

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**Abordagem efetiva em teorias de campos:
Aspectos clássicos e quânticos**

Dante Donizeti Pereira

18 DE JULHO DE 2013

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Abordagem efetiva em teorias de campos:
Aspectos clássicos e quânticos**

Autor: Dante Donizeti Pereira

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

18 DE JULHO DE 2013

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedicatória

Aos meus futuros filhos.

Agradecimentos

Há um propósito maior em tudo, mesmo que, a priori, não o reconheçamos. Há tempo para tudo nesta vida, e este é o de agradecer.

Agradeço ao meu professor e orientador Ilya Lvovich Shapiro por todos os ensinamentos compartilhados durante esses anos, pela sugestão e colaboração nos temas abordados na tese, pela orientação de um modo geral e, ainda, por todo o suporte estrutural oferecido, os quais foram essenciais para a minha formação.

Agradeço ao meu coorientador Vitorio Alberto De Lorenci por todo o conhecimento compartilhado desde meu mestrado. Obrigado por sua extraordinária jovialidade e espírito científico.

Agradeço aos demais professores Ioseph Lvovich Buchbinder e Guilherme de Berredo-Peixoto pela colaboração nos trabalhos desenvolvidos ao longo deste período.

Agradeço à UFJF, em particular ao Programa de Pós-Graduação em Física, pela oportunidade, estrutura e suporte oferecidos. Agradeço à todos os professores, alunos e demais funcionários do Departamento de Física por todo o conhecimento, trabalho e boas risadas compartilhados ao longo desses anos. De modo especial, quero aqui registrar meus sinceros agradecimentos ao Sr. Domingos Lopes pelo seu extraordinário trabalho.

Agradeço às agências brasileiras de apoio à pesquisa CAPES e FAPEMIG pelo suporte financeiro concedido durante a realização deste projeto.

Não cheguei aqui sozinho... Isto representa pra mim a concretização de um sonho. Estou muito feliz por hoje poder escrever estas poucas linhas e expressar a gratidão que tenho por todas as pessoas cuja expectativa de minha vitória sempre me valeu de grande incentivo. Obrigado por serem uma fonte de constante inspiração, bom humor e apoio em minha vida.

Dante Donizeti Pereira

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

18 de julho de 2013. Juiz de Fora – MG, Brasil

“Quando nada mais parece dar certo, lembro-me do cortador de pedras martelando sua rocha talvez cem vezes, sem que uma única rachadura apareça. No entanto, na centésima primeira martelada a pedra se abre em duas, e eu sei que não foi aquela que conseguiu isso, mas todas as que vieram antes.”

Jacob Riis

- O CORTADOR DE PEDRAS -

Resumo

Nesta tese exploramos diferentes aspectos de teorias clássicas e quânticas de campos. Na parte clássica, examinamos o fenômeno da birrefringência eletro-magneto-óptica em eletrodinâmica não-linear no contexto de meios materiais dielétricos não-lineares como uma correção efetiva à teoria linear maxwelliana do eletromagnetismo. Na parte quântica, seguindo o método do *heat kernel* em teoria quântica de campos sobre espaços curvos, derivamos e estudamos a estrutura das divergências a *1-loop* para a ação efetiva de diferentes modelos. Em particular, no ramo do modelo de Yukawa, exibimos duas novas formas de ambiguidades as quais tomam lugar na ação efetiva de campos fermiônicos através do fenômeno da anomalia multiplicativa não-local. Além disso, analisamos a estrutura das divergências ultravioletas a *1-loop* para um modelo recentemente proposto de gravitação massiva livre de fantasmas, e mostramos que esse modelo encontra sérias dificuldades no nível quântico.

Palavras-chave : Eletrodinâmica não-linear; Campos quânticos em espaço-tempo curvo; Cálculos perturbativos; Anomalia multiplicativa; Teorias modificadas da gravitação.

Abstract

In this thesis we explore different aspects in classical and quantum field theories. In the classical part, we examine the phenomenon of electro-magneto-optical birefringence in nonlinear electrodynamics in the context of nonlinear dielectric media as an effective correction to the linear Maxwellian theory of electromagnetism. In the quantum part, following the *heat kernel* method in quantum field theory on curved spaces, we derive and study the structure of the *1-loop* divergences for the effective action of different models. In particular, through the Yukawa model, we show two new forms of ambiguities which take place in the effective action of fermionic fields through the phenomenon of nonlocal multiplicative anomaly. Moreover, we analyzed the structure of ultraviolet divergences at *1-loop* for a recently proposed ghost-free massive gravity model, and we show that this model meets serious difficulties at the quantum level.

Keywords : Nonlinear electrodynamics; Quantum fields in curved space-times; Perturbative calculations; Multiplicative anomaly; Modified theories of gravity.

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	ii
Lista de figuras	v
Lista de publicações	vi
Introdução	1
1 Birrefringência em eletrodinâmica não-linear	13
1.1 Não-linearidades em meios materiais	14
1.1.1 Equações de campo e aproximação eikonal	14
1.1.2 A técnica de Hadamard-Papapetrou	16
1.1.3 Equação de Fresnel generalizada	18
1.2 Não-linearidades no vácuo	19
1.2.1 Eletrodinâmica não-linear generalizada	20
1.2.2 Relação de dispersão	22
1.2.3 Geometria efetiva	23
1.2.4 Eletrodinâmica não-linear ordinária	25
2 Birrefringência magneto-elétrica como um efeito único em materiais dielétricos isotrópicos não-lineares	27
2.1 Introdução	28
2.2 Equação de Fresnel	29
2.3 Birrefringência magneto-elétrica	30
2.3.1 Birrefringência magneto-elétrica em dielétricos com $\varepsilon = \varepsilon(B)$ e $\mu = \mu_c$	31
2.3.2 Birrefringência magneto-elétrica em dielétricos com $\mu = \mu(E)$ e $\varepsilon = \varepsilon_c$	35

3	Método de campo de fundo e ação efetiva em TQC	38
3.1	Primeiros princípios em teoria de campos	39
3.2	Ação efetiva em TQC	43
3.3	Divergências e renormalização	48
4	O <i>heat kernel</i> em TQC	51
4.1	Método do <i>heat kernel</i> em TQC	52
4.2	Expansão assintótica do <i>heat kernel</i>	54
4.2.1	Técnica de Schwinger-DeWitt	54
4.2.2	Teoria de perturbação covariante	57
5	Universalidade e ambiguidades em ações efetivas fermiônicas	59
5.1	Introdução	60
5.2	Considerações gerais	62
5.2.1	Coeficiente A_1	63
5.3	Teoria de Yukawa	65
5.3.1	Coeficiente A_2	65
5.3.2	Fatores de forma e funções β	67
5.4	Sobre a origem da anomalia multiplicativa	71
6	Correções quânticas a <i>1-loop</i> para gravitação massiva	73
6.1	Introdução	74
6.2	Linearização do termo massivo	76
6.3	Método de campo de fundo e forma bilinear para a ação	77
6.4	Derivação das divergências a <i>1-loop</i>	80
	Considerações finais	83
	Bibliografia	87

Lista de Figuras

- 2.1 Superfícies normais associadas com os raios ordinário (linha sólida circular) e extraordinário (linha pontilhada) propagando em um meio não-linear com coeficientes dielétricos dados por $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_2 B^2$ e μ constante. A figura é baseada nas Eqs. (2.10)-(2.12) com $\hat{E} = \hat{y}$, $\hat{B} = \hat{z}$ e $\hat{q} \cdot \hat{B} = 0$. Os valores numéricos foram tomados tais que $(\varepsilon_c \mu_c)^{-1/2} = 0.9$, $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 0.001$ e $v_o \approx 0.858$ 33

Lista de publicações

O presente trabalho acadêmico é baseado nas correspondentes publicações:

- Pereira, D. D. & Klippert, R.; *Local nonlinear electrodynamics*, Phys. Lett. A **374**, 4175 - 4179 (2010).
- De Lorenci, V. A. & Pereira, D. D.; *Magnetolectric birefringence as a unique effect in isotropic media*, Phys. Rev. E **82**, 036605 (2010).
- Berredo-Peixoto, G.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.; *Universality and ambiguity in fermionic effective actions*, Phys. Rev. D **85**, 064025 (2012).
- Buchbinder, I. L.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.; *One-loop divergences in massive gravity theory*, Phys. Lett. B **712**, 104 - 108 (2012).
- Pereira, D. D.; *Nonlocal multiplicative anomaly in fermionic effective actions*, Proceedings of Science 2012 (023) (7th International Conference on Mathematical Methods in Physics), 16 - 20 de abril de 2012. CBPF, Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em: <http://pos.sissa.it/>

Introdução

“Toda grande caminhada começa com um simples passo.”

Buda

“Não há realidade objetiva sem história.”

César Lattes

Preliminares e motivações

A mecânica clássica é um dos marcos da compreensão humana do mundo físico. As equações dinâmicas de Newton descrevem, por meio de um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, o movimento de um sistema de massas pontuais. Dados a posição e velocidade iniciais para cada partícula pontual, o movimento subsequente é completamente determinado (veja, por exemplo, [1 – 3]). Tal descrição da Natureza constituiu um paradigma durante muitos anos. Com a descoberta dos fenômenos elétricos e magnéticos, Maxwell percebeu que essas entidades eram melhor descritas utilizando-se o conceito de campo.

A solução das equações de Newton é uma trajetória dinâmica, a qual é um objeto que associa a cada instante do tempo um vetor no espaço. Um campo, por sua vez, é uma relação que associa a cada ponto do espaço e a cada instante do tempo um objeto matemático em um determinado espaço. Maxwell descreveu os campos elétricos e magnéticos como campos vetoriais [4]. Uma das conquistas mais importantes de Maxwell foi a formulação de uma teoria dinâmica em que campos elétricos e magnéticos eram descritos como duas manifestações de uma única entidade denominada campo eletromagnético (veja, por exemplo, [5, 6]).

Uma das previsões mais marcantes da teoria eletromagnética foi a finitude da velocidade de propagação da radiação eletromagnética em qualquer sistema de referência inercial. Essa era uma característica totalmente nova que não estava presente na mecânica clássica, na qual a informação pode se propagar instantaneamente. Além disso, a constância da

velocidade da luz, em qualquer sistema de referência inercial, estava em contraste direto com as bem estabelecidas transformações clássicas de Galileu. A fim de contornar tais dificuldades, Einstein desenvolveu a teoria da relatividade especial [7], na qual a constância da velocidade da luz em qualquer sistema de referência inercial era o ponto de partida. Para uma boa revisão histórica, bem como outras referências relacionadas, veja também [8]. Nessa teoria, tempo e espaço são tratados em pé de igualdade formando uma única entidade quadri-dimensional denominada espaço-tempo.

No período em que a teoria da relatividade especial foi desenvolvida, outra teoria importante, que mudaria a visão do mundo, estava apenas em seu estágio inicial. A mecânica quântica [9, 10] foi desenvolvida a fim de explicar certas observações experimentais, especialmente na física atômica, as quais não podiam ser explicadas no âmbito da mecânica clássica e do eletromagnetismo. Alguns anos mais tarde, a mecânica quântica e a relatividade especial tornaram-se aceitas na comunidade científica como as teorias mais adequadas para descrever o mundo físico. No entanto, foi logo notado que as duas teorias não eram completamente compatíveis uma com a outra. A razão é simples; na relatividade especial, o espaço e o tempo desempenham a mesma função e são tratados da mesma maneira na formulação das equações fundamentais. Por outro lado, na mecânica quântica, o tempo ainda desempenha um papel privilegiado, como se pode ver simplesmente analisando a equação de Schrödinger.¹

Desde o surgimento da teoria da gravitação universal clássica, fundamentada por Newton no ano de 1686 [11], os efeitos relacionados a esse fenômeno vêm sendo testados experimentalmente nas mais distintas situações, e com regularidade crescente. A interação gravitacional é reconhecidamente muito fraca quando comparada às demais interações da Natureza e, em consequência, é muito difícil a realização de experimentos para tal fenômeno em laboratórios terrestres.

Já no início do século XX a comunidade científica estava ciente da não aplicabilidade da teoria newtoniana na previsão de alguns fenômenos naturais, como por exemplo a precessão do periélio das órbitas planetárias, o que levou diversos pesquisadores a propor novas teorias a fim de completar o quadro experimental até então determinado. A introdução de outras teorias, na maior parte das vezes, levou à predição de novos efeitos, que puderam ser submetidos à examinação a fim de se resolver pela consistência da teoria em seus

¹Uma das razões é que a quantização é feita com base no formalismo hamiltoniano, o qual não permite uma generalização relativística direta.

resultados. Nesse sentido, a ciência teórica e experimental, no que diz respeito à interação gravitacional, tem caminhado em contínua dependência.

Das teorias que surgiram no intervalo de tempo que vai de 1686 até os dias atuais, uma única tem se mostrado, pela excelência de seus resultados postos à experimentação, como a boa teoria da gravitação. Esta, a bem conhecida teoria da relatividade geral, desenvolvida por Einstein [12] na primeira metade do século XX, tem sido amplamente testada e comprovada em todas as suas previsões.

Uma das conquistas mais importantes da física teórica e matemática foi o desenvolvimento de uma teoria dos campos quantizados. Atualmente, essa área de pesquisa conta com grandes sucessos mas ainda apresenta aos pesquisadores complexos desafios matemáticos e fenomenológicos. A Teoria Quântica de Campos (TQC) em espaço-tempo plano (espaço de Minkowski) [13 – 17] surgiu quando os físicos tentaram unificar a até então recém relatividade especial com a mecânica quântica. O trabalho seminal de Dirac de 1927 [18], *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, representa o primeiro esforço para se criar uma teoria quantizada para o campo eletromagnético e é considerado por muitos pesquisadores como o início da TQC.

Após o artigo de Dirac, uma quantidade enorme de trabalhos nesse campo de pesquisa, ambos teórico e experimental, foi realizada por muitos físicos que conduziram à notáveis descobertas. Dentre as mais importantes, podemos citar a previsão da existência de anti-partículas, efeitos relativísticos sobre o espectro de átomos com o desvio Lamb, a descoberta de um grande número de partículas elementares, a formulação da matriz de espalhamento, a qual descreve a interação e decaimento de partículas e o desenvolvimento das teorias de calibre que levaram a uma formulação unificada de três das interações fundamentais da Natureza: as interações eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca [19].

As previsões de sucesso da relatividade geral constituiu uma evidência convincente de que os fenômenos gravitacionais podem claramente ser entendidos considerando a estrutura espaço temporal como uma variedade curva. Na relatividade geral a matéria exerce sua influência gravitacional curvando o espaço-tempo, e assim estudamos a propagação de partículas e ondas sobre esse fundo curvo. É portanto natural o estudo do comportamento de campos quânticos sobre espaços curvos a fim de buscarmos por novos efeitos da gravitação. Tal abordagem, onde os campos de matéria são quânticos, porém o campo gravitacional é clássico, ficou comumente conhecida como TQC em espaço-tempo curvo

[20 – 26].

Possivelmente uma das mais importantes contribuições ao desenvolvimento da teoria quântica foi dada por Feynman em sua tese de doutoramento [27], intitulada *The principle of least action in quantum mechanics*, onde ele desenvolveu o formalismo conhecido atualmente por integração funcional (ou integral de trajetória). Tal método é baseado na descrição de sistemas quânticos através da formulação lagrangiana no lugar da formulação hamiltoniana. Esse método leva a uma formulação covariante da mecânica quântica e da TQC, isto é, uma forma na qual as relações fundamentais não dependem do sistema de referência usado. A extrema importância de tal formalismo é prontamente reconhecida quando se tenta unificar a mecânica quântica com a relatividade especial, que é, essencialmente, uma teoria covariante.

A integral de trajetória fornece as amplitudes de transição dos processos quânticos como uma integral (soma) sobre todas as possíveis trajetórias no espaço de configuração unindo os estados inicial e final ao processo. Infelizmente, em muitos casos de interesse físico, a integral de trajetória não pode ser avaliada exatamente e, portanto, alguma forma de aproximação deve ser empregada. As características da integral de trajetória tornam esse formalismo muito sutil para um esquema de aproximação semi-clássica.

É bem sabido que esse não é o único caso no qual usam-se técnicas de aproximação. Vários métodos de aproximação têm sido as ferramentas mais importantes no tratamento de diversos fenômenos em TQC. A razão é muito simples; como em qualquer outro campo de investigação em física, a TQC apresenta problemas não-lineares muito complicados para os quais uma solução analítica fechada não pode sempre ser encontrada explicitamente. Por isso, diferentes esquemas de aproximação devem ser desenvolvidos a fim de obtermos previsões observáveis em diferentes regimes.

Uma das abordagens mais frutíferas em TQC, especialmente em teorias de calibre e gravitação, é o método de campo de fundo desenvolvido em sua maior parte por DeWitt em seus trabalhos clássicos [28, 29] (veja também [21, 22, 30]). Esse método é, na verdade, uma generalização do método de funcionais geradores desenvolvido por Schwinger [31, 32]. O objeto de maior interesse no método de campo de fundo é a assim chamada ação efetiva [23, 33]. A ação efetiva é um funcional do campo de fundo e, em princípio, contém toda informação sobre a teoria quântica em questão. De modo a permitir previsões observáveis, a TQC precisa dar as amplitudes de probabilidade de uma variedade de processos de espalhamento nos quais os estados quânticos iniciais são conhecidos e os produtos finais

podem ser medidos através de detectores de partículas. Teoricamente, essa interação é estudada através da assim chamada matriz S (ou matriz de espalhamento), a qual é descrita por meio de propagadores e funções de vértice fazendo uso da técnica diagramática de Feynman [34]. A ação efetiva determina os propagadores bem como as funções de vértice tomando em conta todas as correções quânticas. É claro, uma vez que tais ingredientes básicos são conhecidos, a estrutura completa da matriz S pode ser determinada e, portanto, previsões mensuráveis podem ser feitas. Além do mais, a ação efetiva fornece ainda as equações efetivas de movimento que descrevem os processos quânticos sobre o campo de fundo clássico. Outro importante elemento da ação efetiva é o assim chamado potencial efetivo [35], o qual é uma ferramenta natural para se estudar a estrutura de vácuo da teoria quântica sob consideração.

Infelizmente, nos casos físicos mais interessantes a ação efetiva não pode ser avaliada exatamente e, portanto, métodos de cálculos aproximativos devem ser desenvolvidos. Desde que a ação efetiva pode ser escrita em termos de uma integral de trajetória, um dos métodos de aproximação mais efetivos é a expansão perturbativa semi-clássica da integral de trajetória em termos do número de *loops* (também conhecida por expansão em *loops*). Nessa abordagem, todos os campos são decompostos em uma parte de fundo clássica ϕ^a e uma perturbação quântica ξ^a , como $\varphi^a = \phi^a + \sqrt{\hbar}\xi^a$, onde $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck. Substituindo essa decomposição na ação clássica, pode-se expandir tal ação em termos de campos quânticos. A parte quadrática desta expansão nos fornece o propagador e os demais termos de ordem superior proporcionam as várias funções de vértice. Essa informação é basicamente tudo que precisamos a fim de obtermos a ação efetiva pois, como já mencionado acima, ela é construída em termos de propagadores e funções de vértice. Nessa abordagem, o número de *loops* na expansão perturbativa corresponde a ordem da expansão na constante \hbar .

No entanto, o cálculo prático da ação efetiva implica grandes dificuldades. A questão é que, embora seja possível calcular a ação efetiva para alguns casos especiais sobre um fundo fixo, para que a ação efetiva possa ser usada temos que construí-la como um funcional dos campos de fundo de modo geral. Portanto, vários métodos aproximativos para o cálculo da ação efetiva foram elaborados. O primeiro esquema elaborado corresponde a bem conhecida expansão de Schwinger-DeWitt [20 – 22, 30, 36 – 41], o qual foi empregado com sucesso no tratamento de divergências, renormalização, anomalias, etc. Tal técnica admite várias versões de regularização covariante.

Segundo essa abordagem, todas as quantidades de interesse (tais como ação efetiva, funções de Green, tensor energia-momento, correntes, anomalias) são expressas em termos dos coeficientes da expansão assintótica do correspondente *heat kernel*, denominados coeficientes HMDS (Hadamard-Minakshisundaram-DeWitt-Seeley) [42]. Vários métodos foram usados para o cálculo destes coeficientes, começando do método direto de DeWitt [20], para métodos matemáticos modernos, os quais fazem uso de operadores pseudo-diferenciais [36, 43].

Os coeficientes HMDS da série de Schwinger-DeWitt são quantidades locais covariantes de dada dimensionalidade construídos a partir dos campos de fundo (curvaturas, suas derivadas covariantes, etc). Em tal expansão, os termos de menor ordem levam a uma boa aproximação da ação efetiva no caso quando todas as quantidades de fundo são muito menores que a correspondente potência do parâmetro de massa, ou seja, quando o comprimento de Compton do campo quântico massivo $\lambda = \hbar/mc$ é muito menor que a escala característica de comprimento L ($\lambda \ll L$) para o problema de interesse.

Portanto a expansão de Schwinger-DeWitt é, em geral, de aplicabilidade limitada. Ela não é efetiva no caso de campos de fundo intensos e/ou oscilando rapidamente $\lambda \gg L$. No caso de teorias não-massivas, o método permite calcular somente divergências e anomalias, mas torna-se sem significado na avaliação da parte finita. Portanto, a original expansão de Schwinger-DeWitt não pode descrever efeitos essencialmente não-locais tais como o fenômeno de criação de partículas.

Vários efeitos físicos em teorias quânticas de calibre, particularmente os problemas em campos externos, requer o cálculo de termos não-locais na ação efetiva. De modo a contornar as dificuldades (limitações) impostas pela usual expansão assintótica local de Schwinger-DeWitt, Vilkovisky propôs uma nova abordagem conhecida por Teoria de Perturbação Covariante em [44], a qual foi desenvolvida posteriormente em uma série de trabalhos [45 – 49]. Nessa abordagem, campos de fundo intensos e/ou oscilando rapidamente podem ser tratados de forma consistente, em oposição à técnica de Schwinger-DeWitt. Para uma discussão técnica acerca dessa abordagem, bem como dos principais problemas físicos relacionados, sugerimos a leitura do trabalho [50].

É portanto evidente que os vários métodos de aproximação só fornecem resultados corretos dentro de seu próprio regime específico. Em outras palavras, cada método de aproximação tem os seus próprios limites de validade.

Uma idéia importante, a qual está implícita na descrição de todo sistema físico, é aquela

de uma *teoria efetiva*. A premissa básica de qualquer teoria efetiva é de que a dinâmica em baixas energias (ou grandes distâncias) não depende dos detalhes da dinâmica em altas energias (ou pequenas distâncias). Como um resultado, a física de baixas energias pode ser descrita em termos de uma lagrangiana efetiva, a qual contém somente um conjunto de graus de liberdade do sistema em questão, ignorando graus de liberdade que estão presentes na escala de altas energias. Desse modo, podemos isolar um sistema físico e estudar o seu comportamento em determinada faixa de energia, sem mesmo termos conhecimento do comportamento de tal sistema em regimes intensos de altas energias. Para uma boa revisão sobre os princípios acerca dessa abordagem, veja as referências [51 – 56].

Como um exemplo de correção efetiva a uma dada teoria clássica de campos, podemos citar os efeitos não-lineares na usual teoria de Maxwell do eletromagnetismo quando um dado sistema físico sofre a ação de campos eletromagnéticos externos intensos.

Como é bem conhecido, a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética tem seu valor dependente dos estados de polarização do vácuo [57, 58]. Tais efeitos de polarização aparecem quando um campo eletromagnético muito intenso é produzido em alguma determinada região do espaço.² A possibilidade de produção de um par elétron-pósitron no vácuo da eletrodinâmica quântica foi primeiro apontada por Sauter, Euler, Heisenberg e Schwinger [31, 59, 60] que estudaram o vácuo de Dirac em um campo elétrico externo intenso. Eles observaram que em situações quando o campo externo excede seu valor crítico E_c , a energia do vácuo pode ser reduzida pela criação espontânea de um par elétron-pósitron. Esse é o *processo Sauter-Euler-Heisenberg-Schwinger*. Uma das consequências mais importantes a respeito desse fato é o surgimento do fenômeno da birrefringência, também conhecida por dupla refração, onde a velocidade de fase da onda eletromagnética depende do seu modo de polarização [61].

A propagação de ondas eletromagnéticas em teorias não-lineares do eletromagnetismo tem, recentemente, despertado grande interesse por parte da comunidade científica. Uma revisão detalhada sobre o assunto pode ser encontrada nos trabalhos [62 – 71]. Tal problema pode ser investigado sob dois aspectos distintos: pode-se analisar tal questão no regime de campos intensos [62, 63], como também no contexto de meios materiais [64 – 71]. Em ambos os casos, as equações de campo que governam os fenômenos eletromagnéticos são não-lineares. No regime de campos intensos, a teoria é construída analiticamente a

²Tal valor é também chamado de campo crítico ($E_{cr} = m^2 c^3 / e \hbar = 1,3 \times 10^{18} \text{V/m}$ e $B_{cr} = m^2 c^2 / e \hbar = 4,4 \times 10^{13} \text{G}$), e corresponde ao limite de aplicabilidade da teoria linear de Maxwell do eletromagnetismo.

partir de uma densidade de lagrangiana não-linear, a qual é função dos dois invariantes de Lorentz do campo eletromagnético [72]. No contexto de meios materiais, as equações de campo de Maxwell devem ser complementadas com relações constitutivas entre as intensidade dos campos E^μ e B^μ e suas respectivas induções D^μ e H^μ

$$D^\mu = D^\mu (E^\nu, B^\nu), \quad H^\mu = H^\mu (E^\nu, B^\nu). \quad (1)$$

Neste caso, a estrutura de propagação das ondas será dependente das características do meio sob a influência de campos externos através de certas funções que, em geral, são não-lineares.

O fenômeno da birrefringência é encontrado tanto em meios materiais como também na eletrodinâmica não-linear³. Esse efeito é usado frequentemente na tecnologia de dispositivos ópticos, bem como uma técnica para a investigação de diversos sistemas físicos, incluindo sistemas astrofísicos. No contexto de meios materiais podemos citar a birrefringência magneto-elétrica, cuja diferença entre os índices de refração do meio em questão é proporcional ao produto dos campos elétrico e magnético externos. Tal fenômeno, embora há muito tempo reportado na literatura [74], foi só recentemente medido experimentalmente [75 – 77]. Uma das dificuldades citadas em seu processo de medida está no surgimento de outras formas de birrefringência padrão, tais como os efeitos Kerr [78] e Cotton-Mouton [79, 80], cuja intensidade é usualmente muito maior que o correspondente efeito magneto-elétrico. No contexto da aproximação eikonal da óptica geométrica, foi recentemente considerado a possibilidade de se produzir a birrefringência magneto-elétrica como um efeito único em meios não-lineares isotrópicos [70]. Desta forma, é um trabalho interessante efetuar uma construção teórica na qual o fenômeno da birrefringência magneto-elétrica possa ser implementado e eventualmente medido como um efeito único, sem a interferência de demais efeitos de birrefringência padrão.

A obtenção de correções quânticas efetivas em TQC frequentemente requer a resolução de diferentes expressões algébricas, tais como o cálculo de determinantes e traços de operadores. Como sabemos, é bem conhecido da literatura que as relações

$$\det (\hat{\mathcal{A}} \cdot \hat{\mathcal{B}}) = \det \hat{\mathcal{A}} \cdot \det \hat{\mathcal{B}}, \quad \text{tr} \ln \hat{\mathcal{A}} = \ln \det \hat{\mathcal{A}}, \quad (2)$$

³Podemos entender o fenômeno da birrefringência como a propriedade óptica que determinados materiais têm na qual seu índice de refração é dependente da polarização e direção de propagação da luz [61]. Tal fenômeno foi primeiro observado pelo cientista dinamarquês Rasmus Bartholin em 1669 em um cristal de calcita [73]

podem ser facilmente provadas para matrizes de dimensão finita \hat{A} e \hat{B} . Por outro lado, em TQC, muitos dos operadores relevantes são de dimensão infinita. Em TQC, frequentemente encontramos termos da forma $\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}}$, onde $\hat{\mathcal{H}}^{-1}$ representa o propagador para algum campo. Isto surge, por exemplo, no cálculo das correções quânticas a *1-loop* associadas a ação efetiva [23, 81]. Contudo, em TQC este é o determinante de uma matriz de dimensão infinita, desde que existe um número infinito de modos físicos. Logo, é de grande interesse analisar o comportamento das relações acima quando aplicadas aos operadores da TQC, e verificar em quais condições tal igualdade possa ou não ser violada. A violação desta relação é comumente conhecida por *anomalia multiplicativa*⁴. Para mais detalhes, veja [82 – 90].

Consideráveis esforços têm sido feitos com o objetivo de provar que uma tal violação possa tomar lugar em TQC. Entretanto, em muitos casos, pode ser mostrado que tal violação está relacionada à ambiguidades no processo de renormalização. Isso significa que quando as condições de renormalização são impostas aos operadores \hat{A} , \hat{B} e $\hat{A}\cdot\hat{B}$, pode haver uma diferença devido à independência dessas condições para operadores distintos. Em particular, tal situação pode aparecer quando os determinantes funcionais são definidos por meio da regularização que utiliza a função ζ generalizada [91], pois essa abordagem esconde as divergências e fornece o resultado renormalizado e regularizado automaticamente. Logo a dependência com o parâmetro μ deve ser implementada artificialmente e isso abre caminho para a anomalia multiplicativa.

Recentemente [92, 93], foi obtido um primeiro exemplo na eletrodinâmica quântica onde o cálculo do determinante funcional para o correspondente operador pode ser apresentado como uma expressão *não-local* e, portanto, não pode ser explicado em termos de ambiguidades relacionadas ao processo de renormalização, segundo o teorema de Weinberg [94, 95], o qual demonstra a natureza *local* dos contratermos em TQC. Assim, é um trabalho interessante buscar novos exemplos de operadores fermiônicos e/ou bosônicos nos quais o fenômeno da anomalia multiplicativa em TQC possa tomar lugar e, então, analisar em mais detalhes sua relação com as divergências da correspondente teoria.

Conforme descrito anteriormente, dentre as várias teorias candidatas a descrever a dinâmica do campo gravitacional, a relatividade geral tem nos mostrado grandes rea-

⁴O termo anomalia multiplicativa foi introduzido na literatura por matemáticos. Entretanto, este conceito não deve ser confundido com o conceito de anomalia quântica empregado pelos físicos, uma vez que tal fenômeno não corresponde a nenhuma quebra de simetria do setor clássico da teoria.

lizações tanto do ponto de vista teórico como fenomenológico. Embora tenha sido a primeira força fundamental a ser investigada sob um olhar científico, é notável que a gravidade é, provavelmente, a interação fundamental que continua a ser a mais enigmática dentre todas as forças fundamentais na Natureza.

Mesmo com seu grande sucesso em diversas escalas físicas, a relatividade geral não é uma teoria completa e, assim, não pode descrever muitos efeitos de natureza cosmológica ou mesmo efeitos quânticos. Deste modo, a idéia de uma teoria modificada da gravitação, que tenha a relatividade geral corroborada em um de seus limites, mostra-se como uma possível resposta para diversas questões em aberto no Universo. Portanto, é natural nos perguntarmos se a gravitação pode ser modificada a pequenas ou grandes distâncias de uma maneira teoricamente controlável e experimentalmente viável. Enquanto tal questão a pequenas distância é relevante para uma teoria de gravitação quântica, o correspondente problema a longas distâncias pode potencialmente nos ajudar a compreender melhor as características acerca da constante cosmológica, energia escura e matéria escura. Uma questão interessante associada a modificação da gravidade a longas distâncias pode ser colocada na forma: “*Podem os grávitons terem uma pequena massa não-nula?*”

É muito interessante explorar se o gráviton pode ou não ter uma massa não-nula. O primeiro esforço para adicionar um termo de massa à ação da teoria da gravitação foi feita por Fierz e Pauli [96]. A teoria linear com o termo de massa de Fierz-Pauli é livre de fantasmas. Entretanto, tal teoria não reproduz alguns resultados da relatividade geral no limite não-massivo. Os três graus de liberdade extras de uma partícula massiva de spin 2 sobrevivem mesmo nesse limite e, portanto, as previsões para o desvio da luz não concordam com os resultados esperados pela relatividade geral, contradizendo testes do sistema solar. Isso é conhecido por *descontinuidade vDVZ* (van Dam, Veltman, Zakharov) [97, 98].

Como apontado por Vainshtein [99], tal descontinuidade pode, de fato, ser sanada indo além da teoria linear. Neste sentido, a gravitação massiva adquire, portanto, uma nova escala de comprimento, conhecida por raio de Vainshtein, além do qual as não-linearidades da teoria tomam lugar e o efeito dos graus de liberdade adicionais pode ser testado de forma segura.

Entretanto, as mesmas não-linearidades acabaram por causar outro problema. Boulware e Deser argumentaram que aparece um sexto grau de liberdade escalar na ordem não-linear, o qual tem um sinal negativo para o termo cinético, ou seja, um modo fantasma

[100, 101]. A presença dos fantasmas de Boulware-Deser tem nos dificultado construir uma teoria consistente de gravitação massiva.

Recentemente, um avanço teórico nesta linha de pesquisa tem sido feito. Adicionando termos de auto-interação de ordens superiores e ajustando apropriadamente seus coeficientes, de Rham e colaboradores eliminaram tais modos da teoria no limite de desacoplamento [102 – 106]. Então, Hassan e Rosen estabeleceram uma prova completa que a teoria não sofre de problemas de instabilidade devido aos fantasmas de Boulware-Deser em todas as ordens em teoria de perturbação [107 – 110].

Atualmente, existe um enorme número de modelos de gravitação massiva. Para uma boa revisão sobre o assunto, sugerimos consultar o excelente texto [111], bem como as referências nele contidas. Em nosso trabalho [112], fazendo uso da técnica de Schwinger-DeWitt, derivamos e examinamos a estrutura das divergências ultravioletas em um modelo de gravitação massiva livre de fantasmas proposto nas referências acima citadas.

Ao longo de todo nosso programa de pesquisa, exploramos diferentes aspectos acerca da abordagem efetiva em teorias clássicas e quânticas de campos, de forma que o presente texto pode ser organizado como segue.

Estrutura da tese

O Cap.(1) tem por objetivo explorar as principais modificações causadas na usual teoria maxwelliana do eletromagnetismo devido à introdução de não-linearidades. Em particular, é discutida o fenômeno da birrefringência eletro-magneto-óptica.

No Cap.(2) derivamos e examinamos as consequências do efeito da birrefringência magneto-elétrica linear no contexto de meios materiais dielétricos isotrópicos não-lineares.

O Cap.(3) visa apresentar os princípios básicos da TQC em espaços curvos e, em seguida, a derivação da ação efetiva seguindo a abordagem do método de campo de fundo.

No Cap.(4) é introduzido inicialmente o método do *heat kernel*, a partir do qual são apresentadas as técnicas de Schwinger-DeWitt e teoria de perturbação covariante, duas poderosas ferramentas empregadas na derivação de correções quânticas para a ação efetiva.

No Cap.(5), fazendo uso do método do *heat kernel*, juntamente das técnicas de Schwinger-DeWitt e teoria de perturbação covariante, exibimos o fenômeno da anomalia multiplicativa em TQC no contexto da teoria de Yukawa. Através deste estudo, examinamos

diferentes formas de ambiguidades e universalidades que possam tomar lugar na ação efetiva em TQC.

No Cap.(6), obtemos e estudamos a estrutura das divergências a *1-loop* para a ação efetiva do modelo recentemente proposto de gravitação massiva livre de fantasmas [107 – 110] através da técnica de Schwinger-DeWitt.

Na seção de conclusão descrevemos os resultados obtidos ao longo da tese bem como apresentamos uma lista dos principais projetos e perspectivas futuras associados ao correspondente trabalho acadêmico.

Finalmente, na Bibliografia, é apresentada a relação das referências bibliográficas utilizadas em nosso programa de pesquisa.

Ao longo do trabalho, me refiro à autoria dos resultados obtidos sempre no plural. A preferência por “nossos” resultados em detrimento de “meus” resultados não é firula estilística ou falsa modéstia. Todos os resultados aqui apresentados que já foram publicados são oriundos de colaborações envolvendo a mim, meus orientadores, e um ou mais co-autores. Foram esforços coletivos pelos quais só posso assumir crédito parcial e, de fato, este processo colaborativo foi possivelmente a parte mais gratificante do trabalho. Em ciência, como em muitas outras áreas, a experiência prática ganha trabalhando é muitas vezes mais útil que o aprendizado teórico; neste aspecto, posso afirmar que tive grandes professores, sem os quais a presente tese não seria a mesma.

Capítulo 1

Birrefringência em eletrodinâmica não-linear

“I have also a paper afloat, with an electromagnetic theory of light, which, till I am convinced to the contrary, I hold to be great guns.”

James Clerk Maxwell

Resumo

Quando um campo eletromagnético está presente em um meio material, tal material pode se tornar polarizado. Por outro lado, devido à natureza quântica da estrutura do vácuo, a presença de um campo eletromagnético com intensidade superior a um dado valor crítico pode causar certa polarização no vácuo reduzindo sua energia através da criação de pares elétron-pósitron. Em ambos os casos, algo em comum ocorre em relação à propagação da radiação eletromagnética: observa-se que um feixe de luz ao se propagar em qualquer uma das duas situações físicas mencionadas acima se divide em dois feixes, conhecidos como raios ordinário e extraordinário. Tal fenômeno, conhecido como birrefringência ou dupla refração, representa um belíssimo exemplo da natureza não-linear dos processos eletromagnéticos. Ao longo deste capítulo, apresentaremos os principais conceitos associados à birrefringência eletromagnética, os quais serão importantes para o entendimento de muitos de nossos resultados.

1.1 Não-linearidades em meios materiais

Devido a ação de campos eletromagnéticos externos, a eletrodinâmica torna-se não-linear no interior de determinados meios materiais [61, 72]. Conseqüentemente, as equações de campo (equações de Maxwell) que governam a dinâmica dos fenômenos eletromagnéticos no interior da matéria devem ser complementadas com relações constitutivas entre os campos externos aplicados E^ν e B^ν e suas respectivas induções D^ν e H^ν

$$D^\alpha = \varepsilon^\alpha{}_\beta E^\beta, \quad H^\alpha = \mu^\alpha{}_\beta B^\beta. \quad (1.1)$$

Nas expressões acima, $\varepsilon^\alpha{}_\beta$ e $\mu^\alpha{}_\beta$ correspondem às matrizes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente, e todas as propriedades dielétricas do meio em questão (não-linearidades) podem ser obtidas das mesmas [61].

Desta forma, as equações de campo serão modificadas por termos não-lineares e, como resultado, vários efeitos não-usuais (no contexto da teoria linear de Maxwell) são preditos. Para uma boa revisão sobre o assunto, consulte a lista de trabalhos [62 – 71].

Ao longo dos próximos dois capítulos faremos uso de um espaço-tempo minkowskiano, descrito em um sistema de coordenadas cartesianas, para o qual adotamos unidades tais que $c = 1$. A métrica de fundo é denotada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Todas as quantidades são referidas como medidas por um observador geodésico $v^\mu = \delta_0^\mu$, onde δ_ν^μ denota o tensor de Kronecker e $h^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu - v^\mu v_\nu$ é o projetor sobre o espaço de repouso tri-dimensional desse observador v^μ .

1.1.1 Equações de campo e aproximação eikonal

De forma a construir as equações de movimento que regem a dinâmica do campo eletromagnético no interior de meios materiais, definimos, a partir das Eqs.(1.1), os tensores anti-simétricos $F^{\mu\nu}$, denominado tensor intensidade do campo eletromagnético, bem como $P^{\mu\nu}$, denominado tensor indução do campo eletromagnético na forma [67]

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &:= v^\mu E^\nu - v^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} v^\alpha B^\beta, \\ P^{\mu\nu} &:= v^\mu D^\nu - v^\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} v^\alpha H^\beta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde, nas expressões acima, $v^\nu := \delta^\nu_0$ corresponde ao quadri-vetor velocidade de um observador geodésico, co-móvel com o laboratório onde estão sendo medidos os campos e $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita em um sistema de coordenadas cartesianas. Trata-se de um objeto totalmente anti-simétrico, o qual pode ser definido por $\eta^{0123} := +1$.

Juntamente do pseudo-tensor dual $F^{*\alpha\beta}$ do tensor intensidade do campo eletromagnético

$$F^{*\alpha\beta} := \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = v^\alpha B^\beta - v^\beta B^\alpha + \eta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}v^\mu E^\nu, \quad (1.3)$$

as equações de Maxwell podem ser apresentadas na forma

$$\begin{aligned} \partial_\nu P^{\mu\nu} &= J^\mu, \\ \partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0 &= \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} v^\mu \partial_\nu D^\nu - v^\nu \partial_\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha \partial_\nu H_\beta &= J^\mu, \\ v^\mu \partial_\nu B^\nu - v^\nu \partial_\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha \partial_\nu E_\beta &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $J^\mu := (\rho, \mathbf{J})$ é o vetor densidade de corrente, ρ é a densidade volumétrica de cargas e \mathbf{J} é a densidade superficial de corrente elétrica.

Na forma vetorial, temos [5, 6]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

A teoria de Maxwell do eletromagnetismo prediz a existência de ondas eletromagnéticas geradas a partir de oscilações do campo eletromagnético [113 – 116]. Para um meio material sem fontes no qual os parâmetros dielétricos ε e μ sejam quantidades escalares independentes do tempo, as equações de Maxwell nos levam à expressão

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1.7)$$

a qual é identificada como sendo a equação de onda para o campo elétrico \mathbf{E} . Podemos obter expressões similares para o campo magnético \mathbf{B} . Esta é a equação padrão para o movimento ondulatório, e sugere a existência de ondas eletromagnéticas se propagando no meio com velocidade de fase dada por

$$v := \frac{\omega}{q} = (\varepsilon \mu)^{-1/2}, \quad (1.8)$$

onde ω corresponde à frequência angular da onda eletromagnética e $q := |\mathbf{q}|$ representa a norma do vetor de propagação (vetor de onda). Claro está desta última expressão

que o valor da velocidade das ondas eletromagnéticas está intimamente relacionada às propriedades dielétricas do material, caracterizadas pelos parâmetros ε e μ .

O campo eletromagnético associado à propagação da luz visível pelo olho humano é caracterizado por oscilações muito rápidas (frequências da ordem de 10^{14}Hz), ou equivalentemente, por comprimentos de ondas da ordem de 10^{-7}m [113, 114]. Desta forma, muitos problemas da Ótica podem ser entendidos considerando a aproximação $\lambda \rightarrow 0$ (onde λ é o comprimento de onda – distância entre dois pontos consecutivos da onda que estão em uma mesma fase). O ramo da Ótica no qual tal consideração é válida é conhecido como Ótica Geométrica, desde que neste limite as leis ópticas podem ser formuladas em uma linguagem geométrica fazendo uso do conceito de *raio de luz* [113 – 116].

Um pulso finito consiste de um envelope de muitas amplitudes oscilando rapidamente. Se a variação do envelope é muito lenta durante o período de uma oscilação, a solução do pulso pode ser escrita como o produto de uma função amplitude variando lentamente com uma função fase oscilando rapidamente [116]

$$f^{\mu\nu} = f_{(0)}^{\mu\nu} \exp(i\Phi). \quad (1.9)$$

É importante mencionar que a forma funcional para o campo eletromagnético da onda expressa na equação acima constitui um dos primeiros esforços para se derivar uma teoria da luz diretamente da teoria eletromagnética [117]. Assim, reescrevendo a equação acima em termos das componentes dos campos eletromagnéticos e levando em conta a aproximação de pequenos comprimentos de onda da Ótica Geométrica, obtemos, das equações de Maxwell (1.6),

$$|\nabla\Phi|^2 = n^2, \quad (1.10)$$

onde $n := 1/v = \sqrt{\varepsilon\mu}$ representa o índice de refração do meio.

A equação acima é denominada equação eikonal ($\Phi(\mathbf{r})$ é a função eikonal), e constitui a equação básica da Ótica Geométrica [113 – 116].

1.1.2 A técnica de Hadamard-Papapetrou

De forma a analisarmos a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais, faremos uso da técnica de Hadamard-Papapetrou (HP) [118, 119]. Tal técnica consiste em analisar a descontinuidade de uma função F (campo eletromagnético) através de uma

hipersuperfície orientável (frente de onda) em uma variedade diferenciável M (espaço-tempo). Neste trabalho, estamos interessados em analisar a descontinuidade de uma função F através de uma hipersuperfície do tipo-espaço, ou possivelmente, do tipo-nulo no espaço-tempo. Seja Σ esta hipersuperfície, definida por $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$. As duas regiões distintas do espaço-tempo separadas por Σ podem ser definidas de forma consistente. Seja $X^- = \bigcup_{P \in \Sigma} \text{passado}(P)$, o conjunto dos pontos P^- do espaço-tempo no passado de P , para cada $P \in \Sigma$, e seja $X^+ = \bigcup_{P \in \Sigma} \text{futuro}(P)$, o conjunto dos pontos P^+ do espaço-tempo no futuro de P , para cada $P \in \Sigma$. Causalidade do espaço-tempo garante que X^+ e X^- são conjuntos disjuntos. Para cada ponto $P_0 \in \Sigma$ dado, toda vizinhança U_{P_0} de P_0 é particionada em três regiões disjuntas: $U_{P_0}^- \subset X^-$, $U_{P_0}^+ \subset X^+$ e $U_{P_0}^0 \subset \Sigma$. Seja r o raio desta vizinhança U_{P_0} , e sejam também $P^- \in U_{P_0}^-$ e $P^+ \in U_{P_0}^+$ dois pontos vizinhos quaisquer de P_0 . Consideremos uma função arbitrária $F(x^\mu)$ (ou campo tensorial de rank arbitrário) definida em U_{P_0} . A descontinuidade de $F(x^\mu)$ em Σ é, então, definida como

$$[F(P_0)]_\Sigma := \lim_{r \rightarrow 0^+} [F(P^+) - F(P^-)]. \quad (1.11)$$

A descontinuidade definida pela Eq. (1.11) é a noção fundamental do formalismo HP. Para uma tal função $F(x^\mu)$, suas derivadas parciais $\partial F / \partial x^\mu$ com respeito a cada coordenada x^μ do espaço-tempo serão denotadas por $F_{,\mu}$.

Suponhamos que a função $F(x^\mu)$ tenha descontinuidade nula através de Σ ; isto é, que $[F(P)]_\Sigma = 0$ em cada ponto P interior de Σ . Papapetrou demonstrou que, neste caso, se $F_{,\mu}$ tem descontinuidade não-nula através de Σ , então essa descontinuidade pode ser apresentada na forma [119]

$$[F_{,\mu}(P)]_\Sigma = G k_\mu, \quad (1.12)$$

onde G é uma função definida no interior de Σ , de mesmo rank e com a mesma simetria algébrica de $F(x^\mu)$, e k_μ é o vetor normal a Σ , definido por

$$k_\mu := \partial_\mu \Phi. \quad (1.13)$$

De forma mais geral, se a função $F(x^\mu)$ é tal que todas as suas derivadas $F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i}$ de ordem zero até ordem i apresentam descontinuidades nulas através de Σ , então sua derivada $F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i\mu_{i+1}}$ de ordem $(i+1)$ apresenta descontinuidade através de Σ na forma

$$[F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i\mu_{i+1}}]_\Sigma = H k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_i} k_{\mu_{i+1}}, \quad (1.14)$$

onde H é uma função definida no interior de Σ , de mesmo rank e com a mesma simetria algébrica de $F(x^\mu)$.

1.1.3 Equação de Fresnel generalizada

As propriedades eletro-magneto-ópticas acerca da propagação da luz em meios materiais são determinadas pelas relações de dispersão, as quais podem ser derivadas no contexto da aproximação eikonal da eletrodinâmica fazendo-se uso da técnica de descontinuidades dos campos de Hadamard-Papapetrou.

Conforme já mencionado, em um regime não-linear, as equação de campo de Maxwell devem ser complementadas com relações constitutivas entre os campos externos aplicados e suas respectivas induções. Nestas relações, os parâmetros dielétricos englobam todas as propriedades dielétricas do meio. Por forma de generalidade, consideremos um meio material dielétrico anisotrópico cujos parâmetros ε e μ sejam funções dos campos eletromagnéticos externos aplicados

$$\varepsilon^\alpha{}_\beta = \varepsilon^\alpha{}_\beta(E^\nu, B^\nu), \quad \mu^\alpha{}_\beta = \mu^\alpha{}_\beta(E^\nu, B^\nu). \quad (1.15)$$

Admitimos que os campos eletromagnéticos são contínuos sobre a frente de onda eletromagnética, porém possam apresentar descontinuidades não-nulas em suas derivadas de primeira ordem. Assim, aplicando a técnica HP nestas expressões, encontramos

$$\begin{aligned} [\partial_\mu E^\nu]_\Sigma &= e^\nu k_\mu, \\ [\partial_\mu B^\nu]_\Sigma &= b^\nu k_\mu, \\ [\partial_\mu D^\nu]_\Sigma &= (\varepsilon^\nu{}_\beta e^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\beta}{\partial E^\lambda} E^\beta e^\lambda + \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\beta}{\partial B^\lambda} E^\beta b^\lambda) k_\mu, \\ [\partial_\mu H^\nu]_\Sigma &= (\mu^\nu{}_\beta b^\beta + \frac{\partial \mu^\nu{}_\beta}{\partial E^\lambda} B^\beta e^\lambda + \frac{\partial \mu^\nu{}_\beta}{\partial B^\lambda} B^\beta b^\lambda) k_\mu, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde $k_\nu = (\omega, \mathbf{q}) = (\omega, q\hat{q})$ é definido segundo a Eq.(1.13). Sua componente temporal ω corresponde a frequência angular da onda eletromagnética, ao passo que sua parte espacial \mathbf{q} representa o vetor de onda tri-dimensional.

Aplicando as relações (1.16) nas equações de Maxwell (1.5), encontramos

$$\begin{aligned} (\varepsilon^\nu{}_\beta e^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\beta}{\partial E^\lambda} E^\beta e^\lambda + \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\beta}{\partial B^\lambda} E^\beta b^\lambda) + \eta^{\nu\mu\gamma\sigma} \frac{v_\gamma}{\omega} (\mu_{\sigma\beta} b^\beta + \frac{\partial \mu_{\sigma\beta}}{\partial E^\lambda} B^\beta e^\lambda + \frac{\partial \mu_{\sigma\beta}}{\partial B^\lambda} B^\beta b^\lambda) k_\mu = 0, \\ b^\mu = \frac{1}{\omega} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu v_\alpha e_\beta, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde e^ν e b^ν são definidos por

$$\mathbf{e}^\nu := \left[\frac{\partial \mathbf{E}^\nu}{\partial \Phi} \right]_\Sigma, \quad \mathbf{b}^\nu := \left[\frac{\partial \mathbf{B}^\nu}{\partial \Phi} \right]_\Sigma, \quad (1.18)$$

e estão associados aos dois vetores de polarização contidos sobre a frente de onda eletromagnética da onda propagante.

Das expressões (1.17), vemos que a segunda equação expressa o vetor de polarização b^ν em termos do vetor e^ν . Desta forma, substituindo esta relação na primeira destas equações, obtemos depois de longas manipulações algébricas

$$Z^\nu{}_\mu e^\mu = 0, \quad (1.19)$$

onde a matriz $Z^\nu{}_\mu$ possui a forma

$$\begin{aligned} Z^\nu{}_\mu &:= \varepsilon^\nu{}_\mu + \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\lambda}{\partial E^\mu} E^\lambda + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\nu{}_\lambda}{\partial B^\sigma} \eta^{\sigma\tau\rho}{}_\mu E^\lambda q_\tau v_\rho + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\tau}}{\partial E^\mu} \eta^{\nu\alpha\beta\lambda} B^\tau q_\alpha v_\beta \\ &+ \frac{1}{\omega^2} (q^2 I^\alpha{}_\mu H^\nu{}_\alpha - q^2 I^\nu{}_\mu H^\alpha{}_\alpha + H^\alpha{}_\mu q_\alpha q^\nu - H^\alpha{}_\beta q_\alpha q^\beta h^\nu{}_\mu), \end{aligned} \quad (1.20)$$

em termos das notações úteis

$$I^\nu{}_\mu := h^\nu{}_\mu - \hat{q}^\nu \hat{q}_\mu, \quad H^\nu{}_\mu := \mu^\nu{}_\mu + \frac{\partial \mu^\nu{}_\alpha}{\partial B^\mu} B^\alpha. \quad (1.21)$$

A Eq.(1.19) constitui uma equação de auto-valores. Portanto, para que a matriz (1.20) tenha núcleo não-trivial, ou seja, $e^\nu \neq 0$, ela deve ser não-invertível [120]. Essa condição será satisfeita se, e somente se,

$$\det | Z^\nu{}_\mu | = 0, \quad (1.22)$$

onde o determinante é calculado somente sobre a estrutura tri-dimensional de $Z^\nu{}_\mu$, porque esta matriz tem todas as suas componentes temporais identicamente nulas.

O resultado acima é conhecido na literatura como equação generalizada de Fresnel [113], e fornece a equação de dispersão efetiva, uma ferramenta essencial na descrição da propagação de raios de luz no interior de meios materiais.

1.2 Não-linearidades no vácuo

Modificações da propagação luminosa em diferentes estados de vácuo tem sido um assunto de considerável interesse nas últimas décadas. Tal investigação mostra que, devido a certas condições externas (tais como efeitos de temperatura, condições de contorno, polarização quântica, influência de campos eletromagnéticos e gravitacionais externos, etc), o movimento da luz pode ser visto como ondas eletromagnéticas propagando-se em um meio dispersivo clássico. O meio induz modificações sobre as equações de movimento, as quais são descritas em termos de não-linearidades do campo.

O exame da propagação do fóton além da usual teoria linear maxwelliana tem uma história diversa: este tem sido investigado no espaço-tempo curvo como uma consequência do acoplamento não-mínimo entre a eletrodinâmica e a gravitação [121, 122], e na eletrodinâmica quântica de vácuo não-trivial como uma modificação efetiva induzida por flutuações quânticas [123 – 125]. Como uma consequência de tal exame, alguns resultados inesperados aparecem. Em particular, podemos citar a ocorrência do fenômeno da birrefringência eletromagnética [61]. Outra importante consequência de um tal ponto de vista é a possibilidade de interpretar todas estas modificações de vácuo (com respeito à propagação do fóton) como uma mudança efetiva das propriedades métricas do espaço-tempo. Esse último resultado nos permite construir analogias entre a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço-tempo curvo e fenômenos gravitacionais [126].

A seguir, e até o fim deste capítulo, são apresentados de forma breve os principais conceitos relacionados à abordagem da eletrodinâmica de vácuo no regime não-linear.

1.2.1 Eletrodinâmica não-linear generalizada

Considere uma classe genérica de lagrangianas efetivas da forma

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}(F_{\mu\nu}(x^\alpha), C(x^\alpha)), \quad (1.23)$$

onde $F_{\mu\nu}$ denota o tensor intensidade do campo eletromagnético. Assumimos que esta classe de lagrangianas não dependem das derivadas do tensor $F_{\mu\nu}$. Adicionalmente, $C(x^\alpha)$ corresponde a uma classe genérica de campos de fundo não-dinâmicos externos. Estes podem representar, por exemplo, o índice de refração, o quadri-vetor velocidade de um dielétrico, a geometria de placas metálicas condutoras no efeito Casimir, um campo gravitacional externo, etc. Se todos estes campos são tais que têm seus valores independentes da coordenada x^μ , então a teoria descrita pela lagrangiana efetiva (1.23) reduz-se à ordinária eletrodinâmica não-linear (por exemplo, eletrodinâmicas de Born-Infeld [127] ou Euler-Heisenberg [60]), onde a lagrangiana efetiva (1.23) depende somente dos dois invariantes (independentes) de Lorentz do campo eletromagnético \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 [72],

$$\mathcal{I}_1 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{I}_2 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.24)$$

os quais podem ser construídos a partir do tensor $F_{\mu\nu}$.

As equações de movimento completas para esta teoria consiste da identidade de Bianchi

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0, \quad (1.25)$$

juntamente da equação dinâmica

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = 0. \quad (1.26)$$

Adotamos um procedimento de linearização, correspondente ao método de campo de fundo, no qual o campo eletromagnético total $F_{\mu\nu}$ é decomposto em duas partes distintas

$$F_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ corresponde a um campo de fundo interno (possivelmente dinâmico), e a parte quântica $f_{\mu\nu}$ representa o fóton propagante.

Assumindo que os campos de fundo satisfazem as equações de movimento e restringindo nossa análise somente em primeira ordem no campo $f_{\mu\nu}$, temos

$$\partial_\mu f_{\nu\alpha} + \partial_\nu f_{\alpha\mu} + \partial_\alpha f_{\mu\nu} = 0 \quad (1.28)$$

e

$$\partial_\nu \left(H^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (1.29)$$

onde definimos

$$H^{\mu\nu\alpha\beta} := \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ef}}{\partial F_{\mu\nu} \partial F_{\alpha\beta}} \Big|_{f_{\text{undo}}}. \quad (1.30)$$

Observe que o tensor $H^{\mu\nu\alpha\beta}$ contém muitas das simetrias-chaves do tensor de Riemann. Veremos, posteriormente, que a lagrangiana linearizada

$$\mathcal{L}_{linear} := \frac{1}{2} f_{\mu\nu} H^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \quad (1.31)$$

geralmente nos leva ao fenômeno da birrefringência eletromagnética.

Conforme já descrito anteriormente, no limite eikonal da Óptica, podemos apresentar o tensor do fóton $f_{\mu\nu}$ segundo a expressão (1.9), onde o quadri-vetor de propagação k_ν é então definido pela Eq. (1.13). Sob estas condições, temos da Eq.(1.29)

$$H^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu f_{(0)\alpha\beta} = 0. \quad (1.32)$$

Em geral, o campo de fundo dinâmico interno $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ pode estar sujeito a flutuações quânticas provenientes da influência dos campos não-dinâmicos externos $C(x^\alpha)$. Por exemplo, no caso do efeito Casimir, tais flutuações podem ser devido à distância mútua entre as placas.

A fim de tomarmos tais efeitos quânticos em conta, devemos tomar o valor esperado da Eq.(1.32) no correspondente estado de fundo $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|H^{\mu\nu\alpha\beta}|\psi\rangle k_\nu f_{(0)\alpha\beta} = 0. \quad (1.33)$$

Segundo Lichnerowicz [128], o tensor $f_{\mu\nu}$ (o qual satisfaz a identidade de Bianchi (1.28)) pode ser decomposto em termos do vetor de propagação k_μ e um vetor tipo-espaço a_ν ortogonal a k_ν ,

$$f_{(0)\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu, \quad a_\nu := a\varepsilon_\nu, \quad (1.34)$$

onde ε_ν representa o vetor de polarização normalizado.

Finalmente, dos resultados acima, encontramos uma expressão que relaciona os vetores k_ν e ε_ν

$$A^{\mu\nu}\varepsilon_\nu = 0, \quad (1.35)$$

onde a matriz $A^{\mu\nu}$ é definida por

$$A^{\mu\nu} := \langle\psi|H^{\mu\alpha\nu\beta}|\psi\rangle k_\alpha k_\beta. \quad (1.36)$$

1.2.2 Relação de dispersão

A Eq.(1.35) representa uma condição para o vetor de polarização ε_ν como função do vetor de propagação k_ν ; ela vincula ε_ν ser um auto-vetor (com auto-valor nulo) da matriz $A^{\mu\nu}$ dependente de k_ν .

Para o caso do vetor de polarização ser um vetor tipo-espaço, a Eq.(1.35) se divide em duas equações. A saber, na equação

$$A^{0i}\varepsilon_i = 0, \quad (1.37)$$

juntamente do problema de auto-valores reduzido

$$A^{ij}\varepsilon_j = 0. \quad (1.38)$$

Esta última equação admite soluções não-triviais se, e somente se,

$$\det |A^{ij}| = 0. \quad (1.39)$$

A equação acima desempenha o mesmo papel da equação de Fresnel (1.22) na Óptica. Ela é uma equação escalar para o vetor de propagação k_ν e fornece as relações de dispersão para a luz propagando em um dado meio.

Conforme [129], o determinante (1.39) pode, em geral, ser apresentado na forma

$$\det | A^{ij} | \propto \mathcal{P}_4(k_\nu) = 0, \quad (1.40)$$

onde $\mathcal{P}_4(k_\nu)$ corresponde a um polinômio homogêneo de quarta ordem em k_ν .

A princípio, no caso mais geral, teremos quatro soluções para a Eq.(1.40). Contudo, tendo em mente a forma funcional para o quadri-vetor de propagação $k_\nu = (\omega, \mathbf{q})$, então duas destas raízes corresponderão à propagação na direção $+\mathbf{q}$, ao passo que as duas outras raízes estão associadas à propagação na direção $-\mathbf{q}$. Diferentes estados de polarização são representados por soluções linearmente independentes do problema de auto-valores (1.38) sob a condição (1.39). Assim, o espaço de polarização é, de fato, bi-dimensional. Desde que a Eq.(1.39) dá origem a duas relações de dispersão, os estados de polarização satisfazem duas equações de auto-valores (em geral diferentes)

$$\bar{A}_{(r)}^{ij} \varepsilon_j^{(r)} = 0, \quad r = 1, 2, \quad (1.41)$$

onde \bar{A}^{ij} é obtida de A^{ij} através da imposição das correspondentes condições sobre k_ν oriundas da Eq.(1.40).

1.2.3 Geometria efetiva

A teoria da relatividade geral nos leva à concepção de uma geometria geralmente curva do espaço-tempo cuja fonte engloba todo conteúdo de matéria e energia do Universo [130, 131]. O estudo comparativo entre aspectos cinemáticos da relatividade geral e outras formas de interações tem, recentemente, despertado grande interesse por parte da comunidade científica, e é conhecido comumente por *modelos análogos* da gravitação. Para uma ampla revisão sobre este tópico, veja [132].

No contexto da eletrodinâmica não-linear, um resultado curioso surge: “*A força eletromagnética que um fóton sofre em um regime não-linear pode ser geometrizada.*” Este é um resultado inesperado e ao mesmo tempo uma bela consequência da análise da propagação de descontinuidades do campo eletromagnético no regime não-linear.

Nesta abordagem, o “meio” (seja ele o vácuo ou algum dielétrico) é visto pelas ondas eletromagnéticas como um espaço-tempo curvo descrito por uma métrica efetiva $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, a qual consiste de uma modificação da métrica de fundo de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$. Tal fato nos permite fazer analogias entre a propagação de ondas em meios não-triviais e fenômenos

gravitacionais podendo, assim, testar diferentes aspectos da teoria da relatividade geral em condições laboratoriais.

No caso de meios lineares, a métrica efetiva de Gordon assume a forma [133]

$$\mathcal{G}_{Gordon}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\varepsilon_\mu - 1)v^\mu v^\nu. \quad (1.42)$$

Em alguns casos especiais no contexto da eletrodinâmica não-linear [129], o polinômio $\mathcal{P}_4(k_\nu)$ pode ser fatorado em duas formas quadráticas

$$\mathcal{P}_4(k_\nu) = \left(\mathcal{G}_{(1)}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right) \left(\mathcal{G}_{(2)}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta\right), \quad (1.43)$$

dando origem à duas relações de dispersão

$$\left(\mathcal{G}_{(1)}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right) = 0, \quad \left(\mathcal{G}_{(2)}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right) = 0, \quad (1.44)$$

exibindo, portanto, o fenômeno da birrefringência.

Nas relações (1.44), o par de matrizes $\mathcal{G}_{(r)}^{\mu\nu}$ (independentes do vetor de propagação k_ν) podem ser construídas com base no conhecimento do tensor (1.30) juntamente dos estados de polarização normalizados $\varepsilon_j^{(r)}$ na forma

$$\mathcal{G}_{(r)}^{\mu\nu} := \langle \psi | H^{\mu\alpha\nu\beta} | \psi \rangle \varepsilon_\alpha^{(r)} \varepsilon_\beta^{(r)}. \quad (1.45)$$

Caso o sistema físico não exiba birrefringência, o polinômio $\mathcal{P}_4(k_\nu)$ reduz-se a um quadrado perfeito e temos somente uma métrica efetiva $\mathcal{G}_{(1)}^{\mu\nu} = \mathcal{G}_{(2)}^{\mu\nu}$.

A relevância geométrica da métrica efetiva (1.44) vem de sua definição imediata.

Da condição de metricidade [130], temos

$$D_\lambda \mathcal{G}^{\mu\nu} = \partial_\lambda \mathcal{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \mathcal{G}^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \mathcal{G}^{\sigma\mu} = 0, \quad (1.46)$$

onde os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$ satisfazem as relações $\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu$, e D_ν corresponde a derivada covariante, os quais são construídos a partir da métrica efetiva $\mathcal{G}^{\mu\nu}$.

Contraindo a Eq.(1.46) com $k_\mu k_\nu$, obtemos

$$k_\mu k_\nu \partial_\lambda \mathcal{G}^{\mu\nu} = -2k_\mu k_\nu \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \mathcal{G}^{\sigma\nu}. \quad (1.47)$$

Diferenciando a Eq.(1.44) com respeito a x^λ , encontramos

$$2(\partial_\lambda k_\mu) k_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} + k_\mu k_\nu \partial_\lambda \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.48)$$

Agora, das Eqs.(1.47)-(1.48), temos

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} (D_\lambda k_\mu) k_\nu \equiv \mathcal{G}^{\mu\nu} (\partial_\lambda k_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma k_\sigma) k_\nu = 0. \quad (1.49)$$

Como o vetor de propagação $k_\mu = \partial_\mu \Phi$ é um gradiente exato, podemos escrever $D_\mu k_\nu = D_\nu k_\mu$. Com esta identidade e ainda definindo $k^\mu := \mathcal{G}^{\mu\nu} k_\nu$, podemos apresentar a Eq.(1.49) na forma

$$(D_\lambda k_\mu) k^\lambda = 0, \quad (1.50)$$

a qual implica que o vetor k_μ é um vetor geodésico na geometria efetiva ótica $\mathcal{G}^{\mu\nu}$. Como k_μ é um vetor tipo-nulo na geometria $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, segue que suas curvas integrais corresponderão a geodésicas nulas nesta geometria.

Em resumo, podemos sumarizar estes últimos resultados conforme o enunciado:

“As descontinuidades do campo eletromagnético em um regime não-linear propagam-se ao longo de geodésicas nulas geradas a partir de uma métrica efetiva $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, a qual depende da distribuição de energia-momento do campo eletromagnético.”

1.2.4 Eletrodinâmica não-linear ordinária

O formalismo descrito acima pode ser todo derivado a partir do conhecimento do tensor $H^{\mu\nu\alpha\beta}$ definido pela Eq. (1.30). Vamos, agora, exhibir um caso particular dentro do arcabouço da eletrodinâmica não-linear ordinária, fazendo uso do modelo de Euler-Heisenberg [60].

A eletrodinâmica não-linear ordinária corresponde a uma classe de teorias nas quais a correspondente lagrangiana efetiva é função dos dois invariantes de Lorentz do campo eletromagnético [72]

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2). \quad (1.51)$$

Para tais lagrangianas, o tensor $H^{\mu\nu\alpha\beta}$ assume a forma geral

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(\partial_{\mathcal{I}_1} \mathcal{L}_{ef})(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4}(\partial_{\mathcal{I}_2} \mathcal{L}_{ef})\eta^{\mu\nu\alpha\beta} + F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}(\partial_{\mathcal{I}_1}^2 \mathcal{L}_{ef}) \\ &+ F^{*\mu\nu}F^{*\alpha\beta}(\partial_{\mathcal{I}_2}^2 \mathcal{L}_{ef}) + (F^{\mu\nu}F^{*\alpha\beta} + F^{*\mu\nu}F^{\alpha\beta})(\partial_{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}^2 \mathcal{L}_{ef}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Neste formalismo, a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg pode ser apresentada como [60]

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_R^{(1)}, \quad (1.53)$$

onde

$$\mathcal{L}_c := -\frac{1}{4}\mathcal{I}_1, \quad (1.54)$$

representa a lagrangiana clássica da teoria linear maxwelliana e

$$\mathcal{L}_R^{(1)} := \kappa(\mathcal{I}_1^2 + \frac{7}{4}\mathcal{I}_2^2), \quad \kappa = \frac{\alpha^2}{90m^4}, \quad (1.55)$$

corresponde às correções quânticas (devido às não-linearidades) a *1-loop* para esta teoria.

Na equação acima, o parâmetro quântico κ é expresso em termos da constante de estrutura fina α e da massa do elétron m . Os termos proporcionais a \mathcal{I}_1^2 e \mathcal{I}_2^2 nesta lagrangiana são quárticos no campo eletromagnético. Para esta teoria, o tensor $H^{\mu\nu\alpha\beta}$ assume a forma

$$H^{\mu\nu\alpha\beta} = \left(\frac{\kappa\mathcal{I}_1}{2} - \frac{1}{16}\right)(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) + \frac{7\kappa\mathcal{I}_2}{8}\eta^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{\kappa}{2}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + \frac{7\kappa}{8}F^{*\mu\nu}F^{*\alpha\beta}. \quad (1.56)$$

Neste contexto, Novello e colaboradores [62] derivaram as correspondentes métricas efetivas

$$\begin{aligned} g_-^{\mu\nu} &= \left(-\frac{1}{4} + 4\kappa\mathcal{I}_1\right)\eta^{\mu\nu} - 8\kappa T^{\mu\nu}, \\ g_+^{\mu\nu} &= \left(-\frac{1}{7} + 4\kappa\mathcal{I}_1\right)\eta^{\mu\nu} - 8\kappa T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

bem como as velocidades de fase para os dois modos propagantes

$$\begin{aligned} v_- &= 1 - 16\kappa F^{\alpha\mu}F_\mu{}^\beta \hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta, \\ v_+ &= 1 - 28\kappa F^{\alpha\mu}F_\mu{}^\beta \hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta, \quad \hat{k}_\mu := \frac{k_\mu}{q} = (v, \hat{q}), \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde, nas Eqs.(1.57), $T^{\mu\nu}$ corresponde ao tensor energia-momento da teoria, definido por

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta\Gamma_{EH}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}, \quad (1.59)$$

sendo Γ_{EH} a ação efetiva de Euler-Heinseberg [31].

Nesta última expressão, $\gamma^{\mu\nu}$ representa a métrica minkowskiana em um arbitrário sistema de coordenadas e γ é seu correspondente determinante.

Capítulo 2

Birrefringência magneto-elétrica como um efeito único em materiais dielétricos isotrópicos não-lineares

Resumo¹

Aspectos do fenômeno da birrefringência magneto-elétrica são investigados no contexto da propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais não-lineares isotrópicos na aproximação eikonal. É mostrado que tal fenômeno pode ser produzido como um efeito único em sistemas isotrópicos na presença de campos eletromagnéticos externos, provado que certas propriedades dielétricas específicas estão presentes.

¹O conteúdo deste capítulo se refere às seguintes publicações:

De Lorenci, V. A. & Pereira, D. D.: Phys. Rev. E **82**, 036605 (2010).

Pereira, D. D. & Klippert, R.: Phys. Lett. A **374**, 4175 - 4179 (2010).

2.1 Introdução

Em meios não-lineares a propagação de ondas eletromagnéticas é governada por equações de campo não-lineares [72]. No eletromagnetismo, por exemplo, não-linearidades são introduzidas por meio de relações constitutivas associando campos externos com campos induzidos. Em meios isotrópicos, tais relações podem ser apresentadas como $\mathbf{D} = \varepsilon(E, B) \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu^{-1}(E, B) \mathbf{B}$ onde ε e μ descrevem a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio, respectivamente [134, 135]. Vários efeitos associados à propagação da luz podem surgir em tais meios dependendo de suas propriedades dielétricas específicas e dos campos externos aplicados. De particular interesse neste trabalho podemos citar o fenômeno da birrefringência [61], o qual aparece quando a velocidade da onda toma valores distintos para cada modo de propagação em uma dada direção. Tais modos distintos correspondem aos raios ordinário e extraordinário. O primeiro se propaga isotropicamente, ao passo que o último depende da direção de propagação. Birrefringência eletromagnética é encontrada não somente em meios não-lineares, mas também no contexto da eletrodinâmica não-linear, como é predito ocorrer na eletrodinâmica quântica [57]. Este efeito é usado frequentemente na tecnologia de dispositivos óticos [136], bem como uma técnica para a investigação de diversos sistemas físicos, incluindo sistemas astrofísicos [137, 138].

A birrefringência magneto-elétrica é o efeito de birrefringência cuja diferença entre os índices de refração associados à propagação dos raios ordinário e extraordinário é proporcional ao produto dos campos elétricos e magnéticos aplicados. Este efeito eletro-magneto-óptico foi a muito tempo reportado na literatura [74], mas apenas recentemente foi medido experimentalmente [75 – 77]. Uma das dificuldades citadas em seu processo de medida está no surgimento de outras formas de birrefringência padrão, tais como os efeitos Kerr e Cotton-Mouton², cuja intensidade é usualmente muito maior que o correspondente efeito magneto-elétrico. Uma descrição teórica do fenômeno da birrefringência magneto-elétrica em meios isotrópicos foi recentemente considerada no contexto da aproximação eikonal [70, 139], onde a possibilidade de produzi-la em meios não-lineares isotrópicos como um efeito único foi sugerida.

Neste trabalho ondas monocromáticas de frequência angular ω e vetor de propagação \mathbf{q} incidente sobre um meio não-linear isotrópico são consideradas no regime da aproximação

²No efeito Kerr [78] a diferença entre os índices de refração é proporcional ao quadrado da magnitude do campo elétrico $|n_e - n_o| \propto E^2$, ao passo que no efeito Cotton-Mouton [79, 80] tal diferença é proporcional ao quadrado da magnitude do campo magnético $|n_e - n_o| \propto B^2$.

eikonal [71]. Em um tal meio, os campos eletromagnéticos são governados por equações não-lineares e efeitos dispersivos são negligenciados.

Ao longo deste capítulo, os índices o e e denotam quantidades associadas aos raios ordinário e extraordinário, respectivamente.

Examinamos duas circunstâncias onde o fenômeno da birrefringência magneto-elétrica como um efeito único pode ser implementado e eventualmente medido. Tais circunstâncias ocorrem quando a luz está se propagando em um meio isotrópico não-linear cujos coeficientes dielétricos satisfazem as relações $\varepsilon = \varepsilon(B)$ e $\mu = \mu_c$ ou, simetricamente, $\varepsilon = \varepsilon_c$ e $\mu = \mu(E)$. Conforme veremos, em ambos os casos a presença dos campos externos elétrico e magnético é fundamental.

Ao longo de nossa análise, por questões de clareza, empregamos uma notação tri-dimensional (embora os mesmos resultados possam ser apresentados em uma linguagem tensorial quadri-dimensional). Exceção é feita à estrutura métrica efetiva associada aos raios ordinário e extraordinário, a qual é dada na forma quadri-dimensional.

2.2 Equação de Fresnel

Na ausência de fontes e correntes, a eletrodinâmica em um meio contínuo é completamente determinada pelas equações de Maxwell (1.6) (neste caso sem fontes), juntamente das relações constitutivas $\mathbf{D} = \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \cdot \mathbf{B}$, sendo $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$ o tensor de permissividade elétrica e $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ o tensor de permeabilidade magnética.

De modo a descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em meios não-lineares, faremos uso da técnica de descontinuidades HP [118, 119]. Aplicando tal formalismo, encontramos as seguintes relações para a descontinuidade (sobre a frente de onda eletromagnética) dos campos e de suas derivadas de primeira ordem

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}]_{\Sigma} &= 0, & [\mathbf{B}]_{\Sigma} &= 0, \\
[\partial_t \mathbf{E}]_{\Sigma} &= \omega \mathbf{e}, & [\partial_t \mathbf{B}]_{\Sigma} &= \omega \mathbf{b}, \\
[\nabla \cdot \mathbf{E}]_{\Sigma} &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}, & [\nabla \cdot \mathbf{B}]_{\Sigma} &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}, \\
[\nabla \times \mathbf{E}]_{\Sigma} &= \mathbf{q} \times \mathbf{e}, & [\nabla \times \mathbf{B}]_{\Sigma} &= \mathbf{q} \times \mathbf{b},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde \mathbf{e} e \mathbf{b} estão relacionados às derivadas dos campos elétrico e magnético sobre Σ como $\mathbf{e} := [\partial \mathbf{E} / \partial \Phi]_{\Sigma}$ e $\mathbf{b} := [\partial \mathbf{B} / \partial \Phi]_{\Sigma}$, e correspondem aos vetores de polarização da onda propagante.

Aplicando as condições de contorno acima às equações de Maxwell (1.6), obtemos uma equação de auto-valores na forma geral [64]

$$\sum_{j=1}^3 Z_{ij} e_j = 0. \quad (2.2)$$

Soluções não-triviais para este correspondente problema de auto-valores podem ser encontradas se, e somente se

$$\det | Z_{ij} | = 0. \quad (2.3)$$

A equação acima é conhecida na literatura como equação generalizada de Fresnel [113], e suas soluções são identificadas como sendo as relações de dispersão, as quais descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas no meio não-linear caracterizado pelos coeficientes ε e μ sob a ação dos campos externos aplicados \mathbf{E} e \mathbf{B} .

2.3 Birrefringência magneto-elétrica

Como já mencionado, embora o fenômeno da birrefringência magneto-elétrica tenha sido investigado há longo tempo, só recentemente o mesmo foi medido experimentalmente em laboratório. Em muitos trabalhos anteriores, foi ressaltado que a grande dificuldade em observar tal efeito se devia ao fato do mesmo sempre vir acompanhado de efeitos de birrefringência padrões tais como os efeitos Kerr e Cotton-Mouton, os quais apresentam uma magnitude muito maior quando comparados ao correspondente efeito magneto-elétrico. Assim, a manifestação destes outros efeitos obscurecia a medida da birrefringência magneto-elétrica.

Dentro da aproximação eikonal, foi recentemente sugerido a possibilidade de se produzir uma forma de birrefringência magneto-elétrica linear (no produto dos campos elétrico e magnético) como um efeito único em meios não-lineares isotrópicos [70]. Nesta seção, duas possíveis configurações onde este efeito pode ser implementado serão examinadas.

O método mais frequentemente utilizado para se resolver a equação de auto-valores de Fresnel consiste em expandir os auto-vetores \mathbf{e} em uma base conveniente de vetores do espaço tri-dimensional [57], como por exemplo

$$\mathbf{e} = c_1 \mathbf{E} + c_2 \mathbf{B} + c_3 \mathbf{q}. \quad (2.4)$$

Esta técnica, embora simples, pode nos levar a questionar se o conjunto de vetores escolhido é efetivamente linearmente independente. De forma a evitar esta sutileza, utilizamos um

método que foca somente a estrutura algébrica da Eq. (2.3), e consiste em utilizar as fórmulas de traço para operadores lineares [140]. Segundo esta técnica, o determinante tri-dimensional da matriz Z_{ij} pode ser colocado na forma

$$\det |Z_{ij}| = -\frac{1}{6}(Z_1)^3 + \frac{1}{2}Z_1Z_2 - \frac{1}{3}Z_3 = 0, \quad (2.5)$$

onde os traços Z_1, Z_2 e Z_3 são definidos através das relações

$$Z_1 := \sum_{i=1}^3 Z_{ii}, \quad Z_2 := \sum_{i,j=1}^3 Z_{ij} Z_{ji}, \quad Z_3 := \sum_{i,j,l=1}^3 Z_{ij} Z_{jl} Z_{li}. \quad (2.6)$$

2.3.1 Birrefringência magneto-elétrica em dielétricos com $\varepsilon = \varepsilon(B)$ e $\mu = \mu_c$

Vamos, inicialmente, empregar os resultados descritos na seção anterior a fim de analisar um dado sistema eletromagnético cujas relações constitutivas sejam da forma $\mathbf{D} = \varepsilon(B) \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu_c^{-1} \mathbf{B}$. Para esta classe de meios não-lineares, a matriz de Fresnel toma a forma

$$Z_{ij} = \left(\varepsilon(B) - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{\mu_c \omega^2} q_i q_j - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} (\mathbf{q} \times \mathbf{B})_j E_i, \quad (2.7)$$

com $\dot{\varepsilon} := (1/B) \partial \varepsilon / \partial B$, levando aos seguintes traços,

$$\begin{aligned} Z_1 &= 3 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) + \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \\ Z_2 &= 3 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right)^2 + \frac{q^4}{\mu_c^2 \omega^4} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\omega^2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})^2 \\ &\quad + 2 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \left(\frac{q^2}{\mu_c \omega^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right), \\ Z_3 &= 3 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right)^3 + \frac{q^6}{\mu_c^3 \omega^6} + \frac{\dot{\varepsilon}^3}{\omega^3} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})^3 \\ &\quad + 3 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \left(\frac{q^4}{\mu_c^2 \omega^4} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\omega^2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})^2 \right) \\ &\quad + 3 \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right)^2 \left(\frac{q^2}{\mu_c \omega^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Agora, introduzindo as Eqs. (2.8) na Eq.(2.5), encontramos

$$\varepsilon \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.9)$$

A equação acima apresenta duas soluções distintas. A primeira não depende da direção de propagação da onda, e é considerada como sendo a relação de dispersão para o raio ordinário. Sua correspondente velocidade de fase $v_0 = \omega/q$ é dada por

$$v_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_c \varepsilon}}. \quad (2.10)$$

A segunda solução apresentada na Eq. (2.9) corresponde à relação de dispersão associada ao raio extraordinário, e depende da direção de propagação da onda \hat{q} . Sua correspondente velocidade de fase é

$$v_e^\pm = -\frac{\hat{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2(\hat{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})^2}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{\mu_c\varepsilon}}. \quad (2.11)$$

Vamos, agora, assumir que a permissividade elétrica ε do material admita a seguinte expansão

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_2 B^2, \quad (2.12)$$

onde $\varepsilon_2 B^2 \ll \varepsilon_c$. Desta forma, substituindo a expressão (2.12) na Eq. (2.11) e após algumas manipulações algébricas, as velocidades dos raios ordinário e extraordinário se reduzem para

$$v_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_c\varepsilon_c}} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_c} B^2\right), \quad (2.13)$$

$$v_e^\pm = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \hat{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_c\varepsilon_c}} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_c} B^2\right). \quad (2.14)$$

Notemos que o fenômeno da birrefringência eletromagnética não ocorrerá caso:

(i) A direção de propagação da onda esteja contida no plano bi-dimensional formado pelos campos externos eletromagnéticos, isto é, $\hat{q} \cdot (\hat{E} \times \hat{B}) = 0$.

(ii) Os campos eletromagnéticos sejam paralelos $\hat{E} \cdot \hat{B} = 1$.

Nestes casos as velocidades são idênticas $v_e = v_o$ e, portanto, não haverá diferença nos correspondentes índices de refração.

A diferença entre os valores das velocidades associadas aos raios ordinário e extraordinário alcançará seu valor máximo quando a direção de propagação da onda for dada por $\hat{q} = \pm(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$. Neste caso $\hat{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = EB \sin \theta$ e a magnitude do efeito de birrefringência será dada por [71]

$$|n_{\parallel} - n_{\perp}| \cong \mu_c \varepsilon_2 EB \sin \theta, \quad (2.15)$$

onde $n_{\parallel} := (1/v_e)_{\parallel} = 1/v_o$ e $n_{\perp} := (1/v_e)_{\perp}$ são os índices de refração na direções paralela e perpendicular ao campo elétrico externo, respectivamente. Podemos ver da Eq. (2.15) que o efeito de birrefringência alcança seu valor máximo quando os campos são perpendiculares entre si ($\theta = \pi/2$). Como antecipado, para o caso de campos externos paralelos ($\theta = 0$) o fenômeno birrefringente desaparece.

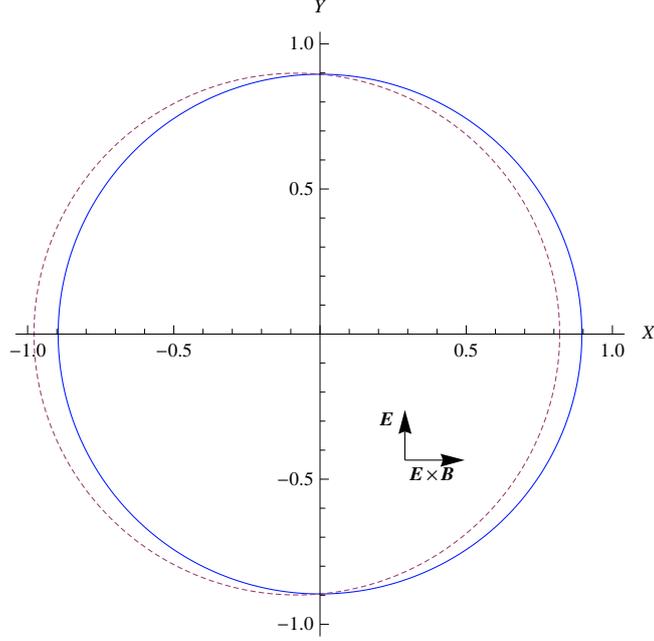


Figura 2.1: Superfícies normais associadas com os raios ordinário (linha sólida circular) e extraordinário (linha pontilhada) propagando em um meio não-linear com coeficientes dielétricos dados por $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_2 B^2$ e μ constante. A figura é baseada nas Eqs. (2.10)-(2.12) com $\hat{E} = \hat{y}$, $\hat{B} = \hat{z}$ e $\hat{q} \cdot \hat{B} = 0$. Os valores numéricos foram tomados tais que $(\varepsilon_c \mu_c)^{-1/2} = 0.9$, $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 0.001$ e $v_o \approx 0.858$.

Na Fig. 2.1 as superfícies normais associadas aos raios ordinário (linha sólida circular) e extraordinário (linha pontilhada) propagando em um meio não-linear isotrópico com permissividade ε dada pela Eq. (2.12) são apresentadas. É assumido que as ondas foram produzidas em um dado tempo anterior na origem. O desenho é baseado nas Eqs. (2.10)-(2.12) com $\hat{E} = \hat{y}$, $\hat{B} = \hat{z}$ e $\hat{q} \cdot \hat{B} = 0$. A escolha de campos cruzados ($\theta = \pi/2$) foi feita a fim de produzir um efeito mais intenso, mas o mesmo comportamento qualitativo ocorre para $\theta \neq \pi/2$. A direção de propagação é determinada pelo ângulo φ dada por $\hat{q} \cdot \hat{E} \times \hat{B} = \cos \varphi$. O efeito de birrefringência máximo ocorre quando φ é igual a 0 ou π , correspondendo a Eq. (2.15) com $\theta = \pi/2$. Conforme mostrado na figura, a velocidade do raio extraordinário é menor do que a correspondente velocidade do raio ordinário no intervalo $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. A situação oposta ocorre quando $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ e elas são iguais no caso quando φ é igual a $\pi/2$ ou $3\pi/2$.

Em resumo, na presença de campos elétricos e magnéticos externos, ondas eletromagnéticas se propagando em meios dielétricos isotrópicos cujos coeficientes dielétricos são dados pela Eq. (2.12) apresentam birrefringência magneto-elétrica, cuja magnitude

é medida por meio da Eq. (2.15). Este fenômeno corresponde a uma forma de birrefringência magneto-elétrica aparecendo como um efeito único, isto é, sem o surgimento de qualquer outra forma de birrefringência padrão.

Polarização

Os modos de polarização descritos pelo vetor \mathbf{e} podem ser obtidos para os raios ordinário e extraordinário. Eles correspondem ao auto-vetores da Eq. (2.2) com a matriz Z_{ij} dada pela Eq. (2.7). A fim de obtermos os modos de polarização para o sistema em análise, vamos considerar uma expansão do vetor \mathbf{e} em termos de uma base conveniente de vetores do espaço tri-dimensional, os quais podem ser escolhidos como sendo os campos eletromagnéticos externos \mathbf{E} e \mathbf{B} e o vetor de onda \mathbf{q} na forma³

$$\mathbf{e} = a \mathbf{E} + b \mathbf{B} + c \mathbf{q}. \quad (2.16)$$

Assim, introduzindo tal expressão na Eq. (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} a \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) &= 0, \\ b \left(\varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) &= 0, \\ a \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}}{\mu_c \omega^2} \right) + b \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{\mu_c \omega^2} \right) + c \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De modo a encontrarmos os vetores de polarização associados a cada raio estudado, devemos substituir as correspondentes relações de dispersão para cada raio no sistema de equação acima e verificar quais condições os coeficientes a , b e c devem satisfazer. No caso do raio ordinário, verificamos que $a = 0$. Por outro lado, para o raio extraordinário, temos $b = 0$. Deste modo, a solução do sistema de equações acima nos leva aos seguintes vetores de polarização normalizados

$$\begin{aligned} \hat{e}_o &= a_1 \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{\varepsilon \mu_c \omega^2} \mathbf{q} \right), \\ \hat{e}_e &= a_2 \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}}{\varepsilon \mu_c \omega^2} \mathbf{q} \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde a_1 e a_2 são fatores de normalização. Das expressões acima, é fácil ver que quando os campos externos são paralelos (situação na qual não ocorre birrefringência) os vetores de

³Onde é assumido que o conjunto de vetores $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{q}\}$ constitua um conjunto de vetores linearmente independentes.

polarização tendem a ser os mesmos, como esperado. Vemos ainda que no caso quando a propagação ocorre na direção perpendicular ao plano formado pelos campos externos, os vetores se reduzem para $\hat{e}_o = \hat{B}$ e $\hat{e}_e = \hat{E}$. Isto corresponde ao efeito de birrefringência descrito pela Eq. (2.15), o qual alcança seu valor máximo para $\theta = \pi/2$. Para o caso apresentado na Fig. 2.1 o vetor de polarização associado ao raio ordinário se reduz para $\hat{e}_o = \hat{B}$. Assim $\hat{e}_e \cdot \hat{e}_o = \hat{E} \cdot \hat{B} = \cos \theta$.

Deve ser enfatizado ainda que os mesmos vetores de polarização podem também ser derivados fazendo-se uso de outra base do espaço vetorial, como a base cartesiana $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, por exemplo. Os resultados aqui obtidos não dependem da particular escolha da base.

Geometria efetiva

Empregando as definições,

$$\begin{aligned} v^\mu k_\mu &= \omega, \\ k^\mu k_\mu &= \omega^2 - |\mathbf{q}|^2, \\ \eta^{\alpha\beta\mu\nu} q_\alpha v_\beta B_\mu E_\nu &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

as relações de dispersão (2.9) podem ser apresentadas da seguinte forma

$$\varepsilon \left(\mathcal{G}_-^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \right) \left(\mathcal{G}_+^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \right) = 0, \quad (2.20)$$

onde $\mathcal{G}_-^{\mu\nu}$ corresponde à métrica efetiva de Gordon (1.42) e

$$\mathcal{G}_+^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\varepsilon(B)\mu - 1)v^\mu v^\nu - \frac{\mu\dot{\varepsilon}}{2} \eta^{\tau\gamma\beta(\mu} v^{\nu)} B_\tau v_\gamma E_\beta \quad (2.21)$$

representa a métrica efetiva associada ao raio extraordinário.

Destes resultados, é fácil ver que na ausência de não-linearidades ($\dot{\varepsilon} = 0$) teremos somente uma única métrica efetiva e não haverá birrefringência.

2.3.2 Birrefringência magneto-elétrica em dielétricos com $\mu =$

$$\mu(E) \text{ e } \varepsilon = \varepsilon_c$$

Vamos agora realizar uma análise similar para o caso simétrico no qual os coeficientes dielétricos satisfazem as condições $\mu = \mu(E)$ e $\varepsilon = \varepsilon_c$. Neste caso, a correspondente matriz de Fresnel se reduz para

$$Z_{ij} = \left(\varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu(E)\omega^2} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{\mu(E)\omega^2} q_i q_j - \frac{\mu'}{\omega\mu^2} (\mathbf{q} \times \mathbf{B})_i E_j, \quad (2.22)$$

onde $\mu' := (1/E)\partial\mu/\partial E$.

Os traços (2.6) de Z_{ij} podem ser derivados de uma maneira similar como foi realizado na última seção. Contudo, para esse caso simétrico, tais quantidades podem ser derivadas diretamente das Eqs. (2.8) através da identificação $\{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c, \mu_c \rightarrow \mu, \dot{\varepsilon} \rightarrow \mu'/\mu^2\}$. Assim, empregando a Eq. (2.5), obtemos,

$$\varepsilon_c \left(\varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) \left(\varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} + \frac{\mu'}{\omega\mu^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Assumindo que a permeabilidade magnética μ possa ser escrita na forma $\mu = \mu_c + \mu_2 E^2$, com $\mu_2 E^2 \ll \mu_c$, podemos apresentar as relações de dispersão para os raios ordinário e extraordinário na forma

$$v_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_c \varepsilon_c}} \left(1 - \frac{\mu_2}{2\mu_c} E^2 \right), \quad (2.24)$$

$$v_e^\pm = -\frac{\mu_2}{\varepsilon_c \mu_c^2} \hat{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_c \varepsilon_c}} \left(1 - \frac{\mu_2}{2\mu_c} E^2 \right). \quad (2.25)$$

Novamente, as velocidades dos raios ordinário e extraordinário coincidem (ausência de birrefringência) quando a propagação ocorre no plano contendo os campos eletromagnéticos externos ou mesmo quando tais campos são paralelos. O comportamento qualitativo das ondas normais correspondendo aos raios ordinário e extraordinário é o mesmo como aquele encontrado no caso estudado na seção anterior (veja a figura 2.1).

Com respeito à direção de propagação, a diferença máxima entre as velocidades dos raios ordinário e extraordinário ocorre quando $\hat{q} = \pm(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$ resultando na relação [71]

$$|n_{\parallel} - n_{\perp}| \cong \frac{\mu_2}{\mu_c} EB \sin \theta, \quad (2.26)$$

a qual consiste na quantidade mensurável correspondendo ao fenômeno da birrefringência magneto-elétrica. Além do mais, o efeito é maximizado no caso de campos eletromagnéticos externos perpendiculares ($\theta = \pi/2$) e se anula no caso de campos externos paralelos ($\theta = 0$). Como antes, o fenômeno da birrefringência magneto-elétrica surge como um efeito único, desaparecendo caso algum campo externo esteja ausente.

Finalmente, os vetores de polarização para esta configuração eletromagnética podem ser obtidos seguindo as mesmas linhas como aquela feita na seção anterior.

Ainda, seguindo os mesmos passos da seção anterior, a relação (2.23) pode ser apresentada na forma (2.20), onde $\mathcal{G}_{-}^{\mu\nu}$ corresponde à métrica efetiva de Gordon (1.42), ao

passo que

$$\mathcal{G}_+^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\varepsilon_c \mu(E) - 1)v^\mu v^\nu - \frac{\mu'}{2\mu(E)} \eta^{\tau\gamma\beta(\mu} v^{\nu)} B_\tau v_\gamma E_\beta \quad (2.27)$$

representa a geometria efetiva associada ao raio extraordinário.

Como sempre, a diferença nas duas estruturas métricas efetivas apresentadas se deve às não-linearidades introduzidas ao meio dielétrico em questão.

Capítulo 3

Método de campo de fundo e ação efetiva em TQC

“It’s impossible to explain honestly the beauties of the laws of Nature without some deep understanding of mathematics.”

Richard Feynman

Resumo

A invariância de calibre explícita, a qual está presente no nível clássico em teorias de calibre, é normalmente perdida quando correções quânticas são introduzidas. O método de campo de fundo é uma técnica que nos permite fixar um calibre e então calcular efeitos quânticos sem perda dessa invariância. Nessa abordagem, o objeto de maior interesse é a ação efetiva, um funcional do campo de fundo que, em princípio, contém toda informação sobre a teoria quântica em questão. Ao longo do presente capítulo, iremos introduzir os conceitos básicos necessários para a obtenção da ação efetiva através do método de campo de fundo. Tais resultados serão posteriormente empregados na análise da estrutura de certas divergências em TQC.

3.1 Primeiros princípios em teoria de campos

O objeto básico de qualquer teoria física é o espaço-tempo, o qual pode ser representado, matematicamente, por uma variedade diferenciável n -dimensional M , com a seguinte estrutura topológica

$$M = I \times \Sigma, \quad (3.1)$$

onde I é uma variedade unidimensional difeomórfica à reta real \mathbb{R} , e Σ corresponde a uma variedade $(n - 1)$ -dimensional, ou, mais precisamente, uma hipersuperfície neste espaço [141]. A variedade M é assumida ser globalmente hiperbólica e equipada com uma métrica pseudo-riemanniana $g_{\mu\nu}$. Tais condições são suficientes para garantir que a variedade M admite uma foliação em hipersuperfícies do tipo-espaço (superfícies de Cauchy) difeomórficas à Σ [130]. Esta topologia é necessária a fim de que o espaço-tempo em questão admita uma correta estrutura causal [131]. Em cada ponto $p \in M$, podemos definir o espaço $T_p M$, denominado espaço tangente à variedade M sobre o ponto p , o qual é o conjunto de todos os vetores tangentes à M no ponto p . Analogamente, associado ao espaço tangente $T_p M$, temos o espaço $T_p^* M$, denominado espaço cotangente à variedade M no ponto p , e definido como o conjunto de todos os funcionais (formas diferenciais) atuando sobre os vetores tangentes. Um fibrado tangente, TM , é definido como a união disjunta de todos os espaços tangentes em cada ponto $p \in M$. A noção de um fibrado pode ser facilmente generalizada para espaços vetoriais V . Um fibrado vetorial \mathcal{V} é definido como a união disjunta de todos os espaços vetoriais V em cada ponto $p \in M$, sendo o fibrado dual \mathcal{V}^* o espaço vetorial de todos os funcionais lineares definidos sobre \mathcal{V} . Uma seção do fibrado vetorial \mathcal{V} é um mapa suave

$$\varphi : M \rightarrow \mathcal{V}, \quad (3.2)$$

tal que em cada ponto $p \in M$ ele associa um elemento (tensor) no fibrado vetorial \mathcal{V} . Tais funções φ são comumente conhecidas por campos tensoriais ou, simplesmente, campos. Campos tensoriais são funções que descrevem a dinâmica de diferentes formas de partículas em teoria de campos e são representados por suas componentes φ^a . Estes podem ser bosônicos ou fermiônicos, dependendo de sua estrutura espinorial [142]. O índice “ a ” utilizado corresponde a uma notação compacta introduzida por DeWitt [20 – 22], e denota não somente suas componentes, mas também o ponto no espaço-tempo no qual o campo está definido. Este índice pode ser considerado como sendo formado por dois conjuntos de

índices, isto é, $a = (C, x)$, onde C é um índice discreto que toma valores de 1 até D , sendo D um número associado à natureza tensorial do correspondente campo, e $x = (x^0, \dots, x^{n-1})$ é o ponto no espaço-tempo em que o campo está definido. Matematicamente, podemos escrever

$$\varphi^a \equiv \varphi^C(x). \quad (3.3)$$

O fibrado vetorial \mathcal{V} tem a estrutura de uma variedade de dimensão infinita [143], o qual é equipado com uma métrica hermitiana não-degenerada E_{ab} tal que

$$E : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

A métrica E_{ab} pode ser naturalmente identificada como o mapa

$$E : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*. \quad (3.5)$$

As seções do fibrado dual \mathcal{V}^* são chamadas de correntes e são representadas localmente por um conjunto de funções

$$J_a = E_{ab}\varphi^b. \quad (3.6)$$

Finalmente, seja $C^\infty(\mathcal{V})$ o conjunto de todas as seções de \mathcal{V} . Assim, o produto escalar entre dois campos arbitrários ζ^a e χ^a pode ser apresentado através das notações condensadas de DeWitt como

$$\zeta_a \chi^a := \int_M d\text{vol}(x) \zeta^a(x) E_{ab}(x) \chi^b(x), \quad (3.7)$$

onde, expressão acima, $d\text{vol}(x) := \sqrt{-g}d^n x$ é o elemento invariante de volume da variedade M , sendo $g \equiv \det |g_{\mu\nu}|$.

O conjunto de todos os campos φ^a sobre todo ponto $p \in M$ forma uma variedade de dimensão infinita, denotada por \mathcal{M} , e denominada *espaço de configuração*, o qual é definido como

$$\mathcal{M} \equiv \{\varphi^a\} := \{\varphi^C(x) : x \in M, C = 1, \dots, D\}. \quad (3.8)$$

O princípio fundamental da teoria de campos atesta que todo sistema dinâmico pode ser descrito por uma ação $S[\varphi^a]$. A ação $S[\varphi^a]$ corresponde a um funcional definido sobre o espaço de configurações \mathcal{M} , e toma valores sobre o conjunto dos números reais

$$S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

A escolha das variáveis dinâmicas (campos φ^a) necessárias para descrever o comportamento do sistema físico não é única. Consequentemente, o espaço de configuração \mathcal{M} é também não único. Ele depende da parametrização do sistema dinâmico (escolha das variáveis dinâmicas φ^a), bem como das condições de contorno impostas ao sistema. Entretanto, para um dado sistema dinâmico, toda ação funcional $S[\varphi^a]$ descreve a mesma física, isto é, ela fornece conjuntos fisicamente equivalentes de configurações de campos dinâmicos. As configurações de campos dinâmicos são definidas como as configurações de campos que satisfazem o *princípio da ação estacionária*. Este último atesta que os valores fisicamente admissíveis para as variáveis dinâmicas φ^a são aqueles para os quais a ação $S[\varphi^a]$ é estacionária com respeito a pequenas variações funcionais com determinadas condições de contorno [144]

$$\delta S = 0. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, as configurações de campos dinâmicos devem satisfazer as equações de movimento dinâmicas

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^a} = 0 \quad (3.11)$$

com dadas condições iniciais. O conjunto de todas as configurações de campos dinâmicos, denotado por \mathcal{M}_0 , é um sub-espaço do espaço de configuração, $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, o qual é chamado *sub-espaço dinâmico*. Em TQC, este conjunto é também comumente conhecido por *casca de massa*. Logo, quando se empregam as equações de movimento em determinada teoria, diz-se que está sob a condição *on-shell*.

Na teoria de campos as equações dinâmicas (3.11) correspondem a equações diferenciais parciais. Normalmente, a ação $S[\varphi^a]$ é um funcional local, o qual pode ser apresentado de modo geral como

$$S[\varphi^a] = \int_{\Omega} d \text{vol}(x) \mathcal{L}(\varphi^a, \nabla \varphi^a, \dots), \quad (3.12)$$

onde Ω (também chamada de região de interação) é a região do espaço-tempo na qual estamos interessados do ponto de vista dinâmico. Matematicamente, este conjunto corresponde ao suporte dos campos φ^a , ou seja, o conjunto de todos os pontos $p \in M$ tais que $\delta \varphi^a \neq 0$, isto é,

$$\Omega \equiv \text{supp } \delta \varphi^a := \{x \in M, \quad \delta \varphi^a \neq 0\}. \quad (3.13)$$

Se os campos φ^a têm um suporte compacto, então $\Omega \subset M$. Na expressão (3.12) a função \mathcal{L} é a função densidade de lagrangiana, a qual, por abuso de linguagem, chamaremos simplesmente por função lagrangiana. A função lagrangiana é, em geral, função dos campos dinâmicos φ^a , de suas derivadas covariantes $\nabla\varphi^a$ e, possivelmente, de outras quantidades que caracterizam a interação entre os campos, tais como constantes de acoplamento.

Vamos, novamente, considerar as equações de movimento (3.11). Elas constituem, em geral, complicadas equações diferenciais parciais não-lineares. Seja φ_1^a uma solução para a equação de movimento (3.11). Vamos considerar ainda uma outra solução nas vizinhanças de φ_1^a na forma $\varphi_2^a = \varphi_1^a + \delta\varphi^a$, onde $\delta\varphi^a$ é um campo infinitesimal. Assim, substituindo φ_2^a nas equações de movimento (3.11) e nos limitando a quantidades de primeira ordem, encontramos

$$\hat{\mathcal{H}}_{ab}\delta\varphi^b = 0, \quad (3.14)$$

onde o operador $\hat{\mathcal{H}}_{ab}$ é definido como

$$\hat{\mathcal{H}}_{ab} := \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_2^a \delta\varphi_2^b} \right|_{\delta\varphi^a=0}. \quad (3.15)$$

Esta é a equação homogênea de *pequenas perturbações*. Suas soluções são comumente conhecidas por campos de Jacobi [21, 22]. Na prática, é conveniente introduzir fontes externas infinitesimais δJ^a , as quais causam a correspondente perturbação ao sistema físico. Admitindo que a ação clássica sofra a seguinte mudança

$$S[\varphi^a] \rightarrow S[\varphi^a] + J_b\varphi^b, \quad (3.16)$$

então as equações de movimento para o sistema perturbado tornam-se

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi^a} = -\delta J_a. \quad (3.17)$$

Em primeira ordem, a solução desta equação de movimento é

$$\varphi_2^a = \varphi_1^a + \delta\varphi^a, \quad (3.18)$$

onde φ_1^a é solução da equação clássica

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_1^a} = 0, \quad (3.19)$$

e $\delta\varphi^a$ corresponde a solução da equação

$$\hat{H}_{ab}\delta\varphi^b = -\delta J_a, \quad (3.20)$$

a qual é conhecida por equação não-homogênea para pequenas perturbações.

No contexto da TQC, tais pequenas perturbações correspondem às correções quânticas associadas ao sistema físico em questão. Como vemos, a ação $S[\varphi^a]$ é capaz de descrever os efeitos de natureza clássica, macroscópicos, associados ao campo φ_1^a . Assim, de forma a descrever a dinâmica dos efeitos quânticos associados a um determinado sistema físico, de modo efetivo, nossa descrição deve ser generalizada a fim de levar em conta também tais contribuições quânticas.

3.2 Ação efetiva em TQC

A TQC é basicamente uma teoria de pequenas perturbações sobre o sub-espaço dinâmico \mathcal{M}_0 , sendo a maioria de seus problemas relacionados à processos de espalhamento de partículas. Em mais detalhes, no passado remoto temos estados de campos (ou partículas) bem definidos, os quais são descritos pelas equações linearizadas de movimento. Como o sistema evolui com o tempo, os estados de campos interagem em uma região específica do espaço-tempo. As equações que descrevem esta interação são altamente não-lineares e não podem ser resolvidas exatamente. Após a interação, no futuro remoto, temos novamente estados de campos bem definidos os quais são em geral diferentes dos estados iniciais. Chamaremos por estado inicial $|in\rangle$ e estado final $|out\rangle$, os quais estão, respectivamente, no passado e futuro remotos. O processo de espalhamento é, então, essencialmente descrito pela amplitude de transição $\langle in | out \rangle$. A coleção de todas as possíveis amplitudes de transição é conhecida por matriz de espalhamento ou, simplesmente, matriz S [145].

Um poderoso método empregado para se estudar amplitudes de transição é o *princípio variacional de Schwinger* [146], o qual dá a relação entre a variação da amplitude de transição $\langle in | out \rangle$ e a variação da ação que descreve o sistema dinâmico na região de interação Ω . Matematicamente, este princípio estabelece que

$$\delta \langle in | out \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle in | \delta S | out \rangle. \quad (3.21)$$

Tal princípio pode ser considerado como um princípio de quantização, porque toda informação sobre o sistema quântico pode ser derivada do mesmo [143]. Vamos mudar as condições externas por adicionando uma fonte externa clássica J^a na região de interação Ω . Desta forma, a ação original $S[\varphi^a]$ sofre uma variação conforme indicado pela expressão (3.16).

Consequentemente, a amplitude de transição $\langle in | out \rangle$ torna-se um funcional da fonte J^a que denotaremos por $Z[J^a]$, ou seja,

$$Z[J^a] := \langle in | out \rangle \Big|_{S[\varphi^a] \rightarrow S[\varphi^a] + J_b \varphi^b}. \quad (3.22)$$

Os objetos de fundamental interesse em TQC são os valores médios cronológicos dos campos quânticos definidos por

$$\Psi_n^{a_n \dots a_1} := \frac{\langle in | T(\varphi^{a_n} \dots \varphi^{a_1}) | out \rangle}{\langle in | out \rangle}, \quad (3.23)$$

onde T corresponde ao operador de ordenamento cronológico. Fazendo uso do princípio variacional de Schwinger (3.21), podemos obter os valores médios cronológicos (3.23) em termos de derivadas funcionais do funcional $Z[J^a]$, na forma

$$Z[J^a + \eta^a] = Z[J^a] \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^k \eta_{b_k} \dots \eta_{b_1} \Psi_k^{b_k \dots b_1}. \quad (3.24)$$

Em outras palavras, o funcional $Z[J^a]$ corresponde ao funcional gerador dos valores médios cronológicos. Do funcional $Z[J^a]$, podemos definir outro funcional $W[J^a]$ através da expressão

$$Z[J^a] =: \exp \left(\frac{i}{\hbar} W[J^a] \right). \quad (3.25)$$

Suas derivadas funcionais definem as funções de Green conectadas, $\mathcal{G}_n^{a_n \dots a_1}$, (também conhecidas como funções de correlação)

$$W[J^a + \eta^a] = W[J^a] + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \eta_{b_k} \dots \eta_{b_1} \mathcal{G}_k^{b_k \dots b_1}, \quad (3.26)$$

onde $\mathcal{G}_1^a \equiv \phi^a$ representa o campo de fundo (campo médio) e $\mathcal{G}_2^{ab} \equiv \mathcal{G}^{ab}$ corresponde ao propagador. É fácil ver que as amplitudes cronológicas $\Psi_n^{a_n \dots a_1}$ podem ser expressas em termos das funções de Green conectadas $\mathcal{G}_n^{a_n \dots a_1}$. Em particular, temos

$$\begin{aligned} \Psi_1^a &= \phi^a, \\ \Psi_2^{ab} &= \phi^a \phi^b - i\hbar \mathcal{G}^{ab}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resumindo, o funcional $Z[J^a]$ é o funcional gerador das amplitudes cronológicas $\Psi_n^{a_n \dots a_1}$, ao passo que $W[J^a]$ corresponde ao funcional gerador das funções de Green conectadas $\mathcal{G}_n^{a_n \dots a_1}$. O campo médio ϕ^a é um funcional da fonte J^a . Pode-se mostrar que a derivada funcional do campo médio em relação a fonte é o propagador \mathcal{G}^{ab} . Portanto, se o propagador \mathcal{G}^{ab}

é não-degenerado, a fonte externa J^a pode ser escrita como um funcional de ϕ^a . Usando tal propriedade, pode ser mostrado que existe um funcional do campo médio denominado *ação efetiva*, e definido através da transformada de Legendre funcional [20 – 22]

$$\Gamma[\phi^a] := W[J^a] - J_b \phi^b. \quad (3.28)$$

Em termos da ação efetiva, as equações de movimento da teoria tomam a forma

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^a} = -J_a, \quad (3.29)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi^a \delta \phi^b} \mathcal{G}^{bc} = -\delta^c_a, \quad (3.30)$$

onde a Eq.(3.29) representa a equação efetiva de movimento da teoria. Tal equação substitui a equação clássica (6.33) e descreve a dinâmica efetiva do campo médio ϕ^a tomando em conta todas as correções quânticas. Além do mais, a Eq.(3.30) determina o propagador da teoria. A ação efetiva (3.28) admite a seguinte expansão funcional

$$\Gamma[\phi^a + \xi^a] = \Gamma[\phi^a] - J_a \xi^a - \frac{1}{2} \xi^a \mathcal{G}_{ab} \xi^b + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \xi^{b_k} \dots \xi^{b_1} \Gamma_{b_k \dots b_1}^{(k)}, \quad (3.31)$$

onde $\Gamma_{b_k \dots b_1}^{(k)}$ são denominadas funções de vértice. As funções de vértice, juntamente com os propagadores, determinam as funções de Green conectadas e, portanto, as amplitudes cronológicas, das quais podemos construir a matriz de espalhamento. Vemos, assim, que a ação efetiva é o objeto mais importante em TQC, pois a partir do mesmo podemos obter toda informação sobre a estrutura quântica associada a teoria. Pode-se obter uma representação formal muito útil para a ação efetiva em termos de integrais funcionais (também conhecidas como integrais de trajetória ou integrais de Feynman). Uma integral funcional é uma integral sobre o espaço de configurações (espaço de dimensão infinita). Embora não exista uma definição matemática rigorosa para integrais funcionais, tais integrais podem ser usadas em TQC dentro do arcabouço de teoria de perturbação como uma ferramenta efetiva [147, 148]. Integrando o princípio variacional de Schwinger (3.21), obtém-se a seguinte integral funcional

$$\langle in | out \rangle = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\varphi^a] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S[\varphi^a] + J_b \varphi^b) \right\}, \quad (3.32)$$

onde $\mathcal{D}[\varphi^a]$ representa a medida funcional definida sobre o espaço de configurações. Correspondentemente, a equação funcional para a ação efetiva assume a forma

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Gamma[\phi^a] \right\} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\varphi^a] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi^a] - \frac{\delta \Gamma[\phi^a]}{\delta \phi^b} (\varphi^b - \phi^b) \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Estritamente falando, a expressão acima é puramente formal. Entretanto, resultados significativos podem ser obtidos fazendo uso de teoria de perturbação. Por esta razão, é conveniente usar a aproximação semi-clássica para a ação efetiva. Segundo tal abordagem, a ação efetiva pode ser apresentada na forma [23]

$$\Gamma[\phi^a] = S[\phi^a] + \bar{\Gamma}[\phi^a], \quad (3.34)$$

onde o funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]$ descreve todas as correções quânticas associadas a teoria clássica. O funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]$ é dado em termos de uma expansão assintótica em potências de \hbar como segue

$$\bar{\Gamma}[\phi^a] := \sum_{k \geq 1}^{\infty} \hbar^k \bar{\Gamma}^{(k)}[\phi^a]. \quad (3.35)$$

A seguir, deve-se substituir a expansão acima na equação funcional para a ação efetiva, efetuar a seguinte mudança de variável de integração

$$\varphi^a \rightarrow \tilde{\varphi}^a = \phi^a + \sqrt{\hbar} \xi^a \quad (3.36)$$

e expandir a ação clássica $S[\tilde{\varphi}^a]$ em série de Taylor funcional nos campos quânticos ξ^a como

$$S[\tilde{\varphi}^a] = S[\phi^a] + \sqrt{\hbar} \frac{\delta S[\phi^a]}{\delta \phi^b} \xi^b - \frac{\hbar}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c + \sum_{k \geq 3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{k}{2}}}{k!} \frac{\delta^k S[\phi^a]}{\delta \phi^{b_1} \dots \delta \phi^{b_k}} \xi^{b_1} \dots \xi^{b_k}, \quad (3.37)$$

onde o operador $\hat{\mathcal{H}}$ está associado ao propagador $\hat{\mathcal{G}}$ através da expressão

$$\hat{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathcal{G}} = \hat{1}, \quad (3.38)$$

e corresponde a derivada funcional de segunda ordem da ação clássica com respeito aos campos quânticos conforme a Eq.(3.15).

Deste modo, expandindo ambos os lados da equação funcional para a ação efetiva em potências de \hbar e igualando os coeficientes com potências idênticas em \hbar , encontra-se relações de recorrência que univocamente definem todos os coeficientes $\bar{\Gamma}^{(k)}[\phi^a]$. Todas as integrais funcionais que aparecem nesta expansão são gaussianas e podem ser calculadas em termos do determinante funcional do operador $\hat{\mathcal{H}}$ e do propagador $\hat{\mathcal{G}}$. Em geral,

encontra-se as seguintes integrais

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\xi^a] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c \right\} &= (\text{Det } \hat{\mathcal{H}}[\phi^a])^{-\frac{1}{2}}, \\
\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\xi^a] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c \right\} \xi^{d_1} \dots \xi^{d_{2m+1}} &= 0, \\
\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\xi^a] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c \right\} \xi^{d_1} \dots \xi^{d_{2m}} &= \\
&= \frac{(2m)!}{2^m m! i^m} (\text{Det } \hat{\mathcal{H}}[\phi^a])^{-\frac{1}{2}} \mathcal{G}^{(d_1 d_2 \dots d_{2m-1} d_{2m})}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ao longo deste trabalho, estaremos particularmente interessados nas correções quânticas a *1-loop* $\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi^a]$ associadas a ação efetiva. Após efetuar as correspondentes substituições mencionadas acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
\exp \{i\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi^a]\} \exp \left\{ i \sum_{k \geq 2}^{\infty} \hbar^{k-1} \bar{\Gamma}^{(k)}[\phi^a] \right\} &= \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\xi^a] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c \right\} \times \\
\times \exp \left\{ i \sum_{k \geq 3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{k}{2}-1}}{k!} \frac{\delta^k S[\phi^a]}{\delta \phi^{b_1} \dots \delta \phi^{b_k}} \xi^{b_1} \dots \xi^{b_k} - i \sum_{k \geq 1}^{\infty} \hbar^{k-\frac{1}{2}} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(k)}[\phi^a]}{\delta \phi^b} \xi^b \right\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Em particular, a nível de *1-loop*, a seguinte relação é satisfeita

$$\exp \{i\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi^a]\} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\xi^a] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^b \mathcal{H}_{bc}[\phi^a] \xi^c \right\}. \tag{3.41}$$

Finalmente, fazendo uso da primeira expressão das Eqs.(3.39) na Eq.(3.41), é fácil mostrar que [23]

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi^a] = \frac{i}{2} \ln \text{Det} (\hat{\mathcal{H}}[\phi^a]) = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\hat{\mathcal{H}}[\phi^a]), \tag{3.42}$$

onde o determinante funcional $\text{Det} (\hat{\mathcal{O}})$ está relacionado ao traço funcional $\text{Tr} \hat{\mathcal{O}}$ através da expressão

$$\text{Det} (\hat{\mathcal{O}}) := \exp (\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{O}}). \tag{3.43}$$

De modo geral, admitindo também campos fermiônicos, o traço funcional, também conhecido como supertraço, pode ser definido como

$$\text{sTr} \hat{\mathcal{O}} := \varrho \int_M d \text{vol} (x) \text{tr} [\hat{\mathcal{O}}] \Big|_{x \rightarrow x'}. \tag{3.44}$$

Na expressão acima, ϱ é o número fermiônico, o qual toma em conta a paridade grassmanniana do campo de fundo em questão [149]. Tal objeto é definido como (+1) para campos bosônicos e (-1) para campos fermiônicos. Adicionalmente, o limite de coincidência para uma função arbitrária $\mathcal{F}(x, x')$, denotado por $[\mathcal{F}(x, x')] \Big|_{x \rightarrow x'}$, é definido como [20]

$$[\mathcal{F}(x, x')] \Big|_{x \rightarrow x'} := \lim_{x \rightarrow x'} \mathcal{F}(x, x') = \mathcal{F}(x, x). \tag{3.45}$$

Conforme já mencionado, a ação efetiva é um objeto fundamental em TQC. Toda informação sobre a natureza quântica da teoria está contida em sua estrutura funcional. Neste momento, é importante mencionar que nem a ação clássica $S[\phi^a]$, nem o funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]$ são eles próprios objetos físicos. Somente a ação efetiva $\Gamma[\phi^a]$ descreve processos físicos e mensuráveis. Neste contexto, a lagrangiana efetiva a *1-loop* pode ser definida como segue

$$\bar{\Gamma}^{(1)} := \int_{\Omega} d\text{vol}(x) \mathcal{L}^{(1)}. \quad (3.46)$$

3.3 Divergências e renormalização

Como vimos, a TQC perturbativa corresponde a um método para se descrever um sistema complicado (teoria com interação) em termos de um mais simples (teoria livre). A idéia principal é começar com a teoria livre para a qual a solução matemática é conhecida, e adicionar um *perturbador* (corrente ou termo de interação) que representa uma perturbação fraca ao sistema. Se a perturbação não for muito grande ou, dito de outra forma, se o parâmetro que acompanha o termo de interação (constante de acoplamento) for pequeno, diversas quantidades físicas associadas ao sistema perturbado podem, a partir de considerações de continuidade, ser expressas como *correções* às quantidades físicas da teoria livre. Estas correções, sendo pequenas quando comparadas às correspondentes quantidades da teoria livre, podem ser calculadas empregando-se métodos aproximativos, como a série assintótica. Assim, a solução em TQC perturbativa dá-se em termos de uma série em torno do parâmetro de acoplamento e a quantização é feita tomando-se os coeficientes da série perturbativa ordem a ordem no parâmetro de acoplamento. Desta forma, obtemos as correções quânticas (ou radiativas) correspondentes à teoria livre. No entanto, os coeficientes da série perturbativa são constituídos, em geral, pelo produto de distribuições (funções de Green), os quais não podem ser definidos consistentemente, como foi provado por Schwartz em seu trabalho sobre distribuições de 1950 [150]. Tal fato nos conduz às divergências em TQC. Um esquema consistente que nos permite eliminar tais divergências e obter resultados finitos é a teoria geral da renormalização. Para obtermos uma teoria finita é necessário, como primeiro passo, reescrevermos as integrais divergentes de Feynman como novas integrais finitas em termos de um dado parâmetro regulador Λ . Quando o parâmetro Λ tende a algum certo valor definido (que depende da teoria em questão), tais integrais reduzem-se formalmente às integrais originais. Este primeiro passo do processo

de renormalização é conhecido como regularização. A importância do procedimento de regularização consiste no fato de nos permitir manipular as integrais de Feynman a fim de eliminar as divergências presentes na correspondente teoria. Para uma boa revisão acerca da teoria geral da renormalização, veja [95, 151].

A idéia central da teoria da renormalização consiste na possibilidade de se introduzir certos funcionais locais $\Delta S[\phi^a]$, chamados contratermos, na ação da correspondente teoria a fim de eliminar suas divergências. Em outras palavras, apresentando o funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]$ na forma

$$\bar{\Gamma}[\phi^a] = \bar{\Gamma}[\phi^a]_{fin} + \bar{\Gamma}[\phi^a]_{div}, \quad (3.47)$$

onde $\bar{\Gamma}[\phi^a]_{fin}$ e $\bar{\Gamma}[\phi^a]_{div}$ correspondem as partes finita e divergente do funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]$, respectivamente, após a introdução dos contratermos, o funcional (renormalizado) $\bar{\Gamma}[\phi^a]_{ren}$ pode ser escrito como¹

$$\bar{\Gamma}[\phi^a]_{ren} = \bar{\Gamma}[\phi^a]_{div} + \Delta S[\phi^a] + \bar{\Gamma}[\phi^a]_{fin}. \quad (3.48)$$

A introdução dos contratermos $\Delta S[\phi^a]$ deve ser realizada de tal forma a cancelar as contribuições infinitas das correções quânticas, ou seja, $\Delta S[\phi^a] = -\bar{\Gamma}[\phi^a]_{div}$. Para ser mais preciso, admita que a ação clássica $S[\phi^a]$ possa ser escrita na forma

$$S[\phi^a] = \sum_{1 \leq i \leq j} c_i I_i[\phi^a], \quad (3.49)$$

onde $I_i[\phi^a]$ ($i = 1, 2, \dots, j$) é um conjunto finito de determinados funcionais e c_i são as correspondentes constantes de acoplamento. Se a parte divergente do funcional $\bar{\Gamma}[\phi^a]_{div}$ possui a mesma estrutura funcional,² isto é,

$$\bar{\Gamma}[\phi^a]_{div} = \sum_{1 \leq i \leq j} \beta_i I_i[\phi^a], \quad (3.50)$$

então todas as divergências podem ser compensadas tal que as constantes de acoplamento renormalizadas c_i^{ren} , presentes na ação renormalizada

$$S[\phi^a]_{ren} = S[\phi^a] + \Delta S[\phi^a] = \sum_{1 \leq i \leq j} c_i^{ren} I_i[\phi^a], \quad (3.51)$$

¹Segundo o teorema de Weinberg acerca da natureza local dos contratermos em TQC [94, 95], a soma dos dois primeiros termos do lado direito na Eq.(3.48) é finita e local, ao passo que o último termo restante é finito e não-local.

²O que é válido em teorias de campos multiplicativamente renormalizáveis [95].

sejam quantidades finitas na forma

$$c_i^{ren} = c_i - \beta_i. \quad (3.52)$$

A classe de teorias quânticas de campos nas quais as condições acima podem ser implementadas são conhecidas comumente na literatura por teorias quânticas de campos renormalizáveis. Como vemos, para tais teorias, é necessário um número finito de contratermos diferentes para compensar as integrais divergentes. Por outro lado, em teorias não-renormalizáveis, aparece um número infinito de contratermos e, portanto, o procedimento básico de renormalização não pode ser aplicado consistentemente.

Capítulo 4

O *heat kernel* em TQC

“All exact science is dominated by the idea of approximation.”

Bertrand Russell

Resumo

O *heat kernel* $\hat{U}_{\hat{O}}(s)$ associado a um operador diferencial elíptico \hat{O} desempenha um importante papel em diversas áreas da física e matemática, especialmente em TQC, gravitação quântica e estudos topológicos de variedades diferenciais. De acordo com o teorema de Minakshisundaram-Pleijel [42], o *heat kernel* pode ser escrito como uma expansão assintótica em termos de um certo parâmetro s denominado tempo próprio. Em particular, no arcabouço da TQC, tal expansão representa uma poderosa ferramenta para o estudo da estrutura das divergências a *1-loop* e anomalias da ação efetiva. Neste capítulo, apresentamos de modo breve os principais conceitos relacionados a essa linha de pesquisa. Os resultados aqui apresentados podem ser formalmente aplicados à teorias com campos de fundo bosônicos e/ou fermiônicos.

4.1 Método do *heat kernel* em TQC

Como vimos na seção 3.2, em teoria de perturbação a ação efetiva é expressa em termos de propagadores e funções de vértice. A principal ferramenta para se estudar propagadores em espaços curvos é a teoria das funções de Green em variedades riemannianas hiperbólicas desenvolvida por Hadamard [152]. Nesta teoria, um dos métodos mais poderosos para se analisar propagadores é o *método do tempo próprio* (também chamado *método do heat kernel*, em particular, pelos matemáticos), o qual foi originalmente proposto por Fock [153] e então generalizado por Schwinger, que também aplicou-o ao cálculo da ação efetiva em 1-loop na eletrodinâmica quântica [31]. E foi DeWitt quem aperfeiçoou tal método; ele reformulou-o em uma linguagem geométrica e o aplicou ao caso do campo gravitacional [30].

Segundo a representação de Schwinger, podemos interpretar o propagador $\mathcal{G}(x, x')$ como o elemento de matriz do operador $\hat{\mathcal{G}}$ atuando em um espaço de Hilbert abstrato [31]

$$\mathcal{G}(x, x') = \langle x | \hat{\mathcal{G}} | x' \rangle, \quad (4.1)$$

onde $| x' \rangle$ são auto-vetores normalizados de um conjunto de operadores hermitianos \hat{x}^μ que comutam

$$\hat{x}^\mu | x' \rangle = x'^\mu | x' \rangle, \quad \langle x | x' \rangle = \delta(x, x'). \quad (4.2)$$

Nesta representação, o operador $\hat{\mathcal{G}}$ pode ser apresentado como uma integral em termos de uma variável auxiliar s (também conhecida como o *tempo próprio* [153]) na forma

$$\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{H}}^{-1} = \int_0^\infty ds \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s) = \int_0^\infty ds \exp(-is\hat{\mathcal{H}}). \quad (4.3)$$

Tomando o elemento de matriz da equação acima, encontramos a seguinte representação associada ao propagador

$$\mathcal{G}(x, x') = \int_0^\infty ds \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s), \quad (4.4)$$

onde o operador evolução $\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s)$ associado ao operador $\hat{\mathcal{H}}$ é dado por

$$\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s) = \langle x | \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s) | x' \rangle. \quad (4.5)$$

A ação efetiva é um funcional do campo de fundo. Assim, efetuando uma variação em termos do campo de fundo, encontramos

$$\delta \bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{sTr} (\delta \ln \hat{\mathcal{H}}) = \frac{i}{2} \text{sTr} \hat{\mathcal{H}}^{-1} (\delta \hat{\mathcal{H}}). \quad (4.6)$$

Substituindo a representação de Schwinger (4.3) na expressão acima, temos

$$\delta \bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \delta \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{sTr} \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s). \quad (4.7)$$

Integrando ambos os lados desta expressão, obtemos¹

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{sTr} \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s), \quad (4.8)$$

onde o traço funcional $\text{sTr} \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s)$ é dado por

$$\text{sTr} \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(s) := \varrho \int_M d\text{vol}(x) \text{tr} [\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s)]|_{x \rightarrow x'} = \varrho \int_M d\text{vol}(x) \text{tr} \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x; s). \quad (4.9)$$

A importância do operador evolução (4.5) reside no fato de que, como consequência da Eq.(3.38), o mesmo satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left(i \frac{\partial}{\partial s} - \hat{\mathcal{H}}\right) \hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s) = 0, \quad (4.10)$$

a qual possui a forma de uma equação do tipo Schrödinger, com o operador $\hat{\mathcal{H}}$ fazendo o papel do operador hamiltoniano. Sua solução admite a seguinte condição inicial

$$\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; 0) = \hat{1} \delta(x, x'). \quad (4.11)$$

A similaridade entre a Eq.(4.10) e a equação de Schrödinger nos leva à interpretação do operador evolução $\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s)$ como a *amplitude de probabilidade* de uma partícula localizada na posição x'^μ no tempo próprio $s = 0$ se propagar até a posição x^μ no tempo próprio s .

Ao efetuar uma continuação analítica (rotação de Wick) no parâmetro s para valores imaginários, a Eq.(4.10) torna-se uma equação de difusão. Historicamente, uma das primeiras quantidades a serem estudadas como uma *substância difusiva* foi o calor. Por este motivo, tal equação de difusão é também chamada a equação do calor. O operador evolução (4.5) é, deste modo, conhecido como o *heat kernel*.²

O *heat kernel* é uma ferramenta universal em física teórica, física matemática e análise geométrica, e possui muitas aplicações na teoria quântica de campos de gauge, gravitação quântica, teoria de cordas e na teoria matemática de operadores diferenciais sobre variedades não triviais. Em TQC, o *heat kernel* governa a expansão em *loops* semiclássica

¹Onde ignoramos a constante de integração, uma vez que não é atribuído significado físico à mesma.

²Para um estudo mais completo acerca do heat kernel, veja [154, 155].

em todas as ordens. Em particular, ele gera o principal ingrediente desta expansão; o propagador da teoria (4.3).

Está claro agora, da expressão (4.8), que o conhecimento do traço funcional do *heat kernel* é de fundamental importância a fim de obtermos informações sobre as correções quânticas a *1-loop* associadas à ação efetiva.

4.2 Expansão assintótica do *heat kernel*

O *heat kernel* pode ser calculado exatamente somente para algumas configurações especiais de campos de fundo. Por outro lado, para obtermos as amplitudes quânticas, devemos calcular a ação efetiva como um funcional dos campos de fundo de modo geral. Por este motivo, deve-se desenvolver métodos aproximativos para a avaliação do *heat kernel* no caso geral.

Em gravitação quântica e em teorias de gauge a ação efetiva é um funcional covariante, isto é, ela é invariante sob difeomorfismos e transformações de gauge locais. Deste modo, os métodos desenvolvidos para a avaliação da ação efetiva devem ser manifestamente covariantes, ou seja, devem preservar a covariância geral em todas as ordens. Abaixo são apresentados dois esquemas regulares os quais permitem avaliar a ação efetiva em uma forma manifestamente covariante.

4.2.1 Técnica de Schwinger-DeWitt

Segundo a técnica de Schwinger-DeWitt, o *heat kernel* pode ser apresentado na forma da famosa expansão assintótica de Minakshisundaram-Pleijel³ [42]

$$\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}(x, x'; s) = \hat{\mathcal{U}}_0(x, x'; s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (4.12)$$

Esta expansão é puramente local e não depende de fato da estrutura global da variedade. Seus coeficientes $\hat{a}_k(x, x')$ são conhecidos como coeficientes de Hadamard-Minakshisundaram-DeWitt-Seeley (HMDS). Tais objetos correspondem a quantidades locais e podem ser construídos a partir do conhecimento do operador $\hat{\mathcal{H}}$. Podemos apresentar o operador

³Também conhecida por expansão de Schwinger-DeWitt pelos físicos.

$\hat{\mathcal{U}}_0(x, x'; s)$ como⁴

$$\hat{\mathcal{U}}_0(x, x'; s) = i \frac{\mathcal{D}^{1/2}(x, x')}{(4\pi i s)^\omega} \exp \left\{ \frac{i\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s \right\}, \quad (4.13)$$

onde $\sigma(x, x')$ é o intervalo geodésico [156] entre os pontos x e x' definido por

$$\sigma(x, x') := \frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma, \quad (4.14)$$

sendo $\nabla_\mu \sigma$ um vetor tangente à geodésica e cuja norma é igual a distância entre os pontos x e x' . Adicionalmente,

$$\mathcal{D}(x, x') := \det (-\nabla_{\nu'} \nabla_\mu \sigma) \quad (4.15)$$

é o determinante de van Vleck-Morette [157, 158].

Pode-se mostrar [20] que o *ansatz* (4.12) satisfaz a condição inicial (4.11).

Em TQC, o operador $\hat{\mathcal{H}}$ é tipicamente um operador diferencial elíptico de segunda ordem $\hat{\mathcal{X}}$ atuando em um espaço linear dos campos ϕ^a , o qual pode ser, em geral, escrito como ⁵ [40]

$$\hat{\mathcal{X}} = \Delta + \left(\hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R \right), \quad (4.16)$$

onde

$$\Delta := \hat{1} g^{\mu\nu} \hat{\mathcal{D}}_\mu \hat{\mathcal{D}}_\nu, \quad (4.17)$$

sendo Δ o operador de Laplace-Beltrame (ou laplaciano) e $\hat{\mathcal{D}}_\mu := \nabla_\mu + \hat{h}_\mu$ a derivada covariante generalizada (com respeito a uma conexão arbitrária), relacionada ao comutador

$$[\hat{\mathcal{D}}_\mu, \hat{\mathcal{D}}_\nu] \phi^a = \hat{S}_{\mu\nu} \phi^a. \quad (4.18)$$

Das Eqs.(4.16)-(4.17), temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}} &= \hat{1} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu + \hat{h}_\mu) (\nabla_\nu + \hat{h}_\nu) + \left(\hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R \right) \\ &= \hat{1} \square + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

⁴Devido à regularização dimensional, é conveniente apresentar esta expressão em termos do parâmetro ω , onde $n = 2\omega$, sendo n a dimensão da correspondente variedade.

⁵A presença do termo R (escalar de curvatura) no operador (4.16) está relacionada a estudos de modelos conformes em quatro dimensões [45].

onde

$$\begin{aligned}
\Box &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu, \\
\hat{h}^\mu &= g^{\mu\nu} \hat{h}_\nu, \\
\hat{\Pi} &= \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R + \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu + \nabla_\mu \hat{h}^\mu.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dos resultados acima, podemos construir os seguintes operadores

$$\begin{aligned}
\hat{P} &:= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \\
\hat{S}_{\mu\nu} &:= \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Os coeficientes do operador (4.19) contém três campos externos independentes: a métrica $g_{\mu\nu}$, a conexão em ∇_μ e a matriz \hat{P} . Tais quantidades definem três *curvaturas* independentes

$$R_{\mu\nu}, \quad \hat{S}_{\mu\nu}, \quad \hat{P}, \tag{4.22}$$

para as quais usaremos a notação coletiva \mathfrak{R} .

Conforme a Eq.(4.12), o *heat kernel* é expresso em termos de uma série infinita nos coeficientes HMDS. Assim, substituindo tal expressão na Eq.(4.10) e resolvendo-a recursivamente, encontra-se os limites de coincidência para os primeiros coeficientes HMDS

$$\begin{aligned}
[\hat{a}_0]_{|x \rightarrow x'} &= \hat{1}, \\
[\hat{a}_1]_{|x \rightarrow x'} &= \hat{P}, \\
[\hat{a}_2]_{|x \rightarrow x'} &= \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \Box R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\Box \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

os quais forão obtidos originalmente por DeWitt [20 – 22]. O coeficiente $[\hat{a}_3]_{|x \rightarrow x'}$ foi calculado por Gilkey [43], e o próximo coeficiente, $[\hat{a}_4]_{|x \rightarrow x'}$, foi obtido pela primeira vez para o caso geral por Avramidi em [36].

Finalmente, a ação efetiva (4.8) pode ser apresentada na forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2(4\pi i)^\omega} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\omega+1}} \exp(-ism^2) \sum_{k=0}^\infty (is)^k A_k, \tag{4.24}$$

onde os coeficientes A_k são definidos em termos dos coeficientes HMDS através da expressão

$$A_k := \text{sTr} \hat{a}_k = \varrho \int_M d \text{vol}(x) \text{tr} [\hat{a}_k]_{|x \rightarrow x'}. \tag{4.25}$$

Reescrevendo a expressão (4.24) na forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2(4\pi)^\omega} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_0^{\infty} ds (is)^{(k-\omega-1)} \exp(-ism^2), \quad (4.26)$$

pode-se ver facilmente que, em 2ω dimensões, os únicos termos no somatório que podem ser divergentes correspondem aqueles para os quais $k \leq \omega$. Em particular, no caso fisicamente interessante $2\omega = 4$, somente os coeficientes HMDS A_0 , A_1 e A_2 divergem [40]. Neste caso, o coeficiente A_0 define as divergências quárticas, o coeficiente A_1 define as divergências quadráticas e o coeficiente A_2 define as divergências logarítmicas ultravioletas.

O comportamento do *heat kernel* para pequenos valores de s corresponde ao limite ultravioleta da TQC. Isto pode ser informalmente justificado por notando que s tem dimensão de x^2 , e portanto pequenos valores de s corresponde a pequenas distâncias. Efeitos da TQC em pequenas distâncias, isto é, efeitos locais, inclui o fenômeno da polarização de vácuo. Por outro lado, grandes valores de s corresponde ao limite infravermelho, o qual é relacionado ao efeito de criação de partículas.

Como vemos, para se obter o limite infravermelho da TQC e, portanto, poder estudar outros efeitos de natureza não-local, necessitamos de uma outra representação para o *heat kernel* que seja válida uniformemente para todos os valores do parâmetro s .

4.2.2 Teoria de perturbação covariante

Um tal método, proposto por Vilkovisky em [44] e denominado teoria de perturbação covariante, foi sistematicamente desenvolvido em uma série de trabalhos [45 – 49] com Barvinsky e colaboradores. Esta técnica baseia-se na expansão covariante do *heat kernel* em potências das curvaturas (4.22). A proposta da teoria de perturbação covariante é obter todas as quantidades de interesse na forma de uma expansão covariante válida com precisão $\mathcal{O}(\mathfrak{R}^n)$, significando que as expressões derivadas contém termos até a ordem $(n-1)$ nas curvaturas (4.22) explicitamente. Seguindo a referência [45], a ação efetiva a *1-loop* até ordem quadrática nas curvaturas pode ser apresentada como⁶

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} = & \varrho \frac{1}{2(4\pi i)^\omega} \int_M d\text{vol}(x) \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\omega+1}} \exp(-ism^2) \text{tr} \left(\hat{1} + s\hat{P} + s^2 [\hat{1}R_{\mu\nu}f_1(\tau)R^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \hat{1}Rf_2(\tau)R + \hat{P}f_3(\tau)R + \hat{P}f_4(\tau)\hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu}f_5(\tau)\hat{S}^{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\mathfrak{R}^3) \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

⁶Resultados sobre a teoria de perturbação covariante em ordens superiores nas curvaturas \mathfrak{R} podem ser encontrados em [47].

sendo f_i funções analíticas (fatores de forma)⁷ da quantidade adimensional

$$\tau = -s \square, \quad (4.28)$$

os quais podem ser expressos em termos do fator de forma básico

$$f(\tau) = \int_0^1 d\alpha \exp[\alpha(\alpha - 1)\tau]. \quad (4.29)$$

A forma explícita deste conjunto de fatores de forma é

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{\tau^2}, & f_2(\tau) &= \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau) - 1}{24\tau} - \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{8\tau^2}, \\ f_3(\tau) &= \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau) - 1}{2\tau}, & f_4(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2}, & f_5(\tau) &= \frac{1 - f(\tau)}{2\tau}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Vale salientar que a sexta possível estrutura $R_{\mu\nu\alpha\beta}f(\tau)R^{\mu\nu\alpha\beta}$ não aparece em teoria de perturbação covariante. Ela é automaticamente eliminada via identidades de Bianchi [45].

A expansão apresentada em (4.27) corresponde a uma soma parcial da série local de Schwinger-DeWitt em somando todos os termos em uma dada ordem nas curvaturas \mathfrak{R} . Embora esta técnica ainda corresponda a uma expansão do $s\text{Tr}\hat{\mathcal{U}}_{\mathfrak{H}}(s)$ em potências da curvatura, nela seus coeficientes são quantidades não-locais (fatores de forma não-locais). Como pode ser visto em [45], podemos recuperar a original expansão local de Schwinger-DeWitt a partir da expressão (4.27) ao expandir os fatores de forma $f_i(\tau)$ em pequenos valores do parâmetro τ .

Ao contrário da expansão de Schwinger-DeWitt, a expansão (4.27) é válida para qualquer valor do tempo próprio s . Em geral, como é mostrado em [45], o comportamento para grandes valores de s do traço funcional $s\text{Tr}\hat{\mathcal{U}}_{\mathfrak{H}}(s)$ pode ser apresentado como

$$s\text{Tr}\hat{\mathcal{U}}_{\mathfrak{H}}(s) \propto s^{1-\omega}, \quad s \rightarrow \infty, \quad \mathfrak{R} \neq 0, \quad (4.31)$$

para todas as ordens em curvatura, exceto o termo de ordem zero. Esta propriedade garante a convergência das integrais em TQC no limite superior em dimensões do espaço-tempo $2\omega > 2$.

Posteriormente, no Capítulo (5), faremos uso dos resultados acima apresentados a fim de obtermos os fatores de forma juntamente das funções β associadas ao modelo de Yukawa em uma teoria com férmions massivos.

⁷O surgimento de fatores de forma não-locais na representação de espaço dos momentos da ação efetiva tem sua origem no artigo clássico de Schwinger [31].

Capítulo 5

Universalidade e ambiguidades em ações efetivas fermiônicas

Resumo¹

Neste capítulo discutimos uma ambiguidade na ação efetiva a *1-loop* de campos massivos que toma lugar em teorias fermiônicas massivas. A universalidade das divergências logarítmicas ultravioletas em diferentes dimensões do espaço-tempo leva à não-universalidade da parte finita da ação efetiva, a qual pode ser chamada por anomalia multiplicativa não-local. Os critérios gerais para a existência deste fenômeno são formulados e aplicados para operadores com diferentes campos externos.

¹O conteúdo deste capítulo se refere às seguintes publicações:

Berredo-Peixoto, G.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.: Phys. Rev. D **85**, 064025 (2012).

Pereira, D. D.: Proceedings of Science 2012 (023). Disponível em: <http://pos.sissa.it/>

5.1 Introdução

Os cálculos a *1-loop* têm um papel proeminente em TQC e em muitas de suas aplicações. No método de campo de fundo, as contribuições a *1-loop* podem ser sempre reduzidas a derivação de $\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}}$, como pode ser visto da Eq. (3.42), onde $\hat{\mathcal{H}}$ é tipicamente uma forma bilinear da ação clássica com respeito aos campos de fundo [23]. O operador $\hat{\mathcal{H}}$ usualmente depende do campo de fundo. Como um resultado, a operação de tomar o determinante funcional de um tal operador é matematicamente não-trivial devido a dimensão infinita da correspondente representação matricial deste operador. Em particular, relações tais como as Eqs. (2), as quais são certamente válidas para matrizes de dimensão finita, podem não ser verificadas dentro do arcabouço da TQC. Assim, é de grande interesse analisar o comportamento de tais relações quando aplicadas aos operadores da TQC, e verificar em quais condições esta igualdade possa ou não ser violada, dando origem ao fenômeno da anomalia multiplicativa em TQC.

Consideráveis esforços têm sido feitos com o objetivo de mostrar que uma tal situação possa tomar lugar em TQC [82 – 88]. Entretanto, em muitos trabalhos [89, 90], foi mostrado que esta violação está relacionada às ambiguidades no processo de renormalização. Em particular, este fenômeno pode acontecer quando os determinantes funcionais dos operadores são definidos por meio da assim chamada função ζ generalizada [91], porque este método oculta as divergências e fornece o resultado regularizado e renormalizado automaticamente. Então a dependência no parâmetro μ deve ser implementada artificialmente, e isto abre o caminho para a anomalia multiplicativa.

As ambiguidades mais bem conhecidas em TQC correspondem à dependência no ponto de renormalização (por exemplo, sobre o parâmetro μ no esquema de renormalização de subtrações mínimas) e à dependência de fixação de calibre em teorias de calibre. Usualmente, esta última pode ser eliminada *on-shell*, mas este procedimento pode ser não-trivial, especialmente além da aproximação de *1-loop*. Além do mais, o resultado depende fortemente do esquema de renormalização. Por exemplo, as funções β do grupo de renormalização em teorias massivas são diferentes quando calculadas através do esquema de subtrações mínimo simplificado (MS), ou via esquema de subtração de momentos. Em baixas energias, o uso deste último método permite observar o fenômeno de desacoplamento, o qual, em eletrodinâmica quântica, é conhecido como teorema de Appelquist e Carazzone [159]. De modo geral, podem existir outras ambiguidades nas contribuições

quânticas, incluindo aquelas que serão discutidas a seguir.

Existe um fato curioso sobre as divergências logarítmicas ultravioletas em TQC o qual será importante para nossa consideração. Na verdade, as divergências logarítmicas definem a parte mais estável e universal das correções quânticas. Por exemplo, tais divergências estão ligadas ao limite ultravioleta das funções β , o qual não depende do esquema de renormalização. Como vimos, as correções quânticas a *1-loop* são dadas pela Eq.(3.42). Muitas manipulações com tais expressões são justificadas para a parte ultravioleta, as quais são relacionadas às divergências logarítmicas, mas elas podem não valer por completo para a parte finita da ação efetiva. A razão para esta característica especial das divergências ultravioletas pode ser entendida como segue. Tais divergências estão relacionadas ao comportamento logarítmico da ação efetiva, e portanto são sempre relacionadas aos fatores de forma logarítmicos, os quais não dependem da massa do campo [160]. Por outro lado, os contratermos necessários para remover tais divergências são locais, logo pode-se completamente controlar a estrutura algébrica das divergências ultravioletas olhando na forma de termos locais na ação clássica da teoria. Ao mesmo tempo, os termos restantes são tipicamente não-locais e têm, na teoria quântica de campos massivos, uma estrutura muito mais complicada. Por esta razão, podemos esperar que tais termos são essencialmente muito mais ambíguos também.

Recentemente foi obtido um primeiro exemplo na eletrodinâmica quântica [92, 93] onde o cálculo do determinante funcional para o correspondente operador pode ser apresentado como uma expressão não-local e, portanto, não pode ser explicado em termos de ambiguidades relacionadas ao processo de renormalização.

É interessante notar que até o atual estágio de nosso conhecimento, depois de Salam [160], a universalidade das divergências ultravioletas não foram mais explorados no nível formal. Mostraremos que a universalidade das divergências ultravioletas está diretamente relacionada à não-universalidade das contribuições finitas em teorias massivas. Este fenômeno pode ser observado em determinantes funcionais de operadores fermiônicos o qual denominaremos por *anomalia multiplicativa não-local* [161, 162]. No que segue, discutiremos este fenômeno para um determinante fermiônico geral e também consideramos em detalhes o caso de um férmion de Dirac acoplado a um campo escalar externo via interação de Yukawa. Por último, realizamos uma análise qualitativa sobre a anomalia multiplicativa não-local e sua relação com os coeficientes HMDS.

5.2 Considerações gerais

Considere a ação efetiva a *1-loop* para um férmion de Dirac acoplado a um campo externo $\hat{\Theta}$ sobre um espaço-tempo curvo. Segundo a Eq.(3.41), temos

$$\exp(i\bar{\Gamma}^{(1)}) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp(iS_f), \quad (5.1)$$

onde a ação fermiônica S_f é definida como

$$S_f = \int_M d\text{vol}(x) \bar{\psi} \hat{\mathcal{H}} \psi, \quad (5.2)$$

e o operador $\hat{\mathcal{H}}$ tem a forma

$$\hat{\mathcal{H}} = i(\gamma^\mu \nabla_\mu - im\hat{1} - i\hat{\Theta}). \quad (5.3)$$

Na expressão acima, $\hat{1}$ corresponde à matriz identidade no espaço dos correspondentes campos quânticos, ao passo que $\hat{\Theta}$ representa uma notação condensada para um conjunto genérico de campos externos. Por exemplo, podemos considerar

$$\hat{\Theta} = h\varphi\hat{1} + h^*\gamma^5\chi + e\gamma^\mu A_\mu + \eta\gamma^5\gamma^\mu S_\mu - \frac{\mu_B}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots, \quad (5.4)$$

onde h e h^* são constantes de acoplamento de Yukawa correspondentes a campos escalar e escalar axial, respectivamente, e é a carga elétrica, η é o acoplamento não-mínimo do vetor axial relacionado à torsão, μ_B é o momento magnético anômalo do elétron, etc. Para mais informações sobre a estrutura geral do operador $\hat{\Theta}$, veja o trabalho [163] (bem como as referências nele contidas), o qual foi considerado no ramo de teorias com quebra de simetria CPT/Lorentz.

Para campos complexos, a expressão (3.42) assume a forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -i \ln \text{sDet } \hat{\mathcal{X}}. \quad (5.5)$$

Nosso objetivo é avaliar a expressão acima através da técnica de Schwinger-DeWitt. Para isso, devemos reduzir o problema a derivação de $\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{X}}$, onde o operador $\hat{\mathcal{X}}$ possa ser apresentado segundo a Eq.(4.19). De modo a implementar tal redução, deve-se multiplicar o operador $\hat{\mathcal{H}}$ por um dado operador $\hat{\mathcal{H}}^*$

$$\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathcal{H}}^*, \quad (5.6)$$

e usar a relação [164]

$$\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}} = \ln \text{sDet } \hat{\mathcal{X}} - \ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}}^*. \quad (5.7)$$

Na verdade, existem diferentes maneiras de se escolher o operador $\hat{\mathcal{H}}^*$. A escolha mais simples é

$$\hat{\mathcal{H}}_1^* \equiv \hat{\mathcal{H}} = i(\gamma^\mu \nabla_\mu - im\hat{1} - i\hat{\Theta}), \quad (5.8)$$

logo

$$\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \ln \text{sDet } (\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{H}}_1^*). \quad (5.9)$$

Uma escolha alternativa para este operador é

$$\hat{\mathcal{H}}_2^* = i(\gamma^\mu \nabla_\mu - im\hat{1}). \quad (5.10)$$

Este operador não depende do campo $\hat{\Theta}$ e, portanto,

$$\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}} \Big|_{\hat{\Theta}} = \ln \text{sDet } (\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{H}}_2^*) \Big|_{\hat{\Theta}}, \quad (5.11)$$

onde o índice $\hat{\Theta}$ significa que somente a parte dependente deste campo é considerada.

Dos resultados acima, é fácil notar que se as relações (2) são válidas para determinantes funcionais fermiônicos, devemos ter

$$\frac{1}{2} \ln \text{sDet } (\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{H}}_1^*) \Big|_{\hat{\Theta}} = \ln \text{sDet } (\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{H}}_2^*) \Big|_{\hat{\Theta}}. \quad (5.12)$$

Como veremos, na realidade a relação (5.12) é satisfeita para as divergências logarítmicas ultravioletas, mas não é válida para as divergências tipo potências, bem como para a parte finita não-local das duas ações efetivas.

5.2.1 Coeficiente A_1

Considere a teoria associada ao operador fermiônico geral (5.3). Estamos interessados em obter o primeiro coeficiente não-trivial HMDS e avaliar a validade da expressão (5.12). Para isso, faremos uso dos operadores (5.8) e (5.10). Denotaremos por $A_1^{(1)}$ o coeficiente obtido a partir do primeiro esquema de cálculo (relacionado ao operador $\hat{\mathcal{H}}_1^*$), ao passo que o coeficiente $A_1^{(2)}$ corresponde ao segundo esquema de cálculo, no qual emprega-se o operador $\hat{\mathcal{H}}_2^*$.

Desta forma, fazendo uso das Eqs.(4.23) e (4.25), encontramos

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}(n, \hat{\Theta}) \Big|_{\Theta} &= \frac{1}{2} \int_M d \text{vol}(x) \left\{ 2(n-1)m \text{tr}(\hat{\Theta}) + \frac{(n-2)}{2} \text{tr}(\hat{\Theta}\hat{\Theta}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\Theta}\gamma^\mu \hat{\Theta}\gamma_\mu) \right\}, \\ A_1^{(2)}(n, \hat{\Theta}) \Big|_{\Theta} &= \frac{1}{2} \int_M d \text{vol}(x) \left\{ 2(n-1)m \text{tr}(\hat{\Theta}) + i \text{tr}(\nabla_\mu \hat{\Theta}\gamma^\mu) + \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\Theta}\gamma^\mu \hat{\Theta}\gamma_\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A diferença entre estas duas expressões pode ser apresentada como

$$A_1^{(1)}(n, \hat{\Theta}) \Big|_{\Theta} - A_1^{(2)}(n, \hat{\Theta}) \Big|_{\Theta} = \frac{1}{4} \int_M d \text{vol}(x) \Delta_1(n, \hat{\Theta}), \quad (5.14)$$

onde

$$\Delta_1(n, \hat{\Theta}) := \left\{ (n-2) \text{tr}(\hat{\Theta}\hat{\Theta}) - 2i \text{tr}(\nabla_\mu \hat{\Theta} \gamma^\mu) \right\}. \quad (5.15)$$

Podemos ver que tal diferença consiste de dois termos. O primeiro termo é proporcional a $(n-2)$. Conforme discutido na seção (4.2), em $n = 2$ o coeficiente A_1 define as divergências logarítmicas ultravioletas. Portanto, nesta particular dimensão tais divergências não são dependentes do esquema de cálculo. Por outro lado, devido ao fator $(n-2)$, tal termo não se anula em $n \neq 2$ e, assim, as divergências quadráticas em $(n = 4)$ (definidas através do coeficiente A_1) são dependentes do esquema de cálculo. O outro termo em (5.15) é um termo de superfície, o qual é também relevante, mas por razões diferentes. Inicialmente vale salientar que esta forma de ambiguidade não é relacionada à massa do campo quântico e, portanto, tem origem absolutamente diferente comparada ao primeiro termo. Conforme discutido anteriormente na literatura sobre anomalia conforme [165 – 167], a derivada total nos contratermos, em teorias não-massivas classicamente conformes, contribui para termos locais na ação efetiva induzida por anomalia. Como uma consequência, tais termos locais têm um grau de ambiguidade muito maior do que os termos não-locais na ação efetiva induzida por anomalia os quais podem ser classificados em uma maneira regular [168]. Resumindo, a diferença (5.15) inclui dois termos de origem diferente os quais representam duas formas distintas de ambiguidades em TQC, e portanto não podem se cancelar.

Embora seja tecnicamente possível realizar uma análise da ação efetiva através dos coeficientes HMDS em ordem superiores, tais expressões nos levam a resultados muito complicados. Por esta razão, é interessante analisar primeiro alguns casos particulares da expressão (5.4) mesmo a nível de A_1 .

- *Modelo de Yukawa*

Para o modelo de Yukawa, o operador $\hat{\Theta}$ assume a forma $\hat{\Theta} = h\phi\hat{1}$. Deste modo, substituindo esta expressão na Eq.(5.15), encontramos

$$\Delta_1 = n(n-2)h^2\phi^2 - 2ih\nabla_\mu\phi\text{tr}(\gamma^\mu) = n(n-2)h^2\phi^2, \quad (5.16)$$

mostrando que somente as divergências logarítmicas UV são universais (independentes do esquema de cálculo).

- *Eletrodinâmica Quântica*

No caso da eletrodinâmica quântica, o operador $\hat{\Theta}$ é dado por $\hat{\Theta} = eA_\mu\gamma^\mu$. Assim, temos

$$\Delta_1 = (n-2)eA_\mu A^\mu - 2i\nabla_\mu A^\mu. \quad (5.17)$$

Temos, neste caso, as duas formas de ambiguidades mencionadas acima. O resultado acima está de acordo com a recente publicação [92].

- *Momento magnético anômalo*

Para o operador $\hat{\Theta}$ associado ao momento magnético anômalo, ou seja, $\hat{\Theta} = -\frac{\mu_B}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (n-2)\frac{\mu_B^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\text{tr}[\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}] + i\mu_B\nabla_\mu F^{\alpha\beta}\text{tr}[\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\mu] \\ &= n(n-2)\frac{\mu_B^2}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

O resultado acima é qualitativamente similar ao obtido para o modelo de Yukawa.

- *Torção*

Finalmente, considere o operador $\hat{\Theta}$ associado a torção absolutamente anti-simétrica $\hat{\Theta} = \eta\gamma^5\gamma^\mu S_\mu$. Como a matriz γ^5 é definida somente em $n = 4$, consideramos somente esta dimensão particular. Neste caso, temos

$$\Delta_1 = 2\eta^2 S_\mu S_\nu \text{tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu] - 2i\eta(\nabla_\mu S_\nu)\text{tr}[\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu] = -8\eta^2 S_\mu S^\mu. \quad (5.19)$$

Conforme já discutido, em $n = 4$ o coeficiente A_1 define as divergências quadráticas. Assim, é fácil ver do resultado acima que tal forma de divergência é ambígua em $n = 4$.

5.3 Teoria de Yukawa

5.3.1 Coeficiente A_2

Vamos agora explorar a estrutura das divergências logarítmicas ultravioletas em $n = 4$ associadas à teoria de Yukawa. Para isto, devemos derivar o coeficiente A_2 . Analogamente a seção anterior, realizaremos tal objetivo através dos dois esquemas de cálculo relacionados aos operadores $\hat{\mathcal{H}}_1^*$ e $\hat{\mathcal{H}}_2^*$.

Fazendo uso do operador $\hat{\mathcal{H}}_1^*$, encontramos os seguintes operadores associados ao primeiro esquema de cálculo

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(1)} &= \left\{ (n-1)m^2 - \frac{1}{12}R + \frac{1}{2}(n-1)h^2\phi^2 + (n-1)mh\phi \right\} \hat{1}, \\ \hat{S}_{\mu\nu}^{(1)} &= -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} + 2ih\gamma_{[\nu}\nabla_{\mu]}\phi + 2(m+h\phi)^2\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]},\end{aligned}\quad (5.20)$$

ao passo que os operadores

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(2)} &= \left\{ (n-1)m^2 - \frac{1}{12}R + \frac{n}{4}h^2\phi^2 + (n-1)mh\phi \right\} \hat{1} + \frac{i}{2}h\gamma^\mu\nabla_\mu\phi, \\ \hat{S}_{\mu\nu}^{(2)} &= -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} + ih\gamma_{[\nu}\nabla_{\mu]}\phi + \frac{1}{2}(2m+h\phi)^2\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]}\end{aligned}\quad (5.21)$$

foram obtidos através do segundo esquema de cálculo (associado ao operador $\hat{\mathcal{H}}_2^*$).

Deste modo, encontramos, a partir das Eqs.(4.23) e (4.25)²

$$A_2^{(k)}(n, \phi)\Big|_\phi = \int_M d\text{vol}(x) \left\{ C_0^{(k)} + C_1^{(k)}\phi + C_2^{(k)}\phi^2 + C_3^{(k)}\phi^3 + C_4^{(k)}\phi^4 \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned}C_0^{(1)} &:= \frac{nh^2}{12}(n-1)(\nabla\phi)^2 - \frac{nmh}{6}\square\phi, & C_0^{(2)} &:= \frac{nh^2}{24}(n-2)(\nabla\phi)^2 - \frac{nmh}{6}\square\phi, \\ C_1^{(1)} &:= \frac{nmh}{12}(3-n)R + \frac{nm^3h}{3}(n-3)(n-1) + \frac{nh^2}{6}(n-1)\square\phi, \\ C_1^{(2)} &:= \frac{nmh}{12}(3-n)R + \frac{nm^3h}{3}(n-3)(n-1) + \frac{n^2h^2}{12}\square\phi, \\ C_2^{(1)} &:= \frac{nh^2}{24}(3-n)R + \frac{nm^2h^2}{6}(9-4n+2n^2), \\ C_2^{(2)} &:= \frac{nh^2}{48}(2-n)R + \frac{nm^2h^2}{4}(n-2)(n-1), \\ C_3^{(1)} &:= \frac{nmh^3}{3}(n-3)(n-1), & C_3^{(2)} &:= \frac{nmh^3}{12}(n-1), \\ C_4^{(1)} &:= \frac{nh^4}{12}(n-3)(n-1), & C_4^{(2)} &:= \frac{n^2h^4}{96}(n+2).\end{aligned}\quad (5.23)$$

A diferença $A_2^{(1)}(n, \phi)\Big|_\phi - A_2^{(2)}(n, \phi)\Big|_\phi$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}A_2^{(1)}(n, \phi)\Big|_\phi - A_2^{(2)}(n, \phi)\Big|_\phi &= \int_M d\text{vol}(x) \left\{ \frac{1}{4} \left[m^2h^2\phi^2 + mh^3\phi^3 + \frac{7}{24}h^4\phi^4 \right] (n-4)^3 \right. \\ &+ \frac{1}{4} \left[7m^2h^2\phi^2 - \frac{1}{12}Rh^2\phi^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2h^2 + 7mh^3\phi^3 + \frac{25}{12}h^4\phi^4 \right] (n-4)^2 \\ &+ \left[3m^2h^2\phi^2 - \frac{1}{12}Rh^2\phi^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2h^2 + 3mh^3\phi^3 + \frac{11}{12}h^4\phi^4 \right] (n-4) \\ &\left. + \frac{1}{3}h^2\square\phi^2 \right\}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

²Como estamos interessados nos efeitos devidos aos campos de matéria, não consideramos em nossa análise o setor gravitacional da correspondente teoria.

É fácil ver que, assim como na expressão (5.15), tal diferença consiste de duas formas de termos. Todos os termos da expressão acima, exceto o último, anulam-se em $n = 4$. Este aspecto está em perfeito acordo com o fato das divergências logarítmicas ultravioletas em $n = 4$ (definidas a partir do coeficiente A_2) serem universais. Por outro lado, o último termo na Eq.(5.24) tem origem absolutamente diferente. Ele mostra a não-universalidade dos termos de superfície nas divergências logarítmicas ultravioletas. Conforme mostrado em [167], a ambiguidade no termo $\square\phi^2$ nas divergências a *1-loop* leva, no caso não-massivo, a uma ambiguidade no correspondente termo na anomalia do traço e, finalmente, resulta no termo ambíguo $R\phi^2$ na ação efetiva induzida por anomalia.

5.3.2 Fatores de forma e funções β

Neste trabalho estamos principalmente interessados nas correções quânticas a *1-loop* associadas aos campos de matéria³. Assim, é suficiente calcularmos as integrais envolvendo as funções f_3 , f_4 e f_5 em (4.27). Deste modo, substituindo as Eqs.(5.20) e (5.21) na Eq.(4.27), e usando as notações,

$$t = sm^2, \quad u = \frac{\tau}{t} = -\frac{\square}{m^2}, \quad Y = 1 - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{2+a}{2-a} \right), \quad a^2 = \frac{4\square}{\square - 4m^2}, \quad (5.25)$$

bem como os resultados conhecidos para as integrais [169],⁴

$$\begin{aligned} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{t^\omega u} &= \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) - \frac{4Y}{3a^2} + \frac{1}{18} \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \\ \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{t^\omega u} &= \left[\frac{a^2 - 4}{4a^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \\ \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{1-\omega} f(tu) &= \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2Y \right) + \mathcal{O}(2-\omega), \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde

$$\frac{1}{\varepsilon} := \frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right), \quad (5.27)$$

podemos apresentar a contribuição quântica a *1-loop* para a ação efetiva associada aos termos relevantes $\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$, $R\phi^2$ e $\phi^2\phi^2$ de modo geral como

$$\{\bar{\Gamma}^{(1)}\}^{(1,2)} = \frac{1}{2} \int_M d\text{vol}(x) \left\{ \nabla_\mu\phi k_{kin}^{(1,2)}(a) \nabla^\mu\phi + \phi^2 k_{R\phi^2}^{(1,2)}(a) R + \phi^2 k_{\phi^2\phi^2}^{(1,2)}(a) \phi^2 \right\}, \quad (5.28)$$

³Para mais detalhes sobre a derivação das correções quânticas associadas ao setor gravitacional, veja [169 – 171].

⁴Tais integrais estão avaliadas em quatro dimensões. Portanto, nesta seção, nossa análise se restringe ao caso quadri-dimensional.

onde

$$\begin{aligned}
k_{R\phi^2}^{(1)}(a) &= -\frac{h^2}{9(4\pi)^2 a^2}(-14a^2 + 45Y a^2 - 168Y), \\
k_{\phi^2 \phi^2}^{(1)}(a) &= \frac{2h^4}{3(4\pi)^2 a^2}(-8a^2 + 27Y a^2 - 96Y), \\
k_{kin}^{(1)}(a) &= -\frac{2h^2}{3(4\pi)^2 a^2}(a^2 + 12Y),
\end{aligned} \tag{5.29}$$

correspondem aos fatores de forma obtidos a partir do primeiro esquema de cálculo (através do operador $\hat{\mathcal{H}}_1^*$), ao passo que

$$\begin{aligned}
k_{R\phi^2}^{(2)}(a) &= -\frac{h^2}{3(4\pi)^2 a^2}(-3a^2 + 10Y a^2 - 36Y), \\
k_{\phi^2 \phi^2}^{(2)}(a) &= \frac{2h^4}{3(4\pi)^2 a^2}(6Y a^2 - a^2 - 12Y), \\
k_{kin}^{(2)}(a) &= -\frac{h^2}{3(4\pi)^2 a^2}(a^2 + 3Y a^2 + 12Y),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

representam os correspondentes fatores de forma associados ao segundo esquema de cálculo obtidos a partir do operador $\hat{\mathcal{H}}_2^*$.

Vamos, agora, analisar o comportamento das expressões anteriores em função da escala de energia. Em altas energias, observamos que o limite ultravioleta ($a \rightarrow 2$) destas expressões coincidem

$$\begin{aligned}
k_{R\phi^2}^{(1,2) UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} k_{R\phi^2}^{(1,2)}(a) = -\frac{h^2}{6(4\pi)^2} \ln(a - 2), \\
k_{\phi^2 \phi^2}^{(1,2) UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} k_{\phi^2 \phi^2}^{(1,2)}(a) = \frac{h^4}{(4\pi)^2} \ln(a - 2), \\
k_{kin}^{(1,2) UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} k_{kin}^{(1,2)}(a) = -\frac{h^2}{(4\pi)^2} \ln(a - 2).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

A razão é que este limite está relacionado às divergências logarítmicas em $n = 4$ e, portanto, são universais. Entretanto, isto não é válido para os próprios fatores de forma, conforme pode ser observado das Eqs.(5.29) e (5.30). Por outro lado, em baixas energias, o limite infravermelho ($a \rightarrow 0$) para os mesmos fatores de forma apresentam resultados

diferentes

$$\begin{aligned}
k_{R\phi^2}^{(1) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{R\phi^2}^{(1)}(a) = \frac{11h^2}{60(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\
k_{R\phi^2}^{(2) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{R\phi^2}^{(2)}(a) = \frac{23h^2}{180(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\
k_{\phi^2 \phi^2}^{(1) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{\phi^2 \phi^2}^{(1)}(a) = -\frac{7h^4}{10(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\
k_{\phi^2 \phi^2}^{(2) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{\phi^2 \phi^2}^{(2)}(a) = -\frac{7h^4}{30(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\
k_{kin}^{(1) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{kin}^{(1)}(a) = \frac{h^2}{10(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\
k_{kin}^{(2) IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} k_{kin}^{(2)}(a) = \frac{2h^2}{15(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4),
\end{aligned} \tag{5.32}$$

explicitando, mais uma vez, o fenômeno da anomalia multiplicativa.

Outra maneira de se observar a anomalia multiplicativa em teorias massivas é através das funções β físicas. Tais funções β para a carga efetiva C podem ser definidas no arcabouço do esquema de renormalização de subtração de momentos como [52]

$$\beta_C := \lim_{n \rightarrow 4} M \frac{dC}{dM}, \tag{5.33}$$

onde a subtração das divergências é feita em $p^2 = M^2$, sendo M o ponto de renormalização. Este resultado é diferente da função β obtida para a mesma quantidade através do esquema de renormalização de subtrações mínimas, o qual é dado por

$$\beta_C^{MS} := \lim_{n \rightarrow 4} \mu \frac{dC}{d\mu}. \tag{5.34}$$

Vale dizer que ambas as afirmações anteriores são também válidas para as funções γ , as quais são relacionadas à renormalização dos termos cinéticos (γ_{kin}) na teoria de campo escalar.

Na representação de momentos, podemos reescrever a última expressão das Eqs. (5.25) na forma

$$a^2(p) = \frac{4p^2}{p^2 + 4m^2}. \tag{5.35}$$

Notemos que para o cálculo da função β dada pela Eq. (5.33), a derivada $p \frac{dC}{dp}$ pode ser apresentada na forma

$$p \frac{dC}{dp} = p \frac{da}{dp} \frac{dC}{da} = \frac{p^2}{a} \frac{da^2}{dp^2} \frac{dC}{da}. \tag{5.36}$$

Assim, substituindo a Eq. (5.35) na Eq. (5.36), a derivada (5.33) pode ser expressa em termos do parâmetro a através da expressão [92]

$$-p \frac{dC}{dp} = (4 - a^2) \frac{a}{4} \frac{dC}{da}. \quad (5.37)$$

Usando este procedimento, encontramos o seguinte conjunto de funções β associadas aos fatores de forma (5.29) e (5.30)

$$\begin{aligned} \beta_\xi^{(1)}(a) &:= -p \frac{dk_{R\phi^2}^{(1)}(a)}{dp} = \frac{h^2}{12(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2(15a^2 - 56) + (228a^2 - 672 - 15a^4)Y \right\}, \\ \beta_\xi^{(2)}(a) &:= -p \frac{dk_{R\phi^2}^{(2)}(a)}{dp} = \frac{h^2}{6(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2(5a^2 - 18) + (74a^2 - 216 - 5a^4)Y \right\}, \\ \beta_\lambda^{(1)}(a) &:= -p \frac{dk_{\phi^2\phi^2}^{(1)}(a)}{dp} = -\frac{h^4}{2(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2(9a^2 - 32) + (132a^2 - 384 - 9a^4)Y \right\}, \\ \beta_\lambda^{(2)}(a) &:= -p \frac{dk_{\phi^2\phi^2}^{(2)}(a)}{dp} = -\frac{h^4}{(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2(a^2 - 2) + (10a^2 - 24 - a^4)Y \right\}, \\ \gamma_{kin}^{(1)}(a) &:= -p \frac{dk_{kin}^{(1)}(a)}{dp} = \frac{2h^2}{(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2 + (12 - 3a^2)Y \right\}, \\ \gamma_{kin}^{(2)}(a) &:= -p \frac{dk_{kin}^{(2)}(a)}{dp} = \frac{h^2}{4(4\pi)^2 a^2} \left\{ a^2(a^2 + 4) + (48 - 8a^2 - a^4)Y \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Tais funções β admitem o mesmo comportamento qualitativo associado aos fatores de forma (5.29) e (5.30), ou seja, seu limite ultravioleta é independente do esquema de cálculo

$$\begin{aligned} \beta_\xi^{(1,2)UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} \beta_\xi^{(1,2)}(a) = \frac{h^2}{3(4\pi)^2}, \\ \beta_\lambda^{(1,2)UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} \beta_\lambda^{(1,2)}(a) = -\frac{2h^4}{(4\pi)^2}, \\ \gamma_{kin}^{(1,2)UV} &:= \lim_{a \rightarrow 2} \gamma_{kin}^{(1,2)}(a) = \frac{2h^2}{(4\pi)^2}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

ao passo que seu limite infravermelho indica, novamente, uma ambiguidade no teorema de Appelquist e Carazzone [159]

$$\begin{aligned} \beta_\xi^{(1)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \beta_\xi^{(1)}(a) = \frac{11h^2}{30(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\ \beta_\xi^{(2)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \beta_\xi^{(2)}(a) = \frac{23h^2}{90(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\ \beta_\lambda^{(1)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \beta_\lambda^{(1)}(a) = -\frac{7h^4}{5(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\ \beta_\lambda^{(2)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \beta_\lambda^{(2)}(a) = -\frac{7h^4}{15(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\ \gamma_{kin}^{(1)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \gamma_{kin}^{(1)}(a) = \frac{h^2}{5(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4), \\ \gamma_{kin}^{(2)IR} &:= \lim_{a \rightarrow 0} \gamma_{kin}^{(2)}(a) = \frac{4h^2}{15(4\pi)^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Vemos que em todos os casos o desacoplamento nas Eqs.(5.40) é quadrático, de acordo com o teorema de Appelquist e Carazzone. Contudo, estes resultados estão associados a coeficientes diferentes, os quais são dependentes do esquema de cálculo empregado.

5.4 Sobre a origem da anomalia multiplicativa

Como podemos entender o surgimento da anomalia multiplicativa em TQC? Dito de outro modo, como podemos entender a diferença obtida em nossos cálculos por meio de nossa análise baseada nos operadores $\hat{\mathcal{H}}_1^*$ e $\hat{\mathcal{H}}_2^*$? Vamos notar que a operação de introduzir o operador $\hat{\mathcal{H}}^*$, através da Eq.(5.6), pode ser vista de diferentes maneiras.

Primeiramente, devemos lembrar que os limites de coincidência $[\hat{a}_k]_{x \rightarrow x'}$ dos coeficientes HMDS permitem analisar a renormalização da ação efetiva em uma dada dimensão do espaço-tempo para numerosos modelos de TQC. Por exemplo, no espaço 2-dimensional o limite de coincidência $[\hat{a}_1]_{x \rightarrow x'}$ define as divergências logarítmicas. No espaço 4-dimensional, $[\hat{a}_2]_{x \rightarrow x'}$ define as divergências logarítmicas, enquanto $[\hat{a}_1]_{x \rightarrow x'}$ está associado às divergências quadráticas. No espaço 6-dimensional, $[\hat{a}_3]_{x \rightarrow x'}$ define as divergências logarítmicas, $[\hat{a}_2]_{x \rightarrow x'}$ determina as divergências quadráticas e $[\hat{a}_1]_{x \rightarrow x'}$ define as divergências quárticas. De modo geral, $[\hat{a}_k]_{x \rightarrow x'}$ define as divergências logarítmicas em $2k$ dimensões.

Como vemos da Eq.(4.12), o *heat kernel* $\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\mathcal{H}}}$ pode ser escrito como uma série assintótica nos coeficientes HMDS \hat{a}_k . Uma importante observação é que as expressões gerais para os coeficientes \hat{a}_k não dependem da dimensão do espaço-tempo. Entretanto, seu traço funcional A_k depende da dimensão n [172, 173]. Como uma consequência, a ação efetiva (4.24) também dependerá da dimensão n . Como já discutido anteriormente, as divergências logarítmicas ultravioleta são universais e independentes do esquema de cálculo. Desta forma, os limites de coincidência $[\hat{a}_k]_{x \rightarrow x'}$ serão universais em $2k$ dimensões, e não-universais em qualquer outra dimensão diferente de $2k$. É fácil entender o significado desta última afirmação. A parte finita da ação efetiva (4.24) em 2ω dimensões é dada por uma soma de todos os coeficientes A_k com $k > \omega$. Como tais coeficientes são dependentes do esquema de cálculo em 2ω dimensões, a parte finita da ação efetiva, bem como as divergências tipo-potências, serão não-universais nesta particular dimensão [164]. Na verdade, esta diferença é exatamente o que observamos ao calcular os coeficientes HMDS, os fatores de forma e as funções β através dos dois esquemas de cálculo definidos a partir

dos operadores $\hat{\mathcal{H}}_1^*$ e $\hat{\mathcal{H}}_2^*$.

Outra possível forma de entender tal diferença em nossos resultados pode ser vista a partir da relação (5.7). Como exemplo, considere a teoria da eletrodinâmica quântica, na qual o operador $\hat{\Theta}$ assume a forma $\hat{\Theta} = eA_\mu\gamma^\mu$. Para o segundo esquema de cálculo, baseado no operador $\hat{\mathcal{H}}_2^*$, temos

$$\ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathcal{H}}_2^* = \ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}} + \ln \text{sDet } \hat{\mathcal{H}}_2^*. \quad (5.41)$$

Os dois termos do lado direito desta equação são invariantes de calibre por razões óbvias. O primeiro termo é resultado de uma integração funcional invariante de calibre, ao passo que o segundo termo não se transforma sob tal transformação, simplesmente por não depender do potencial eletromagnético A_μ . Por outro lado, o termo do lado esquerdo desta equação não é invariante de calibre. Assim, a violação desta simetria na relação acima está diretamente relacionada à violação das identidades (2).

Vale a pena mencionar que os fatores de forma, bem como as funções β obtidos, correspondem a quantidades não-locais. Logo, é fácil ver que esta ambiguidade na ação efetiva não pode ser associada à ambiguidades relacionadas ao processo de renormalização, onde os contratermos necessários para cancelar as divergências constituem expressões locais segundo o teorema de Weinberg [94, 95]. Deste modo, temos encontrado uma nova forma de ambiguidade na ação efetiva, denominada anomalia multiplicativa não-local, a qual é independente do esquema de renormalização.⁵

⁵Outra possibilidade é considerar alguma versão não-usual de TQC, por exemplo, na presença de um potencial químico. Neste caso, pode-se observar a anomalia multiplicativa no setor local da teoria, a qual depende deste parâmetro, e não necessariamente se reduz à dependência do parâmetro μ . Para mais informações, veja [174, 175].

Capítulo 6

Correções quânticas a *1-loop* para gravitação massiva

Resumo¹

No presente capítulo as divergências a *1-loop* são calculadas para um recente modelo proposto de gravitação massiva livre de fantasmas, onde a ação depende tanto da métrica quanto do campo tensorial externo f . A estrutura não polinomial do termo massivo é reduzida a uma forma padrão por meio do campo tensorial auxiliar, o qual é determinado *on-shell* depois que os cálculos quânticos são realizados. Como deve-se esperar, os contra-termos não reproduzem a forma da ação clássica. Além do mais, o resultado tem a forma de uma série de potências em f .

¹O conteúdo deste capítulo se refere à seguinte publicação:

Buchbinder, I. L.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.: Phys. Lett. B **712**, 104 - 108 (2012).

6.1 Introdução

É bem sabido que a relatividade geral é a teoria dinâmica não-linear do campo tensorial simétrico $g_{\mu\nu}$ no espaço-tempo curvo [5, 130]. Na aproximação linear, esta teoria descreve a propagação de partículas não-massivas com representação de spin 2 do grupo de Poincaré. A teoria dinâmica de partículas massivas com representação de spin 2 do grupo de Poincaré foi construída por Fierz e Pauli [96] em termos de um campo tensorial de segundo rank no espaço-tempo de Minkowski. Assim, é natural pensar que deveria existir uma teoria dinâmica não-linear em termos de um campo tensorial simétrico de segundo *rank* cujo limite linear corresponde à teoria de Fierz-Pauli. Entretanto, durante muito tempo tal teoria não tem sido construída.

Uma maneira evidente de se encontrar uma generalização não-linear para a teoria de Fierz-Pauli seria adicionar alguma forma de termo à lagrangiana da relatividade geral. Poderia ser uma constante cosmológica, porém no limite linear o termo cosmológico não fornece um verdadeiro termo massivo à teoria de Fierz-Pauli. Como um resultado, a única maneira de se inserir um termo de massa na lagrangiana da relatividade geral é usar, além da métrica, um campo tensorial extra de segundo *rank* (métrica de referência) e encontrar um acoplamento entre a métrica e este campo tensorial extra de tal forma que na aproximação linear para ambos a métrica e este campo tensorial extra no espaço-tempo de Minkowski, tal acoplamento deva gerar um verdadeiro termo de massa na teoria de Fierz-Pauli.

A extensão da relatividade geral descrita acima foi estudada em detalhes por Boulware e Deser [100, 101]. Eles mostraram que inserindo um termo de massa com a ajuda de um campo tensorial extra de segundo rank pode produzir, em geral, uma teoria inconsistente, tendo assim a propagação de um campo fantasma (fantasmas de Boulware-Deser). No entanto, recentemente, houve um enorme progresso na construção de uma família de teorias dinâmicas não-lineares que estão livres do problema de fantasmas de Boulware-Deser (para uma revisão sobre o assunto, veja a lista de trabalhos [102 – 110]). Como um resultado, no presente momento podemos ter lagrangianas que satisfazem ao seguinte conjunto de condições: (i) descrevem consistentemente um campo tensorial dinâmico não-linear de segundo *rank* livre de fantasmas, (ii) tem um número de graus de liberdade extra se propagando igual ao campo tensorial massivo de spin 2, (iii) depende da métrica de referência e de algum parâmetro de massa m , tal que no limite $m = 0$ reproduz a lagrangiana da

relatividade geral sem constante cosmológica, (*iv*) reproduz a lagrangiana da teoria de Fierz-Pauli na aproximação linear para a métrica dinâmica e a métrica de referência no espaço-tempo de Minkowski.

Neste capítulo, estudamos alguns aspectos quânticos para um modelo recentemente proposto de gravitação massiva livre de fantasmas de Boulware-Deser [112]. Para ser mais preciso, iremos calcular as divergências a *1-loop* para uma teoria de gravitação massiva mínima [107 – 110] e investigar sua estrutura. É claro, a teoria da gravitação massiva é, assim como a relatividade geral, não-renormalizável, desde que a lagrangiana da gravitação massiva deve incluir a lagrangiana da relatividade geral e, portanto, deve levar à contratermos quadráticos no tensor de curvatura na aproximação de *1-loop*. A fim de encontrarmos as divergências a *1-loop*, faremos uso do método de campo de fundo, bem como da técnica de Schwinger-DeWitt.

Embora a teoria sob consideração seja não-renormalizável, pode-se esperar que ela apresente muitas características interessantes no domínio quântico. Em primeiro lugar, podemos citar a complicada estrutura dos índices tensoriais no termo massivo. Além do mais, sua decomposição em campos de fundo e quântico (o qual é o elemento básico do método de campo de fundo) é não-trivial. Em segundo lugar, o determinante funcional definindo a ação efetiva a *1-loop* tem uma estrutura diferente e, de fato, muito mais complicado quando comparado ao caso não-massivo da relatividade geral. Portanto, o método efetivo de avaliação pode exigir alguma modificação no método de cálculo. Em terceiro lugar, é interessante estudar se as divergências a *1-loop* da teoria de gravitação massiva desaparecem on-shell, como é o caso da relatividade geral não-massiva. Em quarto lugar, espera-se que as divergências a *1-loop* da teoria de gravitação massiva dependam da métrica de referência. Como um resultado, obtem-se as divergências a *1-loop* em termos de funcionais covariantes gerais específicos dependendo da métrica de referência. Eles podem ser considerados como possíveis candidatos para ações da métrica de referência se tratarmos tal métrica como um campo dinâmico. A questão da lagrangiana para a métrica de referência é amplamente discutida na literatura (veja por exemplo [107 – 110]). Finalmente, em quinto lugar, podemos mencionar que qualquer novo modelo gravitacional merece um estudo de seus aspectos quânticos; pois só assim poderemos ampliar nossa visão de uma teoria de gravitação quântica e lançar uma luz sobre o papel desempenhado pela gravitação no domínio quântico.

6.2 Linearização do termo massivo

Considere a ação para o modelo mínimo quadri-dimensional de gravitação massiva [107 – 110]

$$S[g_{\mu\nu}] \equiv S_0[g_{\mu\nu}] + S_m[g_{\mu\nu}] = \int_M d\text{vol}(x) \left[R + 2\Lambda + m^2 \text{tr} \left(\sqrt{g^{-1}f} \right) \right], \quad (6.1)$$

onde m é um parâmetro de massa, Λ é a constante cosmológica e f corresponde a um campo tensorial externo (também conhecido por métrica de referência). A expressão $g^{-1}f$ na ação S_m significa

$$g^{-1}f := g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}. \quad (6.2)$$

Segundo [107 – 110], temos que considerar $\Lambda = -3m^2$. Entretanto, é mais conveniente realizar todos os cálculos para um valor arbitrário de Λ e fixá-lo somente no resultado final.

Para calcularmos as divergências a 1-loop para a teoria em consideração, devemos calcular a derivada funcional segunda da ação com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$. Tal cálculo para o termo S_m é não-trivial, desde que as matrizes $g^{\mu\nu}$ e $f_{\nu\alpha}$ não comutam. Evitaremos este obstáculo considerando uma teoria classicamente equivalente à teoria (6.1) formulada em termos da métrica dinâmica $g^{\mu\nu}$ e do campo auxiliar $\varphi^\mu{}_\nu$.²

É fácil ver que a teoria (6.1), construída a partir da métrica dinâmica $g^{\mu\nu}$, é classicamente equivalente à teoria construída em termos da métrica $g^{\mu\nu}$ e do campo auxiliar $\varphi^\mu{}_\nu$ com a seguinte ação

$$\tilde{S}[g_{\mu\nu}, \varphi^\mu{}_\nu] = S_0[g_{\mu\nu}] + \tilde{S}_m[g_{\mu\nu}, \varphi^\mu{}_\nu], \quad (6.3)$$

onde a ação $\tilde{S}_m[g_{\mu\nu}, \varphi^\mu{}_\nu]$ é agora dada por

$$\tilde{S}_m[g_{\mu\nu}, \varphi^\mu{}_\nu] := \frac{m^2}{2} \int_M d\text{vol}(x) \left[g^{\mu\nu} f_{\nu\alpha} \varphi^\alpha{}_\mu + (\varphi^{-1})^\mu{}_\mu \right]. \quad (6.4)$$

De fato, a equação de movimento que obtemos a partir da ação (6.3) ao efetuarmos uma variação com respeito ao campo auxiliar $\varphi^\mu{}_\nu$ tem a forma

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \varphi^\mu{}_\nu} = \frac{\delta \tilde{S}_m}{\delta \varphi^\mu{}_\nu} = 0, \quad (6.5)$$

cujas soluções podem ser apresentadas como

$$\varphi^\mu{}_\nu = \left[(g^{-1}f)^{-1/2} \right]^\mu{}_\nu. \quad (6.6)$$

²Para maiores detalhes sobre a técnica do campo auxiliar, veja a referência [176].

Assim, substituindo tal solução na ação (6.3), obtemos a ação (6.1), mostrando portanto que tais ações são classicamente equivalentes. Tendo isto em mente, iniciaremos nosso estudo a partir da ação (6.3).³

6.3 Método de campo de fundo e forma bilinear para a ação

O primeiro passo é obter a forma bilinear para a ação (6.3). Segundo o método de campo de fundo [20 – 22], os campos φ^μ_ν e $g_{\mu\nu}$ são substituídos por somas de campos quânticos e de fundo como segue

$$\varphi^\mu_\nu \rightarrow \varphi^\mu_\nu + \psi^\mu_\nu, \quad g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

Nas expressões acima φ^μ_ν e $g_{\mu\nu}$ são campos de fundo, ao passo que ψ^μ_ν e $h_{\mu\nu}$ correspondem a campos quânticos. Por meio de uma álgebra simples, podemos obter a forma bilinear para as ações S_0 e \tilde{S}_m como

$$S_0^{(2)} + S_{gf} = \frac{1}{2} \int_M d \text{vol}(x) h^{\mu\nu} \hat{J}_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (6.8)$$

e

$$\tilde{S}_m^{(2)} = m^2 \int_M d \text{vol}(x) \left\{ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \hat{G}_{\alpha\beta,\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \psi^\alpha_\beta \hat{A}^{\beta}_{\alpha,\mu}{}^\nu \psi^\mu_\nu + \hat{B}^\beta_\alpha \psi^\alpha_\beta \right\}. \quad (6.9)$$

Na Eq.(6.8), temos adicionado o assim chamado termo de fixação de calibre mínimo [23]

$$S_{gf} = -\frac{1}{2} \int_M d \text{vol}(x) \chi^\mu \chi_\mu, \quad (6.10)$$

onde

$$\chi_\mu := \nabla_\lambda h^\lambda_\mu - \frac{1}{2} \nabla_\mu h. \quad (6.11)$$

Os operadores $\hat{J}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $\hat{G}_{\alpha\beta,\mu\nu}$, $\hat{A}^{\beta}_{\alpha,\mu}{}^\nu$ e \hat{B}^β_α , os quais foram introduzidos nas Eqs.(6.8) e (6.9), têm a forma

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\mu\nu,\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} K_{\mu\nu,\alpha\beta} \square + R_{\mu\alpha\nu\beta} + g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (R + 2\Lambda) K_{\mu\nu,\alpha\beta}, \\ \hat{G}_{\alpha\beta,\mu\nu} &:= -\frac{1}{4} K_{\alpha\beta,\mu\nu} \left[g^{\sigma\tau} f_{\tau\lambda} \varphi^\lambda_\sigma + (\varphi^{-1})^\sigma{}_\sigma \right] - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} f_{\nu\sigma} \varphi^\sigma{}_\mu + g_{\mu\beta} f_{\nu\sigma} \varphi^\sigma{}_\alpha, \\ \hat{A}^{\beta}_{\alpha,\mu}{}^\nu &:= -\frac{1}{2} \left[(\varphi^{-1})^\sigma{}_\alpha (\varphi^{-1})^\beta{}_\mu (\varphi^{-1})^\nu{}_\sigma + (\varphi^{-1})^\sigma{}_\mu (\varphi^{-1})^\nu{}_\alpha (\varphi^{-1})^\beta{}_\sigma \right], \\ \hat{B}^\beta_\alpha &:= -\frac{1}{2} h^{\beta\lambda} f_{\lambda\alpha}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

³Assumimos que essa equivalência é também satisfeita no nível quântico, uma vez que não há qualquer fonte para uma possível anomalia.

onde definimos

$$K_{\alpha\beta,\mu\nu} := \delta_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

e usamos a notação

$$\delta_{\alpha\beta,\mu\nu} := \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (6.14)$$

Nas expressões (6.13), deve-se assumir simetrização em ambos os pares de índices $\mu\nu$ e $\alpha\beta$. Pode-se notar ainda que a expressão $\hat{J}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ na Eq.(6.13) corresponde ao usual termo para a gravitação quântica de Einstein com constante cosmológica, ao passo que os demais termos estão associados à parte massiva.

É fácil ver que a integral funcional sobre o campo quântico ψ^μ_ν pode ser tomada imediatamente. De fato, é bem conhecido que a seguinte identidade é válida para matrizes hermitianas $A(y, x)$ [81]:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[\psi] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dy \int dx \psi(y) A(y, x) \psi(x) + i \int dx B(x) \psi(x) \right\} \\ = (\text{sDet } A)^{-1/2} \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dy \int dx B(y) A^{-1}(y, x) B(x) \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Vamos notar que a quantidade $(\text{sDet } A)^{-1/2}$ corresponde ao determinante de uma matriz numérica. Desde que assumimos regularização dimensional aqui, tal objeto é irrelevante para as correções quânticas para a ação efetiva e, portanto, será omitido de nossa análise. Desta forma, usando a Eq.(6.15) no funcional gerador das funções de Green, podemos apresentar a forma bilinear para a ação (6.3) como segue

$$\tilde{\mathcal{S}}^{(2)} = S_0^{(2)} + S_{gf} + \tilde{\mathcal{S}}_m^{(2)} = \frac{1}{2} \int_M d\text{vol}(x) h^{\alpha\beta} \hat{H}_{\alpha\beta,\mu\nu} h^{\mu\nu},$$

onde o operador $\hat{H}_{\alpha\beta,\mu\nu}$ é dado por

$$\hat{H}_{\alpha\beta,\mu\nu} := \hat{J}_{\mu\nu,\alpha\beta} + m^2 \hat{G}_{\alpha\beta,\mu\nu} + \frac{1}{4} m^2 f_{\beta\lambda} (\hat{A}^{-1})_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\mu}{}^{\sigma} f_{\nu\sigma}. \quad (6.16)$$

De modo a obtermos a matriz inversa \hat{A}^{-1} , consideremos o seguinte procedimento. O resultado (6.15) é válido para uma matriz hermitiana \hat{A} . Portanto, precisamos tomar somente a parte simétrica de tal matriz. Considere primeiro a matriz \bar{A} , a qual não é simetrizada. Pode-se facilmente obter sua inversa (embora seja um pouco mais complicado realizar a mesma operação relativa a sua parte simétrica). Podemos escrevê-la como

$$\bar{A}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\mu}{}^{\nu} = -(\varphi^{-1})^{\sigma}{}_{\alpha} (\varphi^{-1})^{\beta}{}_{\mu} (\varphi^{-1})^{\nu}{}_{\sigma}, \quad (6.17)$$

de modo que a correspondente matriz inversa possui a forma

$$(\bar{A}^{-1})_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\sigma}{}^{\rho} = -\varphi^{\rho}{}_{\tau}\varphi^{\tau}{}_{\beta}\varphi^{\alpha}{}_{\sigma}. \quad (6.18)$$

Considere, agora, a seguinte estrutura simétrica

$$X_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\sigma}{}^{\rho} = -\varphi^{\rho}{}_{\tau}\varphi^{\tau}{}_{\beta}\varphi^{\alpha}{}_{\sigma} - \varphi^{\alpha}{}_{\tau}\varphi^{\tau}{}_{\sigma}\varphi^{\rho}{}_{\beta}. \quad (6.19)$$

Assim, chegamos na equação

$$\hat{A}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\alpha}{}^{\beta} \times X_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\sigma}{}^{\rho} = Z_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\sigma}{}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\sigma}^{\nu} + Y_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\sigma}{}^{\nu}, \quad (6.20)$$

onde

$$Y_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\sigma}{}^{\nu} := \frac{1}{2}(\varphi^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\varphi^{\nu}{}_{\sigma} + \frac{1}{2}(\varphi^{-1})^{\nu}{}_{\sigma}\varphi^{\rho}{}_{\mu}. \quad (6.21)$$

Finalmente, obtemos a inversa para a matriz simetrizada na forma de uma série

$$(\hat{A}^{-1})_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\alpha}{}^{\beta} = X_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\lambda}{}^{\sigma} \times (Z^{-1})_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\alpha}{}^{\beta}, \quad (6.22)$$

onde a matriz $(Z^{-1})_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\alpha}{}^{\beta}$ é dada por

$$(Z^{-1})_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\alpha}{}^{\beta} = \delta_{\sigma}^{\lambda}\delta_{\alpha}^{\beta} - Y_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\alpha}{}^{\beta} + Y_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\rho}{}^{\tau}Y_{\tau}{}^{\rho}{}_{,\alpha}{}^{\beta} - Y_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\rho}{}^{\tau}Y_{\tau}{}^{\rho}{}_{,\chi}{}^{\delta}Y_{\delta}{}^{\chi}{}_{,\alpha}{}^{\beta} + \dots \quad (6.23)$$

Agora, multiplicando o operador $\hat{H}_{\alpha\beta,\mu\nu}$ pelo operador $2\hat{K}^{-1}_{\lambda\sigma}{}^{\alpha\beta}$, onde

$$\hat{K}^{-1}_{\lambda\sigma}{}^{\alpha\beta} := \delta_{\lambda\sigma}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}g^{\alpha\beta},$$

temos

$$2\hat{K}^{-1}_{\alpha\beta}{}^{\lambda\sigma}\hat{H}_{\lambda\sigma,\mu\nu} \equiv \hat{O}_{\alpha\beta,\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta,\mu\nu}\square + \hat{\Pi}_{\alpha\beta,\mu\nu}. \quad (6.24)$$

Na expressão acima, o operador $\hat{\Pi}_{\alpha\beta,\mu\nu}$ tem a forma

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\alpha\beta,\mu\nu} &= 2R_{\alpha\mu\beta\nu} + 2g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\beta}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta} - RK_{\alpha\beta,\mu\nu} - 2\Lambda\delta_{\alpha\beta,\mu\nu} \\ &+ \frac{m^2}{2}f_{\rho(\alpha}(\hat{A}^{-1})_{\beta)}{}^{\rho}{}_{,\mu}{}^{\tau}f_{\nu\tau} - \frac{m^2}{4}g_{\alpha\beta}f_{\sigma\rho}(\hat{A}^{-1})^{\sigma\rho}{}_{,\mu}{}^{\tau}f_{\nu\tau} + 2m^2f_{\nu\sigma}\varphi^{\sigma}{}_{(\beta}g_{\alpha)\mu} \\ &- \frac{m^2}{2}\delta_{\alpha\beta,\mu\nu}\left[g^{\sigma\tau}f_{\tau\lambda}\varphi^{\lambda}{}_{\sigma} + (\varphi^{-1})^{\sigma}{}_{\sigma}\right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Na próxima seção faremos uso do resultado acima para a obtenção das divergências a *1-loop* associadas a ação efetiva da teoria.

6.4 Derivação das divergências a 1-loop

As correções quânticas a 1-loop podem ser apresentadas na forma padrão (3.42), onde o operador \hat{H} corresponde a parte bilinear da ação com respeito aos campos quânticos.

Vale salientar que a parte divergente da expressão $\text{Tr Ln } \hat{H}$ pode ser obtida calculando a expressão $\text{Tr Ln } (\hat{K}^{-1} \hat{H})$ e então subtraindo a expressão $\text{Tr Ln } \hat{K}^{-1}$, isto é,

$$-\text{Tr Ln } \hat{H} = -\text{Tr Ln } (\hat{K}^{-1} \hat{H}) + \text{Tr Ln } \hat{K}^{-1}. \quad (6.26)$$

Contudo, como estamos interessados na parte divergente logaritmica da ação efetiva, a contribuição do último termo pode ser seguramente omitida na regularização dimensional.

A fim de obtermos as correções quânticas a 1-loop para a ação efetiva, faremos uso da técnica de Schwinger-DeWitt apresentada no capítulo (4). No arcabouço da regularização dimensional, a quantidade $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$ pode ser apresentada na forma [40]

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^2(n-4)} \text{Tr} \left\{ \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right\}, \quad (6.27)$$

onde μ é o parâmetro de regularização dimensional. Na expressão acima, os operadores \hat{P} e $\hat{S}_{\mu\nu}$ são definidos conforme as expressões (4.21), sendo os demais termos de superfície ignorados.

Em nosso caso, assim como na usual gravitação de Einstein [177], o termo $\hat{h}_\mu = 0$, e isso essencialmente simplifica nossos cálculos.

Para nosso modelo construído a partir da ação (6.3), o operador \hat{P} assume a forma

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\alpha\beta,\mu\nu} &= 2R_{\alpha\mu\beta\nu} + 2g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\beta}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta} - \frac{5}{6}R\delta_{\alpha\beta,\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - 2\Lambda\delta_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\delta_{\alpha\beta,\mu\nu} \left[g^{\sigma\tau}f_{\tau\lambda}\varphi^\lambda_\sigma + (\varphi^{-1})^\sigma_\sigma \right] \\ &+ 2m^2f_{\nu\sigma}\varphi^\sigma_{(\alpha}g_{\beta)\mu} + \frac{m^2}{2}f_{\rho(\alpha}(\hat{A}^{-1})_{\beta)}^\rho{}_{,\mu}{}^\tau f_{\nu\tau} - \frac{m^2}{4}g_{\alpha\beta}f_{\sigma\rho}(\hat{A}^{-1})^{\sigma\rho}{}_{,\mu}{}^\tau f_{\nu\tau}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Por outro lado, segundo as Eqs. (4.21), quando $\hat{h}_\mu = 0$ o operador $\hat{S}_{\lambda\tau}$ é dado na forma

$$\hat{S}_{\lambda\tau} = [\nabla_\lambda, \nabla_\tau]. \quad (6.29)$$

Assim, aplicando este último comutador ao campo $h_{\mu\nu}$, encontramos a expressão

$$h_{\mu\nu}[\nabla_\lambda, \nabla_\tau]h^{\mu\nu} = -2R^\mu{}_{\xi\lambda\tau}h_{\mu\nu}h^{\xi\nu} = h^{\mu\nu}[-2R_{\mu\alpha\lambda\tau}g_{\nu\beta}]h^{\alpha\beta}, \quad (6.30)$$

a qual nos permite apresentar o operador $\hat{S}_{\lambda\tau}$ na forma

$$\hat{S}_{\lambda\tau} = [S_{\lambda\tau}]_{\mu\nu,\alpha\beta} = -2R_{\mu\alpha\lambda\tau}g_{\nu\beta}. \quad (6.31)$$

Deste modo, substituindo os operadores \hat{P} e $\hat{S}_{\lambda\tau}$ encontrados na expressão (6.27), obtemos depois de um longo trabalho algébrico a parte divergente para a ação efetiva a *1-loop*

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}|_{\Lambda=-3m^2} = & -\frac{2\mu^{n-4}}{(4\pi)^2(n-4)} \int_M d\text{vol}(x) \left\{ \frac{53}{90} E + \frac{7}{20} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{120} R^2 \right. \\
& + \frac{m^2}{2} R^{(\lambda|\alpha|\sigma)\beta} f_{\sigma\tau} (\hat{A}^{-1})_{\lambda}{}^{\tau} (\alpha^{|\rho|} f_{\beta})_{\rho} - \frac{m^2}{48} R \left[948 + 236 (\sqrt{g^{-1}f})^{\mu}{}_{\mu} \right. \\
& + \left. + 5 (g^{-1}f)^{\lambda}{}_{\beta} (\hat{A}^{-1})_{\alpha\lambda} \alpha^{\sigma} (g^{-1}f)^{\beta}{}_{\sigma} + 5 f_{\alpha\lambda} (\hat{A}^{-1})^{\beta\lambda, \alpha\sigma} f_{\beta\sigma} - 5 f_{\alpha\beta} (\hat{A}^{-1})^{\alpha\beta, \mu\nu} f_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{m^2}{4} R^{\lambda\alpha} \left[12 (\sqrt{g^{-1}f})_{\alpha\lambda} + (g^{-1}f)^{\beta}{}_{\rho} (\hat{A}^{-1})_{\lambda}{}^{\rho} (\alpha^{|\tau|} f_{\beta})_{\tau} + f_{\lambda\rho} (\hat{A}^{-1})^{\beta\rho} (\alpha^{|\tau|} f_{\beta})_{\tau} \right. \\
& - \left. 2 f_{\sigma\tau} (\hat{A}^{-1})^{\sigma\tau} \alpha^{\rho} f_{\lambda\rho} \right] + \frac{m^4}{16} \left[1440 + 12 (g^{-1}f)^{\lambda}{}_{\beta} (\hat{A}^{-1})_{\alpha\lambda} \alpha^{\sigma} (g^{-1}f)^{\beta}{}_{\sigma} \right. \\
& + 12 f_{\alpha\lambda} (\hat{A}^{-1})^{\beta\lambda, \alpha\sigma} f_{\beta\sigma} - 12 f_{\alpha\beta} (\hat{A}^{-1})^{\alpha\beta, \mu\nu} f_{\mu\nu} - 240 (\sqrt{g^{-1}f})^{\mu}{}_{\mu} + 24 (g^{-1}f)^{\mu}{}_{\mu} \\
& + 4 (\sqrt{g^{-1}f})^{\mu}{}_{\mu} (\sqrt{g^{-1}f})^{\nu}{}_{\nu} + (g^{-1}f)^{\lambda}{}_{(\rho} (\hat{A}^{-1})_{\tau)\lambda\mu}{}^{\sigma} (g^{-1}f)^{\nu}{}_{\sigma} (g^{-1}f)^{\rho}{}_{\theta} (\hat{A}^{-1})^{\tau\theta\mu}{}_{\alpha} (g^{-1}f)^{\alpha}{}_{\nu} \\
& + (g^{-1}f)^{\lambda}{}_{(\rho} (\hat{A}^{-1})_{\tau)\lambda}{}^{\mu}{}_{\sigma} (g^{-1}f)^{\sigma}{}_{\nu} (g^{-1}f)^{\rho}{}_{\theta} (\hat{A}^{-1})^{\tau\theta\nu}{}_{\alpha} (g^{-1}f)^{\alpha}{}_{\mu} \\
& - 4 (\sqrt{g^{-1}f})^{\lambda}{}_{\lambda} (g^{-1}f)^{\beta}{}_{\varphi} f_{\theta(\alpha} (\hat{A}^{-1})_{\beta)}{}^{\theta\alpha\varphi} + 2 (\sqrt{g^{-1}f})^{\lambda}{}_{\lambda} f_{\alpha\beta} (\hat{A}^{-1})^{\alpha\beta, \mu\nu} f_{\mu\nu} \\
& - 4 f_{\rho\theta} \left(\sqrt{g^{-1}f} \right)^{\lambda}{}_{(\alpha} f_{\varphi)\lambda} (\hat{A}^{-1})^{\rho\theta\alpha\varphi} + 2 f_{\alpha\theta} f_{\lambda\varphi} \left(\sqrt{g^{-1}f} \right)^{\lambda}{}_{\rho} (\hat{A}^{-1})^{\rho\theta\alpha\varphi} \\
& + 2 f_{\beta\lambda} (g^{-1}f)^{\beta}{}_{\varphi} (\sqrt{g^{-1}f})^{\lambda}{}_{\theta} (\hat{A}^{-1})_{\alpha}{}^{\theta\alpha\varphi} + 2 (g^{-1}f)^{\theta}{}_{\lambda} (g^{-1}f)^{\lambda}{}_{\varphi} (\sqrt{g^{-1}f})^{\alpha}{}_{\rho} (\hat{A}^{-1})^{\rho}{}_{\theta\alpha}{}^{\varphi} \\
& \left. + 2 (g^{-1}f)^{\tau}{}_{\theta} f_{\lambda\varphi} (\sqrt{g^{-1}f})^{\alpha}{}_{\tau} (\hat{A}^{-1})^{\lambda\theta}{}_{\alpha}{}^{\varphi} \right] \left. \right\}, \tag{6.32}
\end{aligned}$$

onde incluímos a contribuição para os fantasmas independente da massa e usamos o valor especial $\Lambda = -3m^2$. Na expressão acima, E corresponde ao integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet e a expressão $(\hat{A}^{-1})^{\mu\nu\alpha\beta}$ tem sido definida na Eq.(6.22). Deve-se notar que a matriz (\hat{A}^{-1}) é dada por uma série infinita de potências no campo externo $f_{\mu\nu}$. Assim, as divergências dadas através da expressão (6.32) têm uma estrutura não-polinomial neste campo.

Vamos notar que antes de usarmos a condição $\Lambda = -3m^2$, as divergências representam a correspondente gravitação de Einstein [177] com a contribuição do termo cosmológico, onde os demais termos correspondem à contribuição do termo massivo na ação (6.3). A razão para um tal resultado é que realizamos nossos cálculos em uma situação em que a simetria de difeomorfismo não é quebrada. Isto significa que tratamos o campo $f_{\mu\nu}$ como um campo tensorial externo, o qual não viola a covariância geral da teoria. Portanto, o número de graus de liberdade físicos não se altera devido à adição do termo massivo na ação (6.1). Na verdade, nossa abordagem segue a prática padrão quando, por exemplo, as divergências na teoria de Yang-Mills com quebra espontânea de simetria são calculadas

na fase não quebrada. Deve ser definitivamente interessante realizar tais cálculos na fase quebrada, contudo não está imediatamente claro como isto pode ser implementado na teoria não-abeliana suavemente quebrada tal como a gravitação quântica.

Uma observação interessante sobre a expressão (6.32) é que existe uma hierarquia simples explícita dos termos. Por exemplo, aqueles com derivadas superiores não dependem da massa e/ou do campo externo $f_{\mu\nu}$. Ao mesmo tempo, se considerarmos a ação clássica com as estruturas algébricas apresentadas na expressão (6.32), notamos que não existem derivadas atuando no campo externo $f_{\mu\nu}$. Entretanto, embora não existam tais derivadas do campo $f_{\mu\nu}$, tal campo será dinâmico na ação (6.32) devido à mistura com o tensor de Ricci e o escalar de curvatura.

A próxima questão seria ver o que acontece com o resultado (6.32) *on-shell*. Para este fim, devemos derivar as equações clássicas de movimento e substituí-las na expressão (6.32). A equação de movimento para a teoria descrita pela ação (6.3), com $\Lambda = -3m^2$, tem a forma

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -3m^2g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu} \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{2}m^2 \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\nu{}_\mu. \quad (6.33)$$

Usando esta relação no resultado (6.32), chegamos no seguinte resultado *on-shell*

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)}|_{on\ shell} = & -\frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^2(n-4)} \int_M d\text{vol}(x) \left[\frac{53}{45}E + m^2 R^{(\lambda|\alpha|\sigma)\beta} f_{\sigma\tau} (\hat{A}^{-1})_\lambda{}^\tau (\alpha^{|\rho|} f_\beta)_\rho \right] \\ & - \frac{m^4 \mu^{n-4}}{8(4\pi)^2(n-4)} \int_M d\text{vol}(x) \left[1.5 \cdot 32 \cdot 111 - 8f_{\alpha\lambda} (\hat{A}^{-1})^{\beta\lambda, \alpha\sigma} f_{\beta\sigma} + 0.4 \cdot 77 (\sqrt{g^{-1}f})^\mu{}_\mu \right. \\ & + \frac{7}{5} (g^{-1}f)^\mu{}_\mu + 1.5 \cdot 13 \cdot 29 (\sqrt{g^{-1}f})^\mu{}_\mu (\sqrt{g^{-1}f})^\nu{}_\nu \\ & + (g^{-1}f)^\lambda{}_{(\rho} (\hat{A}^{-1})_{\tau)\lambda\mu}{}^\sigma (g^{-1}f)^\nu{}_\sigma (g^{-1}f)^\rho{}_\theta (\hat{A}^{-1})^{\tau\theta\mu}{}_\alpha (g^{-1}f)^\alpha{}_\nu \\ & + (g^{-1}f)^\lambda{}_{(\rho} (\hat{A}^{-1})_{\tau)\lambda}{}^\mu{}_\sigma (g^{-1}f)^\sigma{}_\nu (g^{-1}f)^\rho{}_\theta (\hat{A}^{-1})^{\tau\theta\nu}{}_\alpha (g^{-1}f)^\alpha{}_\mu \\ & - 4(\sqrt{g^{-1}f})^\lambda{}_\lambda (g^{-1}f)^\beta{}_\varphi f_{\theta(\alpha} (\hat{A}^{-1})_{\beta)}{}^{\theta\alpha\varphi} + \left[\frac{3}{2} (\sqrt{g^{-1}f})^\lambda{}_\lambda + 16 \right] f_{\alpha\beta} (\hat{A}^{-1})^{\alpha\beta, \mu\nu} f_{\mu\nu} \\ & - 4f_{\rho\theta} \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\lambda{}_{(\alpha} f_\varphi)_{\lambda} (\hat{A}^{-1})^{\rho\theta\alpha\varphi} + 2f_{\alpha\theta} f_{\lambda\varphi} \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\lambda{}_\rho (\hat{A}^{-1})^{\rho\theta\alpha\varphi} \\ & + 2f_{\beta\lambda} (g^{-1}f)^\beta{}_\varphi (\sqrt{g^{-1}f})^\lambda{}_\theta (\hat{A}^{-1})_\alpha{}^{\theta\alpha\varphi} + 2(g^{-1}f)^\theta{}_\lambda (g^{-1}f)^\lambda{}_\varphi (\sqrt{g^{-1}f})^\alpha{}_\rho (\hat{A}^{-1})^\rho{}_\theta \alpha^\varphi \\ & - 2(g^{-1}f)^\tau{}_\theta f_{\lambda\varphi} (\sqrt{g^{-1}f})^\alpha{}_\tau (\hat{A}^{-1})^{\lambda\theta}{}_\alpha{}^\varphi - \left[\frac{1}{2} (\sqrt{g^{-1}f})^\mu{}_\mu + 6 \right] (g^{-1}f)^\alpha{}_\rho (\hat{A}^{-1})^{\beta\rho}{}_{(\alpha}{}^{|\tau|} f_\beta)_{\tau} \\ & + 2(\sqrt{g^{-1}f})^\alpha{}_\lambda (g^{-1}f)^\lambda{}_\rho (\hat{A}^{-1})^{\beta\rho}{}_{(\alpha}{}^{|\tau|} f_\beta)_{\tau} + 2(\sqrt{g^{-1}f})^\alpha{}_\lambda (g^{-1}f)^\beta{}_\rho (\hat{A}^{-1})^{\lambda\rho}{}_{(\alpha}{}^{|\tau|} f_\beta)_{\tau} \\ & + \left[32 - \frac{5}{2} (\sqrt{g^{-1}f})^\mu{}_\mu \right] (g^{-1}f)^\lambda{}_\beta (\hat{A}^{-1})_{\alpha\lambda}{}^{\alpha\sigma} (g^{-1}f)^\beta{}_\sigma. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Como vemos, o resultado *on-shell* acima não desaparece como é o caso da teoria não-massiva [177].

Considerações finais

*“This is not the end. It is not even the beginning of the end.
But it is, perhaps, the end of the beginning.”*

Sir. Winston S. Churchill

Sumário dos principais resultados e perspectivas futuras

Ao longo deste trabalho acadêmico, foram obtidos diferentes resultados acerca da abordagem efetiva em teoria de campos. Segue, abaixo, um breve resumo dos resultados originais aqui apresentados, bem como as possíveis perspectivas de trabalhos futuros.

Resultados e considerações referentes ao Cap.(2)

A propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas em meios dielétricos não-lineares isotrópicos foi investigada no limite eikonal da Óptica Geométrica.

O correspondente problema de auto-valores foi apresentado e resolvido para sistemas caracterizados pelos coeficientes dielétricos $\varepsilon(B)$ e μ constante, e também para $\mu(E)$ e ε constante.

O fenômeno da birrefringência magneto-elétrica linear foi examinado para cada situação em particular.

Os correspondentes vetores de polarização foram derivados.

A estrutura métrica efetiva associada à cada caso mencionado acima foi obtida.

Foi observado que, para certas classes de materiais não-lineares isotrópicos, como líquidos, satisfazendo as condições mencionadas acima, uma forma de birrefringência magneto-elétrica linear ocorre como um efeito único, isto é, sem a presença de outras formas de birrefringência padrão tais como os efeitos Kerr e Cotton-Mouton.

Como a magnitude destes outros efeitos é muito maior quando comparada ao correspondente efeito magneto-elétrico, nossos resultados abrem portas para a implementação e possível medição deste fenômeno em condições laboratoriais.

Como uma proposta de trabalho futuro, podemos reproduzir tais efeitos para um sistema dielétrico anisotrópico, onde os parâmetros dielétricos ε e μ dependam, também, da direção dos campos externos aplicados.

O efeito Jones corresponde a um outro efeito de birrefringência magnéto-elétrica no qual os parâmetros dielétricos possuem a forma $\varepsilon(E, B)$ e μ_c . Dentro do arcabouço da eletrodinâmica não-linear, no contexto de meios materiais, podemos empregar o formalismo descrito no Cap.(1) e buscar, de forma análoga, investigar a propagação luminosa em materiais dielétricos caracterizados pelos parâmetros $\mu(E, B)$ e ε_c .

No contexto de campos intensos, podemos fazer uso da técnica do *heat kernel* juntamente do método de Schwinger-DeWitt e/ou da teoria de perturbação covariante para examinarmos a propagação do fóton em diferentes estados de vácuo da eletrodinâmica quântica no regime não-linear.

Resultados e considerações referentes ao Cap.(5)

Empregando o método do *heat kernel*, juntamente da técnica de Schwinger-DeWitt, obtemos os dois primeiros coeficientes não-triviais da expansão assintótica de Schwinger-DeWitt para o modelo de Yukawa em TQC em espaços curvos através de dois diferentes esquemas de cálculo.

Utilizando a teoria de perturbação covariante, derivamos os correspondentes fatores de forma bem como as funções β para este modelo, dentro do esquema de renormalização de subtração de momentos nos dois esquemas acima mencionados.

Destes resultados, encontramos um segundo exemplo da anomalia multiplicativa não-local em TQC independente do esquema de renormalização. A partir deste, exibimos uma ambiguidade no teorema de desacoplamento de Appelquist e Carazzone para a lei de desacoplamento quadrático.

Apresentamos um modelo geral para o qual foi obtida a condição para ausência de anomalia multiplicativa a nível de A_1 , onde os resultados são verificados para diferentes modelos conhecidos.

Com estes resultados, exploramos em detalhes duas novas formas de ambiguidades na ação efetiva que surgem da derivação de determinantes funcionais fermiônicos por meio do método do *heat kernel*, e que têm origens essencialmente diferentes.

A primeira toma lugar somente em teorias massivas e demonstra a profunda importância e universalidade das divergências logarítmicas ultravioletas em TQC. Uma importante observação se refere ao fato de que a universalidade das divergências logarítmicas ultravioletas em uma particular dimensão implica, necessariamente, que a parte finita, bem

como as divergências tipo-potências, são dependentes do esquema de cálculo empregado nesta dimensão.

A outra forma de ambiguidade não depende se o campo quântico é ou não massivo, e ocorre em termos de derivada total divergentes. Esta independência sobre a natureza do campo quântico determina, no caso de determinantes fermiônicos, se a correspondente teoria clássica é inicialmente conforme ou não. No caso de teorias conformes, tais termos de superfície divergentes contribuem para a anomalia conforme e finalmente para termos locais na ação efetiva induzida por anomalia. Portanto, esta última forma de ambiguidade é bem diferente daquela primeira mencionada acima, a qual é essencialmente não-local e aparece somente em teorias massivas. O ponto comum é que ambas não podem ser compensadas mudando os coeficientes nos contratermos locais infinitos, os quais são introduzidos através do processo de renormalização.

Desde que as correções quânticas possuem tal ambiguidade na região infravermelha, poderíamos nos perguntar qual dos dois esquemas de cálculo fornece um resultado correto. Em nossa opinião, a vantagem deve ser dada para o primeiro esquema, definido a partir do operador $\hat{\mathcal{H}}_1^*$, pois tal escolha é mais natural e além do mais preserva a invariância de calibre na eletrodinâmica quântica.

Como uma proposta de trabalho futuro, poderíamos buscar obter outros exemplos deste fenômeno para determinantes funcionais bosônicos.

É também um trabalho interessante investigar, de modo amplo, as possíveis manifestações do fenômeno da anomalia multiplicativa não-local através de diagramas de Feynman. Acreditamos que tais resultados possam nos ajudar a compreender melhor o verdadeiro papel da anomalia multiplicativa em TQC.

Resultados e considerações referentes ao Cap.(6)

Desenvolvemos o método de campo de fundo e calculamos as divergências a *1-loop* para um modelo de gravitação massiva sugerido em [107 – 110].

As divergências foram formuladas em termos de invariantes geométricos construídos a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ e da métrica de referência $f_{\mu\nu}$, e contém a matriz inversa (6.22), a qual é uma série de potências infinitas em termos da métrica de referência $f_{\mu\nu}$. Não existem dúvidas que ações não-mínimas mais complicadas do que aquela proposta nas referências citadas acima terão qualitativamente a mesma estrutura.

O resultado (6.32) mostra que o correspondente termo ultravioleta da teoria de gravitação massiva deve ser essencialmente mais complicado do que aquele associada à gravitação quântica de Einstein. Juntamente com os usuais termos dependentes da métrica de quartas derivadas, tal termo deve incluir, também, uma dependência na métrica de referência $f_{\mu\nu}$. Além do mais, este termo gera dinâmica devido à mistura com as componentes do tensor de curvatura. Portanto, os contratermos (6.32) podem ser considerados como a ação funcional definindo a dinâmica da métrica de referência $f_{\mu\nu}$.

Bibliografia

- [1] Landau, L. D.; & Lifshitz, E. M.; *Mechanics*, (Butterworth Heinemann, Oxford, 3 ed., 1976).
- [2] Goldstein, H.; Poole, C. P.; & Safko, J. L.; *Classical mechanics*, (Addison Wesley, New York, 3 ed., 2001).
- [3] Arnold, V. I.; *Mathematical methods of classical mechanics*, (Springer, New York, 2 ed., 1989).
- [4] Maxwell, J. C.; *Treatise on electricity and magnetism, Vols. I e II*, (Dover, New York, 1954).
- [5] Landau, L. & Lifshitz, E.; *The classical theory of fields*, (Mir, Moscow, 4 ed., 1980).
- [6] Jackson, J. D.; *Classical electrodynamics*, (John Wiley & Sons, New York, 1965).
- [7] Einstein, A.; *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper*, *Annalen der Physik* **17**, 891 (1905). Traduzido para a língua inglesa como “*On the electrodynamics of moving bodies*” em *The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, (Dover, New York, 1952).
- [8] Pauli, W.; *Theory of relativity*, (Dover, New York, 1981).
- [9] Dirac, P. A. M.; *The principles of quantum mechanics*, (Clarendon Press, Oxford, 4ed., 1958).
- [10] Heisenberg, W.; *The physical principles of the quantum theory*, (Dover, New York, 1949).
- [11] Newton, I.; *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (London, 1687). Traduzido para a língua inglesa como: *THE PRINCIPIA: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, (University of California Press, 1999).

- [12] Einstein, A.; *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49**, 769 (1916). Traduzido para a língua inglesa como “*The foundation of the general theory of relativity*” em *The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, (Dover, New York, 1952).
- [13] Bjorken, J. D. & Drell, S. D.; *Relativistic quantum mechanics*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1964).
- [14] Bjorken, J. D. & Drell, S. D.; *Relativistic quantum fields* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [15] Weinberg, S.; *The quantum theory of fields: I. Foundations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [16] Weinberg, S.; *The quantum theory of fields: II. Modern applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [17] Weinberg, S.; *The quantum theory of fields: III. Supersymmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [18] Dirac, P. A. M.; *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. Royal Soc. London Series A **114**, 243-265 (1927).
- [19] Salam, A.; Heisenberg, W. & Dirac, P. A. M.; *A unificação das forças fundamentais: O grande desafio da física contemporânea*, (Jorge Zahar, Rio de Janeiro, 1993).
- [20] DeWitt, B. S.; *Dynamical theory of groups and fields* (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [21] DeWitt, B. S.; *The global approach to quantum field theory, Vol. I* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [22] DeWitt, B. S.; *The global approach to quantum field theory, Vol. II* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [23] Buchbinder, I. L.; Odintsov, S. D. & Shapiro, I. L.; *Effective action in quantum gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [24] Fulling, S. A.; *Aspects of quantum field theory in curved space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

- [25] Birrell, N. D. & Davies, P. C. W.; *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [26] Parker, L. E. & Toms, D. J.; *Quantum field theory in curved spacetime: Quantized fields and gravity*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [27] Feynman, R. P.; *The principle of least action in quantum mechanics*, (tese de doutorado, Princeton University, 1942).
- [28] DeWitt, B. S.; *Quantum theory of gravity II: The manifestly covariant theory*, Phys. Rev. **162**, 1195-1238 (1967).
- [29] DeWitt, B. S.; *Quantum theory of gravity III: The application of the covariant theory*, Phys. Rev. **162**, 1239-1256 (1967).
- [30] DeWitt, B. S.; *Quantum field theory in curved space-time*, Phys. Rep. C **19**, 296-357 (1975).
- [31] Schwinger, J.; *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82**, 664-679 (1951).
- [32] Schwinger, J. S.; *The theory of quantized fields V*, Phys. Rev. **93**, 615-628 (1954).
- [33] Shapiro, I. L.; *Effective action of vacuum: Semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25** 103001 (2008).
- [34] Veltman, M. J. G.; *Diagrammatica - The path to Feynman rules*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [35] Coleman, S. & Weinberg, E.; *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. D **7**, 1888-1910 (1973).
- [36] Avramidi, I. G.; *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity* (tese de doutorado, Moscow State University, 1986), arXiv:hep-th/9510140.
- [37] Avramidi, I. G.; *The covariant technique for calculation of one-loop effective action*, Nucl. Phys. B **355**, 712-754 (1991).

- [38] Avramidi, I. G.; *Covariant approximation schemes for calculation of the heat kernel in quantum field theory*, Quant. Grav., Eds. V. A. Berezin, V. A. Rubakov & D. V. Semikoz (Singapore: World Scientific), 61-78 (1997).
- [39] Avramidi, I. G.; *Heat kernel and quantum gravity* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [40] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119**, 1-74 (1985).
- [41] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *Beyond the Schwinger-DeWitt technique: Converting loop into trees and in-in currents*, Nuc. Phys. B **282**, 163-188 (1987).
- [42] Minakshisundaram, S. & Pleijel, A.; *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operators on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **1**, 242-256 (1949).
- [43] Gilkey, P. B.; *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. **10**, 601-618 (1975).
- [44] Vilkovisky, G. A.; *Quantum theory of gravity*, (Hilger, Bristol, 1984).
- [45] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms*, Nuc. Phys. B **333**, 471-511 (1990).
- [46] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *Covariant perturbation theory. 3: Spectral representations of the third order form-factors*, Nuc. Phys. B **333**, 512-524 (1990).
- [47] Barvinsky, A. O.; Gusev, Yu. V.; Zhytnikov, V. V. & Vilkovisky, G. A.; *Covariant perturbation theory. 4: Third order in the curvature*, arXiv:0911.1168v1.
- [48] Barvinsky, A. O.; Gusev, Yu. V.; Vilkovisky, G. A. & Zhytnikov, V. V.; *Asymptotic behaviours of the heat kernel in covariant perturbation theory*, J. Math. Phys. **35** 3543-3559 (1994).
- [49] Barvinsky, A. O.; Gusev, Yu. V.; Vilkovisky, G. A. & Zhytnikov, V. V.; *The one-loop effective action and trace anomaly in four dimensions*, Nuc. Phys. B **439**, 561-582 (1995).
- [50] Gusev, Yu. V.; *Heat kernel expansion in the covariant perturbation theory*, Nucl. Phys. B **807**, 566 (2009).

- [51] Kaplan, D. B.; *Effective field theories*, arXiv:nucl-th/9506035v1.
- [52] Manohar, A. V.; *Effective field theories*, arXiv:hep-ph/9606222v1.
- [53] Pich, A.; *Effective field theory*, arXiv:hep-ph/9806303v1.
- [54] Weinberg, S.; *Phenomenological lagrangians*, Physica **96A**, 327-340 (1979).
- [55] Weinberg, S.; *Effective gauge theories*, Phys. Lett. B **91**, 51-55 (1980).
- [56] Weinberg, S.; *Dreams of a final theory: the search for the fundamental laws of Nature* (Vintage, London, 1993).
- [57] Bialynicka-Birula, Z. & Bialinicki-Birula, I.; *Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field*, Phys. Rev. D **2**, 2341-2345 (1970).
- [58] Adler, S. L.; *Photon splitting and photon dispersion in a strong gravitational field*, Ann. Phys. **67**, 599-647 (1971).
- [59] Sauter, F.; *Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs*, Z. Phys. **69** 742-764 (1931). Tradução do título para a língua portuguesa: *Sobre o comportamento de um elétron em um campo elétrico uniforme da teoria relativística de Dirac*.
- [60] Heisenberg, W. & Euler, H.; *Consequences of Dirac's theory of positrons*, Z. Phys. **98**, 714-732 (1936).
- [61] Landau, L.; Lifshitz, E. & Pitaevskii, L. P.; *Electrodynamics of Continuous Media* (Mir, Moscow, 2 ed., 1969).
- [62] Novello, M.; De Lorenci, V. A.; Salim, J. M. & Klippert, R.; *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **61**, 45001 (2000).
- [63] De Lorenci, V. A.; Klippert, R.; Novello, M. & Salim, J. M. *Light propagation in non-linear electrodynamics*, Phys. Lett. B **482**, 134-140 (2000).
- [64] De Lorenci, V. A.; Klippert, R. & Teodoro, D. H.; *Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media*, Phys. Rev. D **70**, 124035 (2004).

- [65] De Lorenci, V. A. & Souza, M. A.; *Electromagnetic wave propagation inside a material medium: an effective geometry interpretation*, Phys. Lett. B **512**, 417-422 (2001).
- [66] De Lorenci, V. A. & Klippert, R.; *Electromagnetic light rays in local dielectrics*, Phys. Lett. A **357**, 61-65 (2006).
- [67] De Lorenci, V. A. & Salim, J. M.; *Aspects of light propagation in anisotropic dielectric media*, Phys. Lett. A **360** 10-13 (2006).
- [68] De Lorenci, V. A.; *Effective geometry for light traveling in a material media*, Phys. Rev. E **65**, 026612 (2002).
- [69] De Lorenci, V. A. & Klippert, R.; *Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media*, Phys. Rev. D **65**, 064027 (2002).
- [70] De Lorenci, V. A. & Goulart, G. P.; *Magnetolectric birefringence revisited*, Phys. Rev. D **78**, 045015 (2008).
- [71] De Lorenci, V. A.; Pereira, D. D.; *Magnetolectric birefringence as a unique effect in isotropic media*, Phys. Rev. E **82**, 036605 (2010).
- [72] Plebanski, J.; *Lectures on nonlinear electrodynamics* (Nordita, Copenhagen, 1968).
- [73] Bartholin, R.; *Experiments with the double refracting Iceland crystal which led to the discovery of a marvelous and strange refraction*, (Copenhagen, Denmark: Daniel Paulli, 1669).
- [74] Jones, R. C.; *A new calculus for the treatment of optical systems. VII. Properties of the N-matrices*, J. Opt. Soc. Am. **38**, 671-683 (1948).
- [75] Rikken, G. L. J. A. & Rizzo, C.; *Magnetolectric birefringences of the quantum vacuum*, Phys. Rev. A **63**, 012107 (2000).
- [76] Roth, T. & Rikken, G. L. J. A.; *Observation of magnetolectric Jones birefringence*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4478-4481 (2000).
- [77] Roth, T. & Rikken, G. L. J. A.; *Observation of magnetolectric linear birefringence*, Phys. Rev. Lett. **88**, 063001 (2002).

- [78] Kerr, J.; *A new relation between electricity and light: dielectrified media birefringent*, *Philos. Mag.* **50**, 337-348 (1875).
- [79] Cotton, A. & Mouton, H.; *Magnéto-optique: Sur le phénomène de Majorana*, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **141**, 317 (1905). Tradução do título para a língua portuguesa: *Magneto-óptica: Sobre o fenômeno de Majorana*.
- [80] Cotton, A. & Mouton, H.; *Magnéto-optique: Sur la biréfringence magnétique. Nouveaux liquides actifs*, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **141**, 349 (1905). Tradução do título para a língua portuguesa: *Magneto-óptica: Sobre a birrefringência magnética. Novos líquidos ativos*.
- [81] Bailin, D. & Love, A.; *Introduction to gauge field theory* (IOP Publishing, Bristol, 1994).
- [82] Kontsevich M. & Vishik, S.; *Geometry of determinants of elliptic operators*, arXiv:hep-th/9406140; *Determinants of elliptic pseudo-differential operators*, arXiv:hep-th/9404046.
- [83] Elizalde, E.; Vanzo, L. & Zerbini, S.; *Zeta-function regularization, the multiplicative anomaly and the Wodzicki residue*, *Commun. Math. Phys.* **194**, 613-630 (1998).
- [84] Elizalde, E.; Cognola, G. & Zerbini, S.; *Applications in physics of the multiplicative anomaly formula involving some basic differential operators*, *Nucl. Phys. B* **532**, 407-428 (1998).
- [85] Elizalde, E.; Filippi, A.; Vanzo, L. & Zerbini, S.; *Is the multiplicative anomaly dependent on the regularization?*, arXiv:hep-th/9804071v1.
- [86] Elizalde, E.; Filippi, A.; Vanzo, L. & Zerbini, S.; *Is the multiplicative anomaly relevant?*, arXiv:hep-th/9804072v1.
- [87] Elizalde, E.; *On the concept of determinant for the differential operators of quantum physics*, arXiv:hep-th/9906229v1.
- [88] Elizalde, E.; Filippi, A.; Vanzo, L. & Zerbini, S.; *One-loop effective potential for a fixed charged self-interacting bosonic model at finite temperature with its related multiplicative anomaly*, arXiv:hep-th/9710171v2.

- [89] Evans, T. S.; *Regularization schemes and the multiplicative anomaly*, Phys. Lett. B **457**, 127-132 (1999).
- [90] Dowker, J. S.; *On the relevance of the multiplicative anomaly*, arXiv:hep-th/9803200v1.
- [91] Elizalde, E.; Odintsov, S. D.; Romeo, A. & Bytsenko, A. A.; *Zeta regularization techniques with applications*, (World Scientific, 1994).
- [92] Gonçalves, B.; Berredo-Peixoto, G. & Shapiro, I. L.; *One-loop corrections to the photon propagator in curved-space QED*, Phys. Rev. D **80**, 104013 (2009).
- [93] Gonçalves, B.; *Estudo de aspectos clássicos e quânticos do campo de Dirac em espaço-tempo curvo* (tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF, 2010).
- [94] Weinberg, S.; *High-energy behavior in quantum field theory*, Phys. Rev. **118**, 838-849 (1960).
- [95] Collins, J. C.; *Renormalization*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [96] Fierz, M. & Pauli, W.; *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173** 211 (1939).
- [97] van Dam, H.; & Veltman, M. J. G.; *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields*, Nucl. Phys. B **22**, 397-411 (1970).
- [98] Zakharov, V. I.; JETP Letters (Sov. Phys.) **12**, 312 (1970).
- [99] Vainshtein, A. I.; *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, Phys. Lett. B **39**, 393-394 (1972).
- [100] Boulware, D. G. & Deser, S.; *Inconsistency of finite range gravitation*, Phys. Lett. B **40** 227-229 (1972).
- [101] Boulware, D. G. & Deser, S.; *Can gravitation have a finite range?*, Phys. Rev. D **6** 3368-3382 (1972).
- [102] de Rham, C. & Gabadadze, G.; *Generalization of the Fierz-Pauli action*, Phys. Rev. D **82** 044020 (2010).

- [103] de Rham, C.; Gabadadze, G. & Tolley, A. J.; *Resummation of massive gravity*, Phys. Rev. Lett. **106** 231101 (2011).
- [104] de Rham, C.; Gabadadze, G. & Tolley, A. J.; *Comments on (super)luminality*, arXiv:hep-th/1107.0710.
- [105] de Rham, C.; Gabadadze, G. & Tolley, A. J.; *Ghost free massive gravity in the Stückelberg language*, arXiv:hep-th/1107.3820.
- [106] de Rham, C.; Gabadadze, G. & Tolley, A. J.; *Helicity decomposition of ghost-free massive gravity*, arXiv:hep-th/1108.4521.
- [107] Hassan, S. F. & Rosen, R. A.; *On non-linear actions for massive gravity*, JHEP **1107** (2011) 009, arXiv:hep-th/1103.6055.
- [108] Hassan, S. F. & Rosen, R. A.; *Resolving the ghost problem in non-linear massive gravity*, arXiv:hep-th/1106.3344.
- [109] Hassan, S. F. & Rosen, R. A.; *Confirmation of the secondary constraint and absence of ghost in massive gravity and bimetric gravity*, arXiv:hep-th/1111.2070.
- [110] Hassan, S. F.; Rosen, R. A. & Schmidt-May, A.; *Ghost-free massive gravity with a general reference metric*. arXiv:hep-th/1109.3230.
- [111] Hinterbichler, K.; *Theoretical aspects of massive gravity*, arXiv:hep-th/1105.3735.
- [112] Buchbinder, I. L.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.; *One-loop divergences in massive gravity theory*, Phys. Lett. B **712**, 104 - 108 (2012).
- [113] Born, M.; & Wolf, E.; *Principles of optics* (Academic Press, New York, 1970).
- [114] Fowles, G. R.; *Introduction to modern optics* (Hold, Rinehart and Winston, New York, 1968).
- [115] Kline, M. & Kay, I. W.; *Electromagnetic theory and geometrical optics* (Interscience Publishers/ John Wiley & Sons, New York, 1965).
- [116] Luneburg, R. K.; *Mathematical theory of optics* (University of California Press, Los Angeles, 1966).

- [117] Sommerfeld, A. & Runge, J.; *Anwendung der vektorrechnung auf die grundlagen der geometrischen optik*, Ann. Phys., **35**, 277-298 (1911). Tradução do título para a língua portuguesa: *Aplicação do cálculo vetorial aos conceitos básicos na óptica geométrica*.
- [118] Hadamard, J.; *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, (Ed. Hermann, Paris, 1903). Tradução do título para a língua portuguesa: *Lições sobre a propagação de ondas e as equações da hidrodinâmica*.
- [119] Papapetrou, A.; *Lectures on general relativity*, (Dordrecht, Holland, 1974).
- [120] Lang, S.; *Linear Algebra* (Addison-Wesley, London, 1966).
- [121] Milton, K. A.; *Quantum-electrodynamic corrections to the gravitational interaction of the photon*, Phys. Rev. D **15**, 2149-2155 (1977).
- [122] Drummond, I. T. & Hathrell, S. J.; *QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons*, Phys. Rev. D **22**, 343-355 (1980).
- [123] Latorre, J.I.; Pascual, P. & Tarrach, R.; *Speed of light in non-trivial vacua*, Nucl. Phys. B **437** 60-82 (1995).
- [124] Shore, G. M.; *Faster than light photons in gravitational fields - Causality, anomalies and horizons*, Nucl. Phys. B **460** 379-394 (1996).
- [125] Dittrich, W. & Gies, H.; *Light propagation in nontrivial QED vacua*, Phys. Rev. D, **58**, 025004 (1998).
- [126] Novello, M. & Salim, J. M.; *Effective electromagnetic geometry*, Phys. Rev. D **63**, 083511 (2001).
- [127] Born, M. & Infeld, L.; *Foundations Of the new field theory*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 144** 425 (1934).
- [128] Lichnerowicz, A.; *Géométrie des groupes de transformations*, (Dunod, Paris, 1958). Tradução do título para a língua portuguesa: *Geometria de grupos de transformações*.

- [129] Visser, M.; Barceló, C. & Liberati, S.; *Bi-refringence versus bi-metricity*, arXiv:gr-qc/0204017v1.
- [130] Wald, R. M.; *General relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [131] Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R.; *The large scale structure of space-time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [132] Workshop ocorrido no CBPF (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas), Rio de Janeiro, Brasil, em outubro de 2000: *Analog models of general relativity*, www.cbpf.br/bscg/analog.
- [133] Gordon, W.; *Zur lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie*, Ann. Phys. (Leipzig), **72**, 421-456 (1923). Tradução do título para a língua portuguesa: *Sobre a propagação da luz na teoria da relatividade*.
- [134] Pereira, D. D.; *Estudo comparativo entre o formalismo eikonal e o formalismo das ondas de choque*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá. 22 de maio de 2009.
- [135] Pereira, D. D. & Klippert, R.; *Local nonlinear electrodynamics*, Phys. Lett. A **374**, 4175 - 4179 (2010).
- [136] Paschotta, R.; *Encyclopedia of laser physics and technology* (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [137] Fleishman, G. D.; Fu, Q. J.; Wang, M.; Huang, G. L. & Melnikov, V. F.; *Birefringence effect as a tool for astrophysical plasma study*, Phys. Rev. Lett. **88**, 251101 (2002).
- [138] Pagano, L.; Bernardis, P.; Troia, G.; Gubitosi, G.; Masi, S.; Melchiorri, A.; Natoli, P.; Piacentini, F. & Polenta, G.; *CMB polarization systematics, cosmological birefringence, and the gravitational waves background*, Phys. Rev. D **80**, 043522 (2009).
- [139] Goulart, G. P.; *Fenômenos eletro-magneto-ópticos em meios materiais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá. 17 de dezembro de 2007.
- [140] Silva, R. R.; *The trace formulas yield the inverse metric formula*, J. Math. Phys. **39**, 6206-6213 (1998).

- [141] Faria, E. & Melo, W.; *Mathematical aspects of quantum field theory* (IMPA, 26 Colóquio brasileiro de matemática, Rio de Janeiro, 2007).
- [142] Pauli, W.; *The connection between spin and statistic*, Phys. Rev. **58**, 716-722 (1940).
- [143] Avramidi, I. G.; *Effective action approach to quantum field theory*, (Lectures notes, New Mexico Institute of Mining and Technology, 2001).
- [144] Lanczos, C.; *The variational principles of mechanics* (Courier Dover Publications, New York, 4 ed, 1970).
- [145] Peskin, M. E. & Schroeder, D. V.; *An introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, New York, 1995).
- [146] Schwinger, J. S.; *On the Green's functions of quantized fields I*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **37**, 452-455 (1951).
- [147] Popov, V. N.; *Functional integrals in quantum field theory and statistical physics* (Springer, Berlin, 2001).
- [148] Rivers, R. J.; *Path integral methods in quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [149] Berezin, F. A.; *Introduction to algebra and analysis with anticommuting variables*, (Moscow, Moscow State University, 1983).
- [150] Schwartz, L.; *Théorie des distributions*, (Hermann, Paris, 1966). Tradução do título para a língua portuguesa: *Teoria das distribuições*.
- [151] McComb, W. D.; *Renormalization methods: A guide for beginners* (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [152] Hadamard, J.; *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Yale, 1923).
- [153] Fock, V. A.; *The proper time in classical and quantum mechanics*, Izv. USSR Acad. Sci. Phys. **4-5**, 551-568 (1937).
- [154] Vilkovisky, G. A.; *Heat Kernel: Recontre entre physiciens et mathématiciens*, l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, CERN-TH-6392-92, **43**, 203-224

- (Strasbourg, 1992). Tradução do título para a língua portuguesa: *Heat kernel: Re-encontro entre físicos e matemáticos*.
- [155] Vassilevich, D. V.; *Heat kernel expansion: User's manual*, Phys. Rep. **388**, 279-360 (2003).
- [156] Ruse, H. S.; *Some theorems in the tensor calculus*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **31** 225-230 (1930).
- [157] van Vleck, J. H.; *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **14**, 178-188 (1928).
- [158] Morette, C.; *On the definition and approximation of Feynman's path integrals*, Phys. Rev. **81**, 848-852 (1951).
- [159] Appelquist, T. & Carazzone, J.; *Infrared singularities and massive fields*, Phys. Rev. D **11**, 2856-2861 (1975).
- [160] Salam, A.; *Divergent integrals in renormalizable field theories*, Phys. Rev. **84**, 426-431 (1951).
- [161] Berredo-Peixoto, G.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.; *Universality and ambiguity in fermionic effective actions*, Phys. Rev. D **85**, 064025 (2012).
- [162] Pereira, D. D.; *Nonlocal multiplicative anomaly in fermionic effective actions*, Proceedings of Science 2012 (023) (7th International Conference on Mathematical Methods in Physics), 16 - 20 de abril de 2012. CBPF, Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em: <http://pos.sissa.it/>
- [163] Berredo-Peixoto, G. & Shapiro, I. L.; *On the renormalization of CPT/Lorentz violating QED in curved space*, Phys. Lett. B **642**, 153-159 (2006).
- [164] Gonçalves, B.; Berredo-Peixoto, G. & Shapiro, I. L.; *Exact formfactors in the one-loop curved-space QED and the nonlocal multiplicative anomaly*, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 2382-2390 (2010).
- [165] Duff, M. J.; *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11**, 1387-1403 (1994).

- [166] Asorey, M.; Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L.; *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class. Quant. Grav. **21**, 163-178 (2004).
- [167] Asorey, M.; Berredo-Peixoto, G. & Shapiro, I. L.; *Renormalization ambiguities and conformal anomaly in metric-scalar backgrounds*, Phys. Rev. D **74**, 124011 (2006).
- [168] Deser, S. & Schwimmer, A.; *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, Phys. Lett. B **309**, 279-284 (1993).
- [169] Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L.; *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP 0302 021 (2003).
- [170] Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L.; *Renormalization group and decoupling in curved space: II. The standard model and beyond*, JHEP 0306 004 (2003).
- [171] Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L.; *Renormalization group and decoupling in curved space 3. The case of spontaneous symmetry breaking*, JHEP 0402 060 (2004).
- [172] Brown, L. S.; *Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: Scalar fields*, Phys. Rev. D **15**, 1469-1483 (1977).
- [173] Brown, L. S. & Cassidy, J. P.; *Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: General theory, Maxwell field*, Phys. Rev. D **15**, 2810-2829 (1977).
- [174] Sachs, I.; Wipf, A. & Dettki, A.; *Conformal and thermodynamic properties of a family of Thirring-like models*, Phys. Lett. B **317**, 545-549 (1993).
- [175] Sachs, I. & Wipf, A.; *Generalized Thirring models*, Annals Phys. **249**, 380-429 (1996).
- [176] Rodrigues, D. C.; Salles, F. O.; Shapiro, I. L. & Starobinsky, A. A.; *Auxiliary fields representation for modified gravity models*, Phys. Rev. D **83** 084028 (2011).
- [177] 't Hooft, G. & Veltman, M. J. G.; *One-loop divergencies in the theory of gravitation*, Annales Poincare Phys. Theor. A **20**, 69-94 (1974).