REPENSANDO O ENSINO DE ANÁLISE: REAÇÕES, IMPRESSÕES E MODIFICAÇÕES NAS IMAGENS DE CONCEITO DE ALUNOS FRENTE A ATIVIDADES DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Valter Costa Fernandes Junior

Juiz de Fora (MG)

Outubro, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

VALTER COSTA FERNANDES JUNIOR

REPENSANDO O ENSINO DE ANÁLISE: REAÇÕES, IMPRESSÕES E MODIFICAÇÕES NAS IMAGENS DE CONCEITO DE ALUNOS FRENTE A ATIVIDADES DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

JUIZ DE FORA – MINAS GERAIS
Outubro, 2014

Valter Costa Fernandes Junior

REPENSANDO O ENSINO DE ANÁLISE: REAÇÕES, IMPRESSÕES E MODIFICAÇÕES NAS IMAGENS DE CONCEITO DE ALUNOS FRENTE A ATIVIDADES DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Orientador

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Convidado externo UFOP

Prof. Dr. Marco Antônio Escher

Convidado interno UFJF

Dedico este trabalho à minha mãe, que não se encontra mais entre nós, pelo incentivo ao estudo. Também dedico à minha noiva, familiares e amigos, que estão sempre comigo, torcendo e apoiando.

AGRADECIMENTOS

Aos meus falecidos pais, Valter e Valéria, por terem me dado o suporte e o apoio para chegar a este momento e serem os responsáveis pela pessoa que sou hoje.

Agradeço as minhas avós, Emiliane e Luzia, pelo carinho e aconchego. Não deixando de lembrar também do senhor Eduardo, que o considero como um avô e que sempre me apoiou.

À minha irmã, que me ajudou nos momentos difíceis durante essa caminhada e compartilhou, entre outras coisas, vitórias e derrotas do nosso Vasco.

A todos os familiares que me ajudaram e torceram por mim.

A minha noiva Aline, que esteve sempre presente nesta caminhada, apoiando, incentivando e não deixando que os tropeços me vencessem. Amuuuu.

Às minhas cunhadas, Ângela Mara e Mariane, que além do apoio, ajudaram nas orientações de alguns trabalhos e também me incentivaram bastante na busca deste objetivo.

Ao senhor Manoel e à dona Angelina, por me tratarem como um filho e torcerem pelo meu sucesso.

À família Freitas, pela amizade de longa data, em especial à Fabielli, colega de trabalho e amiga que, além de podermos conversar sobre educação, gentilmente fez a tradução do resumo deste trabalho.

Aos companheiros de turma, que além do aprendizado por meio de trocas de experiências, e do bom convívio e ambiente, oportunizaram que essa etapa fosse leve e agradável.

A todos os amigos, aqueles que, por meio de uma simples conversa, numa pelada, ou até mesmo por um cumprimento, fizeram parte dessa história.

Ao professor orientador Orestes Piermatei Filho, por acreditar que seria possível a realização deste trabalho. Obrigado pelas conversas informais e formais e por todos os ensinamentos.

A todos os professores do Mestrado que contribuíram para minha formação profissional.

Aos professores Doutores Antônio Olímpio (*in memorian)*, Frederico Reis e Marco Antônio Escher, agradeço pelas grandes contribuições dadas ao meu trabalho e ensinamentos durante qualificação e defesa.

A todos vocês,
Muito Obrigado!

Valter Costa

RESUMO

Este trabalho introduz, primeiramente, uma reflexão a respeito da forma como a disciplina Análise vem sendo trabalhada há algum tempo. Para esta reflexão trazemos em nossa revisão de literatura pesquisas envolvendo o processo de ensino-aprendizagem nessa disciplina. Como referencial teórico adotado, apresentamos trabalhos sobre a teoria de Imagens de Conceito e Definição de Conceito que se encontram na linha de pesquisa do Pensamento Matemático Avançado. Conjuntamente, apresentaremos uma pesquisa de campo que teve como objetivo verificar e analisar as modificações nas imagens de conceito de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática durante a aplicação de atividades de ensino sobre sequências de números reais, na perspectiva da disciplina Análise. Através de uma análise qualitativa, pudemos refletir sobre a aplicação das atividades de ensino - reflexão esta que leva em conta todo o processo e até mesmo a postura dos alunos frente às atividades. Outros pontos abordados neste trabalho foram as reações e impressões dos alunos ante a esta disciplina e o modo como eles lidam com a formalização dos conteúdos, que é o objetivo principal da mesma e o que a diferencia da disciplina de Cálculo. Nossa proposta teve como objetivo deixar os alunos pensarem nas questões e construírem os resultados, onde as intervenções feitas pelo pesquisador objetivavam orientá-los no processo de resolução ou em um momento extremo, para depois de já terem esgotado as discussões e orientações, apresentá-los o resultado. Desse modo, pretendemos explorar as várias representações que um objeto matemático pode assumir. Sendo assim, buscamos durante a realização das atividades sugerir e incentivar os mesmos a utilizarem as representações gráficas (reta numérica ou plano cartesiano), para que pudessem relacioná-las com as representações algébricas. Além do objetivo de relacionar as duas representações ditas acima, buscamos proporcionar um ambiente favorável ao entendimento das demonstrações formais, que normalmente é decorada pelos alunos.

Palavras-chave: Imagens de conceito, ensino-aprendizagem de Análise, Pensamento Matemático Avançado.

ABSTRACT

This paper introduces a debate about the way the subject Analysis has been developed for some time now, using researches involving the teaching and learning process to make this discussion. Studies about the theory of Concept Imagens and Concept Definition, both found in the Advanced Mathematical Thinking line of research, will be used as theoretical background. A field work will be also presented, aiming to verify and analyze the changes in the concept images of Licentiateship in Mathematics students, during an application of teaching activities over sequences of real numbers, on the Analysis perspective. Through a qualitative analysis, a reflection on the implementation of educational activities could be performed, considering the whole process and even the attitude of students at facing the activities. Other points discussed in this study were the reactions and impressions of students when facing this subject and how they deal with the formalization of contents, which is perhaps the main purpose of it and what distincts Analysis from the Calculus subject. The principal proposal aimed is to let students think about the issues involved and build results on their own. The interventions made by the researcher intended to guide them in the resolution process or in an extreme point, after having already exhausted their discussions and orientations, to present them the results. Thus, we intend to explore the various representations that a mathematical object can take. Therefore, we seek during the realization of activities suggest to students and encourage them to use the graphical representations (number line or coordinate plane), so they could relate them to algebraic representations. In addition to this previous objective, we strive to provide a favorable environment for the understanding of formal statements, which is usually memorized by the students.

Key-words: Concept Images, Analysis teaching and learning, Advanced Mathematical Thinking.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Trajetória acadêmica

Podemos dizer que minha trajetória acadêmica se inicia com curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF, principiado em 2007 e concluído em 2010, com mais um ano de extensão. O curso oferecia duas graduações, licenciatura e bacharelado, sendo que no terceiro período escolhi seguir pela licenciatura.

Apesar de decidir seguir a carreira docente, o formato do curso e as metodologias eram para a formação de matemáticos e não de educadores matemáticos, ainda que na grade do curso existissem disciplinas voltadas para a educação. Por isso, e até mesmo por afinidade à época, minha formação como professor foi relegada a um segundo plano. Nos três últimos períodos, cursei as disciplinas de Matemática Escolar e assim iniciou-se meu contato com a Educação Matemática, ainda que discreto no começo.

No último período do curso, cursando a disciplina Matemática Escolar III, ao fazer um trabalho encontrei prazer em pesquisar e buscar referenciais. Este talvez tenha sido o primeiro trabalho que havia feito em um formato próximo ao de pesquisador. O tema, a forma como fui orientado (pelo professor da disciplina) a pesquisar e a busca por materiais que dessem validade à minha pesquisa, foram os fatos reveladores para mim, além de ter descoberto o gosto pela pesquisa em Educação Matemática.

Outro fato importante em minha graduação foi a experiência como monitor da disciplina Cálculo I. Vivenciar as dificuldades dos alunos que me procuravam contribuiu para que eu levantasse algumas questões sobre o assunto. Como fui monitor durante três anos e meio, pude observar uma grande diversidade tanto nas características dos discentes quanto nos aspectos que dificultavam a aprendizagem dos mesmos.

Foi durante a disciplina de Análise que surgiu a motivação de estudar o processo de ensino-aprendizagem no Ensino Superior. Notei que quase todos os que faziam a disciplina se preocupavam em memorizar demonstrações de teoremas e exercícios prontos. Em uma das provas, aplicadas para a minha turma, o professor mudou uma das hipóteses de um teorema, e aqueles que memorizaram acabaram errando o exercício. A pressão de ser aprovado na disciplina força os alunos primeiramente a “sobreviverem”, tomando práticas que pouco envolvem o verdadeiro aprendizado; o problema é a que custo isso ocorre. Será que é dessa forma que se deseja que os alunos sejam aprovados na disciplina?

Acredita-se que o objetivo em todas as disciplinas seria favorecer a aprendizagem dos alunos, e, no caso da Análise, entender e manipular as definições, os teoremas e a formalização nas demonstrações. Assim, surge a questão: “como abordar os conteúdos de Análise de forma que tal abordagem contribua para a compreensão dos discentes?”.

1.2 Questão de pesquisa e objetivos

A questão de pesquisa deste trabalho buscou interpretar **como atividades de ensino de sequências de números reais podem modificar as imagens de conceito de alunos de Análise na Reta?**

O objetivo principal da pesquisa é verificar como se modificam as imagens de conceito de um indivíduo em relação aos conteúdos de sequências de números reais.

Alguns objetivos específicos podem ser pontuados:

- Verificar se os alunos conseguem entender de forma significativa os conteúdos;
- Verificar se os alunos conseguem formalizar os conteúdos e compreender as formalizações que são apresentadas a eles;
- Verificar as impressões e reações dos alunos frente à disciplina Análise na Reta.

1.3 Organização do trabalho

Antes de falarmos da disposição dos capítulos e do que tratam, precisamos esclarecer alguns aspectos deste trabalho. Primeiro, quando falarmos na disciplina Análise, estaremos nos referindo à disciplina Análise na Reta, que seria um primeiro curso de Análise. Outro ponto importante a se destacar é que nosso referencial teórico trata de conceitos originalmente chamados de *concept images* e *concept definition,* que nós utilizaremos de acordo com a tradução de Giraldo (2004), qual seja **imagens de conceito** e **definição de conceito**. Cabe destacarmos que outros autores traduzem tais termos como imagens conceituais e definição conceitual.

O capítulo 2 deste trabalho trará o referencial teórico de nossa pesquisa, que são as ideias e os conceitos que nos darão o suporte na tarefa de investigar. O referencial teórico bem construído é muito importante, pois é a forma como iremos olhar para os dados da pesquisa. Cada referencial lança um olhar diferenciado para o objeto de pesquisa, pois ele pode influenciar também na questão da pesquisa e nos objetivos, ou seja, na forma como queremos analisar e sobre o que queremos analisar. Dessa forma, no capítulo 2, iniciamos por um breve levantamento sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, o Ensino de Análise e o Pensamento Matemático Avançado, até apresentarmos as teorias de imagens de conceito e definição de conceito, concluindo com o que essas teorias sugerem para nossa metodologia de pesquisa.

No capítulo 3, faremos uma breve análise do que venha a ser pesquisa em Educação Matemática. Apresentaremos algumas concepções sobre pesquisa qualitativa, nossos objetivos, o questionário inicial e as tarefas. Descreveremos também os eixos de análise e nossas intenções de pesquisa. Por meio de uma abordagem qualitativa, pretendemos realizar esta pesquisa de forma a acompanhar o processo e as reações dos seres humanos envolvidos.

O capítulo 4 trará a descrição e a análise de nossas atividades de pesquisa. À luz do referencial teórico, levantaremos respostas e acontecimentos que julgarmos serem importantes para as análises, de acordo com os eixos a serem analisados. Dessa forma, serão selecionados para análise e reflexão qualquer resposta ou comentário que, de alguma forma, mostrar modificações nas imagens de conceito dos participantes da pesquisa, tentativa de resolução utilizando representações geométricas, a tentativa de formalização dos resultados e reações frente ao conteúdo exposto ou mesmo à disciplina Análise.

As considerações finais trarão algumas reflexões sobre os eixos de análise da pesquisa. Além disso, relataremos algumas situações que nos incomodaram durante o trabalho, desde o planejamento até a aplicação das atividades de ensino. É importante compreendermos que essas situações só puderam ser diagnosticadas e repensadas depois de uma análise da pesquisa como um todo.

2 CONSTRUINDO O REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sobre a Educação Matemática no Ensino Superior

Se a área Educação Matemática é um campo científico e profissional novo, o interesse de uma parcela significativa em investigar os processos de ensino-aprendizagem no ensino superior é ainda mais recente. De acordo com Pinto (2002),

> a pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior vem se desenvolvendo há vários anos no país e no exterior; o número de alunos que estão se matriculando nas universidades e no ensino médio tem crescido, o que coloca questões desafiadoras a professores e pesquisadores. Embora tais questões tenham despertado interesse em grupos restritos até bem pouco tempo, o número de doutores nessa área vem crescendo (PINTO, 2002, p. 224).

Com a massificação do Ensino Superior, decorrente do aumento da oferta de vagas, surge a necessidade de uma reforma no sistema de educação para atender a essa demanda – pois durante muito tempo o ingresso no Ensino Superior era privilégio de uma elite, onde problemas no ensino e aprendizagem eram “insignificantes” – que, de uma forma geral, traz defasagens do Ensino Médio.

As pesquisas voltadas para as questões dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior se intensificam no Brasil por volta do ano 2000. Conforme Pinto,

> em nosso país, o primeiro encontro de pesquisadores nessa área aconteceu em 2000, durante o *I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, em Serra Negra, São Paulo, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Nessa oportunidade, constituiu-se o primeiro Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior, coordenado pela Dra. Lilian Nasser, do Instituto de Matemática – UFRJ (PINTO, 2002, p. 224).

Pinto cita ainda que, no panorama mundial, a pesquisa nesse nível de ensino “também se consolidou mais tarde: a partir da década de 80, com a constituição de grupo (Advanced Mathematical Thinking Group) durante encontro anual do

International Group for the Psychology of Mathematics Education" (PINTO, 2002, pg. 224).

Outro aspecto interessante que observamos na história é que as ações governamentais sempre tiveram como foco o Ensino Básico. As questões relacionadas ao Ensino Superior eram sobre a formação dos professores, para que esses atendessem melhor o público do Ensino Básico.

A constituição da Educação Matemática como campo científico ajudou a valorizar e reverter esse quadro, mas, de acordo com Pinto,

> L. Nasser analisa que a reversão desse quadro se deve não só ao reconhecimento da Educação Matemática como área de pesquisa, como também ao número de doutores nessa área que vêm atuando nas universidades e às tentativas de introdução de novas tecnologias no cotidiano da sala de aula (PINTO, 2002, p. 224).

Entendemos que a quantidade de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem no Ensino superior ainda é pequena se comparada com os dois níveis do Ensino Básico. Mas podemos perceber alguns avanços, como a teoria do Pensamento Matemático Avançado, que é referência para a maioria dos trabalhos, a exemplo deste trabalho.

2.2 Sobre o Ensino de Análise

A produção bibliográfica brasileira relacionada ao ensino de Análise é ainda recente. A primeira literatura que abordaremos é a de Otero-Garcia (2011), que traz uma pesquisa dividida em duas etapas. Segundo o autor, a primeira é o mapeamento dos trabalhos brasileiros relativos ao ensino de Análise e, a segunda, um levantamento de como vem se estruturando a disciplina no programa dos cursos da Universidade Estadual Paulista – UNESP e da Universidade de São Paulo – USP.

A metodologia de Otero-Garcia (2011) para a primeira etapa foi a realização de um *estado do conhecimento,* enquanto que a segunda etapa foi puramente documental. Sua análise de resultados é apresentada de forma qualitativa e quantitativa. Qualitativa, ao levantar questões e discussões sobre os trabalhos; quantitativa ao nos fornecer números a respeito da pesquisa.

O autor divide os trabalhos sobre ensino de análise, por ele mapeados, em 4 temas: Formação de Professores, Processos Cognitivos e Linguísticos, História da Matemática e Cultura, Avaliação. E ressalta a falta de outros possíveis temas como filosofia, modelagem, novas tecnologias e educação à distância.

Através da pesquisa de Otero-Garcia (2011) notamos que são recentes as questões sobre a temática envolvendo o ensino de análise e, de acordo com o mesmo, os primeiros trabalhos publicados no Brasil foram o de Reis (2001) e o de Pinto (2001). Conforme o próprio autor,

> O primeiro artigo em periódico aparece em 2002, portanto, vinte e seis anos desde a publicação do primeiro volume do mais antigo periódico de educação matemática brasileiro.
> Assim, é fácil observar que a produção brasileira sobre o ensino de análise é relativamente recente. O mais antigo trabalho, Reis (2001), tem apenas nove anos (OTERO-GARCIA, 2011, p.106).

Utilizando ainda o trabalho de Otero-Garcia (2011), podemos notar que a quantidade de trabalhos relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior é muito pequena, e que nesse grupo temático as produções sobre o ensino de Análise são menor ainda, já que as preocupações maiores têm sido com as disciplinas de Cálculo. Segundo Otero-Garcia,

> [...] nas quatro edições do SIPEM, particularmente no tocante do Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior, dos 69 trabalhos desse GT, apenas cinco versavam sobre o ensino de análise. No caso do cálculo, foram 21 trabalhos ao longo desses quatro eventos e para a álgebra linear, 7 (OTERO-GARCIA, 2011, p.109).

> [...] pudemos notar que é bastante limitada a quantidade de trabalhos existentes dentro da região de inquérito que denominamos de ensino de análise [...].
> A nossa primeira análise [...] mostrou que a formação dos pesquisadores dos trabalhos analisados e o pouco tempo que se tem pesquisado a temática, exibem que a pesquisa em ensino de análise ainda está engatinhando, praticamente irrisória se comparada ao volume total de estudos dentro do campo *Educação Matemática no Ensino Superior* [...] (OTERO-GARCIA, 2011, p. 139) (grifo do autor).

Diante dessa situação, Otero-Garcia nos mostra que a demanda pelos cursos de Álgebra Linear e, principalmente, de Cálculo, presentes em quase todos os cursos de ciências exatas, seria a causa pelas poucas pesquisas sobre o ensino de Análise, que possui uma baixa demanda.

Sobre a segunda etapa do trabalho do referido estudioso, a pesquisa nos mostrou como se deu a constituição da disciplina de Análise, conforme os padrões atuais, nos cursos de matemática da USP e do IGCE da UNESP. O autor analisou ementas, bibliografias e objetivos, levantando questionamentos sobre esses três aspectos, principalmente ao terceiro.

Assim sendo, essa dissertação foi muito importante em nossa leitura, pois, por meio dela, pudemos identificar e analisar o que vem sendo feito sobre o ensino de Análise no Brasil. O texto abrange quase todas as pesquisas realizadas com o problema em questão até o presente momento, pois é um trabalho recente. Assim, decidimos seguir as literaturas levantadas e mapeadas por Otero-Garcia (2011).

Reis investiga a tensão entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo e de Análise por meio da análise de manuais didáticos e entrevistas com quatro professores que, segundo o autor, “destacam-se nesta área, como autores de estudos e livros didáticos” (REIS, 2001, p. 5).

O autor traz aspectos históricos e epistemológicos que permitem entender as diferenças entre as duas áreas, tanto em relação às suas características quanto em suas abordagens pedagógicas. Notemos que, em geral, os currículos de ambas são iguais, e o que difere é a forma como os conteúdos são tratados. De acordo com Reis (2001),

> [...] os tópicos fundamentais de um curso de Análise são os mesmos de um curso de Cálculo. Entretanto, se no Cálculo os temas são abordados sob uma perspectiva aplicativa, com a interpretação intuitiva das noções, na Análise eles são abordados, geralmente, sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos objetos estudados (REIS, 2001, p.24).

É importante destacarmos também a questão da influência que exercem os aspectos históricos e epistemológicos no ensino atual de Cálculo e Análise. Como cita Reis (2001),

> Portanto, como a questão central da pesquisa nos remete à necessidade de identificar elementos da história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise que influenciam o ensino atual, acreditamos que autores de artigos e livros didáticos reúnem condições de

> relacionar os fatos históricos com a sua influência no ensino, isto é, relacionar o “lá e então“ com o “aqui e agora” (REIS, 2001, p.31).

Nesse sentido, os ensinos de Cálculo e Análise atualmente são heranças históricas, como por exemplo, o fato de os conteúdos de Análise serem tratados com muito rigor e formalismo, atualmente, seja consequência da fundamentação dessa área como uma abordagem rigorosa para o Cálculo.

Conforme as investigações de Reis (2001) que também abordam as questões sobre a formação de professores relacionando-as com a pesquisa, busca-se compreender como os docentes administram os níveis de rigor na Análise e de intuição no Cálculo. As questões levantadas pelo autor – como o lugar da Análise nos cursos de licenciatura; se esta é necessária para quem vai atuar como professor no Ensino Básico; e mesmo as abordagens pedagógicas dos docentes no ensino superior – nos fazem refletir sobre a forma como vem sendo trabalhados esses conteúdos de Análise. Parece existir uma tradição para a abordagem pedagógica, pela forma como vem sendo trabalhada há algum tempo, não importando, da mesma maneira, as características do curso. Um exemplo dessa situação é a forma como os conteúdos são trabalhados igualmente nos cursos de licenciatura e bacharelado, com uma abordagem completamente formalista.

Reis, em um outro trabalho publicado em 2009 apresenta uma pesquisa teórica-bibliográfica realizada em sua tese para investigar a influência histórica da Aritmetização da Análise na prática do professor. Esse trabalho é uma extensão de sua tese, onde o autor se estende um pouco mais nos debates envolvendo as relações entre história e o ensino de Análise.

Brito (2010) investigou a forma como são abordados os conteúdos de Análise, em especial os conjuntos numéricos. Por meio de uma pesquisa teórico-bibliográfica, o autor nos apresenta algumas considerações a respeito dessa disciplina. Dentre essas considerações, destacamos: o grande número de reprovações; o não aprendizado por parte dos alunos, fazendo com que grande parte deles tentem decorar os resultados na tentativa de evitar a reprovação; a forma como o professor trabalha o conteúdo e a interferência que o mesmo pode provocar, aumentando ainda mais a resistência dos alunos à disciplina e até a evasão; o equilíbrio entre o rigor e a intuição; e, por fim, metodologias alternativas, propondo mudanças na forma de ministrar os conteúdos.

Brito (2010) também faz uma pesquisa documental para investigar a forma como os livros didáticos, utilizados nos cursos de Análise, apresentam o conteúdo Conjuntos Numéricos. O autor ainda traz uma pesquisa de campo realizada com alunos do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Superior de Educação Ibituruna (ISEIB), em Montes Claros – MG.

As categorias de análises dos livros didáticos foram: ideias dos autores, retiradas dos prefácios dos livros; a forma como os livros abordam o tópico Conjuntos Numéricos, se apresentam elementos históricos, a natureza dos exercícios, e como é desenvolvido o assunto. As ideias dos autores retiradas do prefácio de cada livro visam recolher informações sobre como determinado autor enxerga a Matemática, e quais conceitos possuem a respeito do conhecimento matemático. Os livros selecionados para o estudo foram:

- **Análise Matemática para Licenciatura**, de Geraldo Ávila. São Paulo: Edgard Blücher, 2006;
- **Análise Real** – Volume 1, de Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: IMPA, 1993;
- **Análise I**, de Djairo Guedes de Figueiredo. Campinas: UNICAMP, 1996;
- **Lições de Álgebra e Análise**, de Bento de Jesus Caraça. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

A proposta elaborada por Brito teve por finalidade utilizar aspectos históricos que envolvem o desenvolvimento dos conjuntos numéricos e com uma abordagem que, segundo o autor, “caminhe da intuição para o rigor de uma maneira suave e contínua” (BRITO, 2010, p.45).

A proposta didática do pesquisador supracitado consiste em 5 atividades, cada uma com objetivos específicos e relacionadas a um tópico do conteúdo de Conjuntos Numéricos. As atividades são compostas por alguns exercícios retirados dos livros analisados pelo autor e, segundo o próprio, alguns elaborados por ele mesmo.

A pesquisa de campo consistiu, então, nas análises de três questionários e das atividades propostas por Brito (2010). Um questionário inicial foi aplicado antes da realização das atividades, o segundo (questionário de avaliação das atividades) foi aplicado ao final da quinta atividade e o terceiro (questionário final) foi aplicado ao final do projeto. Para completar a análise da pesquisa, Brito utilizou um diário de pesquisa para descrever as situações vividas durante a aplicação de sua proposta metodológica, principalmente as reações e impressões dos alunos frente às atividades.

As principais contribuições do trabalho de do estudioso foram: as discussões sobre a postura do professor frente ao desafio de ministrar a disciplina Análise rompendo com o dogmatismo; as análises dos livros didáticos de Análise e; a proposta de ensino rompendo com o ensino tradicional vigente.

Pasquini (2007) também elucida questões importantes que direta ou indiretamente fazem parte de nosso trabalho. Primeiro, as questões envolvendo os cursos de formação de professores e, segundo por ter como foco o ensino de Números Reais. Apontando problemas por meio de análise de literatura, a autora discute a forma como é abordado o conteúdo de Números Reais para professores ou futuro professores, bem como a interferência/influência em suas práticas pedagógicas.

Em relação à abordagem do conteúdo em questão, Pasquini (2007) comenta que essa não leva em conta os aspectos históricos pelo qual se formalizou o conjunto dos Números Reais. Para a autora, a forma vigente de ensino é baseada na axiomática, onde os Números Reais são definidos como um corpo ordenado completo. A problemática nesta abordagem, segundo Pasquini, está no fato de uma parcela grande de alunos não entenderem ou dominarem por completo esse conteúdo, ficando muitas lacunas e dúvidas.

Assim, a proposta da pesquisadora neste trabalho foi investigar as potencialidades de uma abordagem para Números Reais, baseada no processo histórico, a partir do qual ela se utiliza medições de segmentos como ponto de partida para o ensino deste conteúdo. Conforme Pasquini,

> [...] eu pretendo, neste trabalho, investigar a utilização de uma proposta de tratamento do número real, via medição de segmentos, buscando por possibilidades dessa abordagem em uma sala de aula na disciplina Análise, para cursos de formação de professores de Matemática (PASQUINI, 2007, p.6).

Sobre o aspecto histórico no ensino de Análise, a estudiosa comenta também que:

> Essa é uma questão em discussão no campo de pesquisa da Educação Matemática, e de nosso total interesse. Podemos

> encontrar alguns trabalhos que apontam para direcionamentos, como o de Batarce (2003), que apresenta uma proposta de encaminhamento, denominado “Um Contexto Histórico para a Educação Matemática”, com um ponto de vista estritamente histórico – epistemológico. Seu sentido é o de apresentar um contexto que concebe a Análise Matemática não como um consertar do Cálculo, fornecendo-lhe rigor e fundamento, mas como um conjunto de objetos histórico-matemáticos que criaram necessidades que não existiam a priori e, para elas, dispensou esforços que culminaram numa crise de fundamentos e no estabelecimento de novas concepções (PASQUINI, 2007, p.19).

Por esse viés, a autora deixa claro que a sala de aula em questão é uma sala de aula de Pós-Graduação, formada por professores de matemática, em exercício ou não. Quanto à importância desse trabalho para nós, é que qualquer conteúdo, pertencente à ementa da disciplina Análise, necessita que os alunos tenham os conceitos sobre Números Reais bem estabelecidos. Por exemplo, como introduzir as ideias de convergência se os alunos não compreendem as propriedades dos Números Reais?

Outra questão que colocamos como importante para a condução deste trabalho e que Pasquini (2007) pontua muito bem é a formação de professores. Uma vez que nossa pesquisa visa olhar os alunos de licenciatura em matemática e propor uma alternativa de ensino que pretende romper com a forma tradicional, fornecendo-lhes a possibilidade de compreensão dos conteúdos da Análise Matemática, torna-se indispensável adquirir o domínio dos conceitos matemáticos suficientes para se trabalhar no Ensino Básico. Conforme Moreira (apud Pasquini, 2007),

> Se o processo de formação busca preparar o futuro professor de matemática da escola para uma prática de negociação e de construção de significados com os alunos, infere-se dos resultados obtidos que é necessário repensar esse processo, pelo menos no que concerne à abordagem dos sistemas numéricos. Uma condição básica para o desenvolvimento de uma prática pedagógica desse tipo é o domínio, por parte do professor, dos conceitos matemáticos numa forma multifacetada, isto é, capaz de se conectar a diferentes caminhos no processo de construção dos conceitos (MOREIRA apud PASQUINI, 2007, p.17).

A disciplina de Análise Real foi tema de uma pesquisa de Moreira, Cury e Vianna (2005), intitulada “Por que análise real na licenciatura?”. Esta pesquisa de cunho qualitativo, utilizando a metodologia de análise de conteúdo, teve por objetivo recolher opiniões de matemáticos profissionais e/ou professores de instituições de Ensino Superior – em que, conforme os autores: “[...] todos os pesquisadores contatados são membros destacados da comunidade científica que atua no Brasil [...]” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 14) – e situá-las sobre o ponto de vista das teorias de formação de professores.

O método utilizado pelos pesquisadores para a obtenção de dados foi a distribuição de um questionário com três questões para 80 matemáticos de 16 instituições de ensino superior do Brasil por meio do correio eletrônico. Segundo os autores, dos 80 apenas 31 responderam o questionário. As duas primeiras questões foram bem diretas, sobre ementas e livros. A primeira questão continha uma lista de conteúdos a partir da qual os participantes da pesquisa deveriam marcar as que deveriam pertencer a um curso de Análise para a licenciatura, e caso algum conteúdo desejado não estivesse presente na lista havia a opção de escrevê-lo no final. No mesmo molde da primeira pergunta, a segunda listava um conjunto de livros a partir dos quais os participantes marcavam os que adotariam para o curso, podendo ser marcada mais de uma bibliografia. A terceira questão foi dividida em duas partes, a primeira para responder sim ou não à pergunta: “Na sua opinião, todo curso de licenciatura em matemática deveria ter essa disciplina como obrigatória?”. A segunda parte foi para que os participantes discorressem sobre a pergunta: “Se lhe coubesse defender a permanência da disciplina Análise na Reta como obrigatória para o curso de licenciatura em matemática, que argumentos você apresentaria?”. Esta terceira questão deveria ser respondida de acordo com a ementa e bibliografia que cada participante selecionou nas duas primeiras questões.

Segundo os autores, dos 31 participantes, 2 não responderam sobre a obrigatoriedade da disciplina nos cursos de licenciatura e os outros 29 responderam serem a favor que a disciplina de Análise Real ser obrigatória nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Na segunda etapa da terceira questão as respostas dos participantes foram divididas em três categorias de análise, de acordo com convergência de trechos ou palavras, podendo uma resposta estar em mais de uma categoria. De acordo com os autores, a categoria 1 possui a seguinte justificativa “porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 20); enquanto que a categoria 2, “a disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os ‘porquês’ e dá mais segurança ao futuro professor da escola” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 22); e a categoria 3, “a disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 24).

Os autores fizeram comentários sobre as três categorias apoiando-se em teorias (principalmente de ordem psicológica) que fornecem dados de pesquisas que mostram como se dá a aprendizagem na escola básica e como as colocações dos participantes da pesquisa se enquadram nestas teorias. O foco, nesse sentido, se centrou na forma de como o professor utiliza os conhecimentos de análise no Ensino Básico. Percebemos que faltou a essa abordagem a análise no sentido que visasse à autonomia dos professores. A questão que colocamos é: os conteúdos aprendidos e a forma como são aprendidos no curso de Análise Real devem ser para “retransmitir” aos alunos do Ensino Básico certo conteúdo ou para dar autonomia ao professor para pensar e validar (ou não) resultados ou indagações inesperados(as)?

Bolognezi (2006) apresenta em sua dissertação de mestrado uma pesquisa realizada com professores do Ensino Superior, professores do Ensino Médio e alunos de graduação em Matemática que estão cursando a disciplina de Análise Matemática com a intenção de verificar o impacto dessa disciplina no processo de formação de professores para o Ensino Médio. A metodologia de pesquisa foi por meio de um estudo comparativo com uma abordagem qualitativa. Segundo a autora, essa metodologia foi escolhida pelo fato do curso ter duas modalidades, licenciatura e bacharelado, onde o perfil do futuro profissional de cada uma das modalidades não tem nada em comum.

Por meio de questionários específicos para cada grupo (professores do Ensino Superior, professores do Ensino Médio e alunos de graduação), Bolognezi (2006) analisa as concepções que os sujeitos de pesquisa trazem. Dois fatos importantes verificados por meio dessa pesquisa são: a falta de significados e contextualização com que a disciplina é trabalhada; a distância dessa para as disciplinas didático-pedagógicas. Porém, na análise dos questionários dos professores do Ensino Superior verifica-se que estes acreditam ser importante a disciplina de Análise Matemática nos cursos de licenciatura, mesmo que nada que seja estudado na disciplina seja posto em prática diretamente no Ensino Básico. De acordo com Bolognezi, “depois de verificar uma quantidade de respostas de alunos da Licenciatura e Bacharelado, fica difícil não afirmar que a disciplina de Análise Matemática para o curso de Matemática precisa ser repensada” (BOLOGNEZI, 2006, p. 40).

A distância verificada pela pesquisadora entre a disciplina de Análise Matemática e a realidade profissional que o futuro professor irá encontrar, juntamente com a forma metodológica a partir da qual essa disciplina é lecionada, nos faz elaborar a seguinte questão: Como pensar em uma alternativa para a disciplina Análise Matemática que favoreça primeiramente a formação do futuro professor da educação básica e possibilite a aprendizagem dos conceitos e significados?

Conforme a autora, “mesmo em disciplinas específicas, pode-se desenvolver um trabalho que envolva a parte educacional e a forma de como se apresentar, como deixar o conteúdo abordado claro e prazeroso [...]”. (BOLOGNEZI, 2006, p. 73). Essa forma metodológica diferenciada de se apresentar os conteúdos é mostrada por meio de exemplos como: “investigar a história dos conteúdos das disciplinas, analisar a gênese de determinado conhecimento, de sua linguagem ou, ainda, de suas aplicações dentro e fora da matemática” (PERRENOUD apud BOLOGNEZI, 2006, p. 73).

Assim, de acordo com Bolognezi (2006), há possibilidades de se trabalhar disciplinas específicas de matemática fugindo do dogmatismo, onde o ensino é pautado na teoria, com rigor e formalismo (principalmente em Análise Matemática), sem desenvolver os significados, desvinculados da relação educacional, o que não é atraente para a maioria dos alunos e muito menos prazeroso.

Amorim (2011) apresentou um estudo acerca do ensino do conceito de limite nas disciplinas de Cálculo e Análise. A pesquisa traz análises de como é abordado o conceito de limite nos livros didáticos e a aplicação de atividades baseadas na teoria de imagens de conceito.

O objetivo do trabalho de Amorim (2011) foi verificar possíveis contribuições de uma proposta baseada nas teorias de imagens de conceito. É interessante, nessa pesquisa, que a proposta foi elaborada com base na (re)construção das imagens de conceito de alunos do Cálculo para a Análise. Segundo Amorim, a pesquisa documental foi feita com análise de livros-didáticos sobre Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real, utilizados em cursos de licenciatura de instituições localizadas no estado de Minas Gerais – UFOP, UFMG, UNIMONTES, ISEIB e IFNMG. Como já dito acima, a autora nos apresenta a forma como é abordado o conceito do limite de funções de uma variável real.

O referencial teórico adotado por Amorim (2011) foi baseado em trabalhos referentes à Educação Matemática no Ensino Superior e ao grupo Pensamento Matemático Avançado. A autora apresenta importantes reflexões a respeito dessas literaturas e, além das definições de imagens de conceito e definição de conceito, também traz as discussões a respeito do Pensamento Matemático Avançado e do Pensamento Matemático Elementar; os aspectos que os diferenciam e os que os aproximam. Cabe aqui salientar que os termos imagens de conceito e definição de conceito são traduzidos pela autora como imagem conceitual e definição conceitual. Apesar da diferença na tradução, as definições usadas pela pesquisadora são as mesmas que nós usamos na construção desse raciocínio.

A pesquisa de campo do supracitado estudo foi realizada no Instituto Superior de Educação Ibituruna (ISEIB), em Montes Claros. Durante o 2º semestre letivo de 2010, foi aplicada para a turma da disciplina “Introdução à Análise Real” duas atividades sobre limites de funções de uma variável real; a pesquisadora era a professora da turma e sua intenção foi investigar sua própria prática em uma abordagem qualitativa.

A primeira atividade intitulada Pós-Cálculo foi desenvolvida no momento em que os alunos contavam apenas com os próprios conhecimentos provenientes do Cálculo. E a segunda, chamada de Pós-Análise, foi desenvolvida após os alunos terem (re)construídos seus conhecimentos em Análise, uma vez que a professora-pesquisadora trabalhou os conceitos de limite de funções durante as aulas que antecederam a segunda atividade.

Ao final do semestre foi aplicado um questionário final a fim de verificar os sentimentos e conhecimentos dos alunos a respeito das atividades, e com intuito de recolher dados como dificuldades relatadas pelos mesmos, bem como sugestões e comentários gerais sobre as atividades.

De acordo com Amorim (2011), a pesquisa sobre a própria prática oferece oportunidade ao professor para mudar seus métodos de trabalho, com base nas dificuldades dos alunos, buscando sempre favorecer o processo de ensino-aprendizagem.

Nesse mesmo horizonte, os trabalhos citados a seguir são investigações que não constam no levantamento de Otero-Garcia (2011). Começamos com outra pesquisa baseada nas teorias de Imagens de Conceito, a de Antonini et al. (2007), onde é apresentada uma reflexão acerca de uma proposta metodológica para o processo de ensino-aprendizagem de Análise através da exploração de exemplos. Usando como referencial teórico as ideias de imagens de conceito e definição de conceito empregadas por Tall e Vinner (1981), este artigo se refere, de acordo com os autores, a atividades aplicadas para estudantes universitários de Matemática, Física e Engenharia, onde é apresentada a realização de uma tarefa por um dos alunos participantes da pesquisa e a análise das modificações em suas imagens de conceito.

Antonini et al. (2007) trazem considerações importantes sobre o conceito de Visualização e a influência deste nas modificações da imagem de conceito de um indivíduo. Conforme os próprios autores "veremos que um ponto importante de nosso estudo será o papel da visualização, [...]". (Antonini et al., 2007, p. 2242) (tradução nossa). Segundo os autores, ao analisarem a aplicação das atividades ao aluno específico que eles trazem nesta pesquisa, a utilização das representações gráficas e a referência à visualização auxiliam na modificação das imagens de conceito no sentido da definição formal; afirmam que "[...] isto parece confirmar as afirmações sobre o lado positivo do papel das representações visuais na aprendizagem da matemática apontada por muitos autores [...]" (Ibidem, p. 2248) (tradução nossa). Por outro lado, os autores alertam para as limitações cognitivas que o uso da visualização pode trazer, sendo que o indivíduo pode não conseguir realizar uma atividade usando o recurso da visualização e, diante desse quadro, pode deixar de lado a intuição e utilizar as definições, axiomas e o modo simbólico, se estes conceitos pertencerem às suas imagens de conceito.

Por fim, Antonini et al. trazem as considerações sobre uma proposta metodológica baseada em geração de exemplos, onde afirmam:

> Nossos resultados sugerem implicações didáticas sobre o papel das definições. Definições tem que ser o fim de um caminho de apropriação do sentido e consciência. Sem isso, as definições não serão uma ferramenta para o desenvolvimento de atividades matemáticas.
> A geração de exemplos revelou-se uma boa maneira de recuperar o sentido da definição através de sua aplicação e promover a

> passagem para o pensamento teórico (Antonini et al., 2007, p. 2248) (tradução nossa).

Um trabalho voltado na geração de exemplos muda o papel do aluno, fazendo-o investigar e construir os resultados e, a partir desse processo de investigação e construção, ele pode ser incentivado a utilizar as representações gráficas, recorrendo às visualizações, o que vai ao encontro da teoria de Imagens de Conceito e Definição de Conceito, na qual, de acordo com a teoria de Tall e Vinner (1981), o uso de várias representações pode favorecer a compreensão sobre o objeto matemático.

Artigue (1998) escreve um trabalho onde são apresentados os problemas do ensino de Análise na França, o processo histórico dos programas curriculares e a influência desses na tentativa de buscar uma forma de iniciar os conceitos de Análise, almejando proporcionar um ensino mais significativo. A autora ainda apresenta as mudanças curriculares envolvidas desde o primeiro Movimento Internacional da Matemática, passando pelo Movimento da Matemática Moderna até o “declínio” dessa corrente.

De acordo com Artigue (1998, p. 40) (tradução nossa) “não é fácil para os estudantes entrarem no campo conceitual da Análise elementar”, e cita estudos da década de 1980 que comprovam sua afirmação. Ela ainda indica a importância desses estudos, pois, de acordo com a mesma, auxiliam a entender as dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos, assim como o fracasso das atuais metodologias de ensino. Estes levantamentos feitos por Artigue (1998) reforçam o que nossos estudos também já verificaram.

A estudiosa também aponta para a tendência do uso da tecnologia na tentativa de superar os problemas do processo de Ensino – Aprendizagem de Análise. Em nossa revisão de literatura é possível perceber os muitos trabalhos envolvendo a utilização da tecnologia como ferramenta para o ensino dos conteúdos de Análise, principalmente quando esses conteúdos são trabalhados na disciplina de Cálculo. Artigue (1998) nos mostra, em especial no caso da França, as tentativas de superar dificuldades e obstáculos no ensino de Análise, onde, entre as medidas tomadas, foi adotado o uso de calculadoras nas salas de aula.

Dentre as dificuldades apresentadas pelos alunos nesse campo conceitual (disciplina Análise), Artigue (1998) destaca e discorre sobre as que se referem aos objetos básicos da disciplina, as ligadas ao conceito de limite e as envolvidas, de acordo com a autora, na necessária ruptura entre o pensamento algébrico e o pensamento analítico.

Sobre as dificuldades relativas à identificação de uma função, a autora nos fornece um exemplo dessas ao lidarmos com a função, exercício pelo qual a "representação não se reconhecerá como função porque a expressão algébrica dada não depende de, porém se for introduzida por meio de sua representação gráfica, será reconhecida como tal porque estará representada por uma reta" (Artigue, 1998, p. 42). Nesse exemplo, cita também o trabalho de Tall; Vinner (1981) e suas teorias de imagens de conceito e definição de conceito, mas não se aprofunda no assunto.

Sobre as dificuldades envolvendo a noção de limite, Artigue (1998) cita as que têm sido alvo de estudos e são consenso para a maioria dos investigadores; em particular citamos os problemas envolvendo as concepções que os estudantes trazem sobre o termo "limite" e suas implicações no processo de aprendizagem. Sobre as dificuldades na ruptura com pensamento algébrico, Artigue (1998) através de seu levantamento teórico-bibliográfico, nos mostra a necessidade dessa ruptura, uma vez que o pensamento algébrico não é suficiente para a demanda da disciplina Análise. Novas formas de entender e enxergar o objeto matemático se fazem necessárias, para que o aluno possa desenvolver, de igual maneira, novas formas de demonstrações (ou provas). Em especial, de acordo com a autora, a noção de igualdade deve ser enriquecida e novas formas de provar igualdades devem ser assimiladas para que o indivíduo tenha sucesso.

Segundo a referida autora, a reforma do Movimento da Matemática Moderna baseou o ensino de Análise numa visão formal, onde seus fundamentos tornaram-se dominantes, mas, com a contrarreforma em 1982, essas ideias foram descartadas. Com isso, o ensino se apoiou em problemas de variação e aproximação e a partir de então foi dada ênfase num ensino baseado nas aproximações intuitivas e experimentais. Conforme Artigue (1998, p.51), "estas aproximações intuitivas e experimentais impuseram-se progressivamente e hoje em dia aparecem como a única porta de entrada razoável [...]". A autora afirma que esse ensino baseado nas aproximações intuitivas e experimentais tem resolvido algumas dificuldades didáticas, mas que outras podem ser geradas em longo tempo.

Artigue (1998) nos mostra nesse trabalho como tem se desenvolvido o ensino de Análise na França, com muitas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem e, também em relação à investigação, que se verificam comuns em outros países, em especial no Brasil. No caso de estudos e investigações, a autora cita a distância entre pesquisa e prática, afirmando que

> o estudo dos processos de transposição didática neste campo mostra também as dificuldades encontradas quando tratamos de aproveitar resultados didáticos ou experimentais que localmente tem tido êxito, para organizar mudanças curriculares substanciais e mais globais (ARTIGUE, 1998, p. 51) (tradução nossa).

2.3 Sobre o Pensamento Matemático Avançado

Costa (2002) apresenta o sentido do termo Pensamento Matemático Avançado nas perspectivas de alguns educadores matemáticos, bem como os processos mentais envolvidos no pensamento matemático avançado, em especial o conceito de *Visualização*. A autora traz o posicionamento desses pesquisadores em questões sobre aspectos do pensamento matemático avançado, quais sejam: o que diferem do pensamento matemático elementar; transição de um para o outro; e aspectos específicos.

Em um segundo momento, Costa (2002) apresenta – por meio de uma pesquisa realizada com crianças da escola básica, em que são investigadas as interações entre os pensamentos relacionados ao conceito de *Visualização* e alguns processos mentais, através de atividades geométricas – exemplos de interações entre os diferentes modos de pensamento visual.

David Tall e Shlomo Vinner (1981), no trabalho *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity,* formularam as ideias de *Concept Image* e *Concept Definition* para ajudarem na análise dos processos cognitivos que ocorrem na aprendizagem da matemática. Foi nesse trabalho que surgiram tais teorias, transformando-o em referência de muitos trabalhos sobre o Pensamento Matemático Avançado.

Conforme os autores, “neste trabalho, formularemos uma série de ideias gerais destinadas a serem úteis na análise destes fenômenos e aplicá-las para os conceitos específicos de continuidade e limites” (TALL; VINNER, 1981, p. 151). Dessa forma, discutem os possíveis fatores de conflitos gerados a partir da teoria de *Concept Image* e *Concept Definition* nos conceitos de limites de sequências e funções, assim como continuidade de funções.

No decorrer do trabalho, Tall e Vinner (1981, p. 154) fazem uma análise do currículo dos cursos de cálculo nas escolas inglesas, onde afirmam que “existem vários problemas práticos impostos no ensino dos conceitos de limites e continuidade”. Ainda segundo os autores, as considerações práticas e a necessidade de aprender o cálculo forçam uma desvalorização da ordem lógica em detrimento das técnicas. Mas ressalvam que os comentários feitos ao currículo não são uma crítica em relação a como ele é, mas que devam ter por finalidade mostrar as situações de aprendizagem em que os alunos constroem as imagens de conceito. Segundo eles,

> Estes comentários não pretendem ser uma crítica ao currículo como agora é. Eles são destinados a demonstrar as realidades da situação onde as imagens de conceito são construídas de forma prática e informal, em seguida, uma definição do conceito inicial é dada que é uma aproximação para a definição formal cumpridas pelo pequeno percentual de estudantes que vão para estudar matemática na universidade (TALL e VINNER, 1981, p. 155) (tradução nossa).

Apesar de não entrarem no mérito de questionar o currículo, os autores deixam claro que este, nas escolas inglesas, favorece a mecanização de técnicas que, aliadas à pressão em aprender por parte dos alunos, deixam a ordem lógica de lado.

No prosseguimento desse trabalho, Tall e Vinner (1981) comentam a forma como os livros da *School Mathematics Project* (SMP) abordam os assuntos de limite de sequências,de funções, e continuidade. Os autores ainda descrevem, por meio de investigações com alunos, alguns dos problemas que ocorrem na formação de uma imagem de conceito incoerente com a definição de conceito e os conflitos potenciais provenientes dessa incoerência. É importante notar a forma como eles usam a abordagem dos livros da SMP para investigar como se constroem as imagens de conceito nos discentes.

Cornu (1981), em seu artigo “Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres”, apresenta as definições de Modelo Espontâneo e Modelo Individual. Segundo o autor, Modelos Espontâneos são as representações mentais advindas de experiências que podem ser originadas antes mesmo do contato com o objeto matemático; esses modelos influenciam no desenvolvimento/elaboração dos Modelos Individuais. Ainda conforme o autor, nesse trabalho, seu objetivo foi estudar os modelos espontâneos e a elaboração dos modelos individuais para a noção de limite concebida pelos alunos.

Cornu (1981, p. 4) relaciona esses estudos à evolução histórica do conceito de limite, onde afirma que “[...] No estudo da história da noção de limite, pode ser visto que a maior parte dos modelos que encontramos entre estudantes existiu e desempenhou um papel na evolução do conceito de limite. [...]” (tradução nossa).

Assim como a teoria de imagens de conceito, a teoria de modelo espontâneo e modelo individual possui o objetivo de nos fornecer informações para estudarmos a formação das representações mentais de um indivíduo sobre um determinado objeto matemático. Pela caracterização dessas duas teorias, podemos dizer que esses modelos são partes da imagem de conceito de um indivíduo. E como tal, sofrem modificações de acordo com as experiências. Em relação aos aspectos pedagógicos, as duas teorias enfatizam uma pedagogia voltada para o enriquecimento das representações mentais, fazendo-as convergir para as definições formais, ou seja, a proposta de trabalho deve romper com o ensino tradicional vigente, onde as definições são postas como ponto de partida. Ainda conforme Cornu (1981), o ensino de limites através da definição formal pode causar conflito com os modelos espontâneos dos alunos, uma vez que a definição formal não “apaga” as representações metais pré-existentes.

Apesar de Cornu (1981) levantar essas questões em relação aos conceitos de limite, acreditamos que podemos estender essa problemática de iniciar um assunto pelas definições pelo fato da ocorrência de conflito entre definições e modelos espontâneos independerem do assunto.

Tall (1988), no artigo “Concept Image and Concept Definition”, apresenta algumas considerações a respeito da teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, baseando-se em pesquisas empíricas realizadas na década de 1980. Destaca a problemática do ensino baseado em definições formais e os conflitos que estas podem gerar ao se confrontarem com as imagens de conceitos do indivíduo;

afirma ainda, que durante a década de 1970 e início da década de 1980, muitos exemplos de tais conflitos foram observados em diferentes objetos matemáticos. A respeito das pesquisas sobre conflito cognitivo, Tall conclui que:

> O que a pesquisa sobre o conflito cognitivo sugere é que não é sensato esperar que os estudantes sejam capazes de argumentar logicamente a partir de definições, sem conceito, esperando interferência de suas imagens de conceito individuais (TALL, 1988, p.40) (tradução nossa).

Notamos que, nesse artigo, Tall utiliza as mesmas definições de conflito potencial e conflito cognitivo, que foram descritas no artigo de 1981, escrito juntamente com Vinner. De acordo com Tall e Vinner (1981, p. 153) (tradução nossa), conflito potencial é “parte da imagem de conceito ou definição de conceito que pode entrar em conflito com outra parte da imagem de conceito ou definição de conceito”, enquanto que conflito cognitivo se dá quando duas partes da imagem de conceito ou definição de conceito que causam conflito entre si são evocadas simultaneamente.

No artigo “Concept Images, Computers, and Curriculum Change”, de 1989, Tall sugeriu uma mudança curricular que romperia com o ensino iniciado por definições e teoremas. Sua proposta tinha por finalidade utilizar o computador como ferramenta a favor do processo de ensino-aprendizagem, para criar um ambiente educacional rico em representações visuais, explorando ideias prévias existentes em estudantes. A intenção era de fornecer a oportunidade dos alunos enriquecerem o suficiente suas imagens de conceito para entenderem posteriormente as definições formais.

Dessa forma, Tall (1989) apresenta questões sobre a utilização do computador, os currículos e os conceitos de raiz cognitiva e de organizadores genéricos. De acordo com o autor, raiz cognitiva é um conceito que o aluno acha fácil de compreender e serve de apoio para construir novas teorias, enquanto que organizadores genéricos são ambientes que permitem aos alunos manipularem exemplos e/ou contra exemplos de um ou mais conceitos matemáticos. Assim Tall afirma que um organizador genérico pode ser o ponto de partida para o desenvolvimento de um currículo, partindo de raízes cognitivas. Nesse caso, os fundamentos matemáticos deixam de ser o ponto de partida e passam a ser o ponto de chegada, ou seja, objetivo a ser alcançado.

Uma proposta de organizador genérico elaborada por Tall para o ensino de Cálculo tem o computador como ferramenta pedagógica, em que se utiliza do conceito de retidão local como raiz cognitiva para o ensino da disciplina. Sobre a utilização do computador, Tall (1989, p. 13) (tradução nossa) comenta que "[...] software adequadamente programado pode fornecer uma ferramenta que compensa a deficiência humana em comunicação visual".

David Tall (1991), em seu texto "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*",* apresenta aspectos da psicologia do Pensamento Matemático Avançado. O autor analisa os tipos de pensamento matemático e discute o processo de (re)construção do conhecimento matemático através das teorias da psicologia. Essa discussão aponta possibilidades para entendermos o desenvolvimento cognitivo dos alunos em um nível superior.

As teorias da psicologia precisam levar em consideração as experiências e o ambiente cultural de cada indivíduo, pois não se pode negar ou desconsiderar esses elementos ao tentarmos entender o pensamento matemático. Segundo o autor supracitado,

> Assim, qualquer teoria da psicologia do pensamento matemático deve ser visto em um contexto mais amplo da atividade mental e cultural. Não há uma verdade, forma absoluta de pensar sobre matemática, mas diversificada culturalmente desenvolvendo maneiras de pensar em que vários aspectos são relativos ao contexto (TALL, 1991, p.3) (tradução nossa).

Por meio da Teoria dos estágios de Piaget, Tall traz algumas reflexões sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pois há uma adaptação dessa teoria para ser utilizada em trabalhos do pensamento matemático avançado. De acordo com o autor, um problema das pesquisas apoiadas nessa teoria é que elas raramente apontam possibilidades de solução para problemas diagnosticados; geralmente apenas nos mostram o que não fazer.

Tall (1991) também analisa as tendências dos professores em abordarem um determinado conteúdo; essa abordagem dependerá da formação profissional do docente. As experiências dos alunos normalmente não são consideradas ao se planejar um curso e, esta é uma das principais críticas do autor ao trabalho docente.

Os matemáticos profissionais geralmente não se voltam para esses aspectos, uma vez que estão mais preocupados, de acordo com Tall (1991, p.6) (tradução nossa), “com os níveis mais avançados da matemática”. Isto pode gerar um desconforto entre educadores e matemáticos, já que os primeiros tentam entender as dificuldades encontradas pelos alunos, enquanto que, os segundos preferem colocar a culpa no potencial dos discentes, pois, conforme Tall, é uma maneira confortante de olhar para a situação.

Relacionando essa situação posta por Tall (1991) e o texto de Tall e Vinner (1981) comentado acima, surge uma questão importante: os professores geralmente não criam um ambiente pedagógico, chamado por Tall e Vinner (1981) de organizadores genéricos, utilizando-se de experiências e conceitos que os alunos trazem e que seria, de acordo com os mesmos autores, as raízes cognitivas para o inicio de um conteúdo?

Gray e Tall (1991) apresentam o conceito de *procept* que, de acordo com os autores, é a “mistura” do processo com o conceito. A ambiguidade dos simbolismos na matemática que podem ser trabalhados por uns como processo e por outros como conceito é investigada pelos autores. Um aspecto importante desse trabalho é a percepção da forma como a construção de fatos novos (ou ainda não conhecidos) pelos alunos está intimamente relacionada com o conceito de *procept*. Segundo os autores, o indivíduo que consegue manipular objetos matemáticos usando a flexibilidade entre processo e conceito, conforme sua necessidade, terá sucesso na realização de tarefas com grau de dificuldade maior, onde há múltiplos processos. Esses indivíduos poderão até mesmo construir fatos novos (fatos derivados) que não faziam parte de suas experiências, estarão construindo conhecimentos matemáticos.

Então, o que são processo e conceito na visão dos autores? Processo seria operar com conceitos anteriores a um determinado estágio para chegar a um resultado. Enquanto que conceito é o resultado ou produto do processo. Por exemplo, consideremos a soma, o conceito anterior ao estágio de somar seria o de contagem, assim o processo é o fato de se efetuar essa conta usando o método da contagem. O conceito é o resultado final, ou seja, olhar para essa soma como o número, “pulando” a etapa da contagem.

Assim ao se deparar com tarefas que exigem múltiplos processos para serem resolvidas, os alunos que são bem sucedidos com a flexibilidade dada pelo *procept* poderão “pular etapas”, chegando aos resultados de uma forma mais fácil e segura; enquanto os outros farão vários processos para chegar aos resultados, correndo um risco maior de cometer erros, dependendo da complexidade da atividade. Esta falta de estrutura *proceptual* é chamada pelos autores de divisão *proceptual*.

Gray e Tall (1991), também apresentam evidências empíricas que reforçam sua teoria sobre *procept*, incluindo a problemática envolvendo a divisão *proceptual*, porém, nesse momento de nosso referencial teórico-bibliográfico, achamos por bem focalizar as ideias de imagens de conceito e definição de conceito, que serão nucleares para nossa pesquisa.

Fuente, Armenteros e Moll (2012) trazem para nós uma análise das investigações sobre o ensino de limite de funções e mostram também a descrição de um estudo aplicado a alunos do ensino superior. Sobre o referencial teórico adotado pelos autores, segundo os mesmos:

> o referencial teórico sobre o qual nos baseamos é a abordagem *ontosemiótico* da cognição e instrução matemática [...]. Se trata de um modelo teórico em que se inter-relacionam pressupostos ontológicos, semióticos e sócio - construtivistas, de caráter matemático, para a análise dos processos de interação em sala de aula (FUENTE; ARMENTEROS; MOLL; 2012, p. 668) (tradução nossa).

Nesse sentido, o referencial teórico usado nesse trabalho é uma das teorias da linha de investigação Pensamento Matemático Avançado que, de acordo com os autores, é o grupo de trabalhos mais desenvolvido quanto às investigações a respeito dos processos de ensino-aprendizagem de limite de função. Ainda segundo os autores, apesar das várias teorias nessa linha de pesquisa que tentam entender os aspectos cognitivos, todas elas são centradas no indivíduo e usam as ferramentas de análise da psicologia.

Segundo Fuente, Armenteros e Moll (2012), o referencial teórico ontosemiótico (EOS) tem como ponto de partida:

> a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que leva em conta o aspecto triplo da matemática como uma atividade de resolução de problemas, socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado (FUENTE, ARMENTEROS, MOLL, 2012, p. 671) (tradução nossa).

Assim, esse trabalho tem como foco as análises semióticas, que de acordo com os autores, são deixadas de lado pela grande maioria dos estudos nessa área. Fuente, Armenteros e Moll (2012, p. 670) (tradução nossa) apontam críticas as essas teorias baseados na psicologia, onde afirmam que “a tradição psicologista não leva suficientemente em conta o aspecto social, também esquecendo aspectos semióticos”. Concordamos com esses autores, uma vez que, refletindo sobre nossas leituras, não encontramos os trabalhos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado preocupados com as consequências ou causas do aspecto social no processo de ensino-aprendizagem. Em alguns momentos, como em Tall (1991), poucos trabalhos apontam para a necessidade das pesquisas apoiadas na psicologia levarem em consideração os aspectos sociais, mas nada de concreto. Em outras linhas de pesquisa o aspecto social é o aspecto central, como por exemplo, na Etnomatemática, mas essa preocupação com as causas e consequências do aspecto social é estudada com maior afinco no nível do Ensino Básico.

Por fim o trabalho de Fuente, Armenteros e Moll (2012) traz como contribuições alguns estudos e reflexões acerca do ensino de limite de uma função, com foco para as imagens mentais dos alunos e, consequentemente, o tipo de instrução a partir da qual os professores têm trabalhado. O trabalho aborda também a importância de se trabalhar com resolução de problemas na construção do conhecimento e na institucionalização do mesmo.

O estudo de Dede e Soybaş (2011) também possui como referencial teórico teorias do Pensamento Matemático Avançado, em especial os conceitos de imagens de conceito e definição de conceito. O estudo se baseia na investigação das imagens de conceito de futuros professores de matemática sobre o conteúdo de polinômios. Nele, os autores fazem uma breve análise das mudanças curriculares na Turquia e do lugar dos polinômios nos currículos. Segundo os mesmos, atualmente há uma preocupação, antes inexistente, com a aprendizagem dos alunos; porém o ensino ainda se baseia em procedimentos e técnicas.

Para analisar as imagens de conceito de futuros professores de matemática sobre polinômios, Dede e Soybaş (2011) empregaram a metodologia qualitativa, em especial a pesquisa fenomenológico-existencial. Segundo os autores (2011, p. 393), “o objetivo da pesquisa fenomenológico-existencial é investigar a experiência dos sujeitos no mundo”. As ferramentas utilizadas para recolher os dados foram questionários, entrevistas semiestruturadas e notas de campo; a ideia do estudo foi analisar quais eram as imagens de conceito de futuros professores que “estudaram Matemática no Departamento de Educação da Faculdade de Educação na *Cumhuriyet University*, em Sivas, uma cidade modesta na região central da Turquia” (DEDE; SOYBAŞ, 2011, p. 394) (Tradução nossa).

Na pesquisa dos autores supracitados foram propostas três categorias de reflexão sobre as imagens de conceito dos participantes em relação a polinômios, que, segundo os mesmos, foram: “Acordo com a definição formal; conflito com a definição formal; e operação inversa de equações” (Ibidem, p. 396) (Tradução nossa).

Como contribuições, Dede e Soybaş (2011) nos trazem algumas considerações; a primeira, segundo os autores, seria a aparente limitação das aquisições de procedimentos que visem relacionar o conceito de polinômios a outros conceitos como os de funções e equações, de acordo com o seguinte trecho:

> Como afirmado anteriormente aquisições para a relação entre o conceito de polinômios e outros conceitos como funções e equações parecem ser limitadas. Portanto, este caso, é refletido nos livros didáticos de matemática. As imagens de conceito dos futuros professores sobre polinômios parecem confirmar esta situação (DEDE; SOYBAŞ, 2011, p. 400) (Tradução nossa).

Outra consideração importante do estudo de Dede e Soybaş é a revelação de que a “definição formal do conceito de polinômio faz com que forme várias imagens de conceito nas mentes dos futuros professores” (DEDE; SOYBAŞ, 2011, p. 400) (tradução nossa). A problemática sobre as definições formais dos conceitos matemáticos é muito explorada e discutida, como temos visto em outras literaturas. Embora o estudo de Dede e Soybaş seja uma descrição dos fenômenos e não uma reflexão aprofundada sofre metodologias ou formas de se trabalhar o conceito de polinômios, podemos verificar que seus estudos apontam para o rompimento com o ensino pautado nas definições como ponto de partida, exatamente pelo fato de terem concluído que a definição formal pode gerar várias imagens de conceito nas mentes dos indivíduos. Essas várias imagens de conceito podem ser conflitantes com a definição formal.

Ao analisar uma incoerência da imagem de conceito de um participante da pesquisa, Dede e Soybaş (2011, p. 400) reforçam ainda mais a questão abordada acima, ao afirmarem que “[...] dar a definição formal de qualquer conceito pode não ser suficiente para que o conceito seja compreendido e que pode causar a formação de várias imagens de conceito do conceito” (Tradução nossa).

2.4 Sobre as Imagens de Conceito e a Definição de Conceito

Nosso primeiro contato com as teorias relacionadas às imagens de conceito foi por meio do trabalho de Giraldo (2004), que utilizou as teorias do Pensamento Matemático Avançado, em especial as de David Tall, para solidificar uma proposta de investigação onde a utilização do computador é um apoio para o processo de ensino-aprendizagem. Assumindo a postura de aceitação dos conflitos gerados pelo uso do computador, em vez de ignorá-los, Giraldo analisa a influência desses conflitos nas imagens de conceito dos alunos sobre o conteúdo de derivadas.

A questão central da pesquisa, citada por Giraldo, foi: “Em que situações limitações de descrições computacionais podem promover um efeito de expansão das imagens de conceito de derivada?” (GIRALDO, 2004, p. 90). Assim, sua intenção foi investigar as possibilidades pedagógicas oriundas dos conflitos entre as representações computacionais e as descrições dos alunos sobre os conceitos de derivada. De acordo com o próprio autor, “o objetivo central deste trabalho é justamente estudar as potencialidades pedagógicas das limitações associadas a descrições” (GIRALDO, 2004, p. 74). Para a realização dessa pesquisa, o estudioso utilizou uma metodologia qualitativa no intuito de captar todas as limitações e conflitos surgidos no ambiente pedagógico criado.

Nossa pesquisa, no entanto, terá como referência as teorias de imagem de conceito e raiz cognitiva de David Tall. Não é nossa pretensão encerrar as discussões sobre as questões envolvendo o ensino de Análise, mas acreditamos que o entendimento do processo de desenvolvimento das imagens de conceito pode contribuir para um ensino significativo da disciplina Análise. Como dito no capítulo anterior, existem outras variáveis que poderiam ser investigadas por outros referenciais, mesmo que essas não pareçam ser tão decisivas no Ensino Superior quanto no Ensino Básico.

Quando abordamos um conteúdo matemático, os alunos podem trazer algumas ideias associadas aos objetos em questão, oriundas de experiências passadas dentro ou fora da matemática e do ambiente escolar. Por exemplo, um aluno, ao se deparar com sequências e séries, pode se lembrar de progressões aritméticas e geométricas. Nota-se que, neste exemplo, o aluno evocou conceitos da própria matemática, mas em muitos casos experiências externas influenciam o conceito que os discentes possuem sobre um determinado objeto matemático.

Essas ideias podem aparecer na mente de um indivíduo de diferentes formas, ou seja, é tudo que se pensa sobre o objeto. Por exemplo, para a maioria das pessoas, quando falamos em quadrado, a ideia que se tem é a imagem de um quadrilátero com os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos, mas se pedirmos uma descrição muitos ignoram o fato dos ângulos terem que ser retos. De acordo com Tall e Vinner (1981, p. 2), essas ideias são chamadas de imagem de conceito, as quais os autores definem da seguinte forma: “Usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados” (Tradução nossa) (Grifo do autor).

Consideremos o exemplo acima para explicar o conceito de conflito, definido por Tall e Vinner (1981). Alguns alunos descrevem o quadrado como um quadrilátero que possui os lados iguais, não levando em consideração a característica dos ângulos. Mas ao verem a figura de um losango – em que os pares de ângulos opostos possuem medidas de 60º e 120º, respectivamente – encontram uma contradição entre a forma visual e a descrita, pois mesmo que não descrevam, eles sabem que os ângulos tem que possuir uma determinada forma, que é ter medida de 90º. Esta incoerência entre duas imagens de conceito, relacionada a um mesmo objeto, é definida por Tall e Vinner por fator de conflito potencial. Tall; Vinner (1981, p. 153) definem da seguinte forma: “vamos chamar uma parte da imagem de conceito ou definição de conceito que pode conflitar com outra parte da definição de conceito ou imagem de conceito, um *fator de conflito potencial*” (Tradução nossa) (Grifo do autor).

Tall e Vinner (1981) chamam de fator de conflito cognitivo a situação em que dois ou mais fatores de conflitos potenciais são evocados simultaneamente. Nesse sentido, a ideia de conflito é de suma importância na teoria de imagens de conceito. Concordamos com Tall e Vinner quanto à posição dos professores frente a situações de conflito, em que sugerem o uso dessas a favor do processo de ensino-aprendizagem, ao invés de as evitarem. Quando há o conflito entre duas ou mais imagens de conceito, relacionadas a um mesmo objeto, temos a oportunidade de ampliarmos as imagens de conceitos de nossos alunos. Como no exemplo acima, quando confrontada a descrição com a imagem visual, os alunos notam que para definirmos um quadrado é necessário termos em mente a característica de seus ângulos e não somente a de seus lados. Assim, ocorre uma transformação na imagem de conceito dos alunos referente ao quadrado, enriquecendo-a ao internalizar propriedades que antes geravam conflitos. Notemos que, ao formar uma imagem de conceito para quadrado, como um quadrilátero que possui todos os lados iguais e todos os ângulos retos, os discentes podem enxergar o quadrado como um caso particular de retângulo, o que, no nível de educação básica, tal dedução não seria trivial.

A forma de palavras pela qual um indivíduo expressa certo conceito é definida por Tall e Vinner (1981) como definição de conceito. De acordo com Giraldo (2004), a definição de conceito do indivíduo é parte de sua imagem de conceito e pode ou não ser coerente com a definição formal. A introdução de um conteúdo matemático no Ensino Superior tem acontecido, geralmente, por meio da apresentação de definições formais. Assim, muitos alunos decoram a definição formal e a única ideia que possuem sobre um determinado assunto será esse jogo de palavras que a compõe, ou seja, será parte de sua imagem de conceito. O aluno também pode ter em mente uma definição de conceito incoerente com a definição formal e essa também será parte de sua imagem de conceito, pois é uma estrutura cognitiva ligada a um objeto matemático.

Sobre a teoria de imagens de conceito, Giraldo (2004) comenta:

> A teoria de *imagens de conceito*, proposta inicialmente por David Tall e Shlomo Vinner no artigo – hoje clássico – *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity* (TALL & VINNER, 1981), sugere que o ensino de matemática deve visar a compreensão pelo estudante não apenas da construção formal dos conceitos, mas o enriquecimento, como um todo, da estrutura cognitiva individual associada a estes. Com este propósito, uma gama ampla de representações e ideias relacionadas de todo tipo deve figurar na abordagem pedagógica de um dado conceito (GIRALDO, 2004, p.7) (Grifo do autor).

Notemos que é importante, para o enriquecimento da imagem de conceito de um indivíduo, que a abordagem pedagógica seja feita através de várias representações, com o intuito de dar ao aluno a oportunidade de assimilar outras ideias associadas ao objeto matemático. Giraldo (2004) comenta que uma única representação não é suficiente para explorar todas as ideias sobre um determinado objeto matemático, somente com a utilização e relação entre as várias representações é que os alunos terão a oportunidade de enriquecer suas imagens de conceito. Por exemplo, ao falarmos de funções com alunos, muitos pensam somente na lei de formação, pois a prática de ensino foca muito a parte algébrica, e, portanto, não relacionam esta lei de formação com as outras representações matemáticas para função. Muitos até sabem manipular a expressão algébrica, como por exemplo, determinar as raízes de uma função, mas não sabem o significado geométrico dessas. Assim, pelo que sugere a teoria de imagens de conceito, o professor deveria trabalhar o conteúdo de funções explorando as várias representações, algébricas, gráficas e por meio de tabelas.

Um exemplo da Análise é, de acordo com Amorim e Reis (2013), quando trabalhamos o conceito de limite, apesar dos alunos dominarem as técnicas e realizarem os cálculos envolvendo o conteúdo, mas uma parcela significativa dos mesmos não possuírem uma compreensão ampla sobre o conceito. Mesmo quando trabalhada a definição formal, os alunos não conseguem relacioná-la com a representação gráfica e o seu significado.

2.4.1 Raiz Cognitiva

A ideia de raiz cognitiva elaborada por Tall (1989) é fundamental para uma proposta pedagógica centrada na teoria de imagem de conceito. Diagnosticar o conhecimento e as experiências dos alunos em relação a um determinado conteúdo seria o passo inicial para construirmos um plano de curso. Por exemplo, ao se abordar os conteúdos de sequência e série, um bom caminho poderia ser iniciar o trabalho com progressões aritméticas e geométricas, uma vez que são conteúdos vistos no Ensino Médio. Por mais que os alunos não compreendam esses conceitos completamente, eles trazem experiências sobre os conteúdos.

A introdução de um conteúdo matemático deve ser feita através de ideias que darão suporte para o aluno desenvolver suas imagens de conceito. De acordo com Tall (1989, p. 9), “a raiz cognitiva é um conceito de ancoragem que o aluno encontra fácil de compreender e ainda forma uma base sobre a qual a teoria pode ser construída”.

Segundo Giraldo (2004), o conceito de raiz cognitiva foi se desenvolvendo em trabalhos posteriores e, com a formulação da ideia de *unidades cognitivas*, este passou a ser considerado como um caso especial de unidades cognitivas. Giraldo apresenta, abaixo, a definição de *unidades cognitivas*:

> [...] Tony Barnard e David Tall (BARNARD & TALL, 1997) introduziram o termo **unidade cognitiva** para designar *uma porção da imagem de conceito em que um indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento* [...] (GIRALDO, 2004, p. 16) (Grifo do autor).

Ainda de acordo com Giraldo (2004),

> [...] A ideia de raiz cognitiva foi desenvolvida em trabalhos posteriores. Após a formulação da teoria de unidades cognitivas, a noção de raiz cognitiva foi reformulada nestes termos, como um tipo especial de unidade cognitiva que se relaciona com o conhecimento familiar ao estudante que está começando um novo desenvolvimento conceitual, permitindo a conexão entre seus conhecimentos inicias e aqueles a serem desenvolvidos. Em (TALL, 2000), o autor redefine raiz cognitiva como *uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior* [...] (GIRALDO, 2004, p.22) (Grifo do autor).

Comprimir informações matemáticas, gerando novas estruturas através da relação de dois ou mais elementos matemáticos é, segundo o estudioso supracitado, de suma importância na teoria de *unidades cognitivas*. O aluno deve ser capaz de construir uma estrutura cognitiva relacionando dois ou mais conhecimentos prévios e trabalhar com esta em sua forma geral, ou, quando precisar, reduzi-la à sua forma primária, olhando para os conhecimentos prévios que a constituíram.

Estimular os alunos a relacionarem ideias prévias, que façam sentido para eles (ideias já compreendidas), construindo novas estruturas a respeito de um conteúdo matemático, passa a ser então o principal foco de uma metodologia baseada na noção de raiz cognitiva.

A noção de raiz cognitiva tem sido utilizada, geralmente, em ambientes educacionais com computadores. Nossa intenção é adaptá-la a uma metodologia que não dependa do computador. Assim, para nós, as orientações de raiz cognitiva serão ideias ou conteúdos pelos quais os alunos tenham familiaridade e, por meio desses, consigam expandir suas imagens de conceito. Assim, voltando ao exemplo acima, iniciar o ensino de sequências e séries por meio de progressões aritméticas e geométricas pode ser bom pela familiaridade dos alunos com esses conteúdos e, a partir desses, podemos expandir os estudos para sequências de números reais.

3 A METODOLOGIA DA PESQUISA

3.1 Pesquisa em Educação Matemática

Em primeiro lugar, para falarmos de pesquisa, devemos pensar num conceito de pesquisa; nesse sentido, concordamos com Bicudo ao enunciar que “pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada” (BICUDO, 1993, p.18). Essa busca não tem um contorno definido, mas tem como meta procurar explicações em todas as dimensões para o objeto de pesquisa, com rigor e sistematicidade.

Devemos observar que, em Educação Matemática, a pesquisa não se trata de demonstrar conjecturas ou teoremas apenas, ou de investigar os objetos próprios da pedagogia. Os objetos de estudos são conteúdos matemáticos, mas a metodologia de pesquisa segue os modelos da Educação.

Concordamos com Fiorentini (2006), quando argumenta que o matemático tende, em sua prática, a promover uma educação voltada para a formação de novos pesquisadores em Matemática; enquanto que, o educador matemático utiliza a Matemática como instrumento para a formação social e intelectual de crianças, jovens, adultos e também dos próprios professores de Educação Básica, ou seja, coloca o conteúdo a serviço da educação.

Assim, o pesquisador em Educação Matemática se lançará a investigar as questões que promovem obstáculos ao processo de ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo matemático. O que traz complexidade a esta área é a forma pela qual olhamos para essas questões. Um mesmo objeto pode ser investigado por diversas teorias, de diferentes áreas do conhecimento, pois conforme Sierpinska, “a Educação Matemática se encontra na encruzilhada de vários campos científicos bem estabelecidos [...]” (SIERPINSKA, 1993, p.92) (Tradução nossa). Portanto, devemos pensar que cada campo científico que auxilia a mesma traz uma tendência metodológica de pesquisa.

Concordamos com Bicudo (1993, p.19), quando o autor comenta que “os núcleos da preocupação da Educação Matemática são preocupações com o compreender a Matemática, com o fazer a Matemática e com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática”.

Apesar da Educação Matemática se apoiar em teorias de outras áreas do conhecimento – como psicologia, história, filosofia, pedagogia, sociologia, entre outras – não devemos nos afastar da natureza intrínseca dos objetos matemáticos.

O que caracteriza a importância do pesquisar em Educação Matemática são as contribuições que o processo traz para transformar o pesquisador, além dos resultados ampliarem as compreensões sobre um determinado objeto de pesquisa.

Assim sendo, devemos ter cuidado ao interpretar os resultados de uma pesquisa mediante as contribuições de várias áreas do conhecimento. De acordo com Sierpinska, “qualquer resultado é relativo a uma problemática, com o quadro teórico em que é direta ou indiretamente baseada e, com a metodologia através da qual foi obtida” (SIERPINSKA, 1993, p. 92) (tradução nossa).

3.2 Nossa pesquisa

Nesta pesquisa convidamos seis estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, oferecida pelo Departamento de Matemática, Física e Estatística do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – Campus Rio Pomba, para trabalharmos um questionário inicial e algumas atividades em horário extraclasse. Acreditamos que nossa pesquisa de cunho qualitativo se enquadra na modalidade de *experimento de ensino*, que de acordo com Borba (2004, p.7), o qual afirma que “neste tipo de pesquisa, atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o pesquisador-professor possa "ouvir" de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes”. Uma ressalva importante que Borba traz em relação a essa modalidade é que

> [...] os alunos que participam desta modalidade de pesquisa estão fora da sala de aula, fora do contexto da avaliação que cerca a sala de aula usual. Esse fato traz consequências e pode levar o pesquisador a se esquecer de outras dimensões da educação, assim como levar a generalizações apressadas para situações de sala de aula. [...] (BORBA, 2004, p. 10).

Desse modo, é importante lembrarmos-nos durante nossas reflexões que o ambiente e algumas das situações em sala de aula pelo qual os alunos estão envolvidos não podem, e talvez nem devam, ser reproduzidos na pesquisa.

Por outro lado, a modalidade *experimento de ensino* nos permitirá “ouvir” os estudantes, acompanhar o processo e a Matemática desenvolvida por eles durante a realização das tarefas. Segundo Borba “[...] é inegável que o experimento de ensino expressa de forma eloquente ao menos um dos princípios da pesquisa qualitativa: fazer com que o humano apareça e não se esconda atrás de estatísticas” (BORBA, 2004, p. 10).

Acreditamos que a abordagem qualitativa atende as demandas de verificarmos e analisarmos as modificações sofridas nas imagens de conceito de um indivíduo durante o processo de resolução de problemas.

De acordo com Borba,

> [...] O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida.[...] (Ibidem, p. 2).

Alguns dos procedimentos sugeridos para a realização de uma pesquisa qualitativa são as análises de vídeos, de entrevistas e outras fontes usadas para recolher dados, onde possamos acompanhar o processo. Segundo Borba (2004), a pesquisa qualitativa prioriza o processo; assim, a questão aqui não é separar o produto em dados estatísticos e sim, analisar os dados a fim de procurar compreendê-los. O autor também faz uma ressalva, onde argumenta que a abordagem qualitativa não surge como oposição à pesquisa quantitativa; é apenas outro meio de analisar os fatos e que, mesmos os dados quantitativos podem passar por uma análise qualitativa.

O papel do pesquisador na abordagem qualitativa é importante, pois suas análises e seus resultados não são isentos de valores, assim como também não o são os participantes da pesquisa. Segundo Borba,

> [...] Dessa forma, quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento (BORBA, 2004, p. 3).

A forma de conhecer o mundo, como cita Borba, não pode ser isolada do que o pesquisador já traz do próprio mundo e, outro ponto importante, é o fato de que o referencial teórico adotado pelo pesquisador seja uma forma de olhar o mundo com concepções prévias que, a não ser por incoerência do pesquisador, faz parte do seu próprio conhecimento e que interferirá na análise dos resultados da pesquisa.

Garnica afirma, sobre pesquisa qualitativa, que:

> [...] nas abordagens qualitativas, o termo pesquisa ganha novo significado, passando a ser concebido como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador (GARNICA, 1997, p. 111).

Fica claro neste trecho de Garnica que os resultados da pesquisa são subjetivos, assim como suas análises. A *qualidade* e *os elementos* aos quais se referem Garnica dependerão do observador-investigador, variando de pesquisador para pesquisador e até mesmo dos participantes da pesquisa.

Desse modo, durante a realização das atividades, pudemos perceber e analisar as dúvidas, impressões e as reações que aparecem nos atos dos alunos. Acreditamos que uma abordagem qualitativa nos permite a proximidade com os sujeitos e com a possibilidade de acompanhar as modificações em suas imagens de conceito. Modificações essas que podem ser um enriquecimento das imagens de conceito, no sentido de adquirir novas formas de pensar o objeto, de modo a convergir com as definições formais; ou um estreitamento, onde podemos notar um distanciamento com a definição formal ou mesmo diminuição das formas de pensar, “diminuindo” suas imagens de conceito.

Outro ponto importante que a pesquisa qualitativa nos permite analisar é a reação e a impressão dos alunos com os conteúdos da disciplina Análise. Parece existir uma rejeição sobre essa disciplina por parte de alguns alunos (principalmente da licenciatura) pela “distância” entre seus conteúdos e a forma como é abordada, com o ensino básico. Desse modo, surge à oportunidade de ouvi-los e fazer uma análise dessa questão, que está ligada com a formação profissional.

Para que possamos tecer os resultados da pesquisa precisamos determinar os elementos sobre os quais lançaremos nossos olhares. Desse modo, criamos alguns eixos de análise, cada qual relacionado a um elemento específico. A partir do referencial teórico adotado, o primeiro de nossos eixos de análise foi verificar a “variação” da imagem de conceito nos indivíduos, uma vez que este foi o objetivo principal desta pesquisa. Um segundo eixo que almejamos examinar foi se durante o desenvolvimento das atividades os alunos conseguiam relacionar a um determinado conteúdo mais de uma representação e se estas eram coerentes com a definição formal. O terceiro eixo foi verificar se o aluno conseguia chegar à formalidade sabendo do significado do que se esta formalizando. E por fim, o quarto eixo foi verificar o que os alunos diziam a respeito da disciplina e suas reações diante das atividades de ensino.

3.2.1 Como se modificam as imagens de conceito do aluno?

Analisar as modificações ocorridas nas imagens de conceito dos alunos durante a aplicação de atividades é o objetivo principal desta pesquisa e, assim sendo, nossa intenção começa por meio da aplicação do questionário, onde pretendemos diagnosticar as imagens de conceito que os discentes possuem no início do trabalho, isto é, o que eles falam sobre o objeto matemático. Esse levantamento nos permitirá mapear a proximidade de seus conceitos com a definição formal e também verificar se os alunos conseguem pensar no objeto através de várias representações, principalmente a geométrica. A partir de nossas atividades, poderemos interferir nas imagens de conceito e sugerir o uso da representação geométrica, seja olhando para uma reta ou mesmo para o plano cartesiano, bem como poderemos também observar se eles absorvem as representações geométricas em suas imagens de conceito.

A verificação da modificação das imagens de conceito do aluno se dará por meio da análise dos vídeos das aplicações das tarefas comparada ao questionário. As falas e os registros das tarefas nos possibilitarão entender como acontece ou não as modificações nas imagens de conceito de cada indivíduo.

3.2.2 Os alunos conseguem entender de forma significativa os conceitos?

Como um dos objetivos da pesquisa é trabalhar o conteúdo da disciplina Análise de forma que os alunos tenham a possibilidade de aprender e entender as definições e conceitos formais, nós pretendemos, através da análise de vídeos das tarefas e do questionário final, coletar dados que nos permitam verificar essa situação. Esses dados podem representar a relação do conteúdo com uma outra forma de representação, coerente com a definição formal, manipulação de teoremas e definições, retirando ou incluindo hipóteses.

Ao invés de começarmos pelas definições e pelos teoremas, podemos propor uma questão cujo processo de resolução tenha elementos que ajudem na demonstração de um teorema ou uma definição, ou mesmo seja a própria demonstração, ainda que o aluno não escreva com a formalidade que é aceita por parte dos matemáticos. Neste momento, importa que eles formem uma imagem de conceito coerente com o que será formalizado depois pelo professor. No processo de resolução das atividades, o professor-pesquisador, enquanto mediador, poderá sugerir aos alunos que façam uso ou pensem em outras formas de representação, ou mesmo, outros conteúdos para auxiliá-los na evolução da resolução. A ideia aqui será estimulá-los a usarem figuras ou imagens geométricas e, por meio das análises dos vídeos, das tarefas e dos questionários, poderemos identificar se eles assimilarão essas representações e relações com outras áreas da matemática. A assimilação significará um enriquecimento da imagem de conceito do aluno, desde que seja coerente com as definições formais e, de acordo com nosso referencial teórico, poderemos constatar que o individuo compreende o conteúdo/resultado de uma forma mais ampla.

3.2.3 Como ocorre a formalização dos conceitos?

Formalizar os conteúdos matemáticos estudados na disciplina de Cálculo talvez seja o objetivo principal da disciplina Análise na Reta. Acreditamos que esta metodologia pode fornecer aos alunos a possibilidade de aprender Análise e não ficar decorando listas de exercícios e reproduzindo-as sem saber o significado do que está escrevendo. Neste contexto definiremos o termo *formalização com significado* como sendo aquela em que o aluno consiga manipulá-la, ou seja, ele entende os conceitos e trabalha de forma autônoma, podendo em várias situações relacioná-los com outras áreas da matemática, como por exemplo, o que é muito comum em Análise na reta, usar a geometria como suporte. Mas, além disso, ele tem que articular suas ideias para escrever, textualmente, da maneira como é aceita pela comunidade de matemáticos profissionais, onde desenhos e figuras não são aceitos, em geral.

Assim, nossa ideia é verificar se os estudantes conseguem formalizar conceitos envolvidos nas atividades, bem como compreender os formalizados pelo professor-pesquisador.

A análise dos registros das tarefas e dos vídeos nos possibilitará identificar se os alunos conseguem formalizar um conceito e verificar se eles compreendem a formalização feita pelo professor. Os vídeos nos fornecerão falas e condutas no desenvolvimento da solução do problema, podendo nos fornecer indícios sobre a compreensão do aluno em relação ao objeto estudado, ao passo que a análise das tarefas permitirá conhecer o que os alunos escrevem sobre os objetos matemáticos e se conseguem formalizá-los.

3.2.4 O que os alunos dizem sobre a disciplina Análise?

Durante a realização das tarefas, nossa pretensão foi olhar e analisar o que os alunos dizem sobre a disciplina Análise, principalmente aqueles que já a fizeram em outra ocasião. Bolognezi, após verificar as respostas dos alunos participantes de sua pesquisa, afirma “que a disciplina de Análise Matemática para o curso de Matemática precisa ser repensada”. Segundo a autora, para “a grande maioria dos graduandos em licenciatura, esta disciplina não contribui diretamente na formação do professor, tão pouco prepara com conteúdos que poderiam vir a auxiliá-los quando estiverem lecionando” (BOLOGNEZI, 2006, p. 40).

Apesar da pesquisa de Bolognezi ter sido feita em uma instituição específica, acreditamos que as reações e as opiniões que os alunos de outras instituições trazem a respeito dessa disciplina podem ter muito em comum com os participantes dessa.

Desse modo, acreditávamos que apareceriam relatos que pudessem nos mostrar o que os alunos acham da disciplina, principalmente daqueles que já fizeram a disciplina em outra ocasião. Além da análise dos vídeos das tarefas, o questionário inicial nos fornecerá dados para investigar este eixo, uma vez que colocaremos duas questões onde os alunos possam escrever sobre a disciplina em questão.

3.3 O roteiro da pesquisa

Nossa ideia foi aplicar um questionário inicial para tentarmos mapear os conhecimentos prévios dos alunos, bem como o que dizem a respeito da disciplina Análise. Depois do questionário inicial, aplicamos algumas atividades de ensino com o intuito principal de observar o processo das resoluções. Para elaborar as atividades de ensino, usamos como referencia os livros: Introdução à Análise Matemática, de Ávila (1999) e; Análise Real: Funções de uma variável, de Lima (2009).

Abaixo, mostraremos as perguntas que compõem o questionário inicial:

1. Você já cursou a disciplina Análise na Reta ou é a primeira vez? Se já cursou, descreva sua(s) experiência(s) anterior(es) ou atual.
2. Ainda, para os que já cursaram a disciplina em outra oportunidade, qual a importância que vocês vêm nesta disciplina?
3. Você já estudou o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas? Conseguiria caracterizar os dois tipos de progressões? Lembra-se do somatório de cada uma dessas progressões?
4. Você já estudou sequências? Qual o conceito que você possui sobre esses conteúdos matemáticos? Consegue relacionar esses conteúdos com algum outro já estudado?

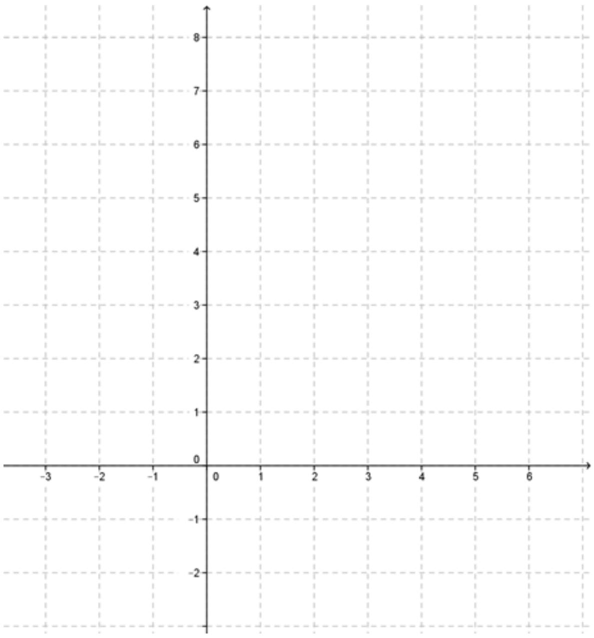
As duas primeiras perguntas visavam diagnosticar o que os participantes dizem a respeito da disciplina Análise. As outras duas perguntas tinham como objetivo verificar os conhecimentos prévios que os participantes possuíam a respeito de progressões aritméticas, progressões geométricas e sequências. Esses conhecimentos prévios serão a raiz cognitiva e, por meio deles é que nos apoiamos no começo do trabalho com as atividades de ensino.

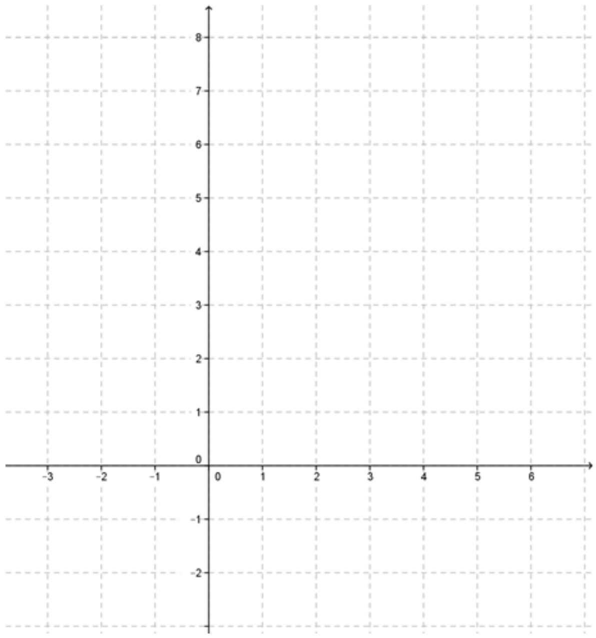
As atividades de ensino que foram propostas aos alunos focaram o conteúdo de sequências. Procuramos inverter a ordem usual dos livros didáticos; os resultados, que normalmente são demonstrados, em nossas atividades couberam aos alunos pensá-los e demonstrá-los. A atividade de ensino 1 foi elaborada afim de trazer conceitos já vistos por eles sobre progressões aritméticas e geométricas, conceitos âncoras que formam a raiz cognitiva de cada indivíduo. Abaixo, estão indicadas as atividades que foram propostas aos alunos:

1. Observe as progressões aritméticas e geométricas abaixo.

$$(1,3,5,7,...),\ (16,8,4,2,1,...)$$

i) Faça o gráfico dessas progressões no plano cartesiano.





ii) As sequências acima são limitadas? Justifique.

2. A sequência $\left(a,a^2,a^3,...,a^n,...\right)$ é limitada inferior e/ou superiormente para $a>1$? E para $0<a<1$?

3. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, qual é a relação entre a e b? Justifique.

4. Dado o número real $a < -1$, formemos a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}^{'} \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}^{''} \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares, as subsequências $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{'}}$ e $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{''}}$ são limitadas? E a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Seja $\left(x_{n_k}\right)_{n_k\in\mathbb{N}^{'}}$ uma subsequência de $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\mathbb{N}^{'} \subset \mathbb{N}$. Se $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número a, o que podemos dizer sobre o $\lim x_{n_k}$? Justifique.

6. Existe uma relação entre a convergência de uma sequência e o fato da mesma ser ou não limitada. Qual seria esta relação? Justifique.

7. No problema 6, se a sequência for monótona muda alguma coisa na relação estabelecida? Justifique.

8. Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Dentre os resultados já conhecidos por você, quais nos garante a veracidade da afirmação acima?

9. Utilize resultados já conhecidos para encontrar e explicar o limite de $\dfrac{1}{n}$ e de a^n, para $0 < a < 1$.

10. Seja $\lim x_n = a$. Se $a > b$, conseguiremos encontrar um n_0 onde para todo $n > n_0$ tenhamos $x_n > b$? Justifique.

11. Seja $\lim x_n = \lim y_n = a$. Se $x_n < z_n < y_n$ para todo n suficientemente grande, qual será o valor do $\lim z_n$? Justifique e demonstre o resultado.

12. Por meio da definição, calcule o $\lim\left(x_n.y_n\right)$ em cada uma das situações abaixo.

i) Para $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = sen\left(x\right)$.

ii) Para $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$.

13. Seja a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ onde $x_1 > \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \left[x_n + \frac{a}{x_n} \right] / 2$. Calcule o limite dessa sequência.

14. Demonstre os resultados abaixo.

i) Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

ii) Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim(x_n . y_n) = +\infty$.

iii) Se $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(y_n) = 0$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

iv) Se (x_n) é limitada e $\lim y_n = +\infty$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

15. Com suas palavras explique o que é uma sequência convergente? Quais características assume uma sequência convergente?

A primeira atividade foi proposta com a finalidade de tentar fazer com que os alunos olhassem para uma sequência e fizessem a relação com uma função, que é a definição de uma sequência. Ainda na primeira atividade, começamos a trabalhar com o conceito de sequências limitadas. Na segunda atividade demos continuidade a esses conceitos.

A terceira atividade é proposta a fim de que os alunos pensem no teorema da unicidade do limite de uma sequência. Na quarta atividade é introduzido o conceito de subsequência. A quinta relaciona a convergência de uma sequência à convergência de uma subsequência qualquer da mesma.

As atividades seis, sete e oito trabalham as relações entre convergência e o fato de uma sequência ser ou não limitada; aparece também a definição de sequências monótonas. A atividade nove tem por objetivo verificar se os alunos conseguirão aplicar os resultados já trabalhados.

Na atividade dez, os alunos precisarão recorrer à definição de limite de sequência, ao passo que a atividade onze é o teorema do confronto (sanduíche). Na doze, a ideia é que os alunos calculem os limites utilizando a definição.

A atividade treze é uma aplicação que nos permite encontrar valores aproximados para a raiz quadrada de um número real positivo. Já a quatorze, trabalha a demonstração dos limites da soma e do produto, considerando algumas hipóteses. Na atividade quinze iremos verificar o que eles dizem sobre sequências convergentes e analisaremos se assimilaram os resultados.

Algumas definições como as de sequências limitadas, sequências monótonas, subsequências e limite de sequência foram apresentadas junto às atividades. A ideia foi verificar se os alunos conseguiriam absorver essas definições e trabalhar com elas na obtenção de novos resultados.

As atividades de ensino foram aplicadas em cinco encontros e fora do contexto de sala de aula. No primeiro encontro, em agosto de 2013, foi aplicado o questionário e as atividades de ensino foram divididas da seguinte forma: as atividades 1, 2 e 3 no segundo encontro; as atividades 4, 5, 6, 7 e 8 no terceiro encontro; as atividades 9, 10 e 11 no quarto encontro; e as atividades 12, 13, 14 e 15 no quinto encontro. Com exceção do terceiro encontro, que teve duração de duas horas, os outros tiveram duração de uma hora e meia.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE PESQUISA

Neste capítulo faremos um detalhamento da aplicação do questionário e das atividades de ensino e, também, a análise dos resultados de acordo com os eixos propostos no capítulo anterior.

4.1 Participantes da pesquisa

A pesquisa contou com a participação de seis alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – Campus Rio Pomba, sendo que desses, três já haviam cursado a disciplina Análise com êxito (aprovação), dois estavam cursando pela segunda vez e um ainda não havia tido esta experiência. Os participantes foram categorizados como A1, A2, A3, B1, B2 e C, onde os alunos A1, A2 e A3 são os que já haviam sido aprovados na disciplina. Enquanto que os alunos B1 e B2 são os que se encontravam cursando pela segunda vez. Os alunos A1, A2, A3, B1, B2 estavam no oitavo período do curso.

O aluno C não havia cursado a disciplina Análise até o momento; sentimos pois, a necessidade de reavaliar as atividades de ensino aplicadas a um discente que não trazia experiência nenhuma com a disciplina, para verificar as mudanças nas imagens de conceito de um indivíduo que a estuda pela primeira vez. A escolha desse aluno seguiu alguns critérios, que foram: já ter cursado e sido aprovado na disciplina de Cálculo I e ter cursado e sido aprovado ou estar cursando disciplinas que trabalhem com a maturidade em demonstrações formais. No caso de nosso participante, na época da pesquisa, este se encontrava no quarto período do curso e dentre as disciplinas do semestre estava cursando Álgebra Linear. Outro ponto importante a ser considerado a respeito do aluno C, foi que este não realizou as tarefas da pesquisa junto com os demais, pois, por falta de compatibilidade de horário e até mesmo por nossa análise em considerar a importância da participação do mesmo, a pesquisa com ele foi realizada entre dezembro de 2013 e fevereiro de 2014. O roteiro do questionário e das atividades foi o mesmo que para os outros cinco participantes, inclusive o número de encontros e o tempo destinado a cada um.

4.2 Realização do questionário e das atividades

Como já dito anteriormente, o questionário e as atividades foram aplicados fora do contexto de sala de aula. As questões foram aplicadas em uma sala onde os alunos A1, A2, A3, B1 e B2 ficaram dispostos em uma mesa retangular e grande, exatamente para incentivar a cooperação. Essa cooperação só começou a ocorrer, de uma forma tímida, no terceiro encontro (segundo de realização das atividades, já que o primeiro encontro se destinou à aplicação do questionário e, o segundo encontro, à aplicação das atividades 1, 2 e 3); a partir do quarto encontro a interação e a ajuda entre eles foi maior. O aluno C, lembramos novamente, fez as atividades sozinho.

4.2.1 O questionário.

A realização do questionário nos serviu para verificar as experiências vividas na disciplina Análise e o que os alunos dizem sobre a mesma - com exceção do aluno C -, bem como para analisarmos seus conhecimentos prévios sobre sequências. A aplicação do questionário foi realizada no dia 08 de outubro de 2013, para os alunos A1, A2, A3, B1 e B2. Para o aluno C, foi realizada no dia 03 de dezembro de 2013.

Na primeira pergunta do questionário, **“1. Você já cursou a disciplina Análise na Reta ou é a primeira vez? Se já cursou, descreva sua(s) experiência(s) anterior(es) ou atual”** todos, com exceção do aluno C, responderam que já cursaram a disciplina Análise e, sobre suas experiências, os alunos A1 e B1 disseram ter tido experiências negativas com a mesma, enquanto que os alunos A2 e A3 disseram não ter tido problemas com a disciplina. O aluno B2 não descreveu suas experiências.

Seguem abaixo as respostas dos alunos. A resposta do aluno B1:

> “Já cursei e estou cursando novamente pois reprovado na primeira vez. Quanto às experiência não foram muito agradáveis da primeira vez, mas desta segunda já estou conseguindo entender melhor o funcionamento dos ε e δ”.

A resposta do aluno A1:

> “Já cursei a disciplina no 1º semestre de 2013. Por ter se tratado de uma disciplina nova e demandar que se resolvam muitas demonstrações, e eu particularmente não compreende-las, tive uma experiência um tanto negativa, apreendi muito pouco os conteúdos, apenas para realizar as provas”.

Podemos notar que o aluno A1 foi bem enfático ao relatar que sua experiência com a disciplina foi negativa.

Na segunda pergunta do questionário, **“2. Ainda para os que já cursaram a disciplina em outra oportunidade, qual a importância que vocês vêm nesta disciplina?”** os alunos A2 e A3 apontaram para a explicação formal dos conceitos, resultados e teoremas estudados em Cálculo. Além disso, o aluno A3 acredita que esta disciplina seria um pré-requisito para quem está interessado em fazer Matemática Pura. Para o aluno B2 a importância se dá em conhecer a origem de alguns conceitos básicos. Por fim, o aluno A1 citou: “Não consigo descrever sua importância para o meu dia a dia e área de atuação, contudo, julgo que esta é fundamental para os matemáticos puros descrever algum fenômeno e resolvê-lo”.

Assim como o aluno A3, o aluno A1 destacou a importância dessa disciplina para os estudantes que seguirão pela Matemática Pura.

Na terceira pergunta do questionário, **“3. Você já estudou o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas? Conseguiria caracterizar os dois tipos de progressões? Lembra-se do somatório de cada uma dessas progressões?”** todos os alunos disseram já ter estudado o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas, assim como conseguiram caracterizar os dois tipos de progressões citados, mas nem todos se lembraram do somatório. O aluno A3 lembrou o somatório de ambas as progressões, inclusive a distinção entre o somatório da PG finita e da PG infinita.

O aluno A2 não conseguiu chegar à fórmula mais usual para o somatório da PA; apesar de ter tentado deduzir, chegou a uma fórmula onde o somatório está em função de a_1, r e n, primeiro termo da PA, razão da PA e número dos primeiros termos a serem colocados no somatório, respectivamente. Tentou, mas sem sucesso, a dedução do somatório da PG. A resolução do aluno A2 segue abaixo:

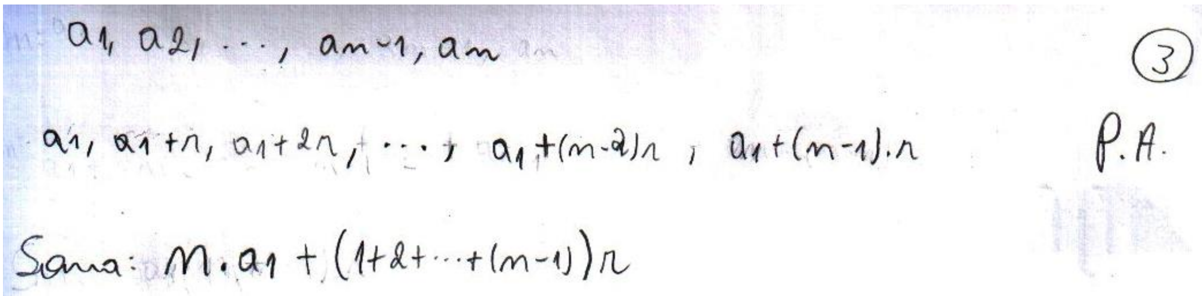


Figura 1: Resposta do aluno A2 à atividade 3.

O aluno B1 lembrou apenas do somatório da PA, enquanto que os alunos A1 e B2 não lembraram de nenhuma das fórmulas do somatório. O aluno A1 até tentou deduzir, mas sem sucesso. O aluno C tentou, mas sem sucesso, deduzir a fórmula para o somatório de uma PG, por outro lado, conseguiu lembrar a do somatório da PA.

Na quarta pergunta do questionário **"4. Você já estudou sequências? Qual o conceito que você possui sobre esses conteúdos matemáticos? Conseguem relacionar esses conteúdos com algum outro já estudado?",** de igual modo, todos os participantes disseram já ter estudado sobre sequências; os alunos A1, A2, A3, B1 e B2 por já ter feito a disciplina de Análise, e o aluno C disse já ter estudado na disciplina de Cálculo I.

O aluno A3 caracterizou uma sequência como $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ e afirmou que pode ser finita ou infinita, além de conseguir relacionar esse conteúdo apenas com PA e PG.

O aluno A2 conceituou uma sequência como uma função $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e também relacionou esses conteúdos apenas com PA e PG, afirmando que "ambas são sequências de números reais" (aluno A2). De acordo com o aluno B2, possui os conceitos de sequências convergentes e divergentes, limitadas ou ilimitadas, ínfimo, supremo, valores máximos e mínimos, PA e PG estudado no Ensino Médio, mas não definiu nenhum dos conceitos acima.

Sobre o conceito, o aluno A1 afirmou que: “talvez a minha visualização seria a sequência numérica, um conjunto ordenado de números” (aluno A1). Ele ainda disse conseguir relacionar esse conteúdo com outros, mas não cita com quais.

Já o aluno B1 afirmou saber sobre as características que uma sequência pode assumir e disse conseguir relacioná-las “com as progressões, funções, limites, entre outros” (aluno B1).

4.2.2 Atividades de ensino 1, 2 e 3.

Essas atividades foram aplicadas para os alunos A1, A2, A3, B1 e B2 no dia 22 de outubro de 2013 e, para o aluno C no dia 10 de dezembro de 2013.

Na primeira atividade,

1. Observe as progressões aritméticas e geométricas abaixo.

$$(1,3,5,7,...),\ (16,8,4,2,1,...)$$

i) Faça o gráfico dessas progressões no plano cartesiano.

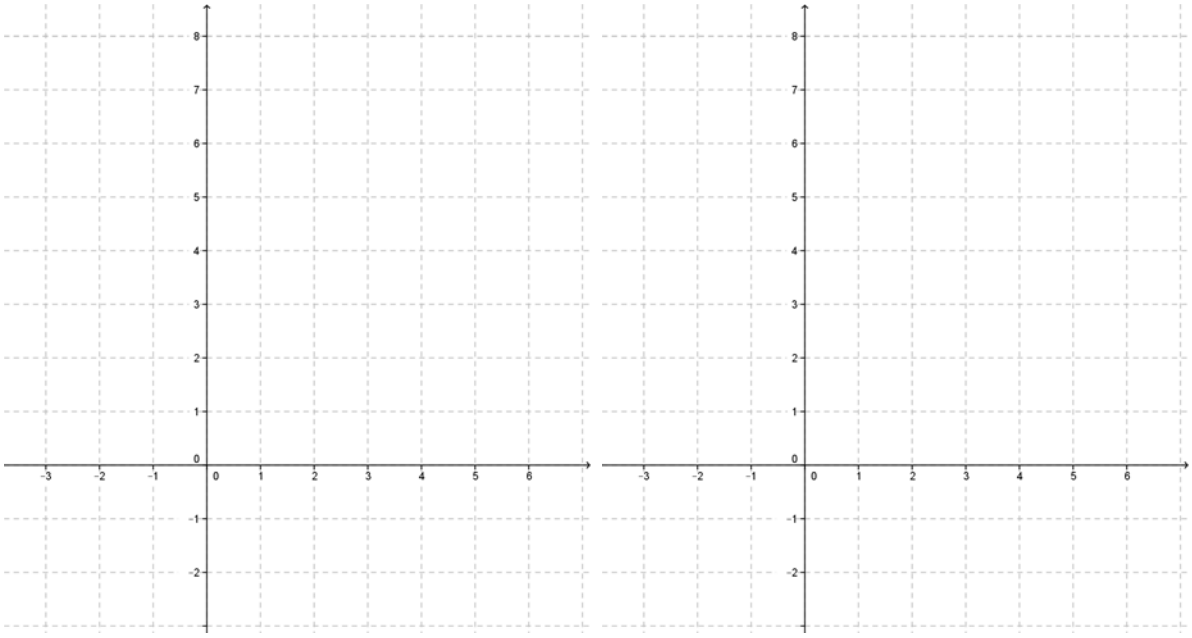


Figura 2: Gráficos que compõem a atividade 1.

ii) As sequências acima são limitadas? Justifique.

No item (i) os alunos A2, A3, B2 e C marcaram os pontos (discretos) no gráfico tomando o primeiro termo das sequências com índice 1, ou seja, formando os pares ordenados (1,1), (2,3), (3,5), e assim por diante, no caso da PA, enquanto que (1,16), (2,8), (3,4), ... no caso da PG. O aluno A1 também marcou pontos de forma discreta, mas considerando que o primeiro termo da sequência possui índice zero, os pares ordenados marcados por ele foram: (0,1), (1,3), (2,5), ... no caso da PA, e no caso da PG (0,16), (1,8), (2,4), ... Já o aluno B1 marcou conforme os alunos A2, A3, B2 e C, mas se esqueceu que estava lidando com um domínio discreto e traçou a curva que passa pelos pontos das respectivas sequências.

No item (ii), os alunos A3 e B1 afirmaram que a PG é limitada, tanto por ser limitada superiormente quanto inferiormente; ainda, ambos notam que a PA é limitada inferiormente, mas não superiormente. Os alunos A1 e A2 notaram que a PA é limitada inferiormente enquanto que a PG é limitada superiormente, mas uma coisa que o aluno A2 observou e o aluno A1 não, foi o limite inferior da PG. O aluno A2 conseguiu enxergar as limitações das sequências, mas não citou qual é limitada. O aluno B2, assim como o A1, enxergou o limite inferior da PA e superior da PG e uma coisa interessante é que ele utilizou, neste item, as definições de sequência limitada inferiormente e superiormente. O aluno C afirmou que “a PA só é limitada inferiormente, já a PG é limitada, pois tem um limite superior e inferior” (aluno C). Notemos que, apesar do aluno C ser o de menor experiência, ele conseguiu trabalhar com a definição, assim como os alunos A3 e B1, na obtenção de resultados.

Na segunda atividade,

2. A sequência $\left(a, a^2, a^3, ..., a^n, ...\right)$ é limitada inferior e/ou superiormente para $a > 1$? E para $0 < a < 1$?

Os alunos A2, A3 e B1 conseguiram notar o limite da sequência em cada caso, mas só o aluno A3 afirmou que para $0 < a < 1$ a sequência será limitada. O aluno B2 não conseguiu perceber que, para $0 < a < 1$, a sequência também será limitada inferiormente. Já o aluno A1, apesar de descrever os intervalos onde estarão todos os termos da sequência, nos dois casos, afirmou que em nenhum dos casos a sequência é limitada, o que mostrou que ele ainda não possuía o conceito de uma sequência ser limitada ou não.

Na atividade,

3. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, qual é a relação entre a e b? Justifique.

Os alunos tiveram dificuldades de enxergar o valor de épsilon a ser tomado, o pesquisador então os orientou por meio da visualização geométrica. Depois da orientação do pesquisador, os alunos A1, A3, B1 e B2 conseguiram fazer as manipulações algébricas e demonstrar o resultado. O aluno A1, apesar de ter concluído a atividade, teve dois pontos a destacar: primeiro que tentou explicar que $a = b$ por meio de palavras, e, segundo, que errou conta na demonstração, o que pode ser por alguma deficiência em lidar com operações básicas. Juntamente com o aluno A1, o aluno B2 teve dificuldades durante a manipulação algébrica, pois não conseguiam entender que não existe um elemento, digamos x, tal que $\frac{3a-b}{2} < x < \frac{b+a}{2}$ e $\frac{b+a}{2} < x < \frac{3b-a}{2}$, o que pode significar uma dificuldade em compreender os intervalos escritos de forma algébrica. Os alunos A2 e B1 ajudaram os colegas a chegarem ao resultado.

O aluno A2 fez uma demonstração válida, mas diferente do que foi orientado pelo pesquisador; como já fez o curso de Análise, se lembrou da demonstração e foi direto para a manipulação algébrica. O problema é que, independente da forma como é feita a demonstração, a visualização geométrica nos ajuda a entender o porque de tomar $\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$; assim, o aluno A2 não utilizou a representação geométrica como suporte para resolver e entender essa questão. Abaixo segue a resolução do aluno A2:

3) O Teorema da Unicidade do limite de uma sequência garante que se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então $a = b$.

Demonstração: Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Analogamente, se $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Assumindo $N = \max\{N_1, N_2\}$ e, por contradição, que $a \neq b$, teremos:

$$|a-b| = |a - b + x_n - x_n| = |a - x_n - b + x_n| \leq |a - x_n| + |-b + x_n| =$$

$$= |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |a-b| < 2\varepsilon$$

Considerando $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, teremos:

$$|a-b| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a-b|}{2} = |a-b|$$

isto é,

$$|a-b| < |a-b|.$$

Absurdo! Portanto, se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então $a = b$. $\square$

Figura 3: Resolução da atividade 3 feita pelo aluno A2.

O aluno C não conseguiu chegar ao resultado da maneira formal, mas tentou explicar com palavras. O pesquisador, depois de ter explorado e discutido com o aluno as características da unicidade do limite, fez a demonstração para ele. Podemos notar, no caso do aluno C, que ele já utilizava a visualização geométrica para entender melhor o que estava acontecendo.

4.2.3 Atividades de ensino 4, 5, 6, 7 e 8.

Essas questões foram aplicadas para os alunos A1, A2, A3, B1 e B2 no dia 05 de novembro de 2013, e para o aluno C no dia 12 de dezembro de 2013.

Na atividade **“4. Dado o número real $a<-1$, formemos a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}^{'}\subset\mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}^{"}\subset\mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares, as subsequências $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{'}}$ e $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{"}}$ são limitadas? E a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?”** os alunos B1, A1 e A2 conseguiram realizar e chegaram ao resultado de forma satisfatória, com destaques para a forma de explicar do aluno A2, que usou contraexemplo para mostrar que $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{'}}$ e $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{"}}$ não são limitadas, e, como consequência disso, $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ também não será.

O aluno A3 também usou contraexemplos da mesma forma que o aluno A2; contudo teve um erro no processo de resolução ao tomar no contraexemplo $a=-2$, mas descreveu a sequência, onde os índices são os naturais ímpares, como $\{2,8,32,...\}$ ao invés de $\{-2,-8,-32,...\}$ o que não interferirá na conclusão da sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada ou não (nesse caso), mas a subsequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{"}}$ é limitada superiormente e não inferiormente, como ele concluiu.

O aluno A1 colocou em sua explicação o fato da sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ oscilar entre valores negativos e positivos e que cada subsequência estudada na primeira pergunta da atividade está indo para o infinito - a primeira para o mais infinito e a segunda para o menos infinito.

O aluno B2 conseguiu concluir que $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{'}}$ é limitada inferiormente e ilimitada superiormente, mas para $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}^{"}}$ só colocou que é ilimitada e concluiu ao final: “então a sequência ilimitada superiormente e inferiormente. Concluímos que $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ também é ilimitada” (aluno B2).

O aluno C teve dificuldades com o contraexemplo, como pudemos perceber abaixo:

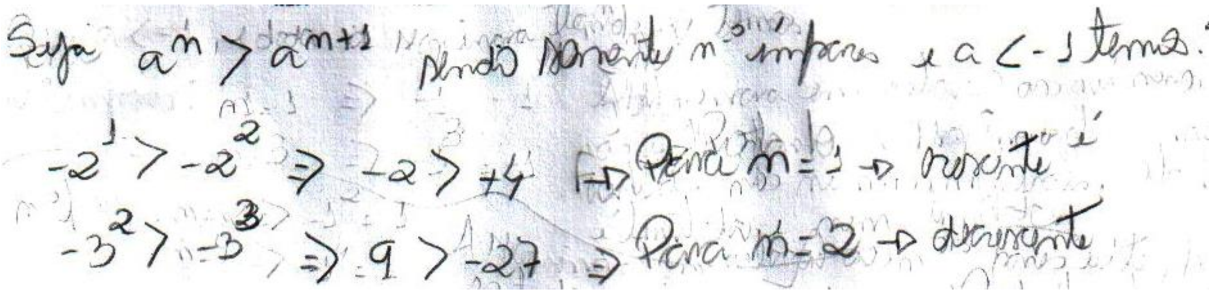


Figura 4: Resolução da atividade 4 feita pelo aluno C.

Este aluno até concluiu que a subsequência onde os índices são os números pares é ilimitada, mas não conseguiu chegar a algum resultado sobre a subsequência onde os índices são os números ímpares.

Na atividade **“5. Seja $\left(x_{n_k}\right)_{n_k\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência de $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}$. Se $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número a, o que podemos dizer sobre o $\lim x_{n_k}$? Justifique”** os alunos A2, A3 e B1 resolveram essa questão fazendo a demonstração de que o limite de $\left(x_{n_k}\right)_{n_k\in\mathbb{N}'}$ é o número a. O aluno B1 fez um desenho para entender o que estava acontecendo; este aluno, desde o primeiro momento, quando foi sugerido utilizar a representação geométrica, sempre que se encontrava em dificuldades para analisar uma atividade recorria a tal representação.

Os alunos A1, B2 e C explicaram com palavras.Conforme Aluno A1: “Se uma subsequência converge para um certo valor. Logo, podemos definir que o limite desta subsequência é este valor. Pois o limite de uma sequência cumpre a condição $\left|x_n - b\right| < \varepsilon$, ou seja a subsequência estará incluída neste limite”.

Aluno B2:

> Se a sequência $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a podemos dizer que $\lim x_n = a$.

> Se $\left(x_{n_k}\right)$ é uma subsequência de $\left(x_n\right)$ então ela tende a convergir para este mesmo a. Então $\lim x_{n_k} = a$.
> Já que os elementos de $x_{n_k} \in x_n$ então, x_n e x_{n_k} convergem para o mesmo número.

O Aluno C afirma: “Também irá convergir para o número a, pois $\left(x_{n_k}\right)$ é uma subsequência e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$”.

Os alunos B2 e C possuíam as ideias coerentes com o resultado formal, mas não conseguiram formalizá-la, enquanto que o aluno A1 mostrou-se confuso tomando o resultado que seria a conclusão como hipótese, mas quando citou “pois o limite de uma sequência cumpre a condição $|x_n - b| < \varepsilon$, ou seja a subsequência estará incluída neste limite”, mostrou ter uma ideia próxima aos conceitos formais, percebendo a inclusão do conjunto dos termos da subsequência no conjunto dos termos da sequência e, que isso fará com que a subsequência cumpra a condição do limite.

Todos os alunos nessa questão sabiam que o limite da subsequência é o mesmo da sequência; o problema é que no caso dos alunos A1, B2 e C eles não sabiam validar o resultado, da maneira formal.

Na atividade **“6. Existe uma relação entre a convergência de uma sequência e o fato da mesma ser ou não limitada. Qual seria esta relação? Justifique”** os alunos A2 e A3 demonstraram saber a relação que é a seguinte: toda sequência convergente é limitada. O aluno A2 ainda justificou com demonstração formal. O aluno A3, fez a demonstração para mostrar a validade da relação acima, mas cometeu um deslize ao usar a definição como mostramos abaixo:

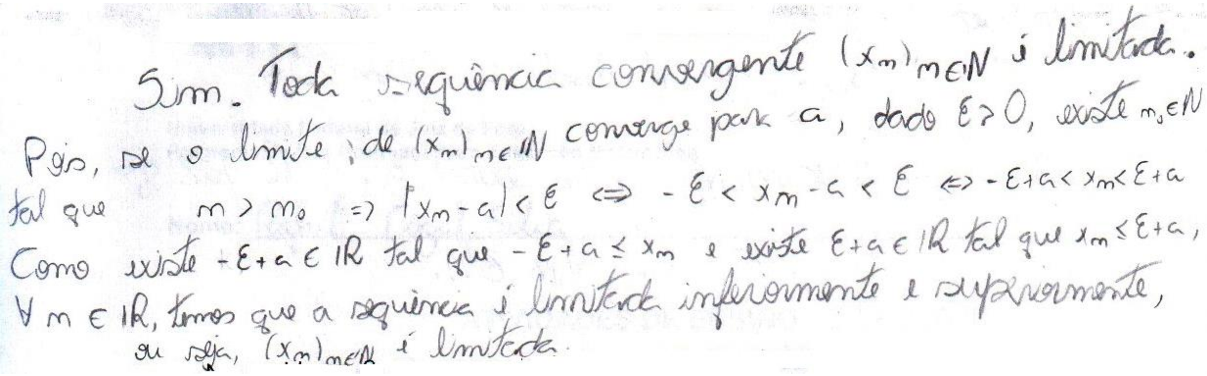

Sim. Toda sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.
Pois, se o limite ; de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$
tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a$
Como existe $-\varepsilon + a \in \mathbb{R}$ tal que $-\varepsilon + a \le x_n$ e existe $\varepsilon + a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \le \varepsilon + a$,
$\forall n \in \mathbb{R}$, temos que a sequência é limitada inferiormente e superiormente,
ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Figura 5: Resolução da atividade 6 feita pelo aluno A3.

Ele considerou que a sequência é limitada pelo intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e esqueceu de que pode haver vários, mas finitos, termos da sequência fora desse intervalo.

O aluno B1 reconheceu que a relação: (x_n) é convergente $\Rightarrow$ (x_n) é limitada. Mas não justificou o resultado. Por outro lado, ele também reconheceu que a recíproca é falsa, mostrando um contraexemplo.

O aluno B2 acreditou na seguinte relação: (x_n) é convergente $\Leftrightarrow$ (x_n) é limitada. O que é um engano, pois assim como o aluno B1 percebeu, se uma sequência é convergente então ela será limitada, ao passo que a recíproca é falsa. E em uma tentativa de justificar, que se uma sequência é convergente, então ela será limitada, nos mostrou uma incoerência com a definição formal. Segue a resposta do aluno B2: "Uma sequência é convergente se e somente se, ela for limitada. Caso a sequência seja convergente para um número k então, a sequência $x_n \leq k$. Portanto limitada".

Ele afirmou nessa resposta que, se uma sequência converge para um número k então todos os seus termos são menores do que esse número k, o que não é verdade, pois não é isso que a definição de convergência afirma.

O aluno A1 fez a seguinte relação: "Se uma sequência é limitada superiormente, podemos ver que esta converge para um valor, tão logo a relação existente é que se uma sequência é convergente esta será necessariamente limitada". Nesse caso, a relação final está correta, mas durante a explicação A1 fez um monte de afirmações falsas, como "se uma sequência é limitada superiormente, podemos ver que esta converge para um valor [...]". A sequência $(-1)^n$ é limitada superiormente e não é convergente.

O aluno C afirmou "se ela for convergente é limitada, caso seja divergente, a sequência poderia ser não limitada". Este aluno conheceu a relação, mas não justificou sua afirmação.

Na atividade **"7. No problema 6, se a sequência for monótona muda alguma coisa na relação estabelecida? Justifique"** os alunos A2 e B1 reconheceram a equivalência, mas só o primeiro fez a demonstração formal, enquanto que o segundo só citou a equivalência. Os alunos A1 e A3 não reconheceram a equivalência, sendo que o segundo demonstrou que se a sequência for monótona e convergente então será limitada. No entanto, esse resultado já foi discutido na questão 6; o que o aluno teria de verificar era se a recíproca seria verdadeira. O aluno A1 também não pensou na recíproca da afirmação da questão 6 e fez argumentos no sentido de negar a mudança na relação, conforme coloca: “Não, pois para a sequência ser monótona ela precisa satisfazer qualquer uma das propriedades enunciadas para as sequências (ser crescente ou decrescente) o que definirá é se ela é ou não limitada e se terá convergência”.

O aluno B2 também não pensou que, ao ser colocada a hipótese da sequência ser monótona, ganharíamos a recíproca do resultado: se uma sequência é convergente, então é limitada. A recíproca seria: se uma sequência é monótona e limitada, então é convergente. B2 assim se posiciona: “Sim, pois nem toda sequência monótona é limitada portanto não podemos concluir que toda sequência monótona é convergente. Ex: Uma sequência que tende a infinito é dita monótona, mas não convergente”.

Notemos que o aluno B2 fez a relação entre sequências monótonas e convergentes, concluiu que nem toda sequência monótona é convergente e construiu uma imagem de conceito, mas não explorou todas as possibilidades.

O aluno C respondeu: “Sim, pois sendo limitada e monótona ela é convergente.” Ele conseguiu verificar essa situação com a ajuda do pesquisador, que o incentivou a analisar todas as possibilidades de relações que poderíamos formular sobre as hipóteses.

Na atividade **“8. Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Dentre os resultados já conhecidos por você, quais nos garante a veracidade da afirmação acima?”** os alunos A2 e A3 citaram o Teorema de Bolzano-Weirstrass. Eles se lembraram desse teorema, mas não colocaram os resultados trabalhados durante a pesquisa, que nos garante a afirmação acima, ou seja, os resultados que teríamos que usar na demonstração da afirmação acima.

O aluno A1 tentou justificar por meio de exemplos, mas cometeu alguns enganos conceituais, como veremos abaixo.

Aluno A1:

> No caso de existir uma sequência monótona do tipo $x_n = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ esta é limitada inferiormente (-1) e superiormente (1); tão logo dizemos que é limitada assim é possível estabelecer 2 subsequências convergentes $\{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$ e

> $\{1,1,1,1,...\}$; logo pode-se demonstrar a veracidade da mesma, assim como também uma sequência decrescente, esta tenderá a um número cada vez menor, podendo ter zero se sua formação for do tipo, por exemplo, $x_n = \frac{1}{n}$, pois quando maior o n, menor será o valor do x_n. $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Notemos que o engano do aluno A1 foi em relação a definição de uma sequência monótona; ele disse que a sequência $x_n = \{-1,1,-1,1,...\}$ é monótona, sendo que não satisfaz tal definição. Por outro lado, apesar de não ser uma demonstração para o resultado, criou uma imagem de conceito (que foi o seu exemplo) para a situação descrita no enunciado. Nesse caso, pudemos explorar um conflito potencial que surgiu com a incoerência em seu exemplo, onde colocamos a sequência que A1 chamou de monótona em confronto com a definição de sequência monótona. Nesse caso, ao fazermos isso, o aluno compreendeu que a sequência não era monótona e mais, não precisava ser para validar seu exemplo.

O aluno B2 possuiu uma incoerência com o resultado formal, ao acreditar que conseguimos subsequências, de uma sequência limitada, que convergem para seus limites superior e inferior: “Se a sequência x_n é limitada então existe um $k \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq k$ e $k_1 \leq x_{n_1}$, $n, n_1 \in \mathbb{N}$, $k, k_1 \in \mathbb{R}$”. “Podemos definir subsequências que são convergentes para k ou k_1”.

Para contrastar sua imagem de conceito com a definição formal, usamos a seguinte sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{1}{n}$, que é limitada superiormente por 1 e em que não existe subsequência de (x_n) que converge para 1. Esse contraste serviu para provocar um conflito potencial com a finalidade de modificar sua imagem de conceito.

O aluno B1 disse que a ideia era a mesma utilizada na atividade 5, mas as hipóteses da atividade 5 eram diferentes das hipóteses da questão 8. O aluno C, depois de orientações do pesquisador, pensou em algumas relações entre as hipóteses e concluiu o seguinte: “como a sequência é limitada e monótona ela é convergente, também a subsequência é convergente” (aluno C). O resultado que o estudante afirmou já havia sido estudado e validado nas atividades anteriores, o problema aqui é: se pegarmos uma sequência qualquer sem ser monótona e também não periódica? O resultado da atividade 8 é válido para toda sequência, mas o aluno C, assim como o A1, não conseguiu criar imagens de conceito que validassem a afirmação da atividade 8.

4.2.4 Atividades de ensino 9, 10 e 11.

Essas atividades foram aplicadas para os alunos A1, A2, A3, B1 e B2 no dia 19 de novembro de 2013 e, para o aluno C no dia 11 de fevereiro de 2014.

Na atividade **“9. Utilize resultados já conhecidos para encontrar e explicar o limite de** $\frac{1}{n}$ **e de** a^n**, para** $0 < a < 1$**?”** o aluno A3 encontrou o limite e o explicou via definição formal, conforme verificado abaixo:

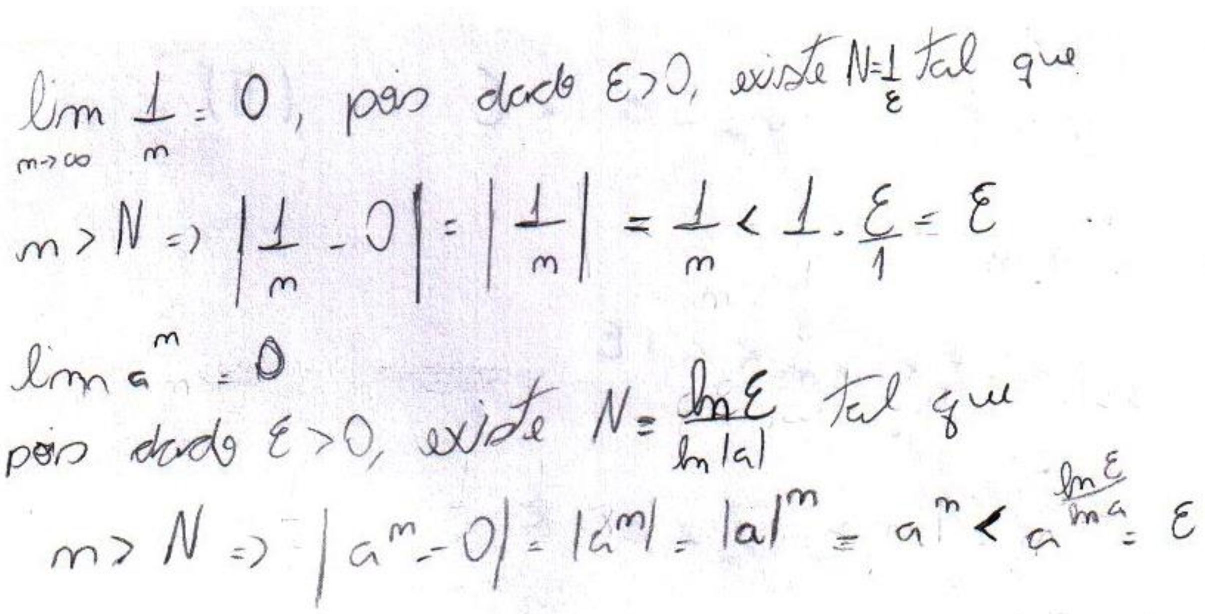


Figura 6: Resolução da atividade 9 feita pelo aluno A3.

O aluno A2 também encontrou os limites, mas não os comprovou via definição, que seria a maneira formal. Ao invés disso ele listou os termos das sequências para explicar os resultados, como vemos abaixo:

- Sendo $a_n = \frac{1}{n}$, temos que $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Este limite existe, pois se listarmos os termos de a_n, temos que

$a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, isto é, a_n é uma sequência monótona (decrescente) e limitada (superiormente por 1 e inferiormente por 0) e sabemos que toda sequência monótona limitada é convergente.

- Para a sequência $b_n = a^n$, $0 < a < 1$, temos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Este limite existe pelo mesmo argumento citado acima.

O aluno B1 trouxe as ideias do Cálculo I, e uma dessas ideias foi pensar em uma tabela que nos mostrasse o que estava acontecendo com os valores da sequência. Assim, ele encontrou os valores de cada limite proposto pela atividade. Foi importante observar que ele utilizou alguns conceitos trabalhados para justificar os resultados, como veremos abaixo.

Aluno B1:

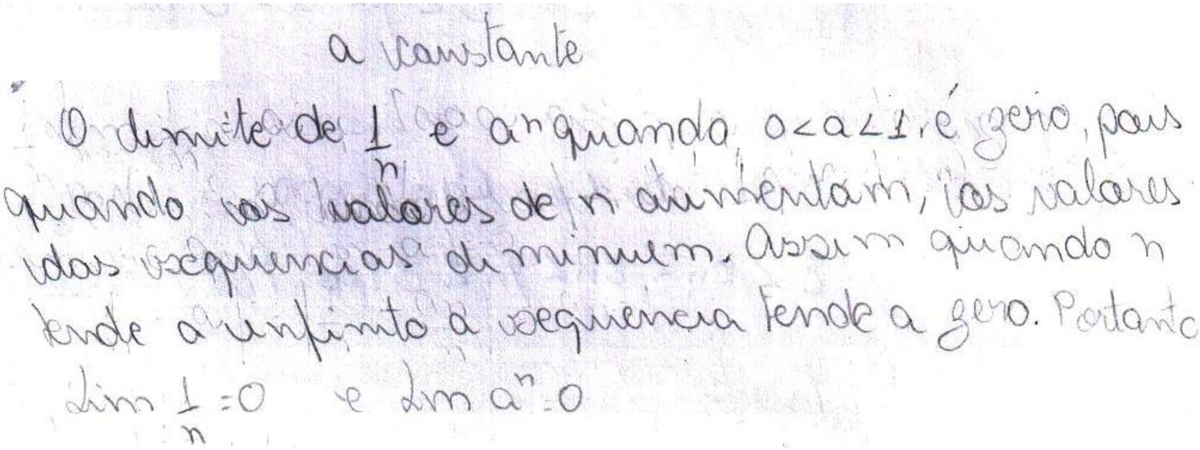
O limite de ambos é zero, pois se n tende à infinito teremos:

- No caso $\frac{1}{n}$, quando temos algo dividido por um número que só tende à cresce, o resultado será cada vez menor, se aproximando de zero, mas nunca será igual à zero.
- No caso a^n, para $0 < a < 1$ a ideia será a mesma do $\frac{1}{n}$. Isso se deve ao fato de que ambas são sequências monótonas e convergentes.

Na justificativa do aluno B1 “isso se deve ao fato de que ambas são sequências monótonas e convergentes”, podemos perceber que o estudante parte do pressuposto de que a sequência é convergente, quando, na verdade, a convergência é consequência da sequência ser limitada e monótona.

O aluno B2 utilizou a mesma ideia do aluno B1, trazendo a experiência do Cálculo I, mas não fez uso dos conceitos estudados durante a pesquisa para comprovar a convergência das sequências.

Aluno B2:

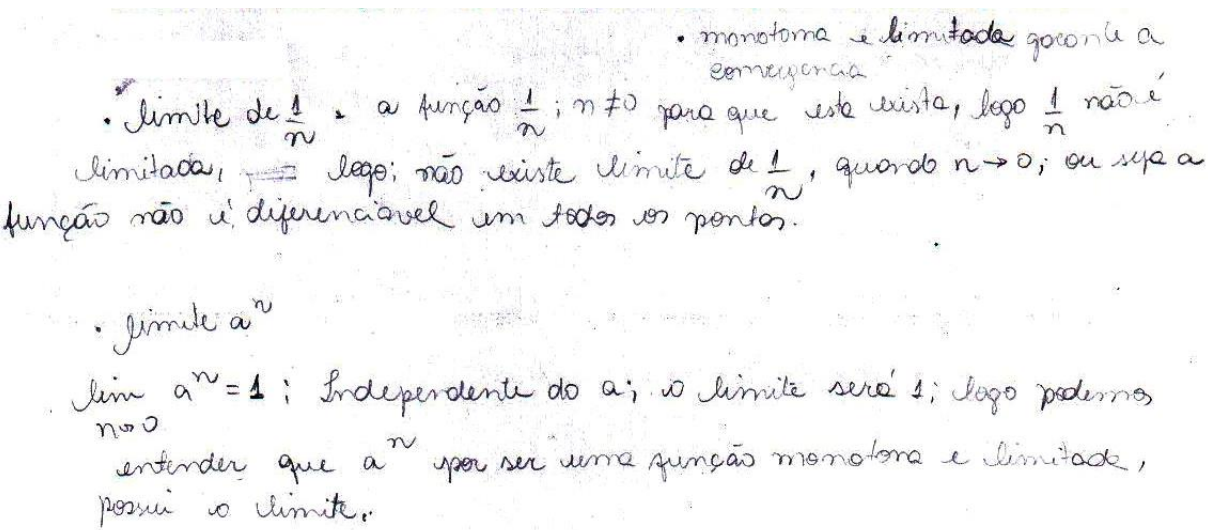


a constante

O limite de $\frac{1}{n}$ e a^n quando $0<a<1$, é zero, pois quando os valores de n aumentam, os valores das sequencias diminuem. Assim quando n tende a infinito a sequencia tende a zero. Portanto $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $\lim a^n = 0$

Figura 7: Resolução da atividade 9 feita pelo aluno B2.

O aluno A1 mostrou não compreender o significado de convergência de uma sequência ao calcular os limites das sequências quando $n \to 0$. Por outro lado, mostrou ter incorporado alguns dos conceitos já estudados, conforme apresenta:



• monotona e limitada garante a convergencia

• limite de $\frac{1}{n}$: a função $\frac{1}{n}$; $n \neq 0$ para que esta exista, logo $\frac{1}{n}$ não é limitada, logo; não existe limite de $\frac{1}{n}$, quando $n \to 0$; ou seja a função não é diferenciável em todos os pontos.

• limite a^n

$\lim_{n \to 0} a^n = 1$; Independente do a; o limite será 1; logo podemos entender que a^n por ser uma função monotona e limitada, possui o limite.

Figura 8: Resolução da atividade 9 feita pelo aluno A1.

O aluno C usou seus conhecimentos de Cálculo para determinar o resultado e escreveu que ambas as sequências são limitadas, mas não fez menção ao fato de serem monótonas (o que garantiria a convergência); também não fez a demonstração via definição.

Os estudantes de Cálculo ou Análise podem pensar nos limites deste exercício utilizando a representação geométrica – que seria observar os gráficos das sequências. Listar os termos da sequência ou até mesmo usar tabelas também seriam outros tipos de representações, que poderiam nos permitir enxergar regularidades. A definição formal não nos ajuda a encontrar o limite, ela serve apenas para validar o resultado. Os conceitos trabalhados nos ajudariam a garantir a existência do limite, mas não o valor do limite, como o fato das duas sequências serem limitadas e monótonas; podemos afirmar que elas seriam convergentes. Ainda assim, a única forma de validar seria por meio da definição de limite.

Na atividade **“10. Seja $\lim x_n = a$. Se $a > b$, conseguiremos encontrar um n_0 onde para todo $n > n_0$ tenhamos $x_n > b$? Justifique”** todos os participantes fizeram a demonstração formal, com a orientação do pesquisador. Destacamos o desenvolvimento do aluno B1, que utilizou a representação gráfica como recurso para entender o que estava acontecendo. Aluno B1:

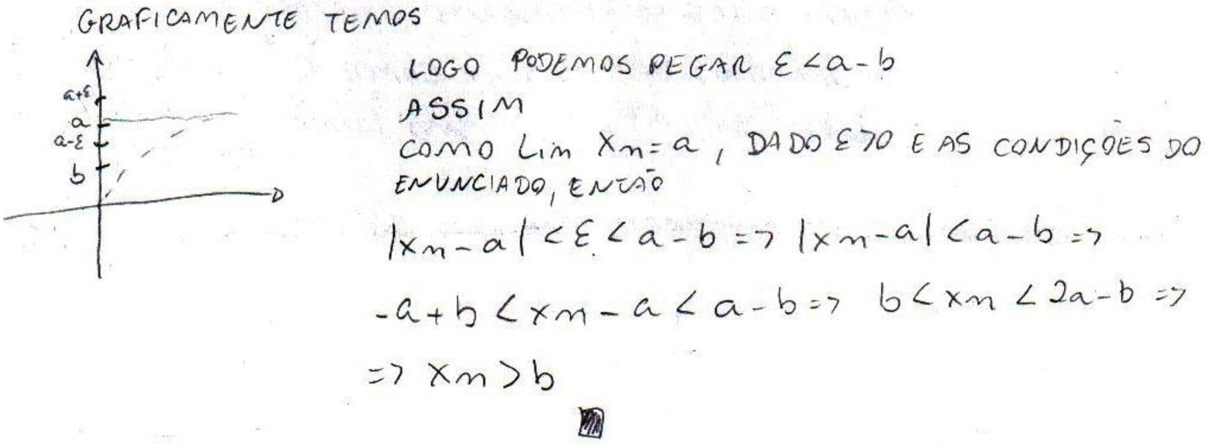


Figura 9: Resolução da atividade 10 feita pelo aluno B1.

O aluno C também usou uma representação geométrica para auxiliá-lo no desenvolvimento da resolução da atividade – mas o desenvolvimento algébrico fez separado –, e também contou com a orientação do pesquisador para chegar no resultado, conforme mostrado abaixo.

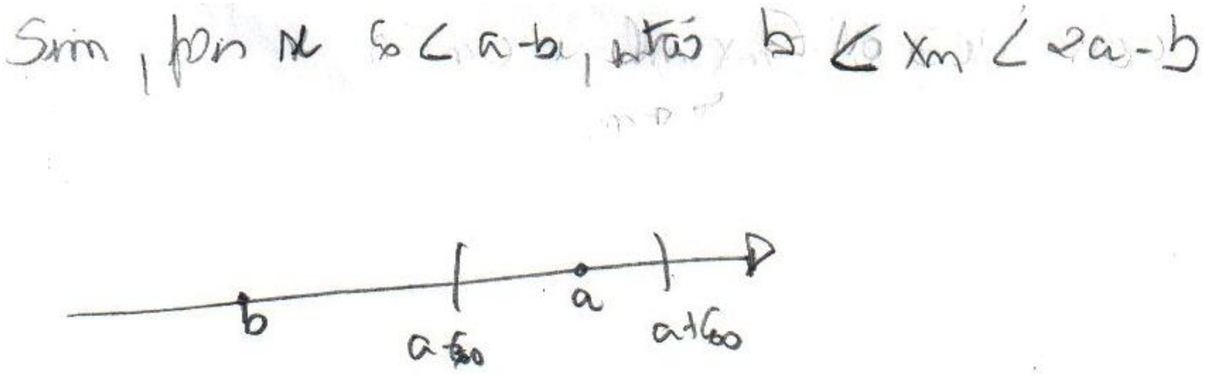


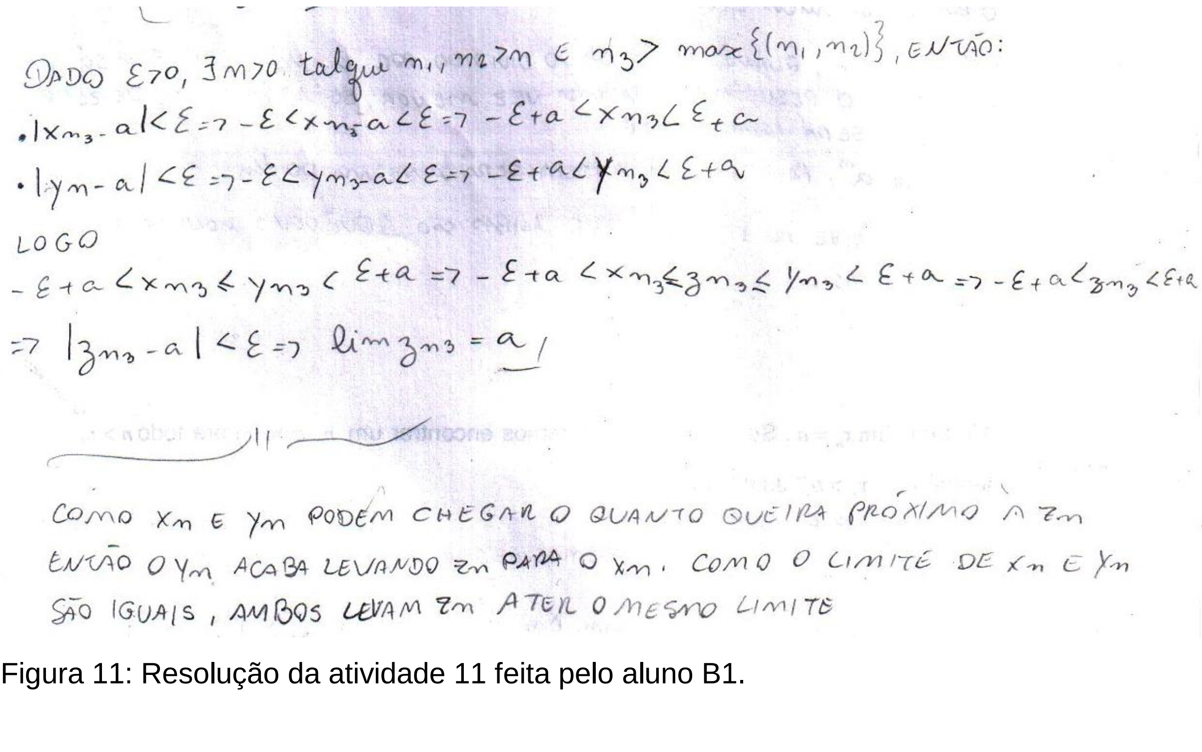
Figura 10: Resolução da atividade 10 feita pelo aluno C.

O desenvolvimento algébrico do aluno C foi feito em um rascunho e por isso não apareceu na resolução.

Os alunos A1 e B2, mesmo sabendo o valor de ε, tiveram dificuldade para concluir o resultado, pois não conseguiram pensar a frente para fazer as manipulações algébricas; no entanto, foram ajudados pelos alunos A2 e B1 e, assim conseguiram concluir a atividade.

Na atividade **“11. Seja $\lim x_n = \lim y_n = a$. Se $x_n \le z_n \le y_n$ para todo n suficientemente grande, qual será o valor do $\lim z_n$? Justifique e demonstre o resultado”** os alunos A2, A3, B1 e B2 foram para a demonstração formal, mas ambos se esqueceram (ou não compreenderam) de tomar um n_3 que satisfaça a relação “$n > n_3$ implica $x_n \le z_n \le y_n$”. O aluno B1 se confundiu com os índices, enquanto que os alunos A3 e B2 desconsideraram as igualdades na desigualdade $x_n \le z_n \le y_n$, e usaram as seguintes hipóteses.

Aluno B1:



DADO $\varepsilon > 0$, $\exists\, m > 0$ tal que $n_1, n_2 > m$ e $n_3 > \max\{(n_1, n_2)\}$, ENTÃO:

• $|x_{n_3} - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_{n_3} - a < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + a < x_{n_3} < \varepsilon + a$

• $|y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y_{n_3} - a < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + a < y_{n_3} < \varepsilon + a$

LOGO

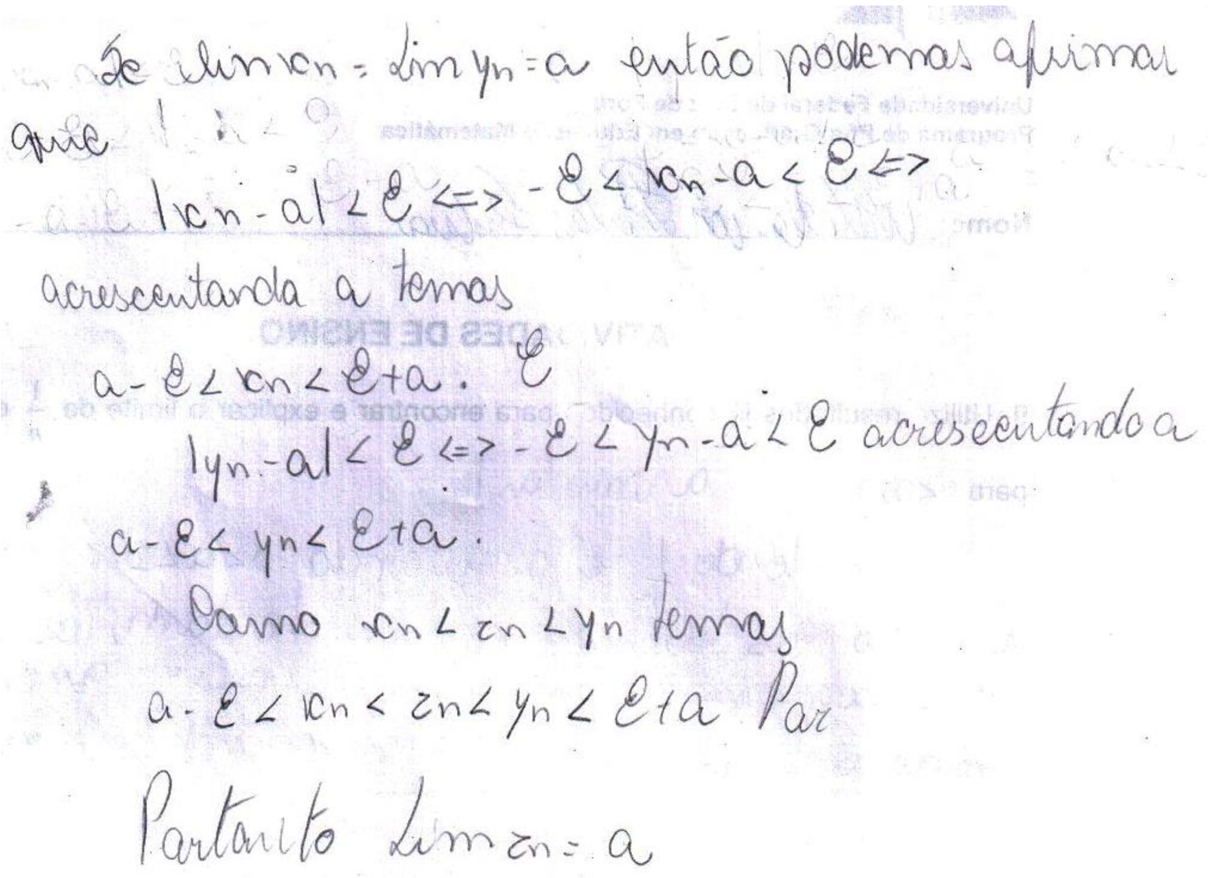
$-\varepsilon + a < x_{n_3} \le y_{n_3} < \varepsilon + a \Rightarrow -\varepsilon + a < x_{n_3} \le z_{n_3} \le y_{n_3} < \varepsilon + a \Rightarrow -\varepsilon + a < z_{n_3} < \varepsilon + a$

$\Rightarrow |z_{n_3} - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim z_{n_3} = a$

COMO x_n E y_n PODEM CHEGAR O QUANTO QUEIRA PRÓXIMO A z_n ENTÃO O y_n ACABA LEVANDO z_n PARA O x_n. COMO O LIMITE DE x_n E y_n SÃO IGUAIS, AMBOS LEVAM z_n ATÉ O MESMO LIMITE

Figura 11: Resolução da atividade 11 feita pelo aluno B1.

Aluno B2:



Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ então podemos afirmar que

$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow$

acrescentando a temos

$a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a$. ε

$|y_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$ acrescentando a

$a - \varepsilon < y_n < \varepsilon + a$.

Como $x_n < z_n < y_n$ temos

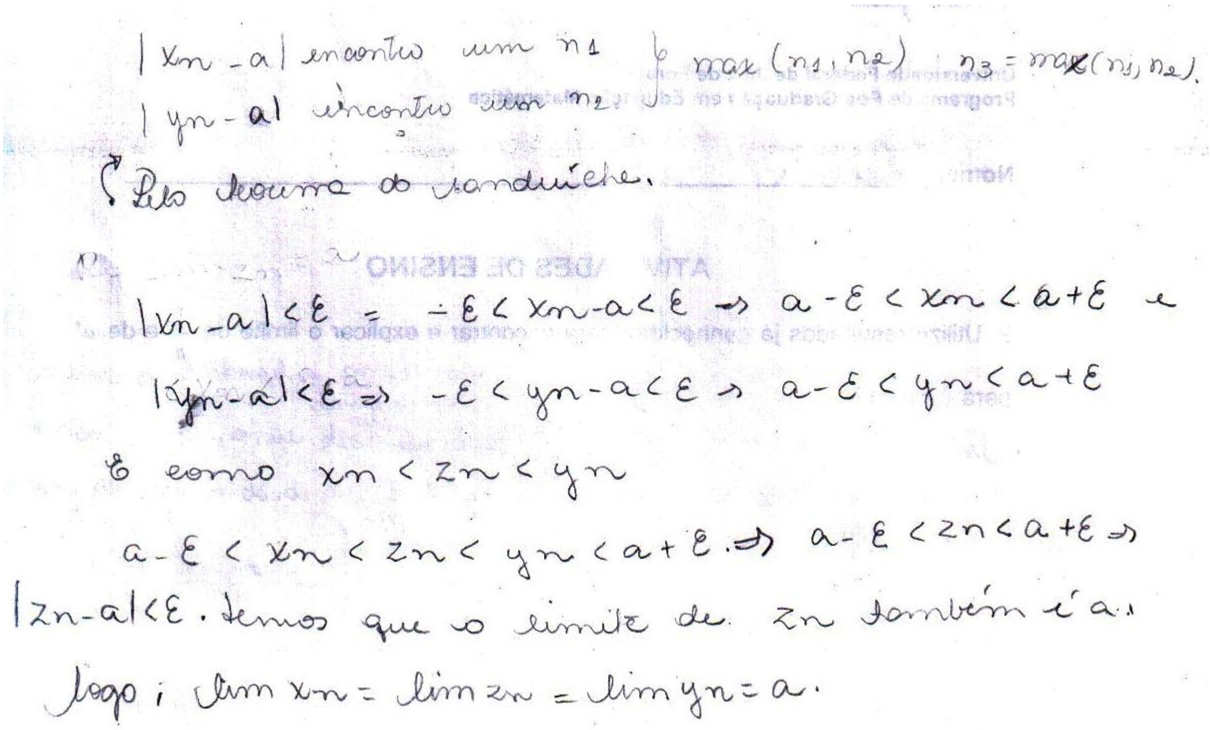
$a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < \varepsilon + a$ Par

Portanto $\lim z_n = a$

Figura 12: Resolução da atividade 11 feita pelo aluno B2.

O aluno A1 fez menção aos índices, mas não os ligaram ao resto da demonstração e ainda citou o Teorema do Sanduíche para explicar alguns passos de sua resolução, não percebendo que a atividade acima é o próprio Teorema do Sanduíche.

Aluno A1:


$|x_n - a|$ encontro um n_1 | $\max(n_1, n_2)$ $n_3 = \max(n_1, n_2)$.

$|y_n - a|$ encontro um n_2

Pelo teorema do sanduíche.

$|x_n - a| < \varepsilon = -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e

$|y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

E como $x_n < z_n < y_n$

$a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \Rightarrow$

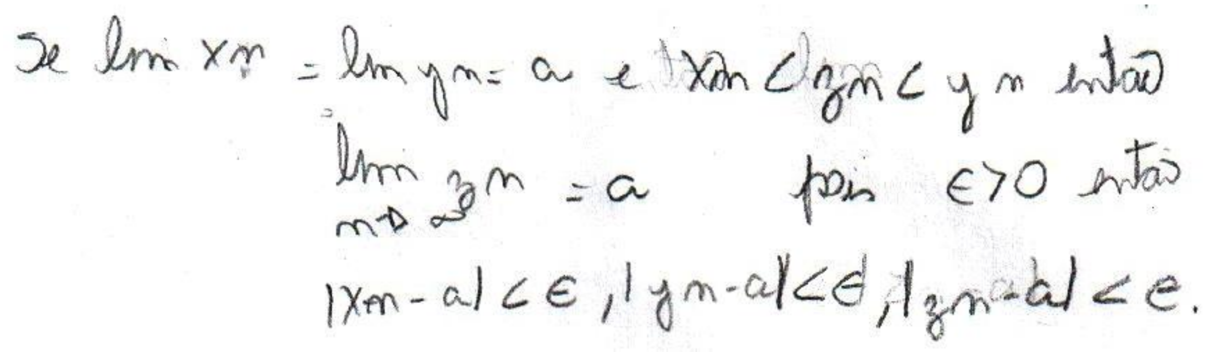
$|z_n - a| < \varepsilon$. temos que o limite de z_n também é a.

logo: $\lim x_n = \lim z_n = \lim y_n = a$.

Figura 13: Resolução da atividade 11 feita pelo aluno A1.

O aluno C não utilizou a demonstração formal; encontrou o resultado e não observou a condição dos índices. Segue sua resolução:

Aluno C:


Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n < z_n < y_n$ então

$\lim_{n \to \infty} z_n = a$ pois $\epsilon > 0$ então

$|x_n - a| < \epsilon$, $|y_n - a| < \epsilon$, $|z_n - a| < \epsilon$.

Figura 14: Resolução da atividade 11 feita pelo aluno C.

4.2.5 Atividades de ensino 12, 13, 14 e 15.

Essas atividades foram aplicadas no dia 3 de dezembro de 2013 para os alunos A1, A2, A3, B1 e B2, e para o aluno C no dia 18 de fevereiro de 2014.

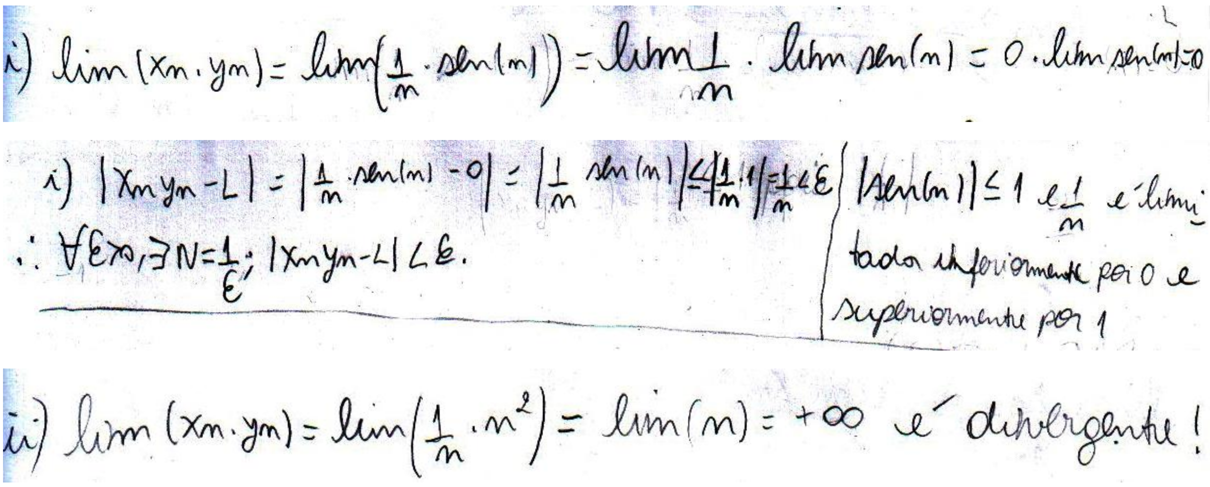
Na atividade **“12. Por meio da definição, calcule o** $\lim(x_n.y_n)$ **em cada uma das situações abaixo.**

i) Para $x_n = \frac{1}{n}$ **e** $y_n = sen(x)$**;**

ii) Para $x_n = \frac{1}{n}$ **e** $y_n = n^2$**”**

os alunos A2, A3, B1, B2 e C usaram argumentos do Cálculo para calcular os limites, mas só os alunos A2, A3 e C usaram a definição para justificar os limites e, ainda assim só no item (i); o item (ii) não foi justificado via definição por ninguém.

Aluno A2:



i) $\lim(x_n . y_n) = \lim\left(\frac{1}{n} . sen(n)\right) = \lim \frac{1}{n} . \lim sen(n) = 0 . \lim sen(n) = 0$

i) $|x_n y_n - L| = \left|\frac{1}{n} . sen(n) - 0\right| = \left|\frac{1}{n} sen(n)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| . |1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ | $|sen(n)| \leq 1$ e $\frac{1}{n}$ é limitado inferiormente por 0 e superiormente por 1

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\varepsilon}; |x_n y_n - L| < \varepsilon.$

ii) $\lim(x_n . y_n) = \lim\left(\frac{1}{n} . n^2\right) = \lim(n) = +\infty$ é divergente!

Figura 15: Resolução da atividade 12 feita pelo aluno A2.

Aluno A3:

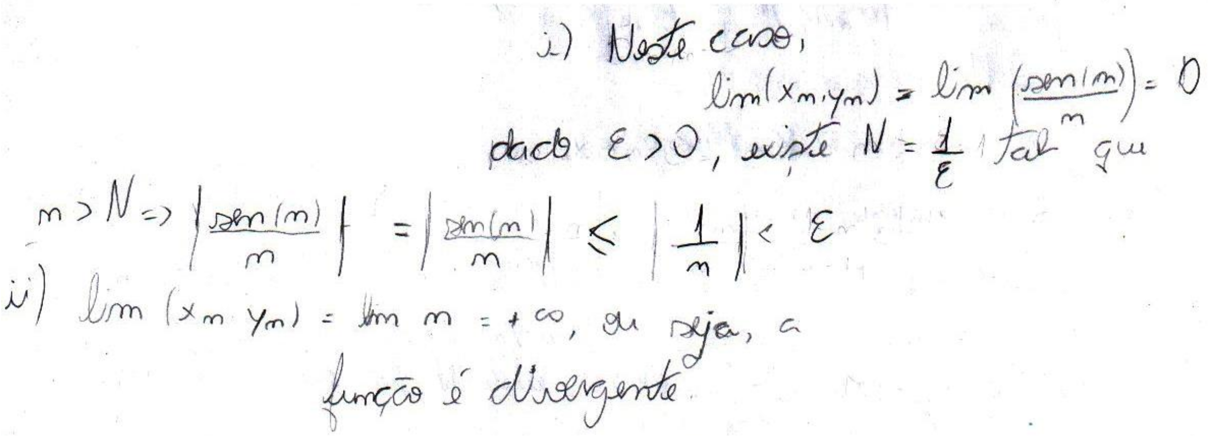


Figura 16: Resolução da atividade 12 feita pelo aluno A3.

O aluno C mostrou saber que a função seno é limitada, mas não citou o resultado que nos garantiria que o limite do item (i) vá para 0 (zero); ele usou os limites inferior e superior no cálculo do limite e encontrou o valor correto. Nota-se que, mesmo não escrevendo, o estudante usou o Teorema do Confronto (ou Sanduíche) em sua justificativa. Por outro lado, no item (ii), notamos um erro conceitual que este aluno tem sobre os índices de uma sequência, pois colocou como resultado do limite deste item mais ou menos infinito, ou seja, considerou que os índices de uma sequência poderiam ir para menos infinito. Abaixo a resolução do aluno C.

Aluno C:

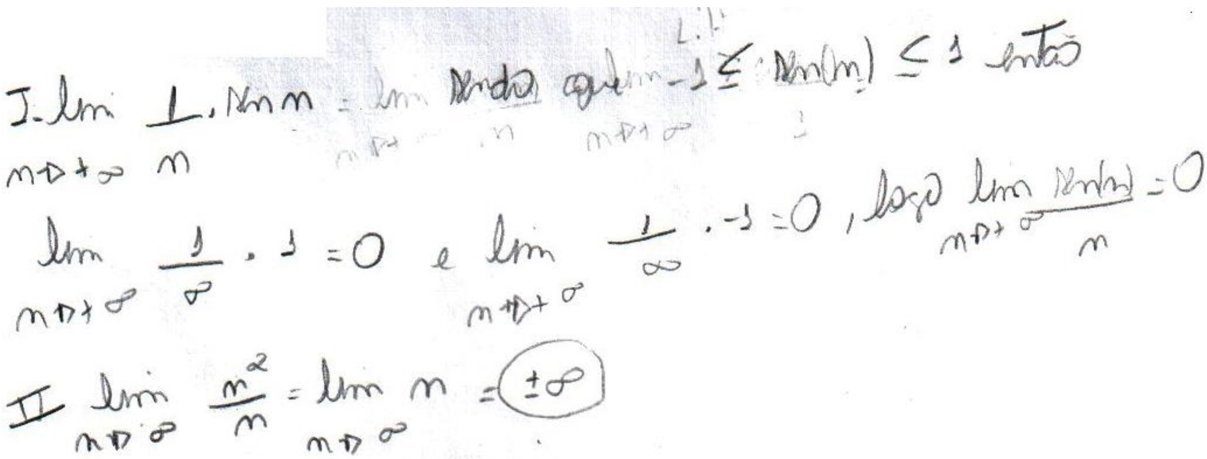


Figura 17: Resolução da atividade 12 feita pelo aluno C.

O aluno A1 conseguiu, no item (i), encontrar uma relação entre n e ε, e só faltou escrever a demonstração, que seria fazer as contas de trás para a frente. No item (ii), ele não conseguiu encontrar a relação entre n e ε, até porque o limite neste item é mais infinito e a definição que foi utilizada por ele foi para sequências convergentes, como podemos verificar abaixo.

Aluno A1:

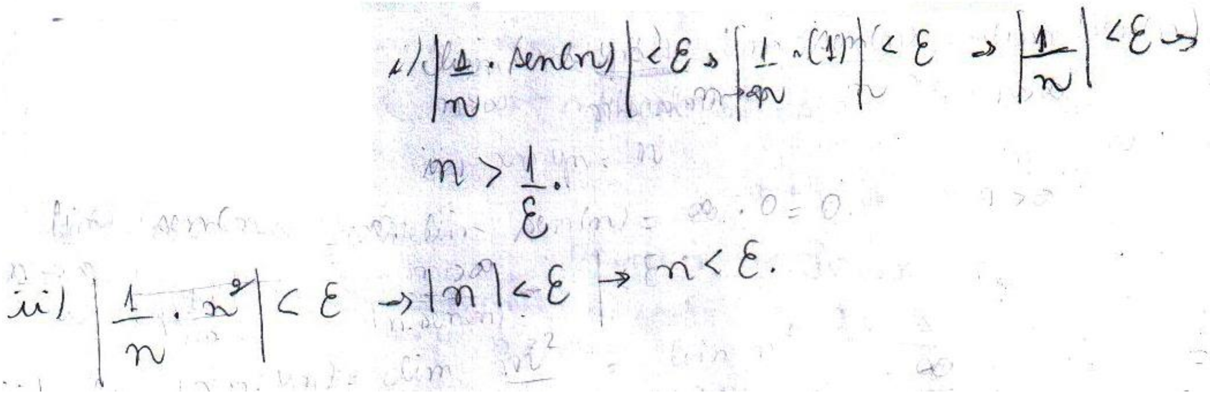
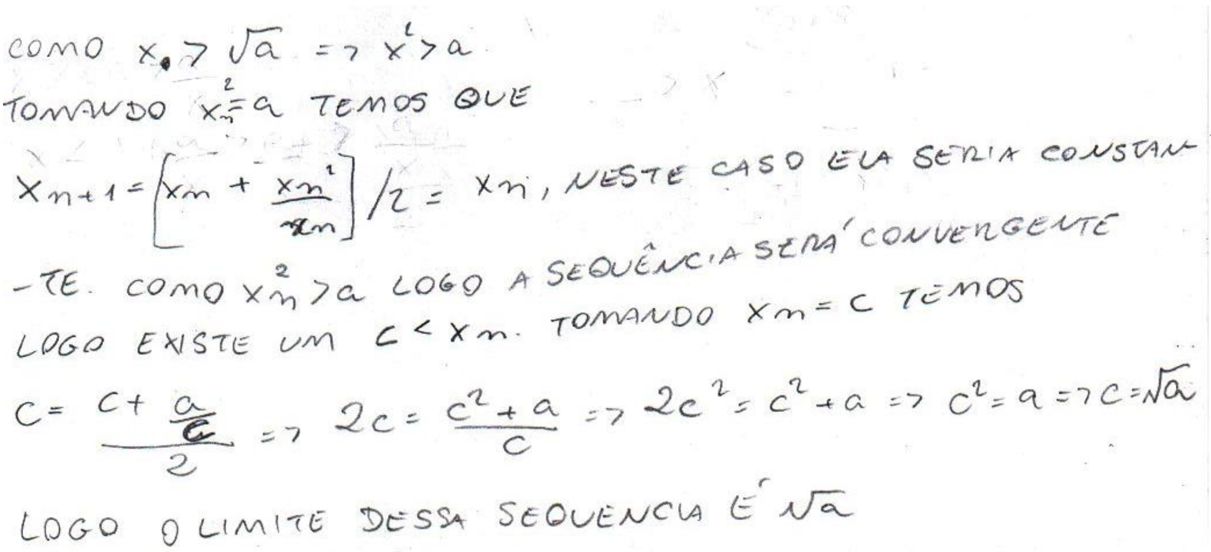


Figura 18: Resolução da atividade 12 feita pelo aluno A1.

Na atividade **“13. Seja a sequência** $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ **onde** $x_1 > \sqrt{a}$ **e** $x_{n+1} = \left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]/2$**. Calcule o limite dessa sequência”** o aluno B1, apesar de não deixar claro, mostrou que a sequência é monótona decrescente, mas não provou que é limitada inferiormente por $\sqrt{a}$. Ele afirmou ainda que ela é convergente por tomar um valor c e mostra que $c = \sqrt{a}$. O problema é afirmar a existência desse número c sem antes verificar que a sequência é limitada.

Aluno B1:


COMO $x_0 > \sqrt{a} \Rightarrow x^2 > a$

TOMANDO $x_n^2 = a$ TEMOS QUE

$x_{n+1} = \left[x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right]/2 = x_n$, NESTE CASO ELA SERIA CONSTAN-

-TE. COMO $x_n^2 > a$ LOGO A SEQUÊNCIA SERÁ CONVERGENTE

LOGO EXISTE UM $c < x_n$. TOMANDO $x_n = c$ TEMOS

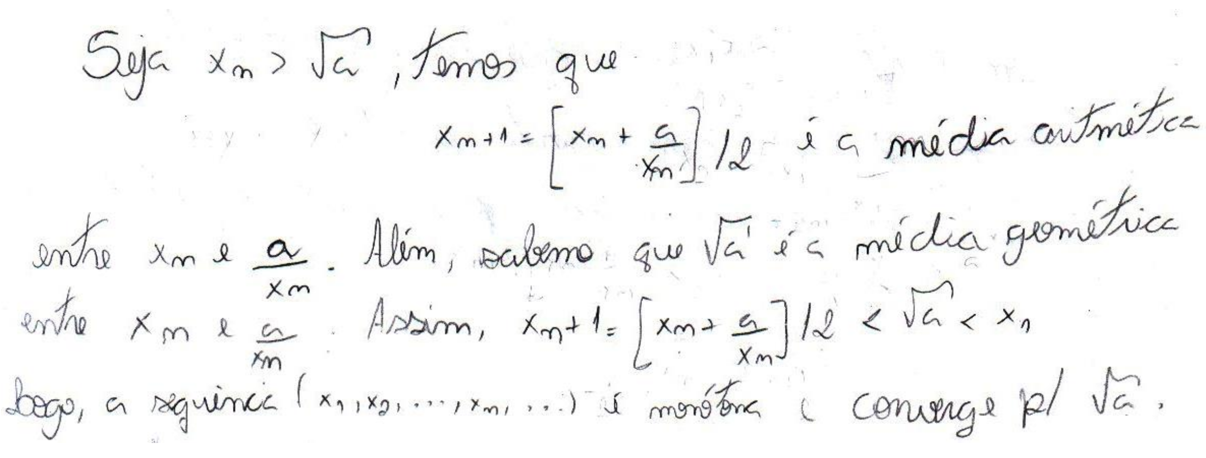
$c = \frac{c + \frac{a}{c}}{2} \Rightarrow 2c = \frac{c^2 + a}{c} \Rightarrow 2c^2 = c^2 + a \Rightarrow c^2 = a \Rightarrow c = \sqrt{a}$

LOGO O LIMITE DESSA SEQUENCIA É $\sqrt{a}$

Figura 19: Resolução da atividade 13 feita pelo aluno B1.

O aluno A3 fez uma comparação entre as médias aritmética e geométrica dos termos x_n e $\frac{a}{x_n}$, mas fez comparações erradas e mais, citou o fato da sequência ser monótona, apesar de ter provado a desigualdade contrária; afirmou também que é convergente.

Aluno A3:


Seja $x_n > \sqrt{a}$, temos que

$x_{n+1} = \left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]/2$ é a média aritmética

entre x_n e $\frac{a}{x_n}$. Além, sabemos que $\sqrt{a}$ é a média geométrica

entre x_n e $\frac{a}{x_n}$. Assim, $x_n + 1 = \left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]/2 < \sqrt{a} < x_1$

Logo, a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ é monótona e converge p/ $\sqrt{a}$.

Figura 20: Resolução da atividade 13 feita pelo aluno A3.

O aluno A2 usou a desigualdade das médias aritméticas e geométricas entre os termos x_n e $\frac{a}{x_n}$, sem citá-las; conseguiu concluir que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{a}$, mas parou por nisto.

Aluno A2:

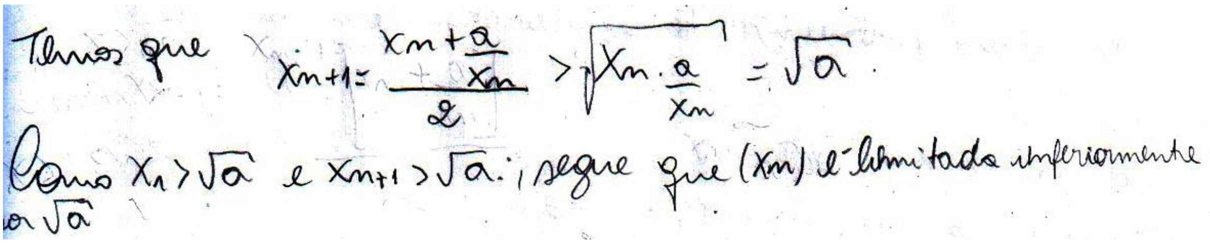

Temos que $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} > \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$.
Como $x_1 > \sqrt{a}$ e $x_{n+1} > \sqrt{a}$ ∴ segue que (x_n) é limitada inferiormente por $\sqrt{a}$

Figura 21: Resolução da atividade 13 feita pelo aluno A2.

O aluno A1 também lançou mão da comparação entre as médias aritméticas e geométricas, mas não conseguiu concluir nada a partir de então. Ele chegou a afirmar que "a sequência é monótona e limitada e com isso é convergente" (Aluno A1).

O aluno B2 não conseguiu fazer. Até realizou alguma manipulação algébrica, mas não conseguiu desenvolver a resolução.

O aluno C calculou o limite da expressão que nos fornece o termo x_{n+1} e concluiu que este tende a mais ou menos infinito. Mais uma vez ele cometeu um erro conceitual ao afirmar que o quociente $\frac{a}{x_n}$ tende à zero, confundindo o fato dos índices tenderem a mais infinito com os valores da sequência. Ao afirmar que o termo x_{n+1} tendia a mais ou menos infinito, nos mostrou que ainda não compreendia bem o significado de limite de uma sequência, pois estudamos este limite quando os índices tendem a mais infinito, até porque, pela definição de sequência, que é uma função $F:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, não faz sentido fazer os índices tenderem a menos infinito.

Na atividade **"14. Demonstre os resultados abaixo.**

i) Se $\lim x_n = +\infty$ **e** (y_n) **é limitada inferiormente então** $\lim(x_n + y_n) = +\infty$**;**

ii) Se $\lim x_n = +\infty$ **e existe** $c > 0$ **tal que** $y_n > c$ **para todo** $n \in \mathbb{N}$ **então** $\lim(x_n . y_n) = +\infty$**;**

iii) Se $x_n > c > 0$**,** $y_n > 0$ **para todo** $n \in \mathbb{N}$ **e** $\lim(y_n) = 0$ **então** $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$**;**

iv) Se (x_n) **é limitada e** $\lim y_n = +\infty$ **então** $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$**"**

o aluno A3 tentou demonstrar, os resultados da questão via definição; conseguiu fazer bem os itens (i) e (ii) apesar de inverter uma desigualdade. Já nos itens (iii) e (iv) se confundiu e não conseguiu demonstrar.

Aluno A3:

i) Por hipótese, $\forall K>0, \exists N$ tal que $n > N \Rightarrow x_n > K$
e $|y_n| < M$, com K e $M \in \mathbb{R}$
Assim, $\exists N_1$ tal que $n > N_1 \Rightarrow$
$K - M < \ldots \Rightarrow K - M < y_n + x_n$
Logo, $\lim(x_n + y_n) = +\infty$

ii) Por hipótese, $\forall K>0, \exists N$ tal que $n > N \Rightarrow x_n > K$ e $y_n > c$. Assim, $\exists N_1$ tal que $n > N_1 \Rightarrow x_n \cdot y_n > Kc$. Logo, $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$

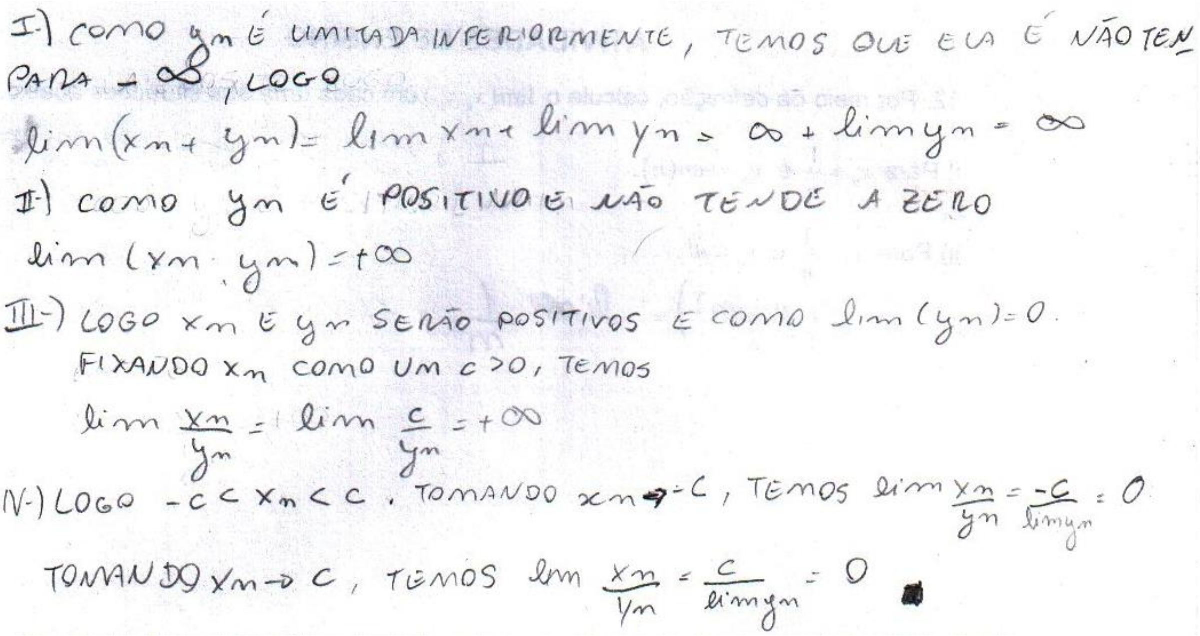
iii) Por hipótese, $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ e $\forall K > 0$, existe N tal que $n > N \Rightarrow |y_n| < K$.
Assim, $\frac{y_n}{x_n} < \frac{K}{c}$. Logo, lim $\lim \frac{y_n}{x_n} = +\infty$

iv) Por hipótese, $|x_n| < M$ e $\forall K > 0, \exists N$ tal que $n > N \Rightarrow y_n > K$. Assim, $|y_n| > K$ e dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que
$n > N \Rightarrow \frac{|x_n|}{|y_n|} = \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{M}{K} = \varepsilon$

Figura 22: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno A3.

Os outros cinco alunos não usaram a definição formal, sendo que os alunos B1 e B2 tentaram explicar os resultados através de palavras, nos mostrando suas definições de conceito.

Aluno B1:



I-) COMO y_n É LIMITADA INFERIORMENTE, TEMOS QUE ELA É NÃO TEN PARA $-\infty$, LOGO

$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = \infty + \lim y_n = \infty$

II-) COMO y_n É POSITIVO E NÃO TENDE A ZERO

$\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$

III-) LOGO x_n E y_n SERÃO POSITIVOS E COMO $\lim(y_n) = 0$.

FIXANDO x_n COMO UM $c > 0$, TEMOS

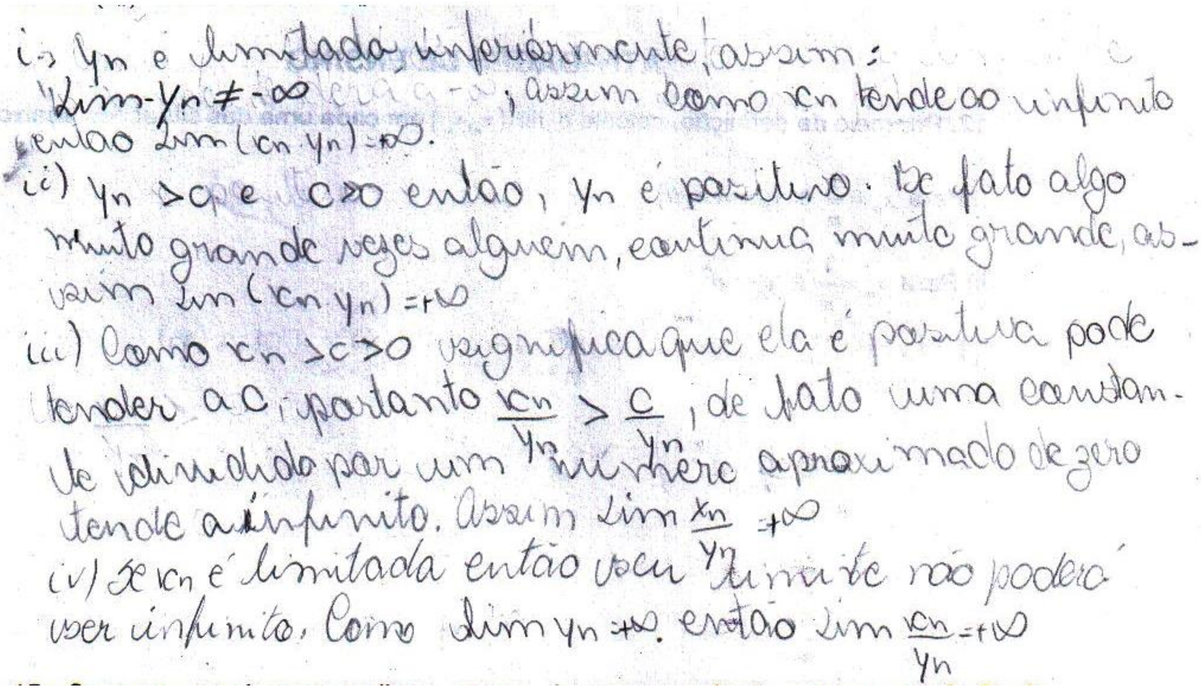
$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{c}{y_n} = +\infty$

IV-) LOGO $-c < x_n < c$. TOMANDO $x_n \to -c$, TEMOS $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{-c}{\lim y_n} = 0$

TOMANDO $x_n \to c$, TEMOS $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{c}{\lim y_n} = 0$ ■

Figura 23: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno B1.

Aluno B2:



i-) y_n é limitada inferiormente, assim:

$\lim y_n \neq -\infty$, assim como x_n tende ao infinito então $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

ii) $y_n > c$ e $c > 0$ então, y_n é positivo. De fato algo muito grande vezes alguém, continua muito grande, assim $\lim(x_n y_n) = +\infty$

iii) Como $x_n > c > 0$ significa que ela é positiva pode tender a c, portanto $\frac{x_n}{y_n} > \frac{c}{y_n}$, de fato uma constante dividido por um número aproximado de zero tende a infinito. Assim $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

iv) Se x_n é limitada então seu limite não poderá ser infinito. Como $\lim y_n = +\infty$. então $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

Figura 24: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno B2.

O aluno A2 utilizou o conhecimento adquirido na disciplina de Cálculo para encontrar os limites.

Aluno A2:

i) $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = +\infty + \lim y_n = +\infty$.

ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = +\infty \cdot \lim y_n = +\infty$.

iii) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = +\infty$ (pois $x_n > c > 0$).

iv) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = 0$ (pois x_n é limitada e $\lim y_n = \infty$)

Figura 25: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno A2.

Ao observarmos com cuidado a resolução do aluno A1, mesmo utilizando as ideias do Cálculo, notamos que este fez afirmações falsas e dá valores que particularizam os resultados.

Aluno A1:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e y_n = limitada inferiormente - então o limite de $y_n = k$,

assim $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty + 0 = +\infty$.

ii) $\lim x_n = +\infty$ e $y_n > c \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n =$

$= +\infty \cdot k = +\infty$.

iii) $x_n > c > 0$ e $y_n > 0$.

$\frac{x_n}{y_n} > \frac{c}{y_n}$ logo o $\lim_{n\to 0} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to 0} \frac{c}{y_n} = +\infty$

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0 \Rightarrow \frac{0}{+\infty} = 0$.

Figura 26: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno A1.

O aluno C:

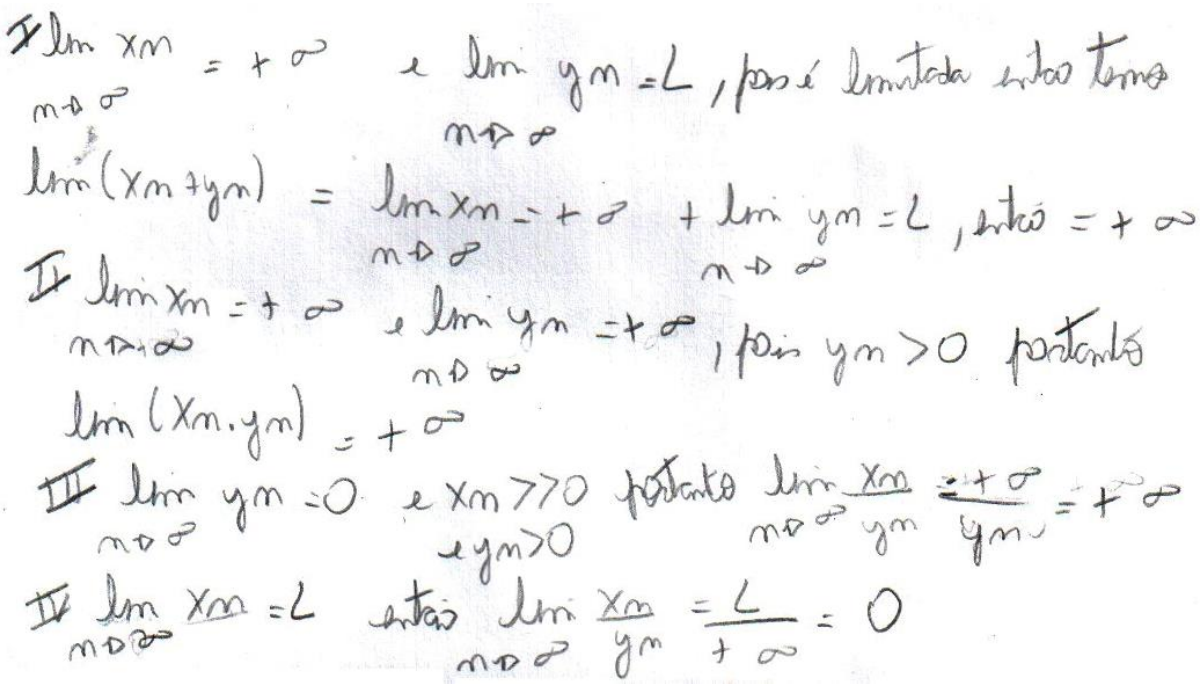

I $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \to \infty} y_n = L$, pois é limitada então temos
$\lim (x_n + y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty + \lim_{n \to \infty} y_n = L$, então $= +\infty$
II $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$, pois $y_n > 0$ portanto
$\lim (x_n . y_n) = +\infty$
III $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ e $x_n >> 0$ e $y_n > 0$ portanto $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{+\infty}{y_n} = +\infty$
IV $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ então $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{L}{+\infty} = 0$

Figura 27: Resolução da atividade 14 feita pelo aluno C.

A atividade **“15. Com suas palavras explique o que é uma sequência convergente? Quais características assume uma sequência convergente?”** foi elaborada para que pudéssemos analisar o que os alunos, depois das atividades de ensino, falavam sobre sequência convergente e suas características. Obtivemos:

Aluno A1:

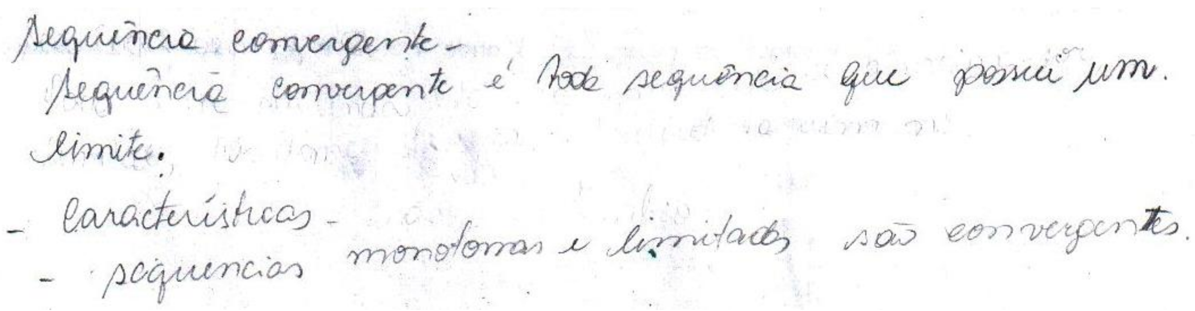

Sequência convergente -
Sequência convergente é toda sequência que possui um limite.
- características -
- sequencias monotonas e limitadas são convergentes.

Figura 28: Resposta do aluno A1 à atividade 15.

Aluno A2:

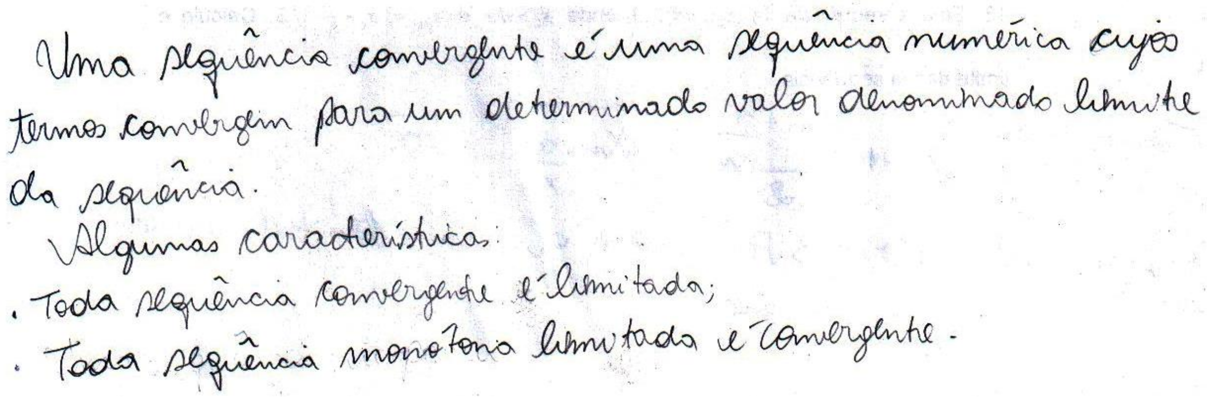


Figura 29: Resposta do aluno A2 à atividade 15.

Aluno A3:

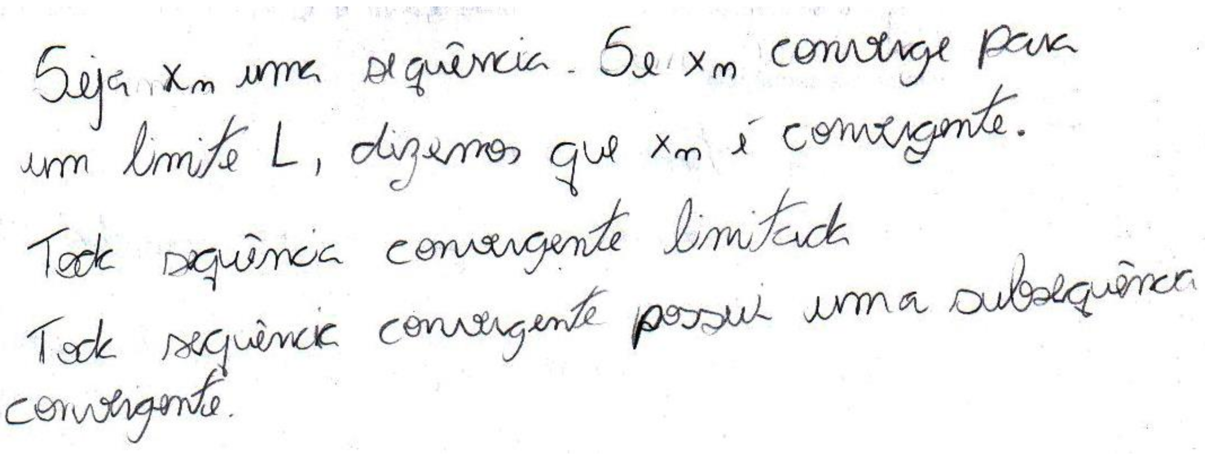


Figura 30: Resposta do aluno A3 à atividade 15.

Aluno B1: "Sequência convergente é toda aquela que tende a um certo número, podendo ser caracterizada da seguinte forma : Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n < N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$".

Aluno B2: "Uma sequencia x_n convergente é uma sequência limitada, onde o n-ésimo termo se aproxima constante real c".

Aluno C: “Uma sequência convergente é aquela em que em um determinada condição há um limite, ou seja, é limitada. As caracteristica sera que essa sequência é limitada”.

Com exceção do aluno B2, todos os outros disseram o que é uma sequência convergente; não acreditamos que isso seja um problema, pois a ideia de convergência já estava bem interiorizada por ele, tanto que em nenhum dado momento das atividades o referido estudante teve problemas com a noção de convergência.

Sobre as características que uma sequência convergente possui, o aluno B1 colocou a definição de convergência, demonstrando que o que estava mais forte em sua imagem de conceito é a definição que, na verdade, nos garante o limite da sequência existir ou não.

A primeira característica que deveria aparecer, tomando como partida uma sequência convergente, seria o fato de ser limitada. Os alunos B2 e C citaram somente essa característica, enquanto que os alunos A2 e A3, além dessa, ainda citaram outras. O aluno A2 comentou que toda sequência monótona e limitada é convergente. Já o aluno A3 relacionou uma sequência convergente às suas subsequências, afirmando “toda sequência convergente possui uma subsequência convergente”, ocorre que essa característica vai mais além, pois toda subsequência de uma sequência convergente é convergente e seu limite é o mesmo da sequência.

O aluno A1 afirmou que sequências monótonas e limitadas são convergentes, assim como o aluno A2. Esse resultado condiz com a verdade, mas o cuidado que devemos ter é que nem toda sequência convergente é monótona, ou seja, a recíproca é falsa.

4.3 Análise da aplicação da pesquisa a luz de nossos eixos

4.3.1 Primeiro eixo: Como se modificam as imagens de conceito dos alunos?

Na aplicação do questionário analisamos os conceitos que os participantes da pesquisa possuem sobre sequência de números reais. A partir da aplicação do questionário percebemos que todos entendem uma sequência como uma coleção ordenada de números reais, com destaques para a conceituação de sequência que o aluno A2 apresentou, que é exatamente a definição formal $F:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ e, para a forma que Aluno A1 colocou os índices nas progressões, sempre começando do zero, ou seja, $(a_0, a_1, a_2, ...)$ que, de igual forma, ele levou para o estudo de sequências. Outros dois pontos observados foram às características ou propriedades que eles conhecem sobre sequência e a relação desse conteúdo com algum outro já estudado por eles. O aluno A3 afirmou que uma função pode ser finita ou infinita, enquanto que o aluno B2 citou que possui os conceitos de convergência, divergência, limitada, ilimitada, ínfimo, supremo, máximo e mínimo. Todavia, o aluno B2 não conceituou nenhum desses conceitos. O aluno B1 disse conhecer as características que uma sequência pode assumir, mas não citou nenhuma.

Sobre as relações desse conteúdo com outros já estudados, os alunos A2, A3, B1 e B2 as relacionaram com progressões aritméticas e geométricas, sendo que o terceiro foi além, de acordo com o próprio "justamente consigo relacioná-la com as progressões, funções, limites, entre outros conteúdos" (Aluno B1).

Durante a aplicação das atividades notamos que o aluno A1 não alterou sua imagem de conceito sobre os índices das progressões, onde os mesmos começam sempre com o zero para sequências. Neste caso temos um conflito potencial se compararmos sua imagem de conceito com a definição formal, o que seria uma boa oportunidade de confrontar a imagem de conceito com a definição formal. Podemos notar que não há problema em se começar uma sequência com o índice zero, pois não altera as características da mesma, mas se assim o fizer, deveremos tomar cuidado quando formos olhar para os índices, como por exemplo, o n-ésimo termo da sequência terá como índice o valor (n-1) e o gráfico da mesma no plano cartesiano, que será transladado em uma unidade para a esquerda, pois o zero passa a ter uma imagem e foi assim que fez o aluno A1.

O aluno B1, na construção do gráfico, fez uma curva contínua ligando os pontos, o que levou o pesquisador a indagar: "o domínio não são os Naturais?", criando um conflito potencial. Dessa forma, o aluno B1 pôde verificar a incoerência entre a definição de sequência e o seu gráfico.

Nas primeiras atividades que lidavam com os conceitos de sequências, os participantes tiveram a oportunidade de ampliar suas imagens de conceito, olhando para a sequência como uma função e também por poder explorar as representações gráficas, além disso, durante a demonstração de alguns resultados foi lhes sugerido que pensassem na reta numérica ou no plano cartesiano para verificarem o que acontece com as sequências diante das hipóteses. Com isso, a intenção foi fazê-los incorporarem também essa representação em suas imagens de conceito. Os alunos B1 e C utilizaram representações gráficas para entenderem o que estava acontecendo com a sequência na questão 10; o primeiro fez o plano cartesiano, enquanto que o segundo utilizou uma reta numérica para auxiliá-lo. Essas representações estavam sendo incorporadas nas imagens de conceito dos alunos, modificando-as.

Em uma conversa com Aluno A3, ele disse ter dificuldades de pensar geometricamente, mas que, em outra disciplina que havia cursado, o professor utilizava de representações geométricas para fazê-los entender os resultados. Apesar de ter dito que tinha dificuldades, quando discutido com ele alguns resultados via geometria (reta numérica), o mesmo pareceu entender.

O pesquisador procurou orientá-los a pensarem geometricamente, que normalmente tentavam explicar ou demonstrar algum resultado com argumentos algébricos e sem utilizar da geometria como suporte. Isso se deve, talvez pela experiência que trazem de saber que gráficos e desenhos não servem como prova formal ou também por lembrarem parte da demonstração, uma vez que já possuíam experiência com a disciplina Análise. Em um dos casos, o aluno A2 perguntou ao aluno B1 se este lembrava-se da demonstração de uma das atividades que o professor havia feito na sala de aula. Assim, percebemos que o que ficou para o aluno A2 quando fez Análise são lembranças de demonstrações, mas, e a ideia? Provavelmente, esse estudante não adquiriu a capacidade de pensar sobre o objeto em questão uma vez que não conseguiu concluir a atividade antes que o pesquisador desse a dica. O que ficou para ele são lembranças da demonstração formal, que faz parte de sua imagem de conceito, mas não conseguia compreender o que de fato acontece, para enxergar o que a memória não se lembra.

Na demonstração da unicidade do limite, todos os estudantes tentaram ir direto pela definição e já tinham a ideia de fazê-la por absurdo, mas qual seria o absurdo? Às vezes parece que alguns pontos durante as demonstrações são “truques”. Evidentemente, há alguns “truques”, como para encontrarmos um n em função de épsilon para demonstrar um limite, quando fazemos de trás para frente; logo, a ideia de pensar geometricamente é para fazer com que o indivíduo perceba o que está acontecendo e assim possua a autonomia em elaborar alguns ”truques”.

Um exemplo dessa situação é a questão 8, quando os alunos A3 e A2 colocaram como resposta o Teorema de Bolzano – Weirstrass, mas não citaram os resultados que garantem a afirmação “toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente”. Pela experiência que ambos possuíam em Análise, lembraram-se do teorema, mas não conseguiram associar os resultados estudados à demonstração do mesmo.

No contexto das atividades, notamos que os alunos A2, A3, B1 e C, apesar da intervenção do pesquisador, conseguiram expandir suas imagens de conceito incorporando o pensamento geométrico, enquanto que aluno A1 e aluno B2 mostraram muitas dificuldades em entenderem as ideias e também em incorporarem o pensamento geométrico. Consideramos incorporado o pensamento geométrico quando o indivíduo procura construir uma reta numérica ou mesmo um plano cartesiano e consegue manipular as hipóteses nessas representações para investigar o que está acontecendo, antes de começar a escrever a resposta da questão. Notemos que o simples fato do aluno desenhar uma reta numérica ou o plano cartesiano não nos garante que esta representação foi incorporada à sua imagem de conceito. Foi o que aconteceu com os alunos A1 e B2, que até tentavam esboçar alguma representação, mas não conseguiam manipular os dados na direção do resultado ou do entendimento para usar na resolução.

A questão 9 das atividades de ensino, acabou nos revelando alguns conceitos incorporados nas imagens de conceito dos alunos, pois justificavam seus cálculos citando características das sequências. Os alunos A1, A2 e B1 verificaram que ambas as sequências da questão são monótonas e limitadas, enquanto que o aluno C verificou que as sequências são limitadas, o que nos mostrou que esses conceitos foram incorporados às suas imagens de conceito.

A questão 4 do questionário e a 15 das atividades de ensino nos forneceram alguns dados para podermos comparar e analisar se as propriedades de uma sequência convergente foram incorporadas ou não em suas imagens de conceito.

Primeiramente, o aluno B1 até citou na questão 4 do questionário que uma sequência pode ser convergente ou não, mas foi na questão 15 das atividades de ensino que ele demonstrou saber o que é uma sequência convergente, afirmando que “é toda aquela que tende a um certo número” (aluno B1). Verificamos também que a definição de limite de sequência também está incorporada em suas imagens de conceito, uma vez que ele caracterizou a convergência por meio da definição de limite. O estudante não relacionou as sequências convergentes com características como sendo limitada e/ou monótona, e nem citou as relações com as subsequências.

O aluno A1 disse, na questão 4 do questionário, que uma sequência é "um conjunto ordenado de números" (aluno A1). Na questão 15 das atividades de ensino ele relacionou sequências convergentes com o limite das mesmas, dizendo que "sequência convergente é toda sequência que possui um limite" (aluno A1). Como características, afirmou que toda sequência monótona e limitada é convergente. Notemos que, no questionário, ele sequer citou convergência como um dos conceitos ou características de uma sequência e, no final da pesquisa conseguiu, mesmo não sendo pela definição formal, incorporar esse conceito e ainda os relacionou com conceitos como os de sequência monótona e de sequência limitada.

O aluno A2, na questão 4 do questionário, definiu uma sequência como uma função cujo domínio é o conjunto dos números Naturais e o contradomínio é o conjunto dos números Reais. Na questão 15 das atividades de ensino afirmou que "uma sequência convergente é uma sequência numérica cujos termos convergem para um determinado valor denominado limite da sequência" (aluno A2). O discente ainda citou dois resultados como o fato de toda sequência convergente ser limitada e que toda sequência limitada e monótona ser convergente, mostrando ter incorporado esses em suas imagens de conceito.

O aluno B2, no questionário, citou várias propriedades ou características que uma sequência pode assumir, entre elas o fato de ser convergente ou não. Na questão 15 das atividades de ensino, ele não definiu uma sequência convergente, apenas relacionou o fato de uma sequência convergente ser limitada. O fato de não definir uma sequência e muito menos uma sequência convergente, não significa, porém, que esses conceitos não pertençam às suas imagens de conceito, pois durante a realização das atividades, quando foi preciso usar essas ideias, o estudante o fez. A questão é que este aluno não modificou sua imagem de conceito em direção à definição formal desses conceitos.

O aluno A3 conceituou uma sequência por meio da representação $a_1, a_2, a_3, \dots$ e disse que uma sequência pode ser finita ou infinita. Ao afirmar que uma sequência pode ser finita, ele entra em conflito com a definição formal de sequência de números reais, que é uma função $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ao compararmos essa definição que é a formal com a afirmação do discente, encontramo-nos, mais uma vez, diante de um conflito potencial. O pesquisador conseguiu fazer com que o aluno percebesse e entendesse que uma sequência não pode ser finita. Na questão 15 das atividades de ensino, ele afirmou que uma sequência é convergente se ela converge para um limite L. Reconheceu também que toda sequência convergente é limitada e mais, foi o único a relacionar uma sequência convergente com suas subsequências, afirmando que "toda sequência convergente possui uma subsequência convergente" (aluno A3). Mesmo precisando e podendo melhorar esse resultado, esse foi um conceito que o aluno incorporou em suas imagens de conceito e, o mais importante, na direção da definição formal.

O aluno C afirmou no questionário que uma sequência é um "conjunto de números ordenados finitos ou infinitos com várias características", mas, apesar de dizer que uma sequência possui várias características, não as citou. Na questão 15 das atividades de ensino, conceituou uma sequência convergente como aquela que, a partir de uma determinada condição, possui limite. É importante observar que a palavra limite causa uma confusão nas imagens de conceito desse aluno, sendo que ele relacionou essa palavra com o conceito de sequência limitada.

Quando dizemos que uma sequência possui limite, matematicamente significa que a sequência tende a um valor $a \in \mathbb{R}$. Enquanto que, o conceito de uma sequência limitada significa que todos os seus termos pertencem a um intervalo limitado inferiormente e superiormente por números reais. Assim, mesmo este aluno conseguindo concluir que uma sequência convergente é limitada, essa conclusão se deu de maneira incoerente com a definição formal. Além disso, essa confusão que a palavra limite causa pode fazê-lo chegar a conclusões falsas, como, por exemplo, acreditar que a recíproca é verdadeira, ou seja, toda sequência limitada é convergente. Não seria nenhum absurdo ele concluir isso, pois se ser limitada significa ter limite e de acordo com o próprio uma sequência convergente é uma que possui limite, então a recíproca seria validada segundo a concepção da palavra limite que o aluno trouxe, o que traria prejuízos ao entendimento. É importante notar como as incoerências entre as imagens de conceito dos indivíduos e as definições formais vão aparecendo, cabendo, portanto, aos professores explorá-las e transformá-las em conflitos potenciais. Neste caso, ao criar o conflito o pesquisador conseguiu com que o aluno entendesse o significado da palavra limite no contexto apropriado, modificando sua imagem de conceito.

Analisando a realização das atividades como um todo, notamos que para os alunos A1 e B2 as atividades de ensino pouco modificaram as suas imagens de conceito, em direção aos resultados formais. Por outro lado, para os demais alunos, essas atividades ajudaram a incorporar ou reincorporar novos conceitos em suas imagens de conceito, sempre aproximando esses conceitos dos resultados formais.

4.3.2 Segundo eixo: Os alunos conseguem entender de forma significativa os conceitos?

Durante a aplicação das atividades, sugerimos aos participantes que pensassem geometricamente, ou na reta numérica ou no plano cartesiano, a ideia era fazê-los incorporar essas ideias geométricas às suas imagens de conceito. Esse pensar geométrico não serve como demonstração formal de resultados, mas é um auxílio muito importante e pode apontar os caminhos para a demonstração. Na questão que tratava da unicidade do limite de uma sequência, todos pelas suas experiências e lembranças partiram para demonstração por absurdo e foram direto para a manipulação algébrica, mas não conseguiam pensar num épsilon que iria contradizer a definição. Quando o pesquisador sugeriu e mostrou o que estava acontecendo na reta numérica, eles compreenderam o porque de pegar $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ se $b > a$ e mais, e seguiram para a manipulação algébrica sabendo exatamente o que iria acontecer, que seria a obtenção de x_n´s , pertencendo a dois intervalos disjuntos. O aluno B1 foi o primeiro a chegar ao resultado formal usando as definições formais.

Como os alunos já possuíam experiências com o conteúdo, com exceção do aluno C, nosso papel foi o de incentivar o pensar geometricamente, uma vez que, lembrar a demonstração é uma coisa, entender o que está acontecendo é outra. Assim, acreditamos que quando incorporado esse pensamento geométrico há uma modificação na imagem de conceito dos indivíduos e em alguns casos modificações em favor do resultado formal. Na questão da unicidade do limite, o aluno pode ler a demonstração entendê-la, mas ficar com aquele sentimento de “como a pessoa pensou em tomar $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$?”. Com o apelo geométrico entendem o porquê.

Outra questão que possuía essa característica – de pensar em um épsilon e usar isto na definição de limite – era a questão 10 e, de novo, quando mostrado a interpretação algébrica, eles acenaram de forma positiva, mostrando entender o que estava acontecendo.

A questão aqui não é a realização da demonstração formal, mas adquirir um conhecimento sobre o objeto de forma que possibilite entenderem os resultados e, neste caso, fazê-los investigar os conteúdos antes de lhes mostrar o resultado pronto, para que possam entender melhor os teoremas e as demonstrações. Durante as investigações de cada participante da pesquisa, pudemos confrontar suas imagens de conceitos criando conflitos potenciais, e isso fez com que os indivíduos prestassem atenção em incoerências antes não notadas.

Este eixo está intimamente entrelaçado ao primeiro eixo, uma vez que, de acordo com a teoria de imagens de conceito, a modificação das imagens de conceito – em direção aos resultados formais – de um indivíduo proporciona o entendimento mais aprofundado sobre o objeto em estudo. Assim, ao assimilarem e entenderem o pensamento geométrico, os indivíduos modificam suas imagens de conceito (em direção aos resultados formais) nos permitindo concluir que estavam entendendo de forma mais significativa os objetos estudados.

Como identificado no primeiro eixo, os alunos A2, A3, B1 e C incorporaram o pensar geométrico, enquanto que os alunos A1 e B2 não, e isso interferiu diretamente na análise deste eixo. Os estudantes podem até terem entendido na hora que o pesquisador explicou o que estava acontecendo com as sequências, de acordo com as hipóteses, mas não ganharam autonomia para pensarem sozinhos, uma vez que não usavam as representações geométricas como auxílio para a resolução das questões. No caso dos alunos A1 e B2, um exemplo disso são as questões 3 e 4, onde, além das orientações e explicações do pesquisador, mostrando inclusive geometricamente o que estava acontecendo, ainda dependeram da ajuda dos colegas, sendo que o segundo aluno, na questão 10, não conseguiu justificar/demonstrar o resultado, e o aluno A1, cometeu em ambas as questões erros de conta na manipulação algébrica, além de, na questão 10, ter tomado

$\varepsilon > a - b$, mostrando se confundir na transição do pensamento geométrico para o algébrico.

Assim, para os alunos A1 e B2, estas atividades de ensino refletiram um pouco do ensino tradicional, pois eles só entendiam quando o pesquisador os explicava, mas não conseguiam esboçar uma resolução.

4.3.3 Terceiro eixo: Como ocorre a formalização dos conceitos?

Como já dito anteriormente, depois que mostramos as ideias geométricas, os alunos entenderam o que estava por trás da demonstração formal. Porém, entender a ideia da demonstração e escrever de fato a demonstração são ações diferentes. Os alunos A2, A3 e B1 conseguiam escrever os resultados da maneira formal, já os alunos A1, B2 e C nem sempre. Para os três primeiros, o problema, às vezes, consistia em um ponto da demonstração; o que notamos com as atividades é que eles se embaraçavam em uma parte tentando usar as definições e as relações algébricas, e não conseguiam entender o "pulo do gato". Esse "pulo do gato" pode ser visto e entendido por meio de uma visualização geométrica. Notamos que, a partir desse tratamento geométrico, a formalização dos conceitos ocorre de maneira mais significativa para o aluno, que tem a oportunidade de assimilar e aprender ao invés de decorar as demonstrações, conseguindo assim a *formalização com significado*.

Não podemos esquecer o papel do professor neste tipo de atividade que estamos propondo: o docente tem que abrir mão do ensino tradicional, ou seja, tem que deixar de dar respostas e sugerir caminhos. Não é certo que, ao final, depois de estimular os alunos, ele deve demonstrar os resultados de maneira formal. Nossa ideia aqui consiste em fazer com que o aluno possa sim adquirir os conceitos suficientes para entender a demonstração e não ficar decorando "palavra por palavra" das demonstrações feitas pelo professor ou pelos livros.

Um aspecto importante dessa transição foi observado durante a aplicação das atividades: no começo, a formalização se dava ou tentava-se chegar a ela por meio de lembranças sobre a demonstração formal já vista por eles. Quando estimulados a pensar em outra forma, houve uma compreensão maior por parte dos estudantes, e em suas imagens de conceito se agregou mais um tipo de representação sobre aquele resultado.

Um exemplo disso foi na questão 10, onde os alunos B1 e C esboçaram um gráfico cada para lhes auxiliarem na resolução. Esses alunos começaram a incorporar as representações em suas imagens de conceito. O único problema nessa incorporação seria se eles, mesmo utilizando-as, não conseguirem manipulá-las de forma que contribua para os seus respectivos entendimentos da situação. Nesse caso, o professor pode orientá-los apontando suas ideias na direção da demonstração formal.

O grande destaque em relação ao aluno C foi o fato de sua inexperiência com a dinâmica da disciplina, demandando a necessidade de demonstração de tudo e de maneira formal. Mas a formalização dos conteúdos, mesmo não sendo feita por ele, ocorreu de forma mais significativa, uma vez que antes de ver as demonstrações prontas, teve a oportunidade de pensar nas questões e explorar a representação geométrica. Observamos que o problema desse aluno, por vezes, era escrever suas ideias; ele sabia o que estava acontecendo, mas não conseguia escrever.

4.3.4 Quais as impressões e reações dos alunos frente à disciplina Análise?

Para esta análise lançamos nosso olhar inicialmente sobre o questionário. E neste ficou claro a rejeição da disciplina da Análise pelo aluno A1, que citou ter tido experiências negativas, não conseguindo aprender muito, isto é, apenas o suficiente para ser aprovado, é a questão da “sobrevivência”. Ainda, afirmou que não consegue descrever a contribuição dessa para a sua formação como professor e que a disciplina é importante apenas para os matemáticos puros.

O aluno B1 foi outro discente a dizer que teve experiência negativa com a disciplina na primeira vez que a cursou, mas não se contrapôs à importância da mesma. Ele afirmou: “consegui reparar a importância da disciplina nas questões de sequências e do limite de funções, como se desenvolve todos esses conceitos [...]” (aluno B1).

Os outros alunos não citaram ter tido experiências negativas - lembrando que o aluno C não possuía experiência nenhuma com a disciplina. O aluno A2 colocou a disciplina como de grande importância, pois nela são apresentados os conteúdos de Cálculo com rigor matemático.

O aluno B2, apesar de não ter descrevido suas experiências, disse ter sido reprovado na primeira vez que fez a disciplina de Análise, e que estava fazendo pela segunda vez. Acreditamos, pois, que uma reprovação não pode ser considerada uma experiência positiva em relação à aprendizagem. Este aluno foi o único a relacionar, diretamente, essa disciplina à sua formação como professor e apontar o fato dessa fornecer-lhe o saber da origem de conceitos básicos trabalhados no Ensino Básico.

O aluno A3 acredita que a disciplina Análise é importante, pois explica formalmente os conteúdos estudados em Cálculo e, com isso, o entendimento dos mesmos é facilitado. Ainda afirmou que "[...] acredito que esta disciplina é uma das mais importantes como pré-requisito para um mestrado na área de matemática pura" (aluno A3).

Notamos que os alunos A2, A3 e B1 colocaram a importância da disciplina Análise na relação desta com os conteúdos de Cálculo, ou seja, lançaram seus olhares apenas para os seus saberes acadêmicos ou sobre de que modo essa ciência poderia ajudá-los a compreender outras questões. Todavia, nenhum deles relacionou a disciplina com a sua formação como professor e no que seria útil.

Já os alunos A1 e B2, se preocuparam em olhar para a importância da disciplina, sobre a qual, segundo acreditam, pode favorecer a própria formação, como professor.

Em um segundo momento podemos voltarmo-nos para as falas e condutas durante as pesquisas, votando nossos olhares para os alunos A1 e B2, pois notamos que, para os outros, não há problemas como falta de estímulo ou envolvimento, pois nada dizem contra a disciplina. O aluno A1 afirmou por vezes não gostar da disciplina, e, como já frisado por ele no questionário, não vê como esta poderia contribuir para sua formação. Este pensamento refletiu em sua conduta para a realização das tarefas, já que em algumas vezes parecia estar desanimado e sem muita disposição em pensar nas questões. O aluno B2 não disse nada contra a disciplina, porém demonstrou em alguns momentos certo desânimo em realizar as questões. Fica para nós uma indagação que precisa, futuramente, ser analisada: os alunos não aprendem porque não gostam, ou não gostam porque não aprendem?

É importante deixar claro também que discutir questões como do estímulo, vontade de estudar Análise e ânimo são bem complexas e, nesta pesquisa, ainda mais, pois vale lembrar que esta foi realizada fora do contexto de sala de aula, onde os alunos não possuíam o comprometimento com a nota e aprovação. Para o aluno A1 esse comprometimento foi, com certeza, o único estímulo a fazê-lo se empenhar e estudar a disciplina quando a cursou. Para o aluno B2, talvez a importância desta que atribuiu à própria formação tenha sido e seja (ainda cursava no período da pesquisa) um estímulo para se empenhar, mas a vontade de ser aprovado no curso é provavelmente o que mais o estimula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que esta pesquisa possa ajudar nas discussões a respeito da construção do conhecimento de conteúdos da disciplina Análise na Reta por meio das imagens de conceito. Assim, este trabalho propõe a reflexão de novas metodologias para o ensino de Análise, uma vez que o ensino tradicional vigente, de acordo com nossas pesquisas teórico-bibliográficas, mostra-se incapaz de fornecer ao aluno um conhecimento amplo dos conteúdos de Análise.

Nossa intenção é ampliar a discussão do processo de ensino-aprendizagem de Análise voltando nossas atenções para a compreensão dos alunos, para a forma pela qual esses adquirem os conhecimentos mínimos satisfatórios, de modo que possam ser autônomos. A metodologia aqui apresentada surge como uma possibilidade de trabalho no sentido de favorecer a compreensão dos alunos, que, para nós, está relacionada às imagens de conceitos do indivíduo.

Se uma metodologia modifica as imagens de conceito de um discente, aproximando suas concepções da definição formal ou dos resultados formais, então, acreditamos que o aluno está adquirindo uma compreensão melhor sobre o determinado objeto matemático. Assim, os estudantes podem desenvolver sua capacidade de pensar matematicamente, que, para nós, terá o mesmo significado que para Schoenfeld (1996):

> Na minha perspectiva, o pensar matematicamente significa (a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso (SCHOENFELD, 1996, p. 8).

Buscamos com esta metodologia dar aos alunos a capacidade de pensar matematicamente sobre os conteúdos de Análise, procurando oferecer a oportunidade de aprender, de forma que serão capazes de compreender os significados relativos à formalização de um objeto matemático.

Assim, centramo-nos em propor uma metodologia e verificar as modificações que ocorreram nas imagens de conceito dos alunos. Caso houvesse uma modificação em direção aos resultados formais, significaria uma melhora na compreensão do objeto, ou uma modificação no sentido contrário aos resultados formais, que por outro lado significaria a diminuição da compreensão em relação ao objeto.

Vale ressaltar aqui, que de acordo com nossas análises, que não houve modificações no sentido contrário aos resultados formais. Nos casos dos alunos A1 e B2, as atividades de ensino propostas por nós pouco modificaram suas imagens de conceito e, na pior das hipóteses, essas, apesar de não terem sido o objetivo, funcionaram na perspectiva do ensino tradicional. Já no caso dos outros alunos, houve modificações significativas, incorporando representações e conceitos que aproximaram suas imagens de conceito aos resultados formais.

Como já visto, os trabalhos que têm como suporte teórico as teorias de imagens de conceito e definição de conceito procuram explorar, em suas metodologias de ensino, as representações que um objeto matemático pode ter e ser estudado, relacionando-as. Segundo Tall e Vinner (1981), os alunos, quando submetidos a representações específicas, perdem características importantes sobre o objeto, pois, de acordo com os mesmos, um tipo de representação não é o suficiente para explorar todas as características sobre o objeto. O importante, para além de se explorar diferentes tipos de representações, é relacioná-las podendo-se criar os chamados conflitos cognitivos que possibilitam modificações nas imagens de conceito dos indivíduos, aproximando-as dos resultados formais. Nesse sentido, incentivamos os participantes da pesquisa a pensarem nas questões, tentando enxergar as características gráficas das sequências ao olharem para o plano cartesiano ou mesmo para a reta numérica. Os alunos A1 e B2, mesmo esboçando os gráficos sugeridos, não conseguiram entender o que estava acontecendo; isto nos levou a concluir que, neste nível de ensino, as representações dependem da maturidade dos alunos, uma vez que eles precisam interpretar além da visualização e pensar nas hipóteses e na tese. A representação gráfica pode fornecer os elementos necessários para a demonstração, mas, para isso, os alunos devem trabalhar e manipular conceitos prévios e já estudados. A exemplo disso, pudemos notar nas questões que propunham a demonstração da unicidade do limite de uma sequência: os alunos podem ainda esboçar um gráfico e podem até mesmo perceberem que não tem como uma mesma sequência convergir para dois valores distintos; o problema é transformar essa intuição vista no gráfico com o “truque” necessário para a demonstração. Desse modo, o trabalho de um conteúdo na disciplina Análise, mesmo utilizando as representações gráficas, precisa da maturidade matemática do indivíduo. Esta consideração nos remete à pesquisa de Reis (2001), que investigou a tensão entre a intuição e o rigor, uma vez que a maturidade é construída ou não nesta tensão.

Sobre a formalização dos resultados, de acordo com as modificações das imagens de conceito dos alunos, pudemos concluir que há um entendimento maior dos conteúdos por parte dos alunos, com exceção dos alunos A1 e B2, que, como já dissemos, obtiveram pouco avanço nesse sentido. Mesmo que alguns, às vezes, não conseguiam formalizar seus pensamentos, pelo fato de terem incorporado outras representações e pensado nas questões, quando a formalização era feita pelo pesquisador, esses estudantes entendiam, principalmente os “pulos do gato”. Assim, a formalização ocorria com eles ou com o pesquisador os mostrando depois de um tempo. É deveras importante que eles saibam formalizar os resultados, mas o mais importante neste momento foi entenderem as demonstrações ou justificativas. Essas atividades tinham por finalidade trabalhar com os alunos o que nós definimos de *formalização com significado* e acreditamos que em grande parte cumpriu o objetivo, uma vez que percebemos muitas vezes os alunos primeiro compreendendo os resultados e depois formalizando os mesmos, ainda que com a orientação do pesquisador.

Sobre as reações e impressões dos alunos em relação à disciplina Análise, decidimos apenas descrevê-las, dada a complexidade de uma análise sobre as mesmas, que não seria conveniente para o intuito desta pesquisa. As variáveis que podem interferir nas reações e impressões são muitas e talvez por isso, faltem trabalhos nesse sentido. Mais difícil ainda é quando relacionam a importância dessa disciplina à formação do professor de Matemática; muito se fala a favor, mas os argumentos são muitos e não há um consenso. Analisando o questionário, observamos que os discursos dos alunos A2, A3 e B1 a favor da disciplina Análise, com exceções dos alunos A1 e C, seguem em direção de Moreira, Cury e Vianna (2005),

> A disciplina Análise Real é — quanto a isso pensamos não haver nenhuma polêmica — um dos pilares da formação do bacharel em matemática. Ela pode ser vista, ao lado do estudo das estruturas algébricas, como uma das formas de introdução dos futuros matemáticos a conceitos, métodos, técnicas e valores próprios da matemática avançada, além de servir de base para a Análise no

> $\mathbb{R}^n$ e, daí, para estudos mais gerais, envolvendo outros espaços e estruturas, como variedades diferenciáveis, espaços de Banach, etc (MOREIRA, CURY, VIANNA, 2005, p.12).

O aluno B2 também se mostrou a favor da disciplina Análise, mas sua explicação está mais próxima – apesar de não ir contra a ideia de que a disciplina possa servir como uma introdução à área da Matemática Pura – de uma preocupação com a formação de professores.

5.1 Conclusão

Acreditamos que esta pesquisa cumpriu com o seu objetivo de ampliar as discussões sobre o processo de ensino-aprendizagem na disciplina Análise, propondo também uma alternativa metodológica.

Durante a aplicação das atividades de ensino e, também, durante a análise das mesmas, ficamos com uma sensação de que poderia ser melhor. Percebemos que algumas questões poderiam ser melhor exploradas e reelaboradas para isso. A questão 8, por exemplo, faltou pedir para justificar a resposta, de modo que os participantes pudessem trabalhar os conceitos vistos nas atividades anteriores. Já às questões 12 e 14 nos surpreenderam, uma vez que acreditávamos que pouco iria aparecer sobre os conceitos e que os alunos se limitariam aos cálculos. No entanto, apareceram os conceitos trabalhados anteriormente.

Por fim, falaremos um pouco das dificuldades que tivemos em realizar esta pesquisa, primeiramente pelo pesquisador não ser professor da disciplina - a aplicou fora do contexto de sala de aula, assim essa pesquisa não reflete o ambiente do curso regular de Análise que, querendo ou não, modifica a forma do aluno agir. Outra situação ruim foi com o fato de fazermos a pesquisa em horário extraclasse; o tempo de aplicação de um conjunto de atividades de um dia para outro era muito grande, rompendo com a continuidade. Houve um período de três semanas sem atividades por falta de compatibilidade de horários e compromissos dos alunos com atividades do curso. Mas normalmente as atividades eram aplicadas semanalmente, o que já era um tempo significativo, pois os alunos tinham sempre que retomar os conceitos trabalhados anteriormente e esse tempo atrapalhava um pouco.

Pretendemos futuramente dar continuidade com pesquisas mantendo o referencial teórico adotado neste trabalho, provavelmente com conteúdos de outras disciplinas. Em relação à disciplina Análise, nossas pretensões são quanto às questões sobre formação de professores e o lugar da mesma no currículo das licenciaturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise:** Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Ouro Preto – MG, 2011. 133 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

AMORIM, L. I. F.; REIS, F. S. A (re)construção do conceito de limite do Cálculo para a Análise. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** 1. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 277-306.

ANTONINI, S. et al. UNIVERSITY STUDENTS GENERATING EXAMPLES IN REAL ANALYSIS: WHERE IS THE DEFINITION? In: V CONGRESSO DA SOCIEDADE EUROPEIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Larnaca. **Anais ...** . Larnaca: University of Cyprus, 2007. p. 2241 – 2249. Disponível em: http://www.didmatcofin05.unimore.it/site/home/prodotti/prodotti-2007/documento15008157.pdf . Acesso em: 05 jun. 2014.

ARTIGUE, M. Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,** vol 1, n. 1, p. 40-55. México. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf. Acesso em: 05 jun. 2014.

ÁVILA, G. S. S. **Introdução à Análise Matemática.** . 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pró-Posições.** vol. 4, 1[10], março de 1993.

BOLOGNEZI, R. A. L. **A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio.** Curitiba – PR, 2006. 101 f.

Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

BORBA, M. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: Reunião anual da Anped, 2004, Caxambu- MG. **Anais... .** Disponível em: http://www.moodle.ufba.br/file.php/11739/A_pesquisa_qualitativa_em_Educacao_Matematica.pdf Acesso em: 16 jul. 2013.

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática.** Ouro Preto – MG, 2010. 84 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. **Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME.** Grenoble - France, 1981. p. 322-326. Disponível em: http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/mat7191_fich/Cornu_1981.pdf Acesso em: 3 abr. 2013.

COSTA, C. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J.; COSTA, C.; ROSENDO, A.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. (Orgs.). **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** Lisboa: SPCE, 2002. p. 257 – 273.

DEDE, Y.; SOYBAŞ, D. Preservice mathematics teachers’ concept images of polynomials. **Quality & Quantity**, v. 45, n. 2, p. 391-402, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

FUENTE, A. C.; ARMENTEROS, M. G.; MOLL, V. F. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.

26, n. 42B, p. 667-690, abr. 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/13.pdf . Acesso em: 05 jun. 2014.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre Pesquisa Qualitativa e Fenomenologia. **Interface** (Botucatu) [online]. 1997, vol. 1, n.1, p. 109-122. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/icse/v1n1/08.pdf. Acesso em: 16 jul. 2013.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais:** O Caso da Derivada. Rio de Janeiro – RJ, 2004. 221 f. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade Federal do Rio de Janeiro.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In: **Proceedings of PME 15.** Warwick: Assisi, 1991, p. 72 – 79. Disponível em: http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/91c-procept-pme.pdf. Acesso em: 31 mar. 2013.

LIMA, E. L. **Análise Real:** Funções de uma variável**.** 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **ZETETIKÉ,** Campinas – SP, v.13, n. 23, p. 11 – 42, 2005. Disponível em: http://www.researchgate.net/publication/228618120_Por_que_anlise_real_na_licenciatura/file/60b7d5149fdcaa877e.pdf. Acesso em: 16 jul. 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre o seu Ensino.** Rio Claro – SP, 2011. 500 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos:** uma proposta, uma investigação. Rio Claro – SP, 2007. 209 f. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista.

PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. In: **Dossiê:** a pesquisa em Educação Matemática. Educação em Revista, Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

REIS, F.S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:** A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Campinas – SP, 2001. 302 f. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – UNICAMP. Universidade Estadual de Campinas.

_____. Discutindo Algumas Relações entre a História e o Ensino de Análise Matemática: da Aritmetização da Análise para a Sala de Aula do Ensino Superior. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. **Anais... .** Brasília: SBEM, 2009. p. 1 - 11.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. p. 61-72.

SIERPINSKA, A. et al. What is research in mathematics education, and what are its results? **QUADRANTE** – Revista teórica e de Investigação, Lisboa, vol. 2, nº 2, p. 89-94, 1993.

TALL, D. O. Concept Image and Concept Definition. In: LANGE, J; DOORMAN, M. (Eds.). **Senior Secondary Mathematics Education.** Utrecht: OW&OC, 1988, p. 37 – 41. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-image-icme.pdf. Acesso em: 30 mar. 2013.

_____. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. In: **For the Learning of Mathematics.** Warwick, 1989, p. 37 – 42. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf. Acesso em: 24 mar. 2013.

_____. **The Psychology of Advanced Mathematical Thinking.** In: TALL, D. O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 3-

21, 1991. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991k-psychology-of-amt.pdf. Acesso em: 16 jul. 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics. **Dordrecht**, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.