Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado em Matemática

Artur Afonso Guedes Rossini

Folheações Algébricas Projetivas

Juiz de Fora

2011

Artur Afonso Guedes Rossini

Folheações Algébricas Projetivas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Álgebra, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Co-orientadora: Profª. Drª. Flaviana Andréa Ribeiro

Juiz de Fora

2011

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar-me até aqui e permitir a conclusão desta fase.

A minha orientadora *Joana Darc Antonia Santos da Cruz* que propôs este tema e muito me auxiliou em seu estudo, sempre com paciência e boa vontade.

A minha co-orientadora *Flaviana Andréa Ribeiro* por compartilhar os momentos de angústia na execução deste trabalho, sempre ajudando e propondo melhorias neste texto.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, pela formação que me proporcionaram com seus ensinamentos.

Aos meus pais Sérgio e Laura, por todo apoio que me deram para realizar este estudo.

A Aline, por todo companherismo, tolerância e por ser a pessoa tão especial que é para mim.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro nos meses iniciais de meu mestrado, e à Capes, pelo auxílio financeiro nos momentos finais.

RESUMO

Uma folheação algébrica do plano projetivo sobre um corpo k pode ser dada tanto por um campo de vetores como por uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$, já que dimensão um e codimensão um são a mesma noção visto que a dimensão de $\mathbb{P}^2$ é igual a 2. Então surge uma pergunta natural: Como se relacionam os campos vetoriais e as 1-formas em $\mathbb{P}^2$? Veremos que uma 1-forma ω e um campo de vetores $\mathcal{X}$ definem a mesma folheação do plano projetivo quando $\omega(p)(\mathcal{X}(p)) = 0$ para todo ponto $p \in \mathbb{P}^2$. Uma segunda questão é a existência de curvas algébricas invariantes por uma folheação de $\mathbb{P}^2$. Originalmente, Poincaré formulou o seguinte problema: É possível limitar o grau de uma curva algébrica invariante por um campo de vetores em termos do grau do campo de vetores? A resposta para este problema é negativa, como podemos ver no Exemplo 3.18. Entretanto adicionando-se algumas hipóteses sobre tal curva invariante este problema pode possuir resposta positiva. No caso em que tal curva invariante é suave, mostra-se que o grau da curva é no máximo igual ao grau do campo vetorial mais um. Se uma curva invariante não for suave, mostra-se que ainda é possível limitar o grau desta curva em termos do grau da folheação e da *regularidade* do seu conjunto de singularidades.
Palavras-chave: Folheação Algébrica. Campo de vetores. Problema de Poincaré.

ABSTRACT

An algebraic foliation of the projective plane over a field k can be given either by a vector field or a 1-form in $\mathbb{P}^2$, as dimension one and codimension one are the same notion since $\dim(\mathbb{P}^2) = 2$. Then a natural question arises: How do vector fields and 1-forms in $\mathbb{P}^2$ relate? We will see that an 1-form ω is related with a vector field $\mathcal{X}$ belonging to the kernel of ω, that is, ω and $\mathcal{X}$ define the same foliation of the projective plane when $\omega(p)(\mathcal{X}(p)) = 0$ for all points $p \in \mathbb{P}^2$. A second question concerns about the existence of algebraic curves that are invariant by a foliation of $\mathbb{P}^2$. Originally, Poincaré formulated the following problem: Is it possible to bound the degree of an invariant curve under a vector field in terms of the degree of the field? The problem has a negative answer, but by adding some hypothesis it can be reformulated in order to have a positive answer. If we assume that this invariant curve is smooth, we show that the degree of the curve is at most the degree of the vector field plus one. If an invariant curve is not smooth, we show that its degree can be limited in terms of *regularity* of its set of singularities.
Key-words: Algebraic Foliations. Vector fields. Poincaré's Problem.

SUMÁRIO

1 **Introdução** 8

2 **Derivações e Espaço Tangente** 10

2.1 Derivações 10

2.2 Espaço Tangente 12

2.3 O Módulo das Diferenciais de Kähler 17

2.4 1-Formas Diferenciais Regulares 20

2.5 O produto exterior de 1-formas 22

3 **Folheações em** $\mathbb{P}^2$ 24

3.1 Campos Vetoriais em $\mathbb{P}^2$ 24

3.2 1-formas em $\mathbb{P}^2$ 32

3.3 Relações entre Campos de Vetores e 1-Formas 37

3.4 Curvas Invariantes 41

3.5 O Problema de Poincaré para Folheações em $\mathbb{P}^2$ 48

4 **Noções sobre feixes** 50

4.1 Feixes sobre espaços topológicos 50

4.2 O stalk de um feixe num ponto 53

4.3 O espectro de um anel 55

4.4 O esquema projetivo 62

4.5 Feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos 64

4.6 Feixificação de pré-feixes 66

4.7 Homomorfismos de feixes 68

5 **Folheações de dimensão um em** $\mathbb{P}^n$ 79

5.1 Campos vetoriais em $\mathbb{P}^n$ 79

5.2 Hipersuperfícies suaves invariantes 82
5.3 Feixes de ideais e regularidade em $\mathbb{P}^2$ 89
Referências 100

1 Introdução

Ao estudar a existência de soluções algébricas para equações diferenciais polinomiais no plano complexo, Henri Poincaré em [21] observou que se for possível limitar o grau máximo de uma possível solução então a procura por tal solução pode ser feita através de operações algébricas. Então, a seguinte pergunta surgiu de maneira natural: *É possível limitar o grau de uma solução algébrica de uma equação diferencial polinomial em termos do seu grau?* Tal problema é atualmente conhecido como *Problema de Poincaré*. A resposta para tal pergunta é negativa, como veremos adiante. Mas em 1991, Cerveau e Lins Neto mostraram em [6] que quando as singularidades de uma curva solução são todas do tipo nodal então o grau da curva é no máximo o grau da folheação mais dois. Assim a pergunta originalmente formulada por Poincaré foi reformulada da seguinte maneira, já na linguagem moderna: *É possível limitar o grau de uma curva invariante por uma folheação em termos do grau da folheação e de outros invariantes da curva, ou colocando-se propriedades para estas curvas invariantes?*

Algumas soluções para o Problema de Poincaré foram encontradas ao longo das últimas décadas. Em 1994, Carnicer em [5] encontrou a mesma cota para o grau de uma curva invariante que Cerveau e Lins Neto, quando a curva invariante não contém nenhuma singularidade dicrítica da folheação. Em 1997, Campillo e Carnicer, em [4] exibem limites em termos da resolução de singularidades da curva invariante. Outras soluções podem ser encontradas em [23], [24], [3] e [20].

Neste trabalho apresentamos duas soluções para o Problema de Poincaré. A primeira foi dado por Esteves em [10] supondo que a curva invariante é suave. A segunda foi dada por Esteves e Kleiman em [12] em termos da regularidade do lugar singular da curva.

No Capítulo 1, apresentamos as noções de derivações, diferenciais e 1-formas, que serão essenciais na definição de folheações.

No Capítulo 2, introduzimos as noções de campos de vetores em $\mathbb{P}^2$, que nos darão a definição de folheação de $\mathbb{P}^2$. Também definimos o que é uma curva invariante por uma folheação e discutimos o Problema de Poincaré em $\mathbb{P}^2$.

No Capítulo 3, exibimos as noções básicas de feixes, culminando na noção de cohomologia.

No capítulo 4, estudamos folheações de dimensão um em $\mathbb{P}^n$, $n > 2$ e apresentamos uma cota superior para o grau de uma hipersuperfície suave invariante por uma folheação e encontramos uma outra solução para o Problema em $\mathbb{P}^2$, utilizando a linguagem de cohomologia.

2 Derivações e Espaço Tangente

Neste capítulo estudaremos as relações entre derivações e vetores tangentes sobre uma variedade algébrica afim. Ao longo deste texto, k denotará um corpo algebricamente fechado.

2.1 Derivações

Definição 2.1. Sejam R um anel comutativo, A uma R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Uma R-derivação de A em M é uma aplicação R-linear $D : A \to M$ tal que $D(ab) = aD(b) + bD(a)$, para todos $a, b \in A$.

Seguem da definição de R-derivação as seguintes propriedades:

P1)$D(1) = 0$. De fato, temos que $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1D(1) + 1D(1) = D(1) + D(1)$, e portanto $D(1) = 0$.

P2)$D(r) = 0$ para todo $r \in R$.

Com efeito, $D(r) = D(1 \cdot r) = rD(1) = r \cdot 0 = 0$.

Exemplo 2.1. O exemplo canônico de derivação é a derivação parcial. Podemos ver o anel de polinômios em n variáveis, denotado por $k[x_1, \ldots, x_n]$, como k-álgebra, via inclusão, e a derivação parcial em relação a qualquer variável é uma k-derivação.

Definição 2.2. Sejam R um anel, A uma R-álgebra e M um A-módulo. Denotaremos o conjunto das R-derivações de A em M por $Der_R(A, M)$, ou seja,

$$Der_R(A, M) = \{D : A \to M;\ D \text{ é } R\text{-derivação}\}.$$

Para $a, b \in A$ e $D, D' \in Der_R(A, M)$ definimos

$$\begin{array}{rccc} D + D' : & A & \longrightarrow & M \\ & a & \longmapsto & D(a) + D'(a) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} aD: & A & \longrightarrow & M \\ & b & \longmapsto & aD(b). \end{array}$$

Com estas operações, $Der_R(A, M)$ tem estrutura de A-módulo.

Sejam A e B R-álgebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de R-álgebras. Se N é um B-módulo, então N pode ser visto como um A-módulo, definindo para cada $a \in A$ e $n \in N$, $an = \varphi(a)n$.

Lema 2.3. *Fixado um homomorfismo de R-álgebras $\varphi : A \to B$, se $D \in Der_R(B, N)$ então $D \circ \varphi \in Der_R(A, N)$.*

Demonstração. Dados $r \in R$ e $a, b \in A$ temos

$$(D \circ \varphi)(ra + b) = D(\varphi(ra + b)) = D(r\varphi(a) + \varphi(b)) = rD(\varphi(a)) + D(\varphi(b)) =$$
$$= r(D \circ \varphi)(a) + (D \circ \varphi)(b).$$

Logo, $D \circ \varphi$ é R-linear. Além disso,

$$D \circ \varphi(ab) = D(\varphi(ab)) = D(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi(a)D(\varphi(b)) + \varphi(b)D(\varphi(a)) =$$
$$= a(D \circ \varphi)(b) + b(D \circ \varphi)(a).$$

Desta forma, $D \circ \varphi$ é uma R-derivação. □

Proposição 2.4. *Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de R-álgebras, então a aplicação $\phi : Der_R(B, N) \to Der_R(A, N)$, definida por $\phi(D) = D \circ \varphi$, é um homomorfismo de A-módulos cujo núcleo é $Der_A(B, N)$.*

Demonstração. Para $D, D' \in Der_R(B, N)$ e $a \in A$, valem

$$\phi(D + D') = (D + D') \circ \varphi = D \circ \varphi + D' \circ \varphi = \phi(D) + \phi(D')$$

$$\phi(aD) = (aD) \circ \varphi = a(D \circ \varphi) = a\phi(D).$$

Logo, ϕ é homomorfismo de A-módulos.

Se $D \in \ker(\phi)$, então $D(\varphi(a)) = 0$, $\forall\, a \in A$. Dessa forma, para cada $b \in B$ e $a \in A$,

$$D(ab) = D(\varphi(a)b) = \varphi(a)D(b) + bD(\varphi(a)) = \varphi(a)D(b) = aD(b).$$

Portanto $D \in Der_A(B, N)$ e $\ker(\phi) \subseteq Der_A(B, N)$. Por outro lado, se $D \in Der_A(B, N)$ temos $D(\varphi(a)) = D(a \cdot 1_B) = aD(1_B) = 0$ para todo $a \in A$, isto é, $D \circ \varphi = 0$, ou seja, $\phi(D) = 0$ e $D \in \ker(\phi)$. □

2.2 Espaço Tangente

Seja V uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$, isto é, V é o conjunto dos zeros comuns de uma coleção de polinômios em n variáveis. Seja $I = \boldsymbol{I}(V)$ o ideal dos polinômios que se anulam nos pontos de V. Como $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel Noetheriano, existem polinômios $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. O anel $k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ é chamado anel de coordenadas de V. Fixemos $p \in V$ e consideremos a reta em $\mathbb{A}^n$ dada por $\ell = \{p + tv;\ t \in k\}$, com $v = (v_1, \ldots, v_n)$ fixo e não nulo. Então,

$$\ell \cap V = \{p + tv;\ f_i(p + tv) = 0,\ \forall\ i = 1, \ldots, s\}.$$

Seja $\partial_i : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$ a derivação parcial em relação a x_i. A expansão em série de Taylor de cada f_j em p, $j = 1, \ldots, s$, é

$$f_j(p + tv) = f_j(p) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(p) t v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(p) t^2 v_i v_k + \ldots,$$

onde os termos a partir do segundo somatório apresentam expoente maior ou igual a 2 em t. Como $f_j(p) = 0$, ficamos com

$$f_j(p + tv) = t \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(p) v_i + t^2(\cdots).$$

Então, $t = 0$ é raiz múltipla das equações $f_j(p + tv) = 0, j \in \{1, \ldots, s\}$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(p) \cdot v_i = 0,\ \forall\ j = 1, \ldots, s. \tag{2.1}$$

Neste caso, dizemos que ℓ é tangente a V em p e que v é um vetor tangente a V em p.

Definição 2.5. Seja V uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$. O espaço tangente a V em p, denotado por T_pV, é o espaço vetorial definido por

$$T_pV := \{v \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\} |\ v \text{ é vetor tangente à } V \text{ em } p\} \cup \{0\}.$$

Veremos a seguir que o espaço tangente a V em p pode ser identificado com uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$. Para isto, seja T'_pV a coleção dos pontos $q \in \mathbb{A}^n$ que pertencem a alguma reta tangente a V em p, ou seja,

$$T'_pV = \boldsymbol{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_1(p) \cdot (x_i - p_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_s(p) \cdot (x_i - p_i) \right).$$

Dado $q \in T'_pV$ existem $t \in k$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ que satisfazem o sistema de equações (2.1), tais que $q = p + tv$ e assim $q - p = tv$. Como $tv \in T_pV$, temos que $q - p$ é um vetor tangente a V em p.

Reciprocamente, dado um vetor $w \in T_pV$, seja $q = p + w$. Então, q pertence a uma reta tangente a V em p, isto é, $q \in T'_pV$, e $w = q - p$. Com estas considerações, vamos identificar T'_pV com T_pV.

Exemplo 2.2. Seja k um corpo infinito. Como $\boldsymbol{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$, o espaço tangente a $\mathbb{A}^n$ em qualquer ponto é o próprio $\mathbb{A}^n$.

Exemplo 2.3. O espaço tangente à curva $y(y - x^2) = 0$ em $(0,0)$ é todo $\mathbb{A}^2$, mas as suas componentes irredutíveis $\boldsymbol{V}(y)$ e $\boldsymbol{V}(y - x^2)$ tem a mesma tangente $y = 0$ em (0,0).

No que segue, vamos estabelecer uma relação entre espaço tangente e derivações.

Lema 2.6. *Dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{A}^n$, a aplicação $D_v : k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]$, dada por $D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i$ é uma k-derivação.*

Demonstração. Sejam $a \in k$ e $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. Temos que

$$D_v(af + g) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i (af + g) = \sum_{i=1}^{n} [a v_i \partial_i(f) + v_i \partial_i(g)] =$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(f) + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(g) = aD_v(f) + D_v(g).$$

Portanto, D_v é k-linear. E também,

$$D_v(fg) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(fg) = \sum_{i=1}^{n} v_i [f \partial_i(g) + g \partial_i(f)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f v_i \partial_i(g) + \sum_{i=1}^{n} g v_i \partial_i(f) = fD_v(g) + gD_v(f).$$

Logo, D_v é k-derivação. □

Para cada ponto $p \in V$ fixado e elementos $\overline{f}(x_1, \dots, x_n) \in k[V]$ e $a \in k$, definimos $\overline{f}(x_1, \dots, x_n) \cdot a := f(p)a$. Observemos que esta operação está bem definida, pois se $\overline{f} = \overline{g}$, então $f(p) - g(p) = 0$, donde conseguimos $f(p) = g(p)$. Com esta operação de multiplicação, k é um $k[V]$-módulo, o qual denotaremos por k_p.

Proposição 2.7. *Sejam v um vetor tangente à V em p e $D_v = \sum v_j \partial_j$ como definido no Lema 2.6. A aplicação $D : k[V] \to k_p$ definida por $D(\overline{f}) = D_v(f)(p)$ é uma k-derivação.*

Demonstração. Vejamos que D está bem definida. Se $\overline{f} = \overline{g}$, então $f - g \in I$. Como v é um vetor tangente, $\sum v_i \partial_i (f-g)(p) = 0$, donde conseguimos $\sum v_i \partial_i(f)(p) = \sum v_i \partial_i(g)(p)$, isto é, $D(\overline{f}) = D(\overline{g})$.

Como $D(a\overline{f} + \overline{g}) = D_v(af + g)(p) = aD_v(f)(p) + D_v(g)(p) = aD(\overline{f}) + D(\overline{g})$, segue que D é k-linear. Além disso,

$$D(\overline{fg}) = D_v(fg)(p) = [fD_v(g)](p) + [gD_v(f)](p) =$$
$$= f(p)D_v(g)(p) + g(p)D_v(f)(p) = \overline{f}D(\overline{g}) + \overline{g}D(\overline{f}),$$

o que mostra que D é k-derivação. □

Queremos mostrar uma espécie de recíproca da Proposição 2.7. Antes disso, precisamos de mais um resultado.

Lema 2.8. *Seja B um $k[x_1, \ldots, x_n]$-módulo. Se $D : k[x_1, \ldots, x_n] \to B$ é uma k-derivação então $D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\partial_i(f)$.*

Demonstração. Sendo $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, temos $D(f) = \sum a_\alpha D(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n})$. Usando indução em n, conseguimos

$$D(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = D(x_1^{\alpha_1})x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + \ldots + x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots D(x_n^{\alpha_n}).$$

Vejamos que $D(x_i^{\alpha_i}) = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} D(x_i)$. Com efeito, isto é óbvio para $\alpha_i = 1$. Suponha que seja verdade quando $\alpha_i = m$. Então,

$$D(x_i^{m+1}) = D(x_i^m \cdot x_i) = x_i D(x_i^m) + x_i^m D(x_i) = m x_i^m D(x_i) + x_i^m D(x_i) = (m+1)x_i^m D(x_i).$$

Logo

$$D(f) = \sum_{\alpha} a_\alpha D(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i,\alpha} a_\alpha \alpha_i x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i - 1} \ldots x_n^{\alpha_n} D(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f) D(x_i).$$ □

A proposição seguinte mostra que todo elemento de $Der_k(k[V], k_p)$ pode ser obtido através de um vetor tangente a V em p.

Proposição 2.9. *Seja $D \in Der_k(k[V], k_p)$. Existe um vetor tangente $v \in T_pV$ tal que $D(\overline{f}) = D_v(f)(p)$, para todo $\overline{f} \in k[V]$.*

Demonstração. Consideremos a k-derivação $\tilde{D} = D \circ \pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to k_p$, onde o homomorfismo $\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[V]$ é a projeção canônica $\pi(f) = \overline{f}$. Sejam $\tilde{D}(x_i) = v_i$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Para qualquer $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$,

$$D_v(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{D}(x_i)\partial_i(f)(p) = \tilde{D}(f)(p) = \tilde{D}(f),$$

pelo Lema 2.8. Mas $\tilde{D}(f) = (D \circ \pi)(f) = D(\overline{f})$, donde $D_v(f)(p) = D(\overline{f})$.

Se $I(V) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, então $\overline{f_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, s$ e portanto

$$D_v(f_j)(p) = D(\overline{f_j}) = D(0) = 0,$$

e assim $v \in T_pV$. □

As Proposições 2.7 e 2.9 implicam que existe uma bijeção entre o conjunto de vetores tangentes a V em p e o conjunto das k-derivações $Der_k(k[V], k_p)$, a saber,

$$\begin{array}{rccl} \psi : & T_pV & \to & Der_k(k[V], k_p) \\ & v & \mapsto & D \end{array} \tag{2.2}$$

onde $D(\overline{f}) = D_v(f)(p)$. Mais ainda, para quaisquer $a \in k$ e $v, w \in T_pV$ vale que

$$D_{av+w} = \sum_{i=1}^{n} (av_i + w_i)\partial_i = a \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \partial_i = aD_v + D_w$$

e portanto, $\psi(av + w) = D_{av+w} = aD_v + D_w = a\psi(v) + \psi(w)$. Assim, ψ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais T_pV e $Der_k(k[V], k_p)$.

O isomorfismo ψ nos dá a seguinte definição de espaço tangente.

Definição 2.10. Sejam V uma variedade algébrica afim e $p \in V$. Definimos T_pV, o espaço tangente a V em p, como sendo o k-espaço vetorial dado por

$$T_pV := Der_k(k[V], k_p).$$

Exemplo 2.4. Para todo $p \in \mathbb{A}^n$, o espaço vetorial $T_p\mathbb{A}^n$ tem como base o conjunto

$$\beta := \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right\},$$

onde $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

De fato, pela Proposição 2.9, temos que para toda derivação $D \in Der_k(k[x_1, \ldots, x_n], k_p)$ existe um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n$ tal que $D = D_v$. Pelo Lema 2.6, temos que $D_v(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Logo β gera $T_p\mathbb{A}^n$. Além disso, se existirem $a_1, \ldots, a_n \in k$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para toda $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, então $\sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = a_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto β é LI.

Definição 2.11. Seja $\Phi : V \to W$ um morfismo entre variedades algébricas afins. Existem um correspondente homomorfismo de anéis $\Phi^* : k[W] \to k[V]$ e um homomorfismo induzido $d_p\Phi : Der_k(k[V], k_p) \to Der_k(k[W], k_{\Phi(p)})$, isto é, uma k-transformação linear dada por $d_p\Phi(D) = D \circ \Phi^*$, chamada *diferencial de* Φ *em* p.

É fácil ver que $d_p(\Phi \circ \Psi) = d_{\Psi(p)}\Phi \circ d_p\Psi$ e que $d_p\Phi$ é um isomorfismo se Φ o for.

Proposição 2.12. *Seja* V *uma variedade algébrica em* $\mathbb{A}^n$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *e* V_f *o aberto de* V *definido por* $V_f := \{x \in V |\ f(x) \neq 0\}$. *O conjunto* V_f *é uma variedade afim e* T_pV *é isomorfo a* $T_p(V_f)$.

Demonstração. Consideremos $F(x_1, \ldots, x_n, t) = 1 - tf(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n, t]$ e $W := \{(x, t) \in V \times \mathbb{A}, F(x, t) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & V_f & \longrightarrow & W \\ & x & \longmapsto & (x, 1/f(x)). \end{array}$$

A aplicação Φ é claramente um isomorfismo e

$$k[V_f] \cong k[x_1, \ldots, x_n, t]/\langle 1 - tf(x_1, \ldots, x_n)\rangle \cong k[V][1/f].$$

Para todo elemento $D \in T_pV = Der_k(k[V], k_p)$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} D' : & k[V_f] = k[V][1/f] & \longrightarrow & k_p \\ & \dfrac{a}{f^m} & \longmapsto & \dfrac{f^m(p)D(a)(p) - mf^{m-1}(p)D(f)(p)a(p)}{(f^m)^2(p)}. \end{array}$$

é uma k-derivação e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi : & T_pV & \longrightarrow & T_p(V_f) \\ & D & \longmapsto & D' \end{array}$$

é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. $\square$

Corolário 2.13. *Se U for um aberto afim de V contendo p, então $T_pU \cong T_pV$.*

O Corolário 2.13 expresssa o caráter local da definição de espaço tangente de uma variedade afim. Podemos então fazer a seguinte definição.

Definição 2.14. Seja V uma variedade afim ou projetiva. Definimos o espaço tangente a V em $p \in V$, denotado por T_pV, como sendo T_pU onde U é qualquer aberto afim de V contendo p.

2.3 O Módulo das Diferenciais de Kähler

Seja A uma k-álgebra. Nesta seção, vamos definir um A-módulo $\Omega_{A|k}$, juntamente com uma k-derivação $d : A \to \Omega_{A|k}$, que satisfaça a seguinte propriedade universal: Para qualquer A-módulo M e qualquer k-derivação $D : A \to M$ existe um único homomorfismo de A-módulos $f : \Omega_{A|k} \to M$ tal que $D = f \circ d$.

Proposição 2.15. *Seja A uma k-álgebra. Existem um A-módulo $\Omega_{A|k}$ e uma k-derivação $d : A \to \Omega_{A|k}$ tais que para todo A-módulo M e para toda k-derivação $D : A \to M$, existe um único homomorfismo de A-módulos $\varphi_D : \Omega_{A|k} \to M$ tal que $D = \varphi_D \circ d$, isto é, $\exists!\ \varphi_D$ que faz o seguinte diagrama comutar,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "D"'] & \Omega_{A|k} \arrow[dl, "\varphi_D"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Consideremos o homomorfismo de k-álgebras $\phi : A \otimes_k A \to A$ dado por $\phi(a \otimes b) = ab$ e seja $I = \ker \phi$. Definamos $\Omega_{A|k} = I/I^2$. Podemos ver $\Omega_{A|k}$ como A-módulo definindo $a(\sum_{i=1}^{t} \overline{x_i \otimes y_i}) = (a \otimes 1) \sum_{i=1}^{t} \overline{x_i \otimes y_i}$.

Definamos também a função

$$\begin{array}{rccl} d: & A & \longrightarrow & \Omega_{A|k} \\ & a & \longmapsto & \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}. \end{array}$$

Dados $c \in k$ e $a, b \in A$ vale

$$d(ca+b) = \overline{1 \otimes (ca+b) - (ca+b) \otimes 1} = \overline{[c(1 \otimes a) + 1 \otimes b] - [c(a \otimes 1) + b \otimes 1]} =$$
$$= c\, \overline{1 \otimes a - a \otimes 1} + \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} = cda + db.$$

Logo, d é k-linear. Além disso, d é uma k-derivação pois

$$d(ab) = \overline{1 \otimes ab - ab \otimes 1} = \overline{(1 \otimes a)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1)} =$$
$$= \overline{(1 \otimes a)(1 \otimes b - b \otimes 1)} + \overline{(b \otimes 1)(1 \otimes a - a \otimes 1)} = adb + bda.$$

Agora, sejam M um A-módulo e $D : A \to M$ uma k-derivação.

Definamos um homomorfismo de A-módulos $\Phi : A \otimes_k A \to M$ por $\Phi(a \otimes b) = aD(b)$.

Se $\left(\sum\limits_{i=1}^{t}(a_i \otimes b_i)\right) \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{s}(c_j \otimes d_j)\right) \in I^2$, com $\sum\limits_{i=1}^{t}(a_i \otimes b_i) \in I$ e $\sum\limits_{j=1}^{s}(c_j \otimes d_j) \in I$, então segue que $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i b_i = 0$ e $\sum\limits_{j=1}^{s} c_j d_j = 0$. Logo

$$\Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{t}(a_i \otimes b_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{s}(c_j \otimes d_j)\right)\right) = \Phi\left(\sum_{i,j}(a_i c_j \otimes b_i d_j)\right) = \sum_{i,j}\Phi(a_i c_j \otimes b_i d_j) =$$
$$= \sum_{i,j} a_i c_j D(b_i d_j) = \sum_{i,j} a_i c_j b_i D(d_j) + \sum_{i,j} a_i c_j d_j D(b_i) = 0.$$

Sendo Φ linear, conseguimos $\Phi(I^2) = 0$ e podemos considerar o seguinte homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_D : & \Omega_{A|k} & \longrightarrow & M \\ & \sum\limits_{i=1}^{t} \overline{x_i \otimes y_i} & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{t} x_i D(y_i). \end{array}$$

Temos que $\varphi_D \circ d = D$. De fato, para todo $a \in A$ vale

$$\varphi_D \circ d(a) = \varphi_D(\overline{1 \otimes a - a \otimes 1}) = \varphi_D(\overline{1 \otimes a}) - \varphi_D(\overline{a \otimes 1}) = 1D(a) - aD(1) = D(a).$$

Para vermos a unicidade de φ_D, seja $\tau : \Omega_{A|k} \to M$ um homomorfismo de A-módulos tal que $D = \tau \circ d$. Então,

$$\tau(\sum \overline{x_i \otimes y_i}) = \tau(\sum (\overline{x_i \otimes 1})(\overline{1 \otimes y_i - y_i \otimes 1})) = \tau(\sum x_i d y_i) = \sum x_i \tau(d y_i) =$$
$$= \sum x_i D(y_i) = \varphi_D(\sum \overline{x_i \otimes y_i}),$$

onde na primeira igualdade usamos que $\sum x_i \otimes y_i \in I$ se, e somente se, $\sum x_i y_i = 0$. Logo, $\tau = \varphi_D$. $\square$

O módulo $\Omega_{A|k}$ construído acima é chamado de *módulo das diferenciais de Kähler*. Observamos que a este módulo está associada a k-derivação d.

Proposição 2.16. *O ideal I da demonstração da Proposição 2.15 é gerado pelos elementos $1 \otimes a - a \otimes 1,\ a \in A$ como A-módulo.*

Demonstração. Sendo $\phi(1 \otimes a - a \otimes 1) = a - a = 0$, temos $\langle 1 \otimes a - a \otimes 1 |\ a \in A\rangle \subseteq \ker \phi = I$. Reciprocamente, se $\sum\limits_{i=1}^{s}(a_i \otimes b_i) \in I$, então $\sum\limits_{i=1}^{s} a_i b_i = 0$ e portanto vale

$$\sum_{i=1}^{s}(a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{s}[(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(-1 \otimes b_i) + (1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(-1 \otimes b_i) + \sum_{i=1}^{s}(1 \otimes a_i b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}[(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(-1 \otimes b_i)] + (1 \otimes \sum_{i=1}^{s} a_i b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}[(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)](-1 \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{s}(-1 \otimes b_i)(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \in \ \langle 1 \otimes a - a \otimes 1 \mid a \in A\rangle,$$

e como $(-1 \otimes b_i) \in A \otimes_k A$ pode ser identificado com $-b_i \in A$, temos o resultado. □

Corolário 2.17. *$\Omega_{A|k}$ é gerado como A-módulo pelos elementos da, com $a \in A$.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 2.16 temos $I = \langle 1 \otimes a - a \otimes 1\rangle$ como A-módulo. Assim, sendo $\Omega_{A|k} = \dfrac{I}{I^2}$, temos $\Omega_{A|k} = \langle \overline{1 \otimes a - a \otimes 1} |\ a \in A\rangle = \langle da \rangle$ como A-módulo. □

Exemplo 2.5. Segue do Corolário 2.17 que se A é uma k-álgebra gerada por elementos $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, então $\Omega_{A|k}$ é gerada pelos $\{dX_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ como A-módulo. Em particular, quando temos $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ é o anel de polinômios em n variáveis, então $\Omega_{A|k}$ é um A-módulo livre tendo $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ como base. De fato, esses elementos já são geradores. Para ver que são linearmente independentes sobre A, consideremos a combinação $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i dx_i = 0$, $P_i \in A$ e seja ∂_j a derivação parcial em relação a x_j. Como visto na Proposição 2.15, existe um único homomorfismo de A-módulos $\varphi_j : \Omega_{A|k} \to A$ tal que $\partial_j = \varphi_j \circ d$. Portanto,

$$0 = \varphi_j(0) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} P_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \varphi_j(dx_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i \partial_j(x_i) = P_j.$$

Como isto vale para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, conseguimos o resultado.

Proposição 2.18. *Para todo A-módulo M, $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A|k}, M)$ e $Der_k(A, M)$ são isomorfos como A-módulos.*

Demonstração. Basta considerarmos $\Phi : \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A|k}, M) \to Der_k(A, M)$ definida por $\Phi(\varphi) = \varphi \circ d$. Claramente, Φ é homomorfismo de A-módulos, e a Proposição 2.15 nos garante que Φ é bijeção. $\square$

Dada uma variedade V e $p \in V$, temos $T_pV \simeq Der_k(k[V], k_p)$ e pela Proposição 2.18 temos $T_pV \simeq \mathrm{Hom}_{k[V]}(\Omega_{k[V]|k}, k_p)$.

2.4 1-Formas Diferenciais Regulares

Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica, $p \in V$ e $f = \overline{F} \in k[V]$. Se $v = (v_1, \ldots, v_n)$ é um vetor tangente a V em p e $F \in \boldsymbol{I}(V)$, então $\sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot v_i = 0$. Dessa forma, se $f = \overline{F} = \overline{G}$ em $k[V]$, então $F - G \in \boldsymbol{I}(V)$ e $\sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i G(p) \cdot v_i$. Logo, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 2.19. Dado $f = \overline{F} \in k[V]$, o funcional linear $d_pf : T_pV \to k$ definido por

$$d_pf(v) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot v_i$$

é chamado de *diferencial* de f em p.

Fixado $f \in k[V]$, definamos a função $\varphi_f : V \to \bigcup\limits_{p \in V} (T_pV)^*$ por $\varphi_f(p) = d_pf$. Denotaremos esta função simplesmente por df.

Por abuso de notação, escreveremos x_i ao invés de $\overline{x_i}$. Observemos que, para todo ponto $p \in V$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ a aplicação $d_px_i : T_pV \to k$ é por definição dada por $d_px_i(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j(x_i)(p) \cdot v_j = v_i$. Logo, para qualquer $f = \overline{F} \in k[V]$ e $v \in T_pV$,

$$d_pf(v) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot d_px_i(v).$$

Portanto, podemos escrever $d_pf = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i F(p) d_px_i$ e $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i$.

Consideremos o conjunto $\Phi[V]$ consistindo de todas as funções que associam cada ponto $p \in V$ a um elemento em $(T_pV)^*$. Observamos que $df \in \Phi[V]$.

Com a operação de adição de funções, $\Phi[V]$ é um grupo abeliano. Além disso, definindo $(f\phi)(p) = F(p)\phi(p)$, para cada $f = \overline{F} \in k[V]$ e $\phi \in \Phi[V]$, vemos que esta operação está bem definida, pois se $f = \overline{F} = \overline{G}$ em $k[V]$, então $F(p) = G(p)$, e assim $\Phi[V]$ é um $k[V]$-módulo.

Lema 2.20. *A aplicação $d : k[V] \to \Phi[V]$, dada por $d(f) = df$ é uma k-derivação.*

Demonstração. Dados $f = \overline{F}, g = \overline{G} \in k[V]$ e $a \in k$, vale

$$d(af + g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(aF + G)dx_i = a\sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i + \sum_{i=1}^{n} \partial_i G dx_i = ad(f) + d(g).$$

Dessa forma, d é uma função k-linear. Também,

$$d(fg) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(FG)dx_i = \sum_{i=1}^{n}(G\partial_i F + F\partial_i G)dx_i =$$

$$= G\sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i + F\sum_{i=1}^{n} \partial_i G dx_i = gd(f) + fd(g),$$

o que mostra que d é uma k-derivação. □

Definição 2.21. Um elemento $\phi \in \Phi[V]$ é uma *forma diferencial regular* em V se cada ponto $p \in V$ tem uma vizinhança U tal que a restrição de ϕ a U pertence ao $k[U]$-submódulo de $\Phi[U]$ gerado pelos elementos df com $f \in k[U]$.

Assim, ϕ é uma forma diferencial regular em V se, e somente se, em alguma vizinhança de cada $p \in V$ a aplicação ϕ pode ser escrita na forma $\phi = \sum_{i=1}^{m} f_i dg_i$ com f_i, g_i funções regulares nessas vizinhanças, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

O conjunto das formas diferenciais regulares sobre V é um $k[V]$-módulo, que denotaremos por $\Omega[V]$.

Exemplo 2.6. (k infinito) Consideremos $V = \mathbb{A}^n$. Como visto no Exemplo 2.2, para todo $p \in \mathbb{A}^n$ temos $T_p\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$. Além disso, como

$$d_p x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j, \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

segue que $d_p x_1, \dots, d_p x_n$ é base para $(T_p\mathbb{A}^n)^*$ sobre k. Dada $\phi \in \Phi[\mathbb{A}^n]$, $\phi(p) \in (T_p\mathbb{A}^n)^*$, ou seja, $\phi(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i d_p x_i$ com $a_i \in k$. Portanto podemos escrever de maneira única $\phi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i dx_i$, onde $\psi_i : V \to k$ é a função definida por $\psi_i(p) = a_i$.

Se $\phi \in \Omega[\mathbb{A}^n]$ então $\phi = \sum_{j=1}^{l} g_j dh_j$ em uma vizinhança U de p com $g_j, h_j \in k[U]$. Para cada $j \in \{1, \dots, l\}$ existem polinômios P_j e Q_j tais que os Q_j não se anulam em U e $h_j = P_j/Q_j$. Pela regra de derivação do quociente obtemos

$$dh_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Q_j}\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \frac{P_j}{Q_j^2}\frac{\partial Q_j}{\partial x_i} \right) dx_i. \tag{2.3}$$

Substituindo as relações (2.3) na expressão de ϕ, podemos escrever $\phi = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ onde as f_i são funções regulares em p. Pela unicidade da expressão de ϕ conseguimos $\psi_i = f_i$, isto é, as ψ_i são regulares em p para todo $p \in \mathbb{A}^n$, ou seja, $\psi_i \in k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ e podemos escrever

$$\Omega[\mathbb{A}^n] = \bigoplus k[\mathbb{A}^n]dx_i.$$

Definição 2.22. Chamaremos uma forma diferencial regular em $\mathbb{A}^n$ de uma *1-forma polinomial em* $\mathbb{A}^n$. Assim, uma 1-forma polinomial em $\mathbb{A}^n$ é dada por

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n,$$

onde $a_1, \ldots, a_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Quando $a_1, \ldots, a_n$ são todos homogêneos de mesmo grau s, dizemos que ω é uma 1-forma homogênea de grau s.

Diremos que um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é uma *singularidade* de ω quando $a_i(p) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Observação 2.23. Pelo Exemplo 2.5, temos que $\Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]|k}$ é um $k[x_1, \ldots, x_n]$-módulo livre com base $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ e através do Exemplo 2.6 conseguimos que $\Omega[\mathbb{A}^n]$ é um $k[x_1, \ldots, x_n]$-módulo livre tendo $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ como base. Dessa forma, estabelecemos o isomorfismo de $k[x_1, \ldots, x_n]$-módulos

$$\begin{aligned} \Omega[\mathbb{A}^n] &\longrightarrow \Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]|k} \\ dx_i &\longmapsto dx_i. \end{aligned}$$

Observação 2.24. Por definição, um vetor v é tangente a $V = \boldsymbol{V}(F)$ no ponto $p \in V$ se e somente se $\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) \cdot v_i = 0$, ou seja, se e somente se $d_pF(v) = 0$. Daí, temos que $T_pV = \ker(d_pF)$.

2.5 O produto exterior de 1-formas

Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{A}^n \to k$ dois funcionais lineares. O produto exterior de T_1 e T_2, denotado por $T_1 \wedge T_2$, é a aplicação bilinear dada por

$$(T_1 \wedge T_2)(u, v) = \det \begin{bmatrix} T_1(u) & T_2(u) \\ T_1(v) & T_2(v) \end{bmatrix} = T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u).$$

Decorrem imediatamente das propriedades de determinantes que:

i) $T_1 \wedge (aT_2 + T_3) = a(T_1 \wedge T_2) + (T_1 \wedge T_3)$

ii) $T_2 \wedge T_1 = -(T_1 \wedge T_2)$

iii) $T \wedge T = 0$.

Proposição 2.25. *Sejam $T_1 : \mathbb{A}^n \to k$ e $T_2 : \mathbb{A}^n \to k$ funcionais lineares não nulos. São equivalentes:*

i) $\ker(T_1) = \ker(T_2)$*;*

ii) T_1 e T_2 são múltiplos, isto é, existe $\lambda \neq 0, \lambda \in k$ com $T_1 = \lambda T_2$;

iii) $T_1 \wedge T_2 = 0$.

Demonstração. ($i \Rightarrow ii$) Seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base para os núcleos e $v_n \notin \ker(T_i)$. Então, $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ é base de $\mathbb{A}^n$. Dado $w \in \mathbb{A}^n$, temos $w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, $T_i(w) = a_n T_i(v_n)$ e

$$\frac{T_1(w)}{T_1(v_n)} = \frac{T_2(w)}{T_2(v_n)}.$$

Então $T_1 = \lambda T_2$, onde $\lambda = T_1(v_n)/T_2(v_n)$.

($ii \Rightarrow iii$) Óbvio.

($iii \Rightarrow i$) Sejam $u \in \ker(T_1)$ e $v \notin \ker(T_1)$. Sendo $(T_1 \wedge T_2)(u, v) = 0$, temos que $T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u) = 0$, o que implica em $T_1(v)T_2(u) = 0$. Como $T_1(v) \neq 0$ segue que $T_2(u) = 0$. Logo, $\ker(T_1) \subseteq \ker(T_2)$. De forma análoga, conseguimos a igualdade. □

Dadas duas 1-formas ω_1, ω_2 polinomiais, o produto exterior de ω_1 com ω_2 é a aplicação $\omega_1 \wedge \omega_2$ definida por $(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$ e é chamada de uma *2-forma polinomial.* As propriedades do produto exterior de dois funcionais lineares são transportadas de maneira natural para o produto exterior de duas 1-formas; assim, valem $\omega \wedge \omega = 0$, $\omega_2 \wedge \omega_1 = -(\omega_1 \wedge \omega_2)$ e $\omega_1 \wedge (a\omega_2 + \omega_3) = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + (\omega_1 \wedge \omega_3)$.

3 Folheações em $\mathbb{P}^2$

Neste capítulo introduzimos a noção de folheações algébricas bem como iniciamos as discussões sobre o Problema de Poincaré, assunto principal deste texto.

3.1 Campos Vetoriais em $\mathbb{P}^2$

Sejam $\mathbb{P}^2$ o plano projetivo sobre $k = \mathbb{C}$ e $p = (z_0 : z_1 : z_2)$ um ponto em $\mathbb{P}^2$. Escreveremos $U_i = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 |\ z_i \neq 0\}$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Em U_0 temos a aplicação natural $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^2$ dada por $\varphi_0((z_0 : z_1 : z_2)) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = (x, y)$. Diremos que (x, y) são as *coordenadas locais* em U_0 e $(z_0 : z_1 : z_2)$ são as coordenadas globais. Da mesma forma, em U_1 e U_2 temos aplicações φ_1 e φ_2, respectivamente, dadas por $\varphi_1((z_0 : z_1 : z_2)) = \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right)$ e $\varphi_2((z_0 : z_1 : z_2)) = \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)$. Observemos que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ é um isomorfismo para cada i, j. Por exemplo, $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x, y) = \varphi_1((1 : x : y)) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$.

Ao longo deste capítulo, escreveremos sem distinção, para um ponto $p \in U_i$, sua imagem $\varphi_i(p)$ como p também. Por exemplo, se $p \in U_i$ anula o polinômio homogêneo F nas variáveis z_0, z_1, z_2, então escreveremos que "p anula f", onde f é a desomogeneização de F com respeito a z_i.

Definição 3.1. Um *campo de vetores* em uma variedade V é uma função $\mathcal{X}$ que associa cada ponto $p \in V$ a um vetor tangente $\mathcal{X}(p) \in T_pV$.

O exemplo a seguir descreve o espaço tangente a $\mathbb{P}^2$ em um ponto p.

Exemplo 3.1. O espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ é coberto pelos abertos afins

$$U_i := \{(z_0 : z_1 : z_2); z_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2, \text{ com } i = 0, 1, 2.$$

Se $p \in U_0$ então $T_p\mathbb{P}^2 = T_pU_0$ e

$$T_p\mathbb{P}^2 = Der_k(k[x,y],k_p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \right\rangle,$$

onde $x = z_1/z_0$ e $y = z_2/z_0$. A igualdade acima continua válida se $p \in U_1$ ou $p \in U_2$, fazendo-se as alterações necessárias em x e y.

Segue do Exemplo 3.1 que um campo de vetores $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ é dado localmente por um par de funções a, b nas coordenadas locais (x,y), isto é,

$$\mathcal{X}(p) = a(p)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + b(p)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p.$$

Se a e b são polinômios, dizemos que o campo é polinomial. Os campos trabalhados daqui em diante serão polinomiais. Escreveremos simplesmente

$$\mathcal{X} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\ . \tag{3.1}$$

Note que a expressão (3.1) nos dá uma descrição do campo apenas nos abertos U_i com $i \in \{0,1,2\}$. É natural então perguntarmos se é possível dar uma descrição global do campo de vetores. A resposta é sim como veremos a seguir.

Primeiramente, já que $\mathbb{P}^2$ é construído identificando pontos de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ que se encontram na mesma reta pela origem, vejamos como um vetor tangente a $\mathbb{C}^3$ em um ponto $p = (z_0, z_1, z_2) \neq (0,0,0)$ determina um vetor tangente a $\mathbb{P}^2$ no correspondente ponto $p = (z_0 : z_1 : z_2)$.

Observação 3.2. Dado $g \in k[x,y]$ de grau m, seja $A = z_0^m g(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$ a homogeneização de g. Temos

$$\frac{\partial A}{\partial z_1}\Big|_{(z_0,z_1,z_2)} = z_0^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial z_2}\Big|_{(z_0,z_1,z_2)} = z_0^{m-1}\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})}.$$

De fato, se $g = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x^iy^j$, então $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\, i\, x^{i-1}y^j$ e

$$z_0^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = z_0^{m-1}\sum_{i,j} a_{ij}\, i \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{i-1}\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^{j} = \sum_{i,j} a_{ij}\, i\, z_0^{m-i-j}z_1^{i-1}z_2^j. \tag{3.2}$$

Como $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}z_0^{m-i-j}z_1^iz_2^j$ segue que $\dfrac{\partial A}{\partial z_1}(z_0,z_1,z_2) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\, i\, z_0^{m-i-j}z_1^{i-1}$. Portanto provamos a primeira igualdade. De maneira análoga, prova-se a segunda.

Exemplo 3.2. Seja U o aberto afim de $\mathbb{C}^3$ dado por

$$U = \mathbb{C}^3 \setminus \boldsymbol{V}(z_0) := \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 |\ z_0 \neq 0\}.$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \phi : & U & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (z_0, z_1, z_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right) = (x, y). \end{array}$$

Para cada $p \in U$, podemos considerar a transformaçaõ linear

$$\begin{array}{rccc} d_p\phi : & T_p\mathbb{C}^3 \cong T_pU & \longrightarrow & T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2 \\ & D & \longmapsto & D \circ \phi^*, \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & k[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x, y] & \longrightarrow & k[U] = \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2][1/z_0] \\ & f(x, y) & \longmapsto & f\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right). \end{array}$$

Vejamos $d_p\phi$ em coordendadas. Denotemos por $\partial_j = \partial/\partial z_j$, para $j = 0, 1, 2$.

Dado $D = a_0\partial_0|_p + a_1\partial_1|_p + a_2\partial_2|_p \in T_p\mathbb{C}^3 \cong T_pU$, com a_0, a_1, a_2 constantes e $g \in k[x, y]$, temos

$$\phi^*(g) = g\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{A(z_0, z_1, z_2)}{z_0^m},$$

onde $A(z_0, z_1, z_2)$ é um polinômio homogêneo de grau $m = \text{grau}(g)$. Observamos que

$$\begin{aligned} d_p\phi(D)(g) &= a_0\partial_0\left(\frac{A}{z_0^m}\right)(p) + a_1\partial_1\left(\frac{A}{z_0^m}\right)(p) + a_2\partial_2\left(\frac{A}{z_0^m}\right)(p) = \\ &= a_0\left(\frac{z_0\partial_0 A - mA}{z_0^{m+1}}\right)(p) + a_1\left(\frac{\partial_1 A}{z_0^m}\right)(p) + a_2\left(\frac{\partial_2 A}{z_0^m}\right)(p) = \\ &= a_0\left(\frac{-z_1\partial_1 A - z_2\partial_2 A}{z_0^{m+1}}\right)(p) + a_1\left(\frac{z_0\partial_1 A}{z_0^{m+1}}\right)(p) + a_2\left(\frac{z_0\partial_2 A}{z_0^{m+1}}\right)(p) = \\ &= \left[\frac{(z_0a_1 - z_1a_0)\partial_1 A + (z_0a_2 - z_2a_0)\partial_2 A}{z_0^{m+1}}\right](p) = \\ &= \left(\frac{1}{z_0}a_1 - \frac{z_1}{z_0^2}a_0\right)\frac{\partial_1 A}{z_0^{m-1}}(p) + \left(\frac{1}{z_0}a_2 - \frac{z_2}{z_0^2}a_0\right)\frac{\partial_2 A}{z_0^{m-1}}(p). \end{aligned}$$

Na quarta igualdade usamos a fórmula de Euler $mA = z_0\partial_0 A + z_1\partial_1 A + z_2\partial_2 A$, já que A é homogêneo. Pela Observação 3.2,

$$d_p\phi(D)(g) = \frac{1}{z_0}[(a_1 - xa_0)(p)\partial_x g(p) + (a_2 - ya_0)(p)\partial_y g(p)]$$

e

$$z_0 \cdot d_p\phi(D) = (a_1 - xa_0)(p)\partial_x|_p + (a_2 - ya_0)(p)\partial_y|_p.$$

Sejam F_0, F_1, F_2 polinômios homogêneos de mesmo grau e $\mathcal{X}$ o campo vetorial de $\mathbb{C}^3$ definido por

$$\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2.$$

Em cada ponto $p \in U$ considere

$$\mathcal{X}_p = F_0(p)\partial_0|_p + F_1(p)\partial_1|_p + F_2(p)\partial_2|_p \in T_p\mathbb{C}^3 \cong T_pU.$$

A analise já feita mostra que

$$z_0 \cdot d_p\phi(\mathcal{X}_p) = (f_1 - xf_0)(p)\partial_x|_p + (f_2 - yf_0)(p)\partial_y|_p, \tag{3.3}$$

onde $f_i = F_i(1, x, y)$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$.

O Exemplo 3.2 nos motiva a fazer a próxima definição.

Definição 3.3. Uma *forma global* de um campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ é uma expressão da forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{3.4}$$

onde F_0, F_1, F_2 são polinômios homogêneos de grau d.

O campo vetorial $\mathcal{X}$, dado na forma global como em (3.4) tem expressão local em U_0 dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.5}$$

onde $x = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_0}$ são coordenadas locais em U_0 e $f_i(x, y) = F_i(1, x, y)$.

Da mesma forma que no Exemplo 3.2, temos expressões locais para o campo $\mathcal{X}$ nos abertos U_1 e U_2. No aberto U_1, a expressão é dada por

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - xf_1)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_1)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.6}$$

onde $x = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_1}$ são coordenadas locais em U_1 e $f_i(x, y) = F_i(x, 1, y)$, enquanto no aberto U_2 a expressão é dada por

$$\mathcal{X}_{U_2} = (f_0 - xf_2)\frac{\partial}{\partial x} + (f_1 - yf_2)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.7}$$

onde $x = \dfrac{z_0}{z_2}$ e $y = \dfrac{z_1}{z_2}$ são coordenadas locais em U_2 e $f_i(x, y) = F_i(x, y, 1)$.

Vale observar que o campo vetorial de $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{R} = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

tem expressões locais nulas, isto é, $\mathcal{R}$ é o campo nulo em $\mathbb{P}^2$. De fato,

$$\mathcal{R}_{U_0} = (x-x)\frac{\partial}{\partial_x} + (y-y)\frac{\partial}{\partial y} = 0. \tag{3.8}$$

Analogamente, mostra-se que $\mathcal{R}_{U_1} = 0$ e $\mathcal{R}_{U_2} = 0$.

Chamamos o campo $\mathcal{R}$ de *campo radial*, ou *campo de Euler*. As expressões acima mostram que $\mathcal{R}$ é o campo vetorial nulo em $\mathbb{P}^2$.

Um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ não possui uma única forma global. De fato, se um campo $\mathcal{X}$ tem uma forma global

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde os F_i são homogêneos de grau d, então para qualquer polinômio homogêneo G de grau $d-1$ temos que $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + G\mathcal{R}$ é uma forma global de $\mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{R}$ é o campo nulo. Diremos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ diferem por um múltiplo do campo radial e que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ são *representantes* do mesmo campo vetorial. Definimos o *grau* do campo vetorial dado em (3.4) como sendo d.

Se $\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ e $\mathcal{X}' = G_0\partial_0 + G_1\partial_1 + G_2\partial_2$ são campos vetoriais de grau d em $\mathbb{C}^3$ que representam o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^2$, então $\mathcal{X} - \mathcal{X}'$ é múltiplo do campo radial. De fato, as formas locais em U_0 de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ são respectivamente

$$\mathcal{X}_{U_0} = \left(F_1\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_1}{z_0}F_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(F_2\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}F_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{X}'_{U_0} = \left(G_1\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_1}{z_0}G_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(G_2\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}G_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

e sendo o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ temos as igualdades

$$\left(F_1\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_1}{z_0}F_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right) = \left(G_1\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_1}{z_0}G_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right) \tag{3.9}$$

$$\left(F_2\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}F_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right) = \left(G_2\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}G_0\left(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right) \tag{3.10}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.9) por z_0^{d+1}, obtemos a igualdade $z_0F_1 - z_1F_0 = z_0G_1 - z_1G_0$, ou ainda $z_0(F_1 - G_1) = z_1(F_0 - G_0)$. Daí, $z_0 \mid F_0 - G_0$, isto é, existe um polinômio homogêneo H de grau $d-1$ tal que $F_0 - G_0 = z_0 H$. Daí, $z_0(F_1 - G_1) = z_1 z_0 H$, ou seja, $F_1 - G_1 = z_1 H$. Finalmente, utilizando a igualdade (3.10) conseguimos $F_2 - G_2 = z_2 H$, de onde segue que $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + H\mathcal{R}$.

Se $\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, definimos a *divergência de* $\mathcal{X}$ como sendo

$$\operatorname{Div}(\mathcal{X}) = \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}.$$

Observe que se o grau de $\mathcal{X}$ é d então $\operatorname{Div}(\mathcal{X})$ é um polinômio homogêneo de grau $d-1$. Para efeitos de contagem, vale observar que é único o representante de um campo vetorial de $\mathbb{P}^2$ possuindo divergência nula.

Lema 3.4. *Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^2$. Existe um único representante $\mathcal{X}'$ do mesmo campo vetorial tal que* $\operatorname{Div}(\mathcal{X}') = 0$.

Demonstração. (Existência) Se $\mathcal{X}'$ é um campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^2$ que representa o mesmo campo vetorial que $\mathcal{X}$, então existe um polinômio homogêneo $G \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ de grau $d-1$ tal que $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + G\mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o campo radial. Logo,

$$\operatorname{Div}(\mathcal{X}') = \operatorname{Div}(\mathcal{X}) + \operatorname{Div}(G\mathcal{R}). \tag{3.11}$$

Como $G\mathcal{R} = Gz_0\partial_0 + Gz_1\partial_1 + Gz_2\partial_2$, vale

$$\operatorname{Div}(G\mathcal{R}) = \frac{\partial(Gz_0)}{\partial z_0} + \frac{\partial(Gz_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial(Gz_2)}{\partial z_2} = z_0\frac{\partial G}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial G}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial G}{\partial z_2} + 3G.$$

Mas sendo G homogêneo de grau $d-1$, a relação de Euler fornece

$$z_0\frac{\partial G}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial G}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial G}{\partial z_2} = (d-1)G$$

e assim, $\operatorname{Div}(G\mathcal{R}) = (d+2)G$.

Desta forma, a expressão (3.11) pode ser reescrita como

$$\operatorname{Div}(\mathcal{X}') = \operatorname{Div}(\mathcal{X}) + (d+2)G. \tag{3.12}$$

Portanto, tomando $G = -\operatorname{Div}(\mathcal{X})/(d+2)$, o campo $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + G\mathcal{R}$ representa o mesmo campo vetorial que $\mathcal{X}$ e $\operatorname{Div}(\mathcal{X}') = 0$.

(Unicidade) Se um campo vetorial $\mathcal{X}''$ representa o mesmo campo de vetores que $\mathcal{X}$ e $\operatorname{Div}(\mathcal{X}'') = 0$, então existe um polinômio homogêneo H tal que $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}' + H\mathcal{R}$, e pela equação (3.12) temos que $\operatorname{Div}(\mathcal{X}'') = \operatorname{Div}(\mathcal{X}') + (d+2)H$. Sendo $\operatorname{Div}(\mathcal{X}') = 0 = \operatorname{Div}(\mathcal{X}'')$, temos $H = 0$ e portanto $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}'$. □

Seja S_d o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d em $S = k[z_0, z_1, z_2]$. Uma base de S_d é o conjunto dos monômios $z_0^i z_1^j z_2^k$ com $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = d$. Para $i = 0$, devemos ter $j + k = d$, e temos portanto $d + 1$ possibilidades para o par (j, k), já que $(j, k) \in \{(0, d), (1, d - 1), \ldots, (d, 0)\}$. Para $i = 1$, devemos ter $j + k = d - 1$, logo existem d possibilidades. Prosseguindo o raciocínio, chegamos ao caso $i = d$, ficando com $j + k = 0$, onde só resta uma possibilidade: $j = 0$ e $k = 0$. Desta forma, tais monômios são em número $(d + 1) + d + \cdots + 1 = (d + 2)(d + 1)/2$.

Assim, o espaço vetorial dos ternos de polinômios homogêneos de grau d em $k[z_0, z_1, z_2]$, $S_d^{\oplus 3} = \{(F_0, F_1, F_2) \in S_d \times S_d \times S_d\}$, tem dimensão $3(d+2)(d+1)/2$. Associando o campo $\mathcal{X} = F_0 \dfrac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$ ao terno (F_0, F_1, F_2), vemos, de acordo com o Lema 3.4 que cada campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ tem um único representante no núcleo da transformação linear

$$\begin{array}{cccc} T: & S_d^{\oplus 3} & \longrightarrow & S_{d-1} \\ & (F_0, F_1, F_2) & \longmapsto & \dfrac{\partial F_0}{\partial z_0} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2}. \end{array}$$

Dado $F = \sum\limits_{i+j+k=d-1} a_{ijk} z_0^i z_1^j z_2^k \in S_{d-1}$ tomemos $F_0 = \sum\limits_{i+j+k=d-1} \frac{1}{i+1} a_{ijk} z_0^{i+1} z_1^j z_2^k \in S_d$. Então $F = T(F_0, 0, 0)$ e T é sobrejetiva. Como $\dim S_d^3 = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$, temos

$$\dim(\ker T) = 3(d + 2)(d + 1)/2 - (d + 1)d/2 = (d + 3)(d + 1).$$

Daí, conseguimos o resultado seguinte.

Proposição 3.5. *O conjunto dos campos vetoriais de grau d em $\mathbb{P}^2$ é um espaço vetorial e sua dimensão é $(d + 3)(d + 1)$.*

Definição 3.6. Uma *folheação* em $\mathbb{P}^2$ é um campo de vetores de $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

módulo múltiplos constantes não nulos. Se grau $(F_i) = d$, $i = 0, 1, 2$, dizemos que a folheação tem *grau d*.

Segue desta definição que o espaço das folheações de grau d em $\mathbb{P}^2$ tem $\mathbb{P}^{(d+3)(d+1)-1}$ como espaço de parâmetros. Em particular, as folheações de grau um tem $\mathbb{P}^7$ como espaço de parâmetros.

Dado um campo de vetores $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$, vamos definir o que é uma singularidade de $\mathcal{X}$. Precisamos do próximo lema.

Lema 3.7. *Seja $p = (z_0 : z_1 : z_2) \in U_i \cap U_j$ um ponto que anula a expressão local do campo vetorial*

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

de grau d em U_i. Então p anula a expressão local do campo $\mathcal{X}$ em U_j.

Demonstração. Suponhamos que $p \in U_0 \cap U_1$ e que p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0, isto é,

$$\begin{cases} F_1\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_1}{z_0} F_0\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = 0, \\ F_2\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0} F_0\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Vejamos que p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_1. Multiplicando a primeira equação de (3.13) por $-\frac{z_0^{d+1}}{z_1^{d+1}}$, conseguimos

$$-\frac{z_0}{z_1} F_1\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) + F_0\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Multiplicando a segunda equação de (3.13) por $\frac{z_0^{d+1}}{z_1^{d+1}}$, conseguimos

$$\frac{z_0}{z_1} F_2\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) - \frac{z_2}{z_0}\frac{z_0}{z_1} F_0\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) = 0.$$

Usando a expressão (3.14) ficamos com

$$\frac{z_0}{z_1} F_2\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) - \frac{z_2}{z_0}\frac{z_0}{z_1}\frac{z_0}{z_1} F_1\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) = 0,$$

e finalmente temos a relação

$$F_2\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) - \frac{z_2}{z_1} F_1\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}\right) = 0. \tag{3.15}$$

As expressões (3.14) e (3.15) mostram que p anula a expressão local (3.6) de $\mathcal{X}$ em U_1, como queríamos. □

Definição 3.8. *Um ponto $p \in U_i$ é dito uma singularidade do campo $\mathcal{X}$ quando p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_i.*

Exemplo 3.3. Consideremos o campo de vetores $\mathcal{X} = z_0^2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_0^3 \frac{\partial}{\partial z_2}$. As expressões locais de $\mathcal{X}$ são

$$\mathcal{X}_{U_0} = (xy^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (1 - xy)\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

$$\mathcal{X}_{U_1} = (x^2 - xy^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x^3 - y^3)\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

$$\mathcal{X}_{U_2} = (x^2y - x^4)\frac{\partial}{\partial x} + (y - x^3y)\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

Na primeira expressão, a procura pelas soluções comuns de $\begin{cases} xy^2 - x^2 = 0 \\ 1 - xy = 0 \end{cases}$ nos fornece três soluções: $(x, y) = (1, 1)$,$(x, y) = (\xi, \xi^2)$ e $(x, y) = (\xi^2, \xi)$, onde ξ é a raiz cúbica da unidade. Sendo a expressão em U_0, temos $z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = y$, e dessa forma conseguimos três singularidades: $(1 : 1 : 1), (1 : \xi : \xi^2)$ e $(1 : \xi^2 : \xi)$. Observe que estes três pontos realmente anulam as expressões em U_1 e U_2. Olhando para a expressão em U_1 conseguimos além das singularidades já expostas a singularidade $(0 : 1 : 0)$ e em U_2 conseguimos também o ponto $(0 : 0 : 1)$ como singularidade. Desta forma, o campo $\mathcal{X}$ apresenta cinco singularidades.

Sabemos como transitar de uma expressão global para uma expressão local. Veremos mais adiante como proceder na situação inversa, isto é, da forma local para a global.

3.2 1-formas em $\mathbb{P}^2$

Definição 3.9. Uma *1-forma* em $\mathbb{P}^2$ é uma aplicação ω que associa cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$ a um funcional linear em $T_p\mathbb{P}^2$, $\omega(p) : T_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}$.

Segue do Exemplo 2.6 da página 21 que uma 1-forma ω em $\mathbb{P}^2$ é dada localmente por um par de funções a_1, a_2 nas coordenadas locais (x, y), isto é,

$$\omega(p) = a_1(p)d_px + a_2(p)d_py.$$

Se a_1 e a_2 são polinômios, dizemos que a 1-forma é polinomial. As 1-formas trabalhadas daqui em diante serão polinomiais. Escreveremos simplesmente

$$\omega = a_1dx + a_2dy \ . \tag{3.16}$$

Observe que a expressão (3.16) nos dá uma descrição da 1-forma nos abertos U_i com $i \in \{0, 1, 2\}$. É natural então perguntarmos se é possível dar uma descrição global da 1-forma. A resposta é sim como veremos a seguir.

Observação 3.10. Seja $p=(z_0,z_1,z_2)\in\mathbb{C}^3$, $z_0\neq 0$, e ϕ como no Exemplo 3.2. Temos as igualdades

$$d_{\phi(p)}x=\frac{1}{z_0}d_pz_1-\frac{z_1}{z_0^2}d_pz_0,$$
$$d_{\phi(p)}y=\frac{1}{z_0}d_pz_2-\frac{z_2}{z_0^2}d_pz_0.$$

De fato, sendo $\partial_i=\partial/\partial z_i$, $i=0,1,2$, temos pela expressão (3.3) que

$$d_{\phi(p)}x(\partial_0\circ\phi^*)=d_{\phi(p)}x\left(-\frac{z_1}{z_0^2}\partial_x-\frac{z_2}{z_0^2}\partial_y\right)=-\frac{z_1}{z_0^2}$$

$$d_{\phi(p)}x(\partial_1\circ\phi^*)=d_{\phi(p)}x\left(\frac{1}{z_0}\partial_x\right)=\frac{1}{z_0}$$

$$d_{\phi(p)}x(\partial_2\circ\phi^*)=d_{\phi(p)}x\left(\frac{1}{z_0}\partial_y\right)=0.$$

Dessa forma, se $D=a_0\partial_0|_p+a_1\partial_1|_p+a_2\partial_2|_p\in T_p\mathbb{C}^3\cong T_pU$ então

$$d_{\phi(p)}x(D\circ\phi^*)=-a_0\frac{z_1}{z_0^2}+a_1\frac{1}{z_0}=\left(\frac{1}{z_0}d_pz_1-\frac{z_1}{z_0^2}d_pz_0\right)(D).$$

De maneira análoga conseguimos a segunda igualdade.

Exemplo 3.4. Sejam $U=\{(z_0,z_1,z_2)\in\mathbb{C}^3|\ z_0\neq 0\}$ e ω uma 1-forma em U dada por $\omega=a_1dx+a_2dy$, onde $d=\max\{\text{grau}(a_i)|\ i=1,2\}$. Dado um ponto $p=(z_0,z_1,z_2)\in U$, temos pela Observação 3.10 que

$$\begin{aligned}
\omega(\phi(p))&=a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)d_{\phi(p)}x+a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)d_{\phi(p)}y=\\
&=a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}d_pz_1-\frac{z_1}{z_0^2}d_pz_0\right)+a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}d_pz_2-\frac{z_2}{z_0^2}d_pz_0\right)=\\
&=\left[-\frac{z_1}{z_0^2}a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)-\frac{z_2}{z_0^2}a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right]d_pz_0+\frac{1}{z_0}a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)d_pz_1+\frac{1}{z_0}a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)d_pz_2=\\
&=\frac{A_0(p)}{z_0^{d+2}}d_pz_0+\frac{A_1(p)}{z_0^{d+2}}d_pz_1+\frac{A_2(p)}{z_0^{d+2}}d_pz_2,
\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde A_0,A_1,A_2 são os polinômios homogêneos de grau $d+1$ dados por

$$A_0=z_0^d\left(-z_1a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)-z_2a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right),$$

$$A_1=z_0^{d+1}a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right),$$

$$A_2=z_0^{d+1}a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right).$$

Uma conta simples revela ainda que $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$.

Observe ainda que sendo a_{1d} e a_{2d} as parcelas homogêneas de grau d de a_1 e a_2, quando $-xa_{1d} - ya_{2d} = 0$ teremos que z_0 é um fator comum de A_0, A_1, A_2 e simplificando a expressão (3.17) conseguimos $\omega(\phi(p)) = \dfrac{B_0(p)}{z_0^{d+1}}d_pz_0 + \dfrac{B_1(p)}{z_0^{d+1}}d_pz_1 + \dfrac{B_2(p)}{z_0^{d+1}}d_pz_2$, onde B_0, B_1, B_2 são os polinômios homogêneos de grau d dados por

$$B_0 = z_0^{d-1}\left(-z_1a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - z_2a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right),$$

$$B_1 = z_0^d a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right),$$

$$B_2 = z_0^d a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

Observe que $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$.

O Exemplo 3.4 nos motiva a fazer a próxima definição.

Definição 3.11. Seja ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ dada localmente em U_0 por $\omega = a_1dx + a_2dy$ e $d = \max\{\text{grau}(a_i)|\ i = 1, 2\}$. O *grau* da 1-forma é dado por

$$s = \begin{cases} d, & \text{se} \quad -xa_{1d} - ya_{2d} \neq 0, \\ d-1, & \text{se} \quad -xa_{1d} - ya_{2d} = 0, \end{cases}$$

onde a_{1d} e a_{2d} são as parcelas homogêneas de grau d de a_1 e a_2, respectivamente.

Uma *forma global* de ω em $\mathbb{P}^2$ é uma expressão

$$\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2, \tag{3.18}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $s + 1$ dados por

$$A_0 = z_0^s\left(-z_1a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - z_2a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right),$$

$$A_1 = z_0^{s+1}a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right), \tag{3.19}$$

$$A_2 = z_0^{s+1}a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

Veja que

$$z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0. \tag{3.20}$$

Dada uma 1-forma na sua expressão global em $\mathbb{P}^2$,

$$\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2,$$

com $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$, as suas expressões locais nos abertos U_0, U_1, U_2 são

$$\Omega_{U_0} = a_1dx + a_2dy,$$

onde $a_1 = A_1(1, x, y)$ e $a_2 = A_2(1, x, y)$,

$$\Omega_{U_1} = b_0dx + b_2dy,$$

onde $b_0 = A_0(x, 1, y), b_2 = A_2(x, 1, y)$,

$$\Omega_{U_2} = c_0dx + c_1dy,$$

onde $c_0 = A_0(x, y, 1), c_1 = A_1(x, y, 1)$.

Exemplo 3.5. Consideremos a 1-forma dada em U_0 por $\omega = y^2dx + xdy$. Como $s = 2$ temos que

$$A_0 = z_0^2\left(-z_1\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2 - z_2\frac{z_1}{z_0}\right) = -z_1z_2^2 - z_0z_1z_2,$$

$$A_1 = z_0^3\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2 = z_0z_2^2,$$

$$A_2 = z_0^3\frac{z_1}{z_0} = z_0^2z_1.$$

Logo a expressão global da 1-forma é

$$\Omega = (-z_1z_2^2 - z_0z_1z_2)dz_0 + z_0z_2^2dz_1 + z_0^2z_1dz_2.$$

No processo de volta a U_0, $a_1 = A_1(1, x, y) = y^2$ e $a_2 = A_2(1, x, y) = x$, retornando a ω. Para a expressão local em U_1, fazemos $b_0 = A_0(x, 1, y) = -y^2 - xy, b_2 = A_2(x, 1, y) = x^2$ e obtemos

$$\Omega_{U_1} = (-y^2 - xy)dx + x^2dy.$$

Em U_2 fazemos $c_0 = A_0(x, y, 1) = -y - xy$ e $c_1 = A_1(x, y, 1) = x$, obtendo

$$\Omega_{U_2} = (-y - xy)dx + xdy.$$

Observamos que o conjunto das 1-formas de grau d em $\mathbb{P}^2$ é exatamente o núcleo da transformação linear

$$\begin{array}{cccc} T: & S_{d+1}^{\oplus 3} & \longrightarrow & S_{d+2} \\ & (A_0, A_1, A_2) & \longmapsto & z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2. \end{array}$$

Já que a aplicação T é sobrejetiva, vale

$$\dim(\ker T) = \dim S_{d+1}^{\oplus 3} - \dim S_{d+2} = 3(d+3)(d+2)/2 - (d+4)(d+3)/2 = (d+3)(d+1).$$

Desta forma, o espaço vetorial das 1-formas de grau d tem a mesma dimensão que o espaço vetorial dos campos de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Exemplo 3.6. O núcleo de uma 1-forma ω em $\mathbb{P}^2$, expressa localmente por $\omega = adx+bdy$, é a família de campos vetoriais de $\mathbb{P}^2$ dados localmente por $\ker(\omega) = \{\mathcal{X}_\lambda |\ \lambda \in k\}$, onde $\mathcal{X}_\lambda = \lambda \cdot (-b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y})$. Portanto $\ker \omega$ é a folheação de $\mathbb{P}^2$ dada pelo campo de vetores escrito localmente como $\mathcal{X} = -b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$.

Assim, colocamos a seguinte definição

Definição 3.12. Uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2$ é dada por uma 1-forma

$$\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$$

onde A_0, A_1, A_2 são três polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo a condição

$$z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0,$$

módulo múltiplos não nulos. Diremos que a folheação é *induzida* pela 1-forma Ω e se um campo de vetores χ de grau d pertence ao núcleo de Ω então χ e Ω induzem a *mesma* folheação de $\mathbb{P}^2$.

Observe que, considerando folheações de $\mathbb{P}^2$ através de 1-formas, a dimensão do espaço vetorial das folheações de grau d de $\mathbb{P}^2$ será $(d+3)(d+1)-1$, como obtido anteriormente.

Definição 3.13. Um ponto $p \in \mathbb{P}^2$ é dito uma *singularidade* da folheação de $\mathbb{P}^2$ induzida pela 1-forma $\Omega = A_0dz_0+A_1dz_1+A_2dz_2$ quando $A_0(p) = A_1(p) = A_2(p) = 0$. Denotaremos o conjunto de todas as singularidades de Ω por $\mathrm{Sing}(\Omega)$. Quando $\mathrm{Sing}(\Omega)$ for um conjunto finito, diremos que a folheação é *saturada*.

Exemplo 3.7. Se $\omega = a_1dx + a_2dy$ é a forma local de $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ em U_0, não podemos garantir que $\mathrm{Sing}(\omega)$ e $\mathrm{Sing}(\Omega)$ sejam iguais. Os dois conjuntos coincidem se, e somente se, $\mathrm{Sing}(\Omega)$ não intersecta a reta no infinito $L_\infty = \boldsymbol{V}(z_0)$. De fato, se nenhuma das singularidades de Ω pertence a L_∞, uma dada singularidade $p = (1 : x : y)$ de ω é tal que $A_1(p) = 0$ e $A_2(p) = 0$. Como $z_0 = 1$ e

$$A_1 = z_0^{d+1} a_1 \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_1}{z_0} \right),$$

$$A_2 = z_0^{d+1} a_2 \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_1}{z_0} \right),$$

segue que $a_1(p) = 0$ e $a_2(p) = 0$. Por outro lado, se $p = (1 : x : y)$ é tal que $a_1(p) = 0$ e $a_2(p) = 0$, então das relações acima temos $A_1(p) = 0$ e $A_2(p) = 0$. Como vale a relação $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$, e $p \notin L_\infty$, conseguimos $A_0(p) = 0$. Assim, $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$.

3.3 Relações entre Campos de Vetores e 1-Formas

Até aqui definimos uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau d de duas maneiras. A saber,

i) como campos de vetores $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$, com os F_i de grau d, módulo múltiplos escalares;

ii) como uma 1-forma $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$, com os A_i de grau $d+1$ satisfazendo $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$, módulo múltiplos escalares.

Nesta seção identificaremos a relação entre campos de vetores e 1-formas em $\mathbb{P}^2$ que induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$.

O campo de vetores dado globalmente por

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

com os F_i homogêneos de grau d, tem expressão local em U_0 dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pelo Exemplo 3.6, a expressão local da 1-forma em U_0 que induz a mesma folheação que $\mathcal{X}$ é

$$\omega = -(f_2 - yf_0)dx + (f_1 - xf_0)dy.$$

A expressão global da 1-forma acima é

$$\Omega = A_0 dz_0 + A_1 dz_1 + A_2 dz_2,$$

onde pelas equações (3.19), A_0, A_1, A_2 são dados por

$$\begin{aligned} A_0 &= z_1F_2 - z_2F_1 \\ A_1 &= -z_0F_2 + z_2F_0 \\ A_2 &= z_0F_1 - z_1F_0. \end{aligned}$$

Logo, a 1-forma tem expressão global

$$\Omega = (z_1F_2 - z_2F_1)dz_0 + (-z_0F_2 + z_2F_0)dz_1 + (z_0F_1 - z_1F_0)dz_2.$$

De maneira resumida, a 1-forma associada ao campo de vetores representado por $\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ é dada pelo determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} dz_0 & dz_1 & dz_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Reciprocamente, dada uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau d, induzida por uma 1-forma $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$, podemos reverter o processo e encontrar F_0, F_1, F_2 tais que o campo $\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ induz a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$. Isto é possível através do resultado seguinte:

Proposição 3.14. *Se A_0, A_1, A_2 são polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$ então existem polinômios F_0, F_1, F_2 homogêneos de grau d tais que*

$$\begin{cases} A_0 = z_1F_2 - z_2F_1 \\ A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases}.$$

Demonstração. Como

$$z_0A_0 = -z_1A_1 - z_2A_2 \tag{3.21}$$

e os A_i possuem grau $d+1$, z_0^{d+1} não divide nenhum monômio de A_0, caso contrário z_0A_0 teria um monômio divisível por z_0^{d+2}. Assim, todos os monômios de A_0 possuem fator z_1

ou z_2 e podemos escrever $A_0 = z_1F_2 - F_1z_2$, para alguns F_1, F_2, ambos homogêneos de grau d. Substituindo em (3.21), temos

$$z_0(z_1F_2 - F_1z_2) = -A_1z_1 - A_2z_2. \tag{3.22}$$

Agrupando os temos em z_1 e z_2 na equação (3.22), conseguimos

$$z_1(z_0F_2 + A_1) = z_2(z_0F_1 - A_2). \tag{3.23}$$

Portanto, $z_1 \mid (z_0F_1 - A_2)$ e $z_2 \mid (z_0F_2 + A_1)$, isto é, existem polinômios G_3 e G_4, ambos de grau d, tais que

$$\begin{cases} z_0F_1 - A_2 = z_1G_3 \\ z_0F_2 + A_1 = z_2G_4 \end{cases}. \tag{3.24}$$

Substituindo as equações (3.24) em (3.23), obtemos $z_1z_2G_4 = z_2z_1G_3$, e dessa forma, $G_3 = G_4$. Escrevendo $G_3 = G_4 = F_0$, surgem as relações

$$\begin{cases} A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \\ A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \end{cases}.$$

□

Exemplo 3.8. Consideremos o campo de vetores

$$\mathcal{X} = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_0 + z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_0 + z_1 + z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0 é dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (1 + x - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (1 + x + y - xy)\frac{\partial}{\partial y}$$

e a 1-forma associada à $\mathcal{X}_{U_0}$ é dada por

$$\omega = (xy - x - y - 1)dx + (1 + x - x^2)dy.$$

Usando as relações (3.19), temos que a expressão global da 1-forma é

$$\Omega = (z_0z_1 - z_0z_2 + z_1^2)dz_0 + (z_1z_2 - z_0z_1 - z_0z_2 - z_0^2)dz_1 + (z_0^2 + z_0z_1 - z_1^2)dz_2.$$

Observemos que valem $A_0 = z_1F_2 - z_2F_1, A_1 = z_2F_0 - z_0F_2$ e $A_2 = z_0F_1 - z_1F_0$.

Exemplo 3.9. Tomemos a 1-forma dada globalmente por

$$\Omega = 2z_1z_2dz_0 - z_0z_2dz_1 - z_0z_1dz_2.$$

Vamos obter polinômios homogêneos F_0, F_1, F_2 de grau 1 tais que

$$\begin{cases} A_0 = z_1F_2 - z_2F_1 \\ A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases}.$$

A Proposição 3.14, além de garantir a existência de tais polinômios, fornece um método para encontrá-los. Seguindo as idéias de sua demonstração, escrevamos

$$A_0 = (2z_2) \cdot z_1 - 0 \cdot z_2,$$

ou seja, $F_1 = 0$ e $F_2 = 2z_2$. O polinômio F_0 é tal que

$$\begin{cases} z_0F_1 - A_2 = z_1F_0 \\ z_0F_2 + A_1 = z_2F_0 \end{cases}.$$

Substituindo F_1 e F_2 no sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} z_0z_1 = z_1F_0 \\ 2z_0z_2 - z_0z_2 = z_2F_0 \end{cases},$$

donde conseguimos $F_0 = z_0$. Assim, um representante do campo vetorial que induz a mesma folheação que a 1-forma Ω é $\mathcal{X} = z_0\dfrac{\partial}{\partial z_0} + 2z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$.

Poderíamos também escrever

$$A_0 = (z_2) \cdot z_1 - (-z_1) \cdot z_2,$$

isto é, tomar $F_1 = -z_1$ e $F_2 = z_2$. Neste caso $F_0 = 0$. Obtemos assim o campo representado por $\mathcal{X}' = -z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$. Apesar das diferentes escritas de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ eles representam o mesmo campo de vetores em $\mathbb{P}^2$, uma vez que $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o campo radial.

Exemplo 3.10. As passagens campo$\leftrightsquigarrow$1-forma global fornecem um método para sairmos da expressão local de um campo de vetores para uma expressão global do mesmo campo. Como exemplo tomemos o campo de vetores, dado em U_0 por

$$\mathcal{X}_{U_0} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

A 1-forma associada a este campo é $\omega = -ydx + xdy$, cuja expressão global, por (3.19), é $\Omega = -z_2dz_1 + z_1dz_2$. Para obtermos a forma global de $\mathcal{X}$, buscamos F_0, F_1, F_2 polinômios homogêneos de grau 0, isto é, constantes, tais que

$$\begin{cases} A_0 = z_1F_2 - z_2F_1 \\ A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = z_1F_2 - z_2F_1 \\ -z_2 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ z_1 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases}.$$

Como $F_0 = -1, F_1 = 0, F_2 = 0$ é uma solução, $\mathcal{X}_{U_0}$ é dado globalmente por $\mathcal{X} = -\partial_0$.

Sejam $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ e $\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ uma 1-forma e um campo de vetores que induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$. Seja p uma singularidade de Ω. Por simplicidade, suponhamos que $p \in U_0$. Então, p anula a expressão local de Ω em U_0, que é $\omega = a_1dx + a_2dy$, onde $a_j = A_j(1, x, y)$. Como a forma local de $\mathcal{X}$ é $\mathcal{X}_{U_0} = -a_2\dfrac{\partial}{\partial x} + a_1\dfrac{\partial}{\partial y}$, segue que p é uma singularidade de $\mathcal{X}$. Reciprocamente, se $p \in U_0$ é singularidade do campo $\mathcal{X}$, então p anula a sua expressão local em U_0. Pela relação campo$\rightsquigarrow$1-forma local, p também anula $\omega = a_1dx + a_2dy$, a forma local de Ω em U_0. Como $A_1(p) = 0 = A_2(p), z_0(p) \neq 0$ e $A_0z_0 + A_1z_1 + A_2z_2 = 0$, conseguimos $A_0(p) = 0$. Estas considerações mostram que as singularidades de $\mathcal{X}$ e de Ω são as mesmas.

Lembrando as relações

$$\begin{cases} A_0 = z_1F_2 - z_2F_1 \\ A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases} \tag{3.25}$$

vemos que as singularidades da folheação são dadas pelos zeros comuns dos menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{pmatrix}.$$

3.4 Curvas Invariantes

Definição 3.15. Seja $C = \boldsymbol{V}(F)$ uma curva reduzida irredutível de $\mathbb{P}^2$ e $\mathcal{X}$ um campo vetorial de $\mathbb{P}^2$ de grau d. Dizemos que C é *invariante por* $\mathcal{X}$, ou ainda que C é *solução* de $\mathcal{X}$, se $\mathcal{X}(p) \in T_pC$ para todo $p \in C\backslash(Sing(C) \cup Sing(\mathcal{X}))$.

Se C é redutível, dizemos que C é invariante por $\mathcal{X}$ quando cada componente irredutível de C for invariante por $\mathcal{X}$.

Se C é invariante por um campo de vetores $\mathcal{X}$ e $\mathcal{F}$ é a folheação induzida por $\mathcal{X}$, então dizemos que C é *invariante pela folheação* $\mathcal{F}$, ou que C é uma *folha* da folheação $\mathcal{F}$.

Proposição 3.16. *Uma curva projetiva plana reduzida $C = \boldsymbol{V}(F)$ de grau m, definida pelo polinômio homogêneo F, é invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ induzida pelo campo de vetores $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}^2$ e de grau d se e somente se $\mathcal{X}(F) = HF$ para algum polinômio homogêneo H de grau $d-1$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{X}$ é dado por $X = G_0\frac{\partial}{\partial z_0}+G_1\frac{\partial}{\partial z_1}+G_2\frac{\partial}{\partial z_2}$, onde G_0, G_1, G_2 são polinômios homogêneos de grau d. Se $\mathcal{X}(F) = HF$ para algum polinômio H, temos para $p \in C\backslash(Sing(C) \cup Sing(\mathcal{X}))$ que

$$\mathcal{X}(F)(p) = G_0(p)\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) + G_1(p)\frac{\partial F}{\partial z_1}(p) + G_2(p)\frac{\partial F}{\partial z_2}(p) = H(p)F(p) = 0.$$

Logo, $(G_0(p) : G_1(p) : G_2(p)) \in T_pC$ e portanto C é invariante por $\mathcal{X}$.

Se C é invariante por $\mathcal{X}$, então $\mathcal{X}(p) \in T_pC$ para $p \in C\backslash(Sing(C) \cup Sing(\mathcal{X}))$, isto é, $\mathcal{X}(F)(p) = 0$. Portanto, o polinômio $\mathcal{X}(F)$ se anula em C. Pelo Teorema dos Zeros, ver Theorem 5.4 em [19], segue que $\mathcal{X}(F) \in \sqrt{\langle F\rangle} = \langle F\rangle$ pois F é reduzido. Assim, existe H tal que $\mathcal{X}(F) = HF$. Já que $\mathcal{X}(F)$ e F são polinômios homogêneos, H é homogêneo. Comparando os graus na igualdade $\mathcal{X}(F) = HF$, obtemos que o grau de H é $d-1$. □

Se uma curva C de $\mathbb{P}^2$, definida pelo polinômio homogêneo reduzido F, é invariante por um campo vetorial $\mathcal{X} = G_0\dfrac{\partial}{\partial z_0} + G_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + G_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$, então existe um representante $\mathcal{X}'$ do mesmo campo de vetores tal que $\mathcal{X}'(F) = 0$. Com efeito, seja m o grau de F. A relação de Euler nos dá

$$mF = z_0\frac{\partial F}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial F}{\partial Z_1} + z_2\frac{\partial F}{\partial z_2},$$

e então, pela Proposição 3.16, vale

$$\mathcal{X}(F) = HF = H\left(\frac{z_0}{m}\frac{\partial F}{\partial z_0} + \frac{z_1}{m}\frac{\partial F}{\partial Z_1} + \frac{z_2}{m}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right).$$

Logo,

$$\left(G_0 - \frac{H}{m}z_0\right)\frac{\partial F}{\partial z_0} + \left(G_1 - \frac{H}{m}z_1\right)\frac{\partial F}{\partial z_1} + \left(G_2 - \frac{H}{m}z_2\right)\frac{\partial F}{\partial z_2} = 0.$$

Colocando-se $G_i' = G_i - Hz_i/m$, obtemos $G_0'\frac{\partial F}{\partial z_0} + G_1'\frac{\partial F}{\partial z_1} + G_2'\frac{\partial F}{\partial z_2} = 0$. O campo vetorial $\mathcal{X}' = G_0'\frac{\partial}{\partial z_0} + G_1'\frac{\partial}{\partial z_1} + G_2'\frac{\partial}{\partial z_2}$ difere de $\mathcal{X}$ por um múltiplo do campo radial, logo $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ induzem o mesmo campo de vetores e $\mathcal{X}'(F) = 0$.

Observamos ainda que este fato continua válido sobre $\mathbb{P}^2_k$ para qualquer corpo k algebricamente fechado de característica p tal que $p \nmid m$.

Exemplo 3.11. A folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau zero, induzida pelo campo vetorial

$$\mathcal{X} = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

é tal que toda reta de $\mathbb{P}^2$ passando por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$ é invariante. De fato, se uma reta ℓ passa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$, então ℓ é dada por $F(z_0, z_1, z_2) = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$, onde $a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0$. Como $\mathcal{X}(F) = a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 = 0 \cdot F$, segue a afirmação. Mais ainda, se uma reta de $\mathbb{P}^2$ não passa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$, ela não pode ser invariante pela folheação.

Exemplo 3.12. A curva C definida por $z_0 z_2^2 = z_1^3$ é invariante pela folheação definida pelo campo de vetores

$$\mathcal{X} = -2z_0 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - 3z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

De fato, $\mathcal{X}(F) = -2z_0 z_2 \cdot (3z_1^2) - 3z_1^2 \cdot (2z_0 z_2) = 0$. Observe que o campo vetorial $\mathcal{X}$ é dado localmente em U_0 por

$$\mathcal{X}_{U_0} = -2y \frac{\partial}{\partial x} - 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

O sistema de equações diferenciais associado a $\mathcal{X}_{U_0}$ é

$$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) \\ y'(t) = -3x^2(t) \end{cases}$$

que possui como uma solução a trajetória $(x, y) = (t^{-2}, t^{-3})$. Assim, X_{U_0} é um campo de vetores tangentes à curva $C_0 = C|_{U_0} : y^2 = x^3$.

Exemplo 3.13. Para que a reta no infinito $L_\infty : z_0 = 0$ seja invariante por uma folheação de grau d definida por $\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, devemos ter $\mathcal{X}(z_0) = F_0 = H z_0$ para algum H homogêneo de grau $d-1$. Logo, para construirmos campos de vetores cuja reta $z_0 = 0$ é invariante devemos escolher polinômios homogêneos H de grau $d-1$ e F_1, F_2, ambos de grau d. Módulo os múltiplos do campo radial, conseguimos que os campos que deixam L_∞ invariante formam o espaço vetorial $\dfrac{S_{d-1} \times S_d \times S_d}{S_{d-1} \cdot (z_0, z_1, z_2)}$ sobre k cuja dimensão é $(d+1)d/2 + 2(d+2)(d+1)/2 - (d+1)d/2 = (d+2)(d+1)$. Logo, temos um subespaço vetorial de codimensão $(d+3)(d+1) - (d+2)(d+1) = d+1$ dentro do espaço dos campos vetoriais de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Exemplo 3.14. Consideremos o campo vetorial $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}^2$ dado por $\mathcal{X} = z_0\frac{\partial}{\partial z_1}$. Uma curva plana projetiva C, definida pelo polinômio homogêneo reduzido F, será invariante por $\mathcal{X}$ se, e somente se, o polinômio F não depende de z_1. Com efeito, se $\mathcal{X}(F) = z_0\frac{\partial F}{\partial z_1} = HF$ para algum polinômio homogêneo H de grau zero, então a potência máxima de z_1 em $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ é menor que a potência máxima de z_1 em F. Logo $H = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z_1} = 0$. Reciprocamente, se F não depende de z_1 então $\mathcal{X}(F) = 0 = 0 \cdot F$ e F é invariante por $\mathcal{X}$. Em particular, a família de retas $\ell_c : z_2 = cz_0, c \in \mathbb{C}$, é uma família de curvas invariantes por $\mathcal{X}$. Localmente, o campo $\mathcal{X}_{U_0} = \frac{\partial}{\partial x}$ tem como soluções as retas $y = c$.

Exemplo 3.15. Consideremos uma reta ℓ de $\mathbb{P}^2$, definida por $F = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_2 \neq 0$.

Se ℓ é invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$, induzida pelo campo de vetores representado por $\mathcal{X} = G_0\dfrac{\partial}{\partial z_0} + G_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + G_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$, então podemos assumir que $\mathcal{X}(F) = 0$. Dessa maneira, $a_0G_0 + a_1G_1 + a_2G_2 = 0$, e assim podemos escrever $a_2G_2 = -a_0G_0 - a_1G_1$. Como $\mathcal{X}$ e $a_2\mathcal{X}$ induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$, ela é induzida pelo campo $a_2\mathcal{X}$ dado por

$$a_2G_0\frac{\partial}{\partial z_0} + a_2G_1\frac{\partial}{\partial z_1} - a_0G_0\frac{\partial}{\partial z_2} - a_1G_1\frac{\partial}{\partial z_2} = G_0\left(a_2\frac{\partial}{\partial z_0} - a_0\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + G_1\left(a_2\frac{\partial}{\partial z_1} - a_1\frac{\partial}{\partial z_2}\right).$$

Em geral, se uma folheação de $\mathbb{P}^2$ deixa uma curva de grau um, determinada pelo polinômio homogêneo F, invariante, então tal folheação é induzida por um campo de vetores da forma

$$\mathcal{X} = H_0\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + H_1\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial F}{\partial z_0}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + H_2\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial F}{\partial z_0}\frac{\partial}{\partial z_1}\right).$$

No caso $F = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2$ e $\mathcal{X} = G_0\frac{\partial}{\partial z_0} + G_1\frac{\partial}{\partial z_1} + G_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ com $\mathcal{X}(F) = 0$, temos

$$\begin{cases} a_2 \neq 0 \Rightarrow H_0 = G_1, H_1 = G_0, H_2 = 0 \\ a_1 \neq 0 \Rightarrow H_0 = -G_2, H_1 = 0, H_2 = G_0 \\ a_0 \neq 0 \Rightarrow H_0 = 0, H_1 = -G_2, H_2 = -G_1 \end{cases}.$$

A proposição seguinte generaliza este exemplo para curvas de grau maior que um.

Para simplificar a notação, usaremos ∂_i para denotar $\dfrac{\partial}{\partial z_i}$.

Proposição 3.17. *Se uma curva suave $C \subset \mathbb{P}^2$, dada pelos zeros de um polinômio reduzido homogêneo F, é invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$, então a folheação é induzida por um campo de vetores da forma*

$$\mathcal{X} = H_0(\partial_1F\partial_2 - \partial_2F\partial_1) + H_1(\partial_0F\partial_2 - \partial_2F\partial_0) + H_2(\partial_0F\partial_1 - \partial_1F\partial_0).$$

Demonstração. Se grau$(F) = 1$, já sabemos que o resultado é válido. Consideremos então grau$(F) \geq 2$. Sendo C uma curva suave, temos $\partial_0 F \neq 0$. De fato, se $\partial_0 F = 0$ então F seria independente de z_0 e portanto o ponto $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2$ seria uma singularidade da curva C.

Sendo C uma curva suave, temos também que $\overline{\partial_1 F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F \rangle$ e $\overline{\partial_2 F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F, \partial_1 F \rangle$, onde $S = k[z_0, z_1, z_2]$ (este fato será mostrado no Capítulo 4, no caso de $k[z_0, \ldots, z_n]$, usando-se algumas noções de álgebra comutativa).

Se a folheação é induzida pelo campo de vetores $\mathcal{X} = G_0\partial_0 + G_1\partial_1 + G_2\partial_2$ com $\mathcal{X}(F) = 0$, então

$$G_0\partial_0 F + G_1\partial_1 F + G_2\partial_2 F = 0. \tag{3.26}$$

De (3.26) conseguimos que $G_2\partial_2 F = -G_0\partial_0 F - G_1\partial_1 F$, e assim, $\overline{G_2} \cdot \overline{\partial_2 F} = \overline{0}$ em $S/\langle \partial_0 F, \partial_1 F \rangle$. Como $\overline{\partial_2 F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F, \partial_1 F \rangle$, temos $\overline{G_2} = \overline{0}$, ou seja, $G_2 \in \langle \partial_0 F, \partial_1 F \rangle$ e existem polinômios homogêneos b_{02} e b_{12} de mesmos graus tais que

$$G_2 = b_{02}\partial_0 F + b_{12}\partial_1 F. \tag{3.27}$$

Substituindo (3.27) em (3.26), obtemos

$$G_0\partial_0 F + G_1\partial_1 F + b_{02}\partial_0 F\partial_2 F + b_{12}\partial_1 F\partial_2 F = 0.$$

Segue que $(G_0 + b_{02}\partial_2 F)\partial_0 F + (G_1 + b_{12}\partial_2 F)\partial_1 F = 0$, ou seja,

$$\overline{(G_1 + b_{12}\partial_2 F)} \cdot \overline{\partial_1 F} = \overline{0} \in S/\langle \partial_0 F \rangle.$$

Como $\overline{\partial_1 F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F \rangle$, devemos ter $\overline{G_1 + b_{12}\partial_2 F} = \overline{0}$ em $S/\langle \partial_0 F \rangle$. Logo existe um polinômio homogêneo b_{01} tal que $G_1 + b_{12}\partial_2 F = b_{01}\partial_0 F$. Portanto

$$G_1 = b_{01}\partial_0 F - b_{12}\partial_2 F. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26), ficamos com

$$G_0\partial_0 F + b_{01}\partial_0 F\partial_1 F - b_{12}\partial_2 F\partial_1 F + b_{02}\partial_0 F\partial_2 F + b_{12}\partial_1 F\partial_2 F = 0.$$

Logo, $(G_0 + b_{01}\partial_1 F + b_{02}\partial_2 F)\partial_0 F = 0$. Como $\partial_0 F \neq 0$ e S é um domínio de integridade, $G_0 + b_{01}\partial_1 F + b_{02}\partial_2 F = 0$, ou seja,

$$G_0 = -b_{01}\partial_1 F - b_{02}\partial_2 F. \tag{3.29}$$

Usando as expressões (3.27), (3.28) e (3.29), obtemos a seguinte expressão para o campo $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X} = G_0\partial_0+G_1\partial_1+G_2\partial_2 = -b_{01}\partial_1F\partial_0-b_{02}\partial_2F\partial_0+b_{01}\partial_0F\partial_1-b_{12}\partial_2F\partial_1+b_{02}\partial_0F\partial_2+b_{12}\partial_1F\partial_2.$$

Agrupando os termos em b_{01}, b_{02} e b_{12} obtemos

$$\mathcal{X} = b_{01}(\partial_0F\partial_1 - \partial_1F\partial_0) + b_{02}(\partial_0F\partial_2 - \partial_2F\partial_0) + b_{12}(\partial_1F\partial_2 - \partial_2F\partial_1)$$

e escrevendo $b_{01} = H_2, b_{02} = H_1$ e $b_{12} = H_0$ conseguimos o resultado. □

Vamos estender a noção de curva invariante para 1-formas em $\mathbb{P}^2$.

Definição 3.18. Sejam Ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ e C uma curva plana projetiva. Dizemos que C é *invariante por* Ω quando C é invariante por um campo vetorial $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}^2$ que induz a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ que Ω.

Suponhamos que uma folheação de $\mathbb{P}^2$ seja induzida por uma 1-forma global Ω e consideremos um campo de vetores $\mathcal{X}$ que induz a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$. Então, uma curva $C = \boldsymbol{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ reduzida é invariante se para $p \in C\backslash(Sing(C) \cup Sing(\Omega))$ temos $\mathcal{X}(p) \in T_pC$. Também, $\mathcal{X}(p) \in \ker(\Omega(p))$. De acordo com a Observação 2.24 temos $T_pC = \ker(d_pF)$. Assim, sendo os espaços vetoriais $\ker(\Omega(p))$ e $\ker(d_pF)$ de dimensão um, $\ker(\Omega(p)) = \ker(d_pF)$ em todo $p \in C$. Pela Proposição 2.25 da página 23, temos $\Omega(p) \wedge d_pF = 0$. Se $\Omega \wedge dF = B_{01}dz_0 \wedge dz_1 + B_{02}dz_0 \wedge dz_2 + B_{12}dz_1 \wedge dz_2$, então para $p \in C$ temos $B_{ij}(p) = 0, 0 \leq i < j \leq 2$. Pelo Teorema dos Zeros, $B_{ij} = C_{ij} \cdot F$ e portanto

$$\Omega \wedge dF = F \cdot (C_{01}(dz_0 \wedge dz_1) + C_{02}(dz_0 \wedge dz_2) + C_{12}(dz_1 \wedge dz_2)).$$

Assim, conseguimos o seguinte resultado:

Proposição 3.19. *Uma curva $C \subset \mathbb{P}^2$ definida pelo polinômio homogêneo reduzido F é invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$, definida pela 1-forma Ω, se e somente se existe uma 2-forma η tal que*

$$\Omega \wedge dF = F\eta.$$

Exemplo 3.16. No Exemplo 3.13, determinamos os campos de vetores que deixam a reta no infinito $L_\infty : z_0 = 0$ invariante. Vejamos a mesma situação, na linguagem de

1-formas. Se a 1-forma $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ deixa a reta $z_0 = 0$ invariante, então $\Omega \wedge dz_0 = A_1(dz_1 \wedge dz_0) + A_2(dz_2 \wedge dz_0) = z_0\eta$ para alguma 2-forma η, e assim a condição para que L_∞ seja invariante é que $z_0 \mid A_1$ e $z_0 \mid A_2$. Lembrando a relação campo e 1-forma, temos

$$\begin{cases} A_1 = z_2F_0 - z_0F_2 \\ A_2 = z_0F_1 - z_1F_0 \end{cases}$$

e que $z_0 \mid F_0$, como obtido anteriormente.

Escrevendo $A_1 = z_0B_1$ e $A_2 = z_0B_2$ e substituindo em $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$ obtemos

$$z_0A_0 + z_1z_0B_1 + z_2z_0B_2 = 0, \text{ logo } A_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0.$$

Seja $d =$ grau (Ω). Então, grau$(A_i) = d + 1$, grau$(B_j) = d$ e as 1-formas de grau d que deixam L_∞ invariante formam exatamente o núcleo da transformação linear

$$T : S_{d+1} \times S_d \times S_d \longrightarrow S_{d+1}$$

$$(A_0, B_1, B_2) \longmapsto A_0 + z_1B_1 + z_2B_2$$

Como um elemento $f \in S_{d+1}$ é a imagem de $(f, 0, 0)$ por T, T é sobrejetiva e portanto

$$\dim(\ker T) = \dim(S_{d+1}) + \dim(S_d) + \dim(S_d) - \dim(S_{d+1}) = 2\dim(S_d) = (d + 2)(d + 1).$$

Obtemos que o espaço das 1-formas de grau d que deixam a reta no infinito L_∞ invariante formam um subespaço vetorial de codimensão $(d + 1)$ no espaço vetorial das 1-formas de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Exemplo 3.17. Se uma curva plana projetiva suave C, definida pelo polinômio homogêneo reduzido F, é invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$, a Proposição 3.17 nos diz que a folheação é induzida por um campo vetorial da forma

$$\mathcal{X} = H_0(\partial_1F\partial_2 - \partial_2F\partial_1) + H_1(\partial_0F\partial_2 - \partial_2F\partial_0) + H_2(\partial_0F\partial_1 - \partial_1F\partial_0)$$

para alguns polinômios homogêneos H_0, H_1, H_2 de mesmos graus. Portanto, uma 1-forma que deixa C invariante tem expressão

$$\begin{aligned} \Omega = (z_1H_0\partial_1F + z_1H_1\partial_0F + z_2H_0\partial_2F - z_2H_2\partial_0F)dz_0 + \\ + (-z_0H_1\partial_0F - z_0H_0\partial_1F - z_2H_1\partial_2F - z_2H_2\partial_1F)dz_1 + \\ + (-z_0H_0\partial_2F + z_0H_2\partial_0F + z_1H_1\partial_2F + z_1H_2\partial_1F)dz_2. \end{aligned}$$

Usando que $mF = z_0\partial_0 F + z_1\partial_1 F + z_2\partial_2 F$, onde $m = \text{grau}(F)$, podemos reescrever a expressão de Ω como

$$\Omega = (-z_0H_0 + z_1H_1 - z_2H_2)dF + mF(H_0dz_0 - H_1dz_1 + H_2dz_2).$$

Assim, existem um polinômio homogêneo G e 1-forma η tais que $\Omega = GdF + F\eta$.

Também, um cálculo simples mostra que $\Omega \wedge dF = mF\vartheta$, onde ϑ é a 2-forma

$$\vartheta = (H_0\partial_1F+H_1\partial_0F)(dz_0\wedge dz_1)+(H_0\partial_2F-H_2\partial_0F)(dz_0\wedge dz_2)+(-H_1\partial_2F-H_2\partial_1F)(dz_1\wedge dz_2).$$

3.5 O Problema de Poincaré para Folheações em $\mathbb{P}^2$

Nesta seção, vamos apresentar uma solução para o problema de encontrar uma cota superior para o grau de possíveis curvas invariantes por uma folheação saturada $\mathcal{F}$ de grau d em $\mathbb{P}^2$. Originalmente, tal questão era abordada quanto a limitação do grau de uma curva invariante C em função *apenas* do grau d da folheação, mas em geral é impossível de se encontrar tais limites.

Exemplo 3.18. Dados dois inteiros positivos $p > q$, a curva de grau p definida pelo polinômio $F = z_2^p - z_0^{p-q}z_1^q$ é invariante pela folheação de grau um definida pelo campo vetorial $\mathcal{X} = pz_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + qz_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$, já que

$$\mathcal{X}(F) = pz_1qz_0^{p-q}z_1^{q-1} + qz_2pz_2^{p-1} = pqF.$$

Como podemos tomar p arbitrariamente grande, vemos que não é possível limitar o grau de uma solução qualquer de $\mathcal{X}$.

Desta forma, o problema de se encontrar limites para o grau de possíveis soluções recebeu a seguinte "modificação": procurar limitar o grau de uma curva invariante em função do grau da folheação, impondo-se certas condições sobre tal curva, por exemplo a exigência de que todas as singularidades da curva sejam do tipo cruzamento normal, como feito originalmente em [6] ou colocando-se também tais limites em função de outros invariantes, como o gênero da curva, feito em [13] ou a altura da folheação, assunto abordado em [20].

Nesta direção, impondo a condição de uma solução do campo ser uma curva suave conseguimos imediatamente uma limitação como decorrência da Proposição 3.17.

Teorema 3.20. *Se uma curva suave $C \subset \mathbb{P}^2$, dada pelos zeros de um polinômio reduzido homogêneo F de grau m fica invariante por uma folheação de grau d então $m \leq d+1$.*

Demonstração. Sendo C suave e invariante, temos pela Proposição 3.17 que a folheação é induzida por um campo de vetores da forma

$$\mathcal{X} = H_0(\partial_1 F \partial_2 - \partial_2 F \partial_1) + H_1(\partial_0 F \partial_2 - \partial_2 F \partial_0) + H_2(\partial_0 F \partial_1 - \partial_1 F \partial_0),$$

para alguns polinômios homogêneos H_0, H_1, H_2. Como grau$(F) = m$ e grau$(\mathcal{X}) = d$, temos $d =$grau$(H_i) + m - 1$. Sendo grau$(H_i) \geq 0$, conseguimos $d - m + 1 \geq 0$, ou seja, $m \leq d + 1$. $\square$

O Teorema 3.20 pode ser generalizado para folheações de grau um sobre $\mathbb{P}^n$, com $n \geq 2$. Com este objetivo, vamos estender a ideia de folheações definidas por campos de vetores em $\mathbb{P}^2$ para $\mathbb{P}^n$. No Capítulo seguinte, veremos as noções básicas que irão não somente auxiliar nessa extensão, como também nos fornecerão outra solução para o problema de Poincaré.

4 Noções sobre feixes

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos de feixes sobre espaços topológicos e alguns resultados sobre cohomologia que serão utilizados no próximo capítulo.

4.1 Feixes sobre espaços topológicos

Definição 4.1. Seja X um espaço topológico. Para cada aberto $U \subseteq X$, associemos um grupo abeliano (ou um anel comutativo) $\mathcal{F}(U)$ (o conjunto vazio a $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$). $\mathcal{F}$ é dito um *pré-feixe de grupos abelianos* (ou de anéis comutativos) quando a seguinte condição é satisfeita:
(PF) Para quaisquer abertos $V \subseteq U$ de X, existe um homomorfismo de grupos (ou de anéis) $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tal que:

i) $\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$

ii) Para abertos $W \subseteq V \subseteq U$ de X, vale

$$\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}.$$

O homomorfismo $\rho_{V,U}$ é chamado *mapa de restrição.*

Um pré-feixe de grupos abelianos (ou de anéis comutativos) $\mathcal{F}$ será dito um *feixe de grupos abelianos* (ou de anéis comutativos) sobre X se para qualquer aberto $U \subseteq X$ e qualquer cobertura aberta $\{U_j\}_{j \in J}$ de U valem

(F1) Se $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $\rho_{U_j,U}(s) = 0$, $\forall\, j \in J$, então $s = 0$.

(F2)Para cada família $\{s_j\}_{j\in J}$, $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ satisfazendo

$$\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j), i, j \in J,$$

existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_j,U}(s) = s_j$, para todo $j \in J$.

Um elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ será chamado de uma *seção* em U, onde $U \subseteq X$ é um aberto.

Intuitivamente, a condição (F1) diz que se uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ se anula em "todas as partes" de U, então $s = 0$. Já a condição (F2) diz que se uma coleção $\{s_j\}_{j \in J}$ de seções dos $\mathcal{F}(U_j)$ é tal que os elementos dessa coleção "coincidem nas interseções", então elas se "colam" para formar um elemento definido na união desses abertos.

Observe que a extensão $s \in \mathcal{F}(U)$ obtida na propriedade (F2) é única. De fato, se t é outra extensão, isto é, $\rho_{U_j,U}(t) = s_j$, para todo $j \in J$, então $\rho_{U_j,U}(s - t) = 0$. Pela propriedade (F1), temos que $s - t = 0$, ou seja, $s = t$.

Exemplo 4.1. Dado um espaço topológico X e um aberto $U \subseteq X$, consideremos o conjunto $\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} |\ f$ é contínua$\}$. Para $x \in U$, defina $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Então, $\mathcal{C}(U)$ é um anel comutativo. Para abertos $V \subseteq U$, o mapa de restrição $\rho_{V,U}$ é definido por $\rho_{V,U}(f) = f|_V$. Então $\mathcal{C}$ é um feixe de anéis comutativos sobre X.

Seja β uma base para os abertos do espaço topológico X. Os elementos de β são ditos abertos básicos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um β-feixe quando a Definição 4.1 é válida para os abertos básicos de X, isto é, quando as propriedades (PF),(F1) e (F2) são verificadas sempre que W, V, U, U_j são abertos básicos de X.

Sejam $\mathcal{F}$ um β-feixe e $U \subseteq X$ um aberto. Definamos

$$\mathcal{F}_*(U) = \{(s_\alpha) \in \prod_{U_\alpha \subseteq U, U_\alpha \in \beta} \mathcal{F}(U_\alpha) |\ \text{para abertos básicos } U_\alpha \subseteq U_\gamma, \text{ vale } \rho_{U_\alpha,U_\gamma}(s_\gamma) = s_\alpha\}$$

com as operações

$$(s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} + (t_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} = (s_\alpha + t_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} \tag{4.1}$$

$$(s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} \cdot (t_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} = (s_\alpha \cdot t_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} \tag{4.2}$$

onde cada U_α é um aberto básico de X, quando $\mathcal{F}$ for um β-feixe de anéis comutativos. Se $\mathcal{F}$ é um β-feixe de grupos abelianos, consideramos apenas a operação (4.1). Estas operações são fechadas em $\mathcal{F}_*(U)$ e definem uma estrutura de grupo abeliano (ou anel comutativo) em $\mathcal{F}_*(U)$. Intuitivamente, uma função em U é definida por suas restrições nos abertos básicos. Dados abertos $V \subseteq U \subseteq X$, consideremos o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_{*V,U}: & \mathcal{F}_*(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}_*(V) \\ & (s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} & \longmapsto & (s_\gamma)_{U_\gamma \subseteq V}. \end{array}$$

A aplicação $\rho_{*V,U}$ satisfaz a condição (PF) da Definição 4.1, e sendo assim $\mathcal{F}_*$ é um pré-feixe em X.

Para cada aberto $U \in \beta$, podemos definir um homomorfismo de grupos (ou de anéis) $\kappa_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_*(U)$ por $\kappa_U(a) = (\rho_{U_\alpha,U}(a))_{U_\alpha \subseteq U}$. Já que U é um aberto básico, existe coordenada s_U em $(s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} \in \mathcal{F}_*(U)$, $s_U \in \mathcal{F}(U)$ e podemos definir o homomorfismo $\nu_U : \mathcal{F}_*(U) \to \mathcal{F}(U)$ colocando $\nu_U((s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U}) = s_U$. Como $\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$, segue que $\kappa_U \circ \nu_U = id_{\mathcal{F}_*(U)}$ e $\nu_U \circ \kappa_U = id_{\mathcal{F}(U)}$. Em outras palavras, $\mathcal{F}_*(U)$ e $\mathcal{F}(U)$ são isomorfos. Através deste isomorfismo, se $V \subseteq U$ são abertos básicos, temos que $\rho_{V,U} = \nu_V \circ \rho_{*V,U} \circ \kappa_U$. Podemos então ver $\rho_{*V,U}$ como extensão de $\rho_{V,U}$ em abertos básicos, por isso daqui em diante escreveremos $\mathcal{F}(U)$ no lugar de $\mathcal{F}_*(U)$ assim como $\rho_{V,U}$ no lugar de $\rho_{*V,U}$, sem qualquer prejuízo.

Proposição 4.2. *Seja $\mathcal{F}$ um β-feixe sobre X. Então $\mathcal{F}$, definido em cada aberto $U \subseteq X$ como acima e com as funções $\rho_{V,U}$, é um feixe sobre X.*

Demonstração. Nos resta mostrar que são satisfeitas as condições (F1) e (F2). Tomemos um aberto $U \subseteq X$ e $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ uma cobertura aberta de U.

Seja V um aberto básico contido em U. Temos $V = \bigcup_{j \in J} (V \cap U_j) = \bigcup_{j \in J,\ l \in L} W_{jl}$, onde $V \cap U_j = \bigcup_{l \in L} W_{jl}$ é cobertura de $V \cap U_j$ por abertos básicos.

Se $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $\rho_{U_j,U}(s) = 0$ para todo $j \in J$, então

$$\rho_{W_{jl},V}(\rho_{V,U}(s)) = \rho_{W_{jl},U}(s) = (\rho_{W_{jl},V \cap U_j} \circ \rho_{V \cap U_j,U_j} \circ \rho_{U_j,U})(s) = \rho_{W_{jl},V \cap U_j}(\rho_{V \cap U_j,U_j}(0)) = 0.$$

Como $\mathcal{F}$ é β-feixe e W_{jl}, V são abertos básicos com $V = \bigcup_{j \in J, l \in L} W_{jl}$, vale $\rho_{V,U}(s) = 0$. Sendo $s = (s_\alpha) \in \prod_{U_\alpha \subseteq U, U_\alpha \in \beta} \mathcal{F}(U_\alpha)$, temos que toda componente de s é nula, e assim $s = 0$. Conseguimos a condição (F1) de feixe.

Seja agora uma coleção $\{s_i\}_{i \in J}$ tal que $\rho_{U_i \cap U_j,U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j,U_j}(s_j)$. Dado um aberto básico V contido em U, sejam $V \cap U_j = \bigcup_{l \in L} W_{jl}$ e $V \cap U_i = \bigcup_{m \in M} W_{im}$ coberturas por abertos básicos. Para quaisquer $l \in L, m \in M$ vale

$$\rho_{W_{im} \cap W_{jl},U_i \cap U_j} \circ \rho_{U_i \cap U_j,U_i}(s_i) = \rho_{W_{im} \cap W_{jl},U_i \cap U_j} \circ \rho_{U_i \cap U_j,U_j}(s_j)$$

$$\rho_{W_{im} \cap W_{jl},U_i}(s_i) = \rho_{W_{im} \cap W_{jl},U_j}(s_j)$$

$$\rho_{W_{im} \cap W_{jl},W_{im}}(\rho_{W_{im},U_i}(s_i)) = \rho_{W_{im} \cap W_{jl},W_{jl}}(\rho_{W_{jl},U_j}(s_j)).$$

Sendo $V = \bigcup\limits_{j\in J,\ l\in L} W_{jl}$ uma cobertura de V por abertos básicos e $\mathcal{F}$ um β-feixe, existe $s_v \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\rho_{W_{im},V}(s_v) = \rho_{W_{im},U_i}(s_i)$.

Defina $s = (s_v) \in \prod\limits_{V\subseteq U, V\in\beta} \mathcal{F}(V)$. Seja $Z \subseteq V$ um aberto básico, digamos com a cobertura por abertos básicos $Z = \bigcup\limits_{i\in I, m\in N} W_{im}$. Então $W_{im} \subseteq Z \subseteq V$ e portanto vale que $\rho_{W_{im},U_i}(s_i) = \rho_{W_{im},V}(s_v) = \rho_{W_{im},Z}(\rho_{Z,V}(s_v))$. Daí, $\rho_{Z,V}(s_v) = s_z$, obtido na colagem em Z, isto é, s_z é o elemento tal que $\rho_{W_{im},Z}(s_z) = \rho_{W_{im},U_i}(s_i)$. Daí, $s \in \mathcal{F}(U)$. Se $V \subseteq U_i$, então para todo W_{im},

$$\rho_{W_{im},V}(\rho_{V,U}(s)) = \rho_{W_{im},V}(s_v) = \rho_{W_{im},U_i}(s_i) = \rho_{W_{im},V}(\rho_{V,U_i}(s_i)).$$

Como a extensão à $\mathcal{F}(V)$ é única, já que os W_{im} e V são abertos básicos e $\mathcal{F}$ é β-feixe, temos $\rho_{V,U}(s) = \rho_{V,U_i}(s_i)$. Logo

$$\rho_{V,U_i}(\rho_{U_i,U}(s)) = \rho_{V,U}(s) = \rho_{V,U_i}(s_i),$$

donde conseguimos $\rho_{V,U_i}(\rho_{U_i,U}(s) - s_i) = 0$. Uma vez que isto vale para todo aberto básico V contido em U_i, $U_i = \bigcup\limits_{V\subseteq U_i, V\in\beta}$ e já provamos a propriedade (F1) de feixe, temos $\rho_{U_i,U}(s) - s_i = 0$, isto é, $\rho_{U_i,U}(s) = s_i$. Portanto, s extende as seções s_i, provando a validade de (F2). $\square$

A Proposição 4.2 nos diz que para definirmos um feixe em X basta definir um $\beta-$feixe numa base β para os abertos de X.

4.2 O stalk de um feixe num ponto

Nosso objetivo nesta seção é, dado um ponto sobre um espaço topológico X, identificar seções de um feixe $\mathcal{F}$ em abertos distintos contendo tal ponto que se restrigem à mesma seção em um aberto menor, ainda contendo o referido ponto.

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um feixe sobre X. Fixemos ainda um ponto $x \in X$. No conjunto

$$\Upsilon = \{(t, V) |\ t \in \mathcal{F}(V), x \in V, V \subseteq X \text{ aberto}\},$$

definamos a relação $\sim$ dada por

$$(s, U) \sim (t, V) \Leftrightarrow \exists \text{ aberto } Z \subseteq X, x \in Z \subseteq U \cap V \text{ tal que } \rho_{Z,V}(t) = \rho_{Z,U}(s).$$

A relação $\sim$ é claramente reflexiva e simétrica. Mais ainda, é transitiva. De fato,

$$(s,U) \sim (t,V) \Rightarrow \exists \text{ aberto } Z_1 \subseteq U \cap V \text{ tal que } \rho_{Z_1,V}(t) = \rho_{Z_1,U}(s),$$

$$(t,V) \sim (r,W) \Rightarrow \exists \text{ aberto } Z_2 \subseteq V \cap W \text{ tal que } \rho_{Z_2,W}(r) = \rho_{Z_2,V}(t).$$

Considerando $Z_3 = Z_1 \cap Z_2$, teremos

$$\begin{aligned}\rho_{Z_3,U}(s) = \rho_{Z_3,Z_1} \circ \rho_{Z_1,U}(s) = \rho_{Z_3,Z_1} \circ \rho_{Z_1,V}(t) = \rho_{Z_3,V}(t) = \\ = \rho_{Z_3,Z_2} \circ \rho_{Z_2,V}(t) = \rho_{Z_3,Z_2} \circ \rho_{Z_2,W}(r) = \rho_{Z_3,W}(r),\end{aligned}$$

logo $(s,U) \sim (r,W)$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência. O quociente $\Upsilon/\sim$ é chamado o *stalk*, ou talo, de $\mathcal{F}$ em x e é denotado por $\mathcal{F}_x$.

Assim, um elemento $s_x \in \mathcal{F}_x$ é uma classe de equivalência $\overline{(s,V)}$, onde V é um aberto de X com $x \in V$ e $s \in \mathcal{F}(V)$. Chamamos esta classe de o *germe* de s em x.

Se $V \subseteq U$ são abertos, então $\overline{(s,U)} = \overline{(\rho_{V,U}(s),V)}$. Definamos em $\mathcal{F}_x$ as operações

$$\overline{(s,U)}+\overline{(t,V)} = \overline{(\rho_{U\cap V,U}(s),U\cap V)}+\overline{(\rho_{U\cap V,V}(t),U\cap V)} = \overline{(\rho_{U\cap V,U}(s)+\rho_{U\cap V,V}(t),U\cap V)},$$

$$\overline{(s,U)}\cdot\overline{(t,V)} = \overline{(\rho_{U\cap V,U}(s),U\cap V)}\cdot\overline{(\rho_{U\cap V,V}(t),U\cap V)} = \overline{(\rho_{U\cap V,U}(s)\cdot\rho_{U\cap V,V}(t),U\cap V)},$$

a última se $\mathcal{F}$ é feixe de anéis comutativos. Estas operações estão bem definidas e $\mathcal{F}_x$ é um grupo abeliano (ou um anel comutativo).

Dados $V \subseteq U$ abertos de X e uma seção $t \in \mathcal{F}(U)$, podemos definir um homomorfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ dado por $\varphi_U(t) = \overline{(t,U)}$. Então,

$$\varphi_V(\rho_{V,U}(t)) = \overline{(\rho_{V,U}(t),V)} = \overline{(t,U)} = \varphi_U(t).$$

Dessa forma, $\varphi_V \circ \rho_{V,U} = \varphi_U$, isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[dr, "\varphi_U"] \arrow[dd, "\rho_{V,U}"'] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}_x \\
\mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\varphi_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 4.3. A construção do stalk de $\mathcal{F}$ em $x \in X$ leva em consideração apenas a propriedade (PF) de pré-feixe, e não as propriedades (F1) e (F2) na Definição 4.1. Logo, para construir o stalk de $\mathcal{F}$ num ponto $x \in X$ é necessário para $\mathcal{F}$ apenas a estrutura de pré-feixe.

4.3 O espectro de um anel

Nesta seção iremos construir um feixe sobre um espaço topológico particular, o espectro de um anel.

Definição 4.4. Seja A um anel comutativo. O *espectro de A* é o conjunto dos ideais primos de A. Escrevemos $\operatorname{Spec} A$ para o espectro de A.

Para cada ideal $I \subseteq A$ seja $V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A | \ I \subseteq P\}$.

Proposição 4.5. *Para ideais I, J, I_λ, com $\lambda \in \Lambda$, de um anel comutativo A, valem as seguintes propriedades:*

i) $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} A$ *e* $V(A) = \emptyset$*;*

ii) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$*;*

iii) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$.

Demonstração. i) Como $\{0\} \subseteq P$ para todo ideal primo $P \subseteq A$, vale $V(0) = \operatorname{Spec} A$. Além disso, como nenhum primo contém A, uma vez que A não é primo. Logo $V(A) = \emptyset$.

ii) Se $P \in V(I)$ então $I \subseteq P$, logo $I \cap J \subseteq P$, ou seja, $P \in V(I \cap J)$. Dessa maneira, $V(I) \subseteq V(I \cap J)$. Da mesma forma, temos $V(J) \subseteq V(I \cap J)$, de onde conseguimos $V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J)$. Se $P \in V(I \cap J)$, então $I \cap J \subseteq P$. Se I não estiver contido em P, então existe $a \in I$ tal que $a \notin P$. Para qualquer $b \in J$, vale $ab \in I \cap J$ e portanto $ab \in P$. Mas sendo P primo e $a \notin P$ temos que $b \in P$. Isto valendo para todo $b \in J$ nos dá $J \subseteq P$, ou seja, $P \in V(J)$. Logo, $P \in V(I) \cup V(J)$, e disto $V(I \cap J) \subseteq V(I) \cup V(J)$. Segue a igualdade desejada.

iii) Se $P \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$ então para todo λ vale $I_\lambda \subseteq P$, o que implica em $\sum_\lambda I_\lambda \subseteq P$, ou seja, $P \in V(\sum_\lambda I_\lambda)$. Agora, seja $P \in V(\sum I_\lambda)$, isto é, $\sum I_\lambda \subseteq P$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ vale $I_\lambda \subseteq P$, ou seja, $P \in V(I_\lambda)$, o que nos dá a igualdade requerida.

□

A Proposição 4.5 nos diz que o conjunto $\{V(I)|\ I \subseteq A\} \subseteq \operatorname{Spec} A$ induz uma topologia em $\operatorname{Spec} A$, ao definirmos $V(I)$ como os conjuntos fechados. Esta topologia é conhecida como *topologia de Zariski* de A. Um conjunto aberto nesta topologia é o complementar de algum conjunto fechado $V(I)$. Assim, os abertos da topologia de Zariski de A são os conjuntos do tipo

$$V(I)^c = \{P \in \operatorname{Spec} A|\ I \text{ não está contido em } P\}.$$

Para um elemento $f \in A$, escreveremos

$$X_f = V(\langle f \rangle)^c = \{P \in \operatorname{Spec} A|\ f \notin P\}.$$

O lema seguinte nos mostra que $\beta = \{X_f|\ f \in A\}$ forma uma base para os abertos em $\operatorname{Spec} A$.

Lema 4.6. *Para um ideal $I \subseteq A$ vale $V(I)^c = \bigcup_{f \in I} X_f$. Mais ainda, se $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ então $V(I)^c = \bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i}$.*

Demonstração. Para $f \in I$, se $f \notin P$ temos que I não está contido em P, e assim $X_f \subseteq V(I)^c$ e $\bigcup_{f \in I} X_f \subseteq V(I)^c$. Tomemos agora $P \in V(I)^c$. Então I não é subconjunto de P, ou seja, existe $f \in I$ com $f \notin P$, donde $P \in X_f$. Consequentemente, $V(I)^c \subseteq \bigcup_{f \in I} X_f$.

Agora, se $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, já temos $\bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i} \subseteq V(I)^c$. Se P não contém I, então algum dos f_i não está em P, pois se todos estivessem, então $I \subseteq P$ já que os f_i geram I, e assim $P \in X_{f_i}$ para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto, $P \in \bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i}$, como desejado. □

De acordo com a Proposição 4.2, para definir um feixe sobre Spec A basta definir um β-feixe sobre $\beta = \{X_f|\ f \in A\}$. Neste caminho, o seguinte lema será fundamental.

Lema 4.7. *Para elementos f e g em A, temos as seguintes propriedades:*

i) $X_f \cap X_g = X_{fg}$;

ii) $X_g \subseteq X_f$ *se, e somente se,* $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$.

iii) Se f é invertível, então $X_f = X$.

Demonstração. i) Se $P \in X_f \cap X_g$, então $f \notin P$ e $g \notin P$ e uma vez que P é primo, segue que $fg \notin P$, ou seja, $P \in X_{fg}$. Se $P \in X_{fg}$ temos $fg \notin P$, e daí $f \notin P$ e $g \notin P$, o que fornece $P \in X_f \cap X_g$. Logo, $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

ii) Por Proposition 1.14, [1], pag. 9, temos $\sqrt{\langle f \rangle} = \bigcap_{f \in P(\text{primo})} P$, assim $X_g \subseteq X_f \Leftrightarrow$ todo primo P com $g \notin P$ é tal que $f \notin P \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f \rangle}$.

iii) Se $I \subseteq A$ é um ideal que contém f, ele contém 1, e portanto, $I = A$, e I não é primo. Assim, dado um ideal primo $P \in X$, $f \notin P$ e $P \in X_f$. Como $X_f \subseteq X$, conseguimos a igualdade.

□

Definição 4.8. Seja A um anel comutativo. Dizemos que um subconjunto $S' \subseteq A$ é um *sistema multiplicativo em* A quando para $a, b \in S'$ vale $ab \in S'$.

Seja $S' \subset A$ um sistema multiplicativo, e consideremos o conjunto

$$A_{S'} = \left\{ \frac{a}{s} |\ a \in A, s \in S' \right\}.$$

Para elementos $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t} \in A_{S'}$, definamos

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow\ \exists\ r \in S' \text{ tal que } r(at - bs) = 0.$$

A igualdade em questão é de fato uma relação de equivalência e quando A é um domínio e $0 \notin S'$ a condição à direita se reduz a $at - bs = 0$.

Podemos ainda colocar em $A_{S'}$ as operações

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

que estão bem definidas e dão a A'_S uma estrutura de anel comutativo. Chamamos $A_{S'}$ de a *localização* de A em S'.

Exemplo 4.2. Quando D é um domínio, o conjunto $S' = D \backslash \{0\}$ é um sistema multiplicativo e $D_{S'}$ é exatamente o corpo de frações de D. Neste sentido, o conceito de localização generaliza o conceito de corpo de frações a anéis que não são domínios.

Exemplo 4.3. Seja P um ideal primo de um anel comutativo A. Então, $A\backslash P$ é um sistema multiplicativo e podemos então localizar A em $A\backslash P$. Escreveremos

$$A_P = A_{A\backslash P} = \left\{\frac{a}{b} |\ a, b \in A, b \notin P\right\}$$

e o chamaremos simplesmente de a *localização de A em P*. Observemos que um elemento $\frac{a}{b} \in A_P$ é invertível se e só se $a \notin P$, e neste caso $\frac{b}{a}$ é seu inverso. O elemento $\frac{a}{b}$ é não invertível quando $a \in P$. Assim, o elemento neutro $\frac{0}{1}$ é não invertível. Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são não invertíveis então $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ é tal que $ad + bc \in P$, ou seja, é um elemento não invertível. Para qualquer $\frac{e}{f}$ vale $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ae}{bf}$ com $ae \in P$, ou seja, é elemento não invertível. Isso mostra que o conjunto

$$\mathfrak{m} = \{x \in A_P |\ x \text{ não é invertível}\}$$

é um ideal de A_P, e $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal de A_P. Daí, A_P é um anel local.

Dado $f \in A$, definamos

$$A_f = \left\{\frac{g}{f^m} |\ g \in A, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\right\}.$$

O conjunto $\{1, f, f^2, \ldots, f^m, \ldots\}$ é um sistema multiplicativo e A_f é portanto a localização de A nesse conjunto, chamada localização de A em f. Quando f é nilpotente, $f \in P$ para todo ideal primo P de A e assim $X_f = \emptyset$ e $A_f = \{0\}$. De fato, se f é nilpotente, então $\frac{g}{f^n} = \frac{0}{f}$. Com efeito, se $f^m = 0$, então $f^m(gf - 0f^n) = 0$.

Seja $X = \operatorname{Spec} A$ e consideremos a correspondência $\mathcal{O}_X$ que associa cada X_f a A_f, e em particular associa o conjunto vazio ao anel trivial.

Nosso objetivo agora será mostrar que $\mathcal{O}_X$ é um feixe sobre $X = \operatorname{Spec} A$. Para começar, precisamos definir um mapa de restrição que atenda a condição (PF) de pré-feixe, como na Definição 4.1, na base $\beta = \{X_f |\ f \in A\}$.

De acordo com o Lema 4.7, dados elementos $f, g \in A$, se $X_g \subseteq X_f$ então $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$, e assim existe um inteiro positivo n e um elemento $a \in A$ com $g^n = af$. Essa relação induz um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_{X_g,X_f}: & A_f & \longrightarrow & A_g \\ & \dfrac{r}{f^m} & \longmapsto & \dfrac{a^m r}{g^{nm}}. \end{array} \tag{4.3}$$

Lema 4.9. *Para elementos $f, g \in A$ com $X_g \subseteq X_f$, a aplicação ρ_{X_g,X_f} definida em (4.3) está bem definida e é unicamente determinada por f e g, isto é, não depende da particular escrita de g em relação à f.*

Demonstração. Sejam $\dfrac{r}{f^m} = \dfrac{s}{f^l}$ em A_f, e $g^n = af$. Então, existe um inteiro positivo h tal que $f^h(rf^l - sf^m) = 0$, $\rho_{X_g,X_f}\left(\dfrac{r}{f^m}\right) = \dfrac{a^m r}{g^{nm}}$ e $\rho_{X_g,X_f}\left(\dfrac{s}{f^l}\right) = \dfrac{a^l s}{g^{nl}}$. Como

$$g^{nh}(a^m r g^{nl} - a^l s g^{nm}) = a^h f^h(a^m r a^l f^l - a^l s a^m f^m) = a^{h+m+l} f^h(rf^l - sf^m) = a^{h+m+l} \cdot 0 = 0,$$

vale $\dfrac{a^l s}{g^{nl}} = \dfrac{a^m r}{g^{mn}}$. Assim, ρ_{X_g,X_f} está bem definida.

Agora, se $g^n = af$ e $g^k = bf$ são duas escritas de g em relação a f, o uso da primeira expressão nos dá

$$\rho_{X_g,X_f}\left(\frac{r}{f^m}\right) = \frac{a^m r}{g^{nm}}$$

e a segunda expressão nos dá

$$\rho_{X_g,X_f}\left(\frac{r}{f^m}\right) = \frac{b^m r}{g^{km}}.$$

Mas $a^m r g^{km} - b^m r g^{nm} = a^m r b^m f^m - b^m r a^m f^m = 0$; em outras palavras, $\dfrac{a^m r}{g^{nm}} = \dfrac{b^m r}{g^{km}}$. □

Já estamos com condições de mostrar que os homomorfismos ρ_{X_g,X_f} satisfazem as condições de pré-feixe na base $\beta = \{X_f |\ f \in A\}$.

Lema 4.10. *Para elementos $f, g, h \in A$, o homomorfismo ρ_{X_g,X_f} definido em* (4.3) *satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\rho_{X_f,X_f} = id_{A_f}$

ii) Para $X_h \subseteq X_g \subseteq X_f$ vale $\rho_{X_h,X_f} = \rho_{X_h,X_g} \circ \rho_{X_g,X_f}$.

Demonstração. Uma vez que $f = f$, isto é, $f^1 = 1f$, vale $\rho_{X_f,X_f} = id_{A_f}$. Agora, se $g^n = af$ e $h^s = bg$, então para qualquer $\dfrac{r}{f^m} \in A_f$ vale

$$\rho_{X_h,X_g}\left(\rho_{X_g,X_f}\left(\frac{r}{f^m}\right)\right) = \rho_{X_h,X_g}\left(\frac{a^m r}{g^{mn}}\right) = \frac{b^{mn} a^m r}{h^{smn}}.$$

Também, $h^{sn} = b^n g^n = b^n af$, logo $\rho_{X_h,X_f}\left(\dfrac{r}{f^m}\right) = \dfrac{b^{nm} a^m r}{h^{smn}}$, o que nos dá a igualdade. □

Os dois próximos teoremas são os principais resultados desta seção.

Teorema 4.11. *Sejam f, f_α elementos de A. Se $X_f = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_{f_\alpha}$ e $a \in A_f$ é tal que $\rho_{X_{f_\alpha},X_f}(a) = 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$, então $a = 0$.*

Demonstração. Escrevamos $a = \dfrac{g}{f^m}, g \in A$, e seja $I = \{h \in A|\ hg = 0\}$. O conjunto I é um ideal de A, e

$$a = \frac{g}{f^m} = 0 \text{ em } A_f \Leftrightarrow\ \exists\, n \text{ inteiro positivo com } f^n g = 0 \Leftrightarrow f^n \in I \Leftrightarrow f \in \sqrt{I}.$$

Suponhamos então que $a \neq 0$ em A_f. Vale $f \notin \sqrt{I}$, e sendo $\sqrt{I} = \bigcap_{I\subseteq P(\text{primo})} P$, existe um ideal primo $P \in \operatorname{Spec} A$ tal que $I \subseteq P$ e $f \notin P$, ou seja, $P \in X_f$. Sendo $X_f = \bigcup X_{f_\alpha}$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $P \in X_{f_\alpha}$, ou seja, $f_\alpha \notin P$. Logo, a e $\rho_{X_{f_\alpha},X_f}(a)$ são elementos de A_P, e se $f_\alpha^n = bf$, temos $\rho_{X_{f_\alpha},X_f}(a) = \dfrac{b^m g}{f_\alpha^{mn}}$. Já que $g f_\alpha^{nm} = b^m g f^m$, então, como elementos em A_P, temos $a = \rho_{X_{f_\alpha},X_f}(a) = 0$. Dessa forma, existe $c \notin P$ com $c \cdot g = 0$, pois $a = \frac{g}{f^m} = 0$ em A_P. Portanto $c \in I$ e $c \in \sqrt{I}$, o que implica em $c \in P$, contradição. Logo, $a = 0$ em A_f. □

Antes de provarmos o próximo teorema, necessitamos de mais um resultado:

Lema 4.12. *Seja A um anel comutativo e $X = \operatorname{Spec} A$. Então $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_{f_\alpha}$ se e somente se o ideal $\langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle$ é igual a A.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Dado um ideal primo $P \subset A$, temos $P \in X$, logo existe $\alpha \in \Lambda$ com $P \in X_{f_\alpha}$, ou seja, $f_\alpha \notin P$. Portanto, o ideal $\langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle$ não está contido em nenhum ideal primo, em particular em nenhum ideal maximal. Segue que $\langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle = A$.

$\Leftarrow$) Sendo $\langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle = A$, nenhum ideal primo contém $\langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle$, assim dado um ideal primo $P \in X$ existe α com $P \in X_{f_\alpha}$, donde conseguimos a igualdade. □

Se $A = \langle f_\alpha|\ \alpha \in \Lambda\rangle$, podemos extrair uma quantidade finita de elementos $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_l}$ com $\sum_{j=1}^{l} g_j f_{\alpha_j} = 1$, ou seja, $\langle f_{\alpha_j}|\ 1 \leq j \leq l\rangle = A$. Assim, temos como consequência direta do Lema 4.12 o seguinte resultado:

Corolário 4.13. *Dado um anel comutativo A, o espaço topológico $X = \operatorname{Spec} A$ é quasi-compacto, isto é, dada uma cobertura aberta $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ podemos extrair uma subcobertura finita $X = \bigcup_{j=1}^{l} U_j$.*

Teorema 4.14. *Sejam $f, f_\alpha \in A$, $\alpha \in \Lambda$. Se $X_f = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_{f_\alpha}$ e a família $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, com $g_\alpha \in A_{f_\alpha}$ é tal que*

$$\rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\alpha}}(g_\alpha) = \rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\beta}}(g_\beta),$$

então existe $g \in A_f$ satisfazendo $g_\alpha = \rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(g)$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração. Podemos construir um homomorfismo natural $\varphi_f : A \to A_f$ dado por $\varphi(r) = \dfrac{rf}{f}$. Escrevamos $\overline{r} = \varphi(r)$. Se $X_g \subseteq X_f$, vimos que existem $n > 0$ e $a \in A$ com $g^n = af$ Desta maneira, podemos definir os homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A_g & \longrightarrow & (A_f)_{\overline{g}} \\ & \dfrac{r}{g^l} & \longmapsto & \dfrac{\overline{r}}{\overline{g}^l} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & (A_f)_{\overline{g}} & \longrightarrow & A_g \\ & \dfrac{r/f^k}{\overline{g}^l} & \longmapsto & \dfrac{a^k r}{g^{nk+l}}, \end{array}$$

os quais são inversos um do outro. Logo, A_g e $(A_f)_{\overline{g}}$ são isomorfos. Escrevamos $\overline{A} = A_f$ e $\overline{X} = \operatorname{Spec} A_f$. Então,

$$X_f = \overline{X} \text{ e } X_{f_\alpha} = \overline{X}_{\overline{f_\alpha}}.$$

Dessa forma, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f = 1$, e nesse caso, nossa hipótese se torna

$$X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_{f_\alpha}.$$

Utilizando o Corolário 4.13, podemos extrair uma subcobertura finita $X = \bigcup_{j=1}^{l} X_{f_j}$. Sendo que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $g_j = a_j/f_j^{m_j} \in A_{f_j}$, e $g_j = a_j/f_j^{m_j} = f_j^{m-m_j} a_j/f_j^m$, onde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_l$, podemos supor que todos os g_j possuem os denominadores com mesmo expoente m, isto é, $g_j = \dfrac{a_j}{f_j^m}$.

Como por hipótese as restrições de g_j a $X_{f_i f_j}$ e de g_i a $X_{f_i f_j}$ são iguais, temos

$$\rho_{X_{f_i f_j}, X_i}(g_i) = \frac{f_j^m a_i}{(f_i f_j)^m} = \rho_{X_{f_i f_j}, X_j}(g_j) = \frac{f_i^m a_j}{(f_i f_j)^m}.$$

Portanto existe N_{ij} tal que

$$(f_i f_j)^{N_{ij}}(f_j^m a_i - f_i^m a_j) = 0, \ \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, l\}.$$

Escolhendo qualquer $N \geq \max\{N_{ij} + m | \ \{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, l\}\}$ observamos que vale $g_j = \dfrac{a_j}{f_j^m} = \dfrac{f_j^{N-m} a_j}{f_j^N} = \dfrac{a_j'}{f_j^N}$ e considerando essa escrita temos

$$a_i' f_j^N - a_j' f_i^N = 0. \tag{4.4}$$

Também, vendo que $X_{f_j} = X_{f_j^N}$, conseguimos $X = \bigcup_{j=1}^{l} X_{f_j^N}$. O uso do Lema 4.12 nos dá a existência de elementos $b_j \in A$ satisfazendo $\sum_{j=1}^{l} b_j f_j^N = 1$. Coloquemos $g = \sum_{j=1}^{l} b_j a'_j \in A$. A relação (4.4) implica em

$$f_i^N g = \sum_{j=1}^{l} b_j f_i^N a'_j = \sum_{j=1}^{l} b_j f_j^N a'_i = a'_i,$$

e portanto $\rho_{X_{f_i},X}(g) = \dfrac{a'_i}{f_i^N} = g_i$.

Agora, para qualquer $\alpha \in \Lambda$, coloquemos $h_\alpha = g_\alpha - \rho_{X_{f_\alpha},X}(g)$. Para qualquer i temos

$$\begin{aligned}\rho_{X_{f_i f_\alpha},X_{f_\alpha}}(h_\alpha) &= \rho_{X_{f_i f_\alpha},X_{f_\alpha}}(g_\alpha) - \rho_{X_{f_i f_\alpha},X}(g) = \rho_{X_{f_i f_\alpha},X_{f_i}}(g_i) - \rho_{X_{f_i f_\alpha},X}(g) = \\ &= \rho_{X_{f_i f_\alpha},X_{f_i}}(\rho_{X_{f_i},X}(g)) - \rho_{X_{f_i f_\alpha},X}(g) = \rho_{X_{f_i f_\alpha},X}(g) - \rho_{X_{f_i f_\alpha},X}(g) = 0.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.11 temos $h_\alpha = 0$, e desta forma $g_\alpha = \rho_{X_{f_\alpha},X}(g)$, $\forall\ \alpha \in \Lambda$. $\square$

Pelos Teoremas 4.11, 4.14 e Proposição 4.2 segue que $\mathcal{O}_X$ é um feixe sobre $X = \operatorname{Spec} A$. Dado um aberto $U \subseteq X$, temos

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(s_i) \in \prod_{X_{f_i} \subseteq U} A_{f_i} |\ \text{para } X_{f_j} \subseteq X_{f_i} \text{ vale } \rho_{X_{f_j},X_{f_i}}(s_i) = s_j\}.$$

Lembramos que o mapa de restrição é dado por

$$\begin{aligned}\rho_{V,U}: \quad \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(V)\\ (s_i)_{X_{f_i} \subseteq U} &\longmapsto (s_j)_{X_{f_j} \subseteq V}\end{aligned}$$

e que $\mathcal{O}_X(X_f) = A_f$. Em particular, $\mathcal{O}_X(X) = A$, já que $X = X_1$, pelo Lema 4.7, *iii.*

Definição 4.15. O par $(X, \mathcal{O}_X)$, consistindo do espectro X de um anel comutativo e do feixe $\mathcal{O}_X$ construído acima é chamado de *esquema afim.*

Exemplo 4.4. Se $A = k[x_1, \dots, x_n]$, chamamos $\operatorname{Spec} A$ de *espaço afim* sobre k. Denotaremos $\operatorname{Spec} A = \mathbb{A}_k^n$.

4.4 O esquema projetivo

Na seção anterior, definimos o espaço afim $\mathbb{A}_k^n$ via a nova linguagem de espectros e esquemas. Nesta seção faremos o mesmo para o espaço projetivo $\mathbb{P}_k^n$.

Definição 4.16. Seja A um anel. Uma *graduação* em A é uma decomposição de A em subgrupos aditivos $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ tais que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todos $i, j \geq 0$. Dessa forma, A_0 é um subanel de A e cada A_i é um A_0-módulo. Diremos que A é um anel graduado quando é dada um graduação de A.

A definição acima é na verdade uma clara generalização do seguinte exemplo trivial.

Exemplo 4.5. O anel de polinômios $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ possui uma graduação natural colocando para cada $d \geq 0$, $S_d = \{F \,|F$ é polinômio homogêneo de grau $d\}$.

Definição 4.17. Se $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ é uma graduação de A, um elemento $x \in A_i$ é dito *homogêneo de grau i.* Dado qualquer elemento $f \in A$, temos que f possui uma decomposição $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$, onde f_i é homogêneo de grau i. Os elementos f_i são ditos as *componentes homogêneas de f.* Dado um ideal I de A, diremos que I é um ideal homogêneo quando, para todo $f \in I$ suas componentes homogêneas também pertencem a I.

Definição 4.18. Se A é um anel graduado, um A-módulo graduado é um A-módulo M com uma família de subgrupos $M_i, i \geq 0$, tais que $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ e $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

Dado um inteiro ℓ, definimos o A-módulo graduado $M(\ell)$ como sendo o A-módulo com graduação $M(\ell) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M(\ell)_i$, onde $M(\ell)_i = M_{\ell+i}$.

Se $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$, temos que $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_i$ é um ideal homogêneo de A.
Definimos

$$\operatorname{Proj} A = \{P \,|P \text{ é ideal primo homogêneo de } A \text{ com } P \not\supseteq A_+\},$$

o qual é chamado o *espectro projetivo* do anel graduado A.

Para um ideal homogêneo $I \subseteq A$ coloquemos $\boldsymbol{V}(I) = \{P \in \operatorname{Proj} A | P \supseteq I\}$. Da mesma forma que na Proposição 4.5, definindo $\boldsymbol{V}(I)$ como fechados em $\operatorname{Proj} A$, obtemos uma topologia em $\operatorname{Proj} A$, chamada *topologia de Zariski.*

Para um elemento homogêneo $f \in A_d$, coloquemos

$$D_+(f) = \{P \in \operatorname{Proj} A | \ f \notin P\}.$$

Então a coleção $\{D_+(f) | \ f \text{ homogêneo}\}$ forma uma base para os abertos em $\operatorname{Proj} A$.

Seja $X = \operatorname{Proj} A$, e $f \in A_d$. Definimos

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid g \in A_{md}, m \geq 0 \right\}, \tag{4.5}$$

ou seja, $\mathcal{O}_X(D_+(f))$ consiste das frações cujos denominadores são potências de f e o numerador tem o mesmo grau que o denominador.

Observemos que, se $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ é uma graduação em A, então a localização A_f tem uma graduação natural $A_f = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} (A_f)_i$, onde

$$(A_f)_i = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid g \in A_{md+i}, m \geq 0 \right\}$$

e portanto $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = (A_f)_0$.

Com a Definição (4.5), temos que a associação $\mathcal{O}_X$ define uma estrutura de β-feixe na base $\beta = \{D_+(f) \mid f \in A, f \text{ homogêneo}\}$. De acordo com a Proposição 4.2 da página 52, temos que $\mathcal{O}_X$ é um feixe de anéis comutativos sobre $X = \operatorname{Proj} A$.

Diremos que $(\operatorname{Proj} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A})$ é o *esquema projetivo* sobre o anel graduado A.

Exemplo 4.6. Se $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ é o anel de polinômios em $n+1$ variáveis, então escrevemos $\operatorname{Proj} S = \mathbb{P}_k^n$, o qual chamamos de *espaço projetivo sobre k.* Para um aberto básico $D_+(f) \subseteq \mathbb{P}_k^n$, $f \in S_d$, temos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid \operatorname{grau}(g) = m \cdot d,\ m \geq 0 \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\mathbb{P}_k^n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(1)) = k$.

Observamos também que $\mathbb{P}_k^n$ possui a cobertura aberta finita $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^{n} D_+(x_i)$, onde $D_+(x_i) = \{P \in \operatorname{Proj} S \mid x_i \notin P\}$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(x_i)) = \left\{ \frac{f}{x_i^m} \mid \operatorname{grau}\,(f) = m \right\}$.

4.5 Feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos

Seja A um anel comutativo e M um A-módulo. Se S é um sistema multiplicativo em A, definimos a localização de M em S por

$$M_S = S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{t} \mid m \in M, t \in S \right\},$$

onde definimos ainda a relação de equivalência

$$\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \Leftrightarrow \exists\ t \in S \text{ com } t(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0.$$

Com as operações usuais de adição de frações em M_S e multiplicação de um elemento de A_S por um elemento de M_S temos que M_S é um A_S-módulo.

Denotaremos M_f a localização de M em $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ sempre que f não é nilpotente. Se $P \subset A$ é um ideal primo denotaremos por M_P a localização de M em $A \backslash P$.

Para cada $f \in A$ associamos ao aberto básico X_f de $X = \operatorname{Spec} A$ o A_f-módulo M_f. Sabemos, pelo Lema 4.7, que para $f, g \in A$, se $X_g \subseteq X_f$ então existem $a \in A$ e $n > 0$ tais que $g^n = af$. Podemos então definir para os grupos M_f e M_g um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_{X_g,X_f}: & M_f & \longrightarrow & M_g \\ & \dfrac{r}{f^m} & \longmapsto & \dfrac{a^m r}{g^{nm}}. \end{array} \tag{4.6}$$

De forma análoga ao Lema 4.9, mostra-se que este homomorfismo está bem definido e não depende da particular escrita de g com relação à f. O homomorfismo dado em (4.6) satisfaz a condição (PF) na Definição 4.1, e a prova é análoga à do Lema 4.10. Observemos que o homomorfismo ρ_{X_g,X_f} é compatível com as estruturas de A_f e A_g-módulo de M_f e M_g, respectivamente, no seguinte sentido: suponha que $\dfrac{b}{f^w} \in A_f$ e $\dfrac{r}{f^m} \in M_f$. Então,

$$\rho_{X_g,X_f}\left(\frac{b}{f^w} \cdot \frac{r}{f^m}\right) = \frac{a^{w+m} br}{g^{n(w+m)}} = \frac{a^w b}{g^{nw}} \cdot \frac{a^m r}{g^{nm}} = \rho^{\mathcal{O}_X}_{X_g,X_f}\left(\frac{b}{f^w}\right) \cdot \rho_{X_g,X_f}\left(\frac{r}{f^m}\right). \tag{4.7}$$

Os Teoremas 4.11 e 4.14 das páginas 60 e 61 também podem ser generalizados para este novo contexto de maneira semelhante, e portanto a relação $\tilde{M}$ que associa cada aberto básico $X_f \subseteq \operatorname{Spec} A$ ao A_f-módulo M_f é um β-feixe. Pela Proposição 4.2, construímos um feixe $\tilde{M}$ de grupos abelianos sobre $X = \operatorname{Spec} A$. Para cada aberto $U \subseteq X$, temos

$$\tilde{M}(U) = \{(m_i) \in \prod_{X_{f_i} \subseteq U} M_{f_i} | \text{ para } X_{f_j} \subseteq X_{f_i} \text{ vale } \rho_{X_{f_j},X_{f_i}}(m_i) = m_j\}.$$

Dado um aberto $U \subseteq X$, temos

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(s_i) \in \prod_{X_{f_i} \subseteq U} A_{f_i} | \text{ para } X_{f_j} \subseteq X_{f_i} \text{ vale } \rho_{X_{f_j},X_{f_i}}(s_i) = s_j\},$$

e com a operação $(s_i) \cdot (m_i) = (s_i m_i)$ temos que $\tilde{M}(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Diremos então que $\tilde{M}$ é um *feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Exemplo 4.7. Seja I um ideal de um anel comutativo A. Então I é um A-módulo e portanto podemos construir o feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\tilde{I}$, onde $X = \operatorname{Spec} A$. Observe que para um aberto $U \subseteq X$, $\tilde{I}(U)$ é um ideal do anel comutativo $\mathcal{O}_X(U)$.

Seja $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Para quaisquer inteiro ℓ e $f \in S_d$ homogêneo, definamos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} | \text{ grau } (g) = m \cdot \text{ grau } (f) + \ell \right\}.$$

Então, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)(D_+(f))$ é $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(f))$-módulo, e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)$ é dito um *feixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$-módulos.* Nas seções globais, vale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)(\mathbb{P}_k^n) = S_\ell$, se $\ell \geq 0$, o conjunto dos polinômios homogêneos de grau ℓ, e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)(\mathbb{P}_k^n) = \{0\}$ se $\ell < 0$.

4.6 Feixificação de pré-feixes

Nosso objetivo nesta seção será, dado um pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X, construir um feixe "contendo" o pré-feixe $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos (ou de anéis comutativos) sobre X. Tomemos o conjunto $\mathbb{F} = \biguplus_{x \in X} \mathcal{F}_x$, onde $\biguplus$ indica a união disjunta.

Dado um elemento $s_x \in \mathcal{F}_x \subseteq \mathbb{F}$, temos $s_x = \overline{(s, V)}$, onde $V \subseteq X$ é um aberto contendo x e $s \in \mathcal{F}(V)$. Seja $V(s) = \{s_y | \ y \in V\} = \{\overline{(s, V)}| \text{ uma classe de } s \text{ para cada } y \in V\}$. Variando o aberto V, o elemento $s \in \mathcal{F}(V)$ e definindo $\{V(s)\}$ como abertos básicos, é possível construir uma topologia sobre $\mathbb{F}$.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{F} & \longrightarrow & X \\ & a \in \mathcal{F}_x & \longmapsto & x \end{array} \tag{4.8}$$

e para cada aberto $U \subseteq X$ o conjunto

$$\mathbb{F}(U) = \{s : U \to \mathbb{F} | \ p \circ s = id_U, s \text{ contínua}\}.$$

Essencialmente, a condição $p \circ s = id_U$ impõe que $s(x) \in \mathcal{F}_x$ para $x \in U$.

Se $V \subseteq U$ é um aberto de X e $s \in \mathbb{F}(U)$, definimos $\rho_{V,U}(s) = s|_V$, isto é, $\rho_{V,U}$ é a restrição da função s ao aberto V. Então, $\mathbb{F}$ é um feixe de grupos abelianos (ou de anéis comutativos) sobre X, chamado *feixificação de $\mathcal{F}$*.

Para cada aberto $U \subseteq X$, existe um homomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathbb{F}(U) \\ s & \longmapsto & \tilde{s} : U \to \mathbb{F}. \end{array} \tag{4.9}$$

onde $\tilde{s}$ é dada por $\tilde{s}(x) = s_x = \overline{(s, U)} \in \mathcal{F}_x$.

Em geral, este homomorfismo não é nem injetivo nem sobrejetivo. Mas quando $\mathcal{F}$ é um feixe, temos um isomorfismo.

Proposição 4.19. *Se $\mathcal{F}$ é um feixe, então $\mathcal{F}$ e $\mathbb{F}$ são isomorfos, isto é, para cada aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ e $\mathbb{F}(U)$ são isomorfos.*

Demonstração. Vamos verificar que a aplicação dada em (4.9) é um isomorfismo. Seja $s \in U$ tal que $\tilde{s} = 0$. Então, para cada $x \in U$, $\tilde{s}(x) = s_x = 0$, assim existe um aberto $V_x \subseteq U$, $x \in V_x$, com $s_x = \overline{(0, V_x)}$. Valendo isto para cada $x \in U$, temos $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$ e $\rho_{V_x,U}(s) = 0$ para todo x. Pela condição (F1) de feixe, concluímos que $s = 0$ e a aplicação é injetiva..

Vejamos a sobrejetividade. Seja $s \in \mathbb{F}(U)$. Para cada $x \in U$, temos $s(x) = \overline{(a^{(x)}, V_x)}$, com $x \in V_x \subseteq U$ e $a^{(x)} \in \mathcal{F}(V_x)$. Como s é contínua o conjunto $V'_x = s^{-1}(V_x(a^{(x)})) \cap V_x$ é um aberto contido em U contendo x e $U = \bigcup\limits_{x \in U} V'_x$. Se $y \in V'_x$, temos $s(y) \in V_x(a^{(x)})$, e portanto, olhando para o germe de $a^{(x)}$ em y, vale $\overline{(a^{(x)}, V_x)} = s(y) = \overline{(a^{(y)}, V_y)}$. Como $V'_x \subseteq V_x$ e $V'_y \subseteq V_y$, segue que $\rho_{V'_x \cap V'_y, V'_x}(a^{(x)}) = \rho_{V'_x \cap V'_y, V'_y}(a^{(y)})$. Pela condição (F2) de feixe, existe $a \in \mathcal{F}(U)$ que "cola" os $a^{(x)}$, isto é, tal que $\rho_{V'_x,U}(a) = a^{(x)}$. Assim, a imagem do elemento a em $\mathbb{F}(U)$ é a função $\tilde{a}$ tal que $\tilde{a}(x) = \overline{(a, U)} = \overline{(\rho_{V'_x,U}(a), V'_x)} = s(x)$, donde $\tilde{a} = s$. Portanto conseguimos a sobrejetividade. $\square$

Apesar de o isomorfismo entre $\mathcal{F}$ e $\mathbb{F}$ ocorrer apenas no caso em que $\mathcal{F}$ é um feixe, quando $\mathcal{F}$ não é um feixe temos ainda isomorfismo nos stalks de qualquer elemento $x \in X$.

Proposição 4.20. *Dado um pré-feixe $\mathcal{F}$, para qualquer $x \in X$, os stalks $\mathcal{F}_x$ e $\mathbb{F}_x$ são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}$ o mapa de restrição em $\mathcal{F}$ e $\rho^{\mathbb{F}}_{V,U}$ o mapa de restrição em $\mathbb{F}$. Dado $a \in \mathcal{F}(U)$ e $x \in V \subseteq U$, vale $\widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(a)} = \rho^{\mathbb{F}}_{V,U}(\tilde{a})$, onde $\tilde{a}$ é a imagem de a pelo homomorfismo $\mathcal{F}(U) \to \mathbb{F}(U)$ dado em (4.9). De fato, $\widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(a)} : V \to \mathbb{F}$ e

$$\widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(a)}(x) = \overline{(\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(a), V)} = \overline{(a, U)} = \tilde{a}(x) = \tilde{a}|_V(x) = \rho^{\mathbb{F}}_{V,U}(\tilde{a})(x).$$

Se $W \subseteq V$ é aberto contendo x e $\overline{(a, V)} = \overline{(b, W)}$ então existe, por definição da igualdade nas classes, um aberto $Z \subseteq V \cap W$ contendo x tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{Z,V}(a) = \rho^{\mathcal{F}}_{Z,W}(b)$. Logo $\widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{Z,V}(a)} = \widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{Z,W}(b)}$ e portanto $\rho^{\mathbb{F}}_{Z,V}(\tilde{a}) = \rho^{\mathbb{F}}_{Z,W}(\tilde{b})$, ou seja, $\overline{(\tilde{a}, V)} = \overline{(\tilde{b}, W)}$.

Fica então bem definido o homomorfismo $\xi : \mathcal{F}_x \to \mathbb{F}_x$ dado por $\xi(\overline{(a,V)}) = \overline{(\tilde{a},V)}$. Se $\xi(\overline{(a,V)}) = 0$ então existe $W \subseteq V$ contendo x tal que $\overline{(\tilde{a},V)} = \overline{(0,W)}$. Logo existe $W' \subseteq W$ tal que $\rho^{\mathbb{F}}_{W',V}(\tilde{a}) = 0$, ou seja, $\widetilde{\rho^{\mathcal{F}}_{W,V}(a)} = 0$. Portanto $\overline{(\rho^{\mathcal{F}}_{W',V}(a), W')} = \overline{(0,W')}$ e como $\overline{(a,V)} = \overline{(\rho^{\mathcal{F}}_{W',V}(a), W')}$, segue que $\overline{(a,V)} = 0$ em $\mathcal{F}_x$. Logo ξ é injetiva.

Para a sobrejetividade de ξ, seja $s \in \mathbb{F}_x$. Então, $s = \overline{(t,V)}$, onde $x \in V, t : V \to \mathbb{F}$ contínua, $t(x) = r_x = \overline{(r,W)} \in \mathcal{F}_x$ com $r \in \mathcal{F}(W), x \in W$.

Coloquemos $W' = t^{-1}(W(r))$. Como t é contínua, $W' \subseteq V$ é aberto contendo x e $t|_{W'} : W' \to \mathbb{F}$, $t|_{W'}(y) = r_y = \overline{(r,W)} \in \mathcal{F}_y$. Logo, $t|_{W'} = \tilde{r}$, ou seja, $\rho^{\mathbb{F}}_{W',V}(t) = \tilde{r}$. Daí, $\overline{(t,V)} = \overline{(\tilde{r},W')}$ em $\mathbb{F}_x$. Portanto, $\overline{(t,V)} = \xi(\overline{(r,W')})$ e ξ é sobrejetiva. Concluímos que ξ é um isomorfismo. $\square$

4.7 Homomorfismos de feixes

Definição 4.21. Dado um espaço topológico X, sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes sobre X. Se para cada aberto U de X existe um homomorfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ e para abertos $V \subseteq U$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\rho^{\mathcal{G}}_{V,U} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}$, dizemos que φ é um *homomorfismo de feixes* de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ e escrevemos $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Lema 4.22. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois feixes sobre um espaço topológico X. Se para cada aberto básico U_α de X existe um homomorfismo $\varphi_{U_\alpha} : \mathcal{F}(U_\alpha) \to \mathcal{G}(U_\alpha)$ e para abertos básicos $U_\alpha \subseteq U_\gamma$ vale $\rho^{\mathcal{G}}_{U_\alpha,U_\gamma} \circ \varphi_{U_\gamma} = \varphi_{U_\alpha} \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U_\alpha,U_\gamma}$ então $\{\varphi_\alpha\}_{U_\alpha \in \beta}$ induz um homomorfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.*

Demonstração. Para um aberto $U \subseteq X$ e β uma base para os abertos de X, temos

$$\mathcal{F}(U) = \{(s_\alpha) \in \prod_{U_\alpha \subseteq U, U_\alpha \in \beta} \mathcal{F}(U_\alpha) | \text{ para } U_\alpha \subseteq U_\gamma \text{ vale } \rho^{\mathcal{F}}_{U_\alpha,U_\gamma}(s_\gamma) = s_\alpha\}$$

$$\mathcal{G}(U) = \{(t_\alpha) \in \prod_{U_\alpha \subseteq U, U_\alpha \in \beta} \mathcal{G}(U_\alpha) | \text{ para } U_\alpha \subseteq U_\gamma \text{ vale } \rho^{\mathcal{G}}_{U_\alpha,U_\gamma}(t_\gamma) = t_\alpha\}$$

Dada uma seção $(s_\alpha) \in \mathcal{F}(U)$, definimos $\varphi_U((s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U}) = (\varphi_{U_\alpha}(s_\alpha))_{U_\alpha \subseteq U}$. Se $U_\alpha \subseteq U_\gamma$ são abertos básicos contidos em U, temos $\rho^{\mathcal{G}}_{U_\alpha, U_\gamma}(\varphi_{U_\gamma}(s_\gamma)) = \varphi_{U_\alpha}(\rho^{\mathcal{F}}_{U_\alpha, U_\gamma}(s_\gamma)) = \varphi_{U_\alpha}(s_\alpha)$. Logo, está bem definido o homomorfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Se $V \subseteq U$ são abertos de X, então para uma seção $(s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U} \in \mathcal{F}(U)$ temos

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}(\varphi_U((s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U})) = \rho^{\mathcal{G}}_{V,U}((\varphi_{U_\alpha}(s_\alpha))_{U_\alpha \subseteq U}) = (\varphi_{U_\gamma}(s_\gamma))_{U_\gamma \subseteq V}.$$

Por outro lado,

$$\varphi_V(\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}((s_\alpha)_{U_\alpha \subseteq U})) = \varphi_V((s_\gamma)_{U_\gamma \subseteq V}) = (\varphi_{U_\gamma}(s_\gamma))_{U_\gamma \subseteq V}.$$

Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

comuta, e φ é um homomorfismo de feixes. □

O Lema 4.22 implica que para se definir um homomorfismo entre feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é suficiente definir homomorfismos nos abertos básicos, com a condição de compatibilidade $\rho^{\mathcal{G}}_{U_\alpha, U_\gamma} \circ \varphi_{U_\gamma} = \varphi_{U_\alpha} \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U_\alpha, U_\gamma}$.

Exemplo 4.8. Sejam M, N dois A-módulos e $X = \operatorname{Spec} A$. Consideremos os feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$. Se $\tilde{\psi} : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos, então para cada $f \in A$ temos um homomorfismo de A_f-módulos $\psi_f : M_f \to N_f$ dado por $\psi_f\left(\dfrac{m}{f^r}\right) = \dfrac{\psi(m)}{f^r}$. Se $g \in A$ é tal que $X_g \subseteq X_f$, temos que, sendo $g^n = af$, $a \in A, n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_g\left(\rho^{\tilde{M}}_{X_g, X_f}\left(\frac{m}{f^r}\right)\right) = \psi_g\left(\frac{a^r m}{g^{nr}}\right) = \frac{a^r \psi(m)}{g^{nr}},$$

$$\rho^{\tilde{N}}_{X_g, X_f}\left(\psi_f\left(\frac{m}{f^r}\right)\right) = \rho^{\tilde{N}}_{X_g, X_f}\left(\frac{\psi(m)}{f^r}\right) = \frac{a^r \psi(m)}{g^{nr}}.$$

Dessa forma, vale $\psi_g\left(\rho^{\tilde{M}}_{X_g, X_f}\left(\dfrac{m}{f^r}\right)\right) = \rho^{\tilde{N}}_{X_g, X_f}\left(\psi_f\left(\dfrac{m}{f^r}\right)\right)$ e portanto o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M}(X_f) = M_f \arrow[r, "\psi_f"] \arrow[d, "\rho^{\tilde{M}}_{X_g, X_f}"'] & N_f = \tilde{N}(X_f) \arrow[d, "\rho^{\tilde{N}}_{X_g, X_f}"] \\
\tilde{M}(X_g) = M_g \arrow[r, "\psi_g"] & N_g = \tilde{N}(X_g)
\end{tikzcd}$$

Desta maneira, utilizando o Lema 4.22, conseguimos que ψ induz um homomorfismo de feixes de grupos abelianos. Observamos também que este homomorfismo é compatível com a estrutura de $\mathcal{O}_X$-módulos de $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$, isto é, para cada aberto $U \subseteq X$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \times \tilde{M}(U) \arrow[r, "(id_{\mathcal{O}_X(U)}, \psi_U)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(U) \times \tilde{N}(U) \arrow[d] \\ \tilde{M}(U) \arrow[r, "\psi_U"] & \tilde{N}(U) \end{tikzcd}$$

comuta. Diremos que $\psi : \tilde{M} \to \tilde{N}$ é um *homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são dois feixes sobre um espaço topológico X, um homomorfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induz um homomorfismo nos stalks de cada $x \in X$,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_x : & \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathcal{G}_x \\ & \overline{(s,U)} & \longmapsto & \overline{(\varphi_U(s),U)}. \end{array}$$

Vejamos que este homomorfismo está bem definido.

Seja $\overline{(s,U)} = \overline{(t,V)}$ em $\mathcal{F}_x$. Existe $W \subseteq U \cap V$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{W,U}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{W,V}(t)$. Assim,

$$\rho^{\mathcal{G}}_{W,U}(\varphi_U(s)) = \varphi_W(\rho^{\mathcal{F}}_{W,U}(s)) = \varphi_W(\rho^{\mathcal{F}}_{W,V}(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{W,V}(\varphi_V(t)).$$

Portanto, $\overline{(\varphi_U(s),U)} = \overline{(\varphi_V(t),V)}$ e φ_x está bem definido.

Seja $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um homomorfismo de feixes sobre X. Para cada aberto $U \subseteq X$, está definido homomorfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Definamos

$$(\ker\varphi)(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) |\ \varphi_U(s) = 0\} = \ker(\varphi_U). \tag{4.10}$$

Proposição 4.23. *Seja X um espaço topológico. Dado um homomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de feixes de anéis comutativos (ou de grupos) sobre X, temos que $\ker\varphi$, dado em (4.10), é um feixe de anéis comutativos (ou de grupos) sobre X.*

Demonstração. Para cada $U \subseteq X$ temos $(\ker\varphi)(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$. Dados abertos $V \subseteq U$ de X, definamos $\rho^{\ker\varphi}_{V,U} := \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}|_{\ker\varphi_U}$. Então, $\rho_{V,U} = \rho^{\ker\varphi}_{V,U}$ é um mapa de restrição, e $\ker\varphi$ é um pré-feixe em X.

Vejamos que $\ker\varphi$ satisfaz as condições (F1) e (F2) de feixes. Para isto, seja $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ e $s \in (\ker\varphi)(U)$ tal que $\rho_{U_j,U}(s) = 0$ para todo $j \in J$. Então $\rho^{\mathcal{F}}_{U_j,U}(s) = 0\ \forall\ j \in J$ e $s = 0$ pois $\mathcal{F}$ é um feixe. Logo, temos a condição (F1).

Suponha agora que, para elementos $s_j \in (\ker\varphi)(U_j)$, com $j \in J$ e $U_{jk} = U_j \cap U_k \neq \emptyset$ vale $\rho_{U_{jk},U_j}(s_j) = \rho_{U_{jk},U_k}(s_k)$. Então $\rho^{\mathcal{F}}_{U_{jk},U_j}(s_j) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_{jk},U_k}(s_k)$ e existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_j,U}(s) = s_j$. Seja $t = \varphi_U(s)$. Da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{U_j,U}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{U_j,U}"] \\ \mathcal{F}(U_j) \arrow[r, "\varphi_{U_j}"] & \mathcal{G}(U_j) \end{tikzcd}$$

temos $t_j = \rho^{\mathcal{G}}_{U_j,U}(t) = \varphi_{U_j}(\rho^{\mathcal{F}}_{U_j,U})(s) = \varphi_{U_j}(s_j) = 0$, pois $s_j \in (\ker\varphi)(U_j)$. Portanto $t_j = 0$ para todo $j \in J$ e como $\mathcal{G}$ é um feixe, segue que $t = 0$. Logo $s \in (\ker\varphi)(U)$ e a condição (F2) é válida. $\square$

O feixe $\ker\varphi$ dado em (4.10) é chamado o *núcleo de* φ. Como $(\ker\varphi)(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ para todo aberto $U \subseteq X$, diremos que $\ker\varphi$ é um *subfeixe* de $\mathcal{F}$. Observe que temos um homomorfismo de feixes $i : \ker\varphi \to \mathcal{F}$, dado em cada aberto U por $i_U(s) = s$, isto é, i_U é a inclusão $(\ker\varphi)(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(U)$.

De forma similar, para um homomorfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definimos

$$(I\varphi)(U) = \{\varphi_U(s) |\ s \in \mathcal{F}(U)\} = \mathrm{Im}(\varphi_U).$$

Então, para cada aberto $U \subseteq X$, temos $(I\varphi)(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ e definindo $\rho^{I\varphi}_{V,U} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,U}|_{I\varphi(U)}$ temos um pré-feixe em X.

Se $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ e $\rho^{I\varphi}_{U_j,U}(t) = 0$ para $t \in (I\varphi)(U)$, então $\rho^{\mathcal{G}}_{U_j,U}(t) = 0$ e sendo $\mathcal{G}$ um feixe conseguimos $t = 0 = \varphi_U(0)$, logo a condição (F1) de feixe é satisfeita. Entretanto, a condição (F2) de feixe nem sempre é satisfeita, dependendo dos feixes considerados. Dessa forma, $I\varphi$ nem sempre é um feixe sobre X, sendo então necessário feixificá-lo. Escrevemos $\mathrm{Im}\,\varphi$ para o feixificado de $I\varphi$ e o chamaremos de *imagem de* φ. Observemos que, de acordo com a Proposição 4.20 os stalks $(I\varphi)_x$ e $(\mathrm{Im}\,\varphi)_x$ coincidem, de forma que podemos trabalhar com o primeiro para efeito de cálculos.

Proposição 4.24. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes sobre um espaço topológico X e $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um homomorfismo de feixes. Se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ é o homomorfismo induzido por φ nos stalks de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, então $(\ker\varphi)_x = \ker(\varphi_x)$ e $(\mathrm{Im}\,\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi_x)$.*

Demonstração. Se $\overline{(a,V)} \in (\ker\varphi)_x$, então $a \in (\ker\varphi)(V)$, onde $V \subseteq X$ é aberto e $x \in V$, ou seja, $\varphi_V(a) = 0$, donde segue que $\varphi_x(\overline{(a,V)}) = \overline{(\varphi_V(a), V)} = \overline{(0,V)}$ e dessa maneira $\overline{(a,V)} \in \ker(\varphi_x)$, isto é, $(\ker\varphi)_x \subseteq \ker(\varphi_x)$. Também, se $\overline{(a,V)} \in \ker(\varphi_x)$, temos $\overline{(a,V)} \in (\ker\varphi)_x$, fornecendo $\ker(\varphi_x) \subseteq (\ker\varphi)_x$.

Agora, se $\overline{(s,V)} \in (\operatorname{Im}\varphi)_x = (I\varphi)_x$, então $s \in (I\varphi)(V)$, com $x \in V$, e portanto $s = \varphi_V(t)$, para algum $t \in \mathcal{F}(V)$. Dessa forma $\overline{(s,V)} = \overline{(\varphi_V(t),V)} = \varphi_x(\overline{(t,V)})$, ou seja $\overline{(s,V)} \in \operatorname{Im}(\varphi_x)$. Portanto $(\operatorname{Im}\varphi)_x \subseteq \operatorname{Im}(\varphi_x)$. E se $\overline{(s,V)} \in \operatorname{Im}(\varphi_x)$, então vale $\overline{(s,V)} = \overline{(\varphi_V(t),V)}$ para algum $t \in \mathcal{F}(V)$. Mas $\overline{(\varphi_V(t),V)} \in (I\varphi)_x = (\operatorname{Im}\varphi)_x$. Logo, $\overline{(s,V)} \in (\operatorname{Im}\varphi)_x$, donde $\operatorname{Im}(\varphi_x) \subseteq (\operatorname{Im}\varphi)_x$, o que nos dá a igualdade. $\square$

Uma sequência de homomorfismos de feixes sobre um espaço topológico X,

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$$

é dita uma *sequência exata de feixes* quando $\operatorname{Im}\varphi_{i-1} = \ker\varphi_i$ para cada i.

Seja 0 o *feixe trivial*, que associa cada aberto $U \subseteq X$ ao grupo trivial $\{0\}$. Dizemos que um homomorfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é *injetivo* quando $\ker\varphi = 0$ e *sobrejetivo* quando $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{G}$. Em termos de sequências exatas, φ é injetivo quando

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

é exata, e φ é sobrejetivo quando é exata a sequência

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0.$$

Assim, a sequência

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

é exata quando φ é injetivo, ψ sobrejetivo e $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$. Neste caso, chamaremos esta sequência de uma *sequência exata curta*.

Segue da Proposição 4.24 o seguinte resultado:

Proposição 4.25. *A sequência* $\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$ *é exata se, e somente se, para todo* $x \in X$ *a sequência de homomorfismos induzidos nos stalks*

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} \mathcal{F}_{i+1,x} \xrightarrow{\varphi_{i+1,x}} \cdots$$

é uma sequência exata.

Proposição 4.26. *Sejam $M_1, M_2, M_3, \dots$ A-módulos, onde A é um anel comutativo. Se temos uma sequência exata de A-módulos*

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \cdots, \tag{4.11}$$

então conseguimos uma sequência exata de feixes de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-módulos

$$\widetilde{M_1} \longrightarrow \widetilde{M_2} \longrightarrow \widetilde{M_3} \longrightarrow \cdots.$$

Diremos que a sequência exata acima é obtida feixificando a sequência exata (4.11).

Demonstração. Veja [27], Example 4.19 (2), pag.24. □

Proposição 4.27. *Dada a sequência exata $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ de feixes sobre um espaço topológico X e um aberto $U \subseteq X$, temos que é exata a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U).$$

Demonstração. Como φ é injetiva, $\ker\varphi$ é o feixe nulo, isto é, para todo aberto U temos $(\ker\varphi)(U) = 0$. Mas $(\ker\varphi)(U) = \ker(\varphi_U)$, logo $\ker(\varphi_U) = 0$ e φ_U é injetiva.

Vejamos que $\operatorname{Im}(\varphi_U) = \ker(\psi_U)$. Se $t \in \operatorname{Im}(\varphi_U)$ então $t = \varphi_U(s)$ para algum $s \in \mathcal{F}(U)$ e assim $\psi_U(t) = \psi_U(\varphi_U(s))$. Para cada $x \in U$ temos $\overline{(t,U)} = \overline{(\varphi_U(s),U)} = \varphi_x(\overline{(s,U)})$, ou seja, $\overline{(t,U)} \in \operatorname{Im}(\varphi_x)$. Como a sequência nos stalks é exata, ver Proposição 4.25, segue que $\overline{(t,U)} \in \ker(\psi_x)$, ou seja, $\psi_x(\overline{(t,U)}) = \overline{(\psi_U(t),U)} = 0$. Assim, existe $x \in W_x \subseteq U$ com $\rho_{W_x,U}(\psi_U(t)) = 0$. Como isto vale para todo $x \in U$, $U = \bigcup\limits_{x\in U} W_x$ e $\mathcal{H}$ é um feixe, temos $\psi_U(t) = 0$, isto é, $t \in \ker(\psi_U)$, donde $\operatorname{Im}(\varphi_U) \subseteq \ker(\psi_U)$.

Suponhamos $t \in \ker(\psi_U)$. Então, $\psi_U(t) = 0$. Olhando para o stalk em $x \in U$, temos $\psi_x(\overline{(t,U)}) = \overline{(\psi_U(t),U)} = 0$ e portanto $\overline{(t,U)} \in \ker(\psi_x) = \operatorname{Im}(\varphi_x)$. Logo, existem $x \in V_x \subseteq U$ e $s_x \in \mathcal{F}(V_x)$ satisfazendo $\varphi_x(\overline{(s_x,V_x)}) = \overline{(t,U)}$, isto é, $\overline{(\varphi_{V_x}(s_x),V_x)} = \overline{(t,U)}$ e $\rho^{\mathcal{G}}_{V_x,U}(t) = \varphi_{V_x}(s_x)$. Observemos que o elemento s_x é único, uma vez que φ_x é injetiva. Temos $U = \bigcup\limits_{x\in U} V_x$ e para $x, y \in U$, seja $V_x \cap V_y = V_{xy}$. Sendo $\rho^{\mathcal{G}}_{V_x,U}(t) = \varphi_{V_x}(s_x)$ e $\rho^{\mathcal{G}}_{V_y,U}(t) = \varphi_{V_y}(s_y)$, conseguimos que

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_x}(\varphi_{V_x}(s_x)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_x}(\rho^{\mathcal{G}}_{V_x,U}(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},U}(t) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_y}(\rho^{\mathcal{G}}_{V_y,U}(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_y}(\varphi_{V_y}(s_y)).$$

Como os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
s_x \in \mathcal{F}(V_x) \arrow[r, "\varphi_{V_x}"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_x}"'] & \mathcal{G}(V_x) \ni \rho^{\mathcal{G}}_{V_x,U}(t) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_x}"] \\
\mathcal{F}(V_{xy}) \arrow[r, "\varphi_{V_{xy}}"] & \mathcal{G}(V_{xy}) \ni \rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},U}(t) \\
s_y \in \mathcal{F}(V_y) \arrow[r, "\varphi_{V_y}"] \arrow[u, "\rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_y}"] & \mathcal{G}(V_y) \ni \rho^{\mathcal{G}}_{V_y,U}(t) \arrow[u, "\rho^{\mathcal{G}}_{V_{xy},V_y}"']
\end{tikzcd}$$

obtemos que

$$\varphi_{V_{xy}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_x}(s_x)) = \varphi_{V_{xy}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_y}(s_y)).$$

Mas $\varphi_{V_{xy}}$ é injetiva, pelo que já mostramos, e portanto, $\rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_x}(s_x) = \rho^{\mathcal{F}}_{V_{xy},V_y}(s_y)$. Sendo $\mathcal{F}$ um feixe e $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi^{\mathcal{F}}_{V_x,U}(s) = s_x$. Assim, temos que

$$\begin{tikzcd}
s \in \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V_x,U}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V_x,U}"] \\
s_x \in \mathcal{F}(V_x) \arrow[r, "\varphi_{V_x}"] & \mathcal{G}(V_x) \ni \varphi_{V_x}(s_x) = \rho_{V_x,U}(t)
\end{tikzcd}$$

$\rho_{V_x,U}(\varphi_U(s)) = \rho_{V_x,U}(t)$, ou seja, $\rho_{V_x,U}(\varphi_U(s) - t) = 0$. Sendo esta relação válida para todo $V_x \subseteq U$, e $\mathcal{G}$ um feixe, temos $\varphi_U(s) - t = 0$, isto é, $\varphi_U(s) = t$. Segue que $t \in \mathrm{Im}(\varphi_U)$, isto é, $\ker(\psi_U) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_U)$, o que completa a demonstração. $\square$

Mesmo que $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ seja sobrejetiva, nem sempre temos que $\psi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ seja sobrejetiva. Então, dada uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

o máximo que podemos garantir, num caso geral, é que seja exata a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_u} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_u} \mathcal{H}(U).$$

Veja [27], Proposition 4.8.

Definição 4.28. Um feixe $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X é dito *flácido* se em cada aberto $U \subseteq X$, toda seção $s \in \mathcal{F}(U)$ pode ser estendida a uma seção $s' \in \mathcal{F}(X)$, isto é, existe $s' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\rho_{U,X}(s') = s$. Em outras palavras, $\mathcal{F}$ é flácido se para todo aberto $U \subseteq X$ o mapa de restrição $\rho_{U,X}$ é sobrejetivo.

Decorre imediatamente da definição que se $\mathcal{F}$ é flácido, $V \subseteq U$ e $t \in \mathcal{F}(V)$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{V,U}(s) = t$. Com efeito, existe $s' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\rho_{V,X}(s') = t$. Tomando $s = \rho_{U,X}(s')$, teremos $\rho_{V,U}(s) = \rho_{V,U}(\rho_{U,X}(s')) = \rho_{V,X}(s') = t$.

Exemplo 4.9. Seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre X e $\mathbb{F}$ o feixificado de $\mathcal{F}$. Para cada aberto $U \subseteq X$, definamos

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{F})(U) = \{s : U \to \mathbb{F} |\ p \circ s = id_U\}.$$

Observe que não pedimos que s seja contínua. Para abertos $V \subseteq U$, definamos também

$$\rho_{V,U} : \mathcal{C}^0(\mathcal{F})(U) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{F})(V), \rho_{V,U}(s) = s|_V.$$

Com a operação usual de adição de funções, $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ é um feixe de grupos aditivos sobre X. Dado $s \in \mathcal{C}^0(\mathcal{F})(U)$, seja $\tilde{s} : X \to \mathbb{F}$ dada por

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x) & \text{se} \quad x \in U \\ 0 & \text{se} \quad x \notin U \end{cases}$$

Então, $\tilde{s} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{F})(X)$ e $\rho_{U,X}(\tilde{s}) = s$. Logo, $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ é um feixe flácido.

Definição 4.29. Dado um feixe $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X, uma sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \to \cdots$$

é dita uma *resolução flácida* de $\mathcal{F}$ quando os $\mathcal{G}^j, j \geq 0$, são feixes flácidos.

Exemplo 4.10. Para um feixe $\mathcal{F}$, seja $\mathbb{F}$ sua feixificação. Como $\mathcal{F}$ e $\mathbb{F}$ são isomorfos, temos, para cada aberto $U \subseteq X$ que $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{C}^0(\mathcal{F})(U)$ e portanto temos a inclusão $\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{F})$, que é injetiva. Coloquemos

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) / \operatorname{Im} \iota_{\mathcal{F}}(\text{feixificado}),\ \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}_1)$$

e as aplicações

$$\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}_1,\ \delta^0 = \iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}},$$

onde $\eta_{\mathcal{F}}$ é a projeção natural $\eta_{\mathcal{F}}(s) = \overline{s}$. Então

$$\ker \delta^0 = \ker(\iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}}) = \ker(\eta_{\mathcal{F}}) = \operatorname{Im}(\iota_{\mathcal{F}}),$$

onde na segunda igualdade usamos que $\iota_{\mathcal{F}_1}$ é injetiva e assim conseguimos a sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^1(\mathcal{F}).$$

Agora, coloquemos

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}_1)/\operatorname{Im}\iota_{\mathcal{F}_1}(\text{feixificado}),\ \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}_2)$$

e as aplicações

$$\eta_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{C}^0(\mathcal{F}_1) \to \mathcal{F}_2,\ \delta^1 = \iota_{\mathcal{F}_2} \circ \eta_{\mathcal{F}_1}.$$

Então,

$$\ker\delta^1 = \ker\eta_{\mathcal{F}_1} = \operatorname{Im}(\iota_{\mathcal{F}_1}) = \operatorname{Im}(\iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}}) = \operatorname{Im}\delta^0,$$

onde usamos que $\iota_{\mathcal{F}_1}$ é injetiva e $\eta_{\mathcal{F}}$ é sobrejetiva. Conseguimos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{C}^2(\mathcal{F}).$$

Prosseguindo desta forma, obtemos sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{C}^3(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Como $\mathcal{C}^n(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}_n)$ é flácido, construímos uma resolução flácida de $\mathcal{F}$, chamada *resolução flácida canônica* de $\mathcal{F}$.

O Exemplo 4.10 mostra que sempre é possível obter uma resolução flácida de um feixe $\mathcal{F}$. Dada uma resolução flácida de um feixe $\mathcal{F}$ de grupos abelianos (ou de módulos),

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \longrightarrow \cdots$$

induzimos uma sequência de homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^0(X) \xrightarrow{\delta^0_X} \mathcal{G}^1(X) \xrightarrow{\delta^1_X} \mathcal{G}^2(X) \xrightarrow{\delta^2_X} \mathcal{G}^3(X) \longrightarrow \cdots$$

Não podemos garantir que esta última seja exata, mas partindo da sequência exata nos feixes, conseguimos $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, donde $\delta^{n+1}_X \circ \delta^n_X = 0, n \geq 0$. Assim, podemos definir

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \ker(\delta^n_X)/\operatorname{Im}(\delta^{n-1}_X),$$

onde $\delta^{-1}_X = 0$. Chamamos $H^n(X, \mathcal{F})$ de o *n-ésimo grupo de cohomologia do feixe* $\mathcal{F}$. De forma mais precisa, seria necessário indexar os grupos de cohomologia pela resolução flácida utilizada. Porém, é possível mostrar que os grupos de cohomologia de um feixe $\mathcal{F}$ são isomorfos para diferentes resoluções flácidas, veja [27], Theorem 6.8, pag. 120.

A exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \longrightarrow \cdots$$

nos garante, segundo a Proposição 4.27, que é exata a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\iota_X} \mathcal{G}^0(X) \xrightarrow{\delta^0_X} \mathcal{G}^1(X).$$

Assim, observemos que, sendo por definição $\delta_X^{-1} = 0$, temos imediatamente

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \ker(\delta^0_X) = \operatorname{Im}(\iota_X) = \mathcal{F}(X). \tag{4.12}$$

Se $\mathcal{F}$ é um feixe flácido, a sequência

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

é uma resolução flácida de $\mathcal{F}$. Logo

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{F}(X) & \text{se} \quad n = 0, \\ 0 & \text{se} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Temos os seguintes resultados a respeito dos grupos de cohomologia:

Teorema 4.30. *(Sequência exata longa de cohomologia) Para uma sequência exata curta de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

temos induzida uma sequência exata longa dos grupos de cohomologia

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^3(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Ver [27], Theorem 6.9, pag.124. □

Proposição 4.31. *Para todo $\ell \in \mathbb{Z}$ e $0 < i < n$, temos $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)) = 0$.*

Demonstração. Ver [27], Theorem 6.19, pag. 138. □

Proposição 4.32. *Seja X um espaço topológico Noetheriano de dimensão n. Para todo inteiro $i > n$ e para todo feixe de grupos abelianos $\mathcal{F}$ em X temos $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Demonstração. Ver [16], Theorem 2.7, pag. 208. $\square$

Teorema 4.33. *(Dualidade) Para todo inteiro ℓ, vale*

$$H^n(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)) \simeq H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-\ell - n - 1))^*,$$

onde $H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-\ell - n - 1))^*$ é o dual de $H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-\ell - n - 1))$.

Demonstração. Basta aplicar [28], Theorem 7.96, pag. 107, a $X = \mathbb{P}_k^n$, considerando ainda [27], Corollary 5.20, pag.77, onde mostra-se que o feixe dual de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)$ é o feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-\ell)$. $\square$

Juntando a equação (4.12), as Proposições 4.31 e 4.32 com o Teorema 4.33 conseguimos o seguinte resultado:

Corolário 4.34. *Dados um inteiro positivo i e um inteiro ℓ, temos*

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\ell)) = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq 0 \ e \ i \neq n; \\ S_\ell, & se \quad i = 0 \ e \ \ell \geq 0; \\ 0, & se \quad i = 0 \ e \ \ell < 0; \\ H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-\ell - n - 1))^*, & se \quad i = n. \end{cases}$$

5 Folheações de dimensão um em $\mathbb{P}^n$

Neste capítulo, generalizaremos a definição de folheação de dimensão um através de campos de vetores em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, e estudaremos algumas soluções para o Problema de Poincaré neste contexto. Aqui, S denotará o conjunto dos polinômios em $n+1$ variáveis, isto é, $S = k[z_0, \ldots, z_n]$, e S_d o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d.

5.1 Campos vetoriais em $\mathbb{P}^n$

Seja $\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}(S)$. Nesta seção, utilizaremos uma sequência exata de feixes para estudarmos campos vetoriais em $\mathbb{P}^n$ com a linguagem de feixes.

Definição 5.1. O *feixe tangente* $T\mathbb{P}^n$ é o feixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-módulos dado em cada aberto básico $D_+(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ por

$$T\mathbb{P}^n(D_+(f)) := Der_k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(f)), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(f))).$$

Em [28], pag.95, mostra-se que existe a sequência exata de feixes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

A sequência (5.1) é dita a *sequência de Euler*.

Nas seções globais, temos os homomorfismos de k-módulos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1}(\mathbb{P}^n)$$

$$1 \longmapsto (z_0, \ldots, z_n)$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1}(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & T\mathbb{P}^n(\mathbb{P}^n) \\ (F_0, \ldots, F_n) & \longmapsto & F_0\dfrac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + F_n\dfrac{\partial}{\partial z_n}. \end{array}$$

Tensorizando a sequência de Euler por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n(d-1) \longrightarrow 0. \tag{5.2}$$

Da sequência exata longa de cohomologia de (5.2) obtemos a sequência exata

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^{\oplus n+1}) \to H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n(d-1)) \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)).$$

Por (4.12) temos $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ e da Proposição 4.31 vale $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) = 0$. Assim reescrevemos a sequência anterior como

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^{\oplus n+1}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow T\mathbb{P}^n(d-1)(\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0,$$

ou seja, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow S_{d-1} \xrightarrow{\lambda} S_d^{\oplus n+1} \xrightarrow{\mu} T\mathbb{P}^n(\mathbb{P}^n)(d-1) \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

O primeiro homomorfismo da sequência exata (5.3) é dado por

$$S_{d-1} \xrightarrow{\lambda} S_d^{\oplus n+1}$$

$$F \longmapsto (z_0 F, \ldots, z_n F)$$

e o segundo homomorfismo por

$$\begin{array}{rcl} S_d^{\oplus n+1} & \xrightarrow{\mu} & T\mathbb{P}^n(\mathbb{P}^n)(d-1) \\ (F_0, \ldots, F_n) & \longmapsto & F_0 \dfrac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + F_n \dfrac{\partial}{\partial z_n}. \end{array}$$

Como a sequência (5.3) é exata temos que $\operatorname{Im} \lambda = \ker \mu$ e portanto podemos escrever $\ker \mu = \{F \cdot (z_0, \ldots, z_n) | \ F \in S_{d-1}\}$. Logo, para cada $F \in S_{d-1}$ temos que

$$F \cdot \left(z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) = 0.$$

Denotaremos por $R = (z_0, \ldots, z_n)$. Segue do Teorema de Isomorfismos que

$$\frac{S_d^{\oplus n+1}}{S_{d-1} \cdot R} \simeq T\mathbb{P}^n(\mathbb{P}^n)(d-1). \tag{5.4}$$

Uma seção global não nula de $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$, $d \geq 0$, é chamada *campo vetorial em* $\mathbb{P}^n$. Também dizemos que o *grau* do campo vetorial é d.

Da sobrejetividade do homomorfismo μ de (5.3), segue que cada campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^n$ é dado em coordenadas homogêneas por

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + F_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

onde $F_0, F_1, \ldots, F_n$, são polinômios homogêneos de grau d.

Além disso, as imagens de $(G_0, \ldots, G_n), (F_0, \ldots, F_n) \in S_d^{\oplus n+1}$ por μ determinam o mesmo campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^n$ se e somente se $(F_0 - G_0, \ldots, F_n - G_n) \in \ker \mu$, ou seja, se e somente se existe $H \in S_{d-1}$ tal que

$$F_j - G_j = H z_j, \ j \in \{0, \ldots, n\}. \tag{5.5}$$

Isso significa que

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + F_n \frac{\partial}{\partial z_n} \text{ e } \mathcal{X}' = G_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + G_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

representam o mesmo campo vetorial de grau d se e somente se $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + H\mathcal{R}$, onde

$$\mathcal{R} = z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

$\mathcal{R}$ é chamado de *campo radial* de $\mathbb{P}^n$. Observe que quando $n = 2$, a noção de campo de vetores em $\mathbb{P}^n$ coincide com a dada no Capítulo 2.

Definição 5.2. Uma *folheação de dimensão um e grau d* em $\mathbb{P}^n$ é uma seção global não nula de $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$, $d \geq 0$, módulo múltiplos constantes.

Pelo isomorfismo (5.4), uma folheação de $\mathbb{P}^n$ de grau d é um elemento de $\dfrac{S_d^{\oplus n+1}}{S_{d-1} \cdot R}$, módulo múltiplos escalares. Se

$$N = \dim_k \frac{S_d^{\oplus n+1}}{S_{d-1} \cdot R} = (n+1)\binom{d+n}{n} - \binom{d+n-1}{n},$$

então o espaço das folheações de grau d em $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathbb{P}^{N-1}$.

Em particular, quando $d = 1$ e $n = 2$ conseguimos $N = 8$ e dessa forma as folheações de grau um em $\mathbb{P}^2$ tem $\mathbb{P}^7$ como espaço de parâmetros, como haviamos conseguido no Capítulo 2.

Definição 5.3. Um ponto $p \in \mathbb{P}^n$ é uma *singularidade* de uma folheação de $\mathbb{P}^n$ dada em coordenadas homogêneas pelo campo

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + F_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

se p anula todos os menores 2x2 da matriz

$$\begin{pmatrix} z_0 & \cdots & z_n \\ F_0 & \cdots & F_n \end{pmatrix},$$

ou seja, se p é um zero comum de $z_iF_j - z_jF_i$, $i.j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Escreveremos Sing($\mathcal{X}$) para denotar o conjunto das singularidades do campo vetorial $\mathcal{X}$. Observamos que devido à relação (5.5), uma singularidade de uma folheação está bem definida.

Definição 5.4. Seja $V = \boldsymbol{V}(G)$ uma hipersuperfície irredutível definida pelo polinômio homogêneo G e $\mathcal{X}$ um campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^n$. Dizemos que V é *invariante por* $\mathcal{X}$ se $\mathcal{X}(p) \in T_pV$ para todo $p \in V \backslash (Sing(V) \cup Sing(\mathcal{X}))$.

Se V é redutível, diremos que V é invariante por $\mathcal{X}$ quando cada componente irredutível de V for invariante por $\mathcal{X}$.

Da mesma forma que na Proposição 3.16 da página 42, se G é irredutível, então $V = \boldsymbol{V}(G)$ é invariante por $\mathcal{X}$ de grau d se e somente se existe um polinômio homogêneo H de grau $d-1$ tal que $\mathcal{X}(G) = GH$.

5.2 Hipersuperfícies suaves invariantes

Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave determinada por um polinômio homogêneo $F \in S$. Podemos construir folheações em $\mathbb{P}^n$ que deixam V invariante. Para isto basta escolhermos polinômios homogêneos $P_{i,j}$ de mesmo grau e considerar a folheação induzida pelo campo vetorial

$$\mathcal{X} = \sum_{0 \le i < j \le n} P_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} \right).$$

Veja que $\mathcal{X}(F) = 0 = 0 \cdot F$, ou seja, V é invariante por $\mathcal{X}$.

Nosso objetivo nesta seção é verificar que estas são todas as folheações de $\mathbb{P}^n$ que deixam V invariante.

Para isto, necessitamos de alguns fatos sobre álgebra comutativa. Os resultados aqui apresentados funcionam em versões mais fortes, entretanto nos limitaremos às hipóteses que ocorrem em nosso estudo.

Definição 5.5. Seja A um anel. A *dimensão de A* é definida por

$$\dim A := \sup\{r |\ \exists\ P_0, \ldots, P_r \text{ ideais primos de } A \text{ satisfazendo } P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_r \subset A\}.$$

Observação 5.6. Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local Noetheriano, esta definição é equivalente a

$$\dim A = \min\{d |\ \exists\ x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m} \text{ com } \mathfrak{m} = \sqrt{\langle x_1, \ldots, x_d \rangle}\},$$

veja [1], Theorem 11.14, pag. 121. Neste caso, se $\dim A = d$ e $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ são tais que $\mathfrak{m} = \sqrt{\langle x_1, \ldots, x_d \rangle}$ chamamos $\{x_1, \ldots, x_d\}$ de um sistema de parâmetros em A. Se $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$, dizemos que o anel A é *regular*.

Proposição 5.7. *Se D é um domínio de dimensão finita e $x \in D$ é um elemento não nulo com $\langle x \rangle \neq D$ então* $\dim \dfrac{D}{\langle x \rangle} \leq \dim D - 1$.

Demonstração. Os ideais primos de $D/\langle x \rangle$ são da forma $\overline{P}$, onde P é um ideal de D contendo $\langle x \rangle$. Seja $\overline{P_0} \subsetneq \overline{P_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{P_m} \subsetneq D/\langle x \rangle$ uma cadeia de ideais primos em $D/\langle x \rangle$. Como $x \neq 0$, temos em D uma cadeia de primos $\{0\} \subsetneq P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq D$, donde segue que $\dim D \geq \dim \dfrac{D}{\langle x \rangle} + 1$. □

Definição 5.8. Sejam M um A-módulo e $x_1, \ldots, x_n \in A$. Dizemos que a sequência $x_1, \ldots, x_n$ é uma *sequênca regular*, ou *M-regular*, se

i) $(x_1, \ldots, x_n)M \neq M$;

ii) x_1 não divide zero em M;

iii) Para $i \in \{2, \ldots, n\}$, x_i não divide zero em $\dfrac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M}$.

Proposição 5.9. *Seja A um anel. Uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos em A é uma sequência A-regular se, e somente se, x_1 não divide zero em A e $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ é sequência $A/\langle x_1 \rangle$-regular.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ A-regular, x_1 não divide zero em A por definição e $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \neq A$. Portanto existe $a \in A$ tal que $a \notin \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Suponha que $\overline{a} \in \langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n} \rangle$. Então existem $\overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n} \in A/\langle x_1 \rangle$ tais que $\overline{a} = \overline{b_2}\overline{x_2} + \ldots + \overline{b_n}\overline{x_n}$ em $A/\langle x_1 \rangle$. Logo existe $b_1 \in A$ tal que $a = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, ou seja, $a \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, o que é falso. Portanto $\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n} \rangle \neq A/\langle x_1 \rangle$.

Fixemos $i \in \{2, \ldots, n\}$ e seja $[c] \in \dfrac{A/\langle x_1\rangle}{\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle}$ tal que $\overline{x_i} \cdot [c] = 0$, onde $[c]$ representa a classe residual de $\overline{c}, c \in A$, no quociente $\dfrac{A/\langle x_1\rangle}{\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle}$. Então $\overline{x_i c} \in \langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle$, logo $x_i c \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$, ou seja, $x_i c = 0$ em $A/\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$. Pela regularidade da sequência $x_1, \ldots, x_n$, x_i não divide zero em $A/\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$ e temos que $\overline{c} = 0 \in A/\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$. Assim $c \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$. Daí segue que $\overline{c} \in \langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle$ e portanto $[c] = 0$. Desta forma, $\overline{x_i}$ não divide zero em $\dfrac{A/\langle x_1\rangle}{\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle}$ e a sequência $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ é $A/\langle x_1\rangle$-regular.

$\Leftarrow$) Usando a mesma argumentação que utilizado no início da demonstração acima mostra-se que se $\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\rangle \neq A/\langle x_1\rangle$ então $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \neq A$. Fixemos $i \in \{2, \ldots, n\}$ e seja $\overline{c} \in A/\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$ tal que $\overline{x_i c} = 0$. Então, $x_i c \in \langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle$, o que implica em $\overline{x_i}[c] = 0$ em $\dfrac{A/\langle x_1\rangle}{\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle}$. Como $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ é uma sequência $A/\langle x_1\rangle$-regular, $\overline{x_i}$ não divide zero em $\dfrac{A/\langle x_1\rangle}{\langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle}$ e portanto $[c] = 0$, isto é, $\overline{c} \in \langle \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{i-1}}\rangle$ em $A/\langle x_1\rangle$ e $c \in \langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle$. Logo x_i não divide zero em $A/\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\rangle$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência A-regular. $\square$

Definição 5.10. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e M um A-módulo. A *profundidade* de M em A é o inteiro não negativo definido por

$$\mathrm{Prof}(M) = \max\{s \mid \exists\ x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{m} \text{ tais que } x_1, \ldots, x_s \text{ é sequência } M\text{-regular}\}.$$

Proposição 5.11. *Se A é um anel local com* $\mathrm{Prof}(A) = n$ *e $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência A-regular, então* $\mathrm{Prof}(A/\langle x_1\rangle) = \mathrm{Prof}(A) - 1$.

Demonstração. Da Proposição 5.9, $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ é uma sequência $A/\langle x_1\rangle$-regular e portanto $\mathrm{Prof}(A/\langle x_1\rangle) \geq n - 1$. Dada qualquer sequência $A/\langle x_1\rangle$-regular $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_s}$ segue da Proposição 5.9 que $x_1, y_1, \ldots, y_s$ é A-regular e assim $\mathrm{Prof}(A) \geq \mathrm{Prof}(A/\langle x_1\rangle) + 1$, donde conseguimos a igualdade desejada. $\square$

Teorema 5.12. *Para todo domínio local $(A, \mathfrak{m})$ vale que* $\mathrm{Prof}(A) \leq \dim(A)$.

Demonstração. Usaremos indução em $\dim(A)$. Se $\dim(A) = 0$, então $\mathfrak{m}$ é o único ideal primo de A. Se $x \notin \mathfrak{m}$, então x é invertível e $\langle x\rangle A = A$, ou seja, x não pode pertencer a uma sequência A-regular. Suponha então $x \in \mathfrak{m}$. Como o nilradical de A é a interseção de todos os primos de A, veja Proposition 1.8 em [1], e $\mathfrak{m}$ é o único primo, vale que $\mathfrak{m}$ é exatamente o nilradical de A e portanto x é nilpotente. Em particular, x divide zero em A e não pode iniciar uma sequência A-regular. Logo A não admite sequência regular, isto é, $\operatorname{Prof}(A) = 0$.

Suponhamos o resultado válido para todo domínio de dimensão menor que n. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um domínio local com $\dim A = n$. Dada uma sequência A-regular $x_1, \ldots, x_l$, pela Proposição 5.7 temos $\dim(A/\langle x_1 \rangle) \leq n-1$ e portanto $\operatorname{Prof}(A/\langle x_1 \rangle) \leq \dim(A/\langle x_1 \rangle)$. Pela Proposição 5.11, $\operatorname{Prof}(A) - 1 \leq \dim(A/\langle x_1 \rangle) \leq n-1$ e assim $\operatorname{Prof}(A) \leq n = \dim(A)$. □

Definição 5.13. Diremos que um anel local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ é *Cohen-Macaulay* quando $\operatorname{Prof}(A) = \dim(A)$.

Exemplo 5.1. Em $S = k[z_0, \ldots, z_n]$, considere o ideal maximal $\mathfrak{m} = \langle z_0, \ldots, z_n \rangle$. Então a localização $S_{\mathfrak{m}} = \tilde{S}$ é um anel local, cujo ideal maximal é $\tilde{\mathfrak{m}} = \langle \frac{z_0}{1}, \ldots, \frac{z_n}{1} \rangle$. Considerando a cadeia de ideais primos

$$0 \subsetneq \left\langle \frac{z_0}{1} \right\rangle \subsetneq \left\langle \frac{z_0}{1}, \frac{z_1}{1} \right\rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \left\langle \frac{z_0}{1}, \frac{z_1}{1}, \ldots, \frac{z_n}{1} \right\rangle,$$

vemos que $\dim \tilde{S} \geq n+1$. Da Observação 5.6, $\dim \tilde{S} \leq n+1$. Portanto $\dim \tilde{S} = n+1$.

Assim, $\tilde{S}$ é um anel regular e $z_0/1, \ldots, z_n/1$ forma uma sequência $\tilde{S}$-regular. Logo $\operatorname{Prof} \tilde{S} \geq n+1$. Como $\tilde{S}$ é um domínio, o Teorema 5.12 implica que $\operatorname{Prof} \tilde{S} = n+1$, ou seja, $\tilde{S}$ é Cohen-Macaulay.

Observamos ainda que se $F_0/1, \ldots, F_s/1$ é uma sequência $\tilde{S}$-regular, onde os F_i são polinômios homogêneos então $F_0, \ldots, F_s$ formam uma sequência S-regular. De fato, para $i \in \{2, \ldots, s\}$ seja $H \in S$ tal que $\overline{F_i H} = 0$ em $S/\langle F_0, \ldots, F_{i-1} \rangle$. Então existem $H_0, \ldots, H_{i-1} \in S$ tais que $F_i H = H_0 F_0 + \ldots + H_{i-1} F_{i-1}$. Como $F_0, \ldots, F_{i-1}$ são homogêneos, esta relação continua válida para cada parcela homogênea de H. Portanto podemos supor que H é homogêneo. No anel local $\tilde{S}$, $\overline{\frac{F_i}{1}} \cdot \overline{\frac{H}{1}} = \overline{0}$ em $\tilde{S}/\langle \frac{F_0}{1}, \ldots \frac{F_{i-1}}{1} \rangle$ e sendo a sequência $\tilde{S}$-regular segue que $\overline{\frac{H}{1}} = 0$. Logo podemos escrever

$$\frac{H}{1} = \frac{A_0}{G} \frac{F_0}{1} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{G} \frac{F_{i-1}}{1}, \; G \notin \langle z_0, \ldots, z_n \rangle = \mathfrak{m}.$$

Se escrevermos $G = G_0 + \ldots + G_l$, G_i homogêneo de grau i, o fato de $G \notin \mathfrak{m}$ equivale ao fato que $G_0 \neq 0$. Além disso, como $GH = HG_0 + \cdots + HG_l \in \langle F_0, \ldots, F_{i-1} \rangle$ e $\langle F_0, \ldots, F_{i-1} \rangle$ é um ideal homogêneo, as parcelas homogêneas de GH pertencem a este ideal, ou seja,

$HG_0 \in \langle F_0, \ldots, F_{i-1}\rangle$. Como G_0 é uma constante não nula, segue que $H \in \langle F_0, \ldots, F_{i-1}\rangle$ e $\overline{H} = 0$ em $S/\langle F_0, \ldots, F_{i-1}\rangle$. Dessa forma $\overline{F_i}$ não divide zero em $S/\langle F_0, \ldots, F_{i-1}\rangle$. Além disso, se $F_0 \cdot G = 0$ para algum $G \in S$ teríamos $\frac{F_0}{1} \cdot \frac{G}{1} = 0$ em $\tilde{S}$, o que é um absurdo.

Lema 5.14. *Se $(A, \mathfrak{m})$ é um domínio Cohen-Macaulay e $a_1, \ldots, a_{\dim A}$ é uma sequência A-regular então $\left(\dfrac{A}{\langle a_1\rangle}, \dfrac{\mathfrak{m}}{\langle a_1\rangle}\right)$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração. De fato, $\dfrac{A}{\langle a_1\rangle}$ é Noetheriano e

$$\operatorname{Prof}\left(\frac{A}{\langle a_1\rangle}\right) = \operatorname{Prof}(A) - 1, \qquad \text{(Proposição 5.11)}$$

$$\dim\left(\frac{A}{\langle a_1\rangle}\right) \leq \dim(A) - 1. \qquad \text{(Proposição 5.7)}$$

Como $(A, \mathfrak{m})$ é Cohen-Macaulay temos $\operatorname{Prof}(A) = \dim(A)$. Dessa forma

$$\dim\left(\frac{A}{\langle a_1\rangle}\right) \leq \dim(A) - 1 = \operatorname{Prof}(A) - 1 = \operatorname{Prof}\left(\frac{A}{\langle a_1\rangle}\right).$$

Pelo Teorema 5.12, segue que $\dim\left(\dfrac{A}{\langle a_1\rangle}\right) = \operatorname{Prof}\left(\dfrac{A}{\langle a_1\rangle}\right)$. □

Usando o Lema 5.14 conseguimos o seguinte fato:

Proposição 5.15. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ domínio Cohen-Macaulay de dimensão maior que zero. Se $\{a_1, \ldots, a_r\}$ é um sistema de parâmetros em A, então a sequência $a_1, \ldots, a_r$ é A-regular.*

Demonstração. Usaremos indução em $r = \dim A$. Se $r = 1$, então como $\mathfrak{m} = \sqrt{a_1}$ segue que $a_1 \neq 0$. Caso contrário, teríamos $\mathfrak{m} = \{0\}$ e $r = \dim A = 0$, pois A seria corpo. Logo, a_1 é A-regular.

Suponha o resultado verdadeiro para $r = n$. Seja $a_1, \ldots, a_{n+1}$ um sistema de parâmetros em A. Como $\mathfrak{m} = \sqrt{\langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle}$, o ideal maximal $\overline{\mathfrak{m}}$ de $\frac{A}{\langle a_1\rangle}$ é $\overline{\mathfrak{m}} = \sqrt{\langle \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{n+1}}\rangle}$. Pelo Lema 5.14, $A/\langle a_1\rangle$ é Cohen-Macaulay e vale que $\dim(A/\langle a_1\rangle) = \operatorname{Prof}(A/\langle a_1\rangle) = n$. Dessa forma, $\{\overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{n+1}}\}$ é sistema de parâmetros em $A/\langle a_1\rangle$. Por hipótese de indução vale que $\overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$ é $A/\langle a_1\rangle$-regular. Segue da Proposição 5.9 que $a_1, \ldots, a_{n+1}$ é uma sequência A-regular. □

Teorema 5.16. *Seja $V = \boldsymbol{V}(F)$ uma hipersuperfície definida por um polinômio homogêneo F de grau m. Se V é suave e $p \nmid m$, onde p é a característica do corpo k, então cada folheação de $\mathbb{P}^n_k$ que deixa V invariante é induzida por*

$$\mathcal{X} = \sum_{0 \leq i < j \leq n} P_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} \right),$$

para alguns polinômios $P_{i,j}$ homogêneos e de mesmo grau.

Demonstração. Denotaremos por simplicidade $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial z_i}$. Seja $\mathcal{X} = G_0\partial_0 + \ldots + G_n\partial_n$ um campo vetorial em $\mathbb{P}^n$ tal que V é invariante por $\mathcal{X}$. Então existe um polinômio homogêneo H tal que $\mathcal{X}(F) = FH$. A relação de Euler

$$mF = z_0\partial_0 F + \ldots + z_n\partial_n F, \tag{5.6}$$

juntamente ao fato de $p \nmid m$, implicam que

$$G_0\partial_0 F + \cdots + G_n\partial_n F = \frac{H}{m}(z_0\partial_0 F + \cdots + z_n\partial_n F).$$

Portanto $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(G_i - \frac{1}{m} H z_i \right) \partial_i F = 0$. Escrevendo $G_i' = G_i - \dfrac{1}{m} H z_i$, temos que o campo vetorial $\mathcal{X}' = G_0'\partial_0 + \ldots + G_n'\partial_n$ é tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + \dfrac{1}{m} H \cdot \mathcal{R}$, isto é, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^n_k$ e $\mathcal{X}'(F) = G_0'\partial_0 F + \cdots + G_n'\partial_n F = 0$.

Seja $I = \langle \partial_0 F, \ldots, \partial_n F \rangle \subseteq S$. Como $p \nmid m$ temos por (5.6) que $F \in I$. Sendo V suave, F e suas derivadas parciais não possuem raiz em comum em $\mathbb{P}^n$, do Teorema dos Zeros de Hilbert conseguimos $\sqrt{I} = \langle z_0, \ldots, z_n \rangle$.

Como $\tilde{S} = S_{\sqrt{I}}$ e $\tilde{\mathfrak{m}} = \langle \frac{z_0}{1}, \ldots, \frac{z_n}{1} \rangle = \sqrt{\langle \frac{\partial_0 F}{1}, \ldots, \frac{\partial_n F}{1} \rangle}$, segue que $\{\partial_0 F/1, \ldots, \partial_n F/1\}$ é um sistema de parâmetros em $\tilde{S}$. Pela Proposição 5.15 a sequência $\partial_0 F/1, \ldots, \partial_n F/1$ é $\tilde{S}$-regular. Pelo Exemplo 5.1, temos que $\partial_0 F, \ldots, \partial_n F$ é uma sequência S-regular.

Afirmação: Para cada $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ existem polinômios homogêneos $P_{0t}, P_{1t}, \ldots, P_{(t-1)t}, P_{t(t+1)}, \ldots, P_{tn}$ tais que

$$G_t' = P_{0t}\partial_0 F + P_{1t}\partial_1 F + \cdots + P_{(t-1)t}\partial_{t-1} F - P_{t(t+1)}\partial_{t+1} F - \cdots - P_{tn}\partial_n F,$$

onde os coeficientes P_{ij} que aparecem nas escritas de G_i' e de G_j' são os mesmos.

Vamos provar a afirmação. Sendo

$$G_0'\partial_0 F + \ldots + G_n'\partial_n F = 0, \tag{5.7}$$

temos $G'_n\partial_n F = -G'_0\partial_0 F - \cdots - G'_{n-1}\partial_{n-1}F$ e portanto $\overline{G'_n}\cdot\overline{\partial_n F} = \overline{0}$ em $S/\langle \partial_0 F, \ldots, \partial_{n-1}F\rangle$. Como a sequência $\partial_0 F, \ldots, \partial_n F$ é S-regular, $\overline{\partial_n F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F, \ldots, \partial_{n-1}F\rangle$ e $\overline{G'_n} = \overline{0}$. Dessa maneira existem polinômios homogêneos $P_{0n}, P_{1n}, \ldots, P_{(n-1)n}$ tais que $G'_n = P_{0n}\partial_0 F + \cdots + P_{(n-1)n}\partial_{n-1}F$. Logo, a afirmação é válida quando $t = n$.

Suponha que a afirmação é verdadeira para todo q, $0 < t \leq q \leq n$. Vejamos que a afirmação é válida para $t-1$. Substituindo as expressões para cada G'_q, $t \leq q \leq n$, na equação (5.7) conseguimos

$$G'_0\partial_0 F + \cdots + G'_{t-1}\partial_{t-1}F + (P_{0t}\partial_0 F + \cdots + P_{(t-1)t}\partial_{t-1}F - P_{t(t+1)}\partial_{t+1}F - \ldots - P_{tn}\partial_n F)\partial_t F +$$
$$+ (P_{0(t+1)}\partial_0 F + P_{1(t+1)}\partial_1 F + \cdots + P_{t(t+1)}\partial_t F - P_{(t+1)(t+2)}\partial_{t+2}F - \cdots - P_{(t+1)n}\partial_n F)\partial_{t+1}F +$$
$$+ \cdots + (P_{0n}\partial_0 F + P_{1n}\partial_1 F + \cdots + P_{(n-1)n}\partial_{n-1}F)\partial_n F = 0 \quad (5.8)$$

Agrupando os termos em (5.8) com $\partial_0 F, \ldots, \partial_{t-1}F$ e observando que para $t \leq i < j$ os termos $-P_{ij}\partial_j F\partial_i F$, que aparece em $G'_i\partial_i F$ e $P_{ij}\partial_i F\partial_j F$, que aparece em $G'_j\partial_j F$ se cancelam, ficamos com

$$(G'_0 + P_{0t}\partial_t F + \cdots + P_{0n}\partial_n F)\partial_0 F + \cdots + (G'_{t-1} + P_{(t-1)t}\partial_t F + \ldots + P_{(t-1)n}\partial_n F)\partial_{t-1}F = 0. \quad (5.9)$$

Se $t \geq 2$, podemos escrever $\overline{G'_{t-1} + P_{(t-1)t}\partial_t F + \cdots + P_{(t-1)n}\partial_n F} \cdot \overline{\partial_{t-1}F} = \overline{0}$ em $S/\langle \partial_0 F, \ldots, \partial_{t-2}F\rangle$ e sendo $\partial_0 F, \ldots, \partial_n F$ uma sequência S-regular, $\overline{\partial_{t-1}F}$ não divide zero em $S/\langle \partial_0 F, \ldots, \partial_{t-2}F\rangle$, ou seja, $\overline{G'_{t-1} + P_{(t-1)t}\partial_t F + \cdots + P_{(t-1)n}\partial_n F} = \overline{0}$. Assim existem polinômios homogêneos $P_{0(t-1)}, \ldots, P_{(t-2)(t-1)}$ tais que

$$G'_{t-1} + P_{(t-1)t}\partial_t F + \cdots + P_{(t-1)n}\partial_n F = P_{0(t-1)}\partial_0 F + \cdots + P_{(t-2)(t-1)}\partial_{t-2}F.$$

Portanto conseguimos

$$G'_{t-1} = P_{0(t-1)}\partial_0 F + \cdots + P_{(t-2)(t-1)}\partial_{t-2}F - P_{(t-1)t}\partial_t F - \cdots - P_{(t-1)n}\partial_n F.$$

Se $t = 1$, a expressão (5.9) é simplesmente

$$(G'_0 + P_{01}\partial_1 F + \ldots + P_{0n}\partial_n F) \cdot \partial_0 F = 0$$

e como a sequência $\partial_0 F, \ldots, \partial_n F$ é S-regular, $\partial_0 F$ não divide zero em S e conseguimos

$$G'_0 = -P_{01}\partial_1 F - \cdots - P_{0n}\partial_n F,$$

o que comprova a afirmação.

Utilizando as escritas de G'_t, $0 \leq t \leq n$, na expressão de $\mathcal{X}'$ temos

$$\mathcal{X}' = G'_0\partial_0 + G'_1\partial_1 + \cdots + G'_n\partial_n = (-P_{01}\partial_1 F - P_{02}\partial_2 F - \cdots - P_{0n}\partial_n F)\partial_0 +$$

$$+(P_{01}\partial_0 F - P_{12}\partial_2 F - \cdots - P_{1n}\partial_n F)\partial_1 + \cdots + (P_{0n}\partial_0 F + P_{1n}\partial_1 F + \cdots + P_{(n-1)n}\partial_{n-1} F)\partial_n.$$

As parcelas com P_{ij}, $0 \leq i < j \leq n$, aparecem aos pares, em $-P_{ij}\partial_j F\partial_i$ e em $P_{ij}\partial_i F\partial_j$. Agrupando estas parcelas, conseguimos

$$\mathcal{X}' = \sum_{0\leq i<j\leq n} P_{ij}(\partial_i F\partial_j - \partial_j F\partial_i).$$

Como $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ induzem a mesma folheação em $\mathbb{P}^n$, o resultado está provado. $\square$

Como consequência, conseguimos uma primeira cota superior para o grau de hipersuperfícies invariantes por folheações em $\mathbb{P}^n_k$.

Teorema 5.17. *Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial em $\mathbb{P}^n$ de grau d e $V = \boldsymbol{V}(F)$ uma hipersuperfície suave de grau m. Se V é invariante por $\mathcal{X}$ e $p \nmid d$, então $m \leq d+1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.16 o campo $\mathcal{X}$ é da forma

$$\mathcal{X} = \sum_{i<j} P_{i,j}\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\right),$$

com $P_{i,j}$ polinômios homogêneos de mesmo grau.

Como $\mathcal{X}$ tem grau d e F tem grau m, vale $\text{grau}(P_{i,j}) = d-m+1$. Como $P_{i,j} \neq 0$ para algum par (i,j), senão $\mathcal{X} = 0$, temos que $\text{grau}(P_{i,j}) \geq 0$, ou seja, $m \leq d+1$. $\square$

5.3 Feixes de ideais e regularidade em $\mathbb{P}^2$

Nesta seção, o nosso objetivo será encontrar uma cota superior para o grau de uma curva singular que é invariante por uma folheação em $\mathbb{P}^2$ em termos da noção de *regularidade* do conjunto das singularidades da curva.

Sejam $C \subseteq \mathbb{P}^2$ uma curva de grau m, dada pelos zeros de um polinômio homogêneo reduzido F, e $I = \langle F\rangle$ o ideal da curva C. Se $S = k[z_0, z_1, z_2]$, temos que I é um S-módulo e portanto podemos construir o feixe $\tilde{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-módulos.

Denotaremos $\tilde{I}$ por $\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2}$ e o chamaremos de *feixe de ideais de C em $\mathbb{P}^2$*.

A graduação de S, $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$, induz uma graduação natural no ideal I dada por $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots$, onde $I_i = I \cap S_i$. Considere a decomposição do anel de coordenadas S/I dada por

$$\frac{S}{I} = \frac{S_0}{I_0} + \frac{S_1}{I_1} + \frac{S_2}{I_2} + \cdots . \tag{5.10}$$

Se $\overline{a} \in S_i/I_i$, $\overline{b} \in S_j/I_j, i \neq j$ e $\overline{a} = \overline{b}$ em S/I então $a - b \in I$. Como grau$(a) = i$, grau$(b) = j$, e I é um ideal homogêneo, segue que as componentes homogêneas de $a - b$ pertencem a I. Como tais componentes homogêneas são exatamente a e b, segue que $\overline{a} = \overline{0}$ e $\overline{b} = \overline{0}$. Disso segue que a soma em (5.10) é direta. Observe ainda que se $\overline{a} \in S_i/I_i$ e $\overline{b} \in S_j/I_j$ então $\overline{ab} \in S_{i+j}/I_{i+j}$, ou seja, $\frac{S_i}{I_i} \cdot \frac{S_j}{I_j} \subseteq \frac{S_{i+j}}{I_{i+j}}$. Desta forma, o anel S/I é graduado e podemos construir o espaço topológico Proj(S/I). O feixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-módulos definido por S/I será denotado por $\mathcal{O}_C$ e o chamaremos de o *feixe associado à curva* C.

Pela Proposição 4.26, feixificando a sequência exata curta de S-módulos

$$0 \to I \to S \to S/I \to 0,$$

obtemos a sequência exata curta de feixes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-módulos

$$0 \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_C \to 0. \tag{5.11}$$

Da sequência exata (5.11), pode-se provar que para cada aberto $D_+(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ temos o isomorfismo

$$\mathcal{O}_C(D_+(f)) \cong \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D_+(f))}{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2}(D_+(f))}.$$

Se $T \subseteq C$ é uma subvariedade de C e $J = \boldsymbol{I}(T)$ é o ideal de T em S, então $I \subseteq J$. A decomposição

$$\frac{J}{I} = \frac{J_0}{I_0} \oplus \frac{J_1}{I_1} \oplus \frac{J_2}{I_2} \oplus \cdots$$

é uma graduação de J/I. No espaço topológico Proj(J/I) podemos considerar o feixe $\widetilde{\left(\frac{J}{I}\right)}$, o qual denotaremos por $\mathcal{I}_{T,C}$. Observe que $\mathcal{I}_{T,C}$ é um feixe de $\mathcal{O}_C$-módulos.

Feixificando a sequência exata curta de S-módulos

$$0 \to I \to J \to J/I \to 0,$$

obtemos a sequência exata curta de feixes

$$0 \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \to \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2} \to \mathcal{I}_{T,C} \to 0. \tag{5.12}$$

Da sequência exata (5.12) conseguimos para cada aberto $D_+(f)) \subseteq \mathbb{P}^2$ o isomorfismo

$$\mathcal{I}_{T,C}(D_+(f))) \simeq \frac{\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(D_+(f)))}{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2}(D_+(f)))}.$$

Denotemos o conjunto singular de C por Σ.

Consideremos uma folheação de grau d de $\mathbb{P}^2$ induzida pela 1-forma

$$\Omega = A_0 dz_0 + A_1 dz_1 + A_2 dz_2.$$

Seja $\mathcal{S} = \mathrm{Sing}(\Omega)$ e suponha que $\mathcal{S} \cap C$ é finito.

Sejam $I := \langle F \rangle$, $L := \langle A_0, A_1, A_2 \rangle$ e $J := \langle \partial_0 F,\ \partial_1 F,\ \partial_2 F \rangle$. Observemos que $V(L) = \mathcal{S}$ e $V(J) = \Sigma$.

Considere o homomorfismo de S/I- módulos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \dfrac{J}{I}(m-1) & \longrightarrow & \dfrac{S}{I}(d+1) \\ \\ & \overline{\partial_i F} & \longmapsto & \overline{A_i} \qquad \text{para cada } i \in \{0,1,2\}. \end{array}$$

Sejam P, $Q \in J$ tais que $\overline{P} = \overline{Q}$ em $J/I(m-1)$. Por definição existe $H \in S$ tal que $P = Q + FH$. Escrevendo Q na forma

$$Q = B_0 \partial_0 F + B_1 \partial_1 F + B_2 \partial_2 F,$$

onde $B_0, B_1, B_2 \in S$ e usando a relação de Euler para F, temos que

$$P = \left(B_0 + \frac{Hz_0}{m}\right)\partial_0 F + \left(B_1 + \frac{Hz_1}{m}\right)\partial_1 F + \left(B_2 + \frac{Hz_2}{m}\right)\partial_2 F.$$

Logo

$$\phi(\overline{P}) = \overline{\left(B_0 + \frac{Hz_0}{m}\right)}\,\overline{A_0} + \overline{\left(B_1 + \frac{Hz_1}{m}\right)}\,\overline{A_1} + \overline{\left(B_2 + \frac{Hz_2}{m}\right)}\,\overline{A_2} =$$

$$= \overline{B_0}\,\overline{A_0} + \overline{B_1}\,\overline{A_1} + \overline{B_2}\,\overline{A_2} + \frac{\overline{H}}{m}\overline{(z_0 A_0 + z_1 A_1 + z_2 A_2)} = \overline{B_0}\,\overline{A_0} + \overline{B_1}\,\overline{A_1} + \overline{B_2}\,\overline{A_2} = \phi(\overline{Q}).$$

Portanto ϕ está bem definido.

A imagem de ϕ é o ideal

$$\mathrm{Im}\,\phi = \langle \overline{A_1},\ \overline{A_2},\ \overline{A_3} \rangle. \tag{5.13}$$

Considere agora o homomorfismo de S/I-módulos dado por

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \dfrac{S}{I}(d+1) & \rightarrow & \dfrac{S}{I+L}(d+1) \\ \\ & \overline{G} & \longmapsto & \overline{G}. \end{array}$$

Claramente ψ é um homomorfismo sobrejetivo e seu núcleo é

$$\ker\psi = \langle\,\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\,\rangle. \tag{5.14}$$

Das igualdades (5.13) e (5.14), concluímos que $\operatorname{Im}\phi = \ker\psi$, donde segue a exatidão da sequência de S/I-módulos

$$\frac{J}{I}(m-1) \xrightarrow{\phi} \frac{S}{I}(d+1) \xrightarrow{\psi} \frac{S}{I+L}(d+1) \longrightarrow 0. \tag{5.15}$$

Feixificando a sequência exata (5.15), obtemos a seguinte sequência exata de $\mathcal{O}_C$-feixes

$$\widetilde{\frac{J}{I}}(m-1) \xrightarrow{\phi} \widetilde{\frac{S}{I}}(d+1) \xrightarrow{\psi} \widetilde{\frac{S}{I+L}}(d+1) \longrightarrow 0. \tag{5.16}$$

Usando as igualdades

$$\widetilde{\frac{J}{I}}(m-1) = \mathcal{I}_{\Sigma,C}(m-1),\ \ \widetilde{\frac{S}{I}}(d+1) = \mathcal{O}_C(d+1) \text{ e } \widetilde{\frac{S}{I+L}}(d+1) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+1),$$

podemos reescrever a sequência (5.15) na forma

$$\mathcal{I}_{\Sigma,C}(m-1) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathcal{O}_C(d+1) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+1) \longrightarrow 0\,. \tag{5.17}$$

Provaremos agora que se C é invariante pela folheação induzida por Ω então a aplicação ϕ é injetiva. Suponhamos que C é invariante pela 1-forma Ω. Então pela Proposição 3.19 da página 46 vale a relação

$$\Omega\wedge dF = F\eta,\ \text{ onde } \eta \text{ é uma 2-forma.} \tag{5.18}$$

Sendo assim, para cada par (i,j), $0\le i<j\le 2$, existe polinômio homogêneo $G_{i,j}\in S$ tal que $A_i\partial_jF - A_j\partial_iF = FG_{i,j}$. Em particular, consideremos

$$A_1\partial_2F - A_2\partial_1F = FG_{1,2}, \tag{5.19}$$

$$A_0\partial_1F - A_1\partial_0F = FG_{0,1}, \tag{5.20}$$

$$A_0\partial_2F - A_2\partial_0F = FG_{0,2}. \tag{5.21}$$

Considere $\overline{C_0}\,\overline{\partial_0F} + \overline{C_1}\,\overline{\partial_1F} + \overline{C_2}\,\overline{\partial_2F} \in J/I(m-1)$ tal que

$$\phi(\overline{C_0}\,\overline{\partial_0F} + \overline{C_1}\,\overline{\partial_1F} + \overline{C_2}\,\overline{\partial_2F}) = \overline{0},$$

ou seja, $\overline{C_0}\,\overline{A_0} + \overline{C_1A_1} + \overline{C_2A_2} = \overline{0}$. Desta condição segue que existe um polinômio homogêneo $P \in S$ tal que

$$C_0A_0 + C_1A_1 + C_2A_2 = FP. \tag{5.22}$$

Multiplicando a relação (5.22) por $\partial_1 F$ obtemos

$$C_0A_0\partial_1 F + C_1A_1\partial_1 F + C_2A_2\partial_1 F = FP\partial_1 F.$$

Utilizando (5.19) e (5.20) ficamos com

$$C_0(A_1\partial_0 F + FG_{0,1}) + C_1A_1\partial_1 F + C_2(A_1\partial_2 F - FG_{1,2}) = FP\partial_1 F.$$

Agrupando os termos em A_1 e em F, podemos escrever

$$A_1(C_0\partial_0 F + C_1\partial_1 F + C_2\partial_2 F) = F(P\partial_1 F + G_{1,2}C_2 - G_{0,1}C_0). \tag{5.23}$$

De maneira similar, multiplicando (5.22) por $\partial_2 F$ e utilizando (5.19) e (5.21), obtemos

$$A_2(C_0\partial_0 F + C_1\partial_1 F + C_2\partial_2 F) = F(P\partial_2 F - G_{1,2}C_1 - G_{0,2}C_0). \tag{5.24}$$

Por último multiplicando a relação (5.22) por $\partial_0 F$ obtemos

$$C_0A_0\partial_0 F + C_1A_1\partial_0 F + C_2A_2\partial_0 F = FP\partial_0 F.$$

utilizando (5.20) e (5.21) ficamos com

$$C_0A_0\partial_0 F + C_1(A_0\partial_1 F - FG_{0,1}) + C_2(A_0\partial_2 F - FG_{0,2}) = FP\partial_0 F.$$

Agrupando os termos em A_0 e em F, podemos escrever

$$A_0(C_0\partial_0 F + C_1\partial_1 F + C_2\partial_2 F) = F(P\partial_0 F + G_{0,1}C_1 + G_{0,2}C_2). \tag{5.25}$$

Usando as relações (5.23), (5.24) e (5.25) podemos escrever

$$(C_0\partial_0 F + C_1\partial_1 F + C_2\partial_2 F) \cdot (A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2) = F\mu,$$

onde μ é a 1-forma

$$\mu = (P\partial_0 F + G_{0,1}C_1 + G_{0,2}C_2)dz_0 + (P\partial_1 F + G_{1,2}C_2 - G_{0,1}C_0)dz_1 + (P\partial_2 F - G_{1,2}C_1 - G_{0,2}C_0)dz_2.$$

Como $\mathcal{S} \cap C$ é finito, nenhuma componente de F pode dividir a 1-forma Ω. Disso segue que $F \mid (C_0\partial_0 F + C_1\partial_1 F + C_2\partial_2 F)$. Portanto

$$\overline{C_0}\,\overline{\partial_0 F} + \overline{C_1}\,\overline{\partial_1 F} + \overline{C_2}\,\overline{\partial_2 F} = \overline{0}$$

em $S/I(d-1)$ e ϕ é injetivo.

Portanto obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Sigma,\,C}(m-1) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathcal{O}_C(d+1) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+1) \longrightarrow 0. \tag{5.26}$$

Para o principal resultado desta seção, precisaremos de dois resultados auxiliares. Para cada feixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-módulos $\mathcal{F}$, denotaremos $h^j(\mathcal{F}) = \dim_k H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{F})$.

Lema 5.18. *Se T é um conjunto finito de pontos em $\mathbb{P}^2$, então $h^2(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) = 0$ para todo $i \geq -2$.*

Demonstração. A sequência exata curta

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow S \longrightarrow S/J \longrightarrow 0,$$

após ser feixificada e tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)$, fornece a sequência exata curta de feixes

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i) \longrightarrow \mathcal{O}_T(i) \longrightarrow 0. \tag{5.27}$$

O segundo homomorfismo em (5.27) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)(D_+(g)) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)(D_+(g)) \\ \frac{f}{g^s} &\longmapsto \frac{f}{g^s} \end{aligned}$$

enquanto o terceiro homomorfismo é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)(D_+(g)) &\longrightarrow \mathcal{O}_T(i)(D_+(g)) \\ \frac{f}{g^s} &\longmapsto \overline{\left(\frac{f}{g^s}\right)}. \end{aligned}$$

Tomando a sequência longa de cohomologia de (5.27), conseguimos

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_T(i)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_T(i)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_T(i)). \end{aligned}$$

Como T é finito, $\dim T = 0$, pela Proposição 4.32, página 78, temos $H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_T(i)) = 0$ para todo $j > 0$. Assim a parte final da sequência acima se torna

$$0 \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow 0.$$

Sendo a sequência exata, a aplicação central é injetiva e sobrejetiva. Desta forma, $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \simeq H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i))$. Pelo Teorema 4.33 da página 78,

$$H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3))^*.$$

Se $i \geq -2$ então $-i-3 \leq -1$ e $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3)) = 0$, ou seja, $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) = 0$. Escrevendo $h^2(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) := \dim_k H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i))$, conseguimos $h^2(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) = 0$. □

Antes de provarmos o próximo resultado, fazemos aqui a seguinte observação: Se V_1, V_2, V_3 são três espaços vetoriais sobre o mesmo corpo k tais que existe uma sequência exata

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3 \to 0,$$

então $\dim_k(V_2) = \dim_k(V_1) + \dim_k(V_3)$. Com efeito, $\dim_k(V_2) = \dim_k(\ker\psi) + \dim_k(\operatorname{Im}\psi)$. Mas sendo a sequência exata, ψ é sobrejetiva, isto é, $\operatorname{Im}\psi = V_3$ e $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Como $\dim_k(V_1) = \dim_k(\ker\varphi) + \dim_k(\operatorname{Im}\varphi)$ e φ é injetiva, temos $\dim_k(\operatorname{Im}\varphi) = \dim_k(V_1)$. Assim, provamos nossa afirmação.

Lema 5.19. *Se T é um subconjunto finito de uma curva $C \subset \mathbb{P}^2$ de grau m, então*

$$h^1(\mathcal{I}_{T,C}(i)) = h^1(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) + \epsilon, \ \textit{onde}\ \epsilon = \begin{cases} 1, & \textit{se} \quad i = m-3, \\ 0, & \textit{se} \quad i > m-3. \end{cases}$$

Demonstração. Sendo $J = \boldsymbol{I}(T)$ e $I = \boldsymbol{I}(C) = \langle F \rangle$, como $T \subset C$ então $I \subset J$. Feixificando a sequência exata curta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_{-m} & \longrightarrow & J & \longrightarrow & J/I & \longrightarrow & 0 \\ & & G & \longmapsto & FG & & & & \\ & & & & H & \longmapsto & \overline{H} & & . \end{array}$$

e tensorizando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)$, obtemos a sequência exata curta de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-feixes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m+i) \longrightarrow \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i) \longrightarrow \mathcal{I}_{T,C}(i) \longrightarrow 0. \tag{5.28}$$

Da sequência longa de cohomologia de (5.28), conseguimos a sequência exata

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i)) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i)) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Como $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i+m-2-1))^* = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i+m-3))^*$ e $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i+m-3)) = 0$ se $-i+m-3 < 0$, segue que $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) = 0$ se $i > m-3$.

Também, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) = 0$ pela Proposição 4.31 na página 77 e daí na sequência (5.29) conseguimos extrair a sequência exata

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i)) \longrightarrow 0, \text{ se } i > m-3.$$

Logo, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \simeq H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i))$, ou seja,

$$h^1(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) = h^1(\mathcal{I}_{T,C}(i)), \text{ para } i > m-3.$$

Agora, seja $i = m-3$. Sendo $m = $grau$(C) \geq 1$, temos $i \geq -2$. Pelo Lema 5.18 vale $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) = 0$ e conseguimos a sequência exata

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) \longrightarrow 0.$$

Dessa forma,

$$\dim_k(H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,C}(i))) = \dim_k(H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i))) + \dim_k(H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))).$$

Sendo $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})^* = k^* = k$, temos $\dim_k(H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))) = 1$ e portanto

$$h^1(\mathcal{I}_{T,C}(i)) = h^1(\mathcal{I}_{T,\mathbb{P}^2}(i)) + 1,$$

quando $i = m-3$. $\square$

Definição 5.20. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente em $\mathbb{P}^n_k$. Dado um inteiro s, dizemos que $\mathcal{F}$ é *s-regular* se $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(s-i)) = 0$ para todo inteiro positivo i. A *regularidade de Castelnuovo-Mumford*, ou simplesmente, *regularidade*, de $\mathcal{F}$, é o menor dos inteiros r tal que $\mathcal{F}$ é r-regular. Escreveremos $r = \mathrm{reg}(\mathcal{F})$.

Em [16], Theorem 5.2, pg.228 prova-se que existe algum s tal que $\mathcal{F}$ é s-regular, e em [9] mostra-se que se $\mathcal{F}$ é s-regular então $\mathcal{F}$ é t-regular, para todo inteiro $t \geq s$.

Definição 5.21. A regularidade de uma variedade $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é a regularidade de seu feixe de ideais, isto é, $r = \operatorname{reg}(\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k})$.

Exemplo 5.2. Quando V é uma hipersuperfície de grau m em $\mathbb{P}^n_k$, a regularidade de V é m. Se $V = \boldsymbol{V}(F)$, então feixificando o isomorfismo $S_{-m} \to I = I(V)$ dado por $G \mapsto F \cdot G$, obtemos o isomorfismo de feixes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \simeq \mathcal{I}_{V,\mathbb{P}^n}$ e dessa forma, para quaisquer inteiros positivos i e s temos $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{V,\mathbb{P}^n_k}(s-i)) = H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+s-i))$. Dessa maneira, pelo Corolário 4.34 na página 78, se $i \neq n$ então $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{V,\mathbb{P}^n_k}(s-i)) = 0$ para todo s. E se $i = n$, temos

$$H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{V,\mathbb{P}^n_k}(s-n)) = H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+s-n)) = H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-s-1))^*,$$

onde na última igualdade utilizamos o Teorema 4.33. Assim, $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{V,\mathbb{P}^n_k}(s-n)) = 0$ se, e somente se, $m - s - 1 \leq -1$, ou seja, se e somente se $s \geq m$.

Em particular, a regularidade de uma curva $C \subset \mathbb{P}^2$ é o seu grau.

Exemplo 5.3. Como $\mathcal{I}_{\emptyset,\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ e $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s-n)) \simeq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-s-1))^*$, que é nulo se e só se $s \geq 0$, temos que a regularidade do conjunto vazio é zero.

Usando esta noção de regularidade, encontramos mais uma resposta positiva para o Problema de Poincaré.

Teorema 5.22. *Seja $C \subset \mathbb{P}^2_k$ uma curva reduzida de grau m, onde k é um corpo de característica zero ou p, com $p \nmid m$. Denotemos por Σ o conjunto das singularidades de C e $\sigma := \operatorname{reg}(\Sigma)$ e $\rho := \sigma - m + 2$.*

Se C é invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ de grau d e $\mathcal{S} \cap C$ é finito, onde $\mathcal{S}$ é o conjunto de singularidades de $\mathcal{F}$, então

$$m \leq \begin{cases} d+1, & se \quad \rho \leq 0 \\ d+1+\rho, & se \quad \rho > 0. \end{cases}$$

Demonstração. Suponhamos $\rho \leq 0$. Então $m - 2 \geq \sigma$ e $\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^2}$ é $(m-2)$-regular, isto é, $H^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^2}(m-2-i)) = 0$ para todo $i > 0$. Em particular, $h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^2}(m-3)) = 0$.

Do Lema 5.19, temos $h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(m-3)) = 1$. Em [12], equação (2.2.2) verifica-se que vale a igualdade $h^1(\Omega^1_C) = h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(d-3)) = 1$, e de [11], Corollary 4.5 segue-se que vale $h^1(\mathcal{O}_C(d-1)) = 0$.

Suponhamos agora que $\rho > 0$. Então $\sigma > m-2$ e usando o Lema 5.19 para $i = \sigma - 1$ ficamos com

$$h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-1)) = h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^2}(\sigma-1)).$$

Pela definição de regularidade, temos $h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^2}(\sigma-1)) = 0$ e assim vale também que

$$h^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-1)) = 0. \tag{5.30}$$

Sendo $\mathcal{S} \cap C$ finito temos por (5.26) a sequência exata de feixes

$$0 \to \mathcal{I}_{\Sigma,C}(m-1) \to \mathcal{O}_C(d+1) \to \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+1) \to 0. \tag{5.31}$$

Tensorizando a sequência (5.31) por $\mathcal{O}_C(\rho-2)$ e tomando a sequência longa de cohomologias obtemos a sequência exata

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-1)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_C(d+\rho-1)) \to H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+\rho-1)) \to$$

$$\to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-1)) \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_C(d+\rho-1)) \to H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+\rho-1)).$$

Por (5.30), $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-1)) = 0$ e $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(d+\rho-1)) = 0$ pois $\dim(\mathcal{S}\cap C) = 0$ e dessa forma, $h^1(\mathcal{O}_C(d+\rho-1)) = 0$.

Dado um inteiro $i > 0$, tensorizando a sequência exata curta (5.11) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)$, lembrando que $\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m)$ pelo Exemplo 5.2, conseguimos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i) \longrightarrow \mathcal{O}_C(i) \longrightarrow 0.$$

Tomando a sequência exata longa de cohomologia da sequência exata acima, obtemos a sequência exata

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_C(i)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)). \tag{5.32}$$

Do Corolário 4.34, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) = 0$, $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3))^* = 0$ pois $i > 0$ e $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-m)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-i-3))^*$. Assim, a sequência exata (5.32) nos dá $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_C(i)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-i-3))^*$. Portanto,

$$\rho \leq 0 \Rightarrow h^1(\mathcal{O}_C(d-1)) = 0 \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-3-d+1)) = 0 \Rightarrow m-d-2 < 0 \Rightarrow m \leq d+1$$

$$\rho > 0 \Rightarrow h^1(\mathcal{O}_C(d+\rho-1)) = 0 \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-3-d-\rho+1)) = 0 \Rightarrow m \leq d+1+\rho,$$

pois $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(j)) = 0 \Leftrightarrow j < 0$. □

Exemplo 5.4. Seja C uma curva plana projetiva de grau m, invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau d. Se $m = 1$, como $d \geq 0$ temos trivialmente $m \leq d+1$. Suponhamos então $m \geq 2$. Se C é suave, então $\mathrm{Sing}(C) = \emptyset$ e pelo Exemplo 5.3 temos, na notação do Teorema 5.22, $\sigma = 0$ e $\rho = \sigma - m + 2 \leq 0$. Daí, o Teorema 5.22 nos fornece $m \leq d+1$. Portanto, o Teorema 5.22 generaliza o Teorema 5.17.

Terminamos observando que a limitação para o grau apresentada no Teorema 5.22 envolve a regularidade da curva C, uma vez que a regularidade da curva em $\mathbb{P}^2$ é o seu grau. Em [7], Joana Cruz generaliza este resultado em $\mathbb{P}^n_k, n > 2$, da seguinte maneira:

Teorema 5.23. *Seja $C \subset \mathbb{P}^n_k$ uma curva, $n \geq 2$. Suponha que C é reduzida, aritmeticamente Cohen-Macaulay, subcanônica e de grau m. Assuma que k é um corpo algebricamente fechado e de característica $p \geq 0$ com $p \nmid m$. Sejam Σ o subesquema das singularidades de C, $\sigma := \mathrm{reg}(\Sigma)$, $r := \mathrm{reg}(C)$ e $\rho := \sigma - r + 2$. Suponha que C é uma curva invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^n_k$ de grau d. Se $\dim(\mathcal{S} \cap C) = 0$, onde $\mathcal{S}$ é o lugar singular do campo, então*

$$r \leq \begin{cases} d+1, & se \quad \rho \leq 0 \\ d+1+\rho, & se \quad \rho > 0. \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

[1] M.F. ATIYAH,M.F ; MACDONALD,I.G. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[2] BAHIA, F.; FERRER, V. *Folheações de grau um no plano projetivo e matrizes de traço nulo.* V bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[3] BRUNELLA and MENDES,L. Bounding the degree of solutions to Pfaff equations. *Publicacions Matemátiques, Vol. 44*, p. 593–604, 2000.

[4] CAMPILLO,A.; CARNICER, M. Proximity inequalities and bounds for the degree of invariant curves by foliations of $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. *Transactions of the American Mathematical Society Volume 349*, p. 2211–2228, 1997.

[5] CARNICER,M. The Poincare Problem in the nondicritical case. *Annals of Mathematics 140*, p. 289–294, 1994.

[6] CERVEAU,D. ; LINS NETO,A. Holomorphic foliations in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ having an invariant algebraic curve. *Annales de L'Institut Fourier 41*, p. 883–903, 1991.

[7] CRUZ, Joana D.A.S. *Conjuntos Algébricos Invariantes de Folheações no Espaço Projetivo.* Tese (Doutorado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2006.

[8] EISENBUD, D. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics 150. Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] ESTEVES, Eduardo. *Construção de Espaços de Moduli.* IMPA, 1997.

[10] ESTEVES, Eduardo. The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space. *Math. Res. Lett. 9*, p. 1–15, 2002.

[11] ESTEVES, E. ; KLEIMAN,S. Bounding solutions of Pfaff equations. *Communications in Algebra 31 n^o 8*, 2003.

[12] ESTEVES,E. ; KLEIMAN,S. Bounds on leaves of foliations of the plane. *Contemporary Mathematics AMS 354*, p. 57–67, 2003.

[13] ESTEVES,E. ; KLEIMAN,S. Bounds on leaves of one-dimensional foliations. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 34*, p. 145–169, 2003.

[14] FERRER,V. *Aspectos enumerativos de Folheações Holomorfas.* Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

[15] FULTON,W. *Algebraic Curves.* W.A.Benjamin, 2008. Disponível em <http://www.math.lsa.umich.edu/∼wfulton/CurveBook.pdf>

[16] HARTSHORNE,R. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, New York, 1977.

[17] KUNZ,E. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.* Birkhauser, Boston, 1985.

[18] LINS NETO, Alcides ; SCARDUA, Bruno. *Folheações Algébricas Complexas.* IMPA, 1997.

[19] MATSUMURA,H. *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[20] PEREIRA, Jorge Vitório. On the Poincaré Problem for foliations of general type. *Preprint,IMPA*, 2001.

[21] POINCARÉ,H. *Sur l'intégration algébrique des équations differentielles du premier ordre et du premier degré.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 5, 1891.

[22] SHAFAREVICH,I. *Basic algebraic geometry 1 : varieties in projective space.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[23] SOARES, Márcio. The Poincaré Problem for hypersurfaees invariant by one-dimensional foliations. *Inventiones mathematicae. 128*, p. 495–500, 1997.

[24] SOARES, Márcio. Projective varieties invariant by one-dimensional foliations. *Annals of Mathematics, 152*, p. 369–382, 2000.

[25] SPRINGER,T.A. *Linear Algebraic Groups*. Birkhauser, 1998.

[26] UENO, Kenji. *Algebraic geometry 1 : from algebraic varieties to schemes.* Translations of mathematical monographs 185. American Mathematical Society, 1999.

[27] UENO, Kenji. *Algebraic geometry 2 : sheaves and cohomology.* Translations of mathematical monographs 197. American Mathematical Society, 1999.

[28] UENO, Kenji. *Algebraic geometry 3 : further study of schemes.* Translations of mathematical monographs 218. American Mathematical Society, 1999.