Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF
Programa de Pós–Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Limites para uma Gravitação com Possíveis Efeitos Quânticos

Aluno: Sebastião Mauro Filho

Orientador: Prof. Dr. Ilya Shapiro

29 de fevereiro de 2012
Juiz de Fora–MG

Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF
Programa de Pós–Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Limites para uma Gravitação com Possíveis Efeitos Quânticos

Aluno: Sebastião Mauro Filho

Orientador: Prof. Dr. Ilya Shapiro

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Física.

29 de fevereiro de 2012
Juiz de Fora–MG

Agradecimentos

Agradeço meu orientador Prof.Dr.Ilya Shapiro pela orientação desde o início da minha graduação, ou seja, teve um grande papel em minha formação, também sou grato pela sugestão do problema aqui abordado.

Meus sinceros agradecimentos à minha família e aos meus amigos e professores do Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Sou muito grato à C.Farina, W.J.M.Kort-Kamp e I.Shapiro pela colaboração que resultou no trabalho ref.[20].

Também sou grato a Fapemig pelo apoio ao meu projeto de mestrado.

"É a aventura mais perserverante e grandiosa da história da humanidade - essa busca de compreender o universo, como opera e de onde veio. É difícil imaginar que um punhado de habitantes de um pequeno planeta que gira em torno de uma insignificante estrela, numa pequena galáxia possa ter por objetivo uma completa compreensão do universo em sua totalidade, um grãozinho de criação acreditando realmente ser capaz de compreender o todo."

Murray Gell-Mann (1929-)

Resumo

Recentemente foi demonstrado [17] que correções quânticas para o potencial gravitacional de Newton explica as curvas de rotação em galáxias espirais sem introduzir o halo de matéria escura. O único parâmetro fenomenológico $\alpha\nu$ da teoria cresce com a massa da galáxia. A fim de melhor investigar a dependência de $\alpha\nu$ com a massa é preciso verificar o limite superior para $\alpha\nu$ em uma escala menor. Aqui nós realizamos o cálculo correspondente por meio da análise da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz e da condição de equilíbrio de anãs-brancas. A limitação resultante sobre correções quânticas sugerem uma dependência de $\alpha\nu$ com a massa.

palavras-chave : potencial gravitacional; correção quântica; limite superior.

Abstract

Recently it was shown that quantum corrections to the Newton potential can explain the rotation curves in spiral galaxies without introducing the Dark Matter halo. The unique phenomenological parameter $\alpha\nu$ of the theory grows with the mass of the galaxy. In order to better investigate the mass-dependence of $\alpha\nu$ one needs to check the upper bound for $\alpha\nu$ at a smaller scale. Here we perform the corresponding calculation by analyzing the dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector and the equilibrium condition of white-dwarf. The resulting limitation on quantum corrections is suggesting a mass-dependence of $\alpha\nu$.

keywords : gravitational potential; quantum correction; upper bound.

Índice

Introdução

Neste trabalho vamos estimar os limites de uma gravitação com correções quânticas, a partir da dinâmica do sistema Solar e da estrutura das anãs-brancas.

Para tal necessitamos formular as idéias da Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1916. Tal teoria veio generalizar a Teoria Gravitacional Newtoniana, em que a interação é um processo instantâneo, ou seja, está em desacordo com os princípios da Relatividade Restrita.

Este trabalho será dividido em três capítulos, sendo que no primeiro desenvolveremos os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral, no segundo a resolveremos para o caso específico de simetria esférica e analisaremos alguns aspectos do processo de colapso de uma estrela esfericamente simétrica. Já no terceiro e último capítulo estimaremos os limites de uma gravitação relativística com pequenas correções quânticas. Vamos aqui fazer um pequeno resumo a respeito de cada capítulo.

No primeiro, formulamos o Princípio de Equivalência que foi a pista para a descrição da gravidade como um espaço-tempo curvo, nesta descrição a matéria atua sobre o espaço-tempo de modo a modificar a sua geometria e o espaço-tempo traça assim o "cenário"para a matéria.

Esta descrição, portanto, é formulada em termos de uma geometria curva. Neste capítulo iremos assim derivar as equações de movimento neste campo, que são as curvas geodésicas deste espaço. Utilizando o Princípio de Mínima Ação vamos obter as equações de campo, ou seja, aquelas tal que a sua solução nos permite determinar as propriedades geométricas do espaço-tempo.

No segundo iremos derivar uma importante solução das equações de Einstein, conhecida como solução de Schwarzschild. Esta solução prever novos fenômenos, como por exemplo, a formação de buracos negros.

Contudo, sabemos que para um corpo colapsar ele precisa ser bem massivo e instável, caso contrário isto jamais irá ocorrer, e não haverá formação de qualquer buraco negro. Logo os candidatos mais cotados são as estrelas. Vamos assim analisar sob qual condição uma anã-branca colapsa.

A escolha por uma tal estrela, se deve ao fato de que elas podem ser tratadas, razoavelmente, como um gás de Fermi degenerado e frio. Iremos assim obter, com boa aproximação, o limite de Chandrasekhar. Veremos que neste caso não será necessário levar em conta a Relatividade Geral, mas sim seu limite não-relativístico.

Já no terceiro e último capítulo, iremos mostrar que a partir da ação de Einstein-Hilbert modificada, ou seja, levando-se em conta efeitos quânticos, obtemos um novo potencial gravitacional clássico. Deste modo iremos estimar quais os limites desta nova gravidade dentro do Sistema Solar e também a partir das condições de equílibrio das anãs-brancas.

Capítulo 1

Relatividade geral

1.1 Necessidade de uma gravitação não-newtoniana

A astronomia é considerada como a ciência natural mais antiga. Sua origem está baseada, essencialmente, nos rituais religiosos destes povos. Temos muitos registros a respeito da apreciação do homem com os movimentos dos objetos celestes, desde tempos muito remotos.

É de conhecimento que muitos povos antigos, como os egpícios, tinham um calendário agrícola baseado na posição destes objetos. Verificou-se que as posições de cada pirâmide está diretamente relacionada a posição de estrelas no céu, elas representavam a eternidade para um faraó.

Os gregos antigos foram os primeiros a utilizar a matemática para descrever os movimentos dos planetas e a criar um modelo de universo. Este modelo era baseado com a terra no centro e os outros astros orbitando ao seu redor.

Apesar da grande admiração destes povos com os corpos celestes uma pergunta não foram capazes de responder: qual é a causa dos seus movimentos? Tal pergunta torturou muitas mentes durante milhares de anos, até que o primeiro e grandioso passo a este caminho foi dado por Isaac Newton (1642-1727), um dos maiores intelectuais da humanidade.

Newton foi responsável por uma das obras cientificas mais importantes já produzidas pelo homem, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Neste conjunto de três volumes, conhecido genericamente como Principia, Newton formulou, entre outros resultados, as três leis fundamentais do movimento e a Lei da Gravitação Universal.

A Lei da Gravitação Universal é uma descrição matemática, dada por Newton, em busca de responder a prévia pergunta. Com ela e as três leis do movimento, Newton foi capaz de explicar, de forma satisfatória, todo o universo ao seu redor. Desde o movimento da Lua em torno da Terra e dos planetas ao redor do Sol, como simples experiências realizadas na terra. Porém ele deixou claro que sua lei não dizia o que é a gravidade, e nem a sua causa, mas sim o seu efeito:

"... Até aqui não fui capaz de descobrir a causa destas propriedades da gravidade, a partir dos fenômenos, e não formulo hipóteses, pois tudo que não for deduzido dos fenômenos deve ser chamado de hipótese... E para nós é suficiente que a gravidade realmente existe e atua de acordo com as leis que explicamos, e serve abundantemente para dar conta de todos os movimentos dos corpos celestes, e dos oceanos."

Desde então, as leis de Newton passaram a ser usadas, e com sucesso, para explicar os fenômenos conhecidos e prever novos. Porém a ciência, como uma caminhada, é construida com um passo de cada vez, e logo surgiria uma teoria para ser confrontada com a de Newton.

Durante os séculos XVIII e XIX, os fenômenos do magnetismo e da eletricidade foram extensivamente estudados. Augustin de Coulomb (1736-1806) formulou, em 1785, a lei de forças entre duas partículas carregadas em repouso, enquanto Michael Faraday (1791-1867) e André-Marie Ampère(1775-1836) davam grandes contribuições à compreensão dos fenômenos magnéticos. Logo, em 1861, James Maxwell (1831-1879) formulou em termos matemáticos as leis básicas do magnetismo e da eletricidade.

Maxwell conseguiu unificar os fenômenos conhecidos do magnetismo, eletricidade e da óptica em uma única teoria consistente. Ele demonstrou, a partir de suas equações, a existência de ondas eletromagnéticas e que estas propagam-se no vácuo com uma velocidade constante $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Daí surge uma questão: com relação a qual referencial inercial é esta velocidade?

As equações de Maxwell prevê que tais ondas propagam-se no vácuo com uma velocidade constante universal. Em contrapartida, as transformações de Galileu (1564-1642) mostram que se esta velocidade for a respeito de um derteminado referencial inercial, passando-se a outro com movimento relativo ao primeiro, esta velocidade será outra.

Assim um grande problema na física nasceu, a Mecânica de Newton é incompatível com a Teoria de Maxwell. As leis de Newton não poderiam estar erradas, já que a verificação experimental a confirmava. Contudo, o eletromagnetismo de Maxwell também tinha a experiência a seu favor. As ondas eletromagnéticas foram confirmadas experimentalmente por Heinrich Hertz (1857-1894).

Algumas hipóteses foram formuladas para solucionar o problema, e uma predominou entre os físicos, a hipótese do éter. Ela consistia da afirmação de que existia um referencial privilegiado em relação ao qual a velocidade da luz seria sempre a mesma, e que tal referencial seria o de repouso do hipotético meio (éter).

Esta descrição é baseada nos fenômenos acústicos em meios homogêneos. Assim seria possível detectar um movimento relativo da Terra neste meio. Entretanto nenhum movimento foi observado, as experiências realizadas por Michelson e Morley, dentro da precisão experimental, não eram condizentes com a hipótese do éter.

Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) publicou uma série de quatro artigos revolucionários. Um desses, "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento", revolucionou a visão clássica da natureza para sempre. Nele Einstein postula dois princípios fundamentais:

• as leis da natureza são as mesmas em todo referencial inercial. Deste modo não é possível detectar, através da experiência, o movimento relativo de um referencial inercial em relação a outro.

• a velocidade da luz no vácuo é a mesma em todo referencial inercial, independente do movimento da fonte.

Assim ele desenvolveu novos princípios fundamentais compatíveis com a teoria de Maxwell, porém incompatíveis com a mecânica de Newton, já que esta está em desarcordo com o segundo postulado.

Baseado em tais postulados ele desenvolveu uma nova mecânica, que passou a ser conhecida como Teoria da Relatividade Restrita. Ela teve um profundo impacto na física, tanto do ponto de vista conceitual quanto de novas previsões.

A quantidade de novos resultados previstos por tal teoria foi enorme. Por exemplo, a conversão de massa de repouso em energia, é um processo que ocorre na combustão das estrelas e também responsável pelo grande poder de destruição das bombas atômicas. O tempo absoluto de Newton passou a ser um conceito relativo, verificado no decaimento do múon.

Outro resultado da Relatividade Restrita é que partículas massivas tem a velocidade da luz no vácuo como um limite inatingível e partículas sem massa propagam-se com velocidade c. Desde então, muitos aceleradores foram construidos com o propósito, além é claro de muitos outros, de acelerar partículas massivas a velocidades próximas a da luz e nunca observou-se desvios da relatividade (em 2011 um grupo de pesquisadores do Cern dizem que à princípio neutrinos poderíam ter ultrapassado a velocidade da luz em uma de suas experiências, porém é ainda um resultado muito contestado).

Einstein assim generaliza este resultado, impondo que todo e qualquer tipo de "informação"esteja sujeita a tal restrição, como por exemplo as interações fundamentais. Logo, a teoria gravitacional de Newton, que é uma teoria de interação instantânea, torna-se naturalmente incompatível com tais princípios.

Surge assim a necessidade de se construir uma nova teoria da gravidade. Einstein irá, durante aproximadamente dez anos, trabalhar intensamente na busca por uma teoria que descreva a gravidade em acordo com os princípios de sua nova mecânica. Vamos no decorrer deste capítulo apresentar alguns dos resultados obtidos por Einstein nesta busca.

1.2 Princípio de Equivalência

Vamos nesta seção descrever o Princípio de Equivalência, que foi o ponto de partida de Einstein na descorbeta de uma teoria relativística da gravitação. Einstein sabia que a teoria de Newton não era ao todo errada, já que descrevia com sucesso praticamente todas as observações. Logo, deveria ser possível dela extrair algo fundamental, e assim o fez.

Da teoria de Newton, sabemos que uma dada distribuição de massa ρ gera um potencial gravitacional dado pela equação:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad , \tag{1.1}$$

aqui Δ é o operador Laplaciano, e a equação de movimento de uma partícula de massa m neste dado campo é:

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla}\phi \quad , \tag{1.2}$$

acima $\vec{\nabla}$ é o operador gradiente. Nesta equação aparece um fato extremamente importante, o movimento de uma partícula em um campo gravitacional não depende da massa da partícula, mas somente da distribuição de massa que gera o campo. Assim sob mesmas condições iniciais todas as partículas, em um dado campo, descrevem as mesmas trajetórias.

Isto se deve a um fato extremamente importante, a igualdade entre a massa gravitacional e inercial. Estes dois conceitos tem natureza independente, a massa inercial vêm da segunda lei de Newton, de modo que mede a inércia de um corpo, ou seja, a dificuldade de se alterar o seu estado de movimento. Enquanto que a massa gravitacional é a "carga"do campo gravitacional.

Esta igualdade é um dos resultados experimentais mais bem estabelecidos da física. Ela não só dispertou a atenção de Newton como a de Einstein também. Einstein percebeu que esta tinha uma implicação muito profunda quando se analisa o movimento de partículas em uma região pequena do espaço.

Se deixamos duas partículas muito próximas caírem livremente num dado campo gravitacional, o movimento relativo entre elas é infinitésimalmente pequeno, devido a eq.(1.2), e desta forma o campo em um referencial em queda livre com elas foi localmente eliminado. Este fato é conhecido como Elevador de Einstein.

Um outro fato importante é que se estivermos no espaço vazio, longe de qualquer influência gravitacional, em uma nave espacial com aceleração constante e igual a $9,80m/s^2$, imaginaremos que estamos exatamente sobre a superfície da terra, ou seja, na presença de seu campo gravitacional.

Assim vemos que a força gravitacional é proporcional a massa inercial. Esta propriedade é essencialmente uma caracteristica de todas as forças inerciais. Isto poderia nos induzir a concluir que forças gravitacionais são nada mais do que forças inerciais, mas esta conclusão estaria errada.

Como sabemos forças inerciais desaparecem quando passamos para um referencial inercial, o que evidentemente não ocorre com a gravidade. Além disso, a força gravitacional vai a zero na infinitude o que em geral não acontece com as inerciais.

Logo para Einstein podemos, em princípio, sempre olhar um campo gravitacional como se estivessemos em uma região finita de um dado referencial não-inercial, que produza as mesmas equações de movimento que aquele dado campo. Essas observações o levou a um princípio fundamental, que foi o ponto de partida para a sua teoria da gravitação:

'As propriedades locais do movimento de uma partícula em um referencial não-inercial são as mesmas que em um referencial inercial na presença de um dado campo gravitacional.'

Este é o denominado Princípio de Equivalência, que pode ser enunciado em outra forma equivalente, dizendo que as leis da física localmente, em um referencial em queda livre num campo gravitacional, são as mesmas que em um referencial inercial na ausência do campo.

1.3 Campo gravitacional relativístico

Vamos agora ver como podemos caracterizar um referencial não-inercial através do elemento de distância, o que do ponto de vista matemático isto significa uma mudança da métrica do espaço.

Para vermos isso, primeiro definimos o que é um elemento de distância entre dois dados pontos infinitésimais:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \tag{1.3}$$

onde os coeficientes $g_{\mu\nu}$ são denominados de componentes da métrica, que iremos daqui em diante, chama-ló indiscriminadamente de métrica. A métrica é o que caracteriza a geometria de um espaço. Por exemplo, em geometria euclidiana temos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \ ; & \text{se } \mu = \nu \\ 0 \ ; & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.4}$$

esta métrica é denominada plana. Assim se estamos em um plano, ou seja, uma estrutura euclidiana, a distância entre dois pontos, em um sistema de coordenadas cartesianas, numa vizinhaça infinitésimal é:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad . \tag{1.5}$$

Contudo, para uma esfera de raio R e com a origem do sistema de coordenadas no centro da esfera, a distância entre dos pontos vizinhos é:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right) dy^2 + \frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2} dxdy \quad . \tag{1.6}$$

Vemos claramente que a métrica acima não é plana, ou seja, não é válida a geometria eucliana. Nestes casos a denominamos de métrica curva.

Hermann Minkowski (1864-1909) percebeu que a Relatividade Restrita seria melhor entendida em um espaço quadri-dimensional, onde postula-se o tempo como mais uma dimensão física. Em um discurso realizado em 1908 ele buscou enfatizar suas idéias, em suas palavras:

"... O espaço por si só, e o tempo por si só, estão condenados a desvanecer-se em meras sombras, e apenas uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente..."

Agora a distância não é mais entre pontos do espaço tridimensional, que nos é bem familiar, mas sim entre eventos que ocorrem neste espaço quadridimensional, denominado de espaço-tempo.

Esta "distância"é denominada de intervalo entre eventos. Vamos aqui simplesmente dá a sua forma, para uma discussão motivando a sua origem pode-se consultar os livros textos padrões como ref. [1]-[7]. O intervalo infinitesimal entre dois eventos vizinhos é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad , \tag{1.7}$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo.

As transformações de coordenadas as quais deixam o intervalo invariante formam um grupo, este grupo é denominado de Lorentz. As transformações de um referencial inercial à outro, em Relatividade Restrita, são dadas pelas transformações de Lorentz, que é um elemento do Grupo de Lorentz.

Vejamos que a passagem para um referencial não-inercial não preserva a forma do intervalo. Por exemplo, em um referencial girando com uma velocidade angular ω, temos:

$$ds^2 = [1 - \omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 - dx^2 - dy^2 + 2\omega y dx dt - 2\omega x dy dt \quad . \tag{1.8}$$

Assim vemos que a passagem para um referencial não-inercial torna a métrica curva, como no exemplo da esfera.

Einstein levando em conta o princípio de Equivalência estendeu o significado geométrico da Relatividade Restrita. Em um tal modo que um campo gravitacional significa uma deformação do espaço-tempo de Minkowski. Isto é, em um campo gravitacional a métrica do espaço-tempo não é plana mas sim curva.

Outra evidência que reforça esta idéia é que em espaços de geometria curva não podemos levar a métrica a forma plana sobre todo o espaço por qualquer transformação de coordenadas, mas somente em um único ponto do espaço, que nos é familiar pelo Princípio de Equivalência.

Porém temos que tomar cuidado ao acharmos que uma determinada métrica curva descreve um possível campo gravitacional. Para tal ela deve satisfazer algumas condições. Por exemplo, na infinitude ela deve-se tornar plana já que o campo gravitacional desaparece.

Além disso, temos que o determinante da métrica, sob uma transformação geral de coordenadas, se transforma da seguinte forma:

$$g\prime = j^2 g \quad , \tag{1.9}$$

onde j é o jacobiano da transformação. Pode-se mostrar, ref. [1], que é sempre possível escolher um ponto, com um escolha adequada de coordenadas, em que a métrica torna-se plana neste ponto. Logo, passando a outro sistema de coordenadas o determinante métrico neste ponto passa a ser:

$$g\prime = -j^2 \tag{1.10}$$

Porém a escolha do ponto é arbitrária, de modo que o resultado é geral, ou seja, o determinante métrico para um possível campo gravitacional deve ser negativo.

Se estas conclusões estão corretas, então vemos que campos gravitacionais alteram a geometria do espaço-tempo, já que são descritos por métricas curvas, esta é a beleza da Teoria Gravitacional de Einstein.

1.4 Equação de movimento relativístico

Após a discussão anterior, vemos que devemos buscar uma equação que descreva o movimento das partículas em um campo gravitacional interpretado como foi, ou seja, um espaço-tempo com geometria curva.

Para tal, vamos notar que assim como em geometria diferencial, pelo método variacional determinamos a curva entre dois pontos a qual extremiza a distância entre eles, temos do ponto de vista físico o Princípio de Mínima Ação, o qual determina o caminho seguido pela partícula entre dois dados pontos que minimiza a ação.

A interpretação geométrica da gravidade, aliada com o Princípio de Mínima Ação, nos leva a crêr que uma partícula livre no campo gravitacional irá seguir uma geodésica (curvas que extremizam o intervalo), assim o método variacional deve ser equivalente ao Princípio de Mínima Ação, ou seja, a ação de uma partícula neste campo deve ser proporcional ao elemento de intervalo. Vejamos que o método variacional nos dá:

$$\delta s = \delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = 0 \tag{1.11}$$

ou seja, as curvas para qual s toma seu valor extremo. Notemos que no espaço plano o elemento de intervalo para um ponto fixo no espaço ($d\vec{r} = 0$) é $ds = \sqrt{dt^2}$. Logo, a curva que irá extremizar neste caso particular s é uma reta $f(t, \vec{r}) = t$, e seu valor será um máximo ao longo dela ($dt^2 > dt^2 - d\vec{r}^2$).

Supomos agora uma partícula em repouso no espaço, o elemento de intervalo para ela será o mesmo que acima, porém sua ação deve tomar um valor mínimo e não máximo, de modo que ela terá que tomar um valor negativo. Logo podemos postular a ação como:

$$S = -\alpha \int ds \tag{1.12}$$

a constante positiva pode ser obtida tomando-se o limite newtoniano da ação, confira a seção (3.3), onde obtemos $\alpha = mc$. Vamos assim calcular explicitamente a variação dada acima, ou seja, buscar as curvas geodésicas:

$$\begin{aligned}
\delta \int ds \quad = \delta \textstyle\int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = & \int \frac{\delta(g_{ij} dx^i dx^j)}{2\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}} \\
= & \int \frac{ds}{2ds^2} \left[\delta(g_{ij}) dx^i dx^j + 2 g_{ij} dx^i \delta dx^j \right] \\
= & \int \frac{ds}{2} \left[\delta(g_{ij}) u^i u^j + 2 g_{ij} u^i \frac{d\delta x^j}{ds} \right]
\end{aligned}$$

aqui u^i é a quadri-velocidade. Lembramos que a derivada covariante da métrica é nula, condição denominada de metricidade, assim temos:

$$\nabla_l g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} g_{kj} - \Gamma^k_{jl} g_{ki} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad dg_{ij} = \left(\Gamma^k_{il} g_{kj} + \Gamma^k_{jl} g_{ki} \right) dx^l$$

Acima há dois objetos ainda não definidos, a derivada covariante ∇_l e os símbolos de Christoffel Γ^k_{il}, que às vezes iremos referir a eles como "gamas". Isto se deve ao fato de acharmos mais conveniente defini-los na próxima seção, assim se o leitor não conhece tais objetos pode ler o início da próxima seção ou consultar ref.[1]-[5]. Outra simples relação é:

$$\frac{d(g_{ij}u^i\delta x^j)}{ds} = \frac{d(g_{ij})}{ds}u^i\delta x^j + g_{ij}\frac{du^i}{ds}\delta x^j + g_{ij}u^i\frac{d\delta x^j}{ds}$$

substituindo estas duas relações na integral acima vamos obter:

$$\int \frac{ds}{2}\left[(\Gamma^k_{il}g_{kj} + \Gamma^k_{jl}g_{ki})u^iu^j\delta x^l + 2\left(\frac{d(g_{ij}u^j\delta x^j)}{ds} - \frac{d(g_{ij})}{ds}u^i\delta x^j - g_{ij}\frac{du^i}{ds}\delta x^j\right)\right]$$

a integral da derivada total irá desaparecer pois $\delta x^j = 0$ nos limites de integração e fazendo a substituição da derivada da métrica pela primeira relação teremos:

$$\int \frac{ds}{2}\left[(\Gamma^k_{il}g_{kj} + \Gamma^k_{jl}g_{ki})u^iu^j\delta x^l - 2(\Gamma^k_{il}g_{kj} + \Gamma^k_{jl}g_{ki})u^iu^l\delta x^j - 2g_{ij}\frac{du^i}{ds}\delta x^j\right]$$

os termos contendo os símbolos de Christoffel são todos iguais, assim temos:

$$\delta\int ds = \int ds\left[-\Gamma^k_{il}g_{kj}u^iu^l - g_{ij}\frac{du^i}{ds}\right]\delta x^j = 0$$

como δx^j é arbitrário o integrando deve ser nulo e assim multiplicando por g^{jl} obtemos a requerida equação de movimento em um campo gravitacional:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj}u^ku^j = 0 \tag{1.13}$$

ela interpreta o mesmo papel que a eq.(1.2), de definir a trajetória de uma partícula a partir das condições iniciais, por esta comparação vemos que a métrica tem o papel de potencial do campo gravitacional, que deve ser determinada por uma equação que envolva a distribuição de matéria que gera o campo como a eq.(1.1), faremos isso mais adiante. Assim a quadri-força que atua sobre uma partícula em um campo gravitacional é dada por:

$$f^i = -m\Gamma^i_{kj}u^ku^j \tag{1.14}$$

1.5 Equação de desvio geodésico

Como vimos o Princípio de Equivalência nos diz que podemos eliminar o campo gravitacional localmente, ou seja, no limite do volume desta região tendendo a zero. Em campos gravitacionais mais intensos, como os de buracos negros, isto deve ser levado ao "pé da letra", pois senão vamos ser capazes de perceber a presença da gravidade. Sendo assim é de extrema importância quantificarmos a evolução dinâmica de um vetor que conecta duas geodésicas muito próximas.

Para isto começamos com a definição de derivada covariante, ref. [1]- [5], que é uma generalização de derivada. Isto se deve ao fato de que a derivada de um tensor não é um tensor sob transformações de coordenadas gerais, ou seja, não é um objeto invariante perante transformações gerais de coordenadas. Assim definimos a derivada covariante de um tensor do tipo-(n,m) como:

$$\nabla_j A^{i_1 \ldots i_n}_{k_1 \ldots k_m} = \frac{\partial A^{i_1 \ldots i_n}_{k_1 \ldots k_m}}{\partial x^j} + \Gamma^{i_1}_{jl} A^{l \ldots i_n}_{k_1 \ldots k_m} + \ldots + \Gamma^{i_n}_{jl} A^{i_1 \ldots l}_{k_1 \ldots k_m} - \Gamma^{l}_{jk_1} A^{i_1 \ldots i_n}_{l \ldots k_m} - \ldots - \Gamma^{l}_{jk_m} A^{i_1 \ldots i_n}_{k_1 \ldots l} \quad (1.15)$$

acima Γ^i_{jl} são os denominados símbolos de Christoffel. Tal que sob transformação de coordenadas temos:

$$\Gamma'^l_{nm} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^n \partial x'^m} \quad , \quad (1.16)$$

A partir da condição de metricidade podemos mostrar que os símbolos de Christoffel são relacionados com os coeficientes métricos por:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (1.17)$$

A derivada covariante para o caso particular de um vetor contravariante é:

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jl} A^l \quad , \quad (1.18)$$

e notemos que tais derivadas não são comutativas:

$$\nabla_k \nabla_j A^i - \nabla_j \nabla_k A^i = -R^i_{lkj} A^l \quad , \quad (1.19)$$

Uma observação importante é que as derivadas covariantes fazem o transporte paralelo de um vetor (tensor), ref. [1]-[5]. Assim temos que o transporte paralelo de um vetor depende do caminho escolhido. Porém sabemos que em espaços planos o transporte paralelo de um vetor é independente do caminho, logo vemos que o desaparecimento ou não do tensor de quarta ordem R^i_{lkj} nos informa se o espaço é plano ou curvo, respectivamente. Este tensor é denominado de Tensor de Riemann ou de Curvatura, e ele é dado por:

$$R^i_{lkj} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{lk}}{\partial x^j} + \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{lj} - \Gamma^i_{nj} \Gamma^n_{lk} \quad . \quad (1.20)$$

É um tensor anti-simétrico nos dois primeiros índices e nos dois últimos, simétrico na troca do primeiro par de índices com o segundo. Ele também satisfaz algumas identidades denominadas de

Bianchi e assim o número de componentes independentes dele se reduz. A contração do primeiro índice com o terceiro ou do segundo com o quarto é um tensor simétrico denominado Tensor de Ricci:

$$g^{ik}R_{ilkj} = R_{lj} = \frac{\partial\Gamma^n_{lj}}{\partial x^n} - \frac{\partial\Gamma^n_{ln}}{\partial x^j} + \Gamma^n_{nm}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^m_{nj}\Gamma^n_{lm} \tag{1.21}$$

e sua contração é denominada de Curvatura Escalar:

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{1.22}$$

Fizemos essa pequena introdução simplesmente porque nosso resultado irá depender deste importante tensor. Para começarmos fazemos a parametrização das geodésicas. Podemos escolher o intervalo como um parâmetro que corre sobre uma dada geodésica e um outro parâmetro arbitrário que distingue duas dadas geodésicas, ou seja, $x^i = x^i(s,v)$. Definimos assim um vetor que uni duas geodésicas muito próximas para um mesmo valor de s por:

$$\eta^i = \delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}\delta v = v^i\delta v$$

Vamos portanto calcular a dinâmica deste vetor ao longo de uma dada geodésica, ou seja:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = \delta v\frac{D^2v^i}{ds^2} = \delta v\frac{D}{ds}\left(\frac{Dv^i}{ds}\right) \tag{$*$}$$

Notemos que:

$$\frac{\partial u^i}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x^i}{\partial s}\right) = \frac{\partial v^i}{\partial s}$$

onde u^i é a quadri-velocidade ao longo da geodésica, e:

$$\frac{Du^i}{dv} = \frac{\partial x^j}{\partial v}\nabla_j u^i = v^j\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jl}u^l\right)$$

mas:

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial v} = \frac{\partial u^i}{\partial v} = \frac{\partial v^i}{\partial s} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial s} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}u^j$$

logo:

$$\frac{Du^i}{dv} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jl}v^l\right)u^j = \frac{Dv^i}{ds}$$

Ou seja:

$$u^j\nabla_j v^i = v^j\nabla_j u^i$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{ds}\left(\frac{Dv^i}{ds}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{Du^i}{dv}\right) &= \frac{D}{ds}\left(v^j\nabla_j u^i\right) \\
&= u^k\nabla_k(v^j\nabla_j u^i) \\
&= u^k\nabla_k v^j\nabla_j u^i + u^k v^j\nabla_k\nabla_j u^i
\end{aligned}$$

Utilizando a eq.(1.19) para trocar a ordem de diferenciação no segundo termo temos:

$$\begin{aligned}
\frac{D^2v^i}{ds^2} &= u^k\nabla_k v^j\nabla_j u^i + u^k v^j\nabla_j\nabla_k u^i + u^k v^j u^m R^i_{mjk} \\
&= v^k\nabla_k u^j\nabla_j u^i + u^k v^j\nabla_j\nabla_k u^i + u^k v^j u^m R^i_{mjk} \\
&= v^j\nabla_j(u^k\nabla_k u^i) + u^k v^j u^m R^i_{mjk} \\
&= R^i_{mjk}u^k v^j u^m
\end{aligned}$$

Assim eq.(*) fica:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{kmj}u^k u^m \eta^j \tag{1.23}$$

Esta é a requerida equação que pode ser claramente interpretada como a quadri-aceleração entre duas partículas que se movem sobre duas geodésicas próximas num dado campo gravitacional. Como no espaço-tempo plano partículas testes livres se movem sem aceleração relativa temos $R^i_{kmj} = 0$, o que mais uma vez nos mostra que o tensor de Riemann determina se o espaço-tempo é plano ou curvo.

1.6 Equações de Einstein

Até aqui já obtemos as equações que determinam como partículas livres se movem no campo gravitacional e a aceleração relativa entre duas partículas vizinhas. Contudo ambas equações são evidentemente dependentes da métrica, ou seja, do campo gravitacional.

Assim o que precisamos agora é de uma equação que nos dá a métrica, g_{ij}, em termos da distribuição de matéria, como a eq.(1.1) faz na teoria newtoniana. Discutimos na seção (1.3) que campos gravitacionais alteram a geometria do espaço-tempo, e como eles são gerados por massa (massa de um ponto de vista relativístico tem um sentido mais abrangente dada pela famosa equação de Einstein $E = mc^2$), devemos esperar que as equações de campo relacione a matéria (dada pelo tensor momento-energia T_{ij}) à geometria g_{ij}.

Por analogia a eq.(1.1), esperamos que ela seja uma equação diferencial de segunda ordem no "potencial"g_{ij}, já que no caso limite de campo fraco ela deve dar a eq.(1.1). O campo gravitacional, como o eletromagnético, será tratado tendo um papel dinâmico na teoria (transporta momento e energia), por isso nada melhor do que utilizar o princípio de mínima ação para obter a requerida equação de campo. A ação do sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$S = \int (L_c + L_m)dt = S_c + S_m \tag{1.24}$$

onde S_c é a ação do campo e S_m da matéria, o princípio de mínima ação requer:

$$\delta S = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(S_c + S_m) = 0$$

Iniciamos pela ação da matéria, como sabemos a definição do tensor momento-energia dinâmico é:

$$T_{ij} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ij}} \tag{1.25}$$

logo temos:

$$\delta S_m = \int \frac{\sqrt{-g}}{2c}\; T_{ij} \delta g^{ij} d\Omega \tag{1.26}$$

Analisemos agora a ação do campo. Como dissemos ela deve gerar uma equação diferencial de segunda ordem no potencial g_{ij} e é por definição um escalar. Então devemos construir um escalar que dependa de g_{ij} e de suas derivadas primeiras. Pode-se provar que o único escalar que satisfaz essas exigências é a curvatura escalar [2], sendo assim vamos definir a ação da seguinte forma:

$$S_c = \gamma \int R\sqrt{-g}\; d\Omega \quad ; \quad \gamma = -\frac{c^3}{16\pi G}$$

γ é uma constante obtida do limite newtoniano. Pode-se mostrar que a curvatura escalar pode ser escrita em duas partes, em que uma das quais só depende da métrica e suas derivadas primeiras, ref. [1], assim temos:

$$R = G + \frac{\partial \omega^i}{\partial x^i} \tag{1.27}$$

onde (G) só depende (g_{ij}) e $(\partial_k g_{ij})$ satisfazendo nossas exigências, logo:

$$S_c = \gamma \int \left(G + \frac{\partial \omega^i}{\partial x^i} \right) \sqrt{-g}\; d\Omega = \gamma \int G\sqrt{-g} d\Omega + \gamma \int \omega^i ds^i$$

usamos no fim o teorema de Gauss. Variando a ação entre duas hipersuperficies ($x_0 = const.$) a segunda integral torna-se uma integral sobre uma superfície contornando todo o espaço tri-dimensional, ou seja, estendendo-se ao infinito, neste limite a variação do campo dá zero e consequentemente temos:

$$\delta S_c = \delta\gamma \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta\gamma \int G\sqrt{-g}d\Omega$$

assim vemos que a variação de R satisfaz nossas exigências. Vamos portanto determinar sua variação:

$$\begin{aligned} \delta S_c &= \gamma \int \delta \; (\; g^{ij} R_{ij} \sqrt{-g} \;) \; d\Omega \\ &= \gamma \int \left(R_{ij}\sqrt{-g} \; \delta g^{ij} + g^{ij} R_{ij} \delta\sqrt{-g} + g^{ij}\sqrt{-g} \; \delta R_{ij} \right) \; d\Omega \end{aligned}$$

Conhecendo-se as seguintes relações:

$$dg = g g^{ij} dg_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(\sqrt{-g})^2 = g g^{ij} \delta g_{ij}$$

$$\delta(g_{ij} g^{jk}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g_{ij} \delta g^{jk} = -g^{ij} \delta g_{jk}$$

obtemos:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \; g_{ij} \delta g^{ij}$$

logo:

$$\delta S_c = \gamma \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega + \gamma \int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega$$

utilizando a expressão de R_{ij} e adotando um sistema de coordenadas localmente geodésico, ou seja, $\Gamma^i_{jk} = 0$, a variação deste tensor pode ser escrita da seguinte forma:

$$g^{ij} \; \delta R_{ij} = g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma^l_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j} \delta\Gamma^l_{il} \right) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma^l_{ij} - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma^j_{ij} = \frac{\partial \omega^l}{\partial x^l}$$

onde:

$$\omega^l = g^{ij} \delta\Gamma^l_{ij} - g^{il} \delta\Gamma^j_{ij}$$

Já que ω^l é uma quantidade vetorial, podemos escrever a relação acima em um sistema de coordenadas arbitrário, simplesmente covariantizando aquela expressão:

$$\nabla_i \omega^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\ \omega^l)$$

portanto nossa segunda integral da direita fica:

$$\int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\ \omega^l)\ d\Omega = \oint \sqrt{-g}\ \omega^l ds_l = 0$$

onde utilizamos o teorema de Gauss; a integral de superfície desaparece porque a hiper-superfície de contorno engloba o espaço tridimensional todo, ou seja, ela se estende a infinitude onde queremos que o campo gravitacional torne-se plano. Assim temos para a variação da ação:

$$\delta S = \gamma \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} - \frac{8\pi G}{c^4}\ T_{ij} \right) \sqrt{-g}\ \delta g^{ij} d\Omega = 0$$

como a variação do campo é arbitrária o termo dentro do parentêses deve ser nulo, desta forma obtemos as requeridas equações de Einstein:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\ T_{ij} \tag{1.28}$$

Essas equações portanto descrevem como o campo gravitacional depende da distribuição de matéria (energia) do sistema sob consideração. A teoria assim construída é denominada de Teoria da Relatividade Geral.

Claramente vemos que as equações de Einstein não são lineares e portanto não obedecem ao princípio de superposição, porém no limite de campos fracos é possível linearizá-la, restaurando assim a teoria gravitacional de Newton.

Logo para específicar a trajetória de uma partícula em um campo gravitacional, temos que resolver as equações de Einstein para um dado tensor de momento-energia, ou seja, encontrar a métrica e substituir na equação(1.13) que defini as geodésicas.

Vamos definir o denominado tensor de Einstein, que nada mais é do que a parte esquerda da equação(1.26):

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad . \tag{1.29}$$

Um outro modo de escrever as equações de Einstein pode ser encontrada contraindo-se os índices do tensor de Einstein:

$$g^{ij} G_{ij} = R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}\ T \quad \Longrightarrow \quad R = -\frac{8\pi G}{c^4}\ T$$

onde (T) é o traço do tensor momento-energia, logo:

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right) \quad . \tag{1.30}$$

A segunda lei de Newton contém as leis de conservação da energia e do momento do sistema, de forma analoga as equações de Einstein também. Para provar, partiremos de uma das famosas identidades de Bianchi:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0, \tag{1.31}$$

contraindo primeiro os índices n e k, depois i e m, obteremos a identidade abaixo:

$$2\nabla_m R^m_l - \nabla_m \delta^m_l R \implies \nabla_m (R^m_l - \frac{1}{2}\delta^m_l R) = 0 \quad . \tag{1.32}$$

Mas o termo entre os parentêses é exatamente o tensor de Einstein com índices levantados, portanto devemos ter:

$$\nabla_i T^i_j = 0 \tag{1.33}$$

esta relação expressa a lei de conservação do tensor momento-energia do sistema físico. Vale a pena notar que esta importante lei de conservação foi obtida de uma identidade puramente matemática, relacionada as propriedades geométricas do espaço sob consideração. Esta é uma pista que indica que a Teoria de Einstein dá uma realidade física ao espaço-tempo.

1.7 Tempo e distância em relatividade

Vamos tratar nesta seção de como as coordenadas espaço-temporais determinam tempo e distância em relatividade. Primeiro consideremos um relógio com coordenadas espaciais ($x^\alpha; \alpha = 1, 2, 3$), que podemos tomar como a origem do sistema de coordenadas, em relação a um referencial em que ele permanece fixo. Consideremos x^0 como a coordenada tipo-tempo deste ponto em relação ao mesmo referencial, assim o intervalo para eventos que ocorrem em um dado ponto espacial x'^τ é:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 \tag{1.34}$$

Mas sabemos que podemos fazer uma transformação de coordenadas, escolhendo por simplicidade a origem no ponto x'^τ , em que a métrica se torne galeliana, assim nestas coordenadas o intervalo toma a seguinte forma para este ponto:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \tag{1.35}$$

A coordenada temporal τ é denominada tempo-próprio para o dado ponto do espaço e pode ser determinada pelo relógio localizado neste ponto, então a relação entre as duas coordenadas é:

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{1.36}$$

O que fizemos acima foi uma análise de como diferentes tipos de coordenadas de um mesmo sistema de referência se relacionam, façamos agora uma mudança do nosso referencial a um referencial que está fixo em um relógio em queda livre em um dado campo gravitacional. Pelo Princípio de Equivalência podemos neste referencial eliminar o campo localmente de tal forma que o elemento de intervalo para eventos que ocorrem em um mesmo ponto espacial é:

$$ds^2 = c^2(d\tau')^2 \tag{1.37}$$

aqui τ' é denominado tempo-próprio para o ponto do referencial em queda livre onde o relógio está fixado. Do ponto de vista de outro referencial o elemento de intervalo toma a forma:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.38}$$

Igualando as duas expressões nós temos, por exemplo, uma relação entre o tempo-próprio de uma dada partícula e as coordenadas de um sistema de referência que observa o seu movimento.

Um campo gravitacional é denominado constante se a métrica que o determina é independente da coordenada temporal, para isso é necessário que o campo seja gerado por um único corpo, pois caso contrário a atração mútua entre eles faz com que o campo varie no tempo.

Uma métrica que descreve um campo gravitacional constante é denominada estática se $g_{0\alpha} = 0$, tais métricas são produzidas por corpos fixados no sistema de referência. Assim em campos estáticos temos:

$$ds^2 = g_{00}(dx_0)^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{1.39}$$

Em campos gravitacionais constantes a coordenada temporal é denominada tempo-universal. Mostraremos agora que em tais campos o intervalo de tempo universal entre dois eventos (A, B) em um dado ponto espacial (P) é igual ao de dois outros eventos (A', B') em outro dado ponto (Q) infinitesimalmente próximo se os eventos forem respectivamente simultâneos. Consideremos que o evento A ocorra no instante x_0 , como A' é simultâneo com A ele ocorre no instante:

$$A' \longrightarrow \quad x_0 + \Delta x_0 \quad onde \quad \Delta x_0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\, dx^\alpha$$

para uma demonstração destas relações confira ref.[1]. Aqui $g_{0\alpha}$ é calculado no ponto Q e no instante x_0. Da mesma forma se B ocorre no instante x_0' , B' ocorre no instante:

$$B' \quad \longrightarrow \quad x_0' + \Delta x_0' \quad onde \quad \Delta x_0' = -\frac{g_{0\alpha}'}{g_{00}'}\, dx^\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\, dx^\alpha$$

$g_{0\alpha}'$ é a métrica calculada no ponto Q e no instante x_0' , mas como a métrica é independente do tempo estes valores são os mesmos e portanto:

$$\Delta x_0 = \Delta x_0'$$

mas o intervalo de tempo universal entre os eventos (A,B) é Δx_0 e entre (A',B') é $\Delta x_0'$ e assim provamos que são iguais.

Para campos estáticos $g_{0\alpha} = 0$, assim a afirmação acima é válida para todo o espaço-tempo sem a restrição a pontos infinitesimalmente próximos, ou seja, nestes casos o intervalo de tempo-universal de eventos simultâneos são iguais, isto será fundamental para provarmos o desvio vermelho gravitacional em campos estáticos.

Façamos agora a análise de um importante sistema de referência que tem grande aplicabilidade, ele é caracterizado pelas condições abaixo, podendo a métrica agora depender do tempo:

$$g_{00} = 1 \qquad g_{0\alpha} = 0$$

Mostraremos que a linha temporal ($x_0 = const.$) é uma geodésica deste espaço-tempo. Uma partícula em repouso neste sistema de referência tem as componentes da quadri-velocidade dados por:

$$u^i = (1, 0, 0, 0)$$

pois para esta partícula o intervalo toma a forma $ds^2 = c^2 d\tau^2$ e $u^i = \frac{dx^i}{ds}$. Isto significa que a partícula descreve uma linha temporal neste sistema de referência, vamos calcular as equações de movimento geodésico eq.(1.13) e mostrar que ela é satisfeita para esta dada 4-velocidade. Como $u^i = (1, 0, 0, 0)$ a quadri-aceleração é ($\frac{du^i}{ds} = 0$) e somente o termo $u^0 u^0 = 1$ é diferente de zero, assim os gamas que temos que analisar são Γ^i_{00} . Neste sistema de referência o intervalo toma a forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1.40}$$

vamos considerar Γ^{α}_{00}, onde α assume os índices espaciais, temos:

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha l}(2\partial_0 g_{l0} + \partial_l g_{00})$$

$\partial_l g_{00} = 0$, l deve ser espacial então $g_{l0} = 0$ e assim $\Gamma^{\alpha}_{00} = 0$. Uma análise similar mostra que $\Gamma^{0}_{00} = 0$. E assim vemos que uma partícula em repouso neste sistema descreve uma geodésica do espaço-tempo e portanto este referencial está em queda livre no campo gravitacional.

Trataremos agora da questão de distância em relatividade. Evidentemente ela deve ser dada por uma expressão covariante, ou melhor, por um escalar em analogia ao espaço euclidiano, pois caso contrário para cada sistema de referência teríamos um valor diferente e isto não faria sentido.

Poderíamos partir da expressão do intervalo considerando $dt = 0$. Mas como sabemos para determinarmos a distância entre dois pontos temos que colocar um instrumento de medida (por exemplo, uma régua) sobre estes pontos e então fazer a leitura destes pontos simultâneamente no instrumento. Mas como vimos a coordenada temporal para dois eventos simultâneos em geral difere por:

$$\Delta x_0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\ dx^{\alpha}$$

Assim não podemos simplesmente considerar $dt = 0$ para definirmos distância. A maneira coerente de se fazer isto é defini-la em uma região infinitesimalmente pequena, pois o princípio de equivalência diz que o campo gravitacional nesta região desaparece. Deste modo enviamos um sinal de luz de um dos pontos ao outro e determinamos o tempo gasto pelo sinal para ir e voltar. Com este procedimento a distância será definida de forma usual, já que a velocidade da luz é invariante, ou seja, independente de qual dos pontos o sinal é enviado e observado, temos portanto:

$$dl = \frac{cdt}{2}$$

onde dt é o intervalo de tempo gasto para ir e voltar. Resolvendo a equação quadrática $ds = 0$ para dt, encontramos:

$$dl^2 = -\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\ g_{0\beta}\right)\ dx^{\alpha}dx^{\beta} = \gamma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \tag{1.41}$$

onde $\gamma_{\alpha\beta}$ é denominada de métrica espacial. Para um campo constante esta expressão pode ser integrada para definir a distância entre dois pontos distantes, pois esta distância não irá depender do tempo. Se além disso o campo é estático, a métrica espacial é dada simplesmente por $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$. Estas relações que definimos nesta seção são de fundamental importância, já que distância e tempo formam a base estrutural de qualquer teoria física, como sabemos a teoria da relatividade descreve o mundo físico em um espaço-tempo em que tempo também é uma das dimensões físicas.

1.8 Desvio vermelho gravitacional (red-shift)

Consideremos uma fonte em repouso em relação a dois observadores tal que ela emite sinais com uma certa frequência em um campo gravitacional estático. Os dois observadores em pontos distintos medem a frequência deste sinal. Isto pode ser feito da seguinte forma: calcula-se o intervalo de tempo entre dois sinais consecutivos, no caso de uma onda pode-se calcular o intervalo de tempo entre duas cristas, por exemplo, e assim toma o inverso deste tempo. Obviamente o intervalo de tempo que cada observador mede neste processo será determinado pelo relógio do observador no local da medida , ou seja, o tempo-próprio de cada observador, assim temos para a frequência angular medida por cada observador:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\triangle\tau_1} \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{\triangle\tau_2}$$

onde τ_i indica o tempo próprio de cada observador, sua relação com a coordenada temporal, que neste caso é o tempo universal, é:

$$\triangle\tau_1 = \sqrt{g_{00}(x_1)} \triangle t_1 \quad ; \quad \triangle\tau_2 = \sqrt{g_{00}(x_2)} \triangle t_2$$

estas medidas para serem comparadas devem ser realizadas simultaneamente , e portanto como vimos o intervalo de tempo universal será igual já que o campo é estático ($\triangle t_1 = \triangle t_2$), assim teremos para a mudança relativa de frequência:

$$\begin{aligned}\frac{\triangle\omega}{\omega} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega\ _1} &= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g_{oo(x2)}}} - \frac{2\pi}{\sqrt{g_{oo(x1)}}}\right)\frac{1}{\triangle t} : \frac{2\pi}{\sqrt{g_{00}(x_1)} \triangle t} \\ &= \left(\sqrt{\frac{g_{00}(x_1)}{g_{00}(x_2)}} - 1\right)\end{aligned}$$

Como veremos adiante campos gravitacionais com simetria esférica e também no limite de campos fracos a componente temporal da métrica é uma função somente da coordenada radial dada por:

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}$$

onde $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$ é o potencial newtoniano, no sistema solar tipicamente $\frac{2\phi(r)}{c^2} << 1$, por exemplo, para o sol temos:

$$\frac{2\phi(r_s)}{c^2} \approx 10^{-6}$$

vamos assim aplicar nossas equações a este caso e como vemos ela deve ser aplicada para $r > \frac{2GM}{c^2}$, logo uma boa aproximação será:

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}} \approx 1 + \frac{\phi(r)}{c^2}$$

e consequentemente teremos:

$$\frac{\triangle\omega}{\omega} \approx \frac{1 + \frac{\phi(r_1)}{c^2}}{1 + \frac{\phi(r_2)}{c^2}} \quad - \quad 1 = \frac{GM}{c^2} \frac{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2}\right)} \tag{1.42}$$

Vemos claramente que o numerador é que determina se o desvio relativo da frequência medida pelo observador (2) em relação ao primeiro é positiva ou negativa, isto implica que se o segundo observador estiver mais afastado do centro do campo em relação ao primeiro ele irá medir uma frequência menor pois o numerador se torna negativo, ou seja, ocorre um desvio em direção ao vermelho.

Assim vemos portanto que a luz emitida de uma estrela e que é detectada por nós possui uma frequência relativamente menor do que a emitida. Logo se quisermos determinar a composição dela, através do espectro emitido, temos que levar em conta este efeito além é claro do efeito Doppler, devido ao movimento relativo e da expansão do universo que não trataremos aqui.

Capítulo 2

Colapso Gravitacional

2.1 Campo de Schwarzschild

Nosso objetivo agora se foca em uma das soluções exatas das equações de Einstein. A primeira destas foi obtida logo após a divulgação de Einstein de suas equações, ela se denomina solução de Schwarzschild. Pois foi Karl Schwarzschild (1973-1916) quem primeiro encontrou uma solução exata das equações de campo.

Sua solução descreve um corpo esfericamente simétrico no vácuo. Notamos que muitas das estrelas e planetas no nosso universo são com boa aproximação esfericamente simétricos, negligenciando pequenas rotações e achatamento dos pólos, daí sua importância. Vamos assim nesta seção obter tal solução e analisar como a geometria deste espaço-tempo difere da nossa noção intuitiva de tempo e espaço.

Como nosso problema aqui é encontrar uma solução com simetria esférica, vamos naturalmente utilizar coordenadas esféricas para a parte espacial da métrica. Os coeficientes métricos para tal simetria só podem, é claro, ser funções do tempo e da coordenada radial, assim vamos generalizar a métrica do espaço de Minkowski em coordenadas esféricas da seguinte forma:

$$ds^2 = A(r,t)c^2dt - B(r,t)dr^2 - C(r,t)(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{2.1}$$

Pode-se mostrar que esta é a relação mais geral para o caso de simétrica esférica [6],[7]. Definiremos r ser o comprimento próprio da circunferência no equador ($\theta = \frac{\pi}{2}$) dividida por 2π, desta forma $C(r,t) = r^2$. Por simplicidade nos cálculos, escreveremos A(r,t) e B (r,t) em forma exponencial, temos portanto:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\ d\varphi^2) \tag{2.2}$$

onde $\lambda(r,t)$ e $\nu(r,t)$ são funções arbitrárias que vão a zero no infinito para satisfazer a condição de espaço-tempo plano assintoticamente. Os coeficientes covariantes e contravariantes métricos são:

$$g_{00} = e^{\nu} \quad g_{11} = -e^{\lambda} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 sen^2\theta$$

$$g^{00} = e^{-\nu} \quad g^{11} = -e^{-\lambda} \quad g^{22} = -r^{-2} \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 sen^2\theta}$$

Precisamos agora é dos termos não nulos dos símbolos de Chistoffel, ou seja:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{2.3}$$

e eles são:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2} \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\ sen^2\theta e^{-\lambda} \quad \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{2}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{sen2\theta}{2} \quad \Gamma^2_{12} = r^{-1}$$

$$\Gamma^3_{13} = r^{-1} \quad \Gamma^3_{23} = cotg\theta$$

onde o superescrito linha significa diferenciação com respeito a r enquanto ponto é em relação a $ct = x^0$. A próxima etapa é determinar as componentes não nulas do tensor de Ricci que é dado pela eq.(1.20), e elas são:

$$R_{00} = \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} \right) e^{\nu-\lambda} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{(\dot{\lambda})^2}{4}$$

$$R_{11} = \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{(\dot{\lambda})^2}{4} \right) e^{\lambda-\nu} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4}$$

$$R_{22} = 1 + \left[(\lambda' - \nu')\frac{r}{2} - 1 \right] e^{-\lambda}$$

$$R_{33} = sen^2\theta\ R_{22}$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}$$

a curvatura escalar dá:

$$R = -\frac{2}{r^2} + \left[2\frac{(\nu' - \lambda')}{r} + \frac{2}{r^2} + \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}\right] e^{-\lambda} + \left[\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} - \ddot{\lambda} - \frac{(\dot{\lambda})^2}{2}\right] e^{-\nu}$$

As equações de Einstein portanto são:

$$G_{00} = \frac{e^{\nu}}{r^2} + \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right] e^{\nu-\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \tag{2.4}$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} \tag{2.5}$$

$$G_{22} = \left[(\nu' - \lambda')\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\left(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}\right)\right] e^{-\lambda} + \frac{r^2}{2}\left[\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} - \ddot{\lambda} - \frac{(\dot{\lambda})^2}{2}\right] e^{-\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} \tag{2.6}$$

$$G_{33} = sen^2\theta G_{22} \tag{2.7}$$

$$G_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{01} \tag{2.8}$$

O passo agora é resolver estas equações diferencias não lineares, ou seja, determinar as funções $\lambda(r,t)$ e $\nu(r,t)$. Se levantarmos o índice da eq.(2.4) conseguiremos resolvê-la mais facilmente, temos:

$$G_0^0 = \frac{1}{r^2} + \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right] e^{-\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0$$

multiplicando ambos os lados por $-r^2$ teremos:

$$(1 - \lambda' r)e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} r^2 T_0^0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(re^{-\lambda}) = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 r^2$$

$$re^{-\lambda}\Big|_0^r = \int_0^r \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 r^2\right) dr$$

Então temos:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4 r}\int\limits_0^r T_0^0 r^2 dr + \frac{F(t)}{r}$$

Logo a solução geral para λ é:

$$\lambda(r,t) = -ln\left[1 - \frac{8\pi G}{c^4 r}\int\limits_0^r T_0^0 r^2 dr\right] \tag{2.9}$$

Porém a solução geral das equações de Einstein para esse nosso caso particular de simetria esférica é relativamente complicada e portanto faremos aqui uma simplificação das equações, tratando de um caso particular importante, a solução no vácuo, ou seja, ($r > R_c$ *onde* $T_{ij} = 0$) onde R_c é o raio da superfície do corpo esférico. Trabalhar com as equações com os índices levantados é mais conveniente pois facilita a resolução de nossas equações, desta forma temos:

$$\frac{1}{r^2} + \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right]e^{-\lambda} = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{r^2} - \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right]e^{-\lambda} = 0 \tag{2.11}$$

$$\left[\frac{(\nu' - \lambda')}{2r} + \frac{1}{2}\left(\nu'' + (\nu')^2 - \frac{\lambda'\nu'}{2}\right)\right]e^{-\lambda} + \left[\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{(\dot{\lambda})^2}{4}\right]e^{-\nu} = 0 \tag{2.12}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \tag{2.13}$$

A eq.(2.13) implica que para soluções no vácuo λ não é função da coordenada temporal (t), deste modo vamos reescrever a eq.(2.9) da seguinte maneira:

$$\lambda(r) = -ln\left[1 + \frac{K}{r}\right] \tag{2.14}$$

para $r > R_c$, onde K é uma constante dada por:

$$K = -\frac{8\pi G}{c^4}\int\limits_0^{r_s} T_0^0 r^2 dr \tag{2.15}$$

subtraindo as equações (2.10) e (2.11) temos:

$$(\lambda' + \nu')\frac{e^{-\lambda}}{r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda' + \nu' = 0$$

ou seja:

$$\lambda + \nu = f(t)$$

Já vimos que λ é independente do tempo, logo a função f=f(t) pode ser absorvida no elemento de intervalo por definindo uma nova coordenada temporal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{\nu} c^2 dt^2 &= e^{f(t)-\lambda(r)} c^2 dt^2 \\ &= e^{-\lambda(r)} c^2 d\tau^2 \end{aligned}$$

onde:

$$d\tau = e^{\frac{f(t)}{2}} dt$$

Desta forma sempre podemos por uma apropriada escolha do nosso sistema de coordenadas tornar a métrica independente do tempo. Assim concluimos que o campo gravitacional no vácuo de uma distribuição esfericamente simétrica é estática. Portanto sem perda de generalidade podemos considerar $f(t) = 0$ e assim $\nu(r) = -\lambda(r)$, nossa solução fica:

$$ds^2 = e^{-\lambda(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + sen^2\theta \; d\varphi^2) \tag{2.16}$$

Para obtermos a constante K partiremos da Lagrangiana para uma partícula em um campo gravitacional fraco, ou seja, no limite newtoniano. Esta Lagrangiana deve ser escrita tal que na ausência de campo ela seja obtida do limite da expressão da lagrangiana relativística de uma partícula livre, como desenvolvido em mais detalhes na seção(3.2) logo temos:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi_{new}$$

onde ϕ_{new} é o potencial gravitacional Newtoniano. Como mostrado na seção(3.2) o elemento de intervalo no limite não-relativístico fica:

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi_{new}) dt^2 - (d\vec{r})^2$$

logo no caso limite de campos fracos a componente g_{00} da métrica é:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi_{new}}{c^2} \tag{2.17}$$

Fazendo portanto uso da eq.(2.14) e substituindo na eq.(2.16), poderemos comparar com a eq.(2.17) e encontraremos:

$$K = -\frac{2GM}{c^2} = -r_g \tag{2.18}$$

r_g é denominado raio gravitacional ou de Schwarzschild, comparando as equações (2.15) e (2.18) obtemos a massa de uma distribuição esfericamente simétrica estática em termos de seu tensor momento-energia:

$$M = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^{r_s} T_0^0 r^2 dr \tag{2.19}$$

Assim a requerida solução das equações de Einstein podem ser expressadas:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} \;\; ; \;\; g_{11} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \;\; ; \;\; g_{22} = -r^2 \;\; ; \;\; g_{33} = -r^2 sen^2\theta \tag{2.20}$$

Na próxima seção faremos um estudo detalhado deste campo gravitacional, mas antes citaremos algumas propriedades desta métrica. Primeiro vemos que ela descreve o campo gravitacional de um corpo esférico pontual localizado na origem de nosso sistema de coordenadas, percebemos também que ela é singular em dois pontos $r = 0 \;\; e \;\; r = r_g$ e que para $r < r_g$ a coordenada temporal passa a ser do tipo-espaço e a radial passa a ser do tipo-tempo. Como vimos na seção(1.7) as propriedades geométricas de um campo estático são dadas por $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$, logo o elemento de distância espacial é:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta \; d\phi^2) \tag{2.21}$$

e a distância radial entre dois pontos é:

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} dr \quad > \quad r_2 - r_1 \tag{2.22}$$

esta relação já nos mostra a propriedade de campos gravitacionais de alterarem a geometria do espaço e o caráter não euclidiano da coordenada radial r. Já vimos na seção(1.7) a relação entre o tempo próprio e a coordenada temporal de um dado ponto de um sistema de referência, e portanto no nosso caso teremos:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} \; dt = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \; dt \tag{2.23}$$

isto nos mostra que o tempo de um relógio em um determinado ponto do espaço, na presença de campo gravitacional, passa mais lentamente do que um localizado na infinitude, ou seja, fora do campo. Além disso para um observador distante o tempo próprio de um relógio localizado em $r = r_g$ não passa $d\tau = 0$ e portante esta região parece congelada para o observador distante.

2.2 Buraco Negro de Schwarzschild

Vamos aqui fazer um estudo mais detalhado da solução de Schwarzschild, extraindo mais informação a respeito da região $r = r_g$. Poderíamos nos perguntar: o que acontece a um corpo quando passa por essa região?

Como vimos a solução de Schwarzschild possui singularidades em $r = 0$ e $r = r_g$, isto nos leva a questionarmos se são singularidades do espaço-tempo ou simplesmente a incapacidade dessas coordenadas de descrever todo espaço, ou seja, uma singularidade de coordenada.

Para melhor entendermos o campo de Schwarschild vamos primeiro analisar as trajetórias no espaço-tempo de fótons livres, já que são elas que determinam os cones de luz. Por simplicidade vamos considerar movimento puramente radial $\theta = const.$; $\phi = const.$ e $c = 1$, partiremos portanto do elemento de intervalo:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta \; d\phi^2) \tag{2.24}$$

para nossas considerações temos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

e assim:

$$dt = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr \; = \; \pm \; \frac{r}{r - r_g} \; dr \tag{2.25}$$

Consideremos primeiro o sinal (+), para integrar a equação acima basta fazer a mudança de variável $u = r - r_g$ e o resultado é facilmente obtido:

$$t = r + r_g \ln |r - r_g| + c_0 \tag{2.26}$$

observemos que:

$$para \quad r > r_g \quad ; \quad \frac{dt}{dr} > 0$$

$$e \quad r < r_g \quad ; \quad \frac{dt}{dr} < 0$$

já para o sinal menos temos:

$$t = -r - r_g \ln |r - r_g| - c_0 \tag{2.27}$$

e a análise dá:

$$para \quad r > r_g \quad ; \quad \frac{dt}{dr} < 0$$

$$e \quad r < r_g \quad ; \quad \frac{dt}{dr} > 0$$

Analisando estas soluções podemos observar que na região $r < r_g$ os cones de luz locais são deitados pois nesta região as coordenadas temporal e a radial trocam suas propriedades, a primeira passa a ser do tipo-espaço enquanto a segunda do tipo-tempo, e como as linhas de universo de uma partícula segue uma seta do tempo, os cones devem conter as linhas temporais $t = const.$ e não conter as linhas espaciais $r = const.$. Outra observação é que para um observador distante sinais enviados de $r = r_g$ leva um intervalo de tempo infinito para alcançá-lo, que como já dissemos na seção anterior esta região portanto parece congelada para ele.

Estas propriedades já haviam sido descritas anteriormente e portanto não são novidades, a novidade para nós é que as duas regiões estão desconectadas, ou seja, existe uma singularidade em $r = r_g$ tal que as coordenadas de Schwarzschild descreve $r < r_g$ *e* $r > r_g$ de forma independente, ou seja, não há curvas geodésicas conectando as duas regiões. Logo essas coordenadas são incapazes de descrever, por exemplo, um processo de colapso gravitacional.

Notamos que calculando-se o invariante de curvatura para esse espaço-tempo, obtemos:

$$I = R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{12r_s^2}{r^6} \tag{2.28}$$

isto nos mostra que a única singularidade física existente é $r = 0$ e portanto a singularidade que aparece na solução de Schwarzschild em $r = r_g$ é uma singularidade de coordenada, ou seja, é devido a nossa escolha inapropriada das coordenadas.

Afim de analisar o colapso de uma estrela ou a queda de uma partícula além do raio de Schwarzschild, temos que buscar um sistema de coordenadas definido em $0 < r < \infty$.

Uma maneira que podemos investigar o que acontence em tais situações é passar para um sistema de referência atado a partícula ou a superfície da estrela que colapsa. Consideraremos nesta e na próxima seção que a massa da estrela é grande o sufiente para provocar o colapso, e estamos negligenciando a pressão, de modo que ela colapsa livremente. Tentamos assim a seguinte transformação de coordenadas (consideremos $c = 1$):

$$\tau = t + \int \frac{f(r)}{1 - \frac{r_g}{r}}\, dr \qquad R = t + \int \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})f(r)}\, dr \tag{2.29}$$

logo:

$$dt = \frac{1}{f^2 - 1}(f^2 dR - d\tau) \quad dr = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{f}{f^2 - 1}(d\tau - dR) \tag{2.30}$$

substituindo em ds^2 encontramos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{1}{(1 - f^2)} d\tau^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{f^2}{(1 - f^2)} dR^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)$$

Vimos na seção(1.7) que um sistema de referência dado por $g_{00} = 1 \ \ e \ \ g_{0\alpha} = 0$ está em queda livre no dado campo, ou seja, as linhas temporais são geodésicas do espaço-tempo sob consideração. Analisando a expressão acima somos levados a escolher $f^2(r) = \frac{r_g}{r}$, assim temos:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r_g}{r} dR^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{2.31}$$

e da relação diferencial da coordenada (r) dada pela eq.(2.30) temos:

$$dr = \frac{r_g^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (dR - d\tau) \quad \Longrightarrow \quad r = r_g^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{2}(R - \tau)\right]^{\frac{2}{3}} \tag{2.32}$$

portanto:

$$ds^2 = d\tau^2 - \left[\frac{r_g}{\frac{3}{2}(R - \tau)}\right]^{\frac{2}{3}} dR^2 - r_g^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{2}(R - \tau)\right]^{\frac{4}{3}} (d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{2.33}$$

Esta métrica como podemos ver não é singular em $r = r_g$ mas somente em $r = 0$, mostrando assim que não há qualquer propriedade especial nesta região que impeça qualquer partícula de cruzá-la. Assim vemos que devemos esperar que seu relógio irá marcar um intervalo de tempo finito para alcançar $r = r_g$, mas será que isto realmente ocorre? E para atingir $r = 0$? Para responder estas questões temos que analisar o movimento de partículas em repouso relativo a este sistema, assim teremos:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{2.34}$$

buscamos assim uma forma de eliminar a coordenada (t) desta relação para obtermos $r = r(\tau)$, recorremos a equação de movimento para o caso das coordenadas de Schwarzschild em busca de uma relação que torne isto possível:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj} u^k u^j = 0$$

para $i = 0 \ \ e \ \ ds = d\tau$, temos:

$$\frac{d^2(t)}{d\tau^2} \ + \ \Gamma^0_{11} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \ + \ \Gamma^0_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \ + \ 2\ \Gamma^0_{01} \ \frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0$$

substituindo os gamas obtemos:

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{t}) + \frac{r_g}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}\dot{t} = 0$$

$$\frac{1}{\dot{t}}\ d(\dot{t}) = -\frac{r_g}{r(r - r_g)}\ dr = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r - r_g}\right)\ dr$$

logo:

$$\frac{dt}{d\tau} = a\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

consideremos $a = 1$ de forma que (t) e (τ) coincidam no infinito, ou seja, o tempo próprio no infinito é a coordenada temporal. Voltando a eq.(2.34) e substituindo a relação acima teremos:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(\dot{t})^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2 \end{aligned}$$

implicando em:

$$r^{\frac{1}{2}}dr = \pm\ r_g^{\frac{1}{2}}d\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \pm\ \frac{2}{3r_g^{\frac{1}{2}}}\ [r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}] \tag{2.35}$$

As condições iniciais são $r(0) = r_0$ e como vamos considerar o movimento de queda $r_0 > r$, tomamos portanto o sinal negativo para a descrição do movimento:

$$\tau = \frac{2}{3r_g^{\frac{1}{2}}}\ [r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}] \tag{2.36}$$

Com este resultado vemos claramente que não só o tempo próprio é finito para se cruzar $r = r_g$ mas também para alcançar a singularidade $r = 0$ e assim vemos que realmente r_g é uma singularidade de coordenada como já havíamos visto da análise da métrica.

Agora nos perguntamos, já que uma partícula pode realmente cruzar o raio de Schwarschild no sentido de fora para para dentro será que é possível ela fazer o caminho inverso? Para isso vamos determinar o comportamento de (τ) em função de (R). Observamos da eq.(2.32) que para cada r constante temos:

$$\tau = R + c_0 \tag{2.37}$$

ou seja, retas com inclinação $(\frac{d\tau}{dR} = 1)$. Da eq.(2.31), para sinais luminosos em movimento radial, temos:

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}} \tag{2.38}$$

Para $r > r_g$ temos $|\frac{d\tau}{dR}| < 1$ e portanto as retas $r = const.$ ficam dentro do cone de luz local deste ponto. Em $r = r_g$ a inclinação é ± 1 e uma das geratrizes do cone de luz coincide com a reta $r = r_g$ e a outra fica direcionada para dentro desta região. Finalmente para $r < r_g$ temos $|\frac{d\tau}{dR}| > 1$ e as retas $r = conts.$ ficam do lado de fora do cone de luz local.

Agora podemos determinar as propriedades essenciais do movimento em um campo gravitacional esfericamente simétrico do ponto de vista de um observador em queda livre neste campo. Claramente vemos da eq.(2.36) que a estrela cruza o raio de Schwarzschild e chega na singularidade em um intervalo de tempo próprio finito, dado pela linha temporal $R = R_0$. No interior do raio de Schwarzschild as linhas $r = const.$ são do tipo-espaço, ou seja, não estão dentro do cone de luz local e portanto nesta região não é possível que partículas fiquem em repouso, os cones de luz vão se fechando de forma a orienta-lás à caírem para a singularidade.

Além disso vemos que um fóton no raio de Schwarzschild permanecerá aí e uma partícula nesta região não tem opção de voltar, ela só pode seguir para dentro, e portanto a comunicação entre as regiões interior e exterior são vedadas e assim denomina-se esta região $r = r_g$ de horizonte de eventos. A solução de Schwarzschild permanece válida para regiões exteriores a corpos esféricos não rotacionando e não carregados de tamanho finito, assim se por algum processo este corpo colapsa para um raio menor do que o de Schwarzschild dizemos que se formou um buraco negro.

Da discussão acima vemos que as coordenadas de Schwarzschild descrevem as propriedades essenciais do movimento em um campo com simetria esférica, porém estas coordenadas não conectam as duas regiões do espaço-tempo, como já havíamos notado, faz uma descrição delas de forma independente e assim temos que restringi-lá somente para $r > r_g$, pois uma condição imposta por nós como um ponto de partida para a obtenção da solução de Schwarzschild é que as funções $\lambda(r,t)$ e $\nu(r,t)$ fossem a zero na infinitude, sendo assim esta solução é definida exteriormente ao horizonte de eventos.

Um sistema de coordenadas que conecta as duas regiões, ou seja, faz uma descrição única, foi obtida por Eddington e Finkelstein e por isso leva os seus nomes. A maneira pela qual eles encontraram essas coordenadas é a seguinte: pegamos as geodésicas nulas que vão ao infinito em $r = r_g$, ou seja, a eq.(2.27) e fazemos uma transformação de coordenadas de forma a linearizá-las, assim:

$$t' = t + r_g \ln|r - r_g| \tag{2.39}$$

então a nova equação de geodésica nula que substituirá a eq.(2.26) será:

$$t' = r + 2r_g \ln|r - r_g| + K_0 \tag{2.40}$$

tal que:

$$para \quad r > r_g \quad ; \quad \frac{dt'}{dr} > 0$$

$$e \quad r < r_g \quad ; \quad \frac{dt'}{dr} < 0$$

e para a eq.(2.27) temos:

$$t' = -r - K_0 \tag{2.41}$$

tal que:

$$para \quad r > r_g \quad ; \quad \frac{dt'}{dr} < 0$$

$$e \quad r < r_g \quad ; \quad \frac{dt'}{dr} < 0$$

a forma diferencial da eq.(2.39) é:

$$dt' = dt + \frac{r_g}{r - r_g} dr$$

que substituindo no elemento de intervalo de Schwarzschild dá:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dt')^2 - \frac{2r_g}{r}\, dt'dr - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2) \tag{2.42}$$

que como queríamos não é singular no raio de Schwarzschild e descreve o intervalo $0 < r < \infty$ de forma única. Assim temos boas coordenadas que descreve nossa solução no vácuo esfericamente simétrica, as propriedades essenciais se mantém evidentemente, as partículas cruzam o horizonte de eventos e chegam na singularidade em um intervalo de tempo (t') finito, apesar que para um observador distante ela leve um tempo infinito para se aproximar do horizonte.

Dentro do horizonte a coordenada temporal de Eddington-Finkelstein passa a ser do tipo-espaço, desta forma poderiam existir linhas de universo correndo os dois sentidos desta coordenada, porém a coordenada radial como vimos só pode decrescer. Assim para que existam intervalos do tipo-tempo, a temporal só pode crescer para que o segundo termo da direita da eq.(2.42) seja positivo, vemos portanto que abaixo do horizonte estas duas coordenadas possuem um vínculo.

2.3 Colapso descrito por métrica interior

Na seção anterior fizemos uma análise da passagem pelo horizonte de eventos de uma partícula na métrica de Schwarzschild. Vimos que ela atravessa o horizonte em único sentido e que o tempo-próprio para tal é finito, mas para um observador distante ela nunca atravessa.

Seria interessante modelar da forma mais realística possível uma estrela, e assim resolver as equações de Einstein para seu interior. Desta forma teríamos informações importantes à respeito da sua dinâmica, como por exemplo, sob quais condições ela viria a colapsar e de que maneira isto ocorre, assim saberíamos se possivelmente ela tornariasse um buraco negro.

Devido à natureza não linear das equações de Einstein isto evidentemente não é fácil. Lembramos que, de um modo geral, a ciência é construída propondo modelos mais simples objetivando uma descrição mais real possível da natureza. Assim algumas soluções exatas, de problemas de simetria esférica para fluido perfeito estático, foram encontradas ref.[7][8].

Contudo, ainda não existem soluções exatas no caso de um fluido não-estático sem negligenciar a pressão interna, ou seja, não sabemos exatamente como é a estrutura dinâmica de uma estrela colapsando. Robert Oppenheimer (1904-1967) juntamente com seus alunos George Volkoff (1914-2000) e Hartland Snyder (1913-1962) foram os pioneiros no estudo do colapso gravitacional de estrelas, ref.[9][10].

Vamos nesta seção, por motivo de exemplificação, resolver as equações de Einstein para o interior de uma distribuição contínua de matéria, esfericamente simétrica e desprezaremos a pressão, seguindo [1],[9]. Evidentemente tal simplificação em situações realísticas só se empregam em baixíssimas densidades, a qual não é o nosso caso, pois gostaríamos de ter uma noção de como se dá o processo de colapso de estrelas.

Assim o que nos motiva a estudar tais soluções é buscar algumas propriedades que podem ser reflexos de uma solução mais geral, e é claro, se tal solução é de se esperar de uma razoável teoria.

Iniciamos assim a partir do elemento de intervalo para uma distribuição esfericamente simétrica de matéria:

$$ds^2 = c^2 e^\nu d\tau^2 - e^\lambda dR^2 - e^\mu (d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{2.43}$$

onde escrevemos os coeficientes A, B e C da eq.(2.1) em forma exponencial tal que ν, λ e μ são funções de (R,τ). Para resolver as equações de Einstein vamos adotar um sistema de referência comovente com a matéria, e como estamos desprezando a pressão, este sistema está em queda livre no campo e portanto, da seção (1.7), temos que $\nu(R,\tau) = 0$. Além disso podemos escolher

$e^{\frac{\mu}{2}}$ como o raio de uma circunferência centrada na origem (centro do campo) no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, assim podemos escreve-la em uma forma mais conveniente:

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(R,\tau)} dR^2 - r^2(R,\tau)(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{2.44}$$

adotamos $c = 1$. Em um sistema de referência arbitrário o tensor momento-energia de um fluido perfeito, ou seja, não há pressões de cisalhamento somente pressão hidrostática, é dado por:

$$T^{ik} = (\varepsilon - p)u^i u^k + pg^{ik} \tag{2.45}$$

onde ε e p são as densidades de energia e pressão macroscópicas em coordenadas próprias do fluido, respectivamente. E u^i é a quadri-velocidade do fluido. Para um sistema de referência comovente com um dado elemento de volume do fluido este tensor toma a seguinte forma:

$$T_{00} = \varepsilon \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p \tag{2.46}$$

pois neste caso $u^i = (1, 0, 0, 0)$ e a métrica torna se plana pelo princípio de equivalência. As requeridas equações de campo, para o caso $p = 0$, então são:

$$-e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0 \tag{2.47}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0 \tag{2.48}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\varepsilon \tag{2.49}$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda} r' = 0 \tag{2.50}$$

Resolvendo a última equação temos:

$$2\,\frac{\partial r'}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\, r' \quad \Longrightarrow \quad (r')^2 = \frac{e^{\lambda}}{a(R)} = [1 + f(R)]\; e^{\lambda} \tag{2.51}$$

onde escolhemos por conveniência $\frac{1}{a(R)} = 1 + f(R)$, substituindo na primeira equação teremos:

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f(R) = 0 \tag{2.52}$$

multiplicando esta equação por $\dot{r}$ podemos integra-lá :

$$\frac{\partial(r\dot{r})}{\partial\tau} = \dot{r}f(R) \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r} \tag{2.53}$$

$$\tau = \pm\int \frac{1}{\sqrt{f(R) + \frac{F(R)}{r}}}dr \tag{2.54}$$

Considerando $f(R) = 0$ e o sinal negativo para descrever o processo de colapso podemos integrar a equação acima facilmente, para os casos $f(r) > 0$ *e* $f(R) < 0$ damos a solução em forma paramétrica, ref.[1],[6]:

$$r = \left(\frac{9}{4}F\right)^{\frac{1}{3}}[\tau_0(R) - \tau]^{\frac{2}{3}} \qquad , p/f(R) = 0 \tag{2.55}$$

$$r = \frac{F}{2f}(cosh\ \eta - 1) \ \ ; \ \tau_0 - \tau = \frac{F}{2f^{\frac{3}{2}}}(senh\ \eta - \eta) \ \ ; p/f > 0 \tag{2.56}$$

$$r = -\frac{F}{2f}(1 - cosh\ \eta) \ \ ; \ \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{\frac{3}{2}}}(\eta - senh\ \eta) \ \ ; p/f < 0 \tag{2.57}$$

podemos observar que quando o tempo próprio cresce até τ_0 a coordenada radial r vai para zero, ou seja, τ_0 é o tempo para a partícula atingir a singularidade. Utilizando as equações (2.50), (2.51) e (2.53) e substituindo na equação (2.49) teremos:

$$8\pi G\ \varepsilon = \frac{\dot{r}^2 + 1}{r^2} + \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{f'}{rr'} - \frac{1+f}{r^2} \tag{2.58}$$

substituindo $f = \dot{r}^2 - \frac{F}{r}$ e sua derivada em relação a R vamos obter:

$$8\pi G\ \varepsilon = \frac{F'}{r^2 r'} \tag{2.59}$$

Logo a solução das equações de Einstein para o problema do colapso gravitacional em um referencial comovente é dado pelas equações (2.55), (2.56), (2.57) e (2.59), com três funções arbitrárias. Utilizando a equação (2.59) e substituindo na equação (2.19) (que dá a massa de uma distribuição esfericamente simétrica), obtemos:

$$m(R_0) = 4\pi\int_0^{R_0} \frac{F'}{8\pi G}dR = \frac{F(R_0)}{2G} \tag{2.60}$$

pois quando $R = 0$ nós devemos ter $r = 0$ (a origem de ambas coordenadas está no centro de campo) e assim $F(0) = 0$. Logo como podemos ver $F(R)$ é o raio de Schwarzschild de uma esfera de raio R. Vamos agora analisar o comportamento da métrica quando as partículas se aproximam da singularidade $r = 0$. Quando $\tau \longrightarrow \tau_0$ temos que $\sinh\eta - \eta \longrightarrow \frac{\eta^3}{6}$ e $\cosh\eta - 1 \longrightarrow \frac{\eta^2}{2}$, assim temos:

$$r \approx \frac{F}{2f}\,\frac{\eta^2}{2} \qquad \tau_0(R) - \tau \approx \frac{F}{2f^{\frac{3}{2}}}\frac{\eta^3}{6}$$

logo:

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{\frac{1}{3}} [\tau_0(R) - \tau]^{\frac{2}{3}} \tag{2.61}$$

utilizando esta aproximação e substituindo na equação (2.51), encontramos:

$$e^{\lambda} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{{\tau'}_0^2}{(1+f)}\, \frac{1}{(\tau_0 - \tau)^{\frac{2}{3}}} \tag{2.62}$$

e para a densidade de energia temos:

$$8\pi G\,\varepsilon \approx \frac{2}{3}\frac{F'}{F\tau_0'(\tau_0 - \tau)} \tag{2.63}$$

Portanto durante o colapso gravitacional as distânciais angulares vão a zero enquanto as radiais vão a infinitude no sistema comovente, isto pode ser visto como um “afunilamento”da distribuição de matéria quando ela vai se aproximando da singularidade, vemos também que a densidade de energia vai a infinitude neste limite, ou seja, toda a matéria colapsa para um único ponto, a singularidade.

Observamos que isso era de se esperar já que temos desprezado a pressão, porém notamos que o tempo de colapso é finito, de modo que podemos intuitivamente esperar que com o acréscimo de pressão venha somente como um efeito de retardar tal processo. Vamos assim na próxima seção fazer uma análise da estrutura interna de uma estrela anã-branca afim de estimar sob qual condição ela pode vir a colapsar.

2.4 Limite de Chandrasekhar

Após esta análise da métrica durante o processo de colapso em uma métrica de Schwarzschild, livre de pressão, vamos agora buscar determinar sob qual condição uma estrela pode colapsar. Esta questão é muito importante já que a origem de formação dos buracos negros é de processos de colapso gravitacional, principalmente, de estrelas.

Vamos aqui tratar do processo de colapso de uma estrela, na aproximação de que todos os processos termonucleares já ocorreram, ou seja, ela já atingiu o equilíbrio químico. Também vamos desconsiderar a energia térmica frente as outras formas de energia. Sabemos da física do estado sólido, que em altas densidades, a aproximação de gás de elétrons livres em um sólido é razoavelmente boa, este modelo é conhecido como gás Fermi degenerado e frio.

Vamos considerar que exista n_e elétrons livres por nucleon (quantidade de prótons e nêutrons em um átomo) e que há N nucleons numa determinada estrela. A trataremos como um grande corpo sólido, de modo que os elétrons ficam confinados na região delimitada por seus limites. Assim vamos em uma primeira aproximação tratá-los como estando dentro de um poço quântico infinito.

Se elétrons fossem bósons todos iriam sob as condições acima para o estado fundamental do poço, porém o princípio de exclusão de Pauli impede que isto ocorra para férmions. Desta forma cada estado quântico do poço pode ser ocupado por somente dois elétrons, um de spin up e outro de spin down. Como não estamos levando em conta as energias térmicas, não há exitações eletrônicas, e os níveis de energia são preenchidos colocando-se dois elétrons no estado fundamental e assim por diante, em ordem crescente de energia até o último elétron.

Poderíamos imaginar que as simplificações feitas acima não descrevem de modo realístico uma estrela. Porém há uma classe de estrelas, denominadas anãs-brancas que satisfazem com boa aproximação estas condições, ref.[11]-[13].

Para corpos macroscópicos podemos definir no espaço de momento o raio de Fermi, que é o raio da superfície esférica a qual separa estados ocupados dos não-ocupados, temos:

$$k_f = (3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$$

onde $\rho = (N\ n_e)/V$ é a densidade de elétrons livres e V é o volume do corpo, a energia associada com este valor de k é denominada de energia de Fermi, como vemos ela é a energia dos elétrons mais energéticos. O número de estados dentro de uma certa região definida por um determinado valor de k é:

$$dn = \frac{1}{2\pi^2}Vk^2dk$$

e assim a quantidade de energia em uma camada de espessura dk será:

$$dE_t = 2E(k)\frac{1}{2\pi^2}Vk^2dk = E(k)\frac{Vk^2}{\pi^2}dk \tag{2.64}$$

esta expressão portanto nos dá a diferencial da energia total do corpo em termos da energia de um elétron associada ao estado k, para massas grandes e/ou altas densidades os elétrons tornam-se relativísticos e temos que levar este fato em conta, mas vamos inicialmente abordar o caso não-relativístico, então:

$$E(k) = \frac{k^2\hbar^2}{2m_e} \tag{2.65}$$

onde m_e é a massa do elétron, logo a energia devido a efeitos quânticos é:

$$E_t = \frac{\hbar^2}{2m_e\pi^2} V \int_0^{k_f} k^4 dk = \frac{\hbar^2 V}{10\pi^2 m_e} k_f^5 = \frac{\hbar^2(3\pi^2 N n_e)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m_e} V^{-\frac{2}{3}} \tag{2.66}$$

para uma estrela de raio R temos:

$$E_t = \frac{2\hbar^2}{15\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{(N n_e)^{\frac{5}{3}}}{m_e} \frac{1}{R^2} \tag{2.67}$$

Da expressão (2.66) vemos que uma variação de volume dv implica em uma mudança de energia por:

$$dE_t = -\frac{2}{3} E_t \frac{dV}{V} \tag{2.68}$$

para um dV positivo isto dá um trabalho feito sobre o meio externo por $dw = -dE_t = PdV$, logo temos:

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_t}{V} \tag{2.69}$$

Um modo que temos para entender a natureza desta pressão é analisarmos o que ocorre quando a densidade aumenta. Claramente, isto significa que se fixarmos nossa atenção há uma região fixa da estrela temos grande probabilidade de encontrarmos um ou vários elétrons aí, dependendo da densidade e do volume da região. Vamos supor que há alta densidade e os elétrons possuem velocidades relativísticas. Assim a incerteza no momento de um elétron pode ser estimada como da ordem de:

$$\Delta p = mc$$

e assim o princípio de incerteza dá:

$$\Delta x \ mc \geq \frac{\hbar}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad \Delta x \geq \frac{\lambda_c}{4\pi} \tag{2.70}$$

implicando que a incerteza mínima na posição do elétron é proporcional ao comprimento de onda Compton do elétron λ_c , o mesmo vale para as outras dimensões. Logo com o compactamento da matéria cada elétron ocupa um cubinho com lados dados acima devido ao princípio de exclusão de Pauli. Conforme o colapso procede os elétrons então tendem a afastar um dos outros dando origem a esta pressão, assim vemos que sua natureza é puramente quântica, e é denominada de pressão de degenerecência.

Como esta análise só depende da propriedade fermiônica da partícula o mesmo é válido para os prótons e nêutrons, a massa do elétron é aproximadamente 1860 vezes menor do que a do próton e portanto o comprimento de onda Compton associado ao elétron é 1860 vezes maior, por isso os elétrons tornam-se primeiro degenerados, ou seja, os efeitos quânticos dos elétrons são mais relevantes inicialmente do que a dos prótrons ou nêutrons. Esta é a razão pela qual estamos considerando na primeira fase do processo de colapso os níveis de energia eletrônica somente.

A outra forma de energia deste sistema é a gravitacional, para partícula de massa m sujeita ao campo de Schwarzschild podemos associar a ela uma energia potencial dado por:

$$U = mc^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.71}$$

para os casos em que $r >> r_g$ a aproximação newtoniana é muito boa e assim redefinindo o valor de $U(\infty)$ temos a expressão newtoniana:

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{2.72}$$

Fazendo uso desta aproximação podemos facilmente calcular a energia potencial armazenada em um corpo esférico de raio R e massa M de densidade constante, teremos:

$$U(R) = -\frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R} \tag{2.73}$$

assim a energia total para a estrela fria em função de seu raio é:

$$E(R) = \frac{2\hbar^2}{15\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{(Nn_e)^{\frac{5}{3}}}{m_e}\frac{1}{R^2} - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{2.74}$$

esta função possui um mínimo, obtemos assim que o raio para o qual a energia total da estrela é um mínimo é:

$$R_{min} \approx \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{Gm_eM^2}(Nn_e)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2M^{-\frac{1}{3}}}{Gm_e}\left(\frac{n_e}{m_p}\right)^{\frac{5}{3}} \tag{2.75}$$

onde fizemos uso da aproximação $M \approx Nm_p$ para eliminar N. Portanto vemos da relação acima que para estrelas frias com massas não muito grandes o colapso é evitado, o raio para o qual ela se estabiliza é inversamente proporcional a raíz cúbica da massa estelar. Assim temos que a estrela é suportada pela pressão de degenerescência dos elétrons, estrelas que finalizam em um tal estado são, como dissemos, denominadas de anãs-brancas. Mas esta aproximação é ruim para massas da ordem da do sol, por exemplo, para uma estrela com massa igual a do sol temos:

$$R_{min} \approx 7 \times 10^6 \ m$$

onde os dados utilizados foram:

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \ J.s \quad ; \quad M = 2 \times 10^{30} \ Kg \quad ; \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \ \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \ Kg \quad ; \quad m_e = 9.11 \times 10^{-31} \ Kg \quad ; \quad n_e = \frac{1}{2}$$

logo vemos que a aproximação newtoniana ainda é muito boa, mas a energia de fermi é:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{9\pi^2 M n_e}{4\pi \ m_p \ R_{min}^3} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 3.2 \times 10^{-14} \ J \approx 2 \times 10^5 ev$$

esta energia já é da ordem da energia de repouso do elétron $E_0 = 0.51 Mev$ e a condição em que o tratamento não-relativística se aplica $\frac{mv^2}{2} << mc^2$ não é satisfeita. Neste caso temos que fazer a abordagem relativística dos elétrons de forma que a energia é dada por:

$$E = \frac{p \ c^2}{v} \tag{2.76}$$

onde v é a velocidade da partícula, no caso ultra-relativístico temos:

$$E \approx p \ c = k\hbar c \tag{2.77}$$

portanto fazendo a substituição desta expressão na eq. (3.2) e integrando teremos:

$$E = \frac{c\hbar V}{\pi^2} \int_0^{k_f} k^3 \ dk = \frac{c\hbar V k_f^4}{4\pi^2} \tag{2.78}$$

em termos de N, n_e e R isto fica:

$$E = \frac{c\hbar}{3\pi} \left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{R} \tag{2.79}$$

assim a energia total dá:

$$E = \frac{c\hbar}{3\pi} \left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{R} - \frac{GM^2}{R} = \frac{\sigma - \beta}{R} \tag{2.80}$$

onde:

$$\sigma = \frac{c\hbar}{3\pi} \left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p} \right)^{\frac{4}{3}} \qquad \beta = \frac{3GM^2}{5}$$

neste caso vemos que não há um valor de R para o qual a energia é um mínimo, temos portanto que analisar as condições $\sigma = \beta, \sigma > \beta \ e \ \sigma < \beta$. Claramente a única condição sob a qual o sistema pode atingir um estado de equilíbrio é a primeira, ou seja:

$$\frac{c\hbar}{3\pi} \left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3GM^2}{5}$$

isto implica que:

$$M_c \approx \left(\frac{9\pi n_e}{4m_p}\right)^2 \left(\frac{5c\hbar}{9\pi G}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.81}$$

onde denotamos M por M_c. Utilizando os valores destas constantes encontramos que M_c é aproximadamente 1.6 M_s (M_s massa solar). A segunda e a terceira condições são equivalentes respectivamente com $M < M_c$ e $M > M_c$, elas implicam em energias positiva e negativa. Assim quando $M < M_c$ a pressão de degenerescência é maior do que a gravitacional e portanto a estrela se expande até os elétrons tornarem-se não-relativísticos (a energia de Fermi cai com R^2), e a estrela finaliza-se assim em uma anã-branca, ou seja, sustentada pela pressão de degenerescência dos elétrons. Já quando $M > M_c$ ela colapsa sob o efeito de seu peso gravitacional de forma que a pressão de degenerescência não suporta a estrela.

Portanto vemos que M_c é uma massa crítica acima da qual a estrela irá colapsar, e possivelmente colapsar a uma estrela de nêutrons. Este processo foi estudado em detalhes por Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995), de modo que M_c é denominado de Limite de Chandrasekhar. O valor por ele obtido é de aproximadamente 1.44 M_s, ref.[14][2], levando-se em conta a equação de Lane-Emden, que modela a estrutura de um sistema termodinâmico com uma equação de estado mais realística.

Capítulo 3

Ação de Einstein-Hilbert Modificada

3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, a teoria gravitacional Newtoniana foi generalizada pela Teoria da Relatividade Geral. Esta, além de explicar de forma consistente os fenômenos gravitacionais até então explicados pelo teoria de Newton, faz novas previsões. Algumas dessas previsões foram testadas e verificadas com sucesso, por exemplo:

• a trajetória curva da luz em um campo gravitacional, observada a partir de um eclipse solar, comprovando a natureza geométrica da gravidade.

• a incompatibilidade entre a previsão Newtoniana e os dados observacionais do movimento de precessão de Mercúrio, foi explicado com a Relatividade Geral.

• o desvio para o vermelho da luz em um campo gravitacional, foi verificado em uma experiência realizada na torre do Laboratório Jefferson na Universidade de Harvard, pelos físicos R.Pound e G.Rebka.

• o tempo passa mais lentamente em um campo gravitacional, comprovado em uma experiência utilizando relógios atômicos, tal que um estava a bordo de um avião e o outro no laboratório.

Estas são algumas das fortes evidências a favor da teoria de Einstein. Porém há previsões que ainda não foram comprovadas, tal como a busca as ondas gravitacionais. Contudo o resultado mais intrigante e interessante seja, como vimos no capítulo dois, os buracos negros. A existência de tais corpos, desde de sua previsão até os dias atuais, geram grandes debates.

O próprio Einstein acreditava que eles nunca viriam a se formar, de modo que prôpos um modelo de estrela estável, em que o colapso a um buraco negro não ocorreria. Hoje há algumas propostas neste sentido, tal que uma teoria modificada da gravitação ref.[15] ou a incorporação da mecânica quântica a gravidade [16] poderia evitar a formação de buracos negros.

Mas há uma grande esperança de que Buracos Negros possam realmente existir. Evidências diretas não existem, entretanto observações astronômicas apontam a sua existência de forma indireta, tal como:

• efeitos de lentes gravitacionais.

• observações do telescópio espacial Chandra aponta a existência de buracos negros supermassivos no centro de algumas galáxias a partir da forte emissão de raios gama.

• a observação de um suposto sistema binário entre uma estrela e um buraco negro, onde se observa a transferência de matéria da estrela para o suposto buraco negro, por exemplo, Cygnus X-1.

Apesar destes resultados corroborarem a favor da Relatividade Geral, há também observações sem respostas, tal como:

• as curvas de rotação de galáxias.

• a Anomalia Pioneers.

• expansão acelerada do universo.

Estas questões põem em xeque a teoria de Einstein como uma teoria final para gravitação. Porém não só isso, hoje há uma intensa busca por uma teoria quântica da gravitação. Esta teoria como o próprio nome já diz, viria conciliar a Mecânica Quântica com a Relatividade Geral em uma única teoria, tal como a Eletrodinâmica Quântica(QED) faz com o eletromagnetismo, que possivelmente viria a responder tais questões.

Assim motivado pelo sucesso da QED em suas previsões, alguns modelos surgiram em tal direção, apesar das dificuldades tanto matemáticas quanto conceituais, e a falta de resultados que possam ser verificadas.

Uma outra alternativa à Gravitação Quântica é a chamada Teoria de Cordas. Ela fundamentalmente substitui o conceito de partícula pontual por um objeto unidimensional (corda), tal que diferentes modos de vibração estariam relacionados à diferentes partículas. Esta proposta não só daria uma descrição quântica para a gravidade como também unificaria todas as quatro interações fundamentais da natureza.

De outro lado há as chamadas Teorias da Gravitação Modificada. Estas são teorias clássicas que buscam uma generalização da Relatividade Geral a partir de quantidades invariantes construídas com os tensores de Riemann, Ricci e Weyl. Também se encaixam nesta classificação propostas menos fundamentais, como MOND.

Enquanto não se conhece a verdadeira natureza da gravitação, uma alternativa é generalizar de forma consistente os resultados já bem estabelecidos da física. E hoje conhece-se um modo, aparentemente natural, de se conciliar a Mecânica Quântica com a Relatividade Especial, é a denominada Teoria Quântica de Campos (QFT), que tem mostrado consistência com a experiência, por exemplo, a Eletrodinâmica Quântica.

QFT é uma teoria de campos quantizados definidos em um espaço-tempo de Minkowski, de modo que ela não inclui a gravitação. Um modo de introduzir a gravitação é definir estes campos em um espaço-tempo curvo, este procedimento é conhecido como Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo.

Notamos que ela não é uma teoria quântica para a gravidade, mas pode ser vista como uma primeira aproximação em tal direção, já que a gravidade é uma deformação do espaço-tempo de Minkowski. Assim provavelmente a teoria quântica no espaço curvo é um limite clássico, no sentido de grandes escalas, da Gravitação Quântica.

Fizemos esta breve introdução a atual situação das linhas pesquisas em gravitação para motivar nosso trabalho. Neste capítulo buscaremos limites de uma teoria da gravidade com correções quânticas, que pode ser obtida a partir das equações do grupo de renormalização [17][18].

3.2 Transformação Conforme

Como dissemos, neste capítulo vamos considerar os limites de uma teoria da gravidade, com correções quânticas, a partir da dinâmica do sistema Solar e colapso das anãs-brancas. Tal teoria gravitacional difere da Relatividade Geral apenas por ter a constante gravitacional Newtoniana variando.

Esta dependência é através do potencial Newtoniano. Tal correção surge devido à técnica de extrair correções quânticas a partir das equações do grupo de renormalização ref.[17] [18].

Não iremos aqui mostrar tal resultado, iremos simplesmente assumir seu resultado, ou seja, a eq.(3.1). Nesta abordagem a ação de Einstein-Hilbert toma a seguinte forma:

$$S = \frac{c^4}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{R}{G} \quad , \tag{3.1}$$

aqui G é dado por:

$$G = \frac{G_0}{1+\nu\alpha\ln\left(\frac{\phi_{new}^2}{\phi_0^2}\right)} \quad , \tag{3.2}$$

os parâmetros α e ν é devido a correções quânticas. Já que estes parâmetros aparecem sempre como produtos iremos por motivo de simplicidade definir $\alpha\nu \doteq \nu$. ϕ_{new} é o potencial Newtoniano e G_0 é o valor de G quando o potencial Newtoniano vale ϕ_0. Vamos aqui tratar do caso em que ν é muito pequeno, de modo que possamos expandir G em potência em ν. Em primeira ordem temos:

$$G = G_0\ (1 - \epsilon) \quad , \tag{3.3}$$

ϵ é dado por: $\epsilon = 2\nu \ln\left(\frac{\phi_{new}}{\phi_0}\right)$, onde $|\epsilon| << 1$.Buscaremos uma transformação conforme que transforme a ação(3.1) na ação de Einstein-Hilbert mais termos de ordem superior em ϵ, de modo a podermos desprezar tais termos, ou seja:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}}\ \bar{R} + O^2(\epsilon) \quad , \tag{3.4}$$

lembramos que transformações conformes não são transformações de coordenadas, mas sim uma regra de parametrizar a métrica em termos de uma nova métrica e uma função escalar $\sigma(x)$, veja ref. [19] para uma discursão detalhada. Sob transformação conforme a métrica se transforma de acordo com:

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) e^{2\sigma(x)} \quad , \tag{3.5}$$

as leis de transformações para o determinante métrico e para o escalar de Ricci a partir de (3.5) são facilmente obtidas:

$$g = \bar{g} e^{2D\sigma} \quad , \tag{3.6}$$

$$R = e^{-2\sigma}[\bar{R} - 2(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma) - (D-1)(D-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2] \quad , \tag{3.7}$$

aqui D é a dimensão do espaço e $\bar{\nabla}$ é a derivada covariante na métrica fictícia $\bar{g}_{\mu\nu}$. Para o caso em que $D = 4$, temos:

$$g = \bar{g} e^{8\sigma} \quad , \quad R = e^{-2\sigma}[\bar{R} - 6(\bar{\nabla}^2\sigma) - 6(\bar{\nabla}\sigma)^2] \quad . \tag{3.8}$$

Substituindo estes termos na ação (3.1), teremos para a ação modificada:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}}\ \ \frac{e^{2\sigma}\bar{R}}{1-\epsilon} \ - \ \frac{6c^4}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}}\ \frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}^2\sigma}{1-\epsilon} \ - \ \frac{6c^4}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \frac{e^{2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2}}{1-\epsilon} \tag{3.9}$$

sabemos que:

$$\frac{e^{2\sigma}}{1-\epsilon}\ \bar{\nabla}^2\sigma = \bar{\nabla}\left(\frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}\sigma}{1-\epsilon}\right) - \frac{2e^{2\sigma}}{1-\epsilon}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \frac{e^{2\sigma}}{(1-\epsilon)^2}\bar{\nabla}\sigma\bar{\nabla}\epsilon \tag{3.10}$$

logo temos:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left[\frac{e^{2\sigma}}{1-\epsilon}\left(\bar{R} + 6(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \frac{\bar{\nabla}\sigma\bar{\nabla}\epsilon}{1-\epsilon}\right) - \bar{\nabla}\left(\frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}\sigma}{1-\epsilon}\right)\right] \quad , \tag{3.11}$$

assim vemos que com a identificação:

$$1-\epsilon = e^{2\sigma} \quad , \tag{3.12}$$

obtemos:

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln(1-\epsilon) \quad ; \quad \bar{\nabla}\sigma = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}\epsilon \ , \tag{3.13}$$

portanto a ação assume a seguinte forma em primeira ordem em ϵ:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\bar{R} \tag{3.14}$$

Vemos assim que com a escolha (3.12) para a transformação conforme da métrica obtemos a ação de Einstein-Hilbert na métrica “fictícia”. Portanto nesta métrica nós sabemos resolver exatamente as equações de campo para o caso específico que vamos tratar, ou seja, o caso esfericamente simétrico. Como resultado, os cálculos desenvolvidos na seção (2.1) são válidos para a nossa métrica conforme, de modo que:

$$\bar{g}_{00} = 1 + \frac{2\phi_{new}}{c^2} \tag{3.15}$$

3.3 Novo potencial gravitacional clássico

Vamos aqui obter qual deve ser o elemento de intervalo no limite clássico, ou seja $\frac{v^2}{c^2} << 1$, para uma partícula sob a ação de um potencial escalar ϕ. A Lagrangiana relativística para uma partícula livre é obtida da correspondente ação:

$$S = -\alpha\int ds \quad . \tag{3.16}$$

Para o caso livre de campo o elemento de intervalo assume a forma plana, de modo que ação torna-se:

$$S = -\alpha \int \sqrt{c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2} = -\alpha \int \sqrt{1 - \frac{(\vec{v})^2}{c^2}}\, cdt \tag{3.17}$$

logo a lagrangiana é:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{(\vec{v})^2}{c^2}} \tag{3.18}$$

No limite de $\frac{v^2}{c^2} << 1$, obtemos:

$$L \approx -\alpha c \left[1 - \frac{v^2}{2c^2}\right] \quad , \tag{3.19}$$

por comparando com a Lagrangina clássica para uma partícula livre e desprezando a constante aditiva que não altera as equações de movimento, temos que a constante é $\alpha = mc$, assim provamos que a ação (1.12) é dada por:

$$S = -mc \int ds \quad . \tag{3.20}$$

Como resultado extraímos que a Lagrangiana de uma partícula na presença de um potencial ϕ no limite clássico é:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi \quad , \tag{3.21}$$

de modo que podemos identificar o elemento de intervalo para uma partícula no regime clássico:

$$S = \int L\ dt = -mc \int (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c})dt \quad \Rightarrow \quad ds = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c})dt \tag{3.22}$$

depois de desprezarmos termos de segunda ordem em $\frac{v^2}{c^2}$, obtemos:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 \quad , \tag{3.23}$$

vemos portanto que no regime de campo fraco a métrica é dada por:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad ; \quad g_{ii} = -1 \tag{3.24}$$

aqui ϕ é o potencial ao qual a partícula está submetida. Lembrando que a transformação conforme é:

$$g_{\mu\nu} = (1 - \epsilon)\bar{g}_{\mu\nu} \tag{3.25}$$

entao:

$$g_{00} = (1-\epsilon)\bar{g}_{00} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{2\phi}{c^2} = (1-\epsilon)(1 + \frac{2\phi_{new}}{c^2}) \tag{3.26}$$

ou seja:

$$\phi = \phi_{new} - c^2\nu \ln\left(\frac{\phi_{new}}{\phi_0}\right) \tag{3.27}$$

fizemos acima a substituição $\epsilon = 2\nu \ln\left(\frac{\phi_{new}}{\phi_0}\right)$. Portanto nesta abordagem o potencial gravitacional clássico não é exatamente o potencial Newtoniano, mas é dado pela soma do mesmo com um termo logarítmico proveniente de se tomar a ação como na eq.(3.1). Vamos nas seções subsequentes aplicar este novo potencial à dois casos específicos: a precessão do periélio de Mercúrio e o limite de Chandrasekhar.

3.4 Teste para termo logarítmico no sistema solar

Vamos agora buscar estimar a ordem de grandeza do parâmetro fenomenológico ν no nosso sitema solar. Para tal vamos nos utilizar de um dado bem estabelicido, o valor da precessão do periélio de Mercúrio.

Durante anos não se conseguia uma resposta para o desacordo entre a previsão Newtoniana e os dados observacionais da precessão de Mercúrio, isto levou muitos a conjecturar novos planetas, de modo que tais desvios pudessem ser explicados através dos efeitos gravitacionais perturbativos sobre a órbita de Mercúrio, porém nunca observou-se tais planetas. Vale lembrar aqui que esta hipótese teve muito sucesso na previsão de alguns dos planetas do nosso sistema solar.

Um dos grandes triunfos da teoria da Relatividade Geral foi exatamente a previsão de um acréscimo angular no movimento de um planeta após uma revolução em torno do sol, este acréscimo explicou satisfatoriamente a diferença entre o valor observado e a previsão Newtoniana, o resultado [1] é:

$$\delta\phi = \frac{6\pi G_0 M}{c^2 a(1-e^2)} \tag{3.28}$$

G_0 é a constante gravitacional Newtoniana, M é a massa do corpo que gera o campo central, a é o semieixo maior e e é a ecentricidade da elipse.

Faremos aqui uso do vetor de Laplace-Runge-lenz (LRL), como desenvolvido em ref.[20], afim de determinarmos a velocidade de precessão devido ao novo potencial e assim compararmos com a incerteza dos dados observacionais de Mercúrio, já que este tem a maior precisão nos dados observacionais de precessão.

Uma breve introdução ao vetor LRL e sua utilidade em se determinar velocidades de precessão em problemas perturbativos foi dado no Apêndice-A, este apêndice é um importante complemento desta seção para quem não conhece o vetor LRL. Porém uma discussão mais completa e interessante pode ser encontrado em ref. [21] [22]. Lá encontramos que para uma partícula submetida a força:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} - \vec{f}_{pert} \quad ; \quad |\frac{k}{r^2}| >> |\vec{f}_{pert}| \ , \tag{3.29}$$

a sua órbita precessa com a seguinte velocidade angular:

$$\vec{\Omega} = -\frac{\langle f_{pert}(r)\cos\phi\rangle}{mk\epsilon}\vec{l} \ , \tag{3.30}$$

onde a média é tomada sobre um período, aqui m e $\vec{l}$ são respectivamente a massa e o momento angular da partícula submetida à força (3.29) e ϵ é a excentricidade da órbita não perturbada. A força gravitacional associada ao potencial (3.27) é:

$$\vec{F} = -m\ grad(\phi) = -\frac{G_0 Mm}{r^2}\hat{r} \ - \ \frac{mc^2\nu}{r}\hat{r} \tag{3.31}$$

de onde podemos imediatamente fazer a identificação:

$$\vec{f}_{pert} = -\frac{mc^2\nu}{r}\hat{r} \ . \tag{3.32}$$

Este termo é o desvio da Lei Gravitacional de Newton devido a correções quânticas na Relatividade Geral. A Teoria Gravitacional de Einstein explica de forma satisfatória a mecânica do sistema solar, não há no momento fortes evidências que a coloque em xeque diante dos dados observacionais do mesmo. Há como dissemos na introdução a Anomalia Pioneers, porém este problema só aparece em distâncias acima de 20 UA.

Deste modo não esperamos observar desvios da Gravitação de Einstein na dinâmica do sistema solar, dentro da incerteza dos dados, de modo que estimaremos um limite superior para o parâmetro ν.

Substituindo a eq.(3.32) em (3.30), obtemos a velocidade de precessão para o nosso caso em específico:

$$\vec{\Omega} = \frac{c^2\nu}{k\epsilon}\langle\frac{\cos\varphi}{r}\rangle\vec{l} \ . \tag{3.33}$$

Então tudo que nos resta é resolver a média acima e comparar com o respectivo valor para Mercúrio, para isto escrevemos-a explicitamente:

$$\left\langle \frac{\cos\varphi}{r} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{\cos\varphi}{r} dt \tag{3.34}$$

O momento angular de uma partícula que se move sobre um plano em que o vetor unitário normal é $\hat{k}$, é dado por:

$$\vec{l} = mr^2\dot{\varphi}\hat{k} \quad , \tag{3.35}$$

de onde tiramos que:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2} \tag{3.36}$$

com esta relação fazemos a mudança de variável de integração de $t \to \varphi$, portanto:

$$\left\langle \frac{\cos\varphi}{r} \right\rangle = \frac{m}{l\tau}\int_0^{2\pi} r(\varphi)\cos\varphi \; d\varphi \quad . \tag{3.37}$$

Em teoria de perturbação tomamos os valores médios a partir dos resultados para o problema não perturbado, neste caso as órbitas não perturbadas são elipses:

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\varphi} \quad , \tag{3.38}$$

a é o semi-eixo maior e ϵ a excentricidade da elipse. Deste modo a média acima torna-se:

$$\left\langle \frac{\cos\varphi}{r} \right\rangle = \frac{ma(1-\epsilon^2)}{l\tau}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1+\epsilon\cos\varphi} \; d\varphi \quad . \tag{3.39}$$

A integral acima pode ser resolvida fazendo a mudança de variáveis $\varphi = 2\tan^{-1}(t) + \pi$, o resultado então é:

$$\left\langle \frac{\cos\varphi}{r} \right\rangle = \frac{2\pi ma}{l\tau\epsilon}[\sqrt{1-\epsilon^2} - (1-\epsilon^2)] \quad , \tag{3.40}$$

logo nós temos a expressão para a velocidade de precessão da órbita elíptica para a força perturbativa devido a correções quânticas:

$$\vec{\Omega} = \frac{2\pi ac^2\nu}{G_0 M\tau\epsilon^2}[\sqrt{1-\epsilon^2} - (1-\epsilon^2)] \; \hat{k} \quad , \tag{3.41}$$

aqui fizemos uso $\vec{l} = l\hat{k}$. Esta expressão nos permiti calcular a velocidade de precessão da órbita de qualquer partícula submetida à força (3.31), porém não é usual a utilizarmos, mas sim o desvio angular devido a precessão. Sabemos que $\Omega = \frac{\delta\varphi}{\tau}$, de modo que podemos facilmente identificar:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi a c^2 \nu}{G_0 M \epsilon^2}[\sqrt{1-\epsilon^2} - (1-\epsilon^2)] \quad . \tag{3.42}$$

Como dissemos no início desta seção a maior precisão nos dados observacionais de precessão para os astros do nosso sistema solar são os de Mercúrio. Isto se deve a sua órbita ter uma grande excentricidade comparada aos demais e também a seu posicionamente e distância da Terra, favorecendo assim as observações. Os dados observacionais de precessão para Mercúrio dão:

$$\delta\varphi = (43,1 \pm 0,4)\ arcseg/sec \quad . \tag{3.43}$$

A previsão relativística dá:

$$\delta\varphi = 42,9195\ arcseg/sec \quad , \tag{3.44}$$

podemos ver que a Teoria da Relatividade Geral está em acordo com as observações. Com os grandes avanços tecnológicos, do século passado e do início deste, temos grandes chances de que a incerteza nas observações possam ser minimizadas. Gigantescos telescópios espaciais e terrestres de altíssima resolução tem sido postos em operação, de tal modo que venha algum dia confirmar ainda mais a teoria de Einstein ou colocar limites sobre a mesma.

Portanto vamos aqui somente estimar um limite superior para ν a partir da incerteza acima, utilizando a eq.(3.42) e comparando com a incerteza 0.4", nós encontramos:

$$\nu < 10^{-17} \quad , \tag{3.45}$$

onde fizemos uso dos seguintes valores:

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11}\, Nm^2 kg^{-2}\,, \qquad M = 1.98 \times 10^{30}\, kg\,, \qquad c = 3 \times 10^8\, ms^{-2}\,, \\ a &= 6.97 \times 10^{10} m, \qquad \text{e} \qquad \varepsilon = 0.2056\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Apesar deste resultado não expressar qualquer importância relevante do parâmetro ν, na descrição do movimento de precessão dentro do sistema solar, ele tem um papel muito importante em se tratando de galáxias. Foi mostrado, ref. [17] [18], a possibilidade de se explicar as curvas de rotações de galáxias sem invocar o conceito de matéria escura. Em tais sistemas $\nu \approx 10^{-7}$ e observa-se que ele tem uma dependência com a massa das galáxias crescente.

Logo nosso resultado está em pleno acordo com a dependência com a massa do sistema. Porém podemos nos questionarmos se há também uma dependência com a intensidade do campo gravitacional, já que sua origem é quântica.

Se tal dependência existe, será mais simples observar desvios da gravitação de Einstein. Por exemplo, em estrelas compactas a intensidade do campo gravitacional é muito maior do que nas bordas das galáxias. Assim um estudo de tais sistemas pode nos revelar tal dependência. Para tal, vamos na próxima seção reanalisar os resultados obtidos na seção (2.4) para anãs-brancas, levando-se em conta o novo potencial gravitacional.

3.5 Limite de Chandrasekhar com novo potencial

Vamos agora buscar as implicações do potencial (3.27) na análise feita na seção (2.4) para as estrelas anãs-brancas. Todas as justificativas e simplificações feitas para a obtenção da energia total continuam válidas aqui, a única mudança será na contribuição da energia gravitacional para com a energia total da estrela.

Deste modo, utilizando-se do novo potencial gravitacional clássico (3.27), podemos determinar com uma simples integração a energia gravitacional para uma distribuição uniforme de matéria, esfericamente simétrica e com massa M e raio R, ela é dada por:

$$U(R) = -\frac{3}{5}\frac{G_0 M^2}{R} + \nu M c^2 \left[\frac{2}{3} - \ln(\frac{-G_0 M}{\phi_0 R})\right] \quad . \tag{3.47}$$

Assim, substituindo o resultado acima na eq.(2.74), teremos a energia total de uma anã-branca em que os elétrons podem ser tratados no limite não-relativístico:

$$E(R) = \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\beta}{R} - Mc^2\nu \ln(k/R) \quad , \tag{3.48}$$

onde por conveniência definimos $k = -\frac{G_0 M}{\phi_0}$ e descartamos o termo constante $2Mc^2\nu/3$. Relembramos que:

$$\gamma = \frac{2\hbar^2}{15\pi}\left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{m_e} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{5}G_0 M^2 \quad . \tag{3.49}$$

Pela condição de mínimo da energia, temos:

$$\nu M c^2 R^2 + \beta R - 2\gamma = 0 \quad . \tag{3.50}$$

A raíz positiva desta equação quadrática em R é:

$$R = \frac{1}{2Mc^2\nu}[-\beta + \beta\sqrt{1 + \frac{8Mc^2\gamma\nu}{\beta^2}}] \quad , \tag{3.51}$$

onde podemos notar que para uma massa da ordem da do sol, ou seja $10^{30}kg$, temos:

$$\frac{8Mc^2\gamma}{\beta^2} \approx 10^{10} \quad . \tag{3.52}$$

Fazendo a hipótese de que $\nu << 10^{-10}$, podemos expandir a raíz quadrada acima e manter somente o termo de primeira ordem em $\frac{8Mc^2\gamma\nu}{\beta^2}$, ou seja:

$$R \approx \frac{2\gamma}{\beta} \quad . \tag{3.53}$$

Assim recuperamos naturalmente o resultado prévio da seção (2.4), que estabelece que o raio das anãs-brancas caí com a raiz cúbica de sua massa. Este resultado é muito conhecido dos astronômos a partir dos dados observacionais, tal que ele reforça as justificativas dadas em tal seção e o nosso resultado:

$$\nu << 10^{-10} \quad . \tag{3.54}$$

Podemos agora nos utilizar do resultado acima para buscarmos quais são as implicações deste novo potencial sobre a massa crítica das anãs-brancas. Por exemplo, a massa crítica se altera? Esta questão é interessante, já que há o questionamente ref. [15] à respeito da possibilidade de uma gravidade modificada evitar o colapso de uma estrela a um buraco negro.

Com a eq.(3.47), a energia total (2.80) de uma distribuição uniforme, esfericamente simétrica e de modo que os elétrons livres tenham velocidades ultra-relativísticas, dá:

$$E(R) = \frac{\sigma - \beta}{R} - Mc^2\nu \ln(k/R) \quad . \tag{3.55}$$

aqui σ, como em (2.80), é dado por:

$$\sigma = \frac{c\hbar}{3\pi}\left(\frac{9\pi M n_e}{4m_p}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{3.56}$$

O ponto de mínimo da energia agora é:

$$R = \frac{\sigma - \beta}{Mc^2\nu} \quad . \tag{3.57}$$

Este resultado nos mostra que as condições $\sigma < \beta$ e $\sigma > \beta$ podem ser descartadas pelas seguintes razões: $\sigma < \beta$ implica em um raio R negativo, enquanto que a segunda, $\sigma > \beta$, permiti uma condição de equilíbrio com R muito grande, tal que a hipótese de elétrons ultra-relativísticos não é mais justificada. Por exemplo, para uma massa da ordem da do sol e levando-se em conta o fato que $\nu << 10^{-10}$, obtemos:

$$R >> 10^{8} m \quad . \tag{3.58}$$

Consequentemente a energia dos elétrons mais energéticos, ou seja, a energia de Fermi será:

$$E_f << 1ev \quad . \tag{3.59}$$

Isto nos mostra que a energia de Fermi é bem menor do que a energia de repouso dos elétrons, $\approx 0.51 Mev$. Portanto a nossa hipótese de velocidades ultra-relativísticas já não tem fundamento, de modo que a única condição que a justifica é $\sigma = \beta$, ou seja, a única condição satisfatória é $\sigma = \beta$.

Logo respondemos a pergunta inicialmente feita, a massa crítica não se altera. Além disso, este resultado junto com o da seção anterior corroboram para uma dependência de ν com somente a massa do sistema e não com a intensidade do campo também. Assim o termo logarítmico não tem papel relevante em sistemas com massa da ordem da do sol.

Porém para sistemas como buracos negros supermassivos, que se acreditar estar presente no centro de muitas galáxias, inclusive a nossa, este termo pode desempenhar um papel crucial no regime de campos fracos.

Conclusão

Vamos agora resumidamente descrever os resultados obtidos neste trabalho. Vimos que a Relatividade Geral prevê a existência de buracos negros, contudo, há a necessidade de ocorrer um colapso.

Utilizando os resultados da teoria de Einstein, no limite de campo fraco, reobtemos o potencial gravitacional newtoniano. Mostramos que em anãs-brancas era uma boa aproximação utilizar tal potencial para descrever seu campo. A partir disso, extraímos as condições de equilíbrio para tal tipo de estrela, encontrando uma massa critíca da ordem da do Sol.

Estes resultados são conhecidos na literatura, de modo que queríamos derivá-los para uma análise de quando tomamos em conta uma gravidade modificada. Vimos que para uma ação gravitacional, onde se tem a constante gravitacional newtoniana dependendo do logarítmo do potencial clássico, obtem-se no limite de campo fraco um novo potencial gravitacional.

Contudo, este potencial é dependente de um parâmetro de ajuste. Nosso objetivo então foi estimar um limite superior para tal parâmetro e analisar se a dependência era como predita em [17], onde observou-se que em galáxias ele é da ordem de 10^{-7} e crescia com a massa. Assim aplicamos este novo potencial ao movimento de precessão do periélio de Mercúrio e na condição de equilíbrio das anãs-brancas.

Nosso resultado foi que levando-se em conta as estimativas da incerteza na observação do movimento de precessão do periélio, $\nu < 10^{-17}$. Isto significa que este novo potencial não tem qualquer importância na descrição da dinâmica dentro do sistema Solar.

Mesmo sabendo do resultado acima, poderíamos pensar que encontraríamos algum desvio sobre a condição de equilíbrio das estrelas, pois este novo potencial poderia ser dependente da intensidade do campo. Entretanto, notamos que $\nu << 10^{-10}$, e ele não altera os resultados prévios obtidos com a teoria newtoniana, como a massa crítica. Isso está em acordo com $\nu < 10^{-17}$, de modo que descartamos qualquer dependência deste parâmetro com a intensidade do campo.

Assim vemos que nossos resultados estão em acordo com as predições de ref.[17].

Apêndice A

Vamos aqui fazer um breve estudo à respeito do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) e mostrar como a partir de suas propriedades podemos calcular a velocidade de precessão para o problema de Kepler perturbado. Uma discussão mais abrangente e detalhada pode ser encontrada em ref. [21] [22]. Definimos o vetor LRL como:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{l} \; - \; mk\hat{r} \quad , \tag{A-1}$$

aqui $\vec{p}$ e $\vec{l}$ são os momentos linear e angular, respectivamente, de uma partícula de massa m, $\hat{r}$ é o vetor unitário radial e k é uma constante que se defini de forma apropriada para cada tipo de força à qual a partícula está submetida.

Iremos agora extrair algumas de suas mais importantes propriedades para o caso em que esta força é do tipo como a gravitacional ou elétrica, ou seja:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad , \tag{A-2}$$

para o caso gravitacional identificamos $k = GMm$. A primeira dessas é que o vetor LRL é uma constante de movimento, para demonstrar vamos tomar a derivada temporal de $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{l} \; - \; mk\frac{d\hat{r}}{dt} \quad , \tag{A-3}$$

onde fizemos uso de que para forças centrais o momento angular se conserva. No primeiro termo temos a força produto vetorial com o momento angular da partícula, já no segundo não identificamos de imediato uma relação clara com o primeiro, assim calculemos a derivada de $\hat{r}$ no tempo:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\vec{v}}{r} \; - \; \frac{(\vec{v}.\hat{r})\hat{r}}{r} = \frac{1}{r}\hat{r} \times (\vec{v} \times \hat{r}) \quad , \tag{A-4}$$

usamos a relação $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$. Substituindo o resultado anterior na eq.(A-3) obtemos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \quad . \tag{A-5}$$

Outra importante propriedade é que este vetor pertence ao plano da órbita, para tal basta lembramos que o momento angular é um vetor normal a este plano:

$$\vec{l}.\vec{A} = \vec{l}.(\vec{p} \times \vec{l}) - mk\vec{l}.\hat{r} = 0 \tag{A-6}$$

ou seja, $\vec{A}$ é um vetor fixo no plano do movimento. Tomando-se o produto escalar entre $\vec{A}$ e $\vec{r}$, o vetor de posição da partícula, podemos obter a trajetória de forma muito simples e econômica:

$$r|\vec{A}|\cos(\varphi - \varphi_0) = \vec{r}.(\vec{p} \times \vec{l}) - mk\vec{r}.\hat{r} = l^2 - mkr \quad , \tag{A-7}$$

φ_0 é o ângulo entre $\vec{A}$ e o eixo polar. Logo:

$$r = \frac{l^2}{mk[1 + \frac{|\vec{A}|}{mk}\cos(\varphi - \varphi_0)]} \quad . \tag{A-8}$$

Esta é a equação polar de uma elipse, portanto partículas submetidas a uma força atrativa que caí com o quadrado da distância ao centro de forças tem trajetórias elípticas, como já era de conhecimento de Johannes Kepler no caso do campo gravitacional.

Podemos extrair desta relação a interpretação de que este vetor defini o eixo de simetria da elipse, ou seja, está sobre o semi-eixo maior, devido a paridade da função cosseno. Deste modo podemos considerar por simplicidade que o eixo polar e a direção de $\vec{A}$ coincidem, ou seja, $\varphi_0 = 0$. Além disso vemos que seu módulo determina a excentricidade da elipse:

$$|\vec{A}| = mk\epsilon \quad . \tag{A-9}$$

Devido a estas propriedades, de está sobre o eixo de simetria e ser uma constante de movimento, ele desempenhará um papel muito importante para o problema de Kepler perturbado. Esperamos que para uma força perturbativa muito pequena, ou seja:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} - \vec{f}_{pert} \quad ; \quad |\frac{k}{r^2}| >> |\vec{f}_{pert}| \quad , \tag{A-10}$$

a trajetória da partícula não seja exatamente uma elipse, mas sim uma órbita muito próxima desta. O que ocorre então é que a elipse precessa, depois de uma revolução a partícula não volta a posição ao qual ela partiu.

Como vamos mostrar o vetor LRL não é mais uma constante de movimento neste caso, porém ele ainda pertence ao plano da órbita, no caso de uma força perturbativa central, já que o momento angular é uma constante de movimento, de modo que a relação $\vec{l}.\vec{A} = 0$ continua válida.

Logo, depois de um período, o vetor LRL não estará mais na sua direção inicial e seu módulo também não será o mesmo, mas terá sofrido uma pequena mudança. Vamos aqui desprezar, em primeira ordem, que seu módulo varie. Consequentemente podemos caracterizar o movimento de precessão pela seguinte relação:

$$\langle\frac{d\vec{A}}{dt}\rangle = \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad , \tag{A-11}$$

temos que $\vec{\Omega}$ é a velocidade média de precessão e a média acima é tomada sobre o período do movimento não perturbado. Calculando-se explicitamente a derivada temporal acima e fazendo-se uso da eq.(A-10), obtemos:

$$\langle\frac{d\vec{A}}{dt}\rangle = \langle\vec{f}_{pert} \times \vec{l}\rangle + \langle\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{f}_{pert})\rangle \tag{A-12}$$

note que na dedução acima não fizemos menção a natureza do termo perturbativo, portanto esta relação é válida para uma força pertubativa não central, como por exemplo, perturbações devido a outros planetas. No caso em particular que pretendemos abordar o termo perturbativo é central, ou seja, $\vec{f}_{pert} = f_{pert}(r)\hat{r}$. Logo o segundo termo é nulo:

$$\langle\frac{d\vec{A}}{dt}\rangle = \langle\vec{f}_{pert}\rangle \times \vec{l} \quad . \tag{A-13}$$

Lembramos que em uma base cartesiana o vetor $\hat{r}$ é dado por $\hat{r} = \cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}$, de modo que temos:

$$\langle\frac{d\vec{A}}{dt}\rangle = \langle f_{pert}(r)\cos\varphi\rangle\hat{i} \times \vec{l} \quad , \tag{A-14}$$

$\langle f_{pert}(r)\sin\varphi\rangle = 0$, pois f_{pert} depende somente da distância r e a órbita não perturbada é simétrica com respeito ao semi-eixo maior. Logo lembrando-se que $\vec{A} = mk\epsilon\ \hat{i}$ podemos imediatamente identificar a velocidade média de precessão:

$$\vec{\Omega} = -\frac{\langle f_{pert}(r)\cos\varphi\rangle}{mk\epsilon}\ \vec{l} \quad . \tag{A-15}$$

Esta relação nos permiti, a partir da caracterização da força perturbativa central, quantificar a velocidade média de precessão da órbita de uma partícula que está submetida a uma força, em que o termo mais significante seja $|\frac{k}{r^2}|$.

Referências Bibliográficas

[1] Landau and Lifshitz, *The Classical Theory of Field* (Elsevier,2009).

[2] S.Weinberg, *Gravitational and Cosmology* (John Wiley,1971).

[3] P. Flolov and D. Novikov, *Black Holes Physics: basic concepts and new developments* (1997).

[4] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of black Holes* (Oxford,1983).

[5] D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford, 2005).

[6] W. Misner, S. Thorne and Wheeler, *Gravitation* (1972).

[7] R.C.Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Oxford,1934).

[8] R.C.Tolman, *Static Solutions of Einstein's Field Equation for Spheres of Fluid* , Phys.Rev.**55**, 364 (1939).

[9] J.R.Oppenheimer and H.Snyder, *On Continued Gravitational Contraction* , Phys.Rev. **56** , 455 (1939).

[10] J.R.Oppenheimer and G.M.Volkoff, Phys.Rev. *On Massive Neutron Cores*, **55** , 374 (1939).

[11] P.K.Townsend, *Lectures Notes of Black Holes* (1997).

[12] T. Padmanadhan, *An Invitation to Astrophysics* (World Scientific, 2006).

[13] T. Padmanadhan, *Theorical Astrophysics, Volume 3: Galaxies and Cosmology* (Cambridge University Press).

[14] S. Chandrasekhar, Nobel Lecture, *On Stars, Their Evolution and Their Stability*, , (1983).

[15] Emilio Santos, arXiv:1112.4997v1 [gr-qc] 21 Dec 2011, *Can modified gravity prevent the gravitational collapse to black hole.*

[16] P.Mazur and E.Mottola, arXiv:gr-qc/0109035 [gr-qc] 11 sep 2001, *Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes* .

[17] I.L.Shapiro, D.C.Rodrigues and P.S.Letelier, JCAP, *Galaxy rotation curve from General relativity with Renormalization Group corrections* , **04** , 1-33 (2010).

[18] I.L.Shapiro, J.Solà and H.Stefancic , JCAP, *Running G and* Λ *at low energies from physics at* M_x*: possible cosmological and astrophysical implications* , **01** , 1-32 (2005).

[19] D.F.Carneiro, E.A.Freitas, B.Gonçalves, A.G. de Lima and I.L.Shapiro, Gravitation and Cosmology, *On Useful Conformal Transformation in General relativity* , **10** , 1-11 (2004).

[20] C.Farina, W.J.Kort-Kamp, Sebastião Mauro Fh and I.L.Shapiro , Phys.Rev.D, *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity* , **83** , (2011).

[21] C.Farina, *O Vetor de Laplace-Runge-Lenz no Problema de Kepler* (minicurso,2006).

[22] H.Goldstein, C.P.Poole and J.L.Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley,2000).