Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós -Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Pedro Belchior

Caracterização do nível crítico para as soluções de energia mínima de uma classe de problemas elípticos semi-lineares

Juiz de Fora

2013

Pedro Belchior

Caracterização do nível crítico para as soluções de energia mínima de uma classe de problemas elípticos semi-lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de Equações Diferenciais Parciais. .

Orientador : Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki.

Juiz de Fora

2013

Belchior, Pedro.

Caracterização do nível crítico para as soluções de energia mínima de uma classe de problemas elípticos semi-lineares / Pedro Belchior. 2013. 100f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Energia Mínima. 2. Passo da Montanha. 3. Minimização. 4. Ação Mínima. I. Título.

CDU 51

Pedro Belchior

Caracterização do nível crítico para as soluções de energia mínima de uma classe de problemas elípticos semi-lineares

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr.Luiz Fernando de Oliveira Faria
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Anderson Luiz Albuquerque de Araújo
UFV

Prof. Dr. Grey Ercole
UFMG

Juiz de Fora, 01 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

A conquista desse titulo de mestre não veio somente por mim. Muitas pessoas trabalharam no processo. Muitas pessoas passaram pela minha vida e outras ainda estão nela. As vezes um simples conselho as vezes uma palavra de apoio, outras, ajuda financeira e outras eu me espelhei e continuo espelhando. Todas estas pessoas foram a razão para que este trabalho chegasse ao término. Chegou o momento de agradecê-las.

- Ao meu amado pai, Luigi Belchior, que me ensinou a valorizar mais o ser do que o ter. Ele nunca foi dado a vaidade do ter mas foi um homem rico em cultura e conhecimento. Infelizmente ele não está mais aqui para ver essa conquista. Mas dedico a hora desse titulo a sua memória.

- A minha querida mãe, que com carinho e um infinito amor, orou, falou palavras de consolo, fez aquela recepção calorosa quando chegava em sua casa e que sempre torceu acreditou em mim. A você mamãe meu muito obrigado.

- As minhas irmãs Soraya , Simone e Silma que disseram palavras que me encorajaram. Sempre lembrarei com carinho de vocês.

- A minha vó Mathilde que sempre me esperava com o almocinho prontinho e quentinho a tempo e hora. Jamais esquecerei daqueles breves intervalos em que parava meus estudos pra ir a sua casa para almoçar. Saiba que sua ajuda foi fundamental para chegar até aqui vovó. Muito obrigado.

- A minha sogra Martha que também fez muitos almoços e sempre apoiou-me neste processo. A você muito obrigado.

- A minha esposa Allynne que abriu mão de mim para deixar-me estudar. Que me via poucos momentos do dia. Simplesmente para deixar-me estudar. Apoiou-me em tudo até o fim. Obrigado por todo o sacrifício.

- Ao meu professor e amigo Wilson Tonholo Rezende, que foi o primeiro a me motivar na caminhada em Matemática. Tudo começou na base de seus ensinamentos.

- Ao meu orientador Professor Doutor Olimpio Hiroshi Miyagaki, que, com muita experiência, competência e principalmente grande conhecimento, me mostrou o caminho a percorrer. A excelência deste trabalho é devido a ele. Muito obrigado Professor.

- Ao Professor Doutor Anderson Araújo que contribuiu no processo, me recebendo em Viçosa para apresentação de seminários.

- Ao Professor Doutor Grey Ercole que me convidou para a apresentação de um seminário na UFMG, onde muitas observações que foram feitas, contribuíram para o melhoramento deste trabalho.

- À Professora Doutora Flaviana Andrea Ribeiro que acreditou em mim. Foi por meio de seu incentivo que eu decidi fazer o mestrado.

- Aos meus amigos Ronei e Sandra que me sempre me atenderam, com muita paciência e atenção nas horas em que um mero detalhe fazia a diferença.

- Aos meus amigos e colegas de turma Samuel, Monalisa, Daniel e Melissa. Começamos juntos, sofremos juntos, nos ajudamos e lutamos muito. Finalmente chegamos juntos ao final dessa jornada. A vocês o meu muito obrigado pela amizade e apoio em todos os momentos.

- Aos Professores e funcionários do Departamento de Matemática.

- Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

- E finalmente ao Senhor Deus por ter colocado todas essas pessoas em minha vida e ter permitido que a ajuda delas chegasse até a mim. Minha eterna gradidão...

RESUMO

As soluções de energia mínima são definidas como as soluções que indicam valor ínfimo para imagem do funcional energia associado a uma classe de problemas variacionais não lineares

$$-\Delta u = g(u) \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

O objetivo deste trabalho é mostrar que através das soluções de energia mínima da equação não linear acima, o valor do passo da Montanha sem a condição de Palais Smaile é um ponto crítico. Para isto provaremos que sob certas hipóteses para a função g e sob um vínculo é possível obter uma solução positiva para o problema acima, esfericamente simétrica e decrescente com o raio. Em seguida mostra-se que a solução sujeita a esse vínculo é a que possui o menor valor no funcional energia dentre todas as soluções do problema acima aplicadas no mesmo funcional. Neste contexto, garante-se a existência de pelo menos uma solução de energia mínima. Os resultados citados foram estudados em [2] e [1].

Palavras chave: Energia Mínima, Passo da Montanha, Minimização, Ação Mínima.

ABSTRACT

The least energy solutions are defined as solutions that indicate infimum value to the energy functional image associated with a class of nonlinear variational problems

$$-\Delta u = g(u) \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

The objective of this work is to show that through least energy solutions of nonlinear equation above, the Mountain pass value without the Palais Smale condition is critical point. For this, we will prove that under certain hypotheses on the function g and under a constraint assumption is possible to obtain a positive solution for the above problem, spherically symmetric and decreasing with the radius. Then the solution of the problem subject to this constraint has the lowest value in the energy functional among all solutions of the above problem applied in the same functional. In this context, it guarantee the existence of at least one solution of the least energy. The above results were obtained in [2] and [1].

Key Words: Least Energy, Mountain Pass, Minimization, Minimum of the Action.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos estudar acerca da existência de soluções não triviais para algumas equações semilineares elípticas em $\mathbb{R}^N$. Os problemas serão motivados pela pesquisa de certos tipos de estados estacionários em equações não lineares do tipo Klein - Gordon ou Schrodinger. Precisamente, consideremos a equação não linear de Klein-Gordon

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi + a^2\Phi = f(\Phi) \tag{1.1}$$

onde

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi & : & \mathbb{R} & \times & M & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (t & , & x) & \longmapsto & \Phi(t,x) \end{array}$$

e

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}$$

com a constante real.
Suponha que

$$f(\lambda e^{i\theta}) = f(\lambda)e^{i\theta}. \tag{1.2}$$

Então podemos supor que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua e ímpar. E por conseguinte $f(0) = 0$
O Lagrangiano correspondente a equação (1.1) é dado por

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2}|\Phi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{a^2}{2}|\Phi|^2 - F(\Phi),$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds, t \in \mathbb{R}$.

Então, olhando para uma onda solitária em (1.1) do tipo "onda estacionária" isto é, Φ da forma $\Phi(t,x) = e^{iwt}u(x)$ onde $w \in \mathbb{R}$, $\;u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, obtemos:

- Derivando em t:

$$\Phi_t(t,x) = iwe^{iwt}u(x),$$

derivando novamente em t:

$$\Phi_{tt}(t,x) = -w^2 e^{iwt}u(x).$$

- $\Delta\Phi(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = e^{iwt}\Delta u$

- $a^2\Phi(t,x) = a^2 e^{iwt}u(x)$

- $f(\Phi(t,x)) = f(e^{iwt}u(x)) = e^{iwt}f(u(x)),$

Assim a equação

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi + a^2\Phi = f(\Phi),$$

fica

$$-w^2 e^{iw}u(x) - e^{iwt}\Delta u + a^2 e^{iwt}u(x) = e^{iwt}f(u(x)).$$

Dividindo a expressão acima por e^{iwt} que nunca se anula, obtemos

$$-w^2u(x) - \Delta(u) + a^2u(x) = f(u),$$

Logo

$$-\Delta u + (a^2 - w^2)u = f(u),$$

ponha $a^2 - w^2 = k$. Assim a equação de Klein- Gordon se reduz a:

$$-\Delta u + ku = f(u). \tag{1.3}$$

Observe que $u \equiv 0$ é solução trivial de (1.3).
No entanto estamos interessados em buscar soluções não triviais para (1.3). O funcional energia $I(u)$ associado ao problema (1.3), é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

O estado estacionário da equação não linear de Schrödinger lida com um problema semelhante. Vejamos: Considere a equação

$$i\Phi_t - \Delta\Phi = f(\Phi), \tag{1.4}$$

onde $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e f satisfazem a propriedade de simetria equação (1.2). Novamente, olhando para a onda estacionária, isto é,

$$\Phi(t, x) = e^{-ikt}u(x),$$

tem-se

- $i\Phi_t = i(-ike^{-ikt}u(x)) = ke^{-ikt}u(x)$
- $\Delta\Phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = e^{-ikt}\Delta u(x)$
- $f(\Phi) = f(e^{-ikt}u(x)) = e^{-ikt}f(u(x))$.

Assim, substituindo em (1.4) temos que:

$$ke^{-ikt}u - e^{-ikt}\Delta u = e^{-ikt}f(u),$$

e dividindo por e^{-ikt} que nunca se anula, obtemos

$$-\Delta u + ku = f(u).$$

Se chamarmos $g(u) = f(u) - ku$ chegaremos então ao seguinte problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u \neq 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde supomos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e ímpar. O funcional energia associado a (1.5) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

com $G(u) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$. O funcional $I(u)$ é também chamado de funcional ação associado à (1.5). Mais ainda por analogia a problemas elípticos em domínios limitados, $I(u)$ é por vezes chamado funcional energia associado a (1.5).

Em um contexto totalmente diferente, a solução 1.5 pode ser interpretada como uma solução não trivial estacionária para a equação do calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = g(\psi)$$

onde$\psi = \psi(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.Esses problemas surgem naturalmente em biologia. Especialmente em dinâmica das populações. Ver [22].

Há também importantes e conhecidos trabalhos sobre problemas elípticos semi-lineares em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$. Referimos os artigos [10], [24] e [25] para a existência de soluções positivas e [10], [25] e [26] para a existência de um número infinito de soluções distintas.

Para uma melhor abordagem desses problemas em domínios limitados, recomendamos os livros [28], [29] e [30]

Evidentemente, um forte contraste entre problemas elípticos com fronteira definida em domínio limitado e problemas elípticos cuja condição de fronteira em um domínio não limitado é a falta de compacidade da imersão de Sobolev. Uma das formas de se obter uma solução de (1.5), seria restringir o problema à bola $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N ; |x| < r\}$, ou seja, primeiro solucionamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_r = g(u_r) \quad \text{em} \quad B_r \\ \\ u_r\Big|_{\partial B_r} = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

e depois fazemos $r \to \infty$. Porém um dos obstáculos para essa abordagem é a ausência (a priori) de uniformidade nos limites (isto é, em relação a de r) no trabalho acima. Mais adiante estudaremos (1.5) usando o método variacional com a restrição apropriada, a fim de obter a compacidade. Uma característica especial de (1.5) é que ele é invariante sobre o grupo de deslocamentos, isto é, se $\Re$ é uma rotação em $\mathbb{R}^N$ e $c \in \mathbb{R}^N$ é um vetor fixo, então para qualquer solução u de (1.5) a função v definida por $v(x) = u(\Re x + c)$ também é solução de (1.5).

Ressaltamos que em [2] e [27] contornaram a falta de compacidade usando um resultado segundo Strauss [6] para funções esfericamente simétricas.

Para outros tipos de recuperação de compacidade, tais como o Principio de concentração de compacidade de Lions, veja o livro [30]

Na Seção 2.1 do Capítulo 2 apresentaremos o resultado que será mostrado na Seção (2.5) do Capítulo 2 onde trata da questão de existência de solução para o problema (1.5) sob certas condições para a função g. Veremos na Proposição 2.6, do Capítulo 1, que o funcional I é ilimitado superiormente e inferiormente. Assim para obter o ponto crítico que soluciona (1.5) será necessário nos restringirmos ao conjunto minimizante

$$\min\{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(w) = 1\},$$

onde

$$T(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx \ \text{ e } \ V(w) = \int_{\mathbb{R}} G(u) dx,$$

(ver Teorema 2.10). Mostraremos também a regularidade e o decaimento exponencial da solução de (1.5) na Seção 2.5. Na Seção 2.6 mostraremos que uma solução w de (1.5) que obtivermos no Teorema 2.10, do Capítulo 1, tem a propriedade de ter ação mínima entre todas as soluções de (1.5), isto é,

$$0 < I(w) \leq I(u)$$

para toda solução u de (1.5). Cada solução desse tipo é o que chamaremos solução de energia mínima e o número $I(w) = m$ nível mínimo de energia. O objetivo principal deste trabalho está baseado no artigo [1] que mostra através da solução de energia mínima que, retirando-se a condição $(PS)_c$ do Teorema do Passo da Montanha é possível provar que o minimax é um valor crítico. Em outras palavras; se retirarmos a hipótese $(PS)_c$ e o funcional I tiver a geometria do passo da montanha então $b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$ onde $\Gamma = \{\gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ I(\gamma(1)) < 0\}$ não é necessariamente um valor critico. O que [1] mostra é que sob certas condições $b = m$. Assim $b = I(w)$. Como w é solução de (1.5) segue que w é um ponto crítico do funcional I. Portanto b é um valor crítico.

2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMI-LINEARES

2.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, ímpar (logo $g(0) = 0$). Consideremos o problema elíptico semi-linear

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad, N \geq 3 \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad\quad u \neq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $H^1(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Sobolev usual e Δ denota o Laplaciano. Assumiremos que a função g satisfaz as seguintes condições as quais chamaremos ao longo do texto de (hg) significando hipótese sobre a função g:

(hg1) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu < 0.$

(hg2) $\limsup\limits_{s\to\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} = 0$, onde $l = \dfrac{N+2}{N-2}$.

(hg3) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$ onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)d\tau$.

Observação 2.1. Uma abordágem ao problema acima para $N = 2$ pode ser encontrada em [1]

Exemplo 2.1. : Um exemplo de uma função que satisfaz as condições acima é: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = -\nu s + |s|^{l-2}s$

De fato

(hg1) $\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{-\nu s + |s|^{l-2}s}{s} = -\nu + \lim_{s\to 0}|s|^{l-2} = -\nu < 0$

(hg2) $\lim_{s\to\infty}\frac{g(s)}{s^l} = \lim_{s\to\infty}\frac{-\nu s + |s|^{l-2}s}{s^l} = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{-\nu}{s^{l-1}} + \frac{|s|^{l-2}s}{s^l}\right) = 0$

(hg3) $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau = \int_0^s -\nu\tau + |\tau|^{l-2}\tau d\tau = \frac{-\nu s^2}{2} + \frac{|s|^l}{l}$. Como a potência $l = \frac{N+2}{N-2} > 2$ logo existe um ξ_0 tal que $G(\xi_0) > 0$

Definição 2.1. Definimos uma solução fraca de (2.1) como sendo uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g(u) v dx, \quad \forall \ \ v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

O Teorema a seguir é um importante resultado que trata da existência de uma solução do problema (2.1).

Teorema 2.2. Suponha $N \geq 3$ e que g satisfaça $(hg1) - (hg3)$. Então (2.1) possui uma solução u tal que

(i) $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$;

(ii) u é esfericamente simétrica, isto é, $u(x) = u(r)$ onde $r = |x|$ e u decresce com relação a r;

(iii) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$;

(iv) u e suas derivadas até ordem 2 tem decaimento exponencial ao infinito, ou seja:

$$|D^\alpha u(x)| \leq c e^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $c, \delta > 0$ e $|\alpha| \leq 2$.

Para provarmos este Teorema utilizaremos o método de minimização com vínculo que será detalhado mais à frente. Na verdade construiremos um outro problema cuja solução satisfaz (2.1) e mostraremos que a solução do referido problema verifica as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.2.

Exemplo 2.2. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \nu u = \lambda |u|^{p-1} u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) & \text{e} \quad u \neq 0, \end{cases}$$

onde λ e m são positivas e $p > 1$. Este problema foi estudado por S. Pohozaev em [4]. Neste trabalho o autor mostrou que a equação acima possui uma solução se, e somente se,

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2}$$

e não possui solução se

$$p \geq \frac{N+2}{N-2}.$$

Note que se

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2},$$

as hipóteses $(hg1) - (hg3)$ são satisfeitas e se

$$p \geq \frac{N+2}{N-2},$$

o resultado de não existência segue da identidade de Pohozaev a qual será apresentada na próxima Seção.

Observação 2.2. O método de Pohozaev para resolver problemas como o do exemplo acima consiste em maximizar

$$\frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

sobre o conjunto

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\}.$$

Este vínculo faz com que apareça um multiplicador de Lagrange θ e através do qual obtemos uma solução positiva de

$$-\Delta u + \nu u = \lambda \theta u^p.$$

Mostra-se que o multiplicador de Lagrange (θ) é tal que $\theta > 0$ e este pode ser removido, bastando fazer a seguinte mudança de variável: $v = \sigma u$, $\sigma > 0$.

2.2 IDENTIDADE DE POHOZAEV

Mostraremos nesta Seção que se u é solução do problema (2.1), então u juntamente com suas derivadas, suficientemente pequenas no infinito, necessariamente satisfazem

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é chamada de **identidade de Pohozaev**. Daremos a seguir um argumento superficial que comprove a afirmação feita, para então tratarmos o caso no seu devido rigor.

Defina dois funcionais

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Por analogia $\frac{1}{2}T(u)$ corresponde à energia cinética, enquanto que $V(u)$ corresponde à energia potencial. Assim a energia mecânica será dada por

$$I(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u).$$

Façamos agora uma mudança de variável em $\mathbb{R}^N$: para $\sigma > 0$ ponha

$$u_\sigma(x) = u\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

Assim temos que:

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u) \quad \text{e} \quad V(u_\sigma) = \sigma^N V(u),$$

Logo chegamos a:

$$I(u_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2}T(u) - \sigma^N V(u).$$

Com isto vemos que se u é solução de (2.1) pelo menos informalmente podemos interpretá-la como um ponto crítico do funcional I. Deste modo temos

$$\frac{d}{d\sigma}I(u_\sigma) = 0,$$

assim,

$$\frac{N-2}{2}\sigma^{N-3}T(u) - N\sigma^{N-1}V(u) = 0 \qquad \forall \sigma > 0.$$

Em particular tome $\sigma = 1$. Logo

$$\frac{N-2}{2}T(u) - NV(u) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Esse procedimento não é rigoroso por pelo menos duas razões. Em primeiro lugar necessitamos saber se $I \in C^1$ sobre o espaço onde está definido e precisamos mostrar que

$$\frac{d}{d\sigma}u_\sigma(x)|_{\sigma=1} = -\nabla u(x)x,$$

está bem definida.

Teorema 2.3. Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua tal que $g(0) = 0$, e $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$. Seja u satisfazendo

$$-\Delta u = g(u), \qquad em \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

Suponha ainda que

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \;\; \text{e} \;\; G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então u satisfaz a equação (2.2)

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Demonstração: Para simplificar, vamos adotar que:

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \;\; \text{e} \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = \nabla u \cdot x.$$

Observemos que como $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, a teoria de regularidade mostra que $u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer q, com $1 \leq q < \infty$. Inicialmente, vamos restringir o problema à bola

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\right\}.$$

Em seguida mostremos que o termo de bordo (∂B_R) converge para zero quando $R \to \infty$. Vamos dividir a demonstração em duas partes:

(A) Para cada $1 \leq i \leq N$ vamos integrar por partes a expressão

$$\int_{B_R} g(u)u_i x_i dx.$$

Temos que

$$\int_{B_R} g(u)u_i x_i dx = \int_{B_R} \frac{\partial G(u)}{\partial x_i} x_i dx = -\int_{B_R} G(u)1dx + \int_{\partial B_R} G(u)x_i\eta_i dS,$$

onde $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)$ é o vetor normal exterior à fronteira. Somando termo a termo com $i = 1, 2, ..., N$, obtemos :

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{B_R} g(u)u_i x_i dx = -\sum_{i=1}^{N}\int_{B_R} G(u)1dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial B_R} G(u)x_i\eta_i dS.$$

Daí

$$\int_{B_R} g(u)\frac{\partial u}{\partial x} dx = -N\int_{B_R} G(u)dx + \int_{\partial B_R} G(u)RdS, \tag{2.3}$$

pois $\eta.x = R$ no termo de bordo.

(B) Para cada $1 \leq j, i \leq N$ vamos integrar por partes em j a expressão:

$$-\int_{B_R} u_{jj}u_i x_i dx.$$

Temos que

$$\begin{aligned} -\int_{B_R} u_{jj}u_i x_i dx &= \int_{B_R} u_j(u_i x_i)_j dx - \int_{\partial B_R} u_j u_i x_i \eta_j dS \\ &= \int_{B_R} u_j(u_{ij}x_i + u_i\delta_{ij})dx - \int_{\partial B_R} u_j u_i x_i \eta_j dS \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ \\ 0 & se \quad i \neq j. \end{cases}$$

Assim:

$$-\int_{B_R} u_{jj}u_ix_idx = \int_{B_R} u_ju_{ij}x_idx + \int_{B_R} u_ju_i\delta_{ij}dx - \int_{\partial B_R} u_ju_ix_i\eta_jdS$$

somando termo a termo para $(j, i = 1, 2, ..., N)$ temos que:

$$\begin{aligned} -\sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_{jj}u_ix_idx &= \sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_ju_{ij}x_idx + \sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_ju_i\delta_{ij}dx \\ &- \sum_j^N\sum_i^N\int_{\partial B_R} u_ju_ix_i\eta_jdS. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{B_R} -\Delta u\frac{\partial u}{\partial x}dx &= \underbrace{\sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_ju_{ij}x_idx}_{I} + \underbrace{\sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_ju_i\delta_{ij}dx}_{II} \\ &- \underbrace{\sum_j^N\sum_i^N\int_{\partial B_R} u_ju_ix_i\eta_jdS}_{III}. \end{aligned}$$

Vamos resolver separadamente as três integrais do segundo membro da expressão acima.

(I) Estimativa de (I)

Note que $u_ju_{ij}x_i = \left(\dfrac{u_j^2}{2}\right)_i x_i$. Assim integrando por partes temos que:

$$\int_{B_R}\left(\frac{u_j^2}{2}\right)_i x_idx = -\int_{B_R}\frac{u_j^2}{2}.1dx + \int_{\partial B_R}\frac{u_j^2}{2}x_i\eta_idS.$$

Daí

$$\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\int_{B_R}\left(\frac{u_j^2}{2}\right)_i x_idx = -\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\int_{B_R}\frac{u_j^2}{2}dx + \sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\int_{\partial B_R}\frac{u_j^2}{2}x_i\eta_idS.$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_j^N\sum_i^N\int_{B_R} u_ju_{ij}x_idx &= -\sum_{j=1}^N\frac{N}{2}\int_{B_R} u_j^2dx + \sum_{j=1}^N\int_{\partial B_R}\frac{u_j^2}{2}x\eta dS = \\ &= -\frac{N}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2dx + \int_{\partial B_R}\frac{\nabla u\nabla u}{2}x\eta dS = \end{aligned}$$

Como $\eta = \dfrac{x}{R}$, temos que

$$(\nabla u \cdot \nabla u)(x \cdot \eta) = \frac{1}{R}(\nabla u \cdot \nabla u)(x \cdot x) = |\nabla u|^2 \frac{|x|^2}{R},$$

uma vez que $x \in \partial B_R$. Portanto

$$\sum_j^N \sum_i^N \int_{B_R} u_j u_{ij} x_i dx = -\frac{N}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 dS.$$

(II) Estimativa de (II)

Temos que

$$\sum_j^N \sum_i^N \int_{B_R} u_j u_i \delta_{ij} dx = \sum_j^N \int_{B_R} u_j u_j dx = \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx.$$

(III) Estimativa de (III)

temos que:

$$\begin{aligned} -\sum_j^N \sum_i^N \int_{\partial B_R} u_j u_i x_i \eta_j dS &= -\sum_j^N \int_{\partial B_R} u_j \eta_j \nabla u.x dS = \\ &= -\int_{\partial B_R} \nabla u.\eta \nabla u.x dS = \\ &= -R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS. \end{aligned}$$

Juntando os resultados de (I), (II) e (III) obtemos então que:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} -\Delta u \frac{\partial u}{\partial x} dx &= -\frac{N}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 dS + \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \\ &- R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS = \\ &= \frac{2-N}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 dS. \end{aligned}$$

Como $-\Delta u = g(u)$, por hipótese, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} g(u) \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \frac{2-N}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS \\ &+ \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Substituindo a equação (2.3), encontrada na parte (A), em (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} -N\int_{B_R} G(u)dx + R\int_{\partial B_R} G(u)dS &= \frac{2-N}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \\ &- R\int_{\partial B_R}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS + \frac{R}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2 dS. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2 dx - N\int_{B_R} G(u)dx &= -R\int_{\partial B_R} G(u)dS \\ &- R\int_{\partial B_R}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 dS + \frac{R}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2 dS. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{B_R}|\nabla u|^2 dx - \frac{2N}{N-2}\int_{B_R} G(u)dx &= -\frac{2R}{N-2}\left(\int_{\partial B_R} G(u)dS\right. \\ &+ \left.\int_{\partial B_R}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) dS\right). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o segundo membro da igualdade acima converge para zero para alguma sequência $R_n \to \infty$, onde R_n é o raio da bola. Note que na fronteira temos a seguinte estimativa

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right| \leq |\nabla u|^2|\eta|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \leq \frac{3}{2}|\nabla u|^2$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|G(u)| + |\nabla u|^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N}|G(u)|dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx < \infty,$$

pois $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ por hipótese. Usando o Teorema de coordenadas polares (ver Apêndice Teorema A.14) temos:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|G(u)| + |\nabla u|^2)dx = \int_0^\infty\left(\int_{\partial B_R}(|G(u)| + |\nabla u|^2)dS\right)dR < +\infty. \tag{2.5}$$

Assim existe uma sequência R_n tal que

$$R_n\int_{\partial B_{R_n}}(|G(u)| + |\nabla u|^2)dS \to 0 \;\text{ quando }\; n \to \infty.$$

De fato, se
$$\liminf_{R\to\infty} R\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dS=\alpha>0,$$
então existe $R_0>0$ tal que
$$R\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dS\geq\frac{\alpha}{2},\quad \forall R>R_0,$$
Logo
$$\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dS\geq\frac{\alpha}{2R}\quad \forall R>R_0.$$
Assim
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dSdR &\geq \int_{R_0}^{+\infty}\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dSdR\\ &= \lim_{t\to+\infty}\int_{R_0}^{t}\left[\int_{\partial B_R}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dS\right]dR\\ &\geq \lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\int_{R_0}^{t}\frac{1}{R}dR\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\ln R|_{R_0}^{t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha}{2}[\ln t-\ln R_0]=+\infty.\end{aligned}$$
Logo
$$\int_{\partial B_{R_n}}(|G(u)|+|\nabla u|^2)dS\notin L^1(0,\infty),$$
o que contradiz (2.5). Com isto concluimos que pondo $R=R_n$ tem-se:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2R_n}{N-2}\left(\int_{\partial B_{R_n}}G(u)dS+\frac{1}{2}\int_{\partial B_{R_n}}\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2dS\right)=0.$$
E mais ainda, tomando $f_n(x)=|\nabla u(x)|^2\chi_{B_{R_n}}(x)$, (onde χ_A é a função característica sobre A) temos:
$$f_n(x)\to|\nabla u(x)|^2 \;\text{ e }\; |f_n|=|\nabla u\chi_{B_{R_n}}|\leq|\nabla u|^2\in L^1(\mathbb{R}^N).$$
Logo pelo Teorema da convergência dominada
$$\int_{B_{R_n}}|\nabla u|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\chi_{B_{R_n}}dx=\int_{\mathbb{R}^N}f_ndx\to\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx$$
quando $n\to\infty$. E de modo análogo

$$\int_{B_{R_n}} G(u)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

■

Corolário 2.4. Suponha que g satisfaça as hipóteses $(hg1)$ e $(hg2)$. Então qualquer solução de (2.1) satisfaz a identidade de Pohozaev (2.2).

Demonstração: Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução de (2.1) então por um argumento de Bootstrap, (veja em [31]) temos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, enquanto que pelo Teorema A.10 do Apêndice, tem-se $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ daí pelo Teorema 2.3 segue que u satisfaz (2.2)

■

2.3 APLICAÇÕES DA IDENTIDADE DE POHOZAEV

Mostraremos nesta Seção que as condições $(hg1)-(hg3)$ são "quase necessárias " para a solução do problema (2.1)

(A) Afirmamos que a hipótese $(hg1)$ é "quase" necessária no sentido de que se $g'(0) > 0$ então (2.1) não tem solução radial. De fato, sabemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é esfericamente simétrica então pelo resultado Strauss [6] (veja apêndice, Lema radial A.5) existe uma constante c dependendo apenas da dimensão do espaço (que neste caso é N) tal que

$$|u(x)| \leq \frac{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{(N-1)/2}},$$

e na verdade $|u(x)| = O(|x|^{-(N-1)/2})$ quando $|x| \to \infty$. (Aqui $f(x) = O(|h|)$ quando $|x| \to \infty$ se $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(h)}{|h|} = 0$). Sejam $m = g'(0)$ e $q(r) = m - \frac{g(u(r))}{u(r)}$. Então considerando $N = 3$ e supondo que g é C^2 numa vizinhança de 0, temos que $q(r) = O(r^{-1})$.

Com efeito

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + g''(0)\frac{s^2}{2} = ms + g''(0)\frac{s^2}{2},$$

assim,

$$\frac{g(u(r))}{u(r)} = m\frac{u(r)}{u(r)} + g''(0)\frac{u(r)^2}{2u(r)}.$$

Isto implica que

$$\frac{g(u(r))}{u(r)} = m + g''(0)\frac{u(r)}{2}.$$

Como

$$q(r) = m - \frac{g(u(r))}{u(r)},$$

então

$$q(r) = -g''(0)\frac{u(r)}{2},$$

para então chegar a

$$\frac{q(r)}{r} = -g''(0)\frac{u(r)}{2r}.$$

O que não ocorre pois viola um resultado de [3] o qual diz que o operador linear de Schorodinger $-\Delta + q(r)$ não possui autovalores associados a autofunções em $L^2(\mathbb{R}^3)$ sob a condição de que $q(r) = O(r^{-1})$. Logo a hipótese $(hg1)$ é quase necessária. no entanto $g'(0) > 0$ não está exatamente negando $(hg1)$. O único caso restante, essencialmente está limitado a "massa zero" caso onde $g'(0) = 0$. Então a questão da existência se torna muito mais complexa dependendo da estrutura de g. Este caso será estudado na Seção 2.7 onde provaremos um Teorema de existência para a solução de um estado fundamental.

(B) A hipótese $(hg2)$ é justificada através do seguinte problema (já apresentado no exemplo 1 acima)

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \qquad \text{e} \quad u \neq 0, \end{cases}$$

onde λ e m são constantes positivas e $p > 1$. Tomemos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(s) = \lambda |s|^{p-1}s - m.s$. Note que como $p > 1$, então g é contínua e claramente

$g(0) = 0$. Assim o problema acima se reduz a

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u \neq 0. \end{cases}$$

Seja u uma solução não trivial do problema acima. Multiplicando por u temos:

$$-\Delta u.u = g(u)u,$$

e integrando em $\mathbb{R}^N$ temos que

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u.udx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)udx. \tag{2.6}$$

Porém, como a identidade

$$v\Delta u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla v \nabla u$$

é válida em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ então pondo $u = v$ e integrando membro a membro temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta udx = \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(u\nabla u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

que pelo Teorema da Divergência (ver [29]) obtém-se

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta udx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Assim a equação (2.6) fica igual a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)udx. \tag{2.7}$$

Como u satisfaz (2.1) segue do Teorema 2.3 que vale a Identidade de Pohozaev, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Substituindo na equação (2.7) chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u)udx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Como $g(s) = \lambda|s|^{p-1}s - ms$ e $G(s) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ segue que

$$G(u) = \frac{\lambda|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{m}{2}u^2.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - m.u)udx = \frac{2N}{N-2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\lambda|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{m}{2}u^2\right)dx\right].$$

Segue-se que

$$\frac{N-2}{2N}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx - m\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx = \frac{\lambda}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx - \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx.$$

Portanto

$$\lambda\left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx = \frac{m}{N}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx > 0.$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx > 0$ e $\lambda > 0$ segue que

$$\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p+1} > \frac{N-2}{2N} \Rightarrow p < \frac{N+2}{N-2} = l.$$

Logo a equação do exemplo 1 não possui solução se $p \geq l$ como já havíamos comentado. Por outro lado encontramos nos artigos [4], [5], [6] que quando $p < l$ a equação do exemplo 1 admite infinitas soluções radiais. Deste exemplo vemos que a hipótese $(hg2)$ é necessária onde $l = \dfrac{N+2}{N-2}$ é denominado expoente crítico.

(C) A hipótese $(hg3)$ é uma condição necessária, visto que se u é solução de (2.1) então pela identidade de Pohozaev

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx > 0.$$

Corolário 2.5. Se u é uma solução qualquer de (2.1), então

$$I(u) = \frac{1}{N}T(u) > 0.$$

Demonstração: Se u é uma solução qualquer de (2.1), então pela identidade de Pohozaev

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > 0.$$

Como

$$I(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u),$$

lembrando que $T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ e $V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx$, temos portanto:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}T(u) - \frac{N-2}{2N}T(u) = \frac{1}{N}T(u) > 0.$$

■

2.4 MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO COM VÍNCULOS

Um método natural para resolver (2.1) seria obter o ponto crítico do funcional I no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Na verdade pelo Teorema A.9 do Apêndice, após algumas modificações adequadas de g, I é um funcional C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.Este método já foi usado em [6] para alguns casos particulares.No entanto a primeira dificuldade encontrada para resolver o problema é o fato enunciado na seguinte Proposição.

Proposição 2.6. O funcional ação $I(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u)$ é ilimitado superiormente e inferiormente.

Demonstração: Seja e_n uma sequência de autofunções ortonormais em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$e_n \rightharpoonup 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(e_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

No entanto, como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla e_n \nabla h = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} e_n h,$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla e_n|^2 = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} e_n^2 = \lambda_n.$$

Logo,

$$I(e_n) = \frac{\lambda_n}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} G(te_n),$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} I(e_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{2} - 0 = +\infty.$$

Vamos mostrar agora que I é ilimitado inferiormente. De fato de $(h3)$ temos que existe $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx > 0.$$

Pela mudança de variável feita na Seção 2.2 temos que

$$I(w_\alpha) = \frac{\alpha^{N-2}}{2} T(w) - \alpha^N V(w).$$

Como $V(w) > 0$, segue portanto que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(w_\alpha) = -\infty$ e isto prova o resultado.

■

Utilizando o Teorema A.9 do Apêndice, obtemos que $\int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx$ está bem definido e é de classe C^1 no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Definição 2.7. Sejam X um espaço de Banach e $F : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Definimos o conjunto $[F]_j$ como sendo,

$$[F]_j = \{w \in X; F(w) = j\}$$

Teorema 2.8 (Multiplicador de Lagrange)**.** Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \to \mathbb{R}$, funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $[F]_0 = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(w) \neq 0$, $\forall w \in [F]_0$. Se J restrito a $[F]_0$ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in [F]_0$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{w \in [F]_0} J(w),$$

então existe $\theta \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) verificando

$$J'(u_0) = \theta F'(u_0).$$

Demonstração: Ver [28] página 55 e 56 ■

Em particular tomando

$$X = H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$J(w) = T(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx,$$

$$F(w) = V(w) - 1 = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx - 1$$

e observando que T é limitado inferiormente sobre $[V]_1$ vamos obter uma solução para o seguinte problema:

$$\min \left\{ T(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(u) = 1 \right\}, \tag{2.8}$$

ou seja, um $u_0 \in [V]_1$ tal que

$$T(u_0) = \inf_{u \in [V]_1} T(u).$$

Então aplicando o Teorema anterior vamos garantir a existência de um $\theta > 0$ tal que

$$T'(u_0) = \theta . V'(u_0),$$

segue-se que

$$-\Delta u_0 = \theta g(u_0) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \tag{2.9}$$

Mostraremos também que necessariamente $\theta > 0$. Assim fazendo uma mudança de variável $u_{0\sigma}(x) = u_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ com $\sigma > 0$ teremos

$$-\Delta u_{0\sigma} = \frac{\theta}{\sigma^2} g(u_{0\sigma}) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Portanto escolhendo $\sigma = \sqrt{\theta}$ finalmente obteremos

$$-\Delta u_{0\sqrt{\theta}} = g(u_{0\sqrt{\theta}}) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

logo $u_{0\sqrt{\theta}}$ é uma solução de (2.1)

Lema 2.9. Seja $V : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido acima. Assuma $(hg3)$, então:

$$[V]_1 \neq \emptyset.$$

Demonstração: Por hipótese existe $\xi > 0$ tal que $G(\xi) = \displaystyle\int_0^\xi g(s)ds > 0$. Para $R > 1$, definimos

$$w_R(x) = \begin{cases} \xi & \text{se } |x| \leq R \\ \xi(R+1-r) & \text{se } r = |x| \in [R, R+1] \\ 0 & \text{se } |x| \geq R+1 \end{cases}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_R|^2 dx = \int_{B_{R+1}} |w_R(x)|^2 \chi_{B_{R+1}} dx < \infty.$$

De igual modo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_R|^2 dx = \int_{B_{R+1}} |\nabla w_R(x)|^2 \chi_{B_{R+1}} dx < \infty.$$

Logo $w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ou seja $w_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Denote por $\mu(A)$ a medida de Lebesgue de um conjunto A-mensurável em $\mathbb{R}^N$. Verifica-se que

$$V(w_R) \geq G(s)\mu(B_R) - \mu(B_{R+1} - B_R)(\max_{s \in [0,1]} \mu(G(s)).$$

Então existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, tais que

$$V(w_R) \geq c_1 R^N - c_2 R^{N-1}.$$

Logo para R suficientemente grande obtemos que $V(w_R) > 0$. Em particular tome $R_0 > 0$ tal que $V(w_{R_0}) > 0$. Façamos a mudança de variável em w_R, pondo $w_{R\sigma}(x) = w_R\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$. Assim $V(w_{R\sigma}) = \sigma^N V(w_R)$. Tome $\sigma = (V(w_{R_0}(x)))^{-\frac{1}{N}}$ que é positivo como visto acima. Logo:

$$V(w_{R_{0\sigma}}) = \left(V(w_{R_0}(x))^{-\frac{1}{N}}\right)^N V(w_{R_0}) = 1.$$

Portanto $w_{R_{0\sigma}} \in [V]_1$ e isto prova o Lema. ■

Teorema 2.10. Suponha $N \geq 3$ e que g satisfaça $(hg1) - (hg3)$. Então o problema de minimização

$$\min \left\{T(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(u) = 1\right\}, \tag{2.10}$$

possui uma solução $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a qual é positiva, esfericamente simétrica e decrescente com $r = |x|$. Além disso, existe um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$ tal que u_0 satisfaz

$$-\Delta u_0 = \theta g(u_0) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

E, finalmente, tomando $\sigma = \sqrt{\theta}$ e $u(x) = u_{0\sqrt{\theta}}(x) = u_0\left(\dfrac{x}{\sqrt{\theta}}\right)$ tem-se que u é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \quad , N \geq 3 \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \qquad , \qquad u \neq 0, \end{cases}$$

que é o problema (2.1)

Demonstração: Vamos dividir a prova deste Teorema em quatro etapas

Etapa 1: ***Obtendo Uma Sequência Minimizante***

Pelo Lema anterior $[V]_1 \neq \emptyset$. Logo podemos tomar uma sequência $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $V(u_n) = 1$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} T(u_n) = k = \inf\left\{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(w) = 1\right\} \geq 0$. Denotemos u_n^* um rearranjamento esférico de Schwartz de $|u_n|$ (a definição e algumas propriedades da simetrização estão descritas no Apêndice). Logo (u_n^*) é também uma sequência minimizante. Temos que $u_n^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $V(u_n^*) = 1$ e $k \leq T(u_n^*) \leq T(u_n)$. Substituindo (u_n) por (u_n^*), assumiremos a partir daqui, por simplicidade que, para todo n, u_n é não negativa, esfericamente simétrica e não crescente com $r = |x|$.

Etapa 2: ***Obtendo Estimativa Para u_n***

Primeiro vamos mostrar que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Para $s \geq 0$ defina:

$$g_1(s) = (g(s) + \nu s)^+ \ \text{ e } \ g_2(s) = g_1(s) - g(s),$$

onde denotamos $a^+ = \max\{a,0\}$ a parte positiva de a. E para $s<0$ estenda g_1 e g_2 como funções impares. Assim $g = g_1 - g_2$ com $g_1, g_2 \geq 0$. Afirmamos que:

$$\lim_{s\to 0} g_1(s) = o(s) \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = 0 \quad \text{se} \quad l = \frac{N+2}{N-2}, \tag{2.12}$$

$$g_2(s) \geq \nu s, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.13}$$

Com efeito, se $g(s) + \nu s \leq 0$ então (2.12) é imediata pois, neste caso $g_1 \equiv 0$. Se $g(s) + \nu s > 0$, com $s > 0$ então $g_1(s) = g(s) + \nu s$, daí

$$\lim_{s\to 0} \frac{g_1(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s)+\nu s}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} + \nu = -\nu + \nu = 0$$

e

$\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g_1(s)}{s^l} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g(s)+\nu s}{s^l} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} + \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\nu}{s^{l-1}} = 0 + 0 = 0$. Para $s < 0$ o procedimento é análogo. Quanto a (2.13) temos que:

- Se $g(s) \leq 0$ e $s \geq 0$, então:
$$g_1(s) = \nu s$$
  daí
$$g_2(s) = \nu s - g(s) \geq \nu s \quad \text{pois} \quad -g(s) > 0.$$

- Se $g(s) \geq 0$ e $s \geq 0$ então:
$$g_1(s) = g(s) + \nu s$$
  ou seja
$$\begin{aligned} g_2(s) &= g_1(s) - g(s) \\ &= g(s) + \nu s - g(s) \\ &= \nu s. \end{aligned}$$

  Logo $g_2(s) \geq \nu s$ e assim (2.13) se verifica.

Seja $G_i(t) = \displaystyle\int_0^t g_i(s)ds$, com $i = 1, 2, ...$ Segue de (2.12) e (2.13) que dado $\varepsilon > 0$ existe $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$G_1(s) \leq c_\varepsilon |s|^{l+1} + \varepsilon G_2(s). \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

(de fato $g_1(s) \leq c_\varepsilon s^l + \varepsilon g_2(s)$, $\forall s \geq 0$). Como $T(u_n) \searrow k$ então $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Segue do Teorema de imersões de Sobolev (ver Apêndice A.3,) ($D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$) que

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1, \tag{2.15}$$

onde $2^* = l + 1 = \dfrac{2N}{N-2}$. Como

$$V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx \ \text{ e } \ G_i(w(t)) = \int_0^t g_i(s)ds,$$

então

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= \int_0^t g_1(s)ds - \int_0^t g_2(s)ds \\ &= \int_0^t g_1 - g_2 ds \\ &= \int_0^t g(s)ds = G(t). \end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} G dx = V.$$

Assim $V(u_n) = 1$ pode ser escrito como

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx + 1. \tag{2.16}$$

Na equação (2.14) temos

$$G_1(s) \leq c_\varepsilon |s|^{l+1} + \varepsilon G_2(s),$$

então

$$G_1(u_n) \leq c_\varepsilon |u_n|^{2^*} + \varepsilon G_2(u_n). \tag{2.17}$$

Pela equação (2.15),

$$\|u_n\|_{L^{2^*}} \leq C_1.$$

Assim, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e integrando a expressão (2.17) segue:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx &= C_{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx \\ &\leq C_2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Onde $C_2 = C_{\frac{1}{2}} C_1$.
Assim, relacionando (2.18) com (2.16) temos que

$$C_2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx > \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx + 1.$$

Segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx \leq 2(C_2 - 1).$$

Ponha $C_3 = 2(C_2 - 1)$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx \leq C_3. \tag{2.19}$$

A equação (2.13) nos diz que

$$g_2(s) \geq \nu s.$$

Logo integrando em s temos que

$$G_2(t) = \int_0^t g_2(s)ds \geq \frac{\nu s^2}{2}.$$

Substituindo s por u_n e integrando a expressão acima, chegamos a

$$\frac{\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx \leq C_3. \tag{2.20}$$

Logo

$$\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < C_4,$$

pois $\nabla u_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx$ é limitada por (2.20). Pela imersão contínua

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p, \quad \text{ver Apêndice } \ (A.2)$$

concluimos a etapa 2 com a estimativa

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_5 \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < C, \quad 2 \leq p \leq 2^*,$$

onde $C = C_5C_4$

Etapa 3: ***Passagem ao Limite***

Começamos afirmando que $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ uniformemente com respeito a n. De fato, sabemos da etapa 1 e etapa 2 que u_n é radial, não crescente e limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Daí segue do Lema radial (ver Apêndice:Lema A.7,) que $|u_n(x)| \leq c|x|^{-\frac{N}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^N$ com C independente de n. Como u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ podemos obter uma subsequência u_{n_k} tal que u_{n_k} converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e q.t.p em $\mathbb{R}^N$ para uma função, digamos, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Denotando u_{n_k} simplesmente como u_n. Seja $Q(s) = s^2 + |s|^{l+1}$. Por (2.12) e (2.13) obtemos que

$$\frac{G_1(s)}{Q(s)} \to 0 \text{ quando } s \to +\infty \text{ e quando } s \to 0. \tag{2.21}$$

Note que

$$Q(u_n) = u_n^2 + |u_n|^{l+1}$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx < \infty.$$

Logo

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n)dx < +\infty. \tag{2.22}$$

Sabemos também que:

$$G_1(u_n) \to G_1(u_0) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \tag{2.23}$$

e

$$u_n \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty. \tag{2.24}$$

uniformemente com respeito a n. Por (2.21) – (2.24) o Lema de Compacidade de Strauss (Ver Apêndice Teorema A.4,) nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_0)dx, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Do Lema de Fatou (ver Apêndice Lema A.15,) na equação (2.16) deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_0)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_0)dx + 1, \tag{2.25}$$

pois,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_0)dx + 1 = \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_0)dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_0)dx.$$

De (2.25) extraimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_0)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_0)dx \geq 1,$$

e daí

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_0)dx \geq 1,$$

obtendo que

$$V(u_0) \geq 1.$$

Por outro lado sabemos que

$$T(u_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} T(u_n) = k.$$

Afirmamos que $V(u_0) = 1$.

De fato se $V(u_0) > 1$ então usando a mudança de variável $u_{0_\sigma}(x) = u_0(\frac{x}{\sigma})$ obtemos $V(u_{0\sigma}) = \sigma^N V(u_0)$. Assim tome $\sigma_0 = (V(u_0))^{-\frac{1}{N}}$. Note que $\sigma_0 \in [0,1]$. Daí obtemos que

$$V(u_{0\sigma_0}) = \sigma_0^N V(u_0) = (V(u_0))^{-\frac{1}{N}} V(u_0) = 1.$$

Observemos também que

$$T(u_{0\sigma_0}) = \sigma_0^{N-2} T(u_0) \leq \sigma_0^{N-2} k.$$

Pela definição de k já temos $T(u_{0\sigma_0}) \geq k$. Logo

$$k \leq T(u_{0\sigma_0}) \leq \sigma_0^{N-2} k \Rightarrow k[1 - \sigma_0^{N-2}] \leq 0.$$

Como $V(u_0) > 1$ então $\left[(V(u_0))^{-\frac{1}{N}}\right]^{N-2} < 1$ logo $1 - \sigma_0^{N-2} > 0$. Portanto temos obrigatoriamente que $k = 0$, o que nos dá $T(u_0) = 0$ implicando assim em $u_0 = 0$.

Daí chegamos a:

$$1 = V(u_{0\sigma_0}) = \sigma_0^N V(u_0) = \sigma_0^N .0 = 0,$$

o que é uma contradição. Logo $V(u_0) = 1$ e $T(u_0) = k > 0$. Portanto u_0 é solução do problema de minimização

$$min \left\{ T(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } V(u) = 1 \right\}.$$

Etapa 4: ***Conclusão***

Como T e V são de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (Ver Apêndice) e o problema (2.10) tem solução $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe um multiplicador de Lagrange θ tal que

$$\frac{1}{2}T'(u_0) = \theta V'(u_0).$$

Afirmação 2.11. $\theta > 0$

De fato, suponha $\theta < 0$. Observe que $V'(u_0) \neq 0$ pois $V'(u_0) = 0 \Rightarrow g(u_0) \equiv 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0$ já que $g(s) \neq 0$ para $s > 0$ pequeno. Porém isto contradiz o fato de $V(u_0) = 1$, resultado obtido na etapa anterior. Considere então uma função $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle V'(u_0), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(u_0) w dx > 0.$$

Como

$$V(u_0 + \varepsilon w) \approx V(u_0) + \varepsilon \langle V'(u_0), w \rangle$$

e

$$T(u_0 + \varepsilon w) \approx T(u_0) + 2\varepsilon\theta \langle V'(u_0), w \rangle,$$

para $\varepsilon \to 0$ e $\theta < 0$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $v = u_0 + \varepsilon w$ satisfaça

$$V(v) > V(u_0) = 1 \text{ e } T(v) < T(u_0) = k.$$

Novamente por uma mudança de variável, existe $\sigma_1 \in (0, 1)$ tal que

$$V(v_{\sigma_1}) = 1 \text{ e } T(v_{\sigma_1}) < k,$$

o que é absurdo pois k é o ínfimo. Logo $\theta > 0$ (já que não pode ser zero)

Então u_0 satisfaz, ao menos em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a equação

$$-\Delta u_0 = \theta g(u_0) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N.$$

Tome $u(x) = u_{0\sqrt{\theta}}(x) = u_0(\frac{x}{\sqrt{\theta}})$. Assim

$$-\Delta u = \frac{\theta}{(\sqrt{\theta})^2} g(u) \Rightarrow -\Delta u = g(u) \;\text{ com }\; u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto u é solução do problema (2.1) no sentido fraco.

■

2.5 PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO

Seja u a solução de (2.1) que obtivemos na Seção anterior. Nesta Seção vamos trabalhar as questões de regularidade e decaimento exponencial de u para enfim provarmos o principal resultado deste Capítulo. E por fim mostraremos que u tem ação mínima dentre todas as possíveis soluções de (2.1). Por esse motivo chamaremos a solução u de "solução de energia mínima".

2.5.1 Regularidade

Mostraremos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, usando o seguinte Lema (mais geral)

Lema 2.12. Assuma $(hg1)$ e $(hg2)$. Se u é uma solução esfericamente simétrico de (2.1) então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Inicialmente notemos que u satisfaz

$$-\Delta u = q(x)u \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N, \tag{2.26}$$

onde $q(x) = \dfrac{g(u(x))}{u(x)}$. Por $(hg2)$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que para cada $s > |A|$ tem-se $\left|\dfrac{g(s)}{s^l}\right| < \varepsilon$. Logo

$$\left|\frac{g(u)}{u}\right| \leq C + |u|^{\frac{4}{N-2}}.$$

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos pela imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow {}^p(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq p \leq 2^*$ que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Lembrando que

$$2^* = \frac{4}{N-2}.\frac{N}{2},$$

obtemos de

$$|q(x)| = \left|\frac{g(u)}{u}\right| \leq C + |u|^{\frac{4}{N-2}},$$

que

$$|q(x)|^{\frac{N}{2}} \leq C + |u|^{\frac{4}{N-2}.\frac{N}{2}} = C + |u|^{2^*},$$

segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |q(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq C + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx < +\infty.$$

Com isto vemos que $q \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Usando um resultado de Brezis e Kato ver [11] obtemos $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. E o clássico argumento de Bootstrap (sobre bolas) mostra que $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Logo pela estimativa L^p, ver [12] sabemos que $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $p < +\infty$. Logo $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (0,1)$. Como u é solução esfericamente simétrica de (2.1) então

$$u(x) = u(r), \quad \text{com} \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}.$$

Assim

$$u_{x_i} = u'(r).r_{x_i}.$$

Mas

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}} = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r}.$$

Com isto

$$u_{x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r},$$

logo

$$u_{x_ix_i} = u''(r)\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} + u'(r)\left(\frac{1.r - x_i.\frac{x_i}{r}}{r^2}\right),$$

ou seja

$$u_{x_ix_i} = u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{u'(r)}{r} - u'(r).\frac{x_i^2}{r^3}.$$

Portanto

$$\sum_i^N u_{x_ix_i} = \sum_i^N u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_i^N \frac{u'(r)}{r} - \sum_i^N u'(r).\frac{x_i^2}{r^3}.$$

Assim concluimos que:

$$\Delta u = u''(r) + N\frac{u'(r)}{r} - \frac{u'(r)}{r},$$

pois

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Como

$$-\Delta u = g(u),$$

então

$$-g(u) = u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r).$$

Isto implica que

$$-u'' - \frac{N-1}{r}u' = g(u). \tag{2.27}$$

Já sabemos que u'' é contínua exceto possivelmente em zero. Ponha $v(r) = g(u(r))$. Note que v é contínua em $[0, +\infty]$. Reescrevendo (2.27) como

$$-\frac{d}{dr}(r^{N-1}u') = r^{N-1}v(r)$$

e integrando de 0 a r obtemos:

$$r^{N-1}u' = -\int_0^r s^{N-1}v(s)ds.$$

Façamos a seguinte mudança de variável: $rt = s$. Assim $ds = rdt$ e a expressão acima fica igual a:

$$
\begin{aligned}
r^{N-1}u' &= -\int_0^1 (rt)^{N-1}v(rt)rdt \\
&= -\int_0^1 r^N t^{N-1}v(rt)dt \\
&= -r^N\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt.
\end{aligned}
$$

Assim

$$\frac{u'}{r} = -\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt.$$

Agora observe que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt = \int_0^1 t^{N-1}v(0)dt = v(0)\frac{t^N}{N}\bigg|_0^1 = \frac{v(0)}{N}.$$

Calculando $u''(0)$ temos que:

$$
\begin{aligned}
u''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u'(h)-u'(0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h\displaystyle\int_0^1 t^{N-1}v(0)dt - 0}{h} = \\
&= -\int_0^1 t^{N-1}v(0)dt = \\
&= -v(0)\frac{t^N}{N}\bigg|_0^1 = -\frac{v(0)}{N}.
\end{aligned}
$$

E pela equação (2.27)

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}u''(r) &= -(N-1)\lim_{r\to 0}\frac{u'(r)}{r} - \lim_{r\to 0}g(u(r)) = \\
&= -(N-1)\frac{v(0)}{N} - v(0) = \\
&= -\frac{v(0)}{N}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\lim_{r\to 0}u''(r) = u''(0)$ implica que u'' é contínua em 0 e assim, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ■

Observação 2.3. Na demonstração do lema anterior usamos o fato de que $u'(0) = 0$. De fato

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(he_i) - u(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{u(he_i) - u(0)}{h} = -\frac{\partial u}{\partial x_i}(0^-),$$

pela simetria radial. Como ambas são iguais (já que a derivada existe) então elas devem ser nulas. Logo

$$\nabla u = 0,$$

ou seja

$$u'(0) = 0.$$

Observação 2.4. O Lema anterior nos permite concluir que a solução de (2.1) obtida no Teorema 2.10, satisfaz $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Observação 2.5. Observemos também que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato se, sabemos que $u \geq 0$ e que u não é identicamente nula. Assim suponha que exista um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(x_0) = 0$. Considere a bola fechada $B_R[x_0]$. Pelo principio do máximo teremos que $u(x)$ é constante e igual a zero em $B_R[x_0]$. Fazendo $R \to \infty$ obtemos que u é identicamente nula. Mas isso que é uma contradição visto que $u \neq 0$.

2.5.2 Decaimento exponencial

Mostraremos no Lema a seguir o decaimento de u, $|D^\alpha u|$ ($|\alpha| \leq 2$) ao infinito.

Lema 2.13. Assuma $(hg1)$ e $(hg2)$. Se u é uma solução esfericamente simétrica de (2.1) então

$$|D^\alpha u(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

para algum C, $\alpha > 0$ e para $|\alpha| \leq 2$.

Demonstração: Pelo Lema 2.12, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz a equação (2.27). Façamos

$$v = r^{\frac{(N-1)}{2}} u.$$

Então

$$v'(r) = \frac{N-1}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u + r^{\frac{N-1}{2}} u',$$

e

$$v''(r) = \frac{N-1}{2}.\frac{N-3}{2} r^{\frac{N-5}{2}} u + \frac{N-1}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u' + \frac{N-1}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u' + r^{\frac{N-1}{2}} u''.$$

Seja $b = \left(\frac{N-1}{2}\right) . \left(\frac{N-3}{2}\right)$.
Assim:

$$\begin{aligned} v''(r) &= b.r^{(\frac{N-5}{2})} u + (N-1) r^{(\frac{N-3}{2})} u' + r^{(\frac{N-1}{2})} u'' = \\ &= b r^{(\frac{N-1}{2}-2)} u + (N-1) r^{(\frac{N-1}{2}-1)} u' + r^{(\frac{N-1}{2})} u'' = \\ &= \frac{b.r^{(\frac{N-1}{2})} u}{r^2} + r^{(\frac{N-1}{2})} \left(\frac{N-1}{r} u' + u'' \right). \end{aligned}$$

Da equação (2.27) sabemos que $-g(u) = \frac{N-1}{r} u' + u''$. Logo a expressão $v''(r)$ acima fica igual a:

$$\begin{aligned} v''(r) &= \frac{b.r^{(\frac{N-1}{2})} u}{r^2} - r^{(\frac{N-1}{2})} g(u) \\ &= r^{(\frac{N-1}{2})} u \left(\frac{b}{r^2} - \frac{g(u)}{u} \right). \end{aligned}$$

Tomando $q(r) = -\frac{g(u(r)}{u(r)}$ temos então que v satisfaz:

$$v''(r) = \left(q(r) + \frac{b}{r^2} \right). \tag{2.28}$$

Para r suficientemente grande, digamos $r \geq r_0$, tem-se:

$$q(r) + \frac{b}{r^2} \geq \frac{\nu}{2}.$$

(Lembrando que $u(r) \to 0$ quando $r \to \infty$ pelo Lema radial A.5 no Apêndice)
Seja $w = v^2$.
Então

$$w' = 2v.v',$$

e

$$w'' = 2v'.v' + 2v.v''.$$

Então por (2.28)

$$w'' = 2(v')^2 + 2v\left[q(r) + \frac{b}{r^2}\right].$$

Como $w = v^2$ então

$$\frac{w''}{2} = (v')^2 + \left[q(r) + \frac{b}{r^2}\right]w \geq (v')^2 + \frac{\nu}{2}w \geq \frac{\nu w}{2}.$$

Assim w satisfaz:

$$w'' \geq \nu w \quad \text{e} \quad w \geq 0.$$

Seja $z = e^{-\sqrt{\nu}r}(w'(r) + \sqrt{\nu}w)$. Temos que:

$$\begin{aligned} z'(r) &= -\sqrt{\nu}.e^{-\sqrt{\nu}r}(w'(r) + \sqrt{\nu}w(r)) + e^{-\sqrt{\nu}r}(w''(r) + \sqrt{\nu}w'(r)) = \\ &= -\sqrt{\nu}.e^{-\sqrt{\nu}r}w'(r) - e^{-\sqrt{\nu}r}w(r) + e^{-\sqrt{\nu}r}w''(r) + \sqrt{\nu}e^{-\sqrt{\nu}r}w'(r) = \\ &= e^{-\sqrt{\nu}r}(w''(r) - \nu w(r)) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad r \geq r_0. \end{aligned}$$

Logo z é não decrescente em $(r_0, +\infty)$. Se existisse $r_1 > r_0$ tal que $z(r_1) > 0$ então $z(r) \geq z(r_1) > 0$, $\forall \;\; r \geq r_1$. Isto implica que

$$w' + \sqrt{\nu}w \geq z(r_1)e^{\sqrt{\nu}r},$$

e com isso $w' + \sqrt{\nu}w$ não é integrável em $(r_1, +\infty)$. No entanto v^2 e $v.v'$ são integráveis próximo de $+\infty$ (para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$). Logo w' e w são integráveis $\Rightarrow w' + \sqrt{\nu}w$ é integrável, o que é uma contradição. Logo $z(r) \leq 0$, $\forall r \geq r_1$. Isto implica que

$$\begin{aligned} \left(e^{\sqrt{\nu}r}w\right)' &= \sqrt{\nu}.e^{\sqrt{\nu}r}w + e^{\sqrt{\nu}r}w' = \\ &= e^{\sqrt{\nu}r}(w' + \sqrt{\nu}w) = \\ &= e^{2\sqrt{\nu}r}.e^{-\sqrt{\nu}r}(w' + \sqrt{\nu}w) = \\ &= e^{2\sqrt{\nu}r}.z \leq 0, \quad \text{para} \quad r \geq r_1. \end{aligned}$$

Logo

$$e^{\sqrt{\nu}r}w \leq C,$$

implica que

$$w(r) \leq Ce^{-\sqrt{\nu}r}.$$

Como $w = v^2$ e $v = r^{\frac{N-1}{2}}u$ segue que

$$r^{N-1}u^2(r) = v^2(r) = w(r) \leq Ce^{-\sqrt{\nu}r},$$

portanto,

$$|u(r)| \leq C.r^{-\frac{N-1}{2}}.e^{-\frac{\nu}{2}r}, \quad \text{para} \quad r \geq r_1, \tag{2.29}$$

com r_1 e C constantes positivas. Para obter o decaimento exponencial de $u'(r)$ observe que:

$$\begin{aligned}
(r^{N-1}u'(r))' &= (N-1)r^{N-2}u' + r^{N-1}u'' = \\
&= -r^{N-1}\left(-u'' - \frac{N-1}{r}u'\right) = \\
&= -r^{N-1}g(u).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Logo usando $(hg1)$ e o decaimento exponencial de u vemos que para r suficientemente grande, digamos $r \geq r_0$, tem-se

$$\nu_1|u| \leq |g(u)| \leq \nu_2|u|, \quad \text{onde} \quad \nu_1 \geq \nu_2 > 0.$$

Assim, integrando (2.30) em (r, R), usando (2.29) e fazendo $r, R \to \infty$ mostramos que $r^{N-1}u'(r)$ tem um limite quando $r \to \infty$ e este limite só pode ser zero por (2.29). Integrando (2.29) em $(r, +\infty)$, implica que $u'(r)$ tem decaimento exponencial. Por fim o decaimento exponencial de $u''(r)$ (e portanto de $|D^\alpha u(x)|$ para $|\alpha| \leq 2$) segue imediatamente da equação (2.27) ■

2.6 AÇÃO MÍNIMA ENTRE AS SOLUÇÕES DE (2.1)

A solução de (2.1) obtida através do método de minimização com vínculo tem por um resultado de Colema, Glazer & Martin [13], a importante propriedade de minimizar o funcional ação dentre todas as possíveis soluções de (2.1). A prova deste fato requer o uso da identidade de Pohozaev (2.2) visto na Seção 2.2. Portanto cabe aqui destacar novamente que qualquer solução de (2.1) satisfaz a referida identidade.

Teorema 2.14. Seja u uma solução de (2.1) obtida no Teorema 2.10. Então se v é uma solução qualquer de (2.1) tem-se necessariamente que

$$0 < I(u) \leq I(v).$$

Demonstração: Seja $\bar{u}$ uma solução de (2.10) obtida no Teorema 2.10. Então

$$V(\bar{u}) = 1 \ \text{ e } \ T(\bar{u}) = \min\{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(w) = 1\}.$$

Como visto no Teorema 2.10, existe $\theta > 0$ tal que

$$-\Delta \bar{u} = \theta g(\bar{u}), \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N,$$

e a solução u de (2.1) obtida desta última é dada por $u = \bar{u}_{\sqrt{\theta}}$ (onde $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$). Pelo Teorema 2.3 u satisfaz a identidade de Pohozaev, isto é,

$$T(u) = \frac{2N}{N-2} V(u). \tag{2.31}$$

Como $u = \bar{u}_{\sqrt{\theta}}$ temos:

$$T(u) = \theta^{\frac{N-2}{2}} T(\bar{u}) \ \text{ e } \ V(u) = \theta^{\frac{N}{2}} V(\bar{u}) = \theta^{\frac{N}{2}},$$

pois $V(\bar{u}) = 1$. Assim, substituindo na expressão de (2.31) acima temos:

$$\theta^{\frac{N-2}{2}} T(\bar{u}) = \frac{2N}{N-2} V(u) = \frac{2N}{N-2} \theta^{\frac{N}{2}},$$

logo,

$$\frac{\theta^{\frac{N}{2}}}{\theta^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{N-2}{2N} T(\bar{u})$$

e portanto

$$\theta = \frac{N-2}{2N} T(\bar{u}).$$

Como u é solução de (2.1) segue do Corolário 2.5 que:

$$I(u) = \frac{1}{N}.T(u) > 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N}\left(\frac{2N}{N-2}\right)V(u) = \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-1}\theta^{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-1}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}}T(\bar{u})^{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}T(\bar{u})^{\frac{N}{2}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Seja v outra solução não trivial de (2.1). Por (2.31) temos:

$$T(v) = \frac{2N}{N-2}V(v).$$

Como vimos antes, dado $\sigma > 0$, a mudança de variável $v_\sigma(x) = v(\frac{x}{\sigma})$ nos dá que:

$$V(v_\sigma) = \sigma^N V(v).$$

Tome

$$\sigma = (V(v))^{-\frac{1}{N}},$$

segue que

$$V(v_\sigma) = 1.$$

E ainda por (2.31),

$$V(v) = \frac{N-2}{2N}T(v).$$

Logo

$$\sigma = (V(v))^{-\frac{1}{N}} = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{1}{N}} T(v)^{-\frac{1}{N}}. \tag{2.33}$$

Como vimos, Seção 2.2 $T(v_\sigma) = \sigma^{N-2}T(v)$. Logo usando (2.33)

$$\begin{aligned} T(v_\sigma) &= \left[\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{1}{N}} T(v)^{-\frac{1}{N}}\right]^{N-2} T(v) = \\ &= \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{(N-2)}{N}} .T(v)^{\frac{2}{N}}. \end{aligned}$$

Logo

$$T(v)^{\frac{2}{N}} = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{(N-2)}{N}} T(v_\sigma)$$

e assim

$$T(v) = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{(N-2)}{2}} T(v_\sigma)^{\frac{N}{2}}. \tag{2.34}$$

Novamente usando o Corolário 2.5, e substituindo a expressão (2.34) temos que:

$$I(v) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} T(v_\sigma)^{\frac{N}{2}}. \tag{2.35}$$

Como $\bar{u}$ é solução do problema (2.10) e $V(v_\sigma) = 1$ então

$$T(\bar{u}) \le T(v_\sigma). \tag{2.36}$$

Portanto de (2.32), (2.35) e (2.36)

$$I(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} T(\bar{u})^{\frac{N}{2}} \le \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} T(v_\sigma)^{\frac{N}{2}} = I(v)$$

o que prova o Teorema.

■

2.7 O CASO MASSA ZERO

Como vimos na Seção 2.3, a situação onde $g'(0) = 0$ é um caso limite do ponto de vista do resultado de existência. De fato vimos que quando $g'(0) > 0$ não existe solução de (2.1) e quando $g'(0) < 0$ o Teorema 2.14 aplica-se. Diremos que o caso $g'(0) = 0$ é o caso "*massa zero*". Esta situação aparece em certos problemas relacionados à equação de Yang-Mills, ver [14] e [15]. Nesta Seção provaremos a existência de um resultado mais geral que o Teorema 2.14 que também inclui a situação quanto $g'(0) = 0$. Vamos assumir aqui que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz:

(Mz-1) $g(0) = 0$ e $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0$, quando $l = \dfrac{N+2}{N-2}$.

(Mz-2) Existe $\xi > 0$ tal que $G(\xi) > 0$.

(Mz-3) Seja $\xi_0 = \inf\{\xi > 0; G(\xi) > 0\}$. Se $g(s) > 0, \forall s > \xi_0$ então $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s^l} = 0$.

Definição 2.15. Definimos o conjunto $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, como sendo

$$\mathcal{D}^{1,2} = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Observação 2.6. Sabemos que para $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ o conjunto $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido do produto interno e da norma

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Hilbert obtido através do completamento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Teorema 2.16. Assumindo as hipóteses (Mz-1)-(Mz-3), então existe uma solução u da equação

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

o qual é positiva, esfericamente simétrica e decrescente (com r), tal que, $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. E mais ainda, u é uma solução clássica.

Demonstração: Vamos modificar a função g por $\tilde{g}(s) = g(s \wedge s_0)$ se existe $s_0 > \xi_0$ tal que $g(s_0) \leq 0$. Denotaremos por g a função truncada $\tilde{g}$. Considere o problema

$$\min\{T(w); w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), |G(w)| \in L^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}. \tag{2.37}$$

onde novamente

$$T(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx.$$

A prova do Teorema se dará em três etapas:

Etapa 1: Exitência de uma solução minimizante do problema (2.37)

Tomemos w_R como no Lema 2.12. Logo vemos que:

$$\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N); |G(w)| \in L^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\} \neq \emptyset.$$

Seja u_n uma sequência minimizante de (2.37), isto é, $u_n \in \mathcal{A}$ e

$$T(u_n) \searrow k = \inf\{T(w); w \in \mathcal{A}\}, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Podemos sempre assumir, como na etapa 1 da prova do Teorema 2.10, que u_n é não negativa, esfericamente simétrica e não crescente. De fato se u_n é uma sequência minimizante, então assim será (u_n^*), onde (u_n^*) é a simetrização de Schwarz de u_n. Note que não há dificuldades em definir a simetrização de Schwarz em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, (veja no Apêndice). Logo $\|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ e portanto $\|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$ permanecem limitados. Depois do truncamento de G, segue da hipótese (Mz-3) que

$$|g(s)| \leq C + |s|^l, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.38}$$

Logo para qualquer R finito, existe uma constante C_R tal que

$$\int_{B_R} |G(u_n)| dx \leq C_R. \tag{2.39}$$

De fato,

$$|G(s)| = \int_0^s |g(t)| dt \leq Cs + \frac{|s|^{l+1}}{l+1}.$$

Chame $\dfrac{1}{l+1} = C_2$ e $C = C_1$. Então

$$|G(s)| \leq C_1 s + C_2 |s|^{l+1}$$

implica

$$\int_0^s |g(t)| dt \leq \frac{C_1 s^2}{2} + \frac{C_2 |s|^{l+2}}{l+2}.$$

Chame agora $C_3 = \dfrac{C_1}{2}$ e $C_4 = \dfrac{C_2}{l+2}$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(u)| dx \leq C_3 u^2 + C_4 |u|^{l+2}.$$

Como u é radial e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ então dado $U(x) = u(x)$ q.t.p. temos

$$|u(x)| = |U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

para $|x| \geq \alpha_N$ sendo C_N e α_N dependendo apenas da dimensão N. Como

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

segue que:

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq C_5 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &= C_6 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

pois $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Logo $|u(x)| < \infty$. E isto implica que existe uma constante C_R tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |G(u)| dx < C_R.$$

De fato, pelo Lema radial A.6 do Apêndice

$$|u_n(r)| \leq C r^{-\alpha},$$

onde $\alpha > 0$ depende apenas de N e C depende apenas de $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ que é limitado pois $u_n \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Então $|u_n(r)| \leq \beta(r)$ e $\lim_{r \to +\infty} \beta(r) = 0$. Basta tomar $\beta(r) = C r^{-\alpha}$. Usando (2.39) e $V(u_n) = 1$ vemos para qualquer $R > 0$ fixado, existe uma constante C_R tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} G(u_n) dx \geq C_R. \tag{2.40}$$

Ponha $g^+ = \max\{g, 0\}$ e $g^- = -\min\{g, 0\}$. Assim $g = g^+ - g^-$ e $g^+, g^- \geq 0$. Escrevamos:

$$G_1(z) = \int_0^z g^+(s) ds \quad \text{e} \quad G_2(z) = \int_0^z g^-(s) ds.$$

Logo $G = G_1 - G_2$ e isto implica que:

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} G(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_1(u_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_2(u_n)dx,$$

de (2.40) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_1(u_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_2(u_n)dx \geq -C_R,$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_2(u_n)dx \leq C_R + \int_{\mathbb{R}^N - B_R} G_1(u_n)dx. \tag{2.41}$$

No entanto sabemos que $0 \leq u_n(r) \leq \beta(R)$ para $r \geq R$, $n \in \mathbb{N}$ onde $\beta(R) \to 0$ quando $R \to +\infty$. Pela condição (Mz-1) e para R suficientemente grande, existe uma constante $\varepsilon_R > 0$ tal que

$$0 \leq G_1(u_n(r)) \leq \varepsilon_R |u_n(r)|^{l+1}, \quad r \geq R, \quad n \in \mathbb{N}$$

Além disso (ainda por (Mz-1)) podemos supor $\varepsilon_R \to 0$ quando $R \to +\infty$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} |G_1(u_n)|dx \leq \varepsilon_R \int_{\mathbb{R}^N - B_R} |u_n|^{l+1}dx \leq C\varepsilon_R. \tag{2.42}$$

Este fato juntamente com (2.39) mostra que $G_1(u_n)$ é limitado em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$. Note que u é não negativo, radial e não crescente. Logo para qualquer R, como u_n é limitado em $H^1(B_R)$ então usando (2.38) tem-se

$$\int_{B_R} G_1(u_n)dx \to \int_{B_R} G_1(u)dx \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

E por (2.42)

$$\int_{\mathbb{R}^N - B_R} |G_1(u_n)|dx \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty,$$

uniformemente com relação a n. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)dx \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{2.43}$$

De $V(u_n) = 1$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)dx = 1$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx. \tag{2.44}$$

Observe que $G(u_n)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Fatou (ver Apêndice). Então de (2.43) e (2.44)

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)dx = \liminf_{n\to+\infty} \left(-1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)dx\right),$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)dx \geq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u)dx,$$

isto é,

$$V(u) \geq 1.$$

Por outro lado sabemos que

$$T(u) \leq \lim_{n\to+\infty} T(u_n) = k.$$

Portanto concluimos como na prova do Teorema 2.10 que $V(u) = 1$, ou seja, $u \in \mathcal{A}$ e $T(u) = k$. Isto significa que u é solução do problema minimizante (2.37)

Etapa 2: Existência de um multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\theta > 0}$

Vamos mostrar que existe $\theta \neq 0$ tal que $-\Delta u = \theta g(u)$ em $\mathbb{R}^N$. Observe que $u \in H^1(C_\varepsilon)$ sobre qualquer região

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N; \varepsilon < |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}, \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Denotando por $\mathcal{D}_r^{1,2}$ o espaço das funções radiais em $\mathcal{D}^{1,2}$, observemos que u é também solução do problema abaixo

$$\min\{T(w); w \in \mathcal{D}_r^{1,2}, w = u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N - C_\varepsilon, V(w) = 1\}.$$

Este é um problema clássico no cálculo variacional, quando T e V são funcionais C^1 em $H^1(C_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$. Isto é, $-\Delta u = \theta g(u)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N - \{0\})$. Para ver que esta equação é também satifeita na origem, usaremos o resultado de [16] acerca das singularidades de soluções de problemas elípticos semi-lineares. De fato, se $u \in H^1(B_1)$ satisfaz:

$$-\Delta u = \theta g(u) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(B_1 - \{0\}),$$

e g verifica a condição (2.38), então a equação é satisfeita na origem:

$$-\Delta u = \theta g(u) \ \text{ é satisfeita em } \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

A possibilidade $\theta = 0$ se dá por $V(u) = 1$. Podemos eliminar também o caso $\theta < 0$, pelo mesmo argumento usado na Seção 3.3. De fato se $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ é tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(u)w dx > 0$, então para $\theta < 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a função $v = u + \varepsilon w$ satisfaria $V(v) > V(u) = 1$ e $T(v) < T(u)$. No entanto por uma simples mudança de escala isto é impossível. Logo $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$-\Delta u = \theta g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad \theta > 0.$$

Etapa 3: Regularidade da solução de (2.1)

Usando uma mudança de variável, podemos obter que $u_{\sqrt{\theta}}$ é uma solução positiva, esfericamente simétrica e não crescente de (2.1). Escrevamos (2.1) como

$$-\Delta u = q(x)u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $q(x) = \dfrac{g(u(x))}{u(x)}$. Por (2.38), $q \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Como $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, podemos encontrar por um resultado de Brezis & Kato [11] que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < +\infty$. Um argumento de bootstrap mostra então que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ como anteriormente.

■

3 O TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

3.1 INTRODUÇÃO

Métodos variacionais são uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria de equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares. O problema variacional consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado, de modo natural, ao problema diferencial. É interessante observar que o problema de minimização de funcionais é o objeto central do **Cálculo das Variações Clássico** e que, em seu estudo, equações diferenciais aparecem de modo natural, como condições suficientes a que a função que minimiza o funcional deve satisfazer. Assim a minimização de um funcional no Cálculo das Variações Clássico é reduzida ao estudo de um problema na teoria das equações diferenciais. Esse programa tem sucesso, na medida que o problema seja tratável por alguma outra técnica. A ideia de inverter a direção deste programa, isto é, tratar equações diferenciais através do estudo de um funcional associado aparece em meados do século XIX, de modo explicito com Dirichlet e Riemann. Esses matemáticos usaram esse procedimento para lidar com o que hoje chamamos problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Surge assim o método direto do Cálculo das Variações, que consiste em estudar diretamente o funcional e procurar obter seu mínimo. Entretanto existem funcionais que são ilimitados conforme visto no Capítulo anterior Proposição 2.6. Para estes casos a busca por pontos críticos toma outros rumos. E a ferramenta principal neste sentido é o famoso Teorema do Passo da Montanha que nos permitirá encontrar pontos críticos do tipo *"sela"* para o funcional associado. Neste Capítulo veremos o Lema de Deformação de Clark que será usado na demonstração do Teorema do Passo da Montanha bem como uma aplicação deste último. E por fim este belíssimo resultado será usado no Capítulo seguinte como uma importante caracterização das soluções de energia mínima, tema central deste trabalho.

3.2 PONTO CRÍTICO E DEFORMAÇÃO

Denotaremos H por um espaço de Hilbert real, com norma $\|.\|$ e produto interno $\langle , \rangle$. Seja $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional não linear em H.

Definição 3.1. Dizemos que I é diferenciável em $u \in H$ se existe $v \in H$ tal que

$$I(w) = I(u) + \langle v, w - u \rangle + o(\|w - u\|), \quad \forall w \in H$$

o elemento $v \in H$, se existe, é único. Escrevemos $I'(u) = v$

Definição 3.2. Definimos os conjuntos $\mathcal{C}, A_c, K_c$, sendo $c \in \mathbb{R}$, como:

$\mathcal{C} = \{I \in C^1(H, \mathbb{R}); I' : H \to H$ é Lipschitz contínua em um subconjunto limitado de $H\}$

$A_c = \{u \in H; I(u) \leq c\}$

$K_c = \{u \in H; I(u) = c$ e $I'(u) = 0\}$

Definição 3.3. Dizemos que o número real c é valor crítico se $K_c \neq \emptyset$

Observação 3.1. Vamos mostrar que se c não é um nível crítico, podemos deformar o conjunto $A_{c+\varepsilon}$ em $A_{c-\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Como H geralmente é de dimensão infinita, precisamos de algum tipo de condição de compacidade, o qual definiremos a seguir

Definição 3.4. Um funcional $I \in C(H, \mathbb{R})$, com $c \in \mathbb{R}$, satisfaz a condição $(PS)_c$, conhecida como Palais Smale, se qualquer sequência $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset H$ tal que, quando $n \to \infty$,

(i) $I(u_n) \to c$

(ii) $I'(u_n) \to 0$

admite uma subsequência fortemente convergente em H.

Lema 3.5 (Lema de Deformação de Clark)**.** Seja $I \in \mathcal{C}$ satisfazendo a condição $(PS)_c$. Suponha que

$$K_c = \emptyset.$$

Então para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma constante, $0 < \delta < \varepsilon$ e uma função $\eta \in C([0, 1] \times H; H)$ tal que

$$\eta_t(u) = \eta(t, u), \quad (0 \leq t \leq 1, \quad u \in H)$$

satisfaz:

(i) $\eta_0(u) = u, \quad u \in H;$

(ii) $\eta_1(u) = u, \quad u \notin I^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon];$

(iii) $I(\eta_t(u)) \leq I(u), \quad u \in H \;\text{ e }\; 0 \leq t \leq 1;$

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}.$

Demonstração: Inicialmente afirmamos que existem constantes $\sigma > 0$, $\varepsilon > 1$ tais que

$$\|I'(u)\| \geq \sigma \;\text{ para cada }\; u \in A_{c+\varepsilon} \backslash A_{c-\varepsilon}. \tag{3.1}$$

De fato, suponha por absurdo que não ocorra (3.1). Então existem sequências $\sigma_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$ e $u_k \in A_{c+\varepsilon} \backslash A_{c-\varepsilon}$ com $\|I'(u_k)\| \leq \sigma_k$. Pela hipótese de I satisfazer $(PS)_c$ implica que existe uma subsequência $u_{k_j} \to u$ em H. Como $I \in C^1(H, \mathbb{R})$, fazendo $j \to \infty$ temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in A_{c+\varepsilon} \subset A_{c-\varepsilon} \\ \\ \|I'(u_k)\| \leq \sigma_k \end{array} \right\} \Rightarrow I(u) = c \;\text{ e }\; I'(u) = 0.$$

Logo $K_c \neq \emptyset$ o que contradiz a hipótese. E isto prova a afirmação.

Fixemos agora δ tal que:

$$0 < \delta < \varepsilon \;\text{ e }\; 0 < \delta < \frac{\sigma^2}{2}.$$

Definamos os conjuntos

$$X = \{u \in H; I(u) \leq c - \varepsilon \;\text{ ou }\; I(u) \geq c + \varepsilon\}$$

e

$$Y = \{u \in H; c - \delta \leq I(u) \leq c + \delta\}.$$

Como $I \in \mathcal{C}$ então I' é limitado em algum subconjunto limitado de H. Assim a função que leva $u \mapsto \operatorname{dist}(u, A) + \operatorname{dist}(u, B)$ é limitada por baixo por uma constante positiva em cada subconjunto limitado de H. Logo a função

$$g(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, X)}{\operatorname{dist}(u, X) + \operatorname{dist}(u, Y)}, \quad u \in H,$$

satisfaz:

(a) $0 \leq g \leq 1$;

(b) $g(u) = 0, \quad \forall u \in X, \quad$ pois se $\ u \in X, \quad \text{dist}(u, X) = 0 \Rightarrow g(u) = 0$;

(c) $g(u) = 1, \quad \forall u \in Y, \quad$ pois se $\ u \in Y, \quad \text{dist}(u, Y) = 0 \Rightarrow g(u) = 1$.

Definamos as funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $V : H \to H$ pondo

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{1}{t}, & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

e

$$V(u) = -g(u)h(\|I'(u)\|)I'(u), \quad u \in H. \tag{3.3}$$

Notemos que V é limitada pois:

$$|V(u)| \leq |g(u)||h(\|I'(u)\|)||I'(u)| \leq |I'(u)| < \infty.$$

Consideremos agora para $u \in H$ a EDO

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \quad com \quad t > 0 \\ \\ \eta(0) = u. \end{cases} \tag{3.4}$$

Como V é limitado e Lipschitz contínua em algum conjunto limitado segue do "Teorema da existência e unicidade" (ver em [32]) que existe uma única solução de (3.4) para todo tempo $t \geq 0$. Denotemos esta solução por $\eta_t(u) = \eta(t, u)$, $t > 0$ e $u \in H$. Restringindo ao intervalo $0 \leq t \leq 1$ temos que $\eta \in C([0, 1] \times H, H)$ e ainda $\eta_0(u) = \eta(0, u) = u$ e $\eta_1(u) = u$ se $u \notin I^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Com isto mostramos (i)-(ii)

Mostremos agora (iii). De fato, calculando $\frac{d}{dt}I(\eta_t(u))$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\eta_t(u)) &= (I'(\eta_t(u))).\frac{d}{dt}\eta_t(u) = \\ &= I'(\eta_t(u)).V(\eta_t(u)) = \\ &= I'(\eta_t(u))[-g(\eta_t(u)).h(\|I'(\eta_t(u))\|).I'(\eta_t(u))] = \\ &= -g(\eta_t(u)).h(\|I'(\eta_t(u))\|).\left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2. \end{aligned}$$

Em particular para $t \in [0,1]$ temos que $g > 0$ e $h = 1 > 0$. Logo $\dfrac{d}{dt}I(\eta_t(u)) \leq 0$, com $0 \leq t \leq 1$. Isto significa que $I(\eta_t(u))$ é não crescente para $0 \leq t \leq 1$. Em particular

$$I(\eta_0(u)) \geq I(\eta_t(u)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e por (i) $\eta_0(u) = u$. Logo

$$I(\eta_t(u)) \leq I(u), \quad \text{se} \quad u \in H \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e isto prova (iii). Resta apenas mostrar que $\eta_t(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ e para isso mostraremos que para qualquer $u \in A_{c+\delta}$ tem-se $\eta_1(u) \in A_{c-\delta}$. De fato, seja $u \in A_{c+\delta}$. Se $\eta_t(u) \notin Y$ então $I(\eta_t(u)) < c - \delta \Rightarrow \eta_t(u) \in A_{c-\delta}$ e o resultado segue.

Podemos então supor $\eta_t(u) \in Y$ com $(0 \leq t \leq 1)$. Pelo que vimos acima

$$\frac{d}{dt}I(\eta_t(u)) = -g(\eta_t(u)).h(\|I'(\eta_t(u))\|).\left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2, \tag{3.5}$$

como $\eta_t(u) \in Y$, $(0 \leq t \leq 1)$ então $g(\eta_t(u)) = 1$, $(0 \leq t \leq 1)$. Logo a expressão (3.5) fica igual a:

$$\frac{d}{dt}I(\eta_t(u)) = h(\|I'(\eta_t(u))\|).\left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2. \tag{3.6}$$

Temos duas possibilidades:

$$\text{ou} \quad \|I'(\eta_t(u))\| \leq 1 \quad \text{ou} \quad \|I'(\eta_t(u))\| \geq 1.$$

Se $\|I'(\eta_t(u))\| \leq 1$, então $\left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2 \leq \|I'(\eta_t(u))\| \leq 1$. Por (3.2) temos

$$h(\|I'(\eta_t(u))\|) = 1.$$

E por (3.1),

$$\|I'(\eta_t(u))\| \geq \sigma.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}I(\eta_t(u)) = -\left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2 \geq -\sigma^2. \tag{3.7}$$

Se $\|I'(\eta_t(u))\| \geq 1$ então $1 \leq \|I'(\eta_t(u))\| \leq \left\|I'(\eta_t(u))\right\|^2$. De (3.2) temos que

$$h(\|I'(\eta_t(u))\|) = \frac{1}{\|I'(\eta_t(u))\|}.$$

E por (3.1)

$$\|I'(\eta_t(u))\| \geq \sigma.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}I(\eta_t(u)) = -\frac{1}{\|I'(\eta_t(u))\|}. \|I'(\eta_t(u))\|^2 = -\|I'(\eta_t(u))\| \leq -\sigma. \tag{3.8}$$

Como $\sigma > 0$ as desigualdades (3.7) e (16.2) nos dizem que $I(\eta_t(u))$ é decrescente $\forall t \geq 0$. Para concluir vale lembrar que:

- Como $u \in A_{c+\delta} \Rightarrow I(u) \leq c + \delta$.
- Como $0 < \delta < \dfrac{\sigma^2}{2} \Rightarrow c + \delta - \sigma^2 \leq c + \dfrac{\sigma^2}{2} - \sigma^2 = c - \dfrac{\sigma^2}{2} < c - \delta$.

Assim

$$I(\eta_t(u)) \leq I(\eta_0(u)) - \sigma^2 = I(u) - \sigma^2 \leq c + \delta - \sigma^2 \leq c - \delta.$$

Portanto

$$I(\eta_t(u)) \leq I(\eta_0(u)) - \sigma^2 = I(u) - \sigma^2 \leq c + \delta - \sigma^2 \leq c - \delta \Rightarrow \eta_t(u) \in A_{c-\delta}.$$

E isto prova (iv) e o Lema ■

3.3 O TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Teorema 3.6 (Teorema do Passo da Montanha)**.** Seja $I \in \mathcal{C}$ satisfazendo a condição $(PS)_c$. Suponha que

(MP-0) $I(0) = 0$.

(MP-1) Existem constantes $\rho_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que

$$I(u) \geq \delta_0 \quad \text{e} \quad \|u\| = \rho_0.$$

(MP-2) Existe um elemento $u_0 \in H$ tal que

$$\|u_0\| > \rho_0 \quad \text{e} \quad I(u_0) \leq 0.$$

Então

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

é um valor crítico de I onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H); \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = u_0\}.$$

Observação 3.2. **(i)** Denotamos acima MP= ("Mountain Pass") com o intuito de facilitar a referência de que se trata das hipóteses do Teorema do Passo da Montanha

(ii) O número b será chamado minimax ou valor do Passo da Montanha

Demonstração: Inicialmente notemos que para qualquer caminho $\gamma \in \Gamma$ que atravessa a esfera S_ρ (MP-2) implica que

$$b \geq \min_{u \in S_\rho} I(u) \geq \delta_0 > 0.$$

Suponha, por redução ao absurdo, que b não seja valor crítico de I. Então

$$K_b = \emptyset.$$

Tomemos um ε suficientemente pequeno tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{\delta_0}{2}.$$

Assim pelo Lema de Deformação de Clark existe uma constante $0 < \delta < \varepsilon$ e um homeomorfismo $\eta_t : H \to H$ tal que

$$\eta_1(A_{b+\delta}) \subset A_{b-\delta}, \tag{3.9}$$

e ainda $\eta_1(u) = u$ se $u \notin I^{-1}([b-\delta, b+\delta])$. Escolha um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) \leq b + \delta.$$

Definamos

$$\begin{array}{rcccc} \alpha & : & [0,1] & \longrightarrow & H \\ & & t & \longmapsto & \eta_1 \circ \gamma(t). \end{array}$$

Observe que $\alpha \in \Gamma$ pois $\alpha(0) = \eta_1 \circ \gamma(0) = \eta_1(0) = 0$ e $\alpha(1) = \eta_1 \circ \gamma(1) = \eta_1(u_0) = u_0$ pois $u_0 \notin I^{-1}[b-\delta, b+\delta]$. Como $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) \leq b+\delta$, então em particular $I(\gamma(t)) \leq b+\delta$, $0 \leq t \leq 1$. Logo $\gamma(t) \in A_{b+\delta}$. E por (3.9) concluimos que $\eta_1(\gamma(t)) \in A_{b-\delta} \Rightarrow I(\eta_1(\gamma(t)) \leq b - \delta \Rightarrow I(\alpha(t)) \leq b - \delta$. Com isto obtemos que

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq b - \delta,$$

o que é uma contradição. Portanto b é um valor crítico de I. E isto prova o Teorema ■

3.4 APLICAÇÃO

Nesta Seção (sob certas condições sobre f abaixo) usaremos o Teorema do Passo da Montanha para mostrar a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x,u) \quad , \quad x \in \Omega \\ \\ \qquad u = 0 \qquad\qquad\quad , \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $\lambda < \lambda_1$ com λ_1 sendo o primeiro autovalor associado ao problema

$$
\begin{cases} -\Delta v = \lambda v \quad , \quad x \in \Omega \\ \\ \quad v = 0 \qquad , \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}
$$

Vamos assumir as seguintes hipóteses para a função f:

($f1$) $f(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

($f2$) Dado $\varepsilon > 0$, existem constantes positivas $C_\varepsilon > 0$ e $s > 0$ tais

$$|f(x,\xi)| \leq \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon|\xi|^s, \quad \forall s \in \overline{\Omega} \;\text{ e }\; \xi \in \mathbb{R}$$

onde $1 < s < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < s < +\infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$.

($f3$) Existem constantes $2 < k < s$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < kF(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi), \quad \text{para } \; |\xi| \geq r,$$

onde $F(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(x,t)dt$

Observação 3.3. Denotaremos por:

- $\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ a norma em $H_0^1(\Omega)$,
- $\|u\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ a norma em $L^p(\Omega)$.

Teorema 3.7. Suponha $\lambda < \lambda_1$ e que f satisfaz $(f1) - (f3)$. Então o problema (3.10) possui uma solução fraca

Demonstração: O funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado a (3.10) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(x,t)dt$. Usando as hipóteses $(f1) - (f3)$ mostra-se (ver [33]) que I é de classe C^1. Vamos mostrar que

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \lambda uv)dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \quad \forall \;\; u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Com efeito:

$$
\begin{aligned}
I'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u+tv|^2-\lambda(u+tv)^2)dx-\int_\Omega F(x,u+tv)dx}{t}\right)- \\
&\quad \left(\frac{\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda u^2)dx+\int_\Omega F(x,u)dx}{t}\right)= \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_\Omega(2t\nabla u\nabla v+t^2|v|^2-\lambda tuv-t^2v^2)dx-\int_\Omega(F(x,u+tv)-F(x,u))dx}{t} = \\
&= \int_\Omega(\nabla u\nabla v-\lambda uv)dx-\int_\Omega\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}dx = \\
&= \int_\Omega(\nabla u\nabla v-\lambda uv)dx-\int_\Omega F'(x,u)vdx = \\
&= \int_\Omega(\nabla u\nabla v-\lambda uv)dx-\int_\Omega f(x,u)vdx, \quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Nosso objetivo é mostrar que o funcional I verifica as hipóteses (MP-0) - (MP-2) do Teorema do Passo da Montanha obtendo então um ponto crítico u_0 que fará com que $I'(u_0)v=0$, o que implicará em:

$$
\int_\Omega(\nabla u_0\nabla v-\lambda u_0 v)dx=\int_\Omega f(x,u_0)vdx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),
$$

que é portanto uma solução fraca para o problema (3.10). Primeiro notemos que para $\lambda<\lambda_1$ a função

$$
\begin{aligned}
\|\cdot\|_* \ : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \|u\|_*=\left(\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que está associado ao produto interno

$$
\begin{aligned}
\langle,\rangle_* \ : \ H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u,v) &\longmapsto \langle u,v\rangle_*=\int_\Omega(\nabla u\nabla v-\lambda uv)dx.
\end{aligned}
$$

Afirmação 3.8. As normas $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$

De fato, pela desigualdade de Poincaré temos,

$$\begin{aligned}\|u\|_*^2 &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \ \text{ e } \ 0 \leq \lambda < \lambda_1.\end{aligned}$$

Ponha $c_1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Assim:

$$\|u\|_* \geq c_1 \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Para $\lambda < 0$, basta considerar $c_1 = 1$, pois,

$$\|u\|_* = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|,$$

ou seja

$$\|u\|_* \geq \|u\|.$$

Tomando $c_2 = \min\{c_1, 1\}$ mostramos que existe $c_2 > 0$ tal que para $\lambda < \lambda_1$

$$\|u\|_* \geq c_2 \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado,

$$\|u\|_*^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + |\lambda| \int_\Omega |u|^2 dx,$$

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda < \lambda_1$. E isto implica que:

$$\|u\|_*^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2.$$

Ponha $c_3 = \left(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\|u\|_* \leq c_3 \|u\|.$$

Com isto mostramos que existem constantes c_2 e c_3 tais que

$$c_2 \|u\| \leq \|u\|_* \leq c_3 \|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

e isto prova a afirmação.

A seguir vamos mostrar que I verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Como comentamos no inicio dessa demonstração, sabemos que I é C^1, resta mostrar que I satisfaz a condição (PS) e as hipóteses (MP-0) - (MP-2).

(i) Verificação da Condição (PS):

Seja u_n uma sequência do tipo (PS) isto é

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty. \tag{3.12}$$

Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Inicialmente notemos que:

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \\ &\quad \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx - \int_\Omega F(x,u_n)u_n dx\right] = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda |u_n|^2) + \int_\Omega \left(\frac{1}{k}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)\|u_n\|_*^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{k}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx. \end{aligned}$$

Como $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ são equivalentes então existe c_2 e c_3 positivas tais que

$$c_2 \|u\| \leq \|u\|_* \leq c_3 \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, $c_2 \|u\| \leq \|u\|_*$. Logo:

$$I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{k}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Definamos

$$X_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \geq r\} \ \text{ e } \ \varphi(x,t) = \frac{1}{k}f(x,t)t - F(x,t).$$

Então

$$I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| + \int_{X_n} \varphi(x, u_n)dx + \int_{X_n^c} \varphi(x, u_n)dx. \quad (3.13)$$

Relembrando a condição $(f3)$ temos que existem constantes $2 < k < s$ e $r \geq 0$ tal que

$$0 < kF(x, \xi) < \xi f(x, \xi), \quad \text{para} \quad |\xi| \geq r.$$

Assim

$$F(x, \xi) \leq \frac{\xi}{k} f(x, \xi),$$

logo

$$\varphi(x, \xi) \geq 0, \quad \forall |\xi| \geq r,$$

e portanto

$$\int_{X_n} \varphi(x, u_n)dx \geq 0.$$

Isto significa que podemos remover este termo da desigualdade (3.13) sem alterar a mesma, isto é,

$$I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| + \int_{X_n^c} \varphi(x, u_n)dx.$$

Logo podemos afirmar que

$$I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - \int_{\Omega} \varphi(x, u_n)dx.$$

Como F e f são contínuas então $g(x, t) = |\varphi(x, t)|$ também é contínua. Assim, uma vez que $\overline{\Omega} \times [-r, r]$ é compacto então g é limitada nesse compacto. Logo existe $c_3 > 0$ tal que

$$|g(x, t)| \leq c_3, \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [-r, r].$$

Isto nos permite concluir que

$$|\varphi(x, t)| \leq c_3, \quad \forall x \in (\overline{X_n})^c.$$

Portanto

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{k} I'(u_n)u_n &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - \int_{(\overline{X_n})^c} |\varphi(x,t)| dx \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - \int_{(\overline{X_n})^c} c_3 dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - c_3 \mu((\overline{X_n})^c). \end{aligned}$$

Onde $\mu(A)$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A. Como $(\overline{X_n})^c \subset \Omega$ então $\mu((\overline{X_n})^c) \leq \mu(\Omega)$. Logo

$$I(u_n) - \frac{1}{k} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - c_3 \mu(\Omega).$$

Como Ω é um domínio limitado então $\mu(\Omega) = c_4 < +\infty$. Daí

$$I(u_n) - \frac{1}{k} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - c_3 c_4.$$

Portanto

$$I(u_n) - \frac{1}{k} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\| - c_5. \tag{3.14}$$

Usando (3.12) temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ tem-se

$$|I(u_n) - c| < \varepsilon.$$

Em particular

$$I(u_n) < c + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1.$$

Ainda usando (3.12) existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_2$ tem-se

$$\|I'(u_n)\| < \varepsilon,$$

ou seja

$$|I'(u_n)u_n| < \varepsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_2.$$

Assim tomando $\varepsilon = 1$ e $n_0 = \min\{n_1, n_2\}$ obtemos que

$$I(u_n) - \frac{1}{k}I'(u_n)u_n \geq 1 + c + \frac{1}{k}\|u_n\| \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) segue

$$1 + c + \frac{1}{k}\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) c_2 \|u_n\|^2 - c_5.$$

Ponha $M = 1 + c + c_5$, $P = \dfrac{1}{k}$ e $Q = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{k}\right) c_2$.Assim

$$M + P\|u_n\| \geq Q\|u_n\|^2, \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto

$$\|u_n\| (Q\|u_n\| - P) \leq M, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo então por um resultado em (Brézis Teorema 3.18 [11]) existe uma subsequência (u_{n_k}) em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$. E pelo Teorema de Rellich-Kondrakhov ver [23] temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\rightarrow L^p(\Omega), \quad \forall p \geq 1.$$

Então existe uma subsequência $u_{n_k} \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω quando $n \to \infty$. Denotando esta subsequência por u_n obtemos então por esta análise acima que

- $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$.
- $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, quando $n \to \infty$.
- $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, quando $n \to \infty$.

Para $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in [1, +\infty)$ se $N = 1$, ou $N = 2$. Usando as condições de crescimento da função f, existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq a_1|t| + a_2|t|^p, \quad \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$|f(x,u_n)| \leq a_1|u_n| + a_2|u_n|^p. \tag{3.16}$$

Esta desigualdade implica que:

$$|f(x,u_n)u_n| \leq a_1|u_n|^2 + a_2|u_n|^{p+1},$$

e também

$$|F(x,u_n)| = \left|\int_0^{u_n} f(x,u_n)dx\right| \leq \int_0^{u_n} |f(x,u_n)|dx \leq \widetilde{a_1}|u_n|^2 + \widetilde{a_2}|u_n|^{p+1}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\int_\Omega f(x,u_n)dx \to \int_\Omega f(x,u)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.17}$$

e

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(x,u)udx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.18}$$

Usando a definição do funcional I vem que

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = I'(u_n)u_n - \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - I'(u_n)u + \int_\Omega f(x,u_n)udx - \langle u_n, u\rangle_*$$

e sendo que

$$I'(u_n)u_n = I'(u_n)u = \langle u_n, u\rangle_* = o_n(1),$$

conclui-se

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = \int_\Omega f(x,u_n)udx - \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx + o_n(1),$$

e portanto fazendo $n \to +\infty$ obtemos por (3.17) e (3.18) que

$$\|u_n - u\|^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

isto é,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo (u_n) possui uma subsequência convergente em E. E isto mostra que I satisfaz a condição (PS).

(ii) Verificação da Condição (MP-0)

De fato

$$I(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla 0|^2 - \lambda 0^2)dx - \int_\Omega F(x,0)dx = -\int_\Omega F(x,0)dx.$$

Como $F(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(x,t)dt$ então $F(x,0) = 0$, logo $I(0) = 0$.

(iii) Verificação da Condição (MP-1)

Da condição $(f2)$, dado $\varepsilon > 0$, existem constantes $C_\varepsilon, s > 0$ tais que

$$|f(x,\xi)| \leq \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon|\xi|^s, \quad \text{onde} \quad 1 < s < 2^* - 1.$$

Logo

$$F(x,\xi) \leq |F(x,\xi)| = \left|\int_0^\xi f(x,t)dt\right| \leq \int_0^\xi |f(x,t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2 + \frac{C_\varepsilon}{s+1}|\xi|^{s+1}.$$

Como

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

então

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \int_\Omega C_\varepsilon|u|^{s+1}dx.$$

A desigualdade de Poincaré nos diz que

$$\int_\Omega |u|^2dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado.

Logo

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \frac{\varepsilon}{2}C\int_\Omega |\nabla u|^2dx - C_1\|u\|_{s+1}^{s+1} = \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - C_2\|u\|^2 - C_1\|u\|_{s+1}^{s+1}. \end{aligned}$$

Como $\|\ \|_*$ e $\|\ \|$ são equivalentes então existe $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - C_3\|u\|_*^2 - C_1\|u\|_{s+1}^{s+1} = \\ &= C_4\|u\|_*^2 - C_1\|u\|_{s+1}^{s+1}. \end{aligned}$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev, existe $C_4 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - C_4\|u\|^{s+1}.$$

Da desigualdade acima, concluimos que existe $\delta_0 > 0$ e $\rho_0 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \delta_0 > 0 \quad \text{para} \quad \|u\| = \rho_0$$

e isto prova que I satisfaz (MP-1).

(iv) Verificação da Condição (MP-2)

Por $(f3)$, existem constantes $2 < k < s$ e $r \geq 0$ tal que

$$0 < kF(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi) \quad \text{para} \quad |\xi| \geq r.$$

Esta desigualdade, implica na existência de constantes C_1 e C_2 tais que

$$F(x,\xi) \geq C_1|\xi|^k - C_2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.19}$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e $t \in (0,+\infty)$ temos que

$$I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega F(x,tu)dx.$$

Como $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ são equivalentes então existe $C_3 > 0$ tal que $\|u\|_* \leq C_3\|u\|$. Logo

$$I(tu) \leq C_3\frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,tu)dx.$$

De (3.19) concluimos que:

$$I(tu) \leq C_3\frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega (C_1|tu|^k + C_2)dx,$$

portanto,

$$I(tu) \leq C_4 t^2 \|u\|^2 - C_1 t^k \|u\|_K^k + C_3 \mu(\Omega),$$

onde $\mu(\Omega)$ denota a medida de Lebesgue de Ω. Como $k > 2$ segue que

$$\lim_{t \to +\infty} I(tu) = -\infty.$$

Logo existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|v\| > \rho_0 \quad \text{e} \quad I(v) < 0.$$

Tal fato mostra que I satisfaz (MP-2).

Finalmente, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha e garantir a existência de $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u_0) = b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde b é um valor crítico de I. Logo

$$I'(u_0)v = \int_\Omega (\nabla u_0 \nabla v - \lambda u_0 v)dx - \int_\Omega f(x, u_0)v dx = 0.$$

Isto implica que

$$\int_\Omega (\nabla u_0 \nabla v - \lambda u_0 v)dx = \int_\Omega f(x, u_0)v dx, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto u_0 é uma solução fraca para o problema (3.10), finalizando a demonstração do Teorema.

■

4 SOLUÇÕES DE ENERGIA MÍNIMA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo estudaremos uma caracterização do passo da montanha para as soluções de energia mínima da equação não escalar e não linear em $\mathbb{R}^N$, vista no Capítulo 1

$$-\Delta u = g(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $N \geq 3$. Sem a hipótese da monotonicidade de $t \mapsto \frac{g(x)}{t}$ mostraremos que o valor do Passo da Montanha (o valor crítico b, visto no Capítulo 2) é igual ao nível mínimo de energia.

Definição 4.1. Uma solução $w(x)$ de (2.1) é dita solução de energia mínima se, e somente se, $I(w) = m$, onde

$$m = \inf\{I(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } u \text{ é solução de } (2.1)\},$$

e $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional ação (visto no Capítulo 1) dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx, \tag{4.1}$$

com $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)d\tau$. E mais ainda, o número m será chamado nível mínimo de energia.

Observação 4.1. Mostramos no Capítulo 1 Teorema 2.10 que para

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

o problema

$$\min\{T(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(u) = 1\},$$

sob as hipóteses $(hg1) - (hg3)$ possui uma solução. Além disso mostramos no mesmo Teorema que existe um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$ tal que u satisfaz

$$-\Delta u = \theta g(u), \quad \text{com} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim tomando $\sigma = \sqrt{\theta}$, $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$ é uma solução de (2.1).

Observação 4.2. Na Seção 2.5 do Capítulo 1, mostramos a regularidade da solução de (2.1)

Observação 4.3. E finalmente no Teorema 2.14 da Seção 2.6 mostramos que a solução de mencionada na Observação 4.1 tem ação mínima dentre todas as soluções de (2.1), isto é, se w é solução de (2.1) obtida no Teorema 2.10 do Capítulo 1 e v é uma solução qualquer de (2.1) então :

$$0 < I(w) \leq I(v).$$

Em outras palavras, w é uma solução de energia mínima e o valor $I(w) = m$ é o nível mínimo de energia.

4.2 A GEOMETRIA DO PASSO DA MONTANHA

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar. Consideremos as seguintes hipóteses para a função g

(hg1) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu < 0.$

(hg2) $\limsup\limits_{s\to +\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} = 0$ onde $l = \dfrac{N+2}{N-2}.$

(hg3) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$ onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)d\tau.$

Nesta Seção mostraremos que sob as hipóteses $(hg1) - (hg3)$ o funcional I dado em (4.1) tem a geometria do passo da montanha. A fim de simplificar a notação usaremos (MP-0), (MP-1) e (MP-2) para nos referirmos às hipóteses do Teorema do Passo da Montanha conforme visto no Capítulo 2 deste trabalho.

Lema 4.2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e impar. Assuma que g satisfaz $(hg1) - (hg2)$. Então I satisfaz (MP-0)-(MP-1)

Demonstração: Claramente $I(0) = 0$ logo (MP-0) segue. Vamos mostrar agora que I satisfaz (MP-1), isto é, que existe $\rho_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \delta_0 \;\; \text{e} \;\; \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \rho_0.$$

Para isto, afirmamos que para qualquer $\varepsilon > 0$, $(hg1) - (hg2)$ implicam que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$-g(s) \geq (\nu - \varepsilon)s - C_\varepsilon s^l, \quad \forall s \geq 0.$$

De fato, temos:

$$(hg1) - \infty < \liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu < 0.$$

Isto implica que $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < s < \delta \Rightarrow |g(s)| < (\varepsilon - \nu)s. \tag{4.2}$$

Temos também

$$(hg2) - \infty \leq \limsup_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^l} = 0 \;\; \text{onde} \;\; l = \frac{N+2}{N-2}.$$

Isto implica que $\forall \varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$s > A \Rightarrow |g(s)| < C_\varepsilon s^l. \tag{4.3}$$

Pela continuidade de $\left|\frac{g(s)}{s^l}\right|$ existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$ tal que $\left|\frac{g(s)}{s^l}\right| < \widetilde{C}_\varepsilon$, para $\delta \leq s \leq A$. Logo

$$|g(s)| < \widetilde{C}_\varepsilon s^l \;\; \text{para} \;\; \delta \leq s \leq A. \tag{4.4}$$

Assim de (4.3) e (4.4) obtemos:

$$|g(s)| < (\varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon)s^l, \quad \delta \leq s. \tag{4.5}$$

De (4.2) e (4.5) existe $C_\varepsilon \geq \varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon$ tal que

$$g(s) \leq (\varepsilon - \nu)s + C_\varepsilon s^l \quad \text{para} \quad s \geq \delta > 0.$$

Como $g(0) = 0$ para $s = 0$ o resultado é trivial. Logo

$$-g(s) \geq (\nu - \varepsilon)s - C_\varepsilon s^l, \quad \forall s > 0,$$

provando a afirmação.

Como $g(s)$ é uma função impar, temos que para uma constante $C'_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
-G(s) &= -\int_0^s g(\tau)d\tau = \int_0^s -g(\tau)d\tau \\
&\geq \int_0^s \left[(\nu - \varepsilon)\tau - C_\varepsilon \tau^l\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2}(\nu - \varepsilon)s - C'_\varepsilon |s|^{l+1}.
\end{aligned}$$

Mas $l + 1 = \dfrac{N+2}{N-2} + 1 = \dfrac{2N}{N-2} = 2^*$. Assim:

$$-G(s) \geq \frac{1}{2}(\nu - \varepsilon)s^2 - C'_\varepsilon |s|^{2^*}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Somando $\frac{1}{2}|\nabla u|^2$ a expressão (4.6) obtemos que:

$$\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(u) \geq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(\nu - \varepsilon)u^2 - C'_\varepsilon |u|^{2^*}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{\nu - \varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - C'_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{1, \nu - \varepsilon\}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx\right) - C'_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{1, \nu - \varepsilon\}\,\|u\|_{H^1}^2 - C'_\varepsilon\,\|u\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Pela imersão

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad \text{(ver teorema A.3 do Apêndice)}$$

temos que existe uma constante $C''_\varepsilon > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\min\{1, \nu - \varepsilon\} \|u\|_{H^1}^2 - C''_\varepsilon \|u\|_{H^1}^{2^*}.$$

Escolha $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo a ter

$$\frac{1}{2}\min\{1, \nu - \varepsilon\}\rho_0^2 - C''_\varepsilon \rho_0^{2^*} > 0.$$

Assim, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u\| = \rho_0$ temos que

$$I(u) > \delta_0,$$

onde $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{1, \nu - \varepsilon\}\rho_0^2 - C''_\varepsilon \rho_0^{2^*} > 0$. Isto prova a condição (MP-1), concluindo assim o Lema. ■

Observação 4.4. Na demonstração do Lema 4.2 podemos ver na verdade que:

$$I(u) > 0 \quad \text{para todo} \quad 0 < \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0.$$

Observação 4.5. Modificando levemente os argumentos da prova do Lema 4.2 é possível mostrar que

$$\frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx > 0, \quad \text{para todo} \quad 0 < \|u\|_{H^1} \leq \rho_0.$$

De fato basta tomar $u_\sigma = u\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$b e aplicar no funcional.

Lema 4.3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e impar. Suponha que g satisfaça $(hg1) - (hg2)$. Então I satisfaz (MP-0) - (MP-2).

Demonstração: Sabemos da Lema 4.2 que I satisfaz (MP-0) - (MP-1). Como $I(0) = 0$, então pela Observação 4.4, provar (MP-2) é equivalente mostrar que $\Gamma \neq \emptyset$. Este fato será mostrado no Lema 4.5 mais adiante. ■

Portanto pelos Lemas 4.2 e 4.3 concluimos que o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha porém sem a condição (PS). Assim I possui a geometria do Passo da Montanha e o valor

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \;\; \text{e} \;\; I(\gamma(1))\}$ fica estabelecido, não sendo necessariamente crítico.

Exemplo 4.1. Seja $E \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dado por $E(x,y) = \exp(-y) - x^2$. Então

$$E_0 = \{(x,y); E(x,y) < 0\},$$

é desconexo enquanto que não existe um valor do passo da montanha de altura mínima zero.

Note, no entanto, que no exemplo acima existe uma sequência de caminhos p_m, dados por

$$p_m(t) = (t,m), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

ligando duas componentes de E_0, tal que E atinge seus máximos em p_m nos pontos $z_m = (0,m)$, satisfazendo $E(z_m) \to 0$, $E'(z_m) \to 0$ quando $m \to \infty$. Mais ainda, os pontos z_m não possuem um número finito de pontos de acumulação. Esta falta de compacidade é responsável pela a ausência de pontos de sela do tipo críticos.

4.3 CARACTERIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE ENERGIA MÍNIMA

Nesta Seção vamos enunciar um Teorema que vincula Soluções de Energia Mínima ao valor crítico do Passo da Montanha. Este resultado é devido a Jeanjean e Tanaka (ver [1])

Teorema 4.4. Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar satisfazendo as hipóteses $(hg1) - (hg3)$ e $w(x)$ uma solução de energia mínima da equação (2.1). Então

$$b = m,$$

onde b é o minimax ou valor do Passo da Montanha e $m = I(w)$. E mais ainda, para qualquer solução de energia mínima $w'(x)$ de (2.1) existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $w'(x) \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(w').$$

Esquema da Prova: A prova do Teorema 4.4 consiste de três etapas

Etapa 1: Construção de um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$w \in \gamma([0,1]) \tag{4.7}$$

e

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = m, \tag{4.8}$$

onde $w(x)$ é a solução de energia mínima de (2.1).

Etapa 2: Mostrar que $\min\limits_{u\in\mathcal{P}} I(u) = m$ onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}; \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = 0 \right\},$$

é o conjunto das funções de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem a identidade de Pohozaev.

Etapa 3: Mostrar que

$$\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.9}$$

A etapa 1 nos dá que $b \leq m$ e as etapas 2 e 3 nos levará a $b \geq m$.

A seguir vamos desenvolver, através de Lemas, os resultados que nos levarão a concluir o Teorema 4.4.

4.4 UM CAMINHO SATISFAZENDO (4.7) e (4.8)

Seja $w(x)$ uma solução de energia mínima arbitrária de (2.1) para $N \geq 3$. A seguir vamos provar o resultado que resolve a Etapa 1 do Teorema 4.4.

Lema 4.5. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e impar. Suponha que g satisfaça as hipóteses $(hg1) - (hg3)$. Então existe um caminho

$$\gamma \in \Gamma = \{\gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ I(\gamma(1)) < 0\},$$

tal que $w \in \gamma([0,1])$ e $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = m$.

Demonstração: Vamos inicialmente encontrar uma curva $\widetilde{\gamma} : [0, L] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\widetilde{\gamma}(0) = 0, \quad I(\widetilde{\gamma}(L)) < 0, \tag{4.10}$$

$$w \in \widetilde{\gamma}([0, L]) \tag{4.11}$$

e

$$\max_{t\in[0,L]} I(\widetilde{\gamma}(t)) = m. \tag{4.12}$$

Escreva

$$\widetilde{\gamma}(t)(x) = \begin{cases} w\left(\dfrac{x}{t}\right), & \text{para} \quad t > 0 \\ 0, & \text{para} \quad t = 0. \end{cases}$$

Vemos que:

(1)

$$\|\widetilde{\gamma}(t)\|_{H^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla w\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} w\left(\frac{x}{t}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

assim

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\gamma}(t)\|_{H^1}^2 &= t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w(x)|^2\,dx + t^N\int_{\mathbb{R}^N} w(x)^2dx = \\
&= t^{N-2}\|\nabla w\|_2^2 + t^N\|w\|_2^2.
\end{aligned}$$

Logo $\widetilde{\gamma}(t) \in C([0,+\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$.

Temos também que:

(2)

$$\begin{aligned}
I(\widetilde{\gamma}(t)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{\gamma}(t)|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\widetilde{\gamma}(t))dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla w\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G\left(w\left(\frac{x}{t}\right)\right)dx = \\
&= \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla w\|_2^2 - t^N\int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx.
\end{aligned}$$

Além disso como w é solução de (2.1) segue da identidade de Pohozaev (Capítulo 1, Teorema 2.3) que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx = \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx = \frac{N-2}{2N}\|\nabla w\|_2^2 > 0.$$

Logo

$$I(\widetilde{\gamma}(t)) = \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla w\|_2^2 - t^N\frac{N-2}{2N}\|\nabla w\|_2^2.$$

Como a potência de t^N é maior que t^{N-2} então existe $L > 1$ tal que

$$I(\widetilde{\gamma}(L)) < 0.$$

Agora vamos calcular a derivada em t de $I(\widetilde{\gamma}(t))$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\widetilde{\gamma}(t)) &= \frac{N-2}{2}\|\nabla w\|_2^2 t^{N-3} - \frac{N-2}{2N}N\|\nabla w\|_2^2 t^{N-1} = \\
&= \frac{N-2}{2}\|\nabla w\|_2^2 t^{N-3} - \frac{N-2}{2}\|\nabla w\|_2^2 t^{N-1} \\
&= \frac{N-2}{2}\|\nabla w\|_2^2 t^{N-3}(1-t^2).
\end{aligned}$$

Assim concluímos que:

$$\frac{d}{dt}(I(\widetilde{\gamma}(t))\begin{cases} > 0, & \text{se} \quad t \in [0,1) \\ < 0, & \text{se} \quad t > 1. \end{cases}$$

Como $I(\widetilde{\gamma}(t))$ é contínua $I(\widetilde{\gamma}(1))$ é um ponto de máximo. No entanto como $\widetilde{\gamma}(1) = w(x)$ e $w(x)$ é uma solução de energia mínima por hipótese, segue que

$$\max_{t\in[0,L]} I(\widetilde{\gamma}(t)) = I(\widetilde{\gamma}(1)) = I(w(x)) = m.$$

Logo para $L > 1$ suficientemente grande temos que $\widetilde{\gamma}(t)$ satisfaz (4.10) – (4.12). Portanto para obter o caminho desejado, basta fazer a reparametrização

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & [0,1] & \longrightarrow & [0,L] \\ & & t & \longmapsto & \widetilde{\gamma}(Lt) \end{array}$$

$\blacksquare$

4.5 PROVA DA CONDIÇÃO $\min\limits_{u\in\mathcal{P}} I(u) = m$

Nesta Seção vamos provar o resultado que resolverá a segunda etapa do Teorema 4.4

Lema 4.6. Sejam

$$\mathcal{P} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}; \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = 0\right\}$$

e m o nível mínimo de energia. Então

$$m = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u).$$

Demonstração: Defina o conjunto

$$S = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = 1\right\}.$$

Vamos definir também a seguinte função

$$\Phi : S \to \mathcal{P}$$

pondo

$$\Phi(u)(x) = u\left(\frac{x}{t_u}\right), \quad \text{onde} \quad t_u = \sqrt{\frac{N-2}{2N}}\,\|\nabla u\|_2 .$$

Vamos mostrar que Φ está bem definida.Para isso devemos mostrar que dado $u \in S$, $\Phi(u)(x) \in \mathcal{P}$. Temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u\left(\frac{x}{t_u}\right)|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u\left(\frac{x}{t_u}\right) dx = \\
= \ & \frac{N-2}{2} t_u^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - N t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x) dx = \\
= \ & \frac{N-2}{2} t_u^N t_u^{-2}\|\nabla u\|_2^2 - N t_u^N V(u) \ \ (\text{mas} \ \ V(u) = 1 \ \ \text{pois} \ \ u \in S) \\
= \ & \frac{N-2}{2}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^N \|\nabla u\|_2^N \left(\frac{2N}{N-2}\right)\|\nabla u\|_2^{-2}\|\nabla u\|_2^2 - N\left(\frac{N-2}{2N}\right)^N \|\nabla u\|_2^N \\
= \ & N\left(\frac{N-2}{2N}\right)^N \|\nabla u\|_2^N - N\left(\frac{N-2}{2N}\right)^N \|\nabla u\|_2^N = 0.
\end{aligned}$$

(observe que esta correspondência é injetora).

Para $u \in S$, temos:

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi(u)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\Phi(u)) dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\left(\frac{x}{t_u}\right)\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G\left(u\left(\frac{x}{t_u}\right)\right) dx = \\
&= \frac{t_u^{N-2}}{2}\|\nabla u\|_2^2 - t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx.
\end{aligned}$$

Como $u \in S$ então, $\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = 1$. Logo:

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u)) &= \frac{t_u^{N-2}}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 - t_u^N = \\
&= t_u^{N-2}\left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 - t_u^2\right) = \\
&= t_u^{N-2}\left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 - \frac{N-2}{2N}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right) = \\
&= t_u^{N-2}\left(\frac{1}{N}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right) = \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}\left\|\nabla u\right\|_2^N .
\end{aligned}$$

Assim obtemos que:

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = \inf_{u\in S} I(\Phi(u)) = \inf_{u\in S}\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}\left\|\nabla u\right\|_2^N = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}\inf_{u\in S}\left\|\nabla u\right\|_2^N .$$

Lembremos que no Capítulo 1 mostramos no Teorema 2.10 que:

$$\min\left\{T(w); w\in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ V(w)=1\right\},$$

tem solução. Onde $T(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx$ e $V(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}G(u)dx$. Em outras palavras o $\min_{u\in S}\left\|\nabla u\right\|_2^2$ é atingido. E ainda o $\Phi(u)$ correspondente é uma solução de energia mínima.(Pelo Teorema 2.14 do Capítulo 1). Portanto

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}\inf_{u\in S}\left\|\nabla u\right\|_2^N = I(w(x)) = m.$$

■

4.6 PROVA DA CONDIÇÃO 4.9

Nesta Seção vamos provar o resultado que concluirá a terceira etapa do Teorema 4.4

Lema 4.7. Seja $\gamma\in\Gamma$. Então

$$\gamma([0,1])\cap\mathcal{P}\neq\emptyset.$$

Demonstração: Denotemos por $P(u)$ o funcional

$$P(u) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
P(u) &= \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = \\
&= \frac{N}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = \\
&= N\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx\right) - \|\nabla u\|_2^2 \\
&= N \cdot I(u) - \|\nabla u\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Pela Observação 4.5 deste Capítulo, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$0 < \|u\|_{H^1} \leq \rho_0 \text{ implica que } P(u) > 0.$$

No entanto sabemos que existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(0) = 0$ e $I(\gamma(1)) < 0$. Logo

$$P(\gamma(1)) = N \cdot I(\gamma(1)) - \|\nabla\gamma(1)\|_2^2 \leq N \cdot I(\gamma(1)) < 0.$$

Isto significa que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\|\gamma(t_0)\|_{H^1} > \rho_0 \text{ e } P(\gamma(t_0)) = 0.$$

No entanto, $P(\gamma(t_0)) = 0$ implica que $\gamma(t_0) \in \mathcal{P}$. Como $\gamma(t_0) \in \gamma([0,1])$, concluímos que

$$\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset.$$

E isto prova o Lema. ■

5 CONCLUSÃO

No Lema 4.5 do capítulo anterior, construirmos um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$w \in \gamma([0,1]) \quad \text{e} \quad \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = m,$$

isto implica que

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = m. \tag{5.1}$$

No Lema 4.6 mostramos que $m = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u)$ e no Lema 4.7 mostramos que:

$$\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Logo $\forall \;\; \gamma \in \Gamma, \;\; \exists \;\; t_\gamma \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_\gamma) \in \mathcal{P}$. Assim, obtemos que:

$$m = \inf_{u\in\mathcal{P}} (u) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma(t_\gamma)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = b. \tag{5.2}$$

Assim de (5.1) e (5.2) obtemos $b = m$. E disto concluimos que

$$I(w) = b.$$

Como w é solução do problema (2.1) segue que w é um ponto crítico. Portanto provamos que b é um valor crítico sem a condição de compacidade. E isto conclui este trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] JEANJEAN, L. & TANAKA, K., A Remark on Least Energy Solution in $\mathbb{R}^N$. Proc Amber. Math. Soc. 131, 2399 - 2408 (2003).

[2] BERESTYCKI, H. & LIONS, P.L., Nonlinear Scalar Field Equations, I - Existence of a Ground State, Arch. Rational Mech. Anal. 82, 313-345 (1983).

[3] KATO, T., Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variabel coefficient. Comm. Pure Applied Math. 12, 403-425 (1959).

[4] POHOZAEV, S. U., Eigenfuntions of The Equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Sov. Math. Doklady 5, 1408 -1411 (1965).

[5] BERGER, M.S., On The Existence And Structure of Stationary States for a Nonlinear Klein-Gordon Equation, J. Func. Anal. 9, 249-261 (1972).

[6] STRAUSS,W.A., Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions, Commun.Math. Phys. 55, 149-172 (1977).

[7] KAVIAN,O., Introduction á La Théorie des Points Critiques at Applications Aux Problèmes Elliptíques, Springer - Verlag, Heidelberg, (1993).

[8] BERESTYCKI, H, & LIONS,P.L., Une Méthode Locale Pour l'Existence de Solutions Positives de Problèms Semi-Linéaires Elliptiques Dans $\mathbb{R}^N$. J. Anal. Math . 38, 144-187 (1980).

[9] BERESTYCKI, H, & LIONS, P.L. & PELETIER,L.A., An O.D.E. Approach to The Existence of Positive Solutions for Semilinear Problems in $\mathbb{R}^N$. Indiana University Math. J. 30, 141-157 (1981).

[10] AMBROSETTI, A. & RABINOWITZ,P.H., Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. J. Funct. Anal. 14, 349-381 (1973).

[11] Brezis , H. & Kato, Remarks on the Schrodinger operator with singular complex potencials. J. Math. Pures Appl. 58, 137-151 (1979).

[12] AGMON, S.A. & NIREMBERG, L., Estimates Near The Boundary for Solution of Eliptic Differential Equation Satisfying General Boundary Conditions I. Comm. Pure Applied Math. 12, 623-727 (1959).

[13] COLEMAN, S. & CLAZER, V. & MARTIN, A., Action Minima Among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations. Comm. Math. Phys. 58(2), 211-221 (1978).

[14] GIDAS, B., Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics.Bardos, C., & Bessis D., editors. Dordrecht, Holland:Reidel (1980).

[15] GIDAS,B.& WEI-MING, Ni, & NEREMBERG, L., Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. Comm. Math. Phys. 68,209-243 (1979).

[16] BREZIS, H., & VERON, L., Removable Singularities of Some Nonlinear Elliptic Equations. To appear. Arch. Rat. Mech. Anal. 75, 1-6(1980/81).

[17] BERESTYCKI, H., & LIONS, P.L. Existence of a Ground State in Nonlinear Equations of the Type Klein-Gordon. Variational Inequalities, Cottle, Gianessi & Lions editors. New York: J. Wiley (1979).

[18] BREZIS, H., Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (2010).

[19] HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E. & POLYA, G., Inequalities. London: Cambridge Univ. Press (1952).

[20] LIEB, E.H., Existence and Uniqueness of the Minimizing Solutions of Choquard's Nonlinear Equation. Studies in Applied Math. 57, $93-105$ (1977).

[21] EVANS, L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathmatics Vol 19. American Mathematical Society (2010).

[22] ARONSON, D.G., & WEINBERGER, H.F., Nonlinear Diffusion in Population Genetics. Lecture notes in Math. Number 446. Berlin Heidelberg New York: Springer (1975).

[23] ADAMS,R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).

[24] RABINOWITZ, P.H., Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems.In Eigenvalues of Non-linear problems. C.I.M.E., Eidz, Cremonese, Rome,(1974).

[25] RABINOWITZ, P.H., Vatiational Methods for Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems. Indiana Univ. Math. J. 23, 729-754 (1974).

[26] AMBROSETTI, A., On the Exitence of Multiple Solution for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems. Rend Sem. Univ. Padova 49, 195-204 (1973).

[27] BERESTYCKI, H., GALLOUET, T., KAVIAN, O., Equations de Champs Scalaires Euclidiens Non Linéaires Dans le Plan. C. R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math. 297(1983), 5, 307-210 and Publications du Laboratoire d'Anayse Numérique, Université de Paris VI, (1984).

[28] KAVIAN, O., Indrotution á la Théorie des Points Crutiques at Applications Aux Problêmes Elliptíques, Springer-Verlag, Heidelberg, (1993).

[29] STRUWE, M. Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer Verlag, (1990).

[30] WILLEM, M., Minimax theorems, Birkhauser, Boston, (1996).

[31] CHIPOT, M. , Elliptic Equation An Introductory Course. Birkhauser Advanced Texts.(2009).

[32] SOTOMAYOR, J. - Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, (1979).

[33] ALVES, C.O., Uma Introdução as Equações Elípticas, Primeiro ENAMA, Rio de Janeiro, UFRJ, (2007).

APÊNDICE A – APÊNDICE

A.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Vamos relembrar aqui as definições e algumas propriedades de alguns espaços de funções

Definição A.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com Ω aberto. Definimos $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas as funções reais C^∞ com suporte compacto em Ω.

Definição A.2. Definimos o conjunto $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{(N-2)}$ como sendo

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Observação A.1. Sabemos que para $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{(N-2)}$ o conjundo $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com o produto escalar e a norma

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. Também sabemos que $\mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A.3 (Teorema de Imersões de Sobolev)**.** As seguintes imersões são contínuas:

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < \infty, \quad N = 1, 2. \tag{A.1}$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < 2^*, \quad N \geq 3. \tag{A.2}$$

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < 2^*, \quad N \geq 3. \tag{A.3}$$

Demonstração: ver [11] página 212 ■

A.2 LEMA DA COMPACIDADE DE STRAUSS

Lembraremos aqui um resultado usado na Seção 3.3 do Capítulo 1 devido a [6].

Teorema A.4. Sejam P e $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas satisfazendo

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0 \ \text{ quando } \ |s| \to +\infty. \tag{A.4}$$

Seja (u_n) uma sequência de funções mensuráveis: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < +\infty \tag{A.5}$$

e

$$P(u_n(x)) \to v(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N, \ \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{A.6}$$

Então para qualquer conjunto de Borel B tem-se

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)| dx \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Se além disso assumirmos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0 \ \text{ quando } \ s \to 0 \tag{A.7}$$

e

$$u_n(x) \to 0 \ \text{ quando } \ |x| \to +\infty, \tag{A.8}$$

então

$$P(u_n) \ \text{ converge para } \ v \ \text{ em } \ L^1(\mathbb{R}^N) \text{quando } \ n \to +\infty.$$

Demonstração: Ver [2] página 339 ■

A.3 LEMAS RADIAIS

Enunciaremos alguns Lemas radiais referentes ao decaimento uniforme ao infinito de certas funções radiais.

Lema A.5 (Lema Radial)**.** Seja $N \geq 2$. Para Toda função radial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a uma função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} \|u\|_{H1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{para} \quad |x| \geq \alpha_N, \tag{A.9}$$

onde C_N e α_N depende somente da dimensão N

Demonstração: Ver [2] página 340 ■

Lema A.6 (Lema Radial)**.** Seja $N \geq 3$. Para Toda função radial em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ tal que

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(2-N)}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para} \quad |x| \geq 1, \tag{A.10}$$

onde C_N depende apenas de N

Demonstração: Ver [2] página 340 ■

Lema A.7 (Lema Radial)**.** Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p < +\infty$, é uma função radial não crescente (isto é, $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então tem-se

$$|u(x)| \leq |x|^{-\frac{N}{p}} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \neq 0. \tag{A.11}$$

Demonstração: Ver [2] página 341 ■

A.4 ALGUNS RESULTADOS SOBRE A SIMETRIZAÇÃO DE SCHWARZ

Relembraremos aqui, sem a prova, algumas propriedades da Simetrização de Schwarz. Primeiramente, vamos lembrar a definição de rearranjamento esférico (ou simetrização) de uma função. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então f^*, a função simetrização de Schwarz de f, é uma função, radial, não crescente (em r), mensurável tal que para qualquer $\alpha > 0$,

$$\mu\{f^* \geq \alpha\} = \mu\{|f| \geq \alpha\},$$

onde $\mu\{.\}$ é a medida de Lebesgue. Assim temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(f)dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(f^*)dx,$$

para toda função contínua F tal que $F(f)$ é integrável.
Uma propriedade fundamental da função $f \to f^*$ é a chamada

Desigualdade de Riesz: Sejam f, g em $L^2(\mathbb{R}^N)$; então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x)dx. \tag{A.12}$$

Desta desigualdade obtemos

$$\|f^* - g^*\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{A.13}$$

Outra consequência importante da desigualdade de Riesz é o seguinte resultado

Teorema A.8. Seja $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se $N \geq 3$ (respectivamente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para qualquer N). Então $u^* \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (respectivamente para $H^1(\mathbb{R}^N)$), e tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{A.14}$$

Este resultado é essencialmente conhecido (veja [19]), mas com requisitos de regularidade forte e uma prova mais cuidadosa. Lieb fez uma demonstração simples e mais geral usando a desigualdade de Riesz e a propriedade de simetria da solução fundamental da equação do calor (veja [20]). Embora o resultado tenha sido estabelecido apenas para o caso de funções em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o caso $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ segue de um simples argumento de densidade.

A.5 ALGUNS FUNCIONAIS DE CLASSE C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$

Provaremos aqui algumas afirmações sobre o caráter de certos funcionais C^1 definidos em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A.9. Seja Ω um domínio limitado, regular em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Seja $g \in C(\mathbb{R})$ satisfazendo $g(0) = 0$ e

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^l} < +\infty \quad \text{com} \quad l = \frac{N+2}{N-2}. \tag{A.15}$$

Então o funcional

$$V(u) = \int_\Omega G(u(x))dx, \quad \text{onde} \quad G(t) = \int_0^1 g(s)ds$$

é bem definida e de classe C^1 no espaço $H^1(\Omega)$. Mais ainda tem-se

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega g(u(x))v(x)dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{A.16}$$

Demonstração: Ver [2] página 343 e 344 ■

Teorema A.10. Seja $N \geq 3$ e seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo $g(0) = 0$, a condição (A.15) e

$$\limsup_{s\to0} \frac{|g(s)|}{|s|} < +\infty \quad \text{e} \quad s \neq 0. \tag{A.17}$$

Então, o funcional $V(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$ está bem definida e de classe C^1 no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda

$$\langle V'(u), v\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))v(x)dx \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{A.18}$$

Demonstração: Ver [2] página 344 e 345 ■

A.6 RESULTADOS IMPORTANTES

Nesta Seção enunciaremos alguns resultados usados no texto que são de grande relevância. Assuma que U é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ e que ∂U é C^1.

A.6.1 Fórmula de Green

Teorema A.11 (Gauss-Green.)**.** Suponha que $u \in C^1(\overline{U})$ então

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial U} u\eta_i dS.$$

Demonstração: Ver [21] página 627 ∎

Teorema A.12 (Formula de Integração Por Partes)**.** Sejam $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial U} uv\eta_i dS \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Demonstração: Ver [21] página 628 ∎

Teorema A.13 (Fórmulas de Green)**.** Seja $u, v \in C^2$. Então

(i) $\displaystyle\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS.$

(ii) $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_U u\Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \eta} dS.$

(iii) $\displaystyle\int_U u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS.$

Demonstração: Ver [21] página 628. ∎

A.6.2 Coordenadas polares

A seguir converteremos integrais N-dimensionais em integrais sobre esferas.

Teorema A.14 (Coordenadas Polares)**.** .

(i) Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua e somável. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr,$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(ii) Em particular

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0, r)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0, r)} f dS,$$

para cada $r > 0$.

Demonstração: Ver [21] página 629 e 630. ∎

A.6.3 Convergência monótona e dominada

Lema A.15 (Lema de Fatou)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que

(a) Para cada n, $f_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω.

(b) $\sup\limits_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ ponha $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Então

$$f \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \ \int f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx.$$

Demonstração: Ver [18] página 90 ■

Teorema A.16 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ satisfazendo

(a) $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ quase sempre em Ω,

(b) $\sup\limits_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$. Então $f_n(x)$ converge em quase todo ponto de Ω para um limite finito denotado por $f(x)$; e a mais ainda

$$f \in L^1 \ \text{ e } \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Demonstração: Ver [18] página 90 ■

Teorema A.17 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que

(a) $f_n(x) \to f(x)$ em quase todo ponto de Ω

(b) Existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo ponto em Ω.

Então,

$$f \in L^1 \ \text{ e } \ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Demonstração: Ver [18] página 90 ■

A.6.4 Principio do máximo

Teorema A.18 (Principio do Máximo Forte)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e convexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $-\Delta u \geq 0$ em Ω. Então ou u é constante (e então $\Delta u = 0$) ou $u(x) > \inf\limits_{\Omega} u$, para todo $x \in \Omega$, isto é, o ínfimo é atingido em $\partial\Omega$.

Demonstração: Ver [21] ∎