu que os alunos pudessem aprender novos conhecimentos, por meio das diversas situações e da liberdade proporcionada pelo trabalho investigativo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa se propôs a investigar as possíveis contribuições que as tarefas exploratório-investigativas, aliadas ao uso de material didático manipulável, proporcionaram para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e para o processo de reflexão sobre a prática da professora-pesquisadora.

Nesse contexto, a professora-pesquisadora pode analisar e refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem dos seus alunos e também sobre a própria prática, buscando respostas para inquietações que permeavam sua trajetória profissional e acadêmica.

Em busca de respostas é que o processo de pesquisa se iniciou. A partir daí, foram realizadas leituras, reflexões e análises do contexto de aulas investigativas e do ensino de geometria, o que possibilitou avançar no processo de reflexão e de descoberta.

No início, um trabalho solitário, mas que durante o processo tornou-se coletivo, quando iniciou o desenvolvimento da sequência didática com tarefas exploratório-investigativas no ambiente escolar. Isso promoveu a troca de saberes, a inversão de papéis e a reflexão sobre prática pedagógica da professora-pesquisadora.

O contato com esse contexto despertou o interesse pela pesquisa, que se apoia na teoria e na prática. Considerando os resultados, a primeira evidência aponta para os saberes produzidos pelos alunos sobre polígonos, a partir das aulas exploratório-investigativas com o uso de material didático manipulável e, em seguida, como o contexto dessas aulas possibilitaram a reflexão sobre a prática.

Os episódios observados e relatados permitiram uma mudança da postura da professora-pesquisadora e, consequentemente, da postura dos alunos. Dessa forma, as aulas transformam-se num ambiente munido de discussão, de socialização e de produção de conhecimentos matemáticos.

Além disso, o envolvimento dos alunos para realizar as tarefas, o desenvolvimento da linguagem matemática, a capacidade de comunicar as ideias e as habilidades investigativas desenvolvidas, possibilitaram uma aprendizagem de significações (COLINVAUX, 2007), em que o aluno e o professor se tornaram construtores e produtores de conhecimento, mediado pela investigação matemática.

Entretanto, é um desafio o trabalho com esse tipo de tarefas, pois esse contexto pode fazer surgir questões e dúvidas que o professor não sabe responder de imediato e que o leva a estudar e buscar formas de dar continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Além disso, a formação de professores precisa abordar essa metodologia de ensino de matemática, fazendo com que os docentes tenham contato e vivenciam o desenvolvimento de uma tarefa exploratório-investigativa para que possam colocar em prática em sua sala de aula. Foi um grande desafio romper com as concepções do ensino tradicional que estavam cristalizadas.

Percebemos que no trabalho investigativo não existe o certo e o errado, existe sim, relações, conjecturas que precisam ser testadas e que podem ou não ser válidas. Essa possibilidade permite que o aluno tenha uma nova postura no processo de ensino e aprendizagem, buscando caminhos que o levem a descobrir, a generalizar e a relacionar os conhecimentos.

Certamente, o ambiente escolar investigativo promove mudanças no comportamento e na cultura escolar, favorecendo a interação, a participação, o gosto pela matemática, a autonomia e o compartilhamento das ideias. Observamos que o gosto pela matemática aumentou, pois os alunos demonstraram mais prazer em realizar o trabalho.

Ressaltamos também a importância do trabalho em grupo. O mesmo favoreceu a interação e a participação de todos, em que a troca ideias e as discussões eram constantes.

A contribuição das tarefas exploratório-investigativas, com o uso do material didático manipulável, foi significativa, pois possibilitou ao aluno compreender conceitos, observar, manipular, generalizar e registrar suas descobertas. E para o professor permitiu a reflexão sobre a própria prática, indicando mudanças na gestão da sala de aula, bem como a quebra de paradigmas escolares existentes.

Portanto, não devemos considerar o trabalho com tarefas investigativas como a única alternativa de ensino. Esse trabalho é mais uma possibilidade para o ensino da matemática e que contribuiu para o estudo de polígonos.

Outras pesquisas nesse contexto são necessárias, pois nós professores não temos uma formação inicial que garanta a integração entre a teoria e a prática, o que dificulta o trabalho em sala de aula. Também é importante fazer com que as pesquisas cheguem aos professores, com o intuito de ajuda-los a ter outro olhar sobre sua formação e sua prática.

REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, A. M. C. Perímetro ou Área? **Educação Matemática em Revista**. SBEM, Ano 16, n. 35, p. 52-58, mar. 2012.

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; ABRANTES, P. (Org.). **Ensino da Geometria no virar do milénio**. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 51–62, 1999.

ABREU, M. G. S. **Uma investigação sobre a prática pedagógica**: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática – São Carlos: UFSCar, 2008. 192 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2008.

BAIRRAL, M. A. **Instrumentação do ensino da Geometria**. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, v. 1, 119p, 2004.

BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica**. 2004, 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2004.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.2, p. 273-289, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Documento preliminar. 2ª versão. MEC. Brasília, DF, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Lisboa: Porto Editora, 2013.

CASTRO, J.F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**, 2004, 196p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Faculdade de Educação, Universidades Estadual de Campinas, 2004.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem e construção/constituição de conhecimento: reflexões teórico-metodológicas. **Pro-Posições**. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, v. 18, n. 3(54), p. 29-51, set./dez. 2007.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2012.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** v. 3, n. 4, p. 1-16, 1995.

FIORENTINI, D. Grupo de Sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (Org.). **Histórias e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006. p. 13-36.

FONSECA, M.C.F.R., et al. **O ensino de geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

GÓMEZ-CHACÓN, M. I. **Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático.** Madrid: Narcea, 2000.

HENRIQUES, M. D. A Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Tarefas Geométricas. **Bolema.** Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 433-450, ago. 2013.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim Gepem,** Rio de Janeiro, n. 32, p. 3-31, 1994.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, Sérgio**. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 113-134.

KALEFF, A.M.M.R. **Tópicos em ensino de Geometria:** A Sala de Aula frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: Cecierj, 2008.

KALEFF, A. M. M. R. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos... **Educação Matemática em Revista**. SBEM, n. 2, p. 19-25, 1º. sem. 1994.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003.

KALEFF, A.M.M.R. Criatividade, Educação Matemática e Laboratório de Ensino. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2011, Brasília, **Anais...** Brasília: SBEM – Regional, p. 1-20, 2011.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Investigando Geometria: aprendizagens de professoras da educação infantil. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro, 2008.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma nova representação. In: FLORES, C.; ARRUDA, J. P. (Org.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal**: contribuição para a história da educação matemática. São Paulo: Annablume, 2010, p. 65-88.

LEIVAS, J. C. P.; SCHERER, S. Construindo o conceito de alturas de triângulo com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade? **Gepem**, Rio de Janeiro, n. 56, p. 117-133, 2010.

LEODORO, M.P.; BALKINS, M.A.S. Problematizar e participar: elaboração do produto educacional no Mestrado Profissional em Ensino. In: II Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Anais...**, outubro de 2010.

LIMA, C.N.M.F; NACARATO, A.M. A INVESTIGAÇÃO DA PRÓPRIA PRÁTICA: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, v.25, n.02, p. 241-266, ago. 2009.

LORENZATO. S. Como aprendemos e ensinamos geometria. In: _______. (Org.). **Aprender e ensinar geometria**. Campinas: Mercado de Letras, p. 11-33, 2015.

LORENZATO**,** S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO**,** S. (org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores - Campinas. SP: Autores Associados, 2006. p. 3-37.

LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

LORENZATO, S. Por que ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano III, n. 4, p. 1-64, 1º sem. 1995.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, M. de L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **Revista Brasileira de Ensino, Ciência e Tecnologia,** v. 2, n. 3, set./nov. 2009.

MURARI, C.; PEREZ, G. O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries. **Bolema**. Rio Claro (SP). v. 15, n. 18, p. 1-24, set. 2002.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto – São Paulo, SP: **Revista de Educação Matemática.** Ano 9, n. 9-10, p. 1-6 2004.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: **REUNIÃO ANPED**, 23, Caxambu. Disponível em: http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF. Acesso em 27 out. 2016.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2012. p. 77-92.

PASSOS, C. L. B.; LAMONATO, M.; PITON-GONÇALVES, J. Investigações geométricas: reflexões sobre aprendizagens compartilhadas em um grupo. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo, p. 1-12, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, v. 1, n. 1, mar. 1993.

PEREIRA, M. D. Número de diagonais de um polígono: Relato de uma experiência. **Educação Matemática em Revista**. SBEM, Ano. 15, n. 29, p.43-50, 2010.

PEREZ, G. A realidade sobre o ensino da geometria no 1º e 2º graus, no Estado de São Paulo. **A Educação Matemática em Revista**. SBEM, São Paulo, n. 4, 1º sem. 1995.

PROENÇA, M. C. **Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio**. 2008. 200 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2008.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, n. 31, jan./jun., 2009.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. O conhecimento de polígonos e poliedros: uma análise do desempenho de alunos do ensino médio em exemplos e não-exemplos. **Ciência & Educação***,* São Paulo, v. 17, n. 1, p. 199-217, 2011.

PONTE, J. P**.** Investigar a nossa própria prática. In: GTI (Org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM, p. 5-28, 2002. Disponível em: <http://www.ipb.pt/~mjt/documdisciplinas/investigaranossa.pdf>. Acesso em: 31 out. 2016.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: **ACTAS do PROFMAT**. Lisboa: APM, p. 25-39, 2003. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20aprender.pdf> . Acesso em: 15 mar. 2016.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, v. 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.; **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. **PNA,** *2*(4), p. 153-180, 2008. Disponível em: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ponte2008PNA2(4)Investigar.pdf. Acesso em 31/10/2016.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.

RANCAN, G. **Origami e tecnologia: investigando possibilidades para ensinar geometria no ensino fundamental**. 2011. 80f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, PUCRS. Porto Alegre, 2011.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, p. 39-56, 2012.

RÊGO, R. G; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M.; **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

REZENDE, D. P. L. O Laboratório de Ensino de Matemática nos anos finais do ensino fundamental: um relato de experiência. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2015. Vitória. **Anais...** Vitória, 2015, p. 1- 9.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

SANTOS, J. A. S. Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área de figuras planas. **REVEMAT***.* Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 224-238, 2014.

SANTOS, R. S.; BELLEMAIN, P. M. B. A área do paralelogramo no livro didático de matemática: uma análise sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas. **Educação Matemática em Revista.** SBEM, Ano 13, n. 22, p. 25-42, jun. 2007.

SCHEFFER, N. F. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir de mídias: dobradura e software de dinâmico. LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. p. 93-112.

SILVA, J. A. As Relações entre Área e Perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação. **Bolema**. Rio Claro/SP, v. 22, n. 34, p.81-104, 2009.

SILVA, R. S.; LOPES, D. C. V. A construção de conceitos da geometria plana com o uso de materiais concretos e digitais: uma experiência com Tangram. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 179-198, 2013.

TELES, R. A. M.; SÁ, G. M. Um estudo sobre a área de retângulos em livros didáticos de matemática. **Revemat**. Florianópolis, v. 05, n. 1, p.48-60, 2010.

VARGAS, E. T. Geometria no estádio de futebol. **Revemat**: Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 146-162, 2012.

VARGAS, E. T. Geometria Dinâmica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo. **Revemat**. Florianópolis (SC), v. 08, Ed. Especial (dez.), p. 266-277, 2013.

VASCONCELLOS, M. A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 77-106, jul./dez. 2008.

VODUŠEK, E. B.; LIPOVEC, A. The Square as a Figural Concept. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 430-448, abr. 2014.

WICHNOSKI, P., KLÜBER, T. E. Uma revisão crítica da tendência investigação matemática no Brasil. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, Chiapas, México. **Anais...** Chiapas, México, p. 1-9, 2015.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: Como educar. Porto Alegre, 1998.

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (para pais ou responsáveis)

Título da pesquisa: Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos

Pesquisadores responsáveis: Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro (orientador) Dayselane Pimenta Lopes Rezende (mestranda/professora)

Caros senhores pais ou responsáveis;

Seu (sua) filho (a) está sendo convidado (a) a participar como voluntário(a) em uma pesquisa educacional que tem como objetivo investigar as possíveis contribuições que as atividades exploratório-investigativas proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser desenvolvida, pretendemos: guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas aulas de Matemática seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações; gravar, em áudio, as falas e conversas dos alunos durante as aulas de Matemática; filmar os alunos enquanto realizam as atividades de Matemática; realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que a participação do seu (sua) filho(a) é voluntária e não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Seu (sua) filho(a) é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição. A participação é confidencial, em hipótese alguma o material coletado nas observações, nas gravações em áudio e vídeo e nas entrevistas dos alunos será divulgado sem autorização. Todo o material coletado ficará sob os meus cuidados, assegurando-se o sigilo sobre a participação dos envolvidos na pesquisa. Caso seja autorizado, os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado. Nenhuma informação que permita a identificação do seu filho será utilizada, pois serão utilizados nomes fictícios.

Caso você não autorize a análise dos registros escritos do (a) seu (sua) filho(a), ainda assim eles serão coletados, porém não os utilizaremos em nosso estudo e nem os manteremos em bancos de dados. Eles poderão, entretanto, ser usados por mim, para fins didáticos, computados como exercício escolar ou como parte da avaliação escolar. Caso você não autorize a gravação em áudio das falas do (a) seu(sua) filho(a) com colegas durante as aulas de matemática e/ou gravação em vídeo de suas atividades na sala de aula enquanto realiza as tarefas propostas, respeitaremos sua decisão e não faremos gravação em áudio ou vídeo do(a) seu(sua) filho(a) e/ou do seu grupo. Em quaisquer dos casos, a recusa não acarretará nenhuma sanção ao aluno (a). A recusa também não o (a) eximirá de participar normalmente das atividades escolares e do estudo da unidade de ensino.
Em caso de dúvida, você pode entrar em contato comigo na escola em que seu filho estuda.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

____

Assinatura da professora/pesquisadora

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO DO (A) ALUNO (A) COMO SUJEITO NA PESQUISA: Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos.

Eu, ____ li e entendi as informações e os detalhes descritos neste documento. Autorizo a participação do meu (minha) filho (a) nesta pesquisa de acordo com os procedimentos descritos no corpo deste documento. Autorizo a gravação em áudio e vídeo das falas de meu (minha) filho(a), bem como a coleta de atividades, trabalhos e provas desenvolvidas por ele(a) durante a realização da pesquisa. Todo o material coletado para o estudo pode ser guardado sob os cuidados da professora-pesquisadora e utilizado na dissertação desta pesquisa e em outras pesquisas de natureza educacional.

Eu, voluntariamente, aceito que meu (minha) filho (a) participe desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Porciúncula, ____ de ___________________ de 2016.

____

Assinatura do responsável pelo (a) aluno(a)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (para os alunos)

Título da pesquisa: Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos

Pesquisadores responsáveis: Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro (orientador) Dayselane Pimenta Lopes Rezende (mestranda/professora)

Caros(as) alunos (as),

Você está sendo convidado (a) a participar como voluntário (a) em uma pesquisa educacional que tem como objetivo investigar as possíveis contribuições que as atividades exploratório-investigativas proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser desenvolvida, pretendemos: guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas aulas de Matemática seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações; gravar, em áudio, as falas e conversas dos alunos durante as aulas de Matemática; filmar os alunos enquanto realizam as atividades de Matemática; realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que como participante dessa pesquisa, você pode fazer perguntas sobre a pesquisa a qualquer momento e tais questões serão respondidas. A participação é confidencial. Apenas os pesquisadores terão acesso à sua identidade. No caso de haver publicações ou apresentações relacionadas à pesquisa, nenhuma informação que permita de você será revelada, pois serão usados nomes fictícios. Sua participação é voluntária e você é livre para deixar de participar na pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição. Não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Os benefícios serão indiretos, na medida em que o que aprendermos servirá para o desenvolvimento do ensino da Matemática, o que poderá beneficiar alunos (as) presentes e futuros. Caso você não autorize a análise dos seus registros escritos, ainda assim eles serão coletados, porém não os utilizaremos em nosso estudo e nem os manteremos em bancos de dados. Eles poderão, entretanto, ser usados pela professora, para fins didáticos, computados como exercício escolar ou como parte da avaliação escolar. Caso você não autorize a gravação em áudio das suas falas com colegas durante as aulas de matemática e/ou gravação em vídeo de suas atividades na sala de aula enquanto realiza as tarefas propostas, respeitaremos sua decisão e não faremos gravação em áudio ou vídeo de você e/ou do seu grupo. Em quaisquer dos casos, a recusa não acarretará nenhuma sanção a você. A recusa também não o (a) eximirá de participar normalmente das atividades escolares e do estudo da unidade de ensino. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado.

Em caso de dúvida, estarei à disposição para saná-las a qualquer momento.

____

Assinatura da professora/pesquisadora

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO DO (A) ALUNO (A) COMO SUJEITO NA PESQUISA: Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos

Eu, ____ li e entendi as informações e os detalhes descritos neste documento. Eu autorizo a coleta de registros escritos feitos por mim – atividades, trabalhos, respostas a questões e demais anotações feitas durante as aulas de Matemática, e autorizo a gravação em áudio e vídeo de minhas falas e conversas com colegas. Estou ciente que o material coletado durante a realização desta pesquisa serão guardados sob os cuidados da professora-pesquisadora e utilizados em pesquisas de natureza educacional.

Eu, voluntariamente, aceito minha participação nessa pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento e gostaria de ser mencionado na pesquisa com o nome de ______________________________.

Porciúncula, ____ de ___________________ de 2016.

____________________ ______________________________

Assinatura do (a) aluno(a)