

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**Gravitação modificada pelos efeitos quânticos e o  
problema de estabilidade de soluções clássicas.**

*Filipe de Oliveira Salles*

10 DE SETEMBRO DE 2014

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Gravitação modificada pelos efeitos quânticos e o  
problema de estabilidade de soluções clássicas.**

**Autor: Filipe de Oliveira Salles**

**Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro**

*Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.*

10 DE SETEMBRO DE 2014  
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL



---

In memoriam

---

*Dedico esta tese à memória do Professor Wilson Oliveira (1958-2014).  
Grande educador e excelente ser humano. Se o destino não o tivesse  
levado tão cedo tenho certeza que estaria aqui conosco neste dia.*

---

## Agradecimentos

---

- Agradeço imensamente a meu orientador, Professor Ilya Shapiro. Seu apoio, paciência e sabedoria me acompanham desde o início da graduação através da iniciação científica, passando pelo mestrado e agora no doutorado. Espero que essa colaboração possa continuar por muito tempo.
- Aos Professores Júlio C. Fabris, Davi C. Rodrigues, Ana M. Pelinson e Alexei A. Starobinsky pela colaboração;
- Ao esforço de meus pais, Vera e João, sem os quais eu não chegaria a este dia. Para vocês não existem palavras que possam descrever minha gratidão.
- Ao apoio de meus irmãos Fábio e Rodrigo, sempre disponíveis. Exemplos pelo quais, como caçula, sempre me guiei.
- À minha companheira de vida, Fernanda. *“I don’t think two people could have been happier than we have been”*
- A todos os professores do departamento de Física da UFJF.
- Agradeço do fundo do coração todos os meus amigos do mestrado e doutorado. Para

não cometer injustiças, não citarei nomes. Aqui encontrei pessoas excelentes que levarei para toda minha vida.

- Ao Sr. Domingos Lopes por toda ajuda. Sempre gentil, prestativo e de competência única.
- Ao Professor Andreas Wipf pela hospitalidade durante o estágio na Friedrich-Schiller-Universität Jena, na Alemanha e ao DAAD - Deutscher Akademischer Austauschdienst pela bolsa.
- Ao Professor David Polarski pela hospitalidade durante o estágio na Université Montpellier 2, na França e ao INCT-A e CNPq pela bolsa do “Ciência sem Fronteiras” para realizar esse estágio.
- À CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio durante o doutorado.

*Filipe de Oliveira Salles*

*Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF*

*10 de Setembro de 2014. Juiz de Fora – MG, Brasil*

*“Basic research is like shooting an arrow into the air and, where it lands, painting a target.”*

**Homer Burton Adkins**

*“Keep Walking.”*

**Johnnie Walker**

---

## Resumo

---

*Nesta tese exploramos diferentes aspectos da gravitação e as necessidades de realizar-se modificações. Iniciaremos abordando modificações “clássicas” e, em seguida, estudamos o comportamento da dinâmica de perturbações métricas na gravitação com correções quânticas induzidas pela anomalia. Obtemos a equação para ondas gravitacionais nesta teoria em um fundo homogêneo e isotrópico geral e, em seguida, verificamos a estabilidade deste mesmo fundo com relação às perturbações. Analisamos o comportamento das perturbações durante o período inflacionário, na fase estável da inflação de Starobinsky Modificada, além dos casos de radiação e matéria.*

*A estabilidade de perturbações métricas em teorias com derivadas de ordem superior da gravidade depende da escala de energia das condições iniciais de tais perturbações. Mostramos que, pelo menos nos casos de fundos cosmológicos específicos, fantasmas massivos não-físicos que estão presentes no espectro de tais teorias não irão “crescer” como excitação física, permanecendo no estado de vácuo. Isso irá ocorrer até que a frequência inicial da perturbação chegue próximo da escala de energia de Planck. Assim as versões existentes das teorias renormalizáveis e superrenormalizáveis podem ser vistas como teorias efetivas satisfatórias para Gravitação Quântica.*

---

## Abstract

---

*In this thesis we look for different aspects of gravitation and the need to make modifications. We start looking for “classic” modifications and then we study the dynamic behavior of metric perturbations in gravity with anomaly-induced quantum corrections. We obtain the equation for gravitational waves in this theory in a homogeneous and isotropic background and then we verify the stability of this with respect to perturbations. We analyze the behavior of perturbations during the inflationary period, the stable phase of the modified Starobinsky inflation, besides the radiation and matter cases.*

*The stability of metric perturbations in higher-derivative gravity theories depends on the energy scale of the initial conditions. We show that, at least in cases of specific cosmological backgrounds, nonphysical massive ghosts that are present in the spectrum of such theories will not “grow-up”, remaining in the vacuum state. This will occur until the initial frequency of the perturbations reaches near the Planck energy scale. Thus renormalizable and superrenormalizable theories can be seen as satisfactory effective theories for quantum gravity.*

---

## Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Notação e convenções</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de publicações</b>	<b>x</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Campos auxiliares em modelos de gravitação modificada</b>	<b>6</b>
1.1 Introdução . . . . .	6
1.2 Equivalência entre as teorias $f(R)$ e métrica-escalar . . . . .	7
1.3 Teoria de gravitação modificada em uma forma mais geral . . . . .	12
1.3.1 Caso com vínculos . . . . .	16
1.4 Condições de inflação exponencial no caso geral . . . . .	22
1.5 Conclusão . . . . .	26

<b>2</b>	<b>A Anomalia Conforme</b>	<b>28</b>
2.1	Equações de Einstein Semiclássicas e a Ação Efetiva . . . . .	29
2.1.1	Breve revisão do método de campo de fundo . . . . .	32
2.2	Comportamento Ultravioleta . . . . .	35
2.3	Acoplamento conforme e anomalia do traço . . . . .	37
<b>3</b>	<b>A anomalia e a estabilidade das soluções clássicas</b>	<b>40</b>
3.1	Aplicações da abordagem semiclássica . . . . .	41
3.2	Ação efetiva induzida pela anomalia . . . . .	44
3.3	Obtendo as equações para ondas gravitacionais . . . . .	49
3.3.1	Ação total com termos quânticos . . . . .	49
3.3.2	Equações perturbadas . . . . .	50
3.4	Analisando a estabilidade . . . . .	52
3.4.1	Análise semi-analítica . . . . .	53
3.4.2	Análise numérica . . . . .	58
3.5	Espectro das ondas gravitacionais no fundo cosmológico . . . . .	59
3.5.1	Inflação (expansão exponencial) . . . . .	61
3.5.2	Radiação . . . . .	62
3.5.3	Matéria . . . . .	63
3.6	Efeitos quânticos de campos massivos e inflação “temperada” . . . . .	64
3.7	Considerações acerca dos resultados obtidos . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Gravitação Quântica abaixo da escala de Planck?</b>	<b>67</b>
4.1	Introdução . . . . .	68
4.2	Fantasmas não-físicos massivos . . . . .	70
4.2.1	A teoria quântica pode “sobreviver” sem derivadas superiores gravitacionais? . . . . .	70
4.2.2	Podemos nos livrar dos fantasmas massivos? . . . . .	74
4.3	Ondas gravitacionais em um fundo arbitrário . . . . .	76
4.3.1	Coordenadas Normais de Riemann . . . . .	77
4.3.2	Aproximação de ordem zero . . . . .	80

4.4	Perturbações no fundo cosmológico . . . . .	83
4.4.1	Análise da estabilidade . . . . .	85
4.4.2	Caso plano . . . . .	86
4.4.3	Soluções cosmológicas . . . . .	88
4.4.4	Teoria super-renormalizável . . . . .	93
4.5	Considerações sobre resultados obtidos . . . . .	95
	<b>Considerações finais</b>	<b>96</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>105</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Diagramas de Feynman correspondentes à (2.22), onde $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4!}\Phi^4$ . . . . .	34
2.2	Diagramas de Feynman correspondentes à contribuição de $\mathcal{O}(\hbar^2)$ de (2.17)	35
3.1	Gráfico para a perturbação $h(t)$ em função do tempo onde analisamos os casos para $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ , $a(t) = a_0 t^{1/2}$ e $a(t) = a_0 t^{2/3}$ respectivamente, com as condições iniciais $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , $\dot{h} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ , $\ddot{h} = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}$ , $\dddot{h} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}}$ , onde adotamos que $a_1 < 0$ . Comportamento estável. . . . .	58
3.2	Gráfico para a perturbação $h(t)$ em função do tempo onde analisamos os casos para $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ , $a(t) = a_0 t^{1/2}$ e $a(t) = a_0 t^{2/3}$ respectivamente, com as condições iniciais $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , $\dot{h} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ , $\ddot{h} = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}$ , $\dddot{h} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}}$ , onde adotamos que $a_1 > 0$ . Comportamento instável. . . . .	59
3.3	Gráfico de e-folds em relação ao índice espectral $k$ . Comportamento do espectro da anisotropia para os três casos estudados com $k = 0.01$ . As três soluções possuem o mesmo $k$ para $a_1 = 0$ . Ou seja, são degenerados. . . . .	62
3.4	Gráfico de e-folds em relação ao índice espectral $k$ . Comportamento do espectro da anisotropia para ondas gravitacionais no caso plano (linha preta com $k = 0$ ), inflação (linha vermelha com $k = 0.79$ ) e radiação/matéria (linha azul com $k = 0.3$ para ambos). Em todos os casos temos $a_1 = 1$ . . . . .	64
3.5	Evolução de $\sigma(t)$ . . . . .	65

4.1	Gráficos para o caso do espaço-plano. O parâmetro $k$ é medido em unidades de $M_P$ e os modos crescentes irão aparecer apenas quando $k$ estiver perto de 1. As oscilações aqui significam que os autovalores com partes reais positiva e negativa possuem componentes imaginários. Para valores menores de $k$ a amplitude aumenta grandemente, porém assintoticamente irá para zero (fora do gráfico). . . . .	87
4.2	Gráfico para $h(t)$ para o caso exponencial, $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ . A solução com modos crescentes aparece apenas quando temos $k = 0.036$ . . . . .	90
4.3	Gráfico para perturbação $h(t)$ em função do tempo analisada para a radiação, quando $a(t) = a_0 t^{1/2}$ . Iniciando de $k \sim 0.50$ as solução se tornam “violentas”, como podemos observar no gráfico. Porém, abaixo deste valor não encontramos modos crescentes. . . . .	91
4.4	Gráfico para perturbação $h(t)$ em função do tempo analisado para $a(t) = a_0 t^{3/2}$ (Matéria). . . . .	92
4.5	Mais uma vez, os modos crescentes surgem apenas quando estamos próximos da escala de Planck. . . . .	95

## Geometria Riemanniana

A convenção de sinal para a métrica e para o tensor de curvatura utilizada nesta tese será  $(- - -)$ . Logo nós usaremos a seguinte assinatura para a métrica:  $(+ -, - -)$ , sendo o tensor de Riemann,

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho},$$

e também definimos o tensor de Ricci como sendo  $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ . Em espaço-tempo curvo nos escreveremos a métrica como  $g_{\mu\nu}$  e no caso especial para métrica de Minkowski escreveremos como  $\eta_{\mu\nu}$ . O determinante da métrica será representado como

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}).$$

Nós também iremos representar as derivadas parciais como sendo uma vírgula antes do índice e a derivada covariante como ponto e vírgula, e.g.,

$$\begin{aligned} A_{,\mu} &\equiv \partial_{\mu} A = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A \\ A_{;\mu} &\equiv \nabla_{\mu} A. \end{aligned}$$

A simetrização entre dois índices será representada pelo uso de parênteses

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}),$$

e a anti-simetrização será denotada por colchetes

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}).$$

## Convenções e abreviações

Na maior parte do tempo nós usaremos as unidades naturais de medida com  $c = \hbar = \epsilon_0 = 1$ , a não ser que seja dito o contrário. Também iremos usar as seguintes abreviações,

- $[\partial_\mu]$ : Derivada parcial;
- $[\nabla_\mu]$ : Derivada covariante;
- $[\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu]$ : Operador D'Alembertiano generalizado;
- $[\ln]$ : Logaritmo natural;
- $[\text{diag}]$ : matriz diagonal.

---

## Lista de publicações

---

- D. C. Rodrigues, F. de O. Salles, I. L. Shapiro e A. A. Starobinsky, “**Auxiliary fields representation for modified gravity models**,” Phys. Rev. D **83** (2011) 084028, [arXiv:1101.5028 [gr-qc]].
- J. C. Fabris, A. M. Pelinson, F. de O. Salles e I. L. Shapiro, “**Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections**,” JCAP **1202** (2012) 019, [arXiv:1112.5202 [gr-qc]].
- F. de O. Salles, “**Anomaly-induced effective action of gravity and stability of classical solutions**,” PoS ICMP **2012** (2012) 018, Proceedings of Science 2012 (023),
- F. O. Salles e I. L. Shapiro, “**Do we have unitary and (super)renormalizable Quantum Gravity below Planck scale?**,” Phys. Rev. D **89** (2014) 084054, [arXiv:1401.4583 [hep-th]].



---

# Introdução

---

*“Ao que pode. Vamos ao que pode.”*

**Chico Buarque de Holanda**, *Show censurado em 1973*

Podemos afirmar que a gravitação é a força fundamental que nos é mais familiar, estando diretamente ligada à nossa vida cotidiana. Porém ela se mostra bastante diferente das demais forças fundamentais (eletromagnetismo, força nuclear fraca e a força nuclear forte), sendo muitas ordens de magnitude mais fraca e extremamente “resistente” às tentativas de quantização. No entanto, sua importância é extrema por ser a força dominante em grandes escalas do Universo. As teorias de Newton e Einstein são os exemplos mais bem sucedidos de teorias gravitacionais, ambas tendo grande sucesso (sendo a teoria de Einstein nossa melhor teoria da gravidade até o momento, mesmo passados quase cem anos de sua fundação). A seguir iremos fazer uma breve descrição das teorias gravitacionais de Newton e Einstein e em seguida daremos as motivações para a necessidade de modificações e as implicações que isso irá trazer.

# Gravitação Newtoniana

Sir Isaac Newton foi o primeiro a desenvolver uma teoria para a gravidade. Ele forneceu um simples e elegante modelo capaz de descrever a gravitação como sendo a mesma força que rege quedas de maçãs sobre a Terra e também o movimento de planetas [1]. Foi capaz também de explicar em detalhes matemáticos o que antes era puramente empírico. Através da lei de Kepler sua teoria experimentou o sucesso ao explicar as órbitas planetárias .

No século 18, o astrônomo William Herschel descobre Urano. No entanto, comparando a órbita com um cálculo newtoniano, encontra uma outra perturbação. Desta forma chega a duas possibilidades: a existência de um outro planeta na proximidade de Urano causando essa perturbação ou a teoria de Newton estaria errada. De forma independente John Couch Adams e Urbain Leverrier fizeram previsões para a existência de Netuno e, pouco depois, a observação feita por Galle confirmam suas previsões [2, 3]. Esta foi uma grande prova para consolidar definitivamente a teoria de Newton.

O sucesso da previsão de Netuno levou Leverrier [4] a novamente conjecturar a existência de um planeta (apelidado de “Vulcan ”), como sendo responsável por uma discrepância entre a observação e a teoria de Newton encontrada na precessão do periélio de Mercúrio. No entanto este “planeta escuro” (previsto para ser ainda mais perto do Sol do que Mercúrio) nunca viria a ser encontrado. Na verdade, verificou-se que para obter o resultado correto para teoria e as observações de Mercúrio não seria necessário encontrar um novo planeta, mas sim mudar a teoria da gravidade.

Desta forma Albert Einstein desenvolve sua Teoria da Relatividade Geral e soluciona o problema da precessão do periélio de Mercúrio [5]. Não somente isso, a teoria também forneceu um modelo gravitacional capaz de resolver as inconsistências entre a gravidade newtoniana e a Relatividade Especial, com a gravidade propagando-se a uma velocidade finita (permitindo assim manter a consistência com localidade e causalidade ) e também tratando energia, massa e momento em mesmo pé de igualdade. A teoria passou no teste de recair à gravidade newtoniana em limites apropriados, garantindo que as observações de sucesso resultantes da teoria de Newton permanecessem preservadas. Também faz novas e diferentes previsões, como a “curvatura” do raio de luz pelo Sol. Essa última previsão

da teoria é confirmada por Eddington em 1919 [6].

## Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral (RG) possui uma interpretação extremamente poderosa e bela decorrente da dinâmica do próprio espaço. Na RG o espaço-tempo é descrito por uma variedade pseudo-Riemanniana e as partículas seguem geodésicas sobre esta variedade, sendo essas geodésicas dependentes da métrica. A dinâmica desta métrica é a dinâmica da gravidade, e as equações de campo de Einstein são dadas por [7],

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

descrevendo como a métrica é influenciada pela presença de energia e momento. Podemos observar também a interação entre a matéria (que está sendo influenciada pela métrica) e a métrica (influenciada pela matéria). Essa relação entre matéria e geometria foi brilhantemente analisada por John Wheeler quando diz [8]: “O espaço diz à matéria como se mover ... a matéria diz ao espaço como se curvar”.

A Relatividade Geral proporcionou uma verdadeira revolução na física. Entraremos em detalhes sobre essa elegante e magnífica teoria nos próximos capítulos.

## Os motivos para modificar a gravitação

Vários são os motivos que nós levam a tentar modificar a gravitação. E várias também são essas tentativas de modificação. Aqui citaremos apenas dois desses motivos, já suficientes para justificar a realização do programa previsto nesta tese:

- O problema da Constante Cosmológica: A falha da estimativa ultravioleta para a CC levou ao debate para uma gravitação semiclássica. A despeito do fato de não termos ainda uma teoria quântica completa para a gravidade, uma teoria efetiva em baixas energias pode nos dar algumas pistas da origem da CC. A ideia de usar a teoria semiclássica para produzir a CC foi primeiro abordado por Starobinsky no contexto da inflação cósmica [9]. No modelo de Starobinsky a anomalia do traço da teoria

semiclássica produz um termo cosmológico, que irá guiar a inflação no Universo primordial. A anomalia do traço é uma anomalia quântica gerada de forma espontânea, que está relacionada apenas com o número de diferentes campos quânticos presentes.

- Criação de Partículas: Possivelmente o resultado principal em Teoria Quântica de Campos seja a criação e aniquilação de partículas. A abordagem de TQC em espaço-tempo curvo leva à questionar se este mesmo mecanismo de criação/destruição de partículas existe para o caso de campos gravitacionais intensos, e.g., campo gravitacional primordial.

A anomalia do traço irá adicionar novos campos auxiliares na teoria semiclássica, com novos graus de liberdade. Estes campos auxiliares são “sensíveis” às condições de fronteira globais na escala de horizonte cosmológico. Quando permitimos que estes campos flutuem livremente, a CC parece se tornar dependente da escala, ou seja, irá decrescer em valor conforme as distâncias aumentam. Isso pode então explicar o pequeno valor encontrado para  $\lambda$  sem qualquer ajuste fino.

No próximo capítulo iremos olhar para o problema do ponto de vista clássico, através de uma modificação da gravitação muito utilizada hoje em dia, as conhecidas “Teorias  $f(R)$ ”. Iremos mostrar como efetuar um mapeamento para teorias escalares-tensoriais e como generalizar a função  $f$  para muito além do tensor de curvatura  $R$  apenas. Depois iremos fazer uma pequena revisão de conceitos essenciais para o estudo da gravitação semiclássica e nos capítulos posteriores iremos abordar as aplicações da anomalia do traço do tensor energia-momento e os resultados obtidos (por exemplo, em ondas gravitacionais primordiais).

---

## Campos auxiliares em modelos de gravitação modificada

---

*“There are children playing in the streets who could solve some of my top problems in physics, because they have modes of sensory perception that I lost long ago”.*

**J. Robert Oppenheimer**

### 1.1 Introdução

Recentemente está havendo um interesse cada vez maior em teorias do tipo  $f(R)$  descritas pela ação [12],

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (1.1)$$

onde  $f(R)$  é uma função qualquer diferenciável. É bem conhecido que, sob a condição  $f''(R) \neq 0$ , a teoria é dinamicamente equivalente à teoria métrico-escalar com o potencial dependendo da forma da função  $f(R)$ . Nosso objetivo neste capítulo será discutir essa equivalência em um modo um pouco diferente. Como uma aplicação do nosso método seremos capazes de generalizar o teorema de equivalência, quando a ação depende de uma função de muitas variáveis,  $f(X^i)$ , com  $X^i$  sendo, por exemplo,  $R$ ,  $\square R$ , Gauss-Bonnet

e/ou outras quantidades. Devemos notar que as correções quânticas da Relatividade Geral (provenientes da abordagem semiclássica ou teoria de cordas) podem ser, em certa medida, modeladas por essa função. Outra vantagem do método que apresentamos aqui é que ele pode ser usado, também, para outras teorias, como por exemplo, modelos do tipo Eddington. Por último nosso método é um pouco mais explícito e simples do que os anteriormente conhecidos, e.g., [13, 14, 15, 16, 17, 18] (veja também [19]). Todas as considerações aqui apresentadas são para  $D = 4$  afim de torná-las mais explícitas, mas também podem ser trivialmente generalizadas para um caso arbitrário onde  $D \neq 2$ .

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Primeiro consideramos o caso mais simples da teoria (1.1) e usaremos uma maneira simples de mapeamento para o modelo métrico escalar. Esta parte não é essencialmente original, apenas apresentamos aqui de uma forma um pouco mais simples das transformações conhecidas. Um dos aspectos relativamente novos de nossa consideração é o procedimento para “fixar” o termo de constante cosmológica na representação de métrica escalar da teoria. Nós também verificamos este procedimento usando a solução do tipo de Sitter (dS) exponencial. Em seguida abordamos as teorias da gravidade de uma forma bastante geral, onde a ação contém uma função escalar arbitrária de vários invariantes de curvatura, como o  $R$ , termo de Gauss-Bonnet, o quadrado do tensor de Weyl e outros. Desenvolvemos uma abordagem sistemática para mapear tais teorias nos modelos de métrica multi-escalares. O passo seguinte é dedicado à formulação de condições gerais para a solução exponencial para as teorias consideradas anteriormente.

## 1.2 Equivalência entre as teorias $f(R)$ e métrica-escalar

Vamos começar a partir de um exemplo simples e pedagógico da teoria (1.1) e encontrar o seu dual métrico escalar. Considere a teoria descrita pela seguinte ação:

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi R - V(\psi) \}. \quad (1.2)$$

A teoria (1.2) descreve um escalar dinâmico  $\psi$ , apesar de não haver termo cinético para  $\psi$  na ação (1.2). Pode-se estabelecer a relação entre as teorias (1.1) e (1.2). A equação de

movimento que resulta da variação de  $\psi$  em (1.2) tem a forma

$$R = V'(\psi) = \frac{dV}{d\psi}. \quad (1.3)$$

Vamos requisitar que, depois de resolver (1.3) com respeito a  $\psi$  e substituindo essa solução  $\psi = \psi(R)$  de volta em (1.2), obtemos a ação (1.1)

$$\psi(R) \cdot R - V(\psi(R)) = f(R). \quad (1.4)$$

A última condição significa que a equivalência das duas ações é dinâmica, ou seja, mantém os extremos do campo  $\psi$ . Mais tarde vamos confirmar a validade deste procedimento através das equações de movimento para ambas as métricas e  $\psi$ , que segue um caminho semelhante ao adotado em [87].

Nosso próximo passo será encontrar a relação entre as funções  $V(\psi)$  e  $f(R)$ . Tomando a derivada  $d/dR$  da equação (1.4), chegando à relação

$$\psi + R\psi'(R) - V'(\psi)\psi'(R) = f'(R). \quad (1.5)$$

Nesta fórmula assumimos que  $\psi = \psi(R)$  e  $R = R(\psi)$ . Usando (1.3), a equação (1.5) se reduz imediatamente a relação muito simples

$$\psi = f'(R), \quad (1.6)$$

indicando que a função  $R = V'(\psi)$  nada mais é senão o inverso da função  $\psi = f'(R)$ .

Finalmente, chegamos à seguinte receita para obter os potenciais  $V(\psi)$  para uma dada  $f(R)$ :

a) Calcular  $\psi = f'(R)$  e invertê-lo, obtendo-se  $R = V'(\psi)$ . Note que a possibilidade de inversão requer  $f''(R) \neq 0$ .

b) Integrar em  $\psi$

$$V(\psi) = \Omega_{fix} + \int_0^\psi R(\psi) d\psi. \quad (1.7)$$

Devemos notar que uma constante arbitrária de integração  $\Omega_{fix}$  em (1.7) corresponde exatamente à constante  $f_0 = f(R=0)$  que, aliás, é perdida quando tomamos a derivada

$f'(R)$ . Além disso, a fim de “fixar” a constante  $\Omega_{fix}$  pode-se usar a seguinte consideração simples. Usando (1.4) chegamos a

$$V(\psi) = R\psi - f(R), \quad \text{onde } \psi = f'(R), \quad (1.8)$$

Lembre-se que, quando substituído na ação covariante,  $\Omega_{fix}$  não pode ser considerada como uma constante irrelevante, porque é multiplicado pelo fator  $\sqrt{-g}$ . Como (1.7) deve ser igual à (1.8), pode-se então “fixar”  $\Omega_{fix}$ . Mais tarde, adicionalmente, iremos verificar a validade deste procedimento para uma solução cosmológica do tipo  $dS$ .

A receita dada acima permite, em princípio, encontrar a função potencial  $V(\psi)$  para uma dada função  $f(R)$ . Vamos verificar os resultados deste procedimento simples ao nível das equações de movimento. Ao tratarmos de teorias do tipo  $f(R)$  podemos adotar duas abordagens diferentes para o princípio variacional. O conhecido formalismo métrico e o formalismo de Palatini (para maiores detalhes consultar [23]), porém aqui nesta tese iremos utilizar apenas a primeira abordagem.

Tomando a variação da equação (1.1) com relação à métrica, obtemos

$$f'(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(Rf' - f) - \nabla_\mu \nabla_\nu f' + g_{\mu\nu}\square f' = 0. \quad (1.9)$$

Realizando a mesma operação para (1.2), chegamos a

$$\psi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\psi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - g_{\mu\nu}\square\psi = 0. \quad (1.10)$$

Pode-se verificar que a equivalência entre (1.9) e (1.10) vale se há uma relação

$$\frac{f'R - f}{f'} = \frac{V(\psi)}{\psi}. \quad (1.11)$$

é fácil verificar que a solução dessa equação tem a forma (1.6).

Iremos considerar alguns exemplos particulares para o processo descrito acima. O caso mais simples, levando a equações lineares  $\psi = f'(R)$

$$f(R) = \Omega - \kappa^2 R + \frac{\alpha}{2} R^2, \quad (1.12)$$

sendo  $\kappa^2$  e  $\alpha$  constantes. Usando os resultados anteriores, pode-se facilmente chegar a

$$\psi(R) = f'(R) = -\kappa^2 + \alpha R \quad \implies \quad V'(\psi) = R = \frac{\psi + \kappa^2}{\alpha}. \quad (1.13)$$

Integrando (1.13) chegaremos à

$$V(\psi) = \Omega_{fix} + \frac{\psi^2}{2\alpha} + \frac{\kappa^2\psi}{\alpha}. \quad (1.14)$$

Finalmente, para “fixar” a constante de integração, é preciso substituir a derivada  $\psi = -\kappa^2 + \alpha R$  de volta em (1.14) e compará-la com (1.12). Este procedimento nos dará

$$\Omega = \Omega_{fix} - \frac{\kappa^4}{2\alpha}. \quad (1.15)$$

Podemos realizar uma simples verificação do procedimento descrito para a fixação de  $\Omega$ . Para esse fim, iremos agora extrair a solução do tipo  $dS$  para as teorias (1.1) e (1.2) para o caso (1.12). A métrica do nosso interesse é

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right),$$

onde  $k$ , neste capítulo, descreve a curvatura e é constante no tempo (podendo assumir o valores  $-1, 0, 1$ ),  $a(t) = \exp\{\sigma(t)\}$  e depois vamos definir  $\sigma(t) = H_0 t$ . É fácil de se obter a equação para  $\sigma$  para a teoria (1.2),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_1}{\delta \sigma} = -6 e^{-2\sigma} (2\psi k + \psi'' + 2\sigma''\psi + 2\psi'\sigma' + 2\sigma'^2\psi) - 4V(\psi) = 0. \quad (1.16)$$

Aqui a linha representa a derivada com relação ao tempo conforme, e.g.,

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{d\eta} = a(t) \frac{d\sigma}{dt},$$

enquanto a derivada com relação ao tempo físico  $t$  é representada pelo ponto. Em termos do tempo físico e adotando  $k = 0$ , encontraremos a seguinte relação:

$$-12H_0^2 \psi - 9H_0 \dot{\psi} - 3\ddot{\psi} = 2V. \quad (1.17)$$

Substituindo  $\psi = -\kappa^2 + \alpha R$  e tendo em conta que  $R = -12 H_0^2$  (valor da curvatura obtido para solução de de Sitter) para a métrica FRW, obtemos

$$V = 6 H_0^2 \kappa^2 - 6 H_0^2 \alpha R \quad (1.18)$$

e finalmente

$$\Omega = 6 H_0^2 \kappa^2. \quad (1.19)$$

Por outro lado, partindo de

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Omega - \kappa^2 R + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] \quad (1.20)$$

chegamos à equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_f}{\delta \sigma} = 4\Omega - 6\kappa^2 e^{-2\sigma} (2\sigma'^2 + 2\sigma'') + 18\alpha e^{-4\sigma} (2\sigma'''' - 12\sigma'^2 \sigma''). \quad (1.21)$$

É fácil verificar que a solução exponencial corresponde, mais uma vez, à relação (1.19).

Finalmente, para ser mais completo, vamos abordar a possibilidade de utilização da transformação conforme na teoria métrica escalar. É bem sabido que a teoria (1.2) pode ser facilmente mapeada em uma outra com termo escalar cinético. Daremos o tratamento correspondente aqui para sermos mais gerais e para todos que quiserem maiores detalhes favor ver a revisão [24].

Iniciaremos a partir da transformação conforme

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma(x)} \quad (1.22)$$

na ação (1.2). Um cálculo simples produz o seguinte resultado

$$S_c[g_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi e^{2\sigma} [R - 6(\nabla\sigma)^2 - 6\Box\sigma] - e^{4\sigma} V(\psi) \}, \quad (1.23)$$

onde  $(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma$ . Vamos escolher  $\sigma$  tal que  $\psi e^{2\sigma} = -\kappa^2$ . Então, o primeiro termo  $\psi e^{2\sigma} R$  coincide com o termo de Einstein-Hilbert, também o terceiro termo  $(-6\psi e^{2\sigma} \Box\sigma)$  se torna a derivada total (que não afeta as equações do movimento). Afim de proporcionar o termo cinético tomamos

$$\varphi = 2\sqrt{3}\kappa\sigma, \quad \text{então} \quad \psi = -\kappa^2 \exp\left\{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}\kappa}\right\}. \quad (1.24)$$

Logo teremos que

$$S_{min}[g_{\mu\nu}, \varphi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\kappa^2 R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi) \right\}, \quad (1.25)$$

onde os dois potenciais estão relacionados como

$$U(\varphi) = e^{4\sigma} V(\psi) = \frac{\kappa^4}{\psi^2} V(\psi). \quad (1.26)$$

As fórmulas (1.22), (1.24) e (1.26) nada mais são que a mudança de variáveis na ação (1.2), que a transforma na ação (1.25). Portanto não precisamos verificar a equivalência entre as duas ações por outros meios, como por exemplo examinar as equações do movimento. Finalmente, vamos observar que o caso de multi-escalares pode ser, à princípio, também tratado pela transformação conforme, mas essa transformação não é tão fácil como no caso de um escalar [25].

### 1.3 Teoria de gravitação modificada em uma forma mais geral

Nós apresentamos uma receita útil e simples de mapear teorias (1.1) em teorias (1.2) ao nível clássico. Este método pode ser generalizado para as ações gravitacionais que são mais gerais que (1.1). No entanto, como veremos a seguir, neste caso é preciso mais campos escalares. Resultado semelhante foi publicado recentemente em [20] e [21], mas sua obtenção parece bastante diferente.

O método pode ser especialmente útil para trabalhar as soluções tipo  $dS$  e é aplicável para testar vários modelos de gravidade modificada, incluindo os correspondentes às correções quânticas. Considere a seguinte ação gravitacional

$$S_{gen} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \square R, \tilde{E}, C^2), \quad (1.27)$$

onde  $\tilde{E} = E - \frac{2}{3} \square R$ ,  $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$  é o termo topológico Gauss-Bonnet (densidade de Euler) e  $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + (1/3) R^2$  é o quadrado do tensor de Weyl.

Começamos por considerar uma generalização da ação (1.1),

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} f(X_i) \quad \text{onde} \quad X_i = R, \square R, \tilde{E}, C^2 \quad (1.28)$$

no caso da ação (1.27), o número de invariantes pode ser facilmente estendido. Para este fim, definimos  $i = 1, \dots, N$ . Considerando a ação dual

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ X_i \psi^i - V(\psi^i) \right]. \quad (1.29)$$

Vamos seguir o mesmo esquema que utilizamos na seção anterior. As equações para  $\psi^i$  assumem a seguinte forma

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial \psi^i}. \quad (1.30)$$

Substituindo em (1.29), exigindo a equivalência à ação (1.28),

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \psi^i \frac{\partial V}{\partial \psi^i} - V(\psi^i) \right\} = \int d^4x \sqrt{-g} f(X_i). \quad (1.31)$$

Assumindo

$$f(X_i) = X_i \psi^i - V(\psi^i), \quad (1.32)$$

e tomando a derivada parcial com respeito a  $X^i$  em (1.32), nós encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial X_k} = \psi^k + X_i \frac{\partial \psi^i}{\partial X_i} - \frac{\partial V}{\partial \psi^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial X_k} \implies \psi^k = \frac{\partial f}{\partial X_k}, \quad (1.33)$$

onde usamos a equação (1.30). As fórmulas (1.30) e (1.33) mostram que sempre temos

$$X_i = \frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi_i} \quad \text{e} \quad \psi_k = \frac{\partial f(X)}{\partial X_k}. \quad (1.34)$$

A regrar para obter  $V(\psi^i)$  é muito semelhante à descrita na seção anterior e tem a seguinte aparência:

- a) Calcular  $\psi^k = \frac{\partial f(X)}{\partial X_k}$ ;
- b) Resolver essas equações e encontrar  $X_k(\psi) = \frac{\partial V}{\partial \psi^k}$ ;
- c) Integrar as últimas relações e encontrar  $V(\psi_k)$  até a constante aditiva;
- d) “Fixar” a constante pela exigência de que as ações coincidam no limite correspondente (normalmente curvatura zero). Observe que esse procedimento pode ser aplicado também para as generalizações não-Riemannianas da Relatividade Geral, incluindo teoria de gravitação com torção.

Vamos considerar um exemplo de como a equivalência com a teoria métrica-escalar pode ser alcançada. Partimos da ação (1.27) com a função

$$f(R, \tilde{E}) = F(R) \cdot \tilde{E}, \quad (1.35)$$

onde  $F(R)$  é uma função arbitrária do escalar de curvatura, que será definida mais tarde.

A ação equivalente é

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \psi R + \chi \tilde{E} - V(\psi, \chi) \right\}. \quad (1.36)$$

Vamos seguir a receita acima descrita. As equações

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{E}} = \chi = F(R), \quad \frac{\partial f}{\partial R} = \psi = \tilde{E}F'(R), \quad (1.37)$$

podem ser resolvidas com relação aos dois campos escalares,

$$R = g(\chi), \quad \tilde{E} = \frac{\psi}{F'(R)} \implies \tilde{E} = \frac{\psi}{F'_g(g(\chi))}. \quad (1.38)$$

Por outro lado, temos as funções inversas

$$R = \frac{\partial V}{\partial \psi} = g(\chi), \quad \tilde{E} = \frac{\partial V}{\partial \chi} = \frac{\psi}{F'_g(g(\chi))}. \quad (1.39)$$

Então

$$V(\psi, \chi) = \int g(\chi) d\psi + g_1(\chi) = g_1(\chi) + \psi g(\chi), \quad (1.40)$$

e

$$V(\psi, \chi) = \int d\chi \frac{\psi}{F'_g(g(\chi))} + g_2(\psi) = \psi \int \frac{d\chi}{F'_g(g(\chi))} + g_2(\psi). \quad (1.41)$$

Se compararmos as duas formas da função potencial (1.40) e (1.41), torna-se claro que  $g(\chi)$  satisfaz a equação funcional

$$g(\chi) = \int \frac{d\chi}{F'_g(g(\chi))} + C. \quad (1.42)$$

E, além disso,

$$g_2(\psi) - C\psi = g_1(\chi) = C_1 = \text{const.} \quad (1.43)$$

Não parece possível avançar mais no desenvolvimento da teoria acima neste ponto, devido a sua forma geral e, por este motivo, vamos dar uma forma mais concreta de  $F(R)$ . Considere o primeiro caso muito simples  $f(R, \tilde{E}) = -\Omega + R\tilde{E}$ . Fazendo os mesmos passos como no caso geral, obtemos

$$F(R) = R \implies \chi = R, \quad g(\chi) = \chi, \quad F'(R) = 1.$$

Usando (1.40) e (1.41), podemos obter

$$V(\psi, \chi) = g_1(\chi) + \psi\chi = \psi \int d\chi + g_2(\psi) = \psi\chi + g_2(\psi).$$

É fácil ver que, neste caso,  $g_1(\chi) = g_2(\psi) = C$ , então finalmente nós temos:

$$V(\psi, \chi) = \psi\chi + C. \quad (1.44)$$

Finalmente, substituindo as relações  $\chi = R$  e  $\psi = \tilde{E}$  em (1.44), pode-se facilmente verificar que  $C = \Omega$ . Esse resultado também pode ser verificado por inspeção das soluções exponenciais nos dois casos.

Iremos considerar um exemplo um pouco mais complicado, quando

$$f(R, \tilde{E}) = \Omega - \kappa^2 R + \beta \tilde{E} \ln \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (1.45)$$

onde  $\beta$  é apenas uma constante e  $R_0$  é um valor de referência para a curvatura escalar. A expressão (1.45) pode ser vista como parte do grupo de renormalização corrigido na ação de vácuo, onde o parâmetro do grupo de renormalização  $\mu^2$  é associado ao escalar de curvatura (veja, e.g., [22] para mais detalhes e referências).

Seguindo os passos dos exemplos anteriores, obtemos

$$\frac{\partial f(R, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} = \chi = \beta \ln \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right) \implies R = R_0 \left( e^{\chi/\beta} - 1 \right) \quad (1.46)$$

e

$$\frac{\partial f(R, \tilde{E})}{\partial R} = \psi = \frac{\beta \tilde{E}}{R + R_0} - \kappa^2 \implies \tilde{E} = \frac{R_0}{\beta} (\psi + \kappa^2) e^{\chi/\beta}. \quad (1.47)$$

Na fase seguinte, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\psi, \chi)}{\partial \psi} = R &\implies V(\psi, \chi) = g_1(\chi) + R_0 \psi e^{\chi/\beta} - R_0 \psi. \\ \frac{\partial V(\psi, \chi)}{\partial \chi} = \tilde{E} &\implies V(\psi, \chi) = g_2(\psi) + R_0 \psi e^{\chi/\beta} + \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta}. \end{aligned}$$

Usando essas duas expressões, é fácil perceber que

$$g_1(\chi) = \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta} + C \quad \text{e} \quad g_2(\psi) = -R_0 \psi + C.$$

Finalmente, chegamos ao potencial

$$V(\psi, \chi) = R_0 \psi \left( e^{\chi/\beta} - 1 \right) + \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta} - \Omega - \kappa^2 R_0, \quad (1.48)$$

onde a constante  $C = -\Omega - \kappa^2 R_0$  foi corrigida segundo o mesmo método que foi utilizado nos casos anteriores.

### 1.3.1 Caso com vínculos

Pode-se considerar uma expressão mais complicada para a lagrangiana covariante

$$f(R, \tilde{E}, C^2) = \Omega - \kappa^2 R + \beta \tilde{E} \ln \left(1 + \frac{R}{R_0}\right) + \beta_1 C^2 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0}\right). \quad (1.49)$$

Neste ponto podemos fazer uma observação importante. À primeira vista, a lagrangiana equivalente para este caso deve ter três campos auxiliares, pois existem três estruturas,  $R$ ,  $\tilde{E}$  e  $C^2$ . Ao mesmo tempo, o problema de reduzir a teoria (1.49) é essencialmente equivalente ao da teoria (1.45), com o  $\beta \tilde{E}$  por combinação  $\beta \tilde{E} + \beta_1 C^2$ . Obviamente, neste caso precisamos de apenas dois campos auxiliares, e não três. Em outras palavras, neste caso, o número de campos auxiliares necessários é menor do que aquele que poderia ser pensado apenas por contagem do número de estruturas  $X_i$  na ação inicial. Este exemplo mostra que seria interessante ter um critério geral para estabelecer um número exato de campos auxiliares necessários para uma determinada função inicial  $f(X_i)$ .

Para resolver este problema iremos relembrar alguns conceitos de mecânica analítica. Seja um sistema descrito pela Lagrangeana

$$L = L(q, \dot{q}), \quad (1.50)$$

em um espaço de configurações  $N$ -dimensional, representado pelas coordenadas generalizadas  $q_i$ , onde  $i = 1, \dots, N$ . Os  $\dot{q}_i$  são as correspondentes velocidades generalizadas.

A passagem para o formalismo hamiltoniano é feita, primeiramente, pela introdução dos momentos canônicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.51)$$

No caso de sistemas não vinculados,  $p_i$  e  $q_i$  são variáveis independentes, representando o chamado espaço de fases. Pode acontecer, entretanto, de haver sistemas onde as relações (1.51) levem à existência de vínculos. Denotamos genericamente esses vínculos por

$$\phi_m = \phi_m(q, p), \quad (1.52)$$

onde  $m = 1, \dots, M \leq N$ . Os vínculos decorrentes diretamente da relação de definição dos momenta são chamados de vínculos primários. Outros vínculos podem existir, tomando o nome de vínculos secundários.

Sendo o Hamiltoniano canônico ( $H_c$ ), fazendo variações genéricas de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $p$  dadas por  $\delta q$ ,  $\delta \dot{q}$  e  $\delta p$ , teremos

$$\delta H_c = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (1.53)$$

Usando a definição de momento canônico, dada por (1.51), imediatamente obtemos

$$\delta H_c = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.54)$$

Como vemos,  $\delta H_c$  é escrita em termos de  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$ , o que sugere ser  $H_c$  apenas função de  $q$  e  $p$ . Em termos práticos, a passagem de  $H_c$ , dado por  $H_c(p, q) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$ , para uma função de  $q$  e  $p$ , envolve transformações do tipo

$$(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p). \quad (1.55)$$

O Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (1.56)$$

chamada matriz Hessiana. Quando o determinante desta matriz é diferente de zero, as transformações (1.55) são sempre possíveis e a Hamiltoniana  $H_c(q, p)$  é unicamente determinada. Isto ocorre para o caso onde não há vínculos. Na presença de vínculos, a matriz Hessiana é singular e, conseqüentemente, nem todos os  $\dot{q}_i$  podem ser unicamente escritos em termos de  $q$  e  $p$ . Considerando que haja  $M$  vínculos, haverá  $M$  velocidades adicionais. Portanto, neste caso, a Hamiltoniana não pode ser unicamente determinada em termos de  $q$  e  $p$ .

O problema de nosso interesse é muito parecido com o que é típico para a transição da descrição de Lagrange para a de Hamilton com vínculos (ver, por exemplo, livros bem

conhecidos [26, 27] para fins de introdução). Na verdade, é análogo à passagem de uma descrição Lagrangiana, sem dependência explícita sobre as coordenadas, para hamiltoniana. Neste caso  $f(X^i)$  e  $V(\psi_i)$  desempenham o papel da lagrangiana e hamiltoniana, respectivamente, onde os “momenta” são definidos por

$$\psi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial X^i}. \quad (1.57)$$

Finalmente, as quantidades  $\{X^1, X^2, X^3\}$  desempenham o papel de “velocidades”. Para o caso específico da equação (1.49),

$$\psi_1 = -\kappa^2 + (\beta\tilde{E} + \beta_1 C^2) \frac{1}{R_0 + R}, \quad (1.58)$$

$$\psi_2 = \beta \ln \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (1.59)$$

$$\psi_3 = \beta_1 \ln \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (1.60)$$

nós diretamente observamos a presença de um vínculo, que é uma relação de dependência entre os  $\psi_i$ , dada por

$$\phi \equiv \beta_1 \psi_2 - \beta \psi_3 \equiv \beta_1 \chi - \beta \chi_1 = 0. \quad (1.61)$$

Uma vez que o vínculo  $\phi(\psi_i)$  vem diretamente da definição desses “momenta”, serão classificados como um vínculo primário [26, 27]. Notemos que a equação  $\phi(\psi_i) = 0$  define uma superfície no espaço  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ .

Se este fosse um problema tipicamente hamiltoniano, poderíamos avaliar a evolução dos vínculos primários (por exemplo, o único no exemplo considerado acima) em busca de outras limitações. No entanto o nosso problema atual é simples, porque não envolve qualquer dinâmica. Portanto, apenas os vínculos sem relação com a dinâmica são relevantes aqui, que são os primários.

Antes de prosseguir para a determinação do potencial  $V$ , podemos observar aqui a relação entre a matriz Hessiana

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \right),$$

e a presença de vínculos. Em primeiro lugar, se a Hessiana é não-singular, o teorema da função inversa garante que (ao menos localmente) pode-se utilizar a definição (1.57)

para expressar  $X^k$  como uma função de  $\psi_i$ , e, portanto, nenhuma restrição é esperada. No entanto, a Hessiana pode vir a ser degenerada. Por exemplo, no caso de (1.49), esta matriz  $3 \times 3$  é uma matriz singular (para  $R \neq -R_0$ ), ou seja

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \right) = \frac{1}{(R + R_0)^2} \begin{pmatrix} \tilde{E}\beta + C^2\beta_1 & \beta & \beta_1 \\ \beta & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Portanto, ela tem um único modo zero independente (i.e., um autovetor cujo autovalor correspondente é zero). Na verdade,

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

pode ser prontamente identificado como o único modo zero linearmente independente do Hessiano (1.62). Notemos que optamos por trabalhar com os modos-zero que multiplicam a matriz Hessiana pela esquerda.

Para concluir esta parte, notamos que cada modo-zero independente gera um vínculo independente. Em particular, através da multiplicação do modo zero  $\nu$  em ambos os lados de (1.57), encontra-se o mesmo vínculo (1.61). Depois, iremos mostrar que cada vínculo independente leva a um modo-zero independente da matriz Hessiana. Ressaltamos que esta relação simples entre modos-zero e vínculos não tem uma contrapartida, em geral, com problemas hamiltonianos com vínculos, uma vez que o correspondente modo-zero pode depender das “coordenadas” (no estudo presente, estamos considerando o problema análogo hamiltoniano no qual a lagrangiana depende apenas das velocidades “ $X^i$ ”).

Na presença de vínculos, não se pode usar a primeira relação (1.34) para encontrar  $V$ , já que esta relação não é válida na presença de vínculos. Ou seja, teremos que considerar a variação de  $V$  na superfície de restrição (na superfície  $\phi = 0$ ),

$$\delta V = \delta(\psi_i X^i - f) = X^i \delta \psi_i + \left( \psi_i - \frac{\partial f}{\partial X^i} \right) \delta X^i = X^i \delta \psi_i. \quad (1.64)$$

Na última etapa acima usamos a definição de momenta (1.57). A equação anterior mostra que  $V$  pode ser escrito como uma função apenas de  $\psi$ , mesmo se os vínculos estiverem presentes. Assim, usando a última igualdade,

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \psi_i} - X^i \right) \delta \psi_i = 0. \quad (1.65)$$

Agora, usando [27], vemos a extensão da primeira relação de (1.34) para o caso com vínculos,

$$X^i = \frac{\partial V}{\partial \psi_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial \psi_i}. \quad (1.66)$$

Nesta fórmula os  $\lambda_m$  são multiplicadores de Lagrange e  $\phi_m$ , com  $m = 1, 2, \dots, M$ , são todas as limitações do modelo em questão. No caso particular de (1.49), temos um único vínculo, ou seja,  $M = 1$ . A introdução destes multiplicadores é necessária, pois a relação entre o  $X_i$  e os  $\psi^k$  tem de ser estendida, a fim de tornar-se inversível.

Agora estamos em posição de discutir o método de construção de potencial  $V(\psi_i)$ , no caso de uma teoria com vínculos. O método de integração, que foi utilizado anteriormente, pode ser estendido ao presente caso. No exemplo de  $f(R, \tilde{E}, C^2)$ , teoria (1.49), se pode resolver a definição de  $\psi_i$  e chegar a

$$R = R_0 (e^{\chi/\beta} - 1), \quad (1.67)$$

$$\tilde{E} = \frac{R_0}{\beta} e^{\chi/\beta} (\psi + \kappa^2) - \frac{\beta_1}{\beta} C^2. \quad (1.68)$$

Assim, a partir de (1.66) e (1.61) nós achamos

$$R_0 (e^{\chi/\beta} - 1) = \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad (1.69)$$

$$\frac{R_0}{\beta} e^{\chi/\beta} (\psi + \kappa^2) - \frac{\beta_1}{\beta} C^2 = \frac{\partial V}{\partial \chi} + \lambda \beta_1, \quad (1.70)$$

$$C^2 = \frac{\partial V}{\partial \chi_1} - \lambda \beta. \quad (1.71)$$

A primeira equação pode ser diretamente integrada, mas a segunda não pode, pois não sabemos como expressar  $C^2$  e  $\lambda$  como funções do  $\psi_i$ . No entanto, o multiplicador de Lagrange ainda é livre, assim podemos defini-lo de modo que  $C^2$  desapareça, ou seja,  $\lambda = -C^2/\beta$ . Por conseguinte, a terceira equação (1.71) torna-se

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_1} = 0.$$

Depois disso a expressão de  $V$  poderá ser integrada, e  $V(\psi_i)$  poderá ser encontrado utilizando procedimentos similares aos utilizados no caso sem vínculos. Podemos notar que o número de campos auxiliares neste processo é menor do que o número de estruturas  $N$  de

$X_i$  na teoria inicial de  $f(X_i)$ . Por exemplo, em (1.49), ainda que nós comecemos a partir de  $f(X_i)$ , que depende de três grandezas independentes, os potenciais correspondentes  $V$  dependem apenas dos dois campos escalares independentes.

A forma do potencial  $V$  pode ter impacto sobre as consequências físicas de uma determinada teoria  $f(X_i)$ . Assim, antes de concluir este exemplo, nós apresentaremos  $V$  de uma forma mais geral. Vamos começar, como de costume, a partir de um exemplo simples. Na equação (1.67) fizemos uma opção de selecionar a expressão particular de  $R$  em função do  $\chi$  e  $\chi_1$ . Ao mesmo tempo, pode-se expressar  $R$  de uma forma mais geral,

$$R = \frac{R_0}{1 + \xi} [e^{\chi/\beta} - 1 + \xi(e^{\chi_1/\beta_1} - 1)] , \quad (1.72)$$

onde  $\xi$  é um número real arbitrário diferente de  $-1$ . A escolha em (1.67) corresponde a  $\xi = 0$ . A partir da versão mais geral (1.72) e da equação (1.58) se pode obter facilmente

$$\beta \tilde{E} + \beta_1 C^2 = R_0 \frac{(\psi + \kappa^2)}{\xi + 1} (e^{\chi/\beta} + \xi e^{\chi_1/\beta_1}) . \quad (1.73)$$

Agora, em vez de tentar uma integração direta de  $V$  (como no caso sem vínculos), podemos expressá-lo na superfície restrita  $\phi = 0$ , como

$$\begin{aligned} V = \psi_i X^i - f &= \psi_i X^i - \left[ \Omega - \kappa^2 R_0 \frac{(e^{\chi/\beta} - 1) + \xi (e^{\chi_1/\beta_1} - 1)}{\xi + 1} + \tilde{E} \chi + C^2 \chi_1 \right] \\ &= R_0 (\psi + \kappa^2) \frac{e^{\chi/\beta} - 1 + \xi (e^{\chi_1/\beta_1} - 1)}{\xi + 1} - \Omega \\ &= R_0 (\psi + \kappa^2) (e^{\chi/\beta} - 1) - \Omega. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Como seria de esperar, a superfície restrita  $V$  é independente do valor de  $\xi$ . No entanto, a escolha de  $\xi = 1$  ou  $\xi = 0$ , por exemplo, pode ter vantagens uma sobre a outra. Se continuarmos a integração de  $V$ , como no método anterior, teríamos como resposta (1.74).

Com a experiência que acabamos de adquirir a partir do exemplo considerado acima, não é difícil adivinhar que, em geral, há uma relação direta entre o número de modos-zero independentes de Hesse e o número de vínculos. Considere o caso em que existem  $M$  vínculos independentes dados por

$$\phi_m(\psi_i) = 0 , \quad (1.75)$$

com  $m = 1, 2, \dots, M$ . Supomos que os vínculos são expressos de modo que os gradientes das restrições são linearmente independentes sobre a superfície de restrição (para mais

detalhes, consulte as condições de regularidade sobre a forma de expressar os vínculos [27]).

Uma vez que os vínculos primários  $\phi_m(\psi)$  são identicamente nulos quando expressos como funções das variáveis  $X^i$ ,

$$0 = \frac{\partial \phi_m(\psi_k(X^j))}{\partial X^i} = \frac{\partial \phi_m(\psi_k)}{\partial \psi_j} \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j}. \quad (1.76)$$

Então, para cada vínculo independente  $\phi_m(\psi_i)$  há um correspondente modo-zero independente da Hessiana dada por

$$(\nu^j)_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial \psi_j}. \quad (1.77)$$

Em outras palavras, na transformação de uma lagrangiana dada por  $f(X^i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ , em uma equivalência dada por  $\psi_i X^i - V(\psi_i)$ , o número de campos escalares auxiliares independentes que aparecem no potencial  $V(\psi_i)$  é igual ao posto da Hessiana de  $f(X^i)$ .

Uma observação relevante é que em geral só precisa-se do potencial  $V$  na superfície de restrição, uma vez que, em geral, [27]

$$V = V|_{\phi=0} + \lambda \phi, \quad (1.78)$$

onde  $V|_{\phi=0}$  é o potencial na superfície de restrição, mas o vínculo (“ primário ”)  $\phi$  desaparece quando expresso como uma função do  $R$ 's; Assim, é indiferente se usa-se o  $f = X^i \psi_i - V$  ou  $f = X^i \psi_i - V|_{\phi=0}$ .

## 1.4 Condições de inflação exponencial no caso geral

Como uma aplicação do teorema de equivalência da seção anterior, vamos definir as condições para a existência da solução cosmológica estritamente exponencial. Considere a ação

$$S_{eq} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi_1 \square R + \psi_2 R + \psi_3 C^2 + \psi_4 (E - \frac{2}{3} \square R) - V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \} \quad (1.79)$$

e a métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (1.80)$$

onde

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (1.81)$$

A métrica conforme tem a forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag} \left( 1, -\frac{1}{1 - kr^2}, -r^2, -r^2 \sin^2\theta \right) \quad (1.82)$$

Vamos considerar a derivada variacional  $\delta S_{eq}/\delta\psi_i$ .

$$\begin{aligned} \square R &- \frac{\partial}{\partial\psi_1} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0 \\ R &- \frac{\partial}{\partial\psi_2} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0 \\ C^2 &- \frac{\partial}{\partial\psi_3} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0, \\ (E - \frac{2}{3}\square R) &- \frac{\partial}{\partial\psi_4} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Além disso, temos a equação para a métrica, que pode ser obtida tomando a derivada da ação com relação ao  $\sigma$ ,  $\delta S_{eq}/\delta\sigma = 0$ , que dará

$$\begin{aligned} &2e^{-4\sigma} (\psi_4'''' + 4k\psi_4'') \\ &- 3e^{-4\sigma} (2k\psi_1'' + 4k\psi_1'\sigma' + 4\sigma'^2\psi_1'\sigma' - 2\psi_1''\sigma'^2 - 4\psi_1'\sigma'\sigma'' + \psi_1'''' + 4\psi_1''\sigma'' + 2\psi_1'\sigma''') \\ &- 3e^{-2\sigma} (2\psi_2k + \psi_2'' + 2\sigma''\psi_2 + 2\psi_2'\sigma' + 2\sigma'^2\psi_2) \\ &- 2V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Vamos apresentar também a equação mais simples para o caso  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} &- 3e^{-4\sigma} (4\sigma'^2\psi_1'\sigma' - 2\psi_1''\sigma'^2 - 4\psi_1'\sigma'\sigma'' + \psi_1'''' + 4\psi_1''\sigma'' + 2\psi_1'\sigma''') \\ &- 3e^{-2\sigma} (\psi_2'' + 2\sigma''\psi_2 + 2\psi_2'\sigma' + 2\sigma'^2\psi_2) \\ &+ 2e^{-4\sigma}\psi_4'''' - 2V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Se supusermos que haja uma solução exponencial  $a = a_0 e^{H_0 t}$ , ela pode ser substituída nas equações (1.84) e (1.85), com o seguinte resultado:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_1} = \frac{12H_0^2 k}{a^2}, \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_2} = -\frac{6k}{a^2} - 12H_0^2, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_3} = 0, \quad (1.88)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_4} = 24H_0^4 + \frac{16kH_0^2}{a^2}. \quad (1.89)$$

Na equação para o fator conforme encontramos uma expressão mais complicada, de modo que apresentamos apenas o caso onde  $k = 0$ <sup>1</sup>,

$$\begin{aligned} & -4V - 24H_0^2 \psi_2 - 18H_0 \dot{\psi}_2 - 6\ddot{\psi}_2 - 72\dot{\psi}_1 H_0^3 - 78H_0^2 \ddot{\psi}_1 \\ & + 36H_0 \dot{\dot{\psi}}_1 + 6\ddot{\dot{\psi}}_1 + 24H_0^3 \dot{\psi}_4 + 44H_0^2 \ddot{\psi}_4 + 24H_0 \dot{\dot{\psi}}_4 = 0 \end{aligned} \quad (1.90)$$

A existência da solução do tipo “ $dS$ ” implica a resolução do sistema de equações (1.86) - (1.90), mas não está claro se isso pode ser feito de uma forma geral.

Vamos tentar uma outra abordagem para soluções de de Sitter. Considere em primeiro lugar teorias como (1.1) e (1.2), que são equivalentes desde que as funções  $\psi = f'_R(R)$  e  $R = V'_\psi(\psi)$  sejam inversas. Vamos usar este fato para obter o critério de solução tipo  $dS$  para as teorias (1.1) e (1.2). A solução  $dS$  significa que teremos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{12} R (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}), \quad \text{e também} \quad R = \text{const}. \quad (1.91)$$

Como poderemos saber se a solução que leva à (1.91) é possível ou não para a teoria dada? No caso de (1.1) podemos tomar a variação em relação à métrica,  $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ , e chegar à equação

$$\frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} f'_R + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'_R = 0. \quad (1.92)$$

---

<sup>1</sup>Na verdade toda a consideração aqui é válida apenas quanto tivermos  $k = 0$ . Valores diferentes de  $k$  levaria à problemas que não iremos entrar em detalhes.

Inserindo (1.91) na última equação, chegamos a equação algébrica bem conhecida cujas raízes  $R = \text{const}$  nos dará soluções do tipo  $dS$  para modelos de gravidade  $f(R)$ :

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} f'_R = 0 \quad \implies \quad R f'_R = 2f. \quad (1.93)$$

Agora podemos fazer o mesmo para (1.2). As equações equivalentes para (1.92), neste caso, possuem a forma

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\psi R - V) - \psi R_{\mu\nu} = 0, \quad \text{e também} \quad R = V'_\psi. \quad (1.94)$$

Inserindo (1.91) em (1.94), chegamos à equação algébrica para valores constantes de  $\psi$  para todas as possíveis soluções  $dS$ :

$$\psi V'_\psi = 2V. \quad (1.95)$$

É fácil ver que a equação (1.95) nada mais é que o mapeamento da relação final na equação (1.93). Para esse fim devemos usar apenas a nossa relação principal  $\psi = f'_R(R)$  e  $R = V'_\psi(\psi)$  em (1.93). Podemos notar que a relação (1.95) desempenha exatamente o mesmo papel para a teoria (1.2) como a relação (1.93) para a teoria (1.1).

A tarefa seguinte é a obtenção de relações semelhantes para as teorias (1.28) e (1.29). Pode-se notar imediatamente que, nas condições (1.94), temos  $X_1 = \square R = 0$  e  $X_3 = C^2 = 0$ . Portanto, a existência da solução da forma (1.94), diz respeito somente às dependências de  $f(X_i)$  em  $X_2$  e  $X_4$  em um caso e à dependência de  $V(\psi_i)$  em  $\psi_2$  e  $\psi_4$  em outro caso. Em todos os casos, podemos também considerar  $E$  em vez de  $\tilde{E}$ .

Primeiro vamos lidar com a Eq.. (1.28). Ao tomar as variações da métrica temos que lembrar que ao final devemos integrar por partes e, em seguida, utilizar as condições (1.94). Portanto, todas as derivadas covariantes, agindo sobre a variação da métrica  $h_{\mu\nu}$  ou sobre as componentes do tensor de curvatura, podem ser facilmente negligenciadas. Desta forma, obtemos

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h f + f'_R \cdot \delta_h R + f'_E \cdot \delta_h E \right\}. \quad (1.96)$$

Um cálculo muito simples nos dará,

$$\delta_h R \Big|_{dS} = -\frac{1}{4} R h, \quad \text{e} \quad \delta_h E \Big|_{dS} = -\frac{1}{12} R^2 h = -\frac{1}{2} E h, \quad (1.97)$$

onde denotamos  $h = h_\mu^\mu$ . Então, para todas as soluções  $dS$  desta teoria, os invariantes constante  $R$  e  $E$ , relacionados neste caso com a condição de consistência  $E = R^2/4$ , também devem satisfazer a equação algébrica

$$f = \frac{1}{2} R f'_R + E f'_E. \quad (1.98)$$

A última equação é uma generalização direta de (1.93) e tem o mesmo potencial teórico da teoria mais geral (1.28) como (1.93) tem para a teoria (1.1).

O próximo passo é obter a extensão da equação (1.95) para o caso mais geral da teoria (1.29). Tomando as três variações necessárias obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_2}{\delta \psi_1} = 0 &\implies R = V'_1 = \frac{\partial V}{\partial \psi_1}, \\ \frac{\delta S_2}{\delta \psi_4} = 0 &\implies E = V'_4 = \frac{\partial V}{\partial \psi_4}, \\ \frac{\delta S_2}{\delta h_{\mu\nu}} \Big|_{dS} = 0 &\implies \frac{1}{2} (V - \psi_2 R - \psi_4 E) = -\frac{1}{4} \psi_2 R - \frac{1}{2} \psi_4 E, \end{aligned} \quad (1.99)$$

É fácil ver através da eq. (1.99) que uma equação para valores constantes de  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , as soluções de Sitter (1.91) tem a mesma forma (1.95) (com  $\psi_1$  em vez de  $\psi$  e  $V$  dependendo de todos os  $\psi_i$ ) mesmo que Gauss-Bonnet e outros termos estejam presentes (claro, isso não significa que esses termos não possam ser relevantes).

As outras três equações algébricas decorrem de (1.86), excluindo  $H_0$  (que ainda deve ser encontrado) e usando a relação entre  $R$  e  $E$  para solução do tipo  $dS$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_3} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_4} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial \psi_2} \right)^2. \quad (1.100)$$

## 1.5 Conclusão

Vimos nas seções anteriores como realizar um mapeamento de uma teoria gravitacional do tipo  $f(X_i)$  em uma teoria de campos auxiliares. O modelo que foi considerado aqui é um dos mais gerais conhecidos até o momento, em especial, permite lidar com o caso da teoria com vínculos e conduz a um campo de representações auxiliares para as ações que se parecem com as do grupo de renormalização nas correções de ações de vácuo em teorias da gravidade como (1.49).

No próximo capítulo iniciaremos a introdução para um futuro desenvolvimento de correções quânticas da gravitação provenientes da anomalia do traço do tensor momento-energia.

## CAPÍTULO 2

---

### A Anomalia Conforme

---

*“A preguiça é a mãe do progresso. Se o homem não tivesse preguiça de caminhar, não teria inventado a roda.”*

**Mario Quintana**

Antes de entrarmos no estudo sobre a anomalia conforme iremos primeiro mostrar um pouco das motivações físicas para seu uso. Podemos afirmar, sem sombra de dúvidas, que um dos maiores problemas em física teórica hoje é a junção entre teoria quântica de campos e relatividade geral, como podemos ver em [30] e [31]. Muitos são os candidatos, notadamente teoria de cordas e a gravitação quântica em loops (*loop quantum gravity*).

Enquanto esse problema é certamente algo extremamente fundamental, também não impede que estudemos processos que ocorram em energias menores do que a escala de energia típica onde os efeitos da gravidade quântica se tornam importantes e onde podemos perfeitamente tratar todos os processos de forma perturbativa. A escala de Planck é definida como

$$m_p = \frac{1}{\sqrt{G_N}} \sim 10^{19} \text{GeV}. \quad (2.1)$$

Somos capazes descrever a maioria dos processos físicos “diários” sem problemas maiores, apesar da falta de uma teoria da gravidade quântica completa. Podemos, por exemplo,

usar a relatividade geral como uma ação efetiva em baixas energias para a teoria quântica da gravidade (que ainda não conhecemos). A ideia principal aqui é o fato de que, em física, sempre utilizamos uma separação de escalas. Todas teorias físicas que conhecemos são desenvolvidas para serem válidas apenas em um determinado intervalo de escalas. Desta forma novos efeitos físicos irão surgir em escalas de energia mais altas. Mas de fato não precisamos nos “preocupar” com esses novos efeitos se não estamos lidando nessa escala de energia. Dentro desta perspectiva temos muitos exemplos, como o fato da mecânica clássica funcionar bem em escalas macroscópicas (onde  $\hbar$  é irrelevante), ou seja, onde a gravidade newtoniana funciona perfeitamente para campos gravitacionais fracos.

Aqui iremos utilizar os conceitos e resultados da teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo sem entrar em detalhes de seu desenvolvimento, mas para maior compreensão consultar as referências [28, 32].

## 2.1 Equações de Einstein Semiclássicas e a Ação Efetiva

Iremos nesta seção olhar mais cuidadosamente para a dinâmica do próprio espaço-tempo. No caso clássico a dinâmica da geometria é dada através da variação da ação com respeito à métrica,

$$S = \int \sqrt{-g} d^D x \frac{1}{16\pi G_N} \left[ R - (D - 2)\Lambda \right] + S_M, \quad (2.2)$$

onde  $S_M$  é a ação associada aos campos de matéria,  $D$  é o número de dimensões do espaço-tempo,  $R$  é o escalar de Ricci,  $G_N$  é a constante de Newton e  $\Lambda$  é a constante cosmológica. A variação com respeito a métrica nos levará até as equações de Einstein encontradas no último capítulo (porém aqui em dimensão arbitrária),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{D-2}{2}\Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

sendo o tensor de energia-momento definido como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.4)$$

A abordagem semiclássica para a teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo será feita considerando todos os campos de matéria como sendo campos quânticos, já que, apesar de não conhecermos uma forma “correta” de quantizar a gravidade, sabemos que os campos de matéria sempre podem ser quantizados. Esses campos irão se propagar em uma certa métrica clássica de fundo. Desta forma iremos passar todos os campos para operadores e expandi-los com respeito a este fundo clássico (que iremos indicar com a letra  $(f)$ ),

$$R_{\mu\nu}^{(f)} - \frac{1}{2}R^{(f)}g_{\mu\nu}^{(f)} + \frac{D-2}{2}\Lambda g_{\mu\nu}^{(f)} + \langle 0|\delta\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta\hat{R}\delta\hat{g}_{\mu\nu} + \frac{D-2}{2}\Lambda\delta\hat{g}_{\mu\nu}|0\rangle = 8\pi G_N \left( T_{\mu\nu}^{(f)} + \langle 0|\delta\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle \right), \quad (2.5)$$

onde  $\langle 0|\dots|0\rangle$  serve para indicar o valor esperado com respeito a um estado  $|0\rangle$  e o “chapéu” significa que estamos lidando com operadores quânticos,  $\delta\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(f)}$ , etc. Podemos notar que do lado esquerdo da equação acima obtém-se correções quânticas através de flutuações do gráviton e do lado direito obtemos correções através de flutuações da matéria. Obviamente uma teoria quântica para a gravidade seria não renormalizável. No entanto, quando consideramos processos até uma certa energia  $E$ , efeitos quânticos de grandes ordens serão suprimidos pela massa de Planck como  $E/M_p$ . Desta forma, mesmo que a teoria seja não renormalizável, ela fará sentido como uma teoria efetiva perturbativa para energias muito menores do que a escala de Planck.

Escreveremos então as conhecidas equações semiclássicas de Einstein,

$$R_{\mu\nu}^{(f)} - \frac{1}{2}R^{(f)}g_{\mu\nu}^{(f)} + \frac{D-2}{2}\Lambda g_{\mu\nu}^{(f)} = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (2.6)$$

Todas as quantidades do lado esquerdo são agora puramente geométricas e, claro, construídas a partir da métrica clássica de fundo  $g_{\mu\nu}^{(f)}$  e  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  abrange toda matéria, incluso flutuações quânticas e campos de matéria. Por motivo de simplicidade iremos omitir nas próximas equações o índice  $(f)$ .

Vale ressaltar que a abordagem semiclássica pode também ser aplicada com sucesso para o caso do eletromagnetismo. Desta forma podemos acoplar o campo eletromagnético clássico ao valor esperado da corrente, ou seja,  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \langle J^\nu \rangle$ . Antes de passarmos ao estudo das implicações da equação (2.6) iremos olhar com mais cuidado para o significado

da expressão  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ . Se temos o tensor de energia-momento “em mãos” é possível construir a quantidade  $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ , conhecida como ação efetiva (como pode ser visto em [28]),

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\Gamma[g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.7)$$

Devemos notar que a ação efetiva irá também depender do campo de fundo. Para darmos um significado para  $\Gamma[g_{\mu\nu}]$  iremos considerar o funcional gerador usado em quantização por integral de caminho. Iremos aqui considerar como exemplo o funcional para um campo escalar  $\varphi$ . Logo, temos,

$$\begin{aligned} Z[J, g_{\mu\nu}] &= i\langle 0, \text{out} | \text{in}, 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}[\varphi] \exp\left(iS_M[\varphi] + i \int \sqrt{-g} d^D x J(x)\varphi(x)\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os estados assintóticos serão  $\langle 0, \text{out} |$  e  $| \text{in}, 0 \rangle$ , enquanto  $J$  é uma corrente externa que pode produzir partículas neste estado. No caso específico do espaço-tempo de Minkowski teremos que, como esperado, os estados  $\langle 0, \text{out} |$  e  $| \text{in}, 0 \rangle$  são os mesmos (sem uma corrente externa), de forma que podemos escolher

$$Z[0, g_{\mu\nu}]_{Mink} = 1. \quad (2.9)$$

No entanto sabemos que no espaço-tempo curvo estados assintóticos são, em geral, não equivalentes. Considerando o funcional  $Z[0, g_{\mu\nu}]$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta Z[0, g_{\mu\nu}] &= \int \mathcal{D}[\varphi] (i\delta S_M) \exp(iS_M[\varphi]) \\ &= i\langle 0, \text{out} | \delta S_M | \text{in}, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Não podemos esquecer que, se considerarmos a variação com respeito a  $\varphi$ , esta quantidade será zero pela equação de movimento. Porém, quando consideramos a variação com respeito à métrica não teremos mais zero, desde que a ação de Einstein-Hilbert não seja parte de  $S_M$ . Encontramos então,

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{Z[0, g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}} = i\langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle. \quad (2.11)$$

Depois de efetuarmos a integral funcional por todos os caminhos para  $\Gamma[0, g_{\mu\nu}]$  iremos obter novamente a exponencial de uma ação, porém agora com todas as correções quânticas incluídas. Desta forma definimos a ação efetiva como

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = -i \ln(\Gamma[0, g_{\mu\nu}]). \quad (2.12)$$

Assim como em (2.7), encontramos,

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\Gamma[g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{i\langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle}{\langle 0, \text{out} | \text{in}, 0 \rangle} \equiv \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (2.13)$$

### 2.1.1 Breve revisão do método de campo de fundo

Iremos agora discutir muito brevemente como o funcional gerador  $Z[0, g_{\mu\nu}]$  pode ser calculado usando o método conhecido como campo de fundo [33]. Iremos considerar primeiramente o operador de campo escalar  $\varphi(x)$ , com a ação  $S[\varphi]$ . Podemos definir o campo de fundo  $\Phi$  como sendo

$$\langle \Psi_1 | \varphi(x) | \Psi_2 \rangle \equiv \Phi(x), \quad (2.14)$$

onde  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são dois vetores no espaço de Hilbert. O campo quântico  $\varphi$  será agora a diferença entre o campo de fundo e o operador de campo, ou seja,

$$\varphi(x) \equiv \Phi(x) + \phi(x). \quad (2.15)$$

Assumimos aqui que o campo de fundo é uma solução estacionária para ação efetiva, tal que,

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = \left\langle \Psi_1 \left| \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right| \Psi_2 \right\rangle = 0. \quad (2.16)$$

O campo  $\varphi$  irá, obviamente, obedecer suas próprias equações de movimento, o que levará o lado direito da equação acima ser automaticamente zero. Porém, o  $\Gamma$  dado pela integral de caminho como mostrado em (2.8) pode ser expandido como uma série perturbativa em  $\hbar$ . As integrais sobre o campo quântico  $\phi$  na série resultante serão gaussianas e podem ser resolvidas. O resultado é dado por (colocando os fatores de  $\hbar$  de forma

explícita),

$$\begin{aligned}
\Gamma[\Phi] &= S[\Phi] + \frac{i\hbar}{2} \ln \left\{ \det \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi\delta\Phi} \right] \right\} - \frac{\hbar^2}{8} \int d^D w d^D x d^D y d^D z \\
&\times \frac{\delta^4 S[\Phi]}{\delta\Phi(w)\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)\delta\Phi(z)} \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(w)\delta\Phi(x)} \right]^{-1} \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(y)\delta\Phi(z)} \right]^{-1} \\
&+ \frac{\hbar^2}{12} \int d^D u d^D v d^D w d^D x d^D y d^D z \frac{\delta^3 S[\Phi]}{\delta\Phi(u)\delta\Phi(v)\delta\Phi(w)} \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(u)\delta\Phi(x)} \right]^{-1} \\
&\times \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(v)\delta\Phi(y)} \right]^{-1} \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(w)\delta\Phi(z)} \right]^{-1} \frac{\delta^3 S[\Phi]}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)\delta\Phi(z)} + \mathcal{O}(\hbar^3). \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Aqui o expoente  $^{-1}$  denota o inverso do funcional,

$$\int d^D y \frac{\partial^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)} \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(y)\delta\Phi(z)} \right]^{-1} = \delta^D(x-z). \quad (2.18)$$

Multiplicando por  $i$  podemos notar facilmente que temos o propagador no caso da presença do fundo  $\Phi$ ,

$$i \left[ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(y)\delta\Phi(\tilde{x})} \right]^{-1} \equiv i\Delta(x; \tilde{x}), \quad (2.19)$$

onde o propagador  $i\Delta(x; \tilde{x})$  depende também do campo de fundo. Vamos olhar mais precisamente para o significado desta expansão. Primeiramente iremos focar nas correções  $\mathcal{O}(\hbar)$ . Usamos

$$\det(A) = e^{\text{Tr} \ln(A)}, \quad (2.20)$$

onde o traço aqui inclui ambas integrações sobre o espaço-tempo.

Supondo a seguinte ação para o campo escalar,

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \left( -\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi) \right), \quad (2.21)$$

poderemos escrever a seguinte contribuição para  $\mathcal{O}(\hbar)$ ,

$$-\frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln(\Delta) = \frac{i\hbar}{2} \left[ \text{Tr} \ln(1 + \Delta_F V''(\Phi)) - \text{Tr} \ln(\Delta_F) \right], \quad (2.22)$$

onde  $\Delta_F$  é o propagador associado ao campo livre com  $V(\Phi) = 0$  e a “linha” representa a derivada com respeito à  $\Phi$ . Agora, se assumirmos que  $V''$  é pequeno, o primeiro termo de

(2.22) pode ser expandido para encontrarmos,

$$i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \int d^4 z_1 d^4 z_n \Delta_F(z_1; z_2) V''(\Phi(z_2)) \Delta_F(z_2; z_3) \times \dots$$

$$\dots \times V''(\Phi(z_n)) \Delta_F(z_n - z_1) V''(\Phi(z_1)). \quad (2.23)$$

Podemos notar que temos um loop fechado de campos, com  $n$  inserções  $V''$ . O segundo termo de (2.22) não possui linhas externas de  $\Phi$  e pode ser visto como contribuições devido a um loop. Para o caso de  $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4!} \Phi^4$  teremos a expansão mostrada na figura (2.1).

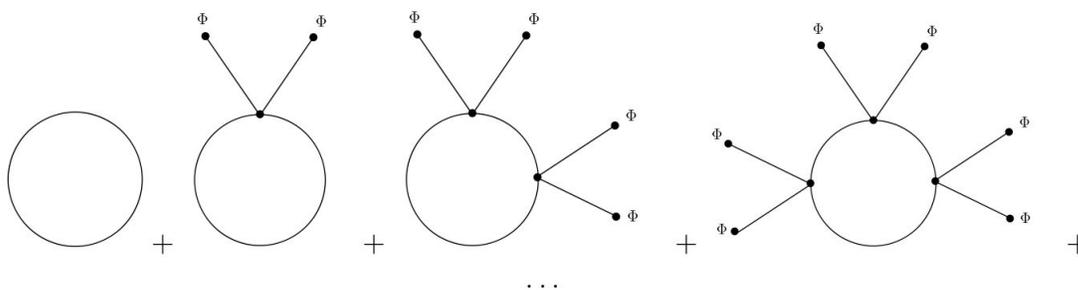


Figura 2.1: Diagramas de Feynman correspondentes à (2.22), onde  $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4!} \Phi^4$

Os termos  $\mathcal{O}(\hbar^2)$  podem ser vistos de maneira similar produzindo os dois diagramas de loop presentes da figura (2.2). Devemos notar que para campos livres o único gráfico existente será o mostrado na figura (2.1). Também podemos observar que os diagramas “sem pernas” contidos nas figura (2.1) e figura (2.2) não irão contribuir para as equações de movimento quando estivermos lidando com o espaço-tempo de Minkowski. Porém, em espaço-tempo curvo isso não será verdade. Esses diagramas dependem explicitamente da métrica e, assim, entram na equação através da variação com respeito a ela.

Não iremos nos importar aqui em como calcular explicitamente esta expressão formal, que pode ser encontrada nas referências dadas neste texto. Vamos considerar que já temos (2.17), quer de forma exata ou em uma certa aproximação. A pergunta que podemos fazer é: o que aprender com a equação de Einstein semiclássica (2.6)? Vimos que para calcular  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  precisamos calcular o propagador, em um determinado fundo curvo clássico, de tal forma que a equação (2.6) seja satisfeita. No entanto, não se sabe ao certo como fazer isso. Usando a expansão de Schwinger-DeWitt (tempo próprio) Podemos estudar o propagador

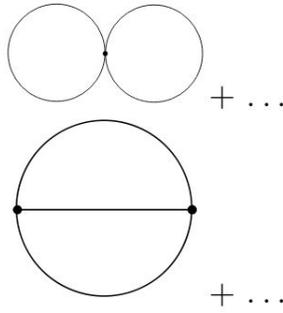


Figura 2.2: Diagramas de Feynman correspondentes à contribuição de  $\mathcal{O}(\hbar^2)$  de (2.17)

no regime adiabático [28]. Isso funciona de forma excelente para determinar a estrutura divergente ultravioleta do propagador.

## 2.2 Comportamento Ultravioleta

No espaço de Minkowski sabemos que o valor esperado de qualquer produto de operadores de campo, quando calculado no mesmo ponto, será infinito. Fisicamente podemos atribuir isso a um número infinito de modos de flutuação ultravioletas [34]. Estas divergências precisam ser reguladas. Uma forma de fazer isso é através de um “corte no momento” (*cutt-off*) ou usando a regularização dimensional. Após efetuar a regularização poderemos “absorver” as divergências nos parâmetros renormalizados da teoria.

Intuitivamente esperamos que modos ultravioletas devam ser quase insensíveis em relação à curvatura do espaço-tempo. Para valores de  $k$  suficientemente grandes teremos também que a aproximação adiabática é muito boa. Para compreendermos melhor o quão insensível esses modos ultravioletas são em relação à curvatura do espaço-tempo iremos considerar as coordenadas normais de Riemann em torno de um ponto  $x_0$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(x_0)(x - x_0)^\alpha(x - x_0)^\beta + \mathcal{O}(x - x_0)^3. \quad (2.24)$$

Assim podemos notar que quanto maiores os momenta, mais poderemos tratar a métrica como plana. Porém, se quisermos fazer afirmações mais gerais é necessário considerar os observáveis do campo. Em particular, devemos considerar o valor esperado do tensor

energia-momento. Será ele o responsável por fornecer todas as informações relativas às divergências. Consideramos como exemplo o tensor energia-momento para um campo escalar com uma ação dada por,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (-\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2), \quad (2.25)$$

tomando então,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + (m^2 + \xi R) \phi^2) + \\ &+ \xi (R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \phi^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde a última parte é oriunda da variação de  $R\phi^2$  com respeito à métrica. O valor esperado, com relação ao estado  $|0\rangle$  fica,

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle &= \left( \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu (1 - 2\xi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (1 - 4\xi) \right) \langle 0|\partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi|0\rangle \\ &- 2\xi (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \langle 0|\phi \nabla_\rho \partial_\sigma \phi|0\rangle + \left( \xi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) g_{\mu\nu} \right) \langle 0|\phi^2|0\rangle \\ &= \left[ \left( \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu (1 - 2\xi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (1 - 4\xi) \right) \partial_\rho \tilde{\partial}_\sigma \right. \\ &- \left. 2\xi (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \nabla_\rho \partial_\sigma - \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) g_{\mu\nu} + \xi R_{\mu\nu} \right] i\Delta(x; \tilde{x}) \Big|_{x=\tilde{x}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $\tilde{\partial}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}$  e  $\Delta(x, \tilde{x})$  é o propagador de Feynman, que satisfaz

$$\sqrt{-g} (\square - m^2 - \xi R) i\Delta(x, \tilde{x}) = i\delta^D(x - \tilde{x}), \quad (2.28)$$

sendo  $\delta^D$  a função de delta e aparece aqui devido ao uso da regularização dimensional. Agora, se considerarmos  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$  em coordenadas normais de Riemann esperamos que preserve todas as propriedades presentes no espaço plano, ou seja, as divergências ultravioletas. O tensor de energia-momento 2.27 irá, em geral, depender de termos que possuem até quatro derivadas da métrica.

Em coordenadas normais de Riemann, a primeira derivada da métrica será zero, mas derivadas de ordem mais elevadas serão diferentes de zero e irão depender da curvatura do espaço-tempo, como pode ser visto ao analisarmos (2.24). Assim vemos que independente

da ordem dos momentos dos modos em análise o valor médio do tensor energia-momento dependerá sempre da estrutura do espaço-tempo. Esta propriedade do valor esperado do tensor energia-momento (2.27) levará a termos adicionais na ação efetiva, não presentes no caso do espaço-tempo de Minkowski. Em princípio estes termos são tão sensíveis às divergências ultravioletas quanto as demais constantes de acoplamento da teoria. Logo esperamos que também precisem ser renormalizadas. Devido à covariância geral, a ação mais geral correspondente a esses termos (termos com até quatro derivadas da métrica) será,

$$\int d^D x \sqrt{-g} \left( a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + a_4 R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \right). \quad (2.29)$$

As constantes  $a_0$  e  $a_1$  são renormalizações da constante cosmológica e constante de Newton, respectivamente. Em quatro dimensões podemos mostrar que o termo de Gauss-Bonnet será,

$$\sqrt{-g} E = \sqrt{g} \left( R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \right), \quad (2.30)$$

que é um invariante topológico e não irá contribuir para as equações de movimento. Podemos usar esse fato para “eliminar”  $a_4$ . Porém, devemos ainda realizar a renormalização dos termos  $a_2$  e  $a_3$ . Isso pode ser feito através do uso de técnicas no espaço plano e iremos encontrar (com a inclusão desses termos) que a teoria é renormalizável, desde que a teoria fosse renormalizável no espaço-tempo de Minkowski.

## 2.3 Acoplamento conforme e anomalia do traço

Considere a ação dada para o campo escalar, porém para um espaço-tempo geral de dimensão  $D$ ,

$$S = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi R \phi^2 + m^2 \phi^2), \quad (2.31)$$

e a transformação conforme da métrica dada por

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (2.32)$$

Primeiro iremos mostrar como as quantidades que temos utilizado até o momento se transformam diante de (2.32),

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

$$\sqrt{-\bar{g}} = \Omega^D \sqrt{-g}, \quad (2.34)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + (\delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} + \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} + g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \partial_{\beta}) \ln(\Omega), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \left[ (2 - D) \partial_{\mu} \partial_{\nu} - g_{\mu\nu} \square \right] \ln(\Omega) \\ &+ (D - 2) \left[ (\partial_{\mu} \ln(\Omega)) (\partial_{\nu} \ln(\Omega)) - g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} (\partial_{\alpha} \ln(\Omega)) (\partial_{\beta} \ln(\Omega)) \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \Omega^{-2} \left[ R - 2(D - 1) \square \ln(\Omega) \right. \\ &\left. - (D - 2)(D - 1) g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \ln(\Omega)) (\partial_{\nu} \ln(\Omega)) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Devido ao fato do campo escalar possuir dimensão de massa de  $\frac{D-2}{2}$ , iremos “redimensioná-lo” da seguinte forma,

$$\phi \rightarrow \bar{\phi} = \Omega^{\frac{2-D}{2}} \phi, \quad (2.38)$$

logo, o termo cinético ficará,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \bar{\phi}) (\partial_{\nu} \bar{\phi}) &= \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \phi) (\partial_{\nu} \phi) - \right. \\ &\left. - \frac{D-2}{2} \phi^2 \left( \square \ln(\Omega) + \frac{D-2}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \ln(\Omega)) (\partial_{\nu} \ln(\Omega)) \right) \right]. \end{aligned}$$

Isso significa que a ação dada em (2.31) assumirá a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \phi) (\partial_{\nu} \phi) + \xi R \phi^2 + \Omega^2 m^2 \phi^2 \right. \\ &\left. + \left( \frac{D-2}{2} - 2(D-1)\xi \right) \phi^2 \left( \square \ln(\Omega) + \frac{D-2}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \ln(\Omega)) (\partial_{\nu} \ln(\Omega)) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

e assim podemos notar que a ação será invariante (ou seja,  $\bar{S} = S$ ), se tivermos  $m^2 = 0$  e também  $\xi = \frac{D-2}{4(D-1)}$ . Nesta situação, dizemos que este campo escalar está conformemente acoplado à gravidade. Uma importante aplicação disto diz respeito a cosmologia, onde  $\bar{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu}$ . Logo a métrica será equivalente à métrica do espaço-tempo de Minkowski depois de efetuarmos a transformação conforme. Se o campo escalar estiver conformemente

acoplado irá significar que o campo redimensionado se comporta exatamente da mesma forma que um campo escalar faria no espaço-tempo plano. O escalar conformemente acoplado, assim, não irá “sentir” a expansão do espaço-tempo.

Outra propriedade importante de campos conformemente acoplados é que o traço de seu tensor energia-momento é zero. Isto pode ser visto quando fazemos

$$\begin{aligned}\bar{S} &= S + \int \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{g}^{\mu\nu}} \delta \bar{g}^{\mu\nu} d^D x \\ &= S - \int \sqrt{-g} \bar{T}_{\mu\nu} \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\delta \Omega}{\Omega} d^4 x.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Então se  $S = \bar{S}$ , iremos encontrar que  $\bar{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$ . Esta propriedade, porém, não será mais verdade quando estivermos levando em conta as correções quânticas. Para campos escalares conformemente acoplados iremos encontrar, após renormalização do traço do tensor energia-momento [28],

$$\langle 0 | T^\mu{}_\mu | 0 \rangle = -\frac{1}{2880\pi^2} \left( R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \square R \right).\tag{2.41}$$

O surgimento o termo  $\square R$  é especialmente interessante e muitos autores têm procurado aplicações deste termo em cosmologia (para um caso interessante, olhar [35]).

Aqui não iremos entrar em detalhes de como obter a anomalia do traço ou de maiores desenvolvimentos sobre. Existe uma vasta literatura disponível sobre isso. Até o momento explicamos de forma pedagógica acerca do nosso principal objetivo, que será obter as aplicações da teoria. Nos próximos capítulos iremos olhar como a teoria da gravitação com correções quânticas advindas da anomalia se comporta perante perturbações métricas.

## CAPÍTULO 3

---

### A anomalia e a estabilidade das soluções clássicas

---

*‘Why repeat the old errors, if there are so many new errors to commit?’*

**Bertrand Russel**

Neste capítulo iremos estudar a dinâmica das perturbações métricas na teoria de gravitação com correções quânticas induzidas pela anomalia. Nosso primeiro objetivo será obter a equação para ondas gravitacionais nesta teoria em um fundo homogêneo e isotrópico geral e, em seguida, verificaremos a estabilidade deste fundo com respeito a perturbações métricas. Este problema aqui abordado possui várias aplicações interessantes. A ideia central é explorar a estabilidade das soluções cosmológicas clássicas quando levamos em consideração efeitos quânticos. Hoje existe grande literatura sobre a estabilidade de Minkowski e espaços de de Sitter, porém aqui iremos estender nossas considerações também à radiação e matéria. Além disso, analisaremos o comportamento das perturbações métricas durante período inflacionário, na fase estável da inflação de Starobinsky Modificada.

### 3.1 Aplicações da abordagem semiclássica

A abordagem semiclássica está associada com a equação seguinte, como já citado nos capítulos anteriores,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (3.1)$$

e implica que a gravidade não é propriamente quantizada. O valor esperado no lado direito da equação acima é proveniente dos campos quânticos de matéria. Diferente do que possamos pensar, o lado direito da equação acima pode ser bastante não trivial, mesmo se nenhuma fonte de matéria estiver presente no determinado ponto do espaço-tempo. A razão é que a média do tensor energia-momento pode ser não-trivial, podendo depender das componentes do tensor de curvatura e suas derivadas, com possíveis estruturas não-locais.

Existem dois pontos importantes que devemos ressaltar na equação (3.1). Vamos começar pela sua terminologia. A teoria de campos de matéria renormalizável em um fundo com espaço-tempo curvo requer que a ação da gravitação deva ser estendida em comparação com a da relatividade geral (RG) [36, 28, 37] (veja também [22]). A ação completa inclui o termo de Einstein-Hilbert, que é a origem do lado direito de (3.1) com a Constante Cosmológica (CC),

$$S_{EH} = - \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (3.2)$$

e também termos com derivadas superiores,

$$S_{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2 \}, \quad (3.3)$$

onde  $C^2 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2R^2_{\alpha\beta} + (1/3) R^2$  é o quadrado do tensor de Weyl e  $E = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\alpha\beta} + R^2$  é o quadrado do termo topológico de Gauss-Bonnet. Incluindo todos os termos na ação, temos

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{HD}. \quad (3.4)$$

onde  $S_{vac}$  é a ação para o vácuo de matéria.

Se considerarmos que as equações de Einstein são responsáveis por definir a relação entre a geometria e a distribuição de matéria, ficará evidente que  $S_{vac}$  deverá contribuir para o lado esquerdo de (3.1). No entanto, por motivos de tradição usamos colocar todas as contribuições extras (aquelas feitas além do tensor de Einstein) no lado direito da equação. De certa forma, esse modo de “ajustar” os termos é explicado pelo fato de que a equação (3.1), com o tensor de energia-momento *clássico* do lado direito, irá “funcionar” melhor e proporcionará um ajuste muito bom para vários testes observacionais da RG. Logo todos os termos extras, exceto a constante cosmológica, serão de fato desnecessários ao nível clássico e, portanto, a sua introdução não é justificada em uma estrutura puramente gravitacional. Em outras palavras podemos nos perguntar: por que um físico que estuda puramente gravitação, trabalhando com os fenômenos em grande escala deve se preocupar com noções quânticas, como renormalizabilidade? Na verdade, o uso destas quantidades (3.3) pode levar a problemas graves e são conhecidos por produzir termos não físicos (fantasmas) para o campo gravitacional linearizado no fundo plano [38]. Assim, podemos afirmar que ainda desconhecemos como obter consistência no nível quântico (3.4) para efeitos gravitacionais clássicos.

Outro aspecto deste mesmo problema está relacionado com as correções quânticas em (3.4). Em geral, o problema de obter-se tais correções é insolúvel, porém existe um caso importante em que a situação é bastante clara. A ação efetiva à 1-loop de campos conformes sem massa é essencialmente controlada pela anomalia conforme [39]. Desta forma a ação efetiva induzida pela anomalia inclui um funcional conforme arbitrário, porém em muitos casos o seu papel é conhecido por ser muito restrito. Como exemplo disto podemos citar que este funcional será uma constante trivial para o caso da métrica homogênea e isotrópica, onde as correções quânticas induzidas pela anomalia irão reproduzir a inflação de Starobinsky [40]. No caso dos buracos negros, quando levamos em conta a anomalia conforme poderemos obter a radiação Hawking [41] e usando a ação induzida pela anomalia podemos classificar os estados na vizinhança de buracos negros. As equações para ondas gravitacionais calculadas usando métodos diretos [103, 44] e através da ação induzida pela anomalia [45] irão produzir resultados equivalentes, pelo menos no fundo de de Sitter. Nos dois últimos casos mencionados o funcional conforme aparentemente não desempenha

qualquer papel, o que pode ser explicado pelo fato de que a anomalia conforme “capta” todos os efeitos quânticos, que corresponde ao limite ultravioleta e, portanto, os termos restantes serão relevantes apenas para “sub-efeitos”. Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos, a ação efetiva induzida pela anomalia representa uma contribuição quântica bem definida, que pode ser usada para verificar a compatibilidade entre a gravitação e efeitos quânticos. O Universo recente representa, na verdade, uma oportunidade muito boa para fazermos essa verificação. A escala de energia típica da gravitação é dada pelo parâmetro de Hubble ou pela escala das ondas gravitacionais, sendo que ambos são muito menores do que as massas de todos os campos quânticos massivos. Certamente, todos esses campos se desacoplam fortemente no setor de altas derivadas da teoria [46] e, portanto, o único campo quântico ativo é o fóton. Assim, chegamos à conclusão de que a ação efetiva induzida pela anomalia oriunda do campo de fótons será uma boa aproximação para a contribuição quântica do Universo recente. Nosso principal objetivo neste capítulo será verificar se estes termos quânticos são compatíveis com as soluções cosmológicas clássicas para as diferentes épocas da história do Universo.

A investigação da estabilidade das soluções fisicamente importantes em teorias gravitacionais mais gerais possui longa e interessante história, partindo de [47], onde a estabilidade do vácuo quântico de Minkowski foi explorada pela primeira vez (ver também [48]). Uma abordagem similar para a teoria da gravidade quântica em temperatura diferente de zero foi estudada em [49]. Já a estabilidade do espaço de de Sitter (tanto para a teoria semiclássica quanto para a gravidade quântica, em diferentes esquemas de quantização) foi recentemente considerada em [51]. Além disso, a estabilidade do espaço de de Sitter foi discutida em [52] por um método não convencional de contagem de potências (*power counting*) no limite do infra-vermelho, com um resultado aparentemente negativo sobre a validade de toda a aproximação semiclássica. Na comparação com os métodos que exploram a estabilidade utilizados nos trabalhos acima mencionados, a ação efetiva induzida pela anomalia tem duas vantagens importantes: segurança e simplicidade. Como já mencionado acima, a ação induzida pela anomalia utiliza a parte não-local mais importante da ação efetiva. Como se baseia na anomalia conforme de campos sem massa, está intimamente relacionada com os limites UV e IR da teoria. Além disso, como veremos, a

ação induzida pela anomalia é bastante simples, sendo dada por uma expressão não-local compacta e explícita que pode ser facilmente tornada local através da introdução de dois campos escalares auxiliares. Historicamente, a ação efetiva induzida pela anomalia foi a base teórica dos primeiros modelos cosmológicos com correções quânticas [53], para inflação de Starobinsky [40] e também para a primeira derivação de perturbações cósmicas de modelo inflacionário [54]. Como veremos nas próximas seções, o uso da ação induzida pela anomalia permite que se explore a estabilidade não só para Minkowski ou de Sitter, mas para um conjunto mais amplo de soluções cosmológicas clássicas.

Em nossa investigação da estabilidade iremos restringir a consideração na parte invariante de calibre de perturbações métricas relacionadas com a onda gravitacional. As soluções de nosso interesse incluem a radiação e matéria, o Universo recente dominado pela constante cosmológica e a fase estável da inflação de Starobinsky modificada [55, 57].

## 3.2 Ação efetiva induzida pela anomalia

Podemos considerar a forma covariante da ação efetiva da gravidade induzida pela anomalia [58, 59] o método mais completo disponível para correções quânticas na ação gravitacional em quatro dimensões do espaço-tempo. A aplicação em cosmologia foi considerada em [53, 60] e levou ao bem conhecido modelo inflacionário de Starobinsky [40] (para uma descrição mais detalhada olhar [61] e o desenvolvimento na forma do modelo de Starobinsky Modificado [55, 57]).

O traço anômalo do tensor energia-momento é dado pela expressão [39, 28]

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -(wC^2 + bE + c\Box R), \quad (3.5)$$

onde os coeficientes  $w$ ,  $b$  e  $c$  dependem do número de campos quânticos ativos de diferentes

spins,

$$w = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{N_0}{120} + \frac{N_{1/2}}{20} + \frac{N_1}{10} \right), \quad (3.6)$$

$$b = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{N_0}{360} + \frac{11 N_{1/2}}{360} + \frac{31 N_1}{180} \right), \quad (3.7)$$

$$c = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{N_0}{180} + \frac{N_{1/2}}{30} - \frac{N_1}{10} \right). \quad (3.8)$$

onde  $N_0$ ,  $N_{1/2}$  e  $N_1$  formam o conteúdo de partículas do Universo e seus respectivos *spins*.

É fácil ver que estes coeficientes não são nada mais do que funções  $\beta$  para os parâmetros  $a_{1,2,3}$  na ação clássica do vácuo (3.4). Através do fenômeno de desacoplamento [46], o número de campos ativos pode variar de um período da história do Universo para outro. O atual Universo corresponde ao teor de partículas com  $N_0 = N_{1/2} = 0$  e  $N_1 = 1$ .

A ação  $\bar{\Gamma}_{ind}$  representa uma adição à ação clássica da gravidade, e pode ser encontrada resolvendo a seguinte equação,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \bar{\Gamma}_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} = \langle T_\mu^\mu \rangle = (\omega C^2 + bE + c\Box R). \quad (3.9)$$

A solução covariante e geralmente não-local pode ser facilmente encontrada na seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ind} = & S_c[g_{\mu\nu}] - \frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) \\ & + \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} (E - \frac{2}{3}\Box R)_x G(x, y) \left[ \frac{w}{4} C^2 - \frac{b}{8} (E - \frac{2}{3}\Box R)_y \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $G(x, y)$  é a função de Green para o operador

$$\Delta_4 = \Box^2 + 2 R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \Box + \frac{1}{3} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu.$$

Finalmente, podemos reescrever (3.10) na forma local introduzindo dois campos auxiliares  $\phi$  e  $\psi$  [62] (ver também [63] para um esquema alternativo),

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ind} = & S_c[g_{\mu\nu}] - \frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) + \int d^4x \sqrt{-g(x)} \left\{ \frac{1}{2} \phi \Delta_4 \phi - \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi \right. \\ & \left. + \phi \left[ \frac{\sqrt{-b}}{2} (E - \frac{2}{3} \Box R) - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] + \frac{w}{2\sqrt{-b}} \psi C^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) é classicamente equivalente à (3.10), porque se usarmos as equações para os campos auxiliares  $\varphi$  e  $\psi$ , a ação não local (3.10) será restaurada. Considerando agora a solução cosmológica de fundo para a teoria com a ação incluindo correções quânticas,

$$S_{total} = -M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} R + \bar{\Gamma}, \quad (3.12)$$

onde  $M_P^2 = 1/16\pi G$  é o quadrado da massa de Planck, e a correção quântica  $\bar{\Gamma}$  é tomada na forma (3.11).

Olhando para a solução isotrópica e homogênea, o ponto de partida será escolher a métrica na forma  $g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \bar{g}_{\mu\nu}$ , onde  $\eta$  é o tempo conforme. Também é muito útil introduzir a notação  $\sigma = \ln a$ . A teoria inclui as equações para os três campos,  $\varphi$ ,  $\psi$ , e  $\sigma$ . Por uma questão de simplicidade vamos considerar o fundo como sendo conformalmente plano e, portanto, definimos  $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

As equações para  $\varphi$  e  $\psi$  possuem uma forma especialmente simples

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \left[ \Delta_4 \varphi + \frac{\sqrt{-b}}{2} (E - \frac{2}{3} \square R) - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] &= 0, \\ \sqrt{-g} \left[ \Delta_4 \psi - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo transformação conforme para as quantidades na última expressão, iremos obter

$$\sqrt{-g} C^2 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{C}^2, \quad \sqrt{-g} \Delta_4 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4, \quad (3.13)$$

$$\sqrt{-g} (E - \frac{2}{3} \square R) = \sqrt{-\bar{g}} (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma). \quad (3.14)$$

Levando em conta a nossa escolha para a métrica  $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  todos os termos no lado direito da última equação serão iguais a zero (exceto o último) e podemos então obter as seguintes equações

$$\square^2 \varphi + 8\pi\sqrt{-b} \square^2 \sigma = 0, \quad \square^2 \psi = 0. \quad (3.15)$$

As soluções para(3.15) podem ser apresentadas na seguinte forma,

$$\varphi = -8\pi\sqrt{-b} \sigma + \varphi_0, \quad \psi = \psi_0. \quad (3.16)$$

onde  $\square$  é o D'Alembertiano para o espaço plano e  $\varphi_0, \psi_0$  são as soluções gerais para a equação homogênea  $\square^2 \varphi_0 = 0, \square^2 \psi_0 = 0$ .

Existe uma arbitrariedade óbvia relacionada com a escolha das condições iniciais para os campos auxiliares  $\varphi$ ,  $\psi$ . Porém, retornando com a equação (3.16) na ação e variando com respeito a  $\sigma$  chegaremos a uma equação única para  $\sigma$ . Isso se mostra útil para escrever esta equação em termos de  $a(t)$  e o tempo físico  $t$ , com as derivadas sendo representadas por pontos. Outra variável muito útil é, claro, o parâmetro de Hubble,  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t) = \dot{\sigma}(t)$ . Logo, obtemos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3 \dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \left(5 + \frac{4b}{c}\right) \frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} - 2k \left(1 + \frac{2b}{c}\right) \frac{\ddot{a}}{a^3} \\ - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\Lambda}{3}\right) = -\frac{\rho_m^0}{c a^3}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

No lado direito da equação acima incluímos a contribuição para a matéria com a constante  $\rho_m$  e explicitamente mostramos a dependência com relação a  $a(t)$ . Em relação ao traço das equações de Einstein generalizadas (combinação linear de equações de Friedmann generalizadas), a contribuição da radiação não aparece, mas pode ser facilmente restaurada se mudarmos para a componente (00) [53, 44, 40].

Há várias observações relevantes que temos de fazer sobre as soluções da equação (3.17) em diferentes situações físicas. Primeiramente, no caso da teoria sem matéria (onde  $\rho_m = 0$ ) teremos duas soluções exatas,

$$a(t) = a_0 \cdot \exp(Ht) \quad (3.18)$$

onde [57]

$$H = \frac{M_P}{\sqrt{-32\pi b}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{64\pi b}{3} \frac{\Lambda}{M_P^2}}\right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

Quando temos a constante cosmológica muito pequena em comparação com o quadrado da massa de Planck,  $\Lambda \ll M_P^2$ , iremos encontrar dois valores diferentes para  $H$  (aqui  $\Lambda > 0$ )

$$H_c \approx \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad \text{e} \quad H_S \approx \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}. \quad (3.20)$$

É fácil notarmos que a primeira solução com  $H_c$  corresponde à teoria sem correções, enquanto o segundo valor  $H_S$  corresponde à solução inflacionária de Starobinsky [40]. O

---

<sup>1</sup>Usamos aqui  $k = 0, \pm 1$  para obter mais generalidade, porém no restante iremos usar apenas o caso onde  $k = 0$ .

sinal de  $b$  será sempre negativo, independente do conteúdo de partículas. Para isso basta olharmos para equação (3.7). Devemos observar que o conteúdo de partículas que usamos aqui,  $N_0$ ,  $N_{1/2}$  e  $N_1$ , correspondem aos graus de liberdade e contribuem para a ação efetiva, não possuindo relação com o conteúdo de matéria real do Universo.

Em segundo lugar, as propriedades das soluções de estabilidade (3.20) irão depender do sinal do coeficiente  $c$ , que está ligado ao coeficiente do termo local  $\int \sqrt{-g}R^2$  [40, 57]. A solução inflacionária  $H_S$  será estável para valores positivos de  $c$  e instável para  $c < 0$ . A estabilidade da solução de baixas energias  $H_c$  requer sinal oposto para  $c$ . Isto foi mostrado em [57] onde  $H_c$  com  $c < 0$  é estável com relação à pequenas variações do parâmetro Hubble (ou, de forma equivalente,  $\sigma(t)$ ). No modelo inflacionário original de Starobinsky [40] o conteúdo de partículas corresponde à inflação instável e os dados iniciais são escolhidos de tal modo que o universo seja assintoticamente próximo à radiação em FRW. Para compreendermos melhor a situação iremos substituir a solução FRW correspondente, ou seja,  $a(t) \sim t^{2/3}$ , dentro da equação (3.17). É fácil ver que a parte clássica, composta pelos termos de Einstein e matéria, comportam-se como  $1/t^2$ , enquanto as correções quânticas, que são dadas pelos termos de altas derivadas, comportam-se como  $1/t^4$ . Isto significa que na fase instável os termos quânticos irão “cair” rapidamente, de tal modo que a solução clássica  $a(t) \sim t^{2/3}$  será uma excelente aproximação para a solução da equação (3.17) na época correspondente. É fácil verificar que o mesmo pensamento é verdadeiro para a radiação  $a(t) \sim t^{1/2}$  e também para Constante Cosmológica. Uma forma alternativa às considerações acima pode ser encontrada em [64]. Na verdade todos os argumentos apresentados acima são válidos apenas para a dinâmica do fator conforme. Nas próximas seções nos dedicaremos à estabilidade das mesmas soluções clássicas com relação às perturbações tensoriais métricas (ondas gravitacionais). Na teoria com termos quânticos, como mostrado em (3.4) e (3.11), as equações possuem derivadas de quarta ordem e isto representa um problema real para a estabilidade das soluções clássicas.

Na versão modificada da inflação de Starobinsky [55, 57] o Universo irá começar com uma inflação estável, que pode ser obtida ao escolhermos o conteúdo de partículas supersimétrico  $N_0$ ,  $N_{1/2}$  e  $N_1$ . Em seguida, a inflação exponencial desacelera devido aos efeitos quânticos dos campos de matéria (principalmente partículas  $s$ ) e, em um certo mo-

mento, as partículas pesadas  $s$  irão se desacoplar da gravidade e, em seguida, o Universo começará a fase inflacionária instável. A vantagem desta versão é que não dependemos da escolha das condições iniciais. Nas seções seguintes iremos estudar a estabilidade da inflação estável em relação às perturbações métricas.

### 3.3 Obtendo as equações para ondas gravitacionais

Nesta seção iremos obter a equação para os modos tensoriais de perturbações métricas. Primeiro vamos reescrever a ação em uma forma mais adequada e, em seguida, obteremos as perturbações lineares para o modo tensorial.

#### 3.3.1 Ação total com termos quânticos

É bastante útil reescrevermos a ação (3.12) em uma forma mais fácil de se trabalhar. Depois de realizarmos algumas integrações por partes, poderemos reescreve-la da seguinte forma,

$$S = \int d^4x L, \quad (3.21)$$

com

$$\begin{aligned} L &= \sum_{s=0}^5 f_s L_s \\ &= \sqrt{-g} \left[ f_0 R + f_1 R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} + f_2 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + f_3 R^2 + f_4 \varphi \square R + f_5 \varphi \Delta \varphi \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde os termos  $f$  são definidos como

$$f_0 = -\frac{M_P^2}{16\pi}; \quad (3.23)$$

$$f_1 = a_1 + a_2 - \frac{b + \omega}{2\sqrt{-b}} \varphi + \frac{\omega}{2\sqrt{-b}} \psi; \quad (3.24)$$

$$f_2 = -2a_1 - 4a_2 + \frac{\omega + 2b}{\sqrt{-b}} \varphi - \frac{\omega}{\sqrt{-b}} \psi; \quad (3.25)$$

$$f_3 = \frac{a_1}{3} + a_2 - \frac{3c + 2b}{36} - \frac{3b + \omega}{6\sqrt{-b}} \varphi + \frac{\omega}{6\sqrt{-b}} \psi; \quad (3.26)$$

$$f_4 = -\frac{4\pi\sqrt{-b}}{3}; \quad (3.27)$$

$$f_5 = \frac{1}{2}, \quad (3.28)$$

e os coeficientes  $a_{1,2}$  são os mesmo definidos em (3.4).

### 3.3.2 Equações perturbadas

Usando as condições (com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e  $i = 1, 2, 3$ ),

$$\partial_i h^{ij} = 0 \text{ e } h_{kk} = 0, \quad (3.29)$$

juntamente com a condição de coordenadas síncrono  $h_{\mu 0} = 0$ , iremos introduzir a perturbação métrica na equação (3.22) da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Temos que  $g_{\mu\nu}^0 = \{1, -\delta_{ij} a^2(t)\}$  são as soluções cosmológicas de fundo. Desta forma, podemos chegar às seguintes expressões para as partes bilineares das lagrangianas parciais da equação (3.22):

$$\begin{aligned} L_0 &= a^3 f_0 \left[ h^2 \left( \frac{3}{2} \dot{H} + 3H^2 \right) + h\ddot{h} + 4Hh\dot{h} + \frac{3}{4} \dot{h}^2 - \frac{h}{4} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\ L_1 &= a^3 f_1 \left[ \dot{h}^2 \left( 2H^2 - 2\dot{H} \right) - h\ddot{h} \left( 4H^2 + 4\dot{H} \right) - h^2 \left( 3\dot{H}^2 + 6\dot{H}H^2 + 6H^4 \right) - \right. \\ &\quad \left. - h\dot{h} \left( 8H\dot{H} + 16H^3 \right) + \ddot{h}^2 + 4Hh\ddot{h} + \left( \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right)^2 + 2\dot{h} \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( H^2 h - 2H\dot{h} \right) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\ L_2 &= a^3 f_2 \left[ -h\dot{h} \left( 12\dot{H}H + 24H^3 \right) - \frac{\dot{h}^2}{2} \left( 5\dot{H} + \frac{18}{4} H^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - h^2 \left( 3\dot{H}^2 + 9\dot{H}H^2 + 9H^4 \right) - h\ddot{h} \left( 4\dot{H} + 6H^2 \right) + \frac{\ddot{h}^2}{4} + \frac{3}{2} Hh\ddot{h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \ddot{h} + 3H\dot{h} - \dot{H}h - 3H^2 h \right) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\ L_3 &= -6a^3 f_3 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) \left[ h^2 \left( \frac{3}{2} \dot{H} + 3H^2 \right) + 2h\ddot{h} + \right. \\ &\quad \left. + 8Hh\dot{h} + \frac{3}{2} \dot{h}^2 - \frac{h}{2} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\ L_4 &= a^3 f_4 \left[ \frac{3}{2} \left( \dot{H} + 2H^2 \right) \left( \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} \right) h^2 + \left( \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} \right) h\ddot{h} + \left( 18H^2\dot{\varphi} + 4H\ddot{\varphi} \right) h\dot{h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left( \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} \right) \dot{h}^2 - \frac{1}{4} \left( \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} \right) \frac{1}{a^2} h \nabla^2 h \right] + \mathcal{O}(h^3), \\ L_5 &= a^3 f_5 \left\{ \left[ \ddot{\varphi} h^2 - \frac{3}{2} H\dot{\varphi} h^2 - \dot{\varphi} h\dot{h} \right] \ddot{\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\varphi}^2 \left[ -\frac{7}{4} H^2 h^2 - \frac{1}{4} \dot{H} h^2 - \frac{7}{3} Hh\dot{h} - \frac{1}{3} \ddot{h} h - \frac{1}{6} \frac{h}{a^2} \nabla^2 h \right] \right\} + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.31) \end{aligned}$$

Podemos fazer uma comparação destas equações com as equações já conhecida da literatura. Uma expansão muito semelhante foi obtida por Gasperini em [65], com o objetivo de explorar as perturbações métricas no cenário inflacionário pré-Big-Bang. Apesar das motivações físicas da inflação pré-Big Bang serem muito diferentes das estudadas aqui nesta tese (onde consideramos a gravitação semiclássica com a ação induzida pela anomalia), as fórmulas são equivalentes e, principalmente, encontramos uma correspondência perfeita entre os nossos resultados e os resultados encontrados em [65]. Por outro lado, podemos comparar as expressões apresentadas acima também com o cálculo anterior das mesmas equações para o caso onde  $H = const$ , obtido em [45].

A fim de obtermos a equação para perturbações tensoriais linearizadas iremos omitir todos os termos de ordem superior  $\mathcal{O}(h^3)$  nas expressões (3.31) e, em seguida, tomaremos a derivada variacional em relação à  $h_{\mu\nu}$ . O próximo passo é usarmos as soluções (3.16) para os campos auxiliares. Fixaremos a ambiguidade presente nestas soluções escolhendo a opção mais simples para os termos conformes, que não são controlados pela anomalia conforme e definiremos  $\psi_0 = \varphi_0 = 0$ . Como consequência temos,

$$\dot{\varphi} = -8\pi\sqrt{-b}H, \quad \ddot{\varphi} = -8\pi\sqrt{-b}\dot{H}, \quad \ddot{\varphi} = -8\pi\sqrt{-b}\ddot{H} \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi} = -8\pi\sqrt{-b}\ddot{H}. \quad (3.32)$$

Estas relações para o fundo devem ser substituídas nas equações para as perturbações tensoriais, porém iremos preferir aqui manter  $\varphi$  de forma dependente, para fins de generalidade. Finalmente a equação para os modos tensoriais pode ser colocada na seguinte

forma

$$\begin{aligned}
& \left(2f_1 + \frac{f_2}{2}\right) \ddot{h} + \left[3H(4f_1 + f_2) + 4\dot{f}_1 + \dot{f}_2\right] \ddot{h} + \left[3H^2\left(6f_1 + \frac{f_2}{2} - 4f_3\right)\right. \\
& + H\left(16\dot{f}_1 + \frac{9}{2}\dot{f}_2\right) + 6\dot{H}(f_1 - f_3) + 2\ddot{f}_1 + \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 + f_0 + f_4\ddot{\varphi}) + \frac{3}{2}f_4H\dot{\varphi} - \frac{2}{3}f_5\dot{\varphi}^2\left. \right] \ddot{h} \\
& - \left(4f_1 + f_2\right) \frac{\nabla^2 \ddot{h}}{a^2} + \left[\dot{H}(4\dot{f}_1 - 6\dot{f}_3) - 21H\dot{H}\left(\frac{1}{2}f_2 + 2f_3\right) - \ddot{H}\left(\frac{3}{2}f_2 + 6f_3\right)\right. \\
& + 3H^2\left(4\dot{f}_1 + \frac{1}{2}\dot{f}_2 - 4\dot{f}_3\right) - 9H^3(f_2 + 4f_3) + H\left(4\ddot{f}_1 + \frac{3}{2}\ddot{f}_2\right) + \frac{3}{2}f_4\dot{\varphi}\left(3H^2 + \dot{H}\right) \\
& + H(3f_4\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}f_0 - 2f_5\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}f_4\ddot{\varphi} - \frac{4}{3}f_5\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\left. \right] \dot{h} - \left[H(4f_1 + f_2) + 4\dot{f}_1 + \dot{f}_2\right] \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} \\
& + \left[5f_4H\ddot{\varphi} + f_4\ddot{\varphi} - (36\dot{H}H^2 + 18\dot{H}^2 + 24H\ddot{H} + 4\ddot{H})\right](f_1 + f_2 + 3f_3) \\
& - H\dot{H}(32\dot{f}_1 + 36\dot{f}_2 + 120\dot{f}_3) - 8\ddot{H}(f_1 + f_2 + 3f_3) - H^2(4\ddot{f}_1 + 6\ddot{f}_2 + 24\ddot{f}_3) \\
& - 4\dot{H}(\ddot{f}_1 + \ddot{f}_2 + 3\ddot{f}_3) - 9f_4\dot{\varphi}(H^3 + H\dot{H}) + f_4\ddot{\varphi}(3H^2 + 5\dot{H}) - H^3(8\dot{f}_1 + 12\dot{f}_2 + 48\dot{f}_3) \\
& + f_5\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right) + \frac{2}{3}f_5H\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \frac{1}{6}f_5\ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}f_5\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\left. \right] h + f_0[2\dot{H} + 3H^2] h \\
& + \left[H^2(4f_1 + 4f_2 + 12f_3) + H\left(2\dot{f}_1 + \frac{1}{2}\dot{f}_2\right) + 2\dot{H}(f_1 + f_2 + 3f_3)\right. \\
& - \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 + f_4\ddot{\varphi} + f_0 + 3f_4H\dot{\varphi}) - \frac{1}{3}f_5\dot{\varphi}^2\left. \right] \frac{\nabla^2 h}{a^2} + \left[2f_1 + \frac{1}{2}f_2\right] \frac{\nabla^4 h}{a^4} = 0. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Por fim, se tomarmos  $H = constant$  in (3.33), iremos encontrar a mesma resposta encontrada em [45].

### 3.4 Analisando a estabilidade

Agora podemos iniciar nossa tarefa principal: analisar se a equação (3.33) possui estabilidade para as soluções cosmológicas ou não. Como ponto de partida devemos lembrar que um sistema dinâmico linear com coeficientes constantes é estável quando todos os polos (ou seja, todas as raízes de sua equação característica) possuem a parte real negativa, ou seja, estão no semi-plano complexo esquerdo. Podemos analisar este problema de duas maneiras: numericamente e analiticamente. Vamos começar com uma análise analítica “aproximada”.

### 3.4.1 Análise semi-analítica

Iremos começar por reescrever os termos de (3.33) através da de ondas planas,

$$\begin{aligned}\frac{\nabla^2 \ddot{h}}{a^2} &= -n^2 \frac{\ddot{h}}{a(t)^2}, & \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} &= -n^2 \frac{\dot{h}}{a(t)^2}, \\ \frac{\nabla^2 h}{a^2} &= -n^2 \frac{h}{a(t)^2}, & \frac{\nabla^4 h}{a^2} &= n^4 \frac{h}{a(t)^4}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Logo a equação para perturbações tensoriais pode ser apresentada da seguinte forma

$$b_4 \dddot{h} + b_3 \ddot{h} + b_2 \dot{h} + b_1 h + b_0 h = 0, \quad (3.35)$$

onde usamos as seguintes notações

$$b_4 = 2f_1 + \frac{f_2}{2}, \quad (3.36)$$

$$b_3 = 3H(4f_1 + f_2) + 4\dot{f}_1 + \dot{f}_2, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}b_2 &= (4f_1 + f_2) \frac{n^2}{a^2} + 3H^2(6f_1 + \frac{f_2}{2} - 4f_3) + H(16f_1 + \frac{9}{2}f_2) + 6\dot{H}(f_1 - f_3) \\ &+ 2\ddot{f}_1 + \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 + f_0 + f_4\ddot{\varphi}) + \frac{3}{2}f_4H\dot{\varphi} - \frac{2}{3}f_5\dot{\varphi}^2,\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}b_1 &= [H(4f_1 + f_2) + 4\dot{f}_1 + \dot{f}_2] \frac{n^2}{a^2} + \dot{H}(4f_1 - 6f_3) - 21H\dot{H}(\frac{1}{2}f_2 + 2f_3) \\ &- \ddot{H}(\frac{3}{2}f_2 + 6f_3) + 3H^2(4\dot{f}_1 + \frac{1}{2}\dot{f}_2 - 4\dot{f}_3) - 9H^3(f_2 + 4f_3) + H(4\ddot{f}_1 + \frac{3}{2}\ddot{f}_2) \\ &+ \frac{3}{2}f_4\dot{\varphi}(3H^2 + \dot{H}) + H(3f_4\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}f_0 - 2f_5\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}f_4\ddot{\varphi} - \frac{4}{3}f_5\dot{\varphi}\ddot{\varphi},\end{aligned}\quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}b_0 &= 5f_4H\ddot{\varphi} + f_4\ddot{\varphi} - (36\dot{H}H^2 + 18\dot{H}^2 + 24H\ddot{H} + 4\ddot{H})(f_1 + f_2 + 3f_3) \\ &- H\dot{H}(32\dot{f}_1 + 36\dot{f}_2 + 120\dot{f}_3) - 8\ddot{H}(\dot{f}_1 + \dot{f}_2 + 3\dot{f}_3) - H^2(4\ddot{f}_1 + 6\ddot{f}_2 + 24\ddot{f}_3) \\ &- 4\dot{H}(\ddot{f}_1 + \ddot{f}_2 + 3\ddot{f}_3) - 9f_4\dot{\varphi}(H^3 + H\dot{H}) + f_4\ddot{\varphi}(3H^2 + 5\dot{H}) \\ &- H^3(8\dot{f}_1 + 12\dot{f}_2 + 48\dot{f}_3) + f_5\dot{\varphi}^2(\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}) + \frac{2}{3}f_5H\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \frac{1}{6}f_5\ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}f_5\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \\ &+ f_0[2\dot{H} + 3H^2] - [H^2(4f_1 + 4f_2 + 12f_3) + H(2\dot{f}_1 + \frac{1}{2}\dot{f}_2) + 2\dot{H}(f_1 + f_2 + 3f_3) \\ &+ \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 + f_4\ddot{\varphi} + f_0 + 3f_4H\dot{\varphi}) - \frac{1}{3}f_5\dot{\varphi}^2] \frac{n^2}{a^2} + [2f_1 + \frac{1}{2}f_2] \frac{n^4}{a^4}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

O campo auxiliar e suas derivadas devem ser substituídas de acordo com a equação (3.32).

Iremos analisar a equação (3.35), com os coeficientes  $b_k$ , ( $k = 0, \dots, 3$ ) dados pelas equações (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40). Podemos facilmente reduzir esta equação de

quarta ordem para um sistema de quatro equações de primeira ordem. Fazendo uma nova mudança de variáveis, introduzimos

$$h_0 = h, \quad h_1 = \dot{h}_0 = \dot{h}, \quad h_2 = \dot{h}_1 = \ddot{h}, \quad h_3 = \dot{h}_2 = \dddot{h}. \quad (3.41)$$

Reescrevendo a equação diferencial, chegamos a

$$\begin{aligned} \dot{h}_3 &= -\frac{1}{b_4} (b_3 h_3 + b_2 h_2 + b_1 h_1 + b_0 h_0), \\ \dot{h}_2 &= h_3, \\ \dot{h}_1 &= h_2, \\ \dot{h}_0 &= h_1. \end{aligned}$$

Iremos reescrever o sistema linear de quatro equações dadas acima em uma forma matricial para calcularmos os seus autovalores e autovetores. Assim, podemos escrever de forma simplificada,

$$\dot{h}_k = A_k^l h_l, \quad (3.42)$$

onde  $k = 0, 1, 2, 3$  e a matriz  $A = A_k^l$  possuem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix},$$

onde chamamos  $d_k = -b_k/b_4$ .

Se os coeficientes da matriz  $A$  forem constantes, o problema da estabilidade pode ser resolvido imediatamente obtendo os autovalores e autovetores de  $A$ . No entanto, sabemos que o mesmo método pode ser utilizado no caso da matriz  $A$  não-constante. Isso acontece devido ao fato de estarmos olhando para a estabilidade assintótica relacionada com o comportamento do tempo exponencial de  $h_k$ . No caso dos coeficientes da matriz  $A$  possuírem fraca dependência do tempo, poderemos negligenciar esta dependência e tratar  $A$  como uma matriz constante. Podemos ver facilmente que essa condição é satisfeita para os casos de radiação e matéria e pode ser usado também para a constante cosmológica,

devido ao fato de  $\Lambda$  ser realmente muito pequeno. Em outras palavras, a aproximação para  $A$  constante irá significar que estamos olhando para a dinâmica das perturbações. Como estamos na verdade interessados na consistência de soluções cosmológicas clássicas e na prevenção de soluções explosivas (do tipo *run-away*, perigosas para a teoria), podemos usar essa aproximação de forma muito confiável.

Nosso próximo passo é encontrar os autovalores de  $A$  e, portanto, consideramos

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ d_0 & d_1 & d_2 & (d_3 - \lambda) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.43)$$

Daí temos a equação algébrica

$$\lambda^4 - d_3 \lambda^3 - d_2 \lambda^2 - d_1 \lambda - d_0 = 0. \quad (3.44)$$

Depois de alguma álgebra (ver apêndice para mais detalhes), podemos reduzir a equação acima para a seguinte forma,

$$z^3 + \xi_1 z + \xi_2 = 0. \quad (3.45)$$

A quantidade mais importante é

$$\Delta = \xi_1 + \frac{4}{27} \xi_2^3 = 4 \left[ \left( \frac{\xi_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\xi_2}{3} \right)^3 \right]. \quad (3.46)$$

O valor de  $\Delta$ , obtida usando a fórmula de Cardano (assim como todas as notações usadas aqui) são explicados no apêndice. A equação (3.46), irá nos dizer qual a natureza dessas raízes. Podemos distinguir os seguintes casos:

1.  $\Delta < 0$ : então as três raízes são reais e distintas, podendo ser,
  - Todas as raízes negativas: estável.
  - Alguma das raízes positiva: instável.
2.  $\Delta = 0$ : as raízes são reais, e duas ou três são iguais. Logo,
  - Todas as raízes negativas ou com partes reais negativas: estável.

- Alguma das raízes com parte real positiva: instável.
3.  $\Delta > 0$ : uma raiz real e duas raízes complexas,
- Todas as raízes negativas ou com partes reais negativas: estável.
  - Alguma das raízes com parte real positiva: instável.

No caso da equação (3.33) nós encontramos os seguintes valores para (3.46),

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-\alpha}{3} + \beta \quad \text{e} \quad \xi_2 = \left( \frac{2\alpha^3}{27} + \frac{3\gamma - \beta\gamma}{3} \right), \\ \alpha &= \frac{5}{2}p; \quad \gamma = \frac{1}{8}(q^2 - 4p^2 + 4pr) \quad \text{e} \quad \beta = 2p^2 - r, \\ p &= -\frac{39}{8}d_3^2 + d_2; \quad q = \frac{d_3^2}{8} - \frac{d_3d_2}{2} + d_1 \quad \text{e} \quad r = -\frac{3d_3^4}{256} + \frac{d_2d_3^2}{16} - \frac{d_2d_1}{4} + d_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Lembrando que  $b_k/b_4 = -d_k$ , onde  $b_k$  são dados por (3.37), (3.38), (3.39), (3.40). Assim podemos esperar que a expressão para  $\Delta$  da equação (3.46) será bastante complexa, exigindo análise numérica.

Ao realizarmos essa análise para os três casos de nosso interesse (ou seja, expansão exponencial, radiação e matéria), encontramos

1. Expansão exponencial. Quando escolhermos  $a_1 < 0$  encontramos  $\Delta < 0$ . Isto é consistente porque quando analisamos a equação (3.44) diretamente, encontramos todos os autovalores sendo reais e negativos. Então, temos estabilidade nesse caso, exatamente como poderíamos esperar da comparação com o caso inflacionária [57].

No entanto, se escolhermos  $a_1 > 0$ , iremos encontrar  $\Delta < 0$  também. Porém, analisando a equação (3.44) diretamente pelo método numérico (o que significa obter as raízes numericamente pelo uso do software Mathematica), encontramos três autovalores negativos e um positivo. Assim, iremos observar instabilidade neste caso.

Podemos então observar que o sinal de  $a_1$  irá definir se o modo tensorial sem massa na teoria clássica é um gráviton ou um fantasma [38]. Deste ponto de vista o nosso resultado significa que a instabilidade da teoria com termos clássicos de altas derivadas (3.3) e correção quântica (3.10) é completamente definida pela parte clássica

(3.3) e, de forma inesperada, não depende do termo quântico (3.10). Para sabermos se este é um comportamento geral iremos analisar os demais casos.

2. Radiação. Quando escolhemos  $a_1 < 0$  encontramos  $\Delta > 0$ . Isto é consistente porque quando se analisa a equação (3.44) diretamente, encontramos dois autovalores reais e negativos, e também dois autovalores complexos, porém com as partes reais negativas. Então, teremos estabilidade neste caso. Quando tomamos  $a_1 > 0$  encontramos  $\Delta < 0$ . Analisando a equação (3.44) diretamente, encontramos dois autovalores negativos e dois autovalores positivos. Logo, neste caso teremos instabilidade. Novamente a estabilidade da solução clássica é completamente dependente do termo clássico (3.3).
3. Matéria. Com  $a_1 < 0$  obtemos  $\Delta > 0$ . Isto é consistente através da análise direta da equação (3.44), onde encontramos dois autovalores reais e negativos e dois autovalores complexos com partes reais negativas. Logo, temos estabilidade para  $a_1 < 0$ . Porém, se escolhermos  $a_1 > 0$ , encontramos  $\Delta > 0$ , que indica instabilidade. Através da análise da equação (3.44) diretamente podemos confirmar este resultado, onde encontramos dois autovalores reais (um negativo e outro positivo) e dois complexos, ambos com partes reais negativas.

Como resultado desta nossa análise, podemos concluir que existirá estabilidade para a equação (3.33) se, e somente se, tivermos  $a_1$  negativo. Levando-se em conta as características da teoria gravitacional clássica com derivadas superiores (3.3), veremos que a (ins)estabilidade linear do modo tensorial define completamente a (ins)estabilidade linear na teoria quântica com correção (3.10). A explicação qualitativa para este fato é bastante clara. Os termos quânticos (3.10) consistem em dois tipos. O mais simples é o termo local  $R^2$ , que contribui para o propagador de perturbações gravitacionais no fundo plano, mas não para o modo tensorial (ver, por exemplo, [37] para maiores detalhes). Os termos não-locais mais complicados (de terceira ordem na curvatura no mínimo) não contribuem para o propagador de perturbações gravitacionais no fundo plano. Na verdade, estamos interessados nas perturbações no fundo cosmológico curvo e não no caso plano. No entanto, a escala de comprimento típica relacionada com a expansão do Universo é definida

pelo raio de Hubble e é muito maior do que a escala de comprimento das perturbações lineares que estamos interessados aqui. Por isso a estabilidade da teoria sob perturbações pequenas, em uma determinada aproximação, é a mesma que para o fundo plano e, assim, pelos motivos explicados acima, não existe nenhum papel essencial dos termos quânticos induzidos pela anomalia (3.10).

### 3.4.2 Análise numérica

Para assegurar que a nossa análise qualitativa e analítica da estabilidade esta correta, iremos estudar a estabilidade da equação diferencial (3.33) através de métodos numéricos, usando o software *Mathematica* [66].

Iremos testar as mesmas três soluções cosmológicas relevantes usadas até agora (expansão exponencial, radiação e matéria). Em todos os casos usaremos as condições iniciais de origem quântica, por uma questão de simplicidade. Para os três casos mencionados encontraremos soluções estáveis e instáveis, como são mostradas nas figura 1 e 2. Podemos notar facilmente que as soluções onde adotamos  $a_1 < 0$  serão sempre estáveis, como mostrado na figura 1. Ao mesmo tempo as soluções onde adotamos o sinal oposto,  $a_1 > 0$ , são sempre instáveis, como mostramos na figura 2.

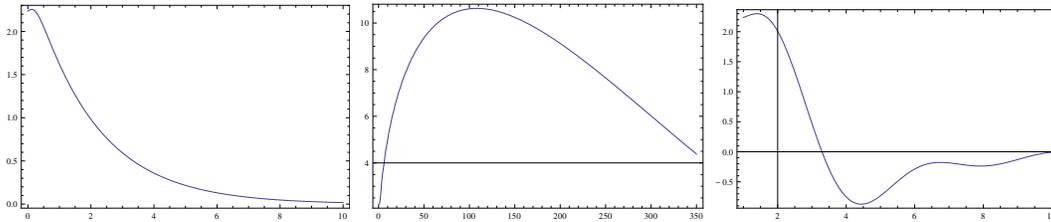


Figura 3.1: Gráfico para a perturbação  $h(t)$  em função do tempo onde analisamos os casos para  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ ,  $a(t) = a_0 t^{1/2}$  e  $a(t) = a_0 t^{2/3}$  respectivamente, com as condições iniciais  $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ,  $\dot{h} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ ,  $\ddot{h} = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}$ ,  $\ddot{h} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}}$ , onde adotamos que  $a_1 < 0$ . Comportamento estável.

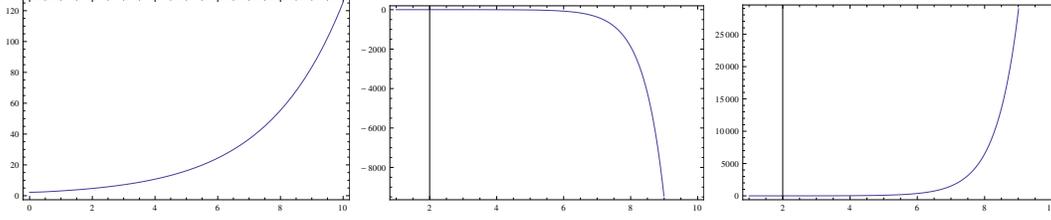


Figura 3.2: Gráfico para a perturbação  $h(t)$  em função do tempo onde analisamos os casos para  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ ,  $a(t) = a_0 t^{1/2}$  e  $a(t) = a_0 t^{2/3}$  respectivamente, com as condições iniciais  $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ,  $\dot{h} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ ,  $\ddot{h} = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}$ ,  $\ddot{\ddot{h}} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}}$ , onde adotamos que  $a_1 > 0$ . Comportamento instável.

### 3.5 Espectro das ondas gravitacionais no fundo cosmológico

Antes de começarmos a trabalhar com a equação diferencial (3.33), iremos relembrar algumas noções referentes ao espectro de ondas gravitacionais. Por uma questão de simplicidade partiremos do caso inflacionário de fundo.

Considerando o caso da onda gravitacional no fundo da solução inflacionária na teoria sem correções quânticas, temos

$$\ddot{\ddot{h}} - \frac{\dot{a}\dot{h}}{a} + \left\{ \frac{n^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \right\} h = 0, \quad (3.48)$$

onde assumimos  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$  e também  $a_0 = 1$ . O estado de vácuo é bem conhecido para esta teoria (para maiores detalhes, consultar [28]), sendo

$$h(x, \eta) = h(\eta) e^{\pm i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}, \quad h(\eta) = \frac{e^{\pm i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2n}}, \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{n}$  é chamado de vetor número de onda. Com o objetivo de estudar a dinâmica de  $h(t, \mathbf{x})$ , se faz necessário fazer a seguinte transformada de Fourier,

$$h_{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int h(t, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} d^3x. \quad (3.50)$$

Vamos precisar do quadrado total da amplitude, ou seja,

$$h^2(t) = \int h_{\mathbf{n}}^2(t) d^3n. \quad (3.51)$$

A equação acima pode ser reescrita na forma

$$h^2(t) = 4\pi \int h_{\mathbf{n}}^2(t) n^2 dn = 4\pi \int h_{\mathbf{n}}^2(t) n^3 d \ln n = 4\pi \int P_n^2(t) d \ln n, \quad (3.52)$$

onde

$$P_n^2(t) = h_{\mathbf{n}}^2(t) n^3. \quad (3.53)$$

Chamamos a quantidade acima de “quadrado do espectro de potência”. Através dele podemos saber como a amplitude das ondas gravitacionais varia em um intervalo de  $\ln n$  até  $\ln(n + dn)$ .

Com as ferramentas anteriores poderemos encontrar o espectro de potência para a teoria com a equação (3.48) para a onda gravitacional e depois aplicar em nosso modelo dado por (3.33). Com esse objetivo iremos tomar o quadrado do valor da perturbação gravitacional em um dado tempo e para um determinado número de onda  $n$ . Logo em seguida iremos variar este  $n$  para um  $t$  fixo e ao mesmo tempo iremos resolver nossa equação diferencial de quarta ordem de forma numérica. Depois disso, nós iremos linearizar o gráfico através da seguinte relação

$$\ln n^3 h_{\mathbf{n}}^2(t) \times \ln n. \quad (3.54)$$

Como resultado obtemos o coeficiente de proporcionalidade linear  $k$  que chamamos índice espectral. Então temos,  $P_n^2(t) \propto n^k$ , ou seja, é proporcional ao índice espectral. Será o espectro de potência que irá nos dizer como a amplitude das perturbações dependem do comprimento de onda.

Adotaremos as condições iniciais de origem quântica,

$$h_0 \propto \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad \dot{h} \propto \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad \ddot{h} \propto \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}, \quad \ddot{\ddot{h}} \propto \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}}. \quad (3.55)$$

Em seguida, iremos desenvolver o processo acima descrito para o caso da inflação, representado pela equação (3.48). O resultado encontrado foi,

$$k \approx 0.01. \quad (3.56)$$

Agora, aplicando o mesmo procedimento para o nosso modelo dado pela equação (3.33), encontramos, no caso de expansão exponencial sem correções quânticas (ou seja  $a_1 =$

$a_2 = 0$ ),

$$k = 0.00894167 \approx 0.01, \quad (3.57)$$

onde usamos a massa de Planck igual 1 na equação (3.33) e na equação (3.28), para realizarmos a análise numérica. Este valor é muito próximo do que devemos encontrar para a inflação quando calculamos de forma analítica, que deve ser  $k \approx 0$ , como podemos ver em (3.56). Assim, o modelo que estamos considerando retorna para o caso da inflação conhecida quando fazemos  $a_1 = a_2 = 0$ . O espectro plano ou quase plano que é encontrado ocorre porque a versão estável da inflação induzida pela anomalia reproduz a fase de de Sitter com  $H = const.$

Agora já somos capazes de analisar o caso quântico geral com  $a_1 \neq 0$ . Lembrando que a ação é dada por (3.4), onde  $a_1$  é o coeficiente mais importante para a evolução das perturbações tensoriais. A seguir analisaremos os três casos já estudados e apresentaremos os resultados da análise numérica.

### 3.5.1 Inflação (expansão exponencial)

A variação do espectro de potência com respeito à  $a_1$  (com valores positivos e negativos) está apresentado na Tabela 1. Para cada valor de  $a_1$  teremos um valor correspondente em  $k$ .

$a_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k$	0.01	0.04	0.8	0.12	0.17	0.22	0.29	0.37	0.48	0.61	0.79

Tabela 3.1: Obtendo  $k$  através da variação de  $a_1 > 0$  no caso  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ .

$a_1$	0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1.0
$k$	0.01	-0.05	-0.4	-0.06	-0.06	-0.08	-0.09	-0.11	-0.12	-0.13	-0.14

Tabela 3.2: Obtendo  $k$  através da variação de  $a_1 < 0$  no caso de  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ .

As duas tabelas mostram que, quando o valor de  $a_1$  é negativo, os valores de  $k$  também decrescem e são negativos. Ou seja, à medida que  $a_1$  aumenta, a amplitude das

ondas gravitacionais diminuam. No caso de  $a_1$  positivo ocorre o oposto, ou seja, quando aumentamos o seu valor obtemos que o valor de  $k$  também aumenta. Isto ocorre devido ao fato de que  $a_1 > 0$  não representa a solução estável de (3.33).

Agora, a partir dos dados obtidos em [68], [69], [70] e usando o software CMBEASY [71] [72] e [73] podemos obter o gráfico do espectro de anisotropia da radiação cósmica de fundo (RCF) devido ondas gravitacionais para os casos mostrados acima. Nestes gráficos, existem duas quantidades essenciais: o índice espectral  $k$  e o conteúdo de matéria do Universo. Os gráficos para a expansão exponencial são mostrados na figura 3. Em todos os gráficos usamos  $a_2 = 0$ . Porém, o valor de  $k$  é o mesmo para qualquer valor de  $a_2$ .

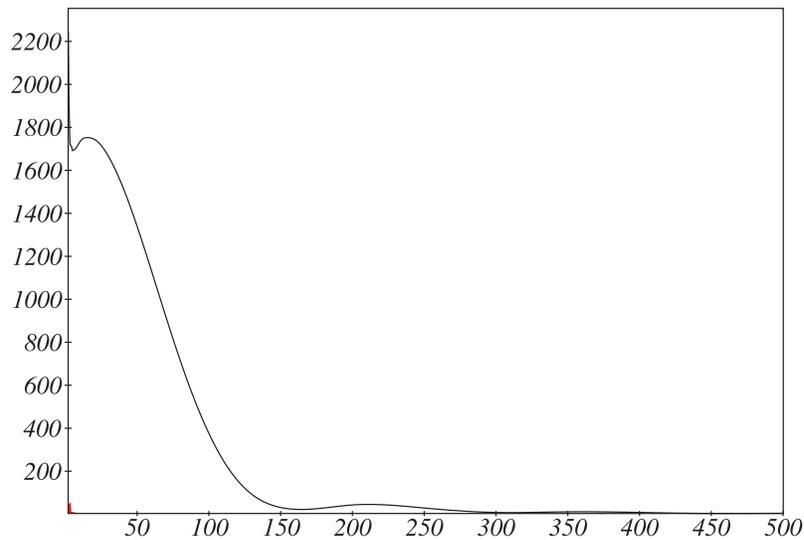


Figura 3.3: Gráfico de e-folds em relação ao índice espectral  $k$ . Comportamento do espectro da anisotropia para os três casos estudados com  $k = 0.01$ . As três soluções possuem o mesmo  $k$  para  $a_1 = 0$ . Ou seja, são degenerados.

### 3.5.2 Radiação

Podemos realizar o mesmo procedimento de resolver numericamente a equação diferencial (3.33) e linearização como utilizado antes para testar os demais casos, como radiação, onde temos  $a(t) = a_0 t^{1/2}$  e matéria, onde  $a(t) = a_0 t^{2/3}$ .

Para a radiação os resultados são apresentados na Tabela 3.

$a_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k$	0.01	0.05	0.08	0.11	0.13	0.16	0.18	0.21	0.23	0.26	0.29

Tabela 3.3: Obtendo  $k$  através da variação de  $a_1 > 0$  no caso  $a(t) = a_0 t^{1/2}$ .

$a_1$	0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1.0
$k$	0.01	-0.26	-0.27	-0.28	-0.33	-0.30	-0.33	-0.38	-0.38	-0.36	-0.34

Tabela 3.4: Obtendo  $k$  através da variação de  $a_1 < 0$  no caso  $a(t) = a_0 t^{1/2}$ .

Com estes valores obtemos os gráficos mostrados nas figuras 3 e 4, para o espectro de anisotropia, onde usamos o valor  $a_1 = 0$  (figura 3) e o valor extremo  $a_1 = 1$  (figura 4) a partir das tabelas acima apresentadas.

### 3.5.3 Matéria

Por fim, analisamos o caso da época dominada pela matéria, com  $a(t) = a_0 t^{2/3}$ , onde temos os valores apresentados nas Tabelas 5 e 6.

$a_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k$	0.01	0.06	0.09	0.12	0.14	0.17	0.20	0.22	0.25	0.28	0.29

Tabela 3.5: Obtendo  $k$  através da variação  $a_1 > 0$  no caso  $a(t) = a_0 t^{2/3}$ .

$a_1$	0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1.0
$k$	0.01	-0.23	-0.24	-0.24	-0.28	-0.25	-0.28	-0.32	-0.31	-0.29	-0.28

Tabela 3.6: Obtendo  $k$  através da variação  $a_1 < 0$  no caso  $a(t) = a_0 t^{2/3}$ .

Com estes valores, obtemos os gráficos para o espectro da anisotropia apresentado nas figuras 3 ( $a_1 = 0$ ) e 4 ( $a_1 = 1$ ).

Nota-se que os gráficos do espectro da anisotropia da RCF são quase idênticos nos casos da radiação e matéria (figura 3), mas ambos são diferentes da inflação. Os casos de matéria e radiação na figura 4 são degeneradas.

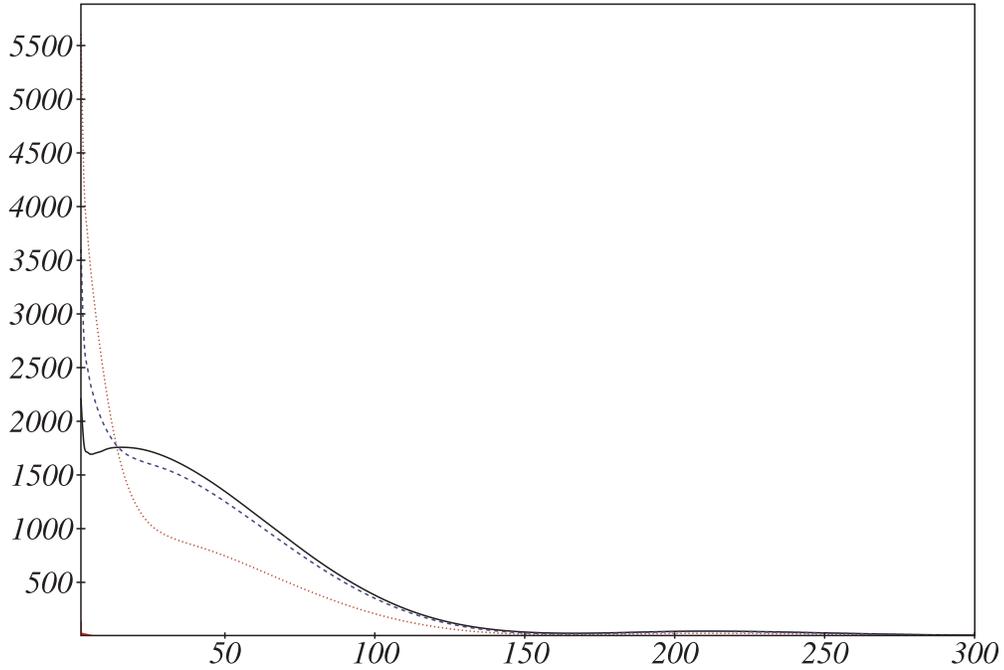


Figura 3.4: Gráfico de e-folds em relação ao índice espectral  $k$ . Comportamento do espectro da anisotropia para ondas gravitacionais no caso plano (linha preta com  $k = 0$ ), inflação (linha vermelha com  $k = 0.79$ ) e radiação/matéria (linha azul com  $k = 0.3$  para ambos). Em todos os casos temos  $a_1 = 1$ .

### 3.6 Efeitos quânticos de campos massivos e inflação “temperada”

Como mostrado em [55, 57], quando levamos em consideração os efeitos quânticos de campos massivos obtemos a forma “temperada” da solução inflacionária  $H_S$  em (3.20). A solução que surge depois de obtermos as equações efetivas pode ser muito bem aproximada pela fórmula

$$a(t) = e^{\sigma(t)}, \quad \sigma(t) = H_0 t - \frac{H_0^2}{4} \tilde{f} t^2, \quad H(t) = H_0 - \frac{H_0^2}{2} \tilde{f} t, \quad (3.58)$$

onde  $\tilde{f}$  é um parâmetro adimensional, da ordem de  $10^{-5}$ . O gráfico para  $\sigma(t)$  é mostrado na figura 5. Esta fase estável da inflação deve durar até que  $H(t)$  torna-se comparável à

escala de energia da quebra supersimétrica e assim ocorre a transição para a fase instável da inflação.

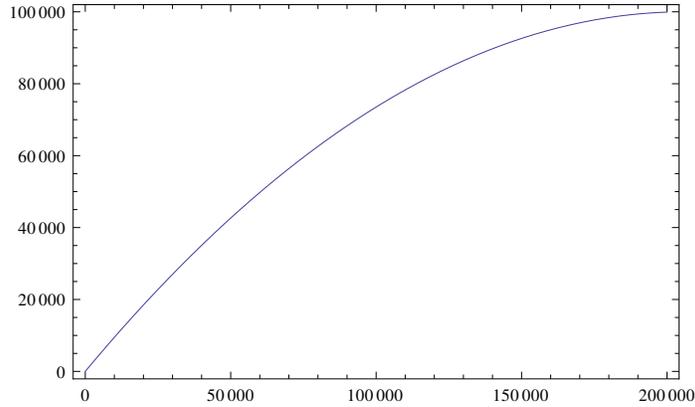


Figura 3.5: Evolução de  $\sigma(t)$ .

Podemos usar a solução(3.58) em nossa equação diferencial (3.33) para a perturbação tensorial. Resolvendo esta equação numericamente e realizando o processo de linearização como foi explicado acima, chegamos à Tabelas 7 e 8 para a variação de  $k$  com respeito à  $a_1$  no caso do modelo de Starobinsky modificado.

$a_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k$	0.01	0.04	0.08	0.12	0.17	0.22	0.29	0.37	0.48	0.61	0.79

Tabela 3.7: Obtendo  $k$  através da variação  $a_1 > 0$  no caso da equação (3.58).

$a_1$	0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1.0
$k$	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.07	-0.09	-0.11	-0.12	-0.13	-0.14

Tabela 3.8: Obtendo  $k$  através da variação  $a_1 < 0$  no caso da equação (3.58).

Podemos observar que a Tabela é quase idêntica à obtida para o caso da inflação convencional, descrita na Tabela 1. Isto ocorre porque o parâmetro  $\tilde{f}$  é pequeno ( $10^{-5}$ ) e a desaceleração da inflação acontece de forma mais lenta em comparação com a escala típica de perturbações tensoriais. Se considerarmos esse parâmetro sendo “aumentado”, os dois resultados começam a divergir. Os valores de  $k$  aumentam conforme o valor de  $\tilde{f}$  aumenta.

### 3.7 Considerações acerca dos resultados obtidos

Como vimos, a ação clássica da gravidade que é necessária para garantir que a teoria dos campos de matéria em uma métrica de fundo clássica seja renormalizável vai além do termo de Einstein-Hilbert convencional, incluindo também o termo de constante cosmológica e termos com derivadas superiores. A presença de derivadas superiores é geralmente associada ao problema de fantasmas não-físicos, mas esta questão não representa um problema real para a teoria, quando a gravidade é apenas um fundo externo e não há condição de unitariedade para a matriz  $S$  gravitacional. No caso da gravidade externa as condições necessárias de consistência devem ser a existência de soluções fisicamente aceitáveis e sua “solidez”. Por solidez queremos dizer que essas soluções devem ser estáveis, pelo menos no que diz respeito às pequenas perturbações das variáveis métricas. No caso da gravitação, os termos de derivadas superiores podem ser especialmente perigosos para a estabilidade das soluções cosmológicas clássicas, como matéria e radiação e também para o Universo dominado pela constante cosmológica. Os resultados encontrados neste capítulo mostram que a recente detecção das ondas gravitacionais obtida através do projeto BICEP2 [56] poderá contribuir muito na compreensão dos limites dos possíveis efeitos quânticos analisados aqui.

No próximo capítulo iremos analisar mais detalhadamente sobre a necessidade de termos “medo” destes fantasmas mencionados e se podemos usar essa teoria (sem correções) como uma boa aproximação para uma teoria quântica da gravidade abaixo da escala de Planck.

## CAPÍTULO 4

---

### Gravitação Quântica abaixo da escala de Planck?

---

*“In the midst of winter, I found there was within me an invincible summer.” (Original: “Au milieu de l’hiver, j’apprenais enfin qu’il y avait en moi un été invincible.”)*

**Albert Camus** *Retour à Tipasa*

Neste capítulo iremos explorar como a estabilidade de perturbações métricas em teorias de gravitação com derivadas de ordem superior dependem da escala de energia e das condições iniciais de tais perturbações. Mostra-se que, pelo menos nos casos de fundos cosmológicos específicos, fantasmas massivos não físicos (que estão presentes no espectro de tais teorias) não se “desenvolvem”, permanecendo no estado de vácuo até que a frequência inicial da perturbação chegue perto da escala de energia de Planck. Mostraremos que nesta situação (abaixo da escala de Planck), as versões existentes das teorias renormalizáveis e superrenormalizáveis podem ser vistas como teorias eficazes e muito satisfatórias de Gravitação Quântica.

## 4.1 Introdução

Falar sobre Gravitação Quântica (GQ) sempre nos remete ao conflito entre renormalizabilidade e unitariedade. De um lado temos a Relatividade Geral, que parece ser *a teoria* da gravitação clássica que, porém nos remete a uma teoria quântica não-renormalizável, como já dissemos antes [30, 74, 75]. Podemos obter a desejada teoria renormalizável através da inclusão de termos com derivadas covariantes de quarta ordem na ação [76], porém estes termos irão nos levar à excitações fantasmas não-físicas no espectro de partícula da teoria. Na tentativa de remover estes fantasmas do espectro físico somos levados a violar a unitariedade da matriz- $S$  gravitacional. Assim obtemos uma teoria da GQ renormalizável e não unitária sem fantasmas, enquanto a versão unitária da GQ é não-renormalizável. Como resultado deste conflito a ideia de desenvolver uma Gravitação Quântica foi muito além da abordagem convencional da quantização perturbativa do campo gravitacional. No entanto, há uma importante questão que permanece: em que medida devemos ter medo destes fantasmas oriundos de derivadas de ordem superior que são a fonte de todas essas dificuldades?

O problema de teorias que envolvem derivadas superiores atraiu muita atenção por um longo tempo e continua a atrair ainda hoje. Já da década de 1850, Ostrogradski descreveu essas instabilidades do tipo exponencial [77]. Mais tarde, em 1963, Veltman apresentou o processo de espalhamento quântico de uma partícula de energia com grande massa negativa e uma partícula de energia positiva muito mais leve [78]. O resultado de Veltman (em uma explicação bastante simplificada) foi que as partículas de energia negativa (fantasmas massivos) “ganham” cada vez mais energia cinética negativa e, conseqüentemente, a partícula com energia positiva ganha também cada vez mais energia cinética positiva. No caso da gravitação com derivadas superiores, mesmo que não observemos esses “fantasmas” devido a sua grande massa, devemos ter uma grande emissão de grávitons, que deverá “destruir” as soluções clássicas “pacíficas”. Esse problema foi tratado recentemente na abordagem da Gravitação Quântica em [79, 80, 81, 82, 83, 86], em gravitação clássica temos [38, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93] e para modelos teóricos mais simplificados [94, 95, 96, 97].

Podemos notar que a abordagem mencionada é bastante diferente do que iremos adotar. Essas abordagens baseadas em GQ [79, 81, 86] estão relacionadas em assumir que os “polos fantasmas” ganham uma contribuição imaginária dependente de calibre ao nível quântico, deixando assim a matriz  $S$  unitária. Infelizmente, os resultados para 1-loop [98, 99, 100, 101] não são suficientes para que possamos verificar onde estes desejados efeitos quânticos irão realmente ocorrer (ou se irão).<sup>1</sup> Outra proposta de perspectiva “quântica” [83] é a ideia de modificar o formalismo da Teoria Quântica de Campos de tal maneira a fazer com que os fantasmas sejam sempre tratados juntamente com o graviton, e não como uma partícula independente. Porém, por enquanto, não está claro como se colocar este pensamento em prática.

As abordagens clássicas [87, 88, 90, 91] estão relacionadas em explorar a estabilidade para uma dada solução (cosmológica ou de buracos negros). No caso cosmológico o problema se reduz ao estudo da estabilidade com respeito as perturbações do fator conforme da métrica (detalhes maiores em [40, 57]) e também estudarmos a estabilidade com respeito às ondas gravitacionais [103, 44, 45, 65, 29] (como observamos no capítulo anterior). O resultado obtido no capítulo anterior é extremamente relevante, já que as perturbações em teorias com derivadas superiores não apresentam, na verdade, estas fortes instabilidades que esperamos que ocorram em teorias com fantasmas não-físicos.

O objetivo deste capítulo será considerar a relação entre a presença de fantasmas e instabilidades gravitacionais dentro da abordagem efetiva da Teoria Quântica de Campos. Nossa consideração será simples, puramente clássica e até certo ponto próximo ao de [91] e [96]. Aqui iremos mostrar que o comportamento das perturbações gravitacionais está intimamente relacionado com a presença de fantasmas, mas somente se a escala de energia é suficiente para gerar estes fantasmas. Nossa consideração irá se basear nas perturbações lineares sobre um fundo gravitacional não trivial. Não apresentaremos aqui resultados conclusivos, mas esperamos que esse estudo sirva para orientar a investigação nesta área.

---

<sup>1</sup>A situação é qualitativamente similar também para os métodos não-perturbativos existentes hoje (como, por exemplo, mostrado em [102]). Porém a existência desses novos modelos se mostra bastante promissora.

## 4.2 Fantasmas não-físicos massivos

Podemos começar este estudo formulando alguns questões gerais acerca dos fantasmas de derivadas superiores: (i) Podemos “sobreviver” sem eles? (ii) O que existe de realmente ruim com estes fantasmas? (iii) Podemos, de alguma forma, nos livrar deles? Começaremos mostrando que a resposta para a primeira pergunta (i) é “não”.

### 4.2.1 A teoria quântica pode “sobreviver” sem derivadas superiores gravitacionais?

Para entendermos a necessidade de derivadas superiores na ação gravitacional iremos começar com uma situação relativamente simples, quando apenas campos de matéria são quantizados e a gravitação é um fundo clássico. Nesta teoria semiclássica temos que introduzir a ação do vácuo, a qual é um funcional da métrica clássica externa. É bem conhecido [36] (para maiores detalhes [104, 105, 106]) que esta teoria pode ser renormalizável, mas somente se possuir os seguintes termos para a ação clássica do vácuo (como mostramos em detalhes no último capítulo):

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{HD}, \quad (4.1)$$

onde

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \{R + 2\Lambda\} \quad (4.2)$$

é o termo de Einstein-Hilbert com a constante cosmológica e

$$S_{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\} \quad (4.3)$$

inclui termos de derivada superior. Iremos usar aqui as mesmas notações já usadas antes:

$$\begin{aligned} C^2 &= R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}R^2, \\ E &= R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

para o quadrado do tensor de Weyl e para a densidade lagrangiana do termo topológico de Gauss-Bonner (densidade de Euler) em  $d = 4$ .

A necessidade do uso de termos com altas derivadas (4.3) para renormalizabilidade já foi demonstrada de maneira formal (ver, por exemplo, [37] para uma introdução e outras referências). A teoria renormalizável no espaço-tempo plano possui apenas divergências logarítmicas quadridimensionais. Uma observação importante é que a adição de linhas externas de  $h_{\mu\nu}$  não irá aumentar o grau de divergência (ver [22] para análise mais detalhada). Portanto, apenas as divergências quadridimensionais vão surgir na mesma teoria, mesmo em espaço curvo. Isso significa que devemos utilizar todos os termos do nível clássico, sendo esse o motivo de precisarmos de todos os termos de (4.1) na ação do vácuo.

Devemos notar a grande importância existente nos termos de derivada superior (4.3) para grande parte das aplicações da teoria semiclássica. Como exemplo podemos notar que a radiação de Hawking [107] e a versão geral da inflação de Starobinsky [40] podem ser obtidas através da anomalia conforme [41], e os últimos resultados através da renormalização dos termos (4.3), como vimos no último capítulo.

Na gravitação quântica, os termos de derivada superior  $C^2$  presente em (4.3) irá significar fantasma massivo (uma partícula de spin-2 e com energia cinética negativa). Isso irá nos levar ao problema de unitariedade da teoria (pelo menos ao nível de árvore). Porém, na teoria semiclássica a gravitação é externa e a unitariedade da matriz  $S$  gravitacional pode não ser mais tão importante. As condições de consistência neste caso poderão incluir a existência de soluções fisicamente possíveis e sua estabilidade perante pequenas perturbações da métrica. Iremos discutir a relação desta estabilidade na presença de fantasmas massivos a seguir.

Vamos agora considerar a situação no caso da teoria quântica do campo gravitacional. O cálculo dos graus de divergência superficiais  $D$  para o diagrama de Feynmann do campo  $h_{\mu\nu}$  pode ser feito através a seguinte fórmula geral,

$$D + d = \sum_{l_{int}} (4 - r_l) - 4n + 4 + \sum_{\nu} K_{\nu}, \quad (4.5)$$

com uma relação topológica adicional.

$$l_{int} = p + n - 1. \quad (4.6)$$

Aqui  $d$  é o número de derivadas de linhas externas do diagrama,  $r_l$  é o potência dos momenta no propagador inverso da linha interna,  $n$  é o número de vértices e  $K_\nu$  é a potência dos momenta em um dado vértice. Na equação (4.6)  $l_{int}$  e  $p$  são os números de linhas internas e loops, correspondentemente. O caso  $D = 0$  corresponde às divergências logarítmicas e  $d$  indicará o número de derivadas necessárias nos contratermos.

Para a versão quântica da Relatividade Geral nos temos  $r_l = 2$  e  $K_\nu = (2, 0)$ . É fácil ver através da relação (4.5) e (4.6) que a expressão final para as divergências logarítmicas será  $d = 2 + 2p$ , e isto irá significar que a teoria da RG não é renormalizável (como vimos também nos primeiros capítulos).

Se partirmos da ação (4.1), que inclui termos com derivadas de quarta ordem (4.3), então  $r_l = 4$  e  $K_\nu = (4, 2, 0)$ . Podemos notar facilmente que a potência máxima das derivadas nos contratermos logarítmicos será  $d = 4$ , assim podemos afirmar que esta teoria é renormalizável em todas as ordens de loop.

Podemos introduzir mais derivadas considerando a ação [108]

$$\begin{aligned}
S = & S_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + a_2 R_{\mu\nu}^2 + a_3 R^2 + \dots \right. \\
& + b_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta} + b_2 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + b_3 R \square R + \mathcal{O}(R_{\dots}^3) + \\
& \left. + c_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^k R^{\mu\nu\alpha\beta} + c_2 R_{\mu\nu} \square^k R^{\mu\nu} + c_3 R \square^k R + \dots + \mathcal{O}(R_{\dots}^{k+2}) \right\}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Para esta teoria, no caso geral, temos  $r_l = 4 + 2k$  (sendo que  $k$  aqui não possui nenhuma relação com os utilizados nos capítulos passados, sendo apenas um número natural) e  $K_\nu = (0, 2, \dots, 4 + 2k)$ . Através da equação (4.5) e (4.6), para as divergências logarítmicas temos  $d = 4 + k(1 - p)$ . Esta fórmula possui três importantes consequências. Primeiro, a teoria é superrenormalizável para  $k \geq 1$  e apenas divergências de 1-loop estão presentes para  $k \geq 3$ . Segundo, todas as divergências são de derivadas de quarta ordem ou menos. Isso significa que a maior parte dos termos em (4.7) não são renormalizados. Terceiro, os contratermos de ordem zero, dois e quatro nas derivadas dependem da escolha dos coeficientes dos termos com derivadas maiores. Aqui podemos notar que a contagem de potências na popular teoria gravitacional de Hořava-Lifshits [109] é exatamente a mesma da descrita anteriormente. Isso significa que as derivadas de quarta ordem nas divergências logarítmicas no tempo nesta teoria irão muito provavelmente aparecer, mas talvez possam

ser canceladas por um ajuste fino especial nos termos de derivadas superiores. Só através de um cálculo explícito poderemos demonstrar se isso realmente acontece ou não, e o cálculo em 1-loop seria suficiente para  $k \geq 3$ . De qualquer forma, na medida em que o alvo principal seja uma GQ *pura*, a gravitação de Hořava-Lifshits possui uma boa chance de obter sucesso. Ao mesmo tempo, existem dificuldades mais sérias com respeito a contribuição dos campos de matéria. Se não assumirmos a violação de Lorentz no setor de matéria, estes campos irão sempre produzir divergências covariantes do tipo  $R_{\mu\nu}^2$ , em todas ordens de loop e logo não está claro como podemos construir uma teoria sem derivadas de quarta ordem. É possível observar essas considerações através do cálculo direto para o campo escalar realizado em [110].

Os fantasmas massivos estão ainda presentes na teoria (4.7). Para o caso de polos reais temos [108],

$$G_2(k) = \frac{A_0}{k^2} + \frac{A_1}{k^2 + m_1^2} + \frac{A_2}{k^2 + m_2^2} + \cdots + \frac{A_{N+1}}{k^2 + m_{N+1}^2}, \quad (4.8)$$

onde os sinais alternam

$$A_j \cdot A_{j+1} < 0 \quad (4.9)$$

para qualquer sequência com massas crescentes reais

$$0 < m_1^2 < m_2^2 < m_3^2 < \cdots < m_{N+1}^2. \quad (4.10)$$

Um primeiro passo interessante seria explorar o caso de polos imaginários e negativos (por exemplo, à procura de algum tipo de “mecanismo de gangorra” para os polos fantasmas), mas aqui iremos deixar essa consideração para um trabalho futuro. Neste capítulo nossa atenção estará restrita pelo caso (4.8) e na discussão com relação à presença de fantasmas e instabilidades gravitacionais do estado de vácuo da teoria.

Olhando para a expressão (4.8) podemos ver que essa teoria possui um (no caso  $k = 1$ ) ou mais (para  $k \geq 2$ ) graus de liberdade fantasma no setor tensorial. Podemos concluir que, em geral, o preço da (super)renormalizabilidade é a presença de fantasmas (ver também [111]). No entanto, do ponto de vista geral, o argumento mais importante em favor de derivadas superiores vem da quantização de campos de matéria. Levando-se em

consideração a importância de  $S_{HD}$  em (4.3) para a construção da ação renormalizável dos campos de matéria quântica, é muito difícil ver como podemos obter uma teoria consistente sem derivadas superiores covariantes. Logo devemos nos preocupar com a presença de fantasmas e descobrir como podemos lidar com eles.

## 4.2.2 Podemos nos livrar dos fantasmas massivos?

Fantasmas massivos são estados tensoriais massivos (de spin dois) com energia cinética negativa. As componentes correspondentes do propagador não dependem da fixação de calibre e podem ser vistas como graus de liberdade físicos. A criação de partículas com energia cinética negativa do estado de vácuo não é protegida pela conservação de energia, o que significa que na teoria com fantasmas devemos esperar a criação contínua desses fantasmas e também de um enorme número de grávitons de alta energia (lembrando que esses fantasmas possuem a massa da ordem da escala de Planck). Mesmo que não tenhamos propriamente o fantasma, iremos observar um enorme e destrutivo “fluxo de saída” de energia gravitacional, que supostamente irá “explodir” qualquer solução gravitacional clássica (ver, por exemplo, [95] para uma revisão recente).

Existem (como já mencionado anteriormente) várias tentativas interessantes para se livrar dos fantasmas massivos. A ideia mais óbvia seria assumir que o estado inicial  $|in\rangle$  no espalhamento clássico de perturbações gravitacionais não possui fantasmas. O problema é que, devido à natureza não-polinomial da gravitação, o fantasma possui uma interação complicado de grávitons e, como resultado desta interação, devem haver fantasmas no estado  $|out\rangle$ . Logo, a teoria não será unitária. Em um recente trabalho [112] foi mostrado que a teoria *sem* fantasmas é unitária. Porém acreditamos que não se trata de uma solução real, devido ao fato do problema ser exatamente sobre *como* podemos remover o fantasma do espectro.

Uma ideia muito interessante está em ligar o possível papel das correções quânticas no polo massivo não físico [79, 80, 81]. Como já discutido, os métodos existentes não permitem que se realize a análise não-perturbativa, que é etapa necessária para realizar-se a conclusão final sobre essa possibilidade [82]. Ainda devemos notar que a situação pode ser melhor na versão super-renormalizável da teoria (4.7), onde é tecnicamente possível

calcular de forma exata as funções  $\beta$  e, assim, chegar à aproximação principal para o propagador completo com correções quânticas. Essa possibilidade será também deixada para um futuro trabalho e iremos concentrar em uma abordagem muito mais simples, onde olharemos diretamente para o problema de fantasmas e instabilidades.

Uma via interessante foi sugerida em [113] e desenvolvida recentemente em [114, 115]. A ideia principal é continuar a expansão em (4.7) para a ordem infinita em derivadas. A expectativa é a possibilidade de alcançar-se a seguinte forma da expansão bilinear da ação clássica (para simplificar, tomamos um fundo plano e assumimos que uma fixação de calibre apropriada está incluído):

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \{ cM_P^2 \square + f(\square) \} h_{\alpha\beta}, \quad (4.11)$$

de tal forma que  $c = const$  e  $f(\square)$  é escolhido para que a soma  $cM_P^2 \square + f(\square)$  é uma função inteira do argumento  $\square$ . Suponhamos que a teoria resultante é (super)renormalizável e que o propagador da perturbação gravitacional  $h^{\alpha\beta}$  tenha polo único em  $k^2 = 0$ . A ideia, em primeira vista, parece bastante satisfatória. Porém existem dúvidas sobre se esse esquema irá funcionar para GQ. Em primeiro lugar para termos uma teoria (super)renormalizável é preciso chegar às regras de Feynman para  $h^{\alpha\beta}$ , e para este fim faz-se necessário realizar a quantização da teoria. Não está clara ainda a forma como isso pode ser feito em uma teoria não-polinomial com derivadas como (4.11). Segundo, na teoria (4.11) temos  $r_l$  e  $K_\nu$  infinitos. Assim, o cálculo do grau de divergência superficial (4.5) nesta teoria produzirá um tipo de solução indefinida ( $\infty - \infty$ ). Por isso, não fica claro se a teoria é super-renormalizável, renormalizável ou não renormalizável. No presente caso, a possibilidade da teoria ser não-renormalizável significa, em particular, que a forma da função  $f(\square)$  pode, eventualmente, se alterar sob correções quânticas de tal modo que o polo massivo irá retornar para a teoria. Começando a partir da expressão das ações,

$$S_{iHD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ cR + R^{\mu\nu} h(\square) R_{\mu\nu} + R h_1(\square) R \}. \quad (4.12)$$

chegamos ao propagador inverso (no espaço de momentum, para o setor de spin-dois) na forma

$$G^{-1}(k) = c_1 k^2 + k^4 \psi(k^2), \quad (4.13)$$

onde  $\psi(k^2)$  é uma função analítica e  $c_1 \neq 0$ . Podemos ter ausência de polos extras com  $k \neq 0$  (real ou complexo) neste caso colocando, por exemplo,

$$c_1 + k^2\psi(k^2) = c_1 e^{-k^2/M^2} \quad (4.14)$$

ou de uma forma semelhante à usada em em [113]. Não é claro ainda se esta forma da função irá continuar após levarmos em conta as correções quânticas. Finalmente, concluimos que a proposta apresentada em [113] se mostra bastante interessante. Contudo a afirmação de que a teoria baseada em (4.11) realmente irá solucionar o conflito entre renormalizabilidade e unitariedade parece um pouco prematura e não esclarecida até o momento.

Uma abordagem qualitativamente diferente é sugerida em [83], baseando-se na observação de que os fantasmas não são partículas independentes, mas sim companheiros do gráviton na gravidade linear. A separação dos diferentes graus de liberdade nas teorias com derivadas de ordem superior é uma questão não trivial, mesmo no caso de teorias linearizadas (ver, por exemplo, [116]). Como podemos imaginar, a situação deve ser mais complicada na gravitação, que possui uma estrutura de interação não polinomial. No entanto, até agora não está claro como poderemos colocar em prática a proposta contida em [83]. De qualquer forma, estas duas propostas mostram que a situação com fantasmas na teoria não está completamente sem esperanças, merecendo ser explorada em mais detalhes.

Finalizando esta revisão vamos abordar a tentativa de se evitar os fantasmas nos modelos de gravidade massiva [84]. Uma abordagem alternativa é admitir que o fantasma não físico pode existir, mas é inofensivo devido ao fato de sua interação com o resto das partículas ser não-local e suprimida por algum grande parâmetro [85].

A seguir consideramos a possibilidade de que o fantasma exista apenas como uma excitação do vácuo, porém nunca aparecendo como uma partícula física e, portanto, sendo inofensivo nas energias abaixo da escala de Planck.

### 4.3 Ondas gravitacionais em um fundo arbitrário

Vamos nós lembrar das suposições que fizemos até o momento para lidar com o problema de fantasmas em teorias com derivadas superiores.

- Podemos obter conclusões sobre a teoria de gravitação usando aproximação linear. A matriz  $S$  de grávitons deve ser o principal objeto de nosso interesse.

- A instabilidade de Ostrogradsky [77] ou espalhamento de Veltman [78] são relevantes, independente da escala de energia. Em todos os casos produzem soluções tipo *run-away* e o Universo explode.

Existe uma maneira simples e eficaz para verificar diretamente a maioria destas suposições de uma só vez. Vamos utilizar uma teoria de gravitação com derivadas superiores e verificar a estabilidade com relação às perturbações lineares para algumas soluções clássicas fisicamente interessantes. Se os pressupostos mencionados forem corretos, iremos observar modos de crescimento rápido, mesmo para o fundo de baixa energia (ou seja, de baixa curvatura). No entanto, se não houver modos de crescimento a nível linear, não haverá tais modos em ordens superiores. É importante ressaltar que o problema de fantasmas está posto em nível de árvore e, portanto, não precisamos nos preocupar com efeitos de loop. Além disso, de acordo com o teorema [117], se o sistema é estável sob oscilações lineares, será também estável a um nível não-linear (pelo menos para amplitudes suficientemente pequenas de perturbações.)

Finalmente, o nosso objetivo principal é explorar a dinâmica do tempo para ondas gravitacionais em um “fundo arbitrário” de baixa energia, em uma teoria de gravitação com derivadas superiores. A seguir iremos partir da teoria (4.1) em um fundo geral e mostrar que existem alguns argumentos a favor da sua irrelevância para as flutuações com energia suficientemente baixa. Depois iremos lidar com o problema “reduzido” e identificar as relações entre a presença de modos crescentes e a existência de fantasmas massivos no fundo cosmológico.

### 4.3.1 Coordenadas Normais de Riemann

Vamos considerar aqui a teoria com derivadas de quarta ordem (4.1) e definir a constante cosmológica como sendo zero. Isso é justificado quando estamos interessados no comportamento das ondas gravitacionais. A ação que iremos utilizar pode ser reescrita da seguinte

forma

$$S_{4dQG} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{M_P^2}{16\pi} R + a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2 \right\}. \quad (4.15)$$

O único parâmetro dimensional presente nesta teoria é a massa de Planck  $M_P$ . Já os  $a_k$ 's são parâmetros arbitrários e, sendo assim, podemos escolhê-los para serem tão grande como quisermos, porém vamos fazer uma escolha moderada, assumindo que os valores de  $a_k$  estão próximos da unidade. A massa de Planck  $M_P$  irá definir a escala única da teoria. Isso significa que todas as quantidades que são muito menores do que  $M_P$  serão também muito pequenas nesta teoria. Podemos notar que esse recurso tem sido amplamente utilizado para estabelecer a abordagem efetiva para GQ [118].

A abordagem de baixas energias para a dinâmica de perturbações gravitacionais em um fundo com métrica arbitrária significa que as seguintes desigualdades serão satisfeitas:

$$|R_{\mu\nu\alpha\beta}| \ll M_P^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{k}^2 \ll M_P^2, \quad (4.16)$$

onde  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  são componentes do tensor de Riemann para um dado fundo e  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda para a perturbação.

A equação de nosso maior interesse é dada por

$$H^{\mu\nu, \alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}^\perp = 0, \quad (4.17)$$

onde 
$$H^{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{\delta^2 S_{4dQG}}{\delta g_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta}}.$$

O termo de fixação de calibre é irrelevante já que estamos interessados apenas nos componentes da perturbação gravitacional  $\bar{h}_{\alpha\beta}^\perp(x)$ , que denotaremos  $h_{\alpha\beta}$ . Iremos assumir que  $h_{\alpha\beta}$  satisfaz,

$$h_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^\alpha h_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.18)$$

Para ilustrar melhor a situação vamos escrever separadamente a ordem zero em termos de curvatura em (4.17) como

$$a_1 \left( \square^2 - \frac{M_P^2}{32\pi a_1} \square \right) h^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.19)$$

que corresponde à massa do fantasma  $m_2 = M_P/\sqrt{-32\pi a_1}$ .

A equação completa inclui os termos (4.19) e também termos lineares e quadráticos na curvatura. Podemos facilmente obter essa equação dos trabalhos feitos em HDQG (*Higher-Derivative Quantum Gravity*), como por exemplo, [37] e [101]. Em primeira ordem na curvatura e tendo em conta (4.18), esta equação terá a seguinte forma (4.17)<sup>2</sup>

$$H_{\mu\nu, \alpha\beta} = -\frac{a_1}{2} \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} \square^2 + D^{\rho\lambda}{}_{\mu\nu, \alpha\beta} \nabla_\rho \nabla_\lambda + W_{\mu\nu, \alpha\beta}, \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} D^{\rho\lambda}{}_{\mu\nu, \alpha\beta} &= 2a_1 g_{\nu\beta} R_{\alpha\cdot\cdot\mu}{}^{\rho\lambda} + a_1 g^{\rho\lambda} (2g_{\nu\beta} R_{\alpha\mu} - R_{\mu\alpha\nu\beta}) + \left( \frac{M_P^2}{64\pi} - \frac{a_1}{6} R - \frac{a_4}{2} R \right) g^{\rho\lambda} \delta_{\mu\nu, \alpha\beta}; \\ W_{\mu\nu, \alpha\beta} &= \frac{M_P^2}{64\pi} (R_{\mu\alpha\nu\beta} + 3R_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - R \delta_{\mu\nu, \alpha\beta}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

A razão para mantermos apenas termos lineares na curvatura é devido ao fato de nosso interesse estar apenas no comportamento de perturbações métricas na equação (4.17) quando o fundo e perturbações possuem energias típicas muito menores que a escala de Planck. Isto significa, em particular, que podemos ignorar todos os termos  $\mathcal{O}(R^2)$ . Obviamente seria interessante explorar ordens superiores porém, no presente trabalho, vamos tentar fazer os cálculos da forma mais simples possível.

É natural tentarmos usar alguma técnica que nos permita tratar os componentes de tensores de curvatura como pequenas perturbações. O formalismo covariante deste tipo baseia-se nas coordenadas normais Riemann [119]. Esta abordagem é tradicionalmente utilizada para descrever o propagador [120], em nosso caso para grávitons. O método também é bastante útil para outras situações, principalmente relacionado com o cálculo dos efeitos de loop [121, 122], porém aqui estamos interessados apenas na aproximação a nível de árvore.

No método de coordenadas normais assumimos uma expansão em torno de um ponto escolhido no espaço-tempo, que iremos chamar  $P(x'^\mu)$ . As quantidades correspondentes a este ponto serão marcadas por “zeros” como, por exemplo, a métrica  $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ . Além disso, vamos precisar do tensor de curvatura e suas derivadas covariantes neste momento. O ganho com o uso das coordenadas normais é que as linhas de coordenadas são especialmente

---

<sup>2</sup>Nessas expressões, é tomada a simetrização ao longo dos pares de índices  $(\mu\nu)$  e  $(\alpha\beta)$ . As formulas completas, incluindo termos de segunda ordem, podem ser encontradas em [101].

concebidas como linhas geodésicas e uma expansão covariante pode ser feita com relação ao ponto  $P$ . O desvio do ponto  $P$  é parametrizado pelas quantidades  $y^\mu = x^\mu - x'^\mu$ , que possuem valor zero em  $P$ . Conforme consideramos os componentes das curvaturas como sendo pequenos, podemos limitar a análise feita apenas nos primeiros termos. Por uma questão de generalidade vamos realizar também parte da expansão até segunda ordem (os resultados correspondente estão presentes no Apêndice).

A expansão da métrica possui a forma

$$g_{\alpha\beta}(y) = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}_{\mu\alpha\nu\beta} y^\mu y^\nu + \dots \quad (4.22)$$

Pode-se sempre escolher a métrica no ponto de expansão para ser do tipo Minkowski,  $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Para o símbolo de Christoffel teremos,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{2}{3} \overset{\circ}{R}^{\lambda}_{\cdot(\alpha\beta)\nu} y^\nu + \dots$$

Vamos começar a partir da expansão em coordenadas normais para  $\square h^{\alpha\beta}$ . A expansão representa uma série de potências em ambas componentes da curvatura  $\overset{\circ}{R}^{\lambda}_{\alpha\beta\nu}$  e  $y^\mu$ . Adotados que  $A^{(n)}$  será a ordem  $n$  da expansão em  $y^\mu$  para  $A$ , por exemplo,

$$\square h^{\alpha\beta} = (\square h^{\alpha\beta})^{(0)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(1)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(2)} + \dots, \quad (4.23)$$

onde os pontos indicam os termos de ordens superiores omitidos em  $y^\mu$  e de ordens superiores no tensor curvatura e suas derivadas covariantes no ponto  $P$ . Com um cálculo direto iremos obter os seguintes resultados para a segunda ordem em  $y^\mu$ :

$$(\square h^{\alpha\beta})^{(0)} = \eta^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}^{\alpha}_{\cdot\nu\lambda\mu} h^{\lambda\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}^{\beta}_{\cdot\nu\lambda\mu} h^{\alpha\lambda} \right], \quad (4.24)$$

$$(\square h^{\alpha\beta})^{(1)} = -\frac{4}{3} \eta^{\mu\nu} \left[ \overset{\circ}{R}^{\alpha}_{\cdot(\nu\lambda)\tau} \partial_\mu h^{\lambda\beta} + \overset{\circ}{R}^{\beta}_{\cdot(\nu\lambda)\tau} \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \right] y^\tau, \quad (4.25)$$

$$(\square h^{\alpha\beta})^{(2)} = \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}^{\mu\nu}_{\cdot\tau\rho} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta}) y^\tau y^\rho. \quad (4.26)$$

### 4.3.2 Aproximação de ordem zero

O próximo passo será fazer uma transformação de Fourier no setor espacial,

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.27)$$

Com uma aproximação útil iremos tratar o vetor de onda  $\mathbf{k}$  como constante e, portanto, estaremos interessados apenas na evolução temporal da perturbação  $h_{\mu\nu}$ . Esse tipo de aproximação é válida apenas quando desejamos tratar do caso de perturbações de ondas longas, onde assumimos que os modos  $h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, t)$  possuem dinâmicas independentes. Este tratamento permite lidarmos com a extremamente complicada equação diferencial parcial (4.17).

Vejam agora o que a aproximação de modos independentes  $h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, t)$  significa, do ponto de vista prático. Olhando para as equações (4.24), (4.25) e (4.26), podemos ver claramente que a equação (4.17) possui duas complicações principais: uma relacionada as derivadas do tipo  $\partial h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)/\partial y^\mu$ , e também relacionada aos fatores de  $y^\mu$ . Obviamente,  $\partial h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)/\partial y^\mu$  se reduz, após usarmos (4.27), para  $ik_\mu h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t)$ . Já o tratamento dos fatores  $y^\mu$  é um pouco mais complicado:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} y^\mu h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t) \frac{\partial}{i\partial k_\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.28)$$

Podemos integrar a última expressão por partes. O termo superficial pode ser negligenciada, onde assumimos  $h^{\alpha\beta}(|\mathbf{k}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , já que todas as perturbações são suprimidas além da escala de Planck. Desta forma, chegamos à seguinte relação

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} y^\mu h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\partial}{i\partial k_\mu} h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t). \quad (4.29)$$

Concluimos que a expansão em coordenadas normais  $y^\mu$  significa uma expansão dos modos  $h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t)$  em séries em  $k^\mu$ . Na aproximação mais simples assumimos que os modos não dependem de  $k^\mu$ , ou seja,  $h^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t) = h^{\alpha\beta}(t)$ . Isto significa que podemos restringir nossa consideração para a aproximação de ordem zero em  $y^\mu$  na equação (4.17).

Para o termo  $\square^2$  podemos escrever,

$$(\square^2 h^{\alpha\beta})^{(0)} = \eta^{\mu\nu} \left\{ \left[ \partial_\mu \partial_\nu (\square h^{\alpha\beta}) \right]^{(0)} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\nu\tau\mu} (\square h^{\tau\beta})^{(0)} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\nu\tau\mu} (\square h^{\alpha\tau})^{(0)} \right\}. \quad (4.30)$$

Iremos utilizar as seguintes notações para as expansões (4.25) e (4.26)<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} (\square h^{\alpha\beta})^{(1)} &= \Delta_{\chi}^{\alpha\beta} y^\chi, \\ (\square h^{\alpha\beta})^{(2)} &= \Lambda_{\chi\omega}^{\alpha\beta} y^\chi y^\omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

---

<sup>3</sup>Expressões de ordem superior para  $\Delta_{\chi}^{\alpha\beta}$  e  $\Lambda_{\chi\omega}^{\alpha\beta}$  podem ser vistas nas equações (4.80) e (4.81) no Apêndice.

Depois de um pequeno clculo obtemos,

$$\begin{aligned}
(\square^2 h^{\alpha\beta})^{(0)} &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu (\square h^{\alpha\beta})^{(0)} + \eta^{\mu\nu} \left[ 2\partial_\nu \Delta^{\alpha\beta}_\mu + 2\Lambda^{\alpha\beta}_{\nu\mu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}{}^\alpha_{\nu\tau\mu} (\square h^{\tau\beta})^{(0)} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}{}^\beta_{\nu\tau\mu} (\square h^{\alpha\tau})^{(0)} \right], \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde  $(\square h^{\alpha\beta})^{(0)}$  foi definido em (4.24). Tomando isso juntamente com (4.21), chegamos na seguinte express~ao,

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu, \alpha\beta} &= -\frac{a_1}{2} \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} (\square^2 h^{\alpha\beta})^{(0)} + 2a_1 \eta_{\nu\beta} \overset{\circ}{R}{}^{\rho\lambda}_{\alpha\cdots\mu} \partial_\rho \partial_\lambda \tag{4.33} \\
&+ \left[ \left( \frac{a_1}{6} \overset{\circ}{R} + \frac{a_4}{2} \overset{\circ}{R} + \frac{M_P^2}{64\pi} \right) \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} + 2a_1 \eta_{\nu\beta} \overset{\circ}{R}{}_{\alpha\mu} - a_1 \overset{\circ}{R}{}_{\mu\alpha\nu\beta} \right] \square \\
&+ \frac{M_P^2}{64\pi} \left( \overset{\circ}{R}{}_{\mu\alpha\nu\beta} + 3\eta_{\mu\alpha} \overset{\circ}{R}{}_{\nu\beta} - \overset{\circ}{R}{}_{\delta\mu\nu, \alpha\beta} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.32) na ~ultima equa~ao, obtemos a equa~ao para a perturba~ao m~etrica na aproxima~ao de ordem zero para  $y^\mu$ ,

$$\begin{aligned}
\square^2 h_{\mu\nu} &- \frac{1}{3} \left( \overset{\circ}{R}{}_{\lambda\mu} \square h^\lambda_\nu + \overset{\circ}{R}{}_{\lambda\nu} \square h^\lambda_\mu \right) + \frac{4}{3} \left( \overset{\circ}{R}{}^{\lambda\rho\tau}_{\cdots\mu} \partial_\rho \partial_\tau h_{\nu\lambda} + \overset{\circ}{R}{}^{\lambda\rho\tau}_{\cdots\nu} \partial_\rho \partial_\tau h_{\mu\lambda} \right) \\
&- 2 \overset{\circ}{R}{}^{\rho\tau}_{\lambda\cdots\mu} \partial_\rho \partial_\tau h^\lambda_\nu - 2 \overset{\circ}{R}{}^{\rho\tau}_{\lambda\cdots\nu} \partial_\rho \partial_\tau h^\lambda_\mu - 2 \overset{\circ}{R}{}_{\tau\mu} \square h^\tau_\nu - 2 \overset{\circ}{R}{}_{\tau\nu} \square h^\tau_\mu \\
&+ 2 \overset{\circ}{R}{}_{\mu\rho\nu\tau} \square h^{\rho\tau} + \frac{2}{3} \overset{\circ}{R}{}^{\rho\tau} \partial_\rho \partial_\tau h_{\mu\lambda} + \frac{a_1 + 3a_4}{a_1} \overset{\circ}{R} \square h_{\mu\nu} \\
&- \frac{M_P^2}{32\pi a_1} \left[ (\square - \overset{\circ}{R}) h_{\mu\nu} + (\overset{\circ}{R}{}_{\mu\lambda\nu\tau} + 3\eta_{\mu\lambda} \overset{\circ}{R}{}_{\nu\tau}) h^{\lambda\tau} \right] = 0. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Devemos observar que (4.34) ~e uma equa~ao diferencial no espa~ao plano, que depende dos componentes do tensor de curvatura em um determinado ponto  $P$ ,  $\overset{\circ}{R}{}^\alpha_{\beta\mu\nu}$ . Em particular, assumimos o operador d'Alembertiano plano,  $\square = \eta^{\rho\tau} \partial_\rho \partial_\tau$ . Obviamente que a express~ao completa ser~a uma expans~ao da s~erie infinita em ambos  $k^\mu$  e  $\overset{\circ}{R}{}_{\mu\nu\alpha\beta}$ , logo a equa~ao (4.34) ser~a apenas a aproxima~ao de menor ordem n~ao trivial. A equa~ao (4.34) ~e uma generaliza~ao da equa~ao de base (4.19) e a diferen~a entre esses dois casos ~e representada pelos termos lineares na curvatura, que se encontram parcialmente omitidos em (4.19). O estudo da din~amica de  $h_{\mu\nu}$  com  $\mathbf{k}$  constante pode ser realizado na equa~ao de base (4.34). Esperamos que as n~ao-linearidades, apresentadas pelo fundo n~ao-trivial, sejam respons~aveis por corre~oes relativamente pequenas para a din~amica de (4.19) no espa~ao plano. Esta afirma~ao pode estar ou n~ao correta, mas no momento n~ao somos capazes de dar uma

resposta definitiva a partir da equação (4.34). Assim iremos partir para uma verificação parcial desta declaração para o caso do fundo cosmológico, apresentado a seguir.

A equação (4.34) possui informações relevantes sobre a evolução da perturbação métrica no regime  $|\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\tau\lambda}| \ll M_P^2$ . Iremos deixar a análise desta extremamente complicada equação para um trabalho futuro. Na próxima seção vamos considerar uma outra aproximação, que não está relacionada com a expansão em torno do espaço plano. Porém podemos afirmar que de certa forma os resultados desta análise irão justificar as aproximações que foram utilizados para obter a equação (4.34).

## 4.4 Perturbações no fundo cosmológico

Iremos focar nossos esforços agora em uma abordagem muito diferente da usada anteriormente e considerar a métrica cosmológica de fundo. Neste caso a consideração não está centrada na aproximação de curvatura pequena (fraca), porém em escolhermos um fundo bem específico. De qualquer forma, esta consideração pode ser útil na coleta de evidências a favor da (ins)estabilidade do fundo na teoria de gravitação com derivadas superiores.

As perturbações métricas em teorias de gravitação com derivadas de ordem superior em fundos cosmológicas foram previamente estudadas em [103, 45, 44] para o caso particular do fundo inflacionário (dS) e, mais recentemente, em [29] para métricas mais gerais FLRW (como mostramos no capítulo anterior). Em todos estes trabalhos as equações foram obtidas com base em teoria de derivadas superiores com correções semiclássicos, e em todos os casos não foram detectadas instabilidades. Aqui vamos nos restringir ao caso da teoria puramente clássica (4.15). Em comparação com as publicações anteriores vamos estender o conjunto de condições iniciais e, finalmente, chegar até o caso instável, exatamente a situação que irá confirmar as principais premissas formuladas nas seções anteriores.

Considerando as perturbações

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

sobre um fundo cosmológico isotrópico e homogêneo,

$$g_{\mu\nu}^0 = \text{diag} \{1, -\delta_{ij} a^2(t)\}. \quad (4.36)$$

Neste ponto podemos fazer uma observação pertinente. A ação (4.15) sem a constante cosmológica possui apenas um termo que pode afetar a solução para  $a(t)$  no fundo cosmológico. Devemos lembrar que o tensor de Weyl será zero para a métrica (4.36) e o termo de Gauss-Bonnet não contribui para as equações de movimento no caso de  $d = 4$ . Após todas essas observações o único termo de derivada superior relevante para o fundo será <sup>4</sup>  $a_4 R^2$ . Assim, como estamos considerando apenas a situação de baixas energias com  $|R| \ll M_P^2$ , as soluções clássicas da relatividade geral podem ser vistas como uma aproximação precisa para a teoria (4.15). Por esta razão iremos considerar as perturbações métricas sobre o fundo (4.36) com  $a(t)$  correspondendo às soluções cosmológicas padrões da RG (com as épocas dominadas por matéria, radiação e o caso exponencial). No último caso, a expansão acelerada é devida somente a constante cosmológica.

As condições iniciais para as perturbações serão escolhidas para se originarem a partir das flutuações de campos quânticos livres. O espectro é idêntico a um campo quântico escalar no espaço de Minkowski (ver, por exemplo, [28]),

$$h(x, \eta) = h(\eta) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad h(\eta) \propto \frac{e^{\pm i k \eta}}{\sqrt{2k}} \quad . \quad (4.37)$$

onde foi empregado o tempo conforme  $\eta$ ,  $a(\eta)d\eta = dt$ ,  $\mathbf{k}$  é o vetor número de onda e  $k = |\mathbf{k}|$ . Não é necessária uma constante de normalização para o caso de perturbações lineares. Supomos que as amplitudes iniciais possuem origem quântica e dependem de  $\mathbf{k}$  de acordo com

$$h_0 \propto \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad , \quad \dot{h}_0 \propto \sqrt{\frac{k}{2}} \quad , \quad \ddot{h}_0 \propto \frac{k^{3/2}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \dddot{h}_0 \propto \frac{k^{5/2}}{\sqrt{2}} \quad , \quad (4.38)$$

onde as derivadas são tomadas em relação ao tempo cósmica. Vale a pena ressaltar que a estabilidade do vácuo está relacionada com o comportamento assintótico das perturbações em  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, a escolha das condições iniciais é, de certa forma, irrelevante. No entanto, todos os casos apresentados a seguir correspondem às equações (4.38).

Com o objetivo de estudar a dinâmica do tempo de  $h(t, \mathbf{r})$ , devemos realizar uma transformada de Fourier,

$$h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int h(t, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x \quad . \quad (4.39)$$

---

<sup>4</sup>É interessante notar que o termo  $a_1 C^2$  é muito mais relevante para as perturbações métricas do que o termo  $a_4 R^2$ . Logo as situações para o fundo e para perturbações métricas são exatamente opostas.

Agora estamos prontos para analisar a presença (ou não) dos modos crescentes para os casos particulares. Apresentaremos apenas a forma final das equações, mais detalhes podem ser encontrados nos trabalhos anteriores [29], [65] e no capítulo anterior.

Para obtermos as equações para onda, iremos utilizar as condições (em que  $\mu = 0, i = 0, 1, 2, 3$ ),

$$\partial_i h^{ij} = 0 \quad \text{and} \quad h_{kk} = 0, \quad (4.40)$$

juntamente com a condição de coordenadas síncrono  $h_{\mu 0} = 0$ .

#### 4.4.1 Análise da estabilidade

Nesta seção vamos começar a análise para descobrir se há (ou não) estabilidade para as soluções cosmológicas na teoria (4.15). Nossa consideração será baseada na combinação de métodos semi-analíticos e numéricos, em que o último é utilizado principalmente para fins de controle e de ilustração.

Após usarmos (4.39) obtemos uma equação diferencial ordinária de quarta ordem para a parte tensorial das perturbações métricas. Pode-se facilmente transformá-la em um sistema de quatro equações de primeira ordem e, em seguida, o problema é reduzido para a análise dos autovalores da equação característica correspondente (exatamente da mesma forma que fizemos no capítulo anterior). Os detalhes são descritas resumidamente também no Apêndice. Iremos utilizar aqui a mesma fórmula de Cardano já utilizada anteriormente.

Da mesma forma como abordado no capítulo anterior, podemos distinguir os casos seguintes:

1.  $\Delta < 0$ : então as três raízes são reais e distintas, podendo ser,
  - Todas as raízes negativas: estável.
  - Alguma das raízes positiva: instável.
2.  $\Delta = 0$ : as raízes são reais, e duas ou três são iguais. Logo,
  - Todas as raízes negativas ou com partes reais negativas: estável.
  - Alguma das raízes com parte real positiva: instável.

3.  $\Delta > 0$ : uma raiz real e duas raízes complexas,

- Todas as raízes negativas ou com partes reais negativas: estável.
- Alguma das raízes com parte real positiva: instável.

Iremos analisar separadamente cada caso, ou seja, primeiro o espaço-tempo plano, depois a expansão exponencial, radiação e matéria na teoria com derivadas de quarta ordem. Também iremos considerar o caso plano para a teoria super-renormalizável. Em cada caso iremos utilizar valores diferentes de  $k$  e tentaremos observar em que faixa de frequências os modos crescentes irão aparecer.

#### 4.4.2 Caso plano

A fim de “fixarmos” melhor o método, iremos considerar primeiro o caso plano, quando  $g_{\mu\nu}^0 = (1, -\delta_{ij})$ . A ação de nosso interesse (4.15) pode ser apresentada como,

$$S_{HDQG} = S_0 + S_1 + S_3, \quad (4.41)$$

onde

$$S_0 = f_0 \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad S_1 = f_1 \int d^4x \sqrt{-g} C^2, \quad S_3 = f_3 \int d^4x \sqrt{-g} R^2 \quad (4.42)$$

A perturbação métrica (como já vimos outras vezes nesta tese) é definida como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu} \quad (4.43)$$

e também impomos a condição (4.40). Em seguida, a segunda variação das ações irá produzir os resultados (onde  $h \equiv \bar{h}_{ij}^\perp$ )

$$\begin{aligned} S_0^{(2)} &= f_0 \left[ h \ddot{h} + \frac{3}{4} \dot{h} \dot{h} - \frac{1}{4} h \nabla^2 h \right] \\ S_1^{(2)} &= f_1 \left[ \frac{1}{2} \ddot{h}^2 + \frac{1}{2} (\nabla^2 h)(\nabla^2 h) + \ddot{h} \nabla^2 h + 2\dot{h} \nabla^2 \dot{h} \right] \\ S_3^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $\nabla = \nabla_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Como sempre, o termo  $R^2$  não irá contribuir para a parte tensorial da perturbação gravitacional no caso plano. Tomando a soma dos três termos em (4.44), iremos chegar a seguinte equação para as perturbações,

$$f_1 \ddot{\ddot{h}} - 2f_1 \nabla^2 \ddot{h} + f_1 \nabla^4 h + \frac{1}{2} f_0 \ddot{h} - \frac{1}{2} f_0 \nabla^2 h = 0, \quad (4.45)$$

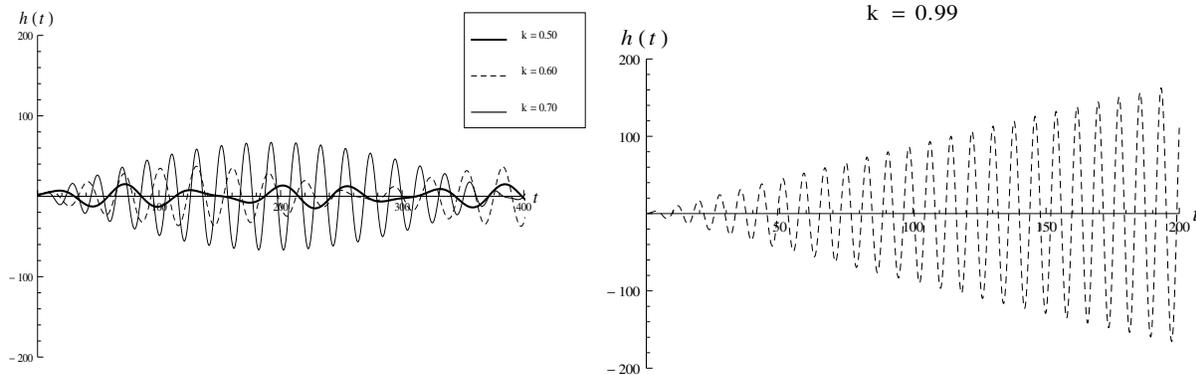


Figura 4.1: Gráficos para o caso do espaço-plano. O parâmetro  $k$  é medido em unidades de  $M_P$  e os modos crescentes irão aparecer apenas quando  $k$  estiver perto de 1. As oscilações aqui significam que os autovalores com partes reais positiva e negativa possuem componentes imaginários. Para valores menores de  $k$  a amplitude aumenta grandemente, porém assintoticamente irá para zero (fora do gráfico).

que equivale à (4.19)<sup>5</sup>

$$(f_1 \square^2 + f_0 \square)h = 0. \quad (4.46)$$

Vamos analisar os resultados para os modos crescentes.

**Análise semi-analítica.** Para  $a_1 > 0$  encontramos soluções *run-away* para todos os valores de  $k$ .

Quando  $a_1 < 0$  para  $k < 0.90$  temos  $\Delta < 0$  e todos os autovalores são reais e negativos. Então teremos estabilidade para este caso. Para  $k > 0.90$  encontramos dois autovalores positivos. Portanto, iremos observar instabilidade, ou seja, soluções do tipo *run-away*.

**Análise numérica.** Usando o software *Mathematica* [66], encontramos que os modos crescentes surgem para  $k < 0.99$ . Os gráficos para o período inicial de tempo são mostrados na figura 4.1.

Podemos ver que para  $a_1 < 0$  existem modos crescentes quando a magnitude do vetor de onda é igual ou maior do que a massa de Planck. Para frequências muito menores de  $k$

<sup>5</sup>onde adotamos as notações  $h_k^l h_l^k = h^2$ ,  $h_k^l \dot{h}_l^k = h \dot{h}$  e  $\square h_k^l = \ddot{h}_k^l - \nabla^2 h_k^l$

não observamos fantasmas, provavelmente porque sua massa é muito grande. É importante para a nossa compreensão geral notar que para  $a_1 > 0$  existem modos exponencialmente crescentes para todos os valores de  $k$ . Neste caso, os modos sem massa (gráviton) são, na verdade, fantasmas. Então não há diferença de energia para gerar as soluções *run-away*. Obviamente existe uma lacuna enorme de energia para o caso  $a_1 < 0$ .

Podemos fazer aqui mais uma observação sobre o valor de  $k$ , a partir do qual são observados os modos crescentes. De acordo com a equação (4.19) este valor irá depender da razão  $M_P/\sqrt{-a_1}$ . Na análise apresentada acima, utilizamos  $a_1 = -1$  e, conseqüentemente, encontramos que o valor de  $k$  deve ser perto de  $M_P$ .

### 4.4.3 Soluções cosmológicas

Consideraremos agora a dinâmica das ondas gravitacionais no fundo cosmológico. Se mostra bastante útil apresentar a ação (4.15) utilizando diferente notação. Depois de realizar algumas integrações por partes, chegamos a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L, \quad (4.47)$$

onde

$$L = \sum_{s=0}^5 f_s L_s = \left( f_0 R + f_1 R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} + f_2 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + f_3 R^2 \right) \quad (4.48)$$

e os coeficientes  $f_{0,\dots,3}$  são definidos como

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{M_P^2}{16\pi}, \\ f_1 &= a_1 + a_2, \\ f_2 &= -2a_1 - 4a_2, \\ f_3 &= \frac{a_1}{3} + a_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Como já era de se esperar, o coeficiente  $a_2$  do termo topológico de Gauss-Bonnet não irá afetar nossas equações.

Vamos considerar a solução cosmológica de fundo  $g_{\mu\nu}^0 = \{1, -\delta_{ij} a^2(t)\}$ . Em seguida podemos chegar às expressões para as partes bilineares das lagrangianas parciais da

equação (4.48),

$$\begin{aligned}
L_0 &= a^3 f_0 \left[ h^2 \left( \frac{3}{2} \dot{H} + 3H^2 \right) + h\ddot{h} + 4Hh\dot{h} + \frac{3}{4} \dot{h}^2 - \frac{h}{4} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\
L_1 &= a^3 f_1 \left[ \dot{h}^2 (2H^2 - 2\dot{H}) - h\ddot{h} (4H^2 + 4\dot{H}) - h^2 (3\dot{H}^2 + 6\dot{H}H^2 + 6H^4) - \right. \\
&\quad - h\dot{h} (8H\dot{H} + 16H^3) + \ddot{h}^2 + 4H\dot{h}\ddot{h} + \left( \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right)^2 + 2\dot{h} \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} + \\
&\quad \left. + (H^2 h - 2H\dot{h}) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\
L_2 &= a^3 f_2 \left[ -h\dot{h} (12\dot{H}H + 24H^3) - \frac{\dot{h}^2}{2} \left( 5\dot{H} + \frac{18}{4} H^2 \right) - \right. \\
&\quad - h^2 (3\dot{H}^2 + 9\dot{H}H^2 + 9H^4) - h\ddot{h} (4\dot{H} + 6H^2) + \frac{\ddot{h}^2}{4} + \frac{3}{2} Hh\ddot{h} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\ddot{h} + 3H\dot{h} - \dot{H}h - 3H^2 h) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \\
L_3 &= -6a^3 f_3 (\dot{H} + 2H^2) \left[ h^2 \left( \frac{3}{2} \dot{H} + 3H^2 \right) + 2h\ddot{h} + \right. \\
&\quad \left. + 8Hh\dot{h} + \frac{3}{2} \dot{h}^2 - \frac{h}{2} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + \mathcal{O}(h^3), \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Onde omitimos os termos de ordem superior  $\mathcal{O}(h^3)$  na expressão (4.50). Tomando a derivada variacional com respeito a  $h_{\mu\nu}$ , chegaremos a equação para o modo tensorial<sup>6</sup>,

$$\begin{aligned}
&\left( 2f_1 + \frac{f_2}{2} \right) \ddot{\ddot{h}} + [3H(4f_1 + f_2)] \ddot{\ddot{h}} + \left[ 3H^2 \left( 6f_1 + \frac{f_2}{2} - 4f_3 \right) \right. \\
&+ 6\dot{H}(f_1 - f_3) + \frac{1}{2} f_0 \left. \right] \ddot{\ddot{h}} - (4f_1 + f_2) \frac{\nabla^2 \ddot{\ddot{h}}}{a^2} \\
&+ \left[ -21H\dot{H} \left( \frac{1}{2} f_2 + 2f_3 \right) - \ddot{H} \left( \frac{3}{2} f_2 + 6f_3 \right) - 9H^3 (f_2 + 4f_3) + \frac{3}{2} Hf_0 \right] \dot{h} \\
&- H(4f_1 + f_2) \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} - \left[ (36\dot{H}H^2 + 18\dot{H}^2 + 24H\ddot{H} + 4\ddot{H}) (f_1 + f_2 + 3f_3) \right] h \\
&+ f_0 [2\dot{H} + 3H^2] h + [H^2(4f_1 + 4f_2 + 12f_3) \\
&+ 2\dot{H}(f_1 + f_2 + 3f_3) - \frac{1}{2} f_0] \frac{\nabla^2 h}{a^2} + \left( 2f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right) \frac{\nabla^4 h}{a^4} = 0. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Esta equação pode ser usada para diferentes soluções cosmológicas. A seguir iremos considerar os três exemplos olhados até aqui: expansão exponencial, radiação e matéria.

---

<sup>6</sup>Que é, na verdade, uma parte da equação mais complicada com correções quânticas que foi analisada em [29] e no capítulo anterior.

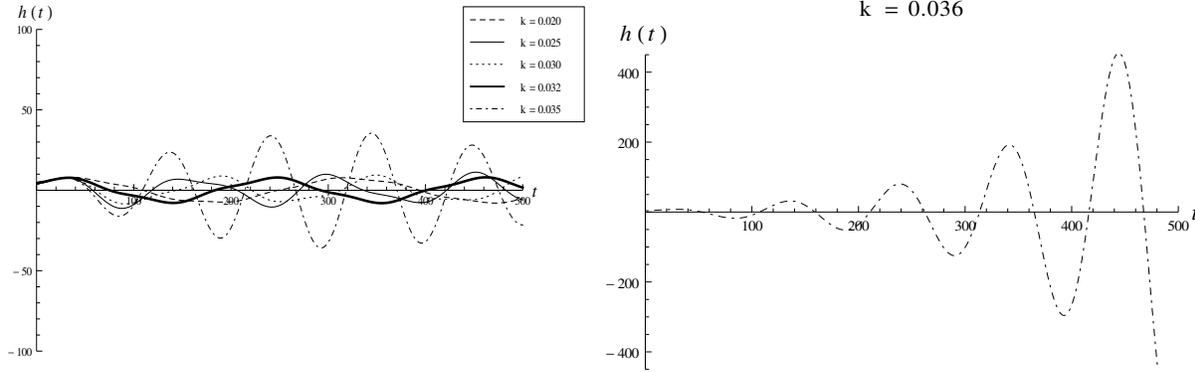


Figura 4.2: Gráfico para  $h(t)$  para o caso exponencial,  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ . A solução com modos crescentes aparece apenas quando temos  $k = 0.036$ .

## Expansão exponencial

**Análise semi-analítica.** Para  $a_1 > 0$  teremos soluções *run-away* para todos os valores de  $k$ .

No caso  $a_1 < 0$ , para  $k < 0.036$  encontramos  $\Delta < 0$  e todos os autovalores são reais e negativos, de forma que não observamos instabilidade neste caso. Para  $k > 0.036$  encontramos um autovalor positivo. Logo encontramos instabilidade (ou seja, soluções do tipo *run-away* para a expansão exponencial do Universo).

**Análise numérica.** O resultado descrito acima é perfeitamente confirmado através da análise numérica através do uso do software **Mathematica**. Para a expansão exponencial os modos crescentes surgem apenas quando temos  $k \geq 0.036$ , e é mostrado da figura 4.2. Para frequências menores não encontramos soluções explosivas.

## Radiação

**Análise semi-analítica.** Nós encontramos soluções do tipo *run-away* para todos os valores de  $k$  para radiação quando escolhemos  $a_1 > 0$ , exatamente como ocorrido para o caso da expansão exponencial.

Se escolhermos  $a_1 < 0$  encontramos  $\Delta < 0$  para  $k < 0.50$  e todos os autovalores são reais e negativos. Logo, teremos estabilidade para essa escala de frequência. Porém,

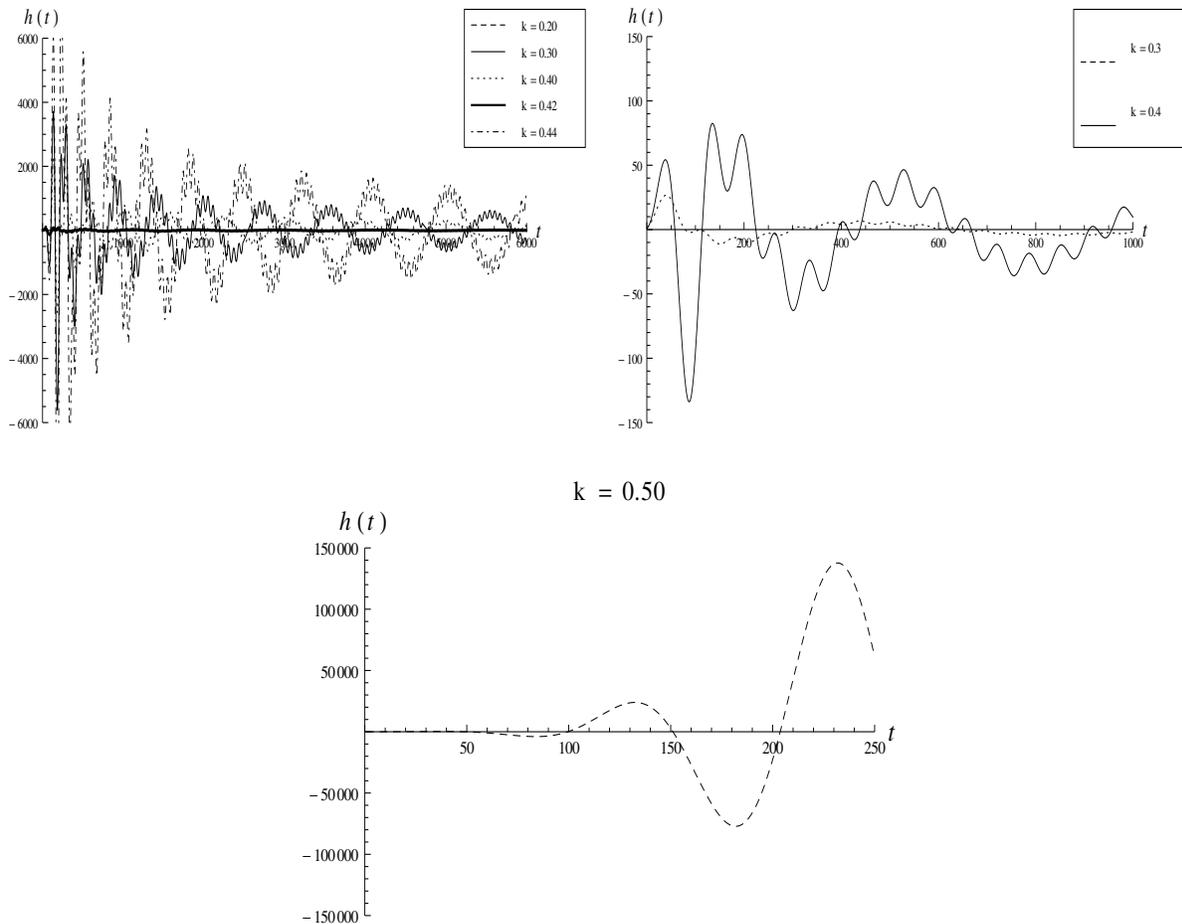


Figura 4.3: Gráfico para perturbação  $h(t)$  em função do tempo analisada para a radiação, quando  $a(t) = a_0 t^{1/2}$ . Iniciando de  $k \sim 0.50$  as solução se tornam “violentas”, como podemos observar no gráfico. Porém, abaixo deste valor não encontramos modos crescentes.

quando adotamos  $k > 0.50$  encontramos valores extremamente grandes para  $h(t)$  e dois autovalores positivos. Assim, como se espera, observamos modos crescentes.

**Análise numérica.** Mais uma vez os resultados encontrados no método semi-analítico concordam perfeitamente com a análise feita através do software **Mathematica**. Para o caso da radiação, como podemos ver na figura 4.3, encontramos soluções do tipo *run-away* apenas quando temos  $k \geq 0.44$ . Para valores de frequência menores não iremos observar este tipo de solução.

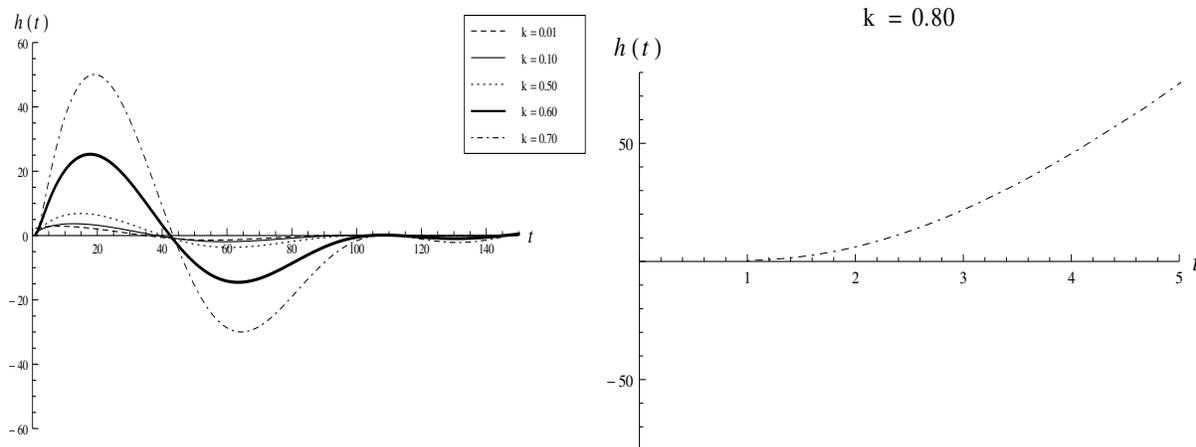


Figura 4.4: Gráfico para perturbação  $h(t)$  em função do tempo analisado para  $a(t) = a_0 t^{3/2}$  (Matéria).

## Matéria

**Análise semi-analítica.** Mais uma vez para  $a_1 > 0$  teremos soluções explosivas para todos valores de  $k$ . Para  $a_1 < 0$  teremos  $\Delta < 0$  para os valores de  $k$  até  $k = 0.80$  e todos os autovalores são reais e negativos, logo temos estabilidade. Porém para  $k > 0.80$  encontraremos dois autovalores positivos, o que indica a presença de modos crescentes.

**Análise numérica.** Através do uso do software *Mathematica* podemos ver que as soluções do tipo *run-away* surgem apenas quando temos frequências  $k < 0.8$ , de acordo totalmente com a análise semi-analítica. Os gráficos correspondentes podem ser visto na figura 4.4.

Podemos concluir que as soluções explosivas *run-away* ocorrem para valores menores para  $k$  no caso de expansão exponencial, seguido da radiação e, finalmente, para o matéria. Os valores marginais satisfazem então a desigualdade,

$$k_{run-away}^{\text{Inflação}} < k_{run-away}^{\text{Radiação}} < k_{run-away}^{\text{Matéria}} \quad (4.52)$$

No entanto, em todos os casos, os modos crescentes surgem apenas quando temos  $k$  perto da escala de Planck, para  $a_1$  negativo.

#### 4.4.4 Teoria super-renormalizável

Para verificarmos o nosso entendimento da relação entre o *gap* de energia para a solução run-away e a presença de fantasmas massivos não-físicos com a massa na ordem de Planck, vamos considerar o exemplo mais simples da teoria super-renormalizável de gravitação (4.7), através da inclusão de termos de próxima ordem comparados com a teoria com derivadas de quarta ordem,

$$S = S_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 R_{\mu\nu}^2 + a_2 R^2 + \dots \right. \\ \left. + b_1 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + b_2 R \square R + b_{4,5,\dots} \mathcal{O}(R^3) + \dots + b_{3,4,\dots} \mathcal{O}(R^3) \right\}. \quad (4.53)$$

Como já mencionamos anteriormente, esta teoria possui exatamente a mesma quantidade de fantasmas da teoria de quarta ordem (4.15), porque um grau de liberdade extra de spin-2 possui energia cinética negativa e, também, a massa na ordem de Planck. Em seguida, devemos esperar que as condições de estabilidade nas duas teorias (4.53) e (4.15) devam ser muito similares.

A consideração apresentada acima é válida para a estrutura de polos (no setor de spin-2) de acordo com

$$G_2(k) = \frac{A_0}{k^2} + \frac{A_1}{k^2 + m_1^2} + \frac{A_2}{k^2 + m_2^2}, \quad (4.54)$$

com as massas reais dos polos crescendo,

$$0 < m_1^2 < m_2^2. \quad (4.55)$$

Neste caso temos  $A_0 > 0$  e  $A_2 > 0$ , quando  $A_1 < 0$ , de acordo com a equação (4.9). Esta característica indica que a primeira partícula massiva, com sinal negativo de  $a_1$ , será um fantasma, enquanto a segunda partícula massiva, com um sinal positivo de  $A_2$ , será apenas uma partícula de spin-2 positivamente definida com grande massa. Do lado físico a presença de uma partícula extra não poderá conduzir à instabilidade extra e é exatamente isso que temos a intenção de verificar aqui.

A primeira pergunta que podemos fazer é como fornecer esta estrutura de polos. Vamos estabelecer primeiro as condições necessárias para os coeficientes  $a_1$  e  $b_1$  na ação. Fazendo

a expansão  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , podemos facilmente obter os termos bilineares desta ação (apenas spin-2, obviamente) na forma

$$S_2^{(2)} = \int d^4x h_{\mu\nu} \left( \frac{M_P^2}{64\pi} \square - \frac{a_1}{2} \square^2 - \frac{b_1}{2} \square^3 \right) h_{\mu\nu}. \quad (4.56)$$

Para o propagador inverso encontramos a expressão

$$G_6^{-1}(k) = \frac{b_1}{2} k^2 \left( k^4 - \frac{a_1}{b_1} k^2 - \frac{M_P^2}{32\pi b_1} \right). \quad (4.57)$$

Novamente podemos fazer duas observações relevantes neste momento. Primeiro, se quisermos obter o gráviton com energia positiva o sinal de  $b_1$  deve ser positivo. Isso já está claro a partir de (4.56). Em segundo lugar, se quisermos a massa de Planck como o único parâmetro de definição de escala da teoria devemos tomar o coeficiente  $b_1$  como  $b_1 = B_1/M_P^2$ , com  $B_1$  sendo um parâmetro adimensional.

Com estas opções, chegamos a seguinte representação:

$$G_6^{-1}(k) = \frac{b_1}{2} k^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_2^2), \quad (4.58)$$

onde

$$m_{1/2}^2 = M_P^2 \left[ \frac{a_1}{2B_1} \mp \sqrt{\frac{1}{32\pi B_1} + \frac{a_1^2}{4B_1^2}} \right]. \quad (4.59)$$

Obviamente devemos escolher (para obtermos a estrutura de polos de (4.54)) o sinal positivo de  $a_1$ , que é oposto ao do caso de quatro derivadas. Além disso, é necessária a

$$a_1^2 > \frac{B_1}{8\pi} \quad (4.60)$$

para termos polos reais positivos para o propagador. É óbvio que todas estas condições podem ser satisfeitas se escolhermos, por exemplo,  $a_1 = B_1 = 1$ . E esta será a nossa escolha para a teoria analisada. Vamos explorar a dinâmica das perturbações gravitacionais (da mesma forma como feito anteriormente) no caso plana. A escolha do fundo plano é bastante natural, uma vez que é a mais simples e, portanto, podemos evitar complicações na comparação dos limites de estabilidade para as teorias (4.53) e (4.15).

A análise da estabilidade irá ocorrer da mesma forma que fizemos para o caso das derivadas de quarta ordem, e podemos ir diretamente para os resultados.

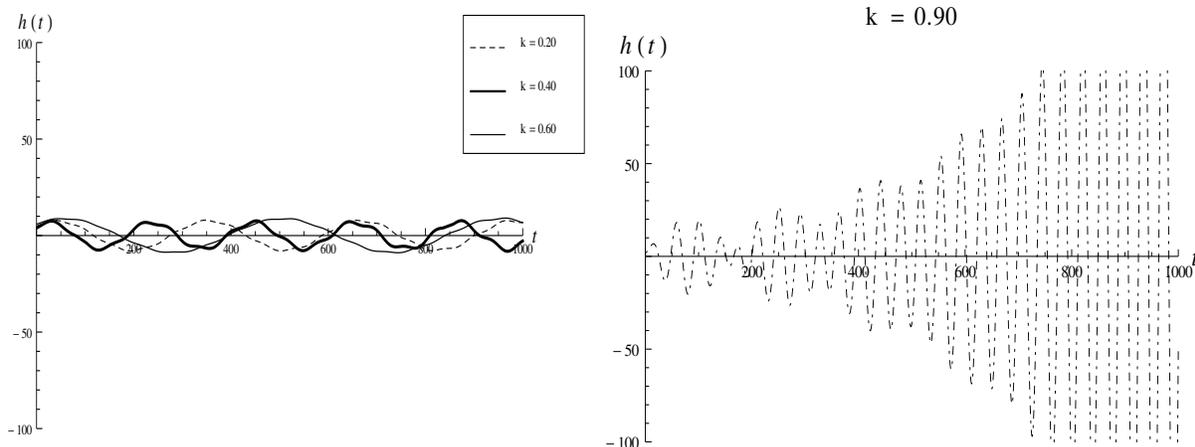


Figura 4.5: Mais uma vez, os modos crescentes surgem apenas quando estamos próximos da escala de Planck.

**Análise semi-numérica.** Se escolhermos  $b_1 < 0$  iremos encontrar, para  $k < 0.90$ , que  $\Delta < 0$  e todos os autovalores são reais e negativos. Logo, teremos estabilidade para este caso. Para  $k > 0.90$  encontramos dois autovalores complexos com partes reais positivas, o que indica instabilidade. Para  $a_1 > 0$  obtemos as soluções do tipo *run-away* para todos os valores de  $k$ .

**Análise numérica.** Novamente, como ocorreu nos últimos casos, o método semi-analítico está em perfeita concordância com o método numérico. Em ambos os casos existem modos crescentes quando temos  $k \geq 0.90$ . Para a equação (4.58) o gráfico é mostrado na figura 4.5. O comportamento das perturbações aqui se parece muito com o encontrada no caso da teoria (4.15).

## 4.5 Considerações sobre resultados obtidos

Neste capítulo consideramos a estabilidade de teorias de gravitação com derivadas de ordem superior sob a parte independente de calibre de perturbações métricas.

Encontramos que, pelo menos no caso das soluções cosmológicas, existe *sim* estabilidade. Devido à semelhança com a situação geral, como descrito anteriormente, podemos ter a esperança do mesmo acontecer para qualquer solução clássica. As perturbações que

utilizamos foram tomadas ao nível linear, mas sobre a métrica de fundo não-trivial. Por esse motivo (e de acordo com os teoremas conhecidos [117]) a estabilidade linear deve ser condição suficiente para a estabilidade, mesmo para além da aproximação linear. Isso quando temos a amplitude de perturbações iniciais suficientemente pequena.

---

# Considerações finais

---

*“The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds the most discoveries, is not ‘Eureka!’ (I found it!) but ‘That’s funny...’ ”*

**Isaac Asimov**

Na primeira parte desta tese mostramos uma forma de modificação clássica para a gravitação, as conhecidas teorias  $f(R)$ . Dentro desta perspectiva de modificação clássica consideramos a representação tensorial-multiescalar para vários tipos de ações gravitacionais. Apresentamos assim um procedimento simples de fazer a equivalência entre teorias  $f$  e teorias multiescalares. Mostramos também a possibilidade de fixar o termo de constante cosmológica, que irá independe da representação utilizada, como era de se esperar. Essa abordagem se mostra muito interessante, podendo servir para mapear também algumas teorias com correções quânticas.

Em seguida usamos a ação induzida pela anomalia para explorar o comportamento de perturbações tensoriais e, especialmente, para verificar a estabilidade das soluções cosmológicas clássicas com respeito a estas perturbações. A nossa consideração principal foi baseada na obtenção explícita da equação das ondas gravitacionais na teoria com correções quânticas induzidas pela anomalia e depois o uso de métodos analíticos e numéricos para

realizar a análise detalhada destas equações. A principal conclusão do nosso trabalho é que as condições de estabilidade estão, essencialmente, relacionadas com o sinal do termo Weyl-quadrado na ação *clássica* do vácuo e não se manifesta qualquer dependência com relação às contribuições quânticas. A explicação qualitativa deste resultado é que a ação induzida pela anomalia possui uma “estrutura” que a impede de dar “contribuições” na equação linear para perturbações tensoriais. Porém devemos notar que a situação pode ser muito diferente para as perturbações de densidade.

Adiante passamos ao estudo da teoria com derivadas superiores (no esquema puramente clássico) e obtivemos que os fantasmas se manifestam na teoria apenas quando estamos em uma escala energética próxima da escala de Planck. Depois dos resultados obtidos até aqui, principalmente mostrados nos dois últimos capítulos (especialmente o último), podemos concluir esta tese fazendo duas perguntas naturais a respeito desta situação.

Em primeiro lugar, como já mencionado, qualquer tipo de solução clássica não está, obviamente, protegida pela conservação de energia a partir do processo no qual um fantasma massivo e uma grande quantidade de grávitons são criados ao mesmo tempo. Assim, a primeira questão é como se pode conciliar esse fato com as propriedades de estabilidade? Até o momento não temos nenhuma resposta definitiva a esta questão. Ao mesmo tempo, a intuição física nos diz que a situação em que precisamos acumular uma densidade de energia da ordem da escala de Planck para grávitons na vizinhança de um certo ponto do espaço-tempo (onde o fantasma deve ser criado) significa que estamos nos movendo para a física da escala de energia de Planck. Tanto quanto pretendemos obter uma teoria de Gravitação Quântica consistente na escala de energia de algumas ordens além da  $M_P$ , há uma esperança de alcançar uma solução consistente para esta discrepância. Por exemplo, em trabalhos recentes [123] podemos encontrar uma discussão sobre os possíveis limites para o número de ocupação de grávitons em um campo gravitacional. Pode acontecer que esse limite seja muito útil para a compreensão da situação da criação de fantasmas do vácuo em Gravitação Quântica com derivadas de ordem superior. Além disso, não devemos descartar que a solução do problema pode ser alcançada até mesmo para a escala de energia de Planck.

Em segundo lugar as soluções cosmológicas são suficientemente gerais para obtermos

conclusões confiáveis? Em nossa opinião, a resposta é negativa. Estamos lidando com estas soluções principalmente pelo fato delas serem as mais simples de lidar, e onde as técnicas de perturbação são melhor desenvolvidas. Ao mesmo tempo seria extremamente interessante explorar, usando a abordagem efetiva, a estabilidade de buracos negros com métrica estática (onde temos resultados contrários: [87] e [88]). Outro estudo muito interessante seria obter resultados sobre a estabilidade para a métrica de Kerr.

Finalmente, devemos notar atentamente que *um único exemplo* concreto de solução fisicamente instável relevante na teoria com derivadas superiores significaria que a situação com (in)estabilidade do vácuo nessa teoria torna-se definitivamente negativa. Isto levaria à necessidade de alterações dramáticas do nosso entendimento, tendo em vista a grande relevância das derivadas de ordem superior, especialmente para a quantização de campos de matéria no fundo curvo a partir da abordagem semiclássica da gravidade. No entanto, após as considerações apresentadas nesta tese e nas referências aqui apresentadas, temos a esperança de que a situação com derivadas superiores em uma teoria baseada na escala única de Planck possa ser obtida num futuro próximo.



---

# Apêndices

---

## Raízes da equação polinomial de quarta ordem

Aqui iremos apresentar a análise do polinômio de quarta ordem usado no Capítulo 4. Considerando o polinômio,

$$\lambda^4 + d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda^1 + d_0 = 0. \quad (4.61)$$

Vamos seguir o método clássico de Cardano. Para eliminarmos o termo cúbico fazemos a seguinte substituição  $\lambda = x - \frac{d_3}{4}$ . Temos

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \quad (4.62)$$

onde

$$p = \frac{d_3^2}{8} - \frac{d_3^2}{2} + d_2, \quad (4.63)$$

$$q = \frac{d_3^2}{8} - \frac{d_3d_2}{2} + d_1, \quad (4.64)$$

$$r = -\frac{3d_3^4}{256} + \frac{d_2d_3^2}{16} - \frac{d_2d_1}{4} + d_0. \quad (4.65)$$

Agora reescrevendo (4.62) como

$$x^4 + px^2 = -qx - r$$

completando o quadrado e adicionando o termo  $y$ . Obtemos então,

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0, \quad (4.66)$$

onde

$$\alpha = \frac{20}{8} p, \quad (4.67)$$

$$\beta = 2p^2 - r, \quad (4.68)$$

$$\gamma = \frac{1}{8}(q^2 - 4p^3 + 4pr). \quad (4.69)$$

Para podermos eliminar o termo de segunda ordem em (4.66), iremos fazer a seguinte substituição:  $y = z + m$ , onde  $m = -\alpha/2$ .

$$z^3 + \xi_1 z + \xi_2 = 0, \quad (4.70)$$

sendo

$$\xi_1 = -\frac{\alpha}{3} + \beta, \quad (4.71)$$

$$\xi_2 = \frac{2\alpha^3}{27} + \frac{3\gamma - \beta\gamma}{3}. \quad (4.72)$$

Para a equação (4.70) já podemos aplicar a fórmula de Cardano e assim obter

$$\Delta = \xi_1 + \frac{4}{27} \xi^3 = 4 \left[ \left( \frac{\xi_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\xi_2}{3} \right)^3 \right]. \quad (4.73)$$

A solução é,

$$z = \sqrt[3]{-\frac{\xi_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{\xi_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{3}\right)^3}}, \quad (4.74)$$

ou

$$z = \sqrt[3]{-\frac{\xi_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{\xi_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}. \quad (4.75)$$

Sabendo os valores de  $z$ ,  $m$ ,  $\alpha$  e  $p$ , é possível encontrar as raízes de  $\lambda$ .

## Expansão em segunda ordem para CNR

A expansão para a métrica possui a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\beta}(y) &= \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}_{\mu\alpha\nu\beta} y^\mu y^\nu - \frac{1}{3!} \overset{\circ}{R}_{\mu\alpha\nu\beta;\sigma} y^\mu y^\nu y^\sigma \\
 &+ \frac{1}{5!} \left( \frac{16}{3} \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{\cdot\mu\alpha\nu} \overset{\circ}{R}_{\lambda\rho\beta\sigma} - 6 \overset{\circ}{R}_{\alpha\mu\beta\nu;\rho\sigma} \right) y^\mu y^\nu y^\rho y^\sigma + \dots
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Podemos sempre escrever a métrica num ponto de expansão para ser do tipo Minkowski,  $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Para os símbolos de Christoffel teremos,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda &\approx \frac{2}{3} \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{(\alpha\beta)\nu} y^\nu \\
 &+ \frac{1}{8} \left( \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{\mu\nu\beta;\alpha} + \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{\alpha\nu\beta;\mu} + 2 \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{\beta\mu\alpha;\nu} \right) y^\mu y^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Vamos apresentar os resultados da expansão para  $\square h^{\alpha\beta}$ . Iremos identificar por  $A^{(0)}$  a ordem da expansão em  $y^\mu$  para a quantidade  $A$ , de tal forma que

$$\square h^{\alpha\beta} = (\square h^{\alpha\beta})^{(0)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(1)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(2)} + \dots \tag{4.78}$$

O cálculo direto nos levará aos seguintes resultados em ordens zero e um para  $y^\mu$ :

$$(\square h^{\alpha\beta})^{(0)} = \eta^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\nu\lambda\mu} h^{\lambda\beta} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\nu\lambda\mu} h^{\alpha\lambda} \right), \tag{4.79}$$

e

$$\begin{aligned}
 (\square h^{\alpha\beta})^{(1)} &= \eta^{\mu\nu} \left[ -\frac{2}{3} \left( \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\nu\lambda\chi} + \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\lambda\nu\chi} \right) \partial_\mu h^{\lambda\beta} - \frac{2}{3} \left( \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\nu\lambda\chi} + \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\lambda\nu\chi} \right) \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\chi\mu\lambda;\nu} + \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\nu\mu\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}^\alpha{}_{\lambda\chi\nu;\mu} \right) h^{\lambda\beta} + \frac{2}{3} \overset{\circ}{R}^\lambda{}_{\mu\nu\chi} \partial_\lambda h^{\alpha\beta} \\
 &\left. + \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\chi\mu\lambda;\nu} + \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\nu\mu\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}^\beta{}_{\lambda\chi\nu;\mu} \right) h^{\alpha\lambda} \right] y^\chi,
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

onde o “ponto e vírgula” indica a derivada covariante tomada no ponto  $P$ . Em seguida

para segunda ordem em  $y^\mu$  encontramos

$$\begin{aligned}
(\square h^{\alpha\beta})^{(2)} &= \frac{1}{3} \overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\nu{}^\chi{}_\omega \left\{ \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} (\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\nu\lambda\mu} - \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\lambda\nu\mu}) h^{\lambda\beta} - \frac{1}{3} (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\nu\lambda\mu} - \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\lambda\nu\mu}) h^{\alpha\lambda} \right\} y^\chi y^\omega \\
&+ \eta^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{8} (\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\chi\omega\lambda;\nu} + \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\nu\omega\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\lambda\chi\nu;\omega}) \partial_\mu h^{\lambda\beta} \right. \\
&+ \frac{1}{8} (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\chi\omega\lambda;\nu} + \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\nu\omega\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\lambda\chi\nu;\omega}) \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \\
&- \frac{1}{8} (\overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\chi\omega\lambda;\mu} + \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\mu\omega\nu;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\nu\chi\mu;\omega}) \partial_\lambda h^{\alpha\beta} \\
&- \frac{2}{9} \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\mu\nu\chi} [(\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\lambda\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\tau\lambda\omega}) h^{\tau\beta} + (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\lambda\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\tau\lambda\omega}) h^{\alpha\tau}] \\
&+ \frac{1}{8} (\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\chi\omega\lambda;\mu} + \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\mu\omega\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\lambda\chi\mu;\omega}) \partial_\nu h^{\lambda\beta} \\
&+ \frac{1}{9} (\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\mu\lambda\chi} + \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\lambda\mu\chi}) [(\overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\nu\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\tau\nu\omega}) h^{\tau\beta} + (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\nu\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\tau\nu\omega}) h^{\lambda\tau}] \\
&+ \frac{1}{9} (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\mu\lambda\chi} + \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\lambda\mu\chi}) [(\overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\nu\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\tau\nu\omega}) h^{\alpha\tau} + (\overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\nu\tau\omega} + \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_{\tau\nu\omega}) h^{\lambda\tau}] \\
&+ \left. \frac{1}{8} (\overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\chi\omega\lambda;\mu} + \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\mu\omega\lambda;\chi} + 2 \overset{\circ}{R}{}^\beta{}_{\lambda\chi\mu;\omega}) \partial_\nu h^{\alpha\lambda} \right\} y^\chi y^\omega \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Juntando, teremos,

$$\square h^{\alpha\beta} = (\square h^{\alpha\beta})^{(0)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(1)} + (\square h^{\alpha\beta})^{(2)} + \dots, \tag{4.82}$$

onde os pontos indicam os termos de ordens superiores em  $y^\mu$  e termos de ordens superiores no tensor de curvatura e suas derivadas covariantes no ponto  $P$ .

---

## Bibliografia

---

- [1] I. S. Newton, “*Philosophiae naturalis principia mathematica*”. **1687**.
- [2] B. Carroll e D. Ostlie, “*An introduction to modern astrophysics*”. Addison-Wesley, 1 ed., **1996**.
- [3] J. G. Galle, “*Account of the discovery of Le Verrier’s planet Neptune, at Berlin, Sept. 23, 1846,*” MNRAS 7 (**Nov., 1846**) 153.
- [4] U. Le Verrier, “*Théorie du mouvement de mercure, in Annales de l’Observatoire de Paris*”, vol. 5, p. 1. **1859**.
- [5] A. Einstein, “*Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie,*” *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.* 47 (1915) 831-839. Tradução para o inglês feita por B. Doyle em *The Collected Papers of Albert Einstein : The Berlin Years: Writings, 1914-1917*.
- [6] F. Dyson, A. Eddington, e C. Davidson, “*A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919*”, *Philos. T. R. Soc. Lond.* 220 (**1920**) 291-333.

- [7] A. Einstein, “*Die Feldgleichungen der Gravitation,*” *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss,* (1915) 844-847. Tradução para inglês feita por A. Engel em *The Collected Papers of Albert Einstein : The Berlin Years: Writings, 1914-1917.*
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, e J. A. Wheeler, “*Gravitation*”. W. H. Freeman, New York, **1973**.
- [9] A. A. Starobinsky, “*A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,*” *Phys. Lett. B* **91** (1980) 99.
- [10] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, “*An Introduction to quantum field theory,*” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [11] A. Dobado, A. Gomez-Nicola, A. L. Maroto e J. R. Pelaez, “*Effective lagrangians for the standard model,*” N.Y., Springer-Verlag, 1997. (Texts and Monographs in Physics)
- [12] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, “*f(R) Theories Of Gravity,*” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451 [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].  
A. De Felice e S. Tsujikawa, “*f(R) theories,*” *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3 [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].
- [13] J. O’Hanlon, J. O’ Hanlon, “*Intermediate-range gravity - a generally covariant model,*” *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 137.
- [14] P. Teyssandier e P. .Tourrenc, “*The Cauchy problem for the R+R\*\*2 theories of gravity without torsion,*” *J. Math. Phys.* **24** (1983) 2793.
- [15] T. Chiba, “*1/R gravity and scalar - tensor gravity,*” *Phys. Lett. B* **575** (2003) 1 [astro-ph/0307338].
- [16] B. Whitt, “*Fourth Order Gravity as General Relativity Plus Matter,*” *Phys. Lett. B* **145** (1984) 176.  
K. -i. Maeda, “*Towards the Einstein-Hilbert Action via Conformal Transformation,*” *Phys. Rev. D* **39** (1989) 3159.

- J. D. Barrow e S. Cotsakis, “*Selfregenerating inflationary universe in higher order gravity in arbitrary dimension,*” Phys. Lett. B **258** (1991) 299.
- G. Magnano e L. M. Sokolowski, “*On physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general relativistic selfgravitating scalar field,*” Phys. Rev. D **50** (1994) 5039 [gr-qc/9312008].
- [17] D. Wands, “*Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action,*” Class. Quant. Grav. **11** (1994) 269 [gr-qc/9307034].
- [18] S. Gottlober, H. J. Schmidt e A. A. Starobinsky, “*Sixth Order Gravity and Conformal Transformations,*” Class. Quant. Grav. **7** (1990) 893.
- [19] S. 'i. Nojiri and S. D. Odintsov, “*Modified gravity with  $\ln R$  terms and cosmic acceleration,*” Gen. Rel. Grav. **36** (2004) 1765 [hep-th/0308176].
- G. Cognola, E. Elizalde, S. 'i. Nojiri, S. D. Odintsov e S. Zerbini, “*One-loop  $f(R)$  gravity in de Sitter universe,*” JCAP **0502** (2005) 010 [hep-th/0501096].
- [20] A. De Felice e T. Suyama, “*Vacuum structure for scalar cosmological perturbations in Modified Gravity Models,*” JCAP **0906** (2009) 034 [arXiv:0904.2092 [astro-ph.CO]].
- [21] A. De Felice e T. Tanaka, “*Inevitable ghost and the degrees of freedom in  $f(R,G)$  gravity,*” Prog. Theor. Phys. **124** (2010) 503 [arXiv:1006.4399 [astro-ph.CO]].
- [22] I. L. Shapiro, “*Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach,*” Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001 [arXiv:0801.0216 [gr-qc]].
- [23] T. P. Sotiriou, “*Constraining  $f(R)$  gravity in the Palatini formalism,*” Class. Quant. Grav. **23** (2006) 1253 [gr-qc/0512017].
- [24] V. Faraoni, E. Gunzig e P. Nardone, “*Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology,*” Fund. Cosmic Phys. **20** (1999) 121 [gr-qc/9811047].
- [25] D. I. Kaiser, “*Conformal Transformations with Multiple Scalar Fields,*” Phys. Rev. D **81** (2010) 084044 [arXiv:1003.1159 [gr-qc]].

- [26] D.M. Gitman e I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer Series in Nuclear and Particle Physics, 1990).
- [27] M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems* (Princeton, 1992).
- [28] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, “*Quantum Fields in Curved Space.*”
- [29] J. C. Fabris, A. M. Pelinson, F. de O.Salles e I. L. Shapiro, “*Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections,*” JCAP **1202** (2012) 019 [arXiv:1112.5202 [gr-qc]].
- [30] G. 't Hooft e M. J. G. Veltman, “*One loop divergencies in the theory of gravitation,*” Annales Poincare Phys. Theor. A **20** (1974) 69.
- [31] M. J. G. Veltman, “*Quantum Theory of Gravitation,*” Conf. Proc. C **7507281** (1975) 265.
- [32] L. H. Ford, “*Quantum field theory in curved space-time,*” In \*Campos do Jordao 1997, Particles and fields\* 345-388 [gr-qc/9707062].
- [33] B. S. DeWitt, “*Dynamical Theory Of Groups And Fields,*” IN \*APPELQUIST, T. (ED.) ET AL.: MODERN KALUZA-KLEIN THEORIES\* 114. (IN\* DEWITT, C. (ED.) ET AL.: RELATIVITY GROUPS AND TOPOLOGY\* 725)
- [34] T. Jacobson, “*Introduction to quantum fields in curved space-time and the Hawking effect,*” gr-qc/0308048.
- [35] I. L. Shapiro, “*An Overview of the anomaly induced inflation,*” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127** (2004) 196 [hep-ph/0311307].
- [36] R. Utiyama, B. S. DeWitt, “*Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*”, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
- [37] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).

- [38] K. S. Stelle, “*Classical Gravity With Higher Derivatives*,” Gen. Rel. Grav. **9**, 353 (1978).
- [39] M. J. Duff, “*Observations On Conformal Anomalies*,” Nucl. Phys. **B125** (1977) 334; S. Deser, M. J. Duff e C. Isham, “*Nonlocal Conformal Anomalies*”, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.
- [40] A. A. Starobinski, Phys.Lett. **91B** (1980) 99; *Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational De Sitter Stage and its Observational Consequences*, Proceedings of the second seminar ”Quantum Gravity”, pp. 58-72 (Moscow, 1982); JETP Lett. **30** (1979) 719; **34** (1981) 460; Let.Astr.Journ. (in Russian), **9** (1983) 579.
- [41] S. M. Christensen e S. A. Fulling, “*Trace Anomalies and the Hawking Effect*,” Phys. Rev. D **15** (1977) 2088.
- [42] R. Balbinot, A. Fabbri e I. L. Shapiro, “*Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*,” Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1494 Nucl. Phys. **B559** (1999) 301. “*Vacuum polarization in Schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions*,” Nucl. Phys. B **559** (1999) 301
- [43] P. R. Anderson, E. Mottola, R. Vaulin, “*Stress Tensor from the Trace Anomaly in Reissner-Nordstrom Spacetimes*”, Phys.Rev. **D76** (2007) 124028; gr-qc/0707.3751.
- [44] S. W. Hawking, T. Hertog e H. S. Reall, “*Trace anomaly driven inflation*,” Phys. Rev. D **63** (2001) 083504 [hep-th/0010232].
- [45] J. C. Fabris, A. M. Pelinson e I. L. Shapiro, “*On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*,” Nucl. Phys. B **597**, 539 (2001) [Erratum-ibid. B **602**, 644 (2001)] [arXiv:hep-th/0009197].
- [46] E. V. Gorbar, I. L. Shapiro, “*Renormalization Group and Decoupling in Curved Space*.” JHEP **02** (2003) 021; “*Renormalization Group and Decoupling in Curved Space: II. The Standard Model and Beyond*.” JHEP **06** (2003) 004; “*Renormalization*

*Group and Decoupling in Curved Space: III. The Case of Spontaneous Symmetry Breaking*”, JHEP **02** (2004) 060.

- [47] T. W. B. Kibble e S. Randjbar-Daemi, “*Nonlinear Coupling of Quantum Theory and Classical Gravity*,” J. Phys. A **13** (1980) 141.  
S. Randjbar-Daemi, “*Stability of the Minkowski Vacuum in the Renormalized Semiclassical Theory of Gravity*,” J. Phys. A **14** (1981) L229.
- [48] B. Biran, R. Brout e E. Gunzig, “*On The Stability And Instability Of Minkowski Space In The Presence Of Quantized Matter Fields*,” Phys. Lett. B **125** (1983) 399.
- [49] D. J. Gross, M. J. Perry e L. G. Yaffe, “*Instability of Flat Space at Finite Temperature*,” Phys. Rev. D **25** (1982) 330.
- [50] P. R. Anderson, C. Molina-Paris e E. Mottola, “*Linear response, validity of semiclassical gravity, and the stability of flat space*,” Phys. Rev. D **67** (2003) 024026 [gr-qc/0209075].
- [51] G. Perez-Nadal, A. Roura e E. Verdaguer, “*Stability of de Sitter spacetime under isotropic perturbations in semiclassical gravity*,” Phys. Rev. D **77** (2008) 124033 [arXiv:0712.2282 [gr-qc]].  
G. Perez-Nadal, A. Roura e E. Verdaguer, “*Backreaction from non-conformal quantum fields in de Sitter spacetime*,” Class. Quant. Grav. **25** (2008) 154013 [arXiv:0806.2634 [gr-qc]].  
B. L. Hu, A. Roura e E. Verdaguer, “*Stability of semiclassical gravity solutions with respect to quantum metric fluctuations*,” Int. J. Theor. Phys. **43** (2004) 749 [gr-qc/0508010].  
A. Roura e E. Verdaguer, “*Cosmological perturbations from stochastic gravity*,” Phys. Rev. D **78** (2008) 064010 [arXiv:0709.1940 [gr-qc]].
- [52] C. P. Burgess, R. Holman, L. Leblond e S. Shandera, “*Breakdown of Semiclassical Methods in de Sitter Space*,” JCAP **1010** (2010) 017 [arXiv:1005.3551 [hep-th]].

- [53] M. V. Fischetti, J. B. Hartle e B. L. Hu, “*Quantum Effects in the Early Universe. 1. Influence of Trace Anomalies on Homogeneous, Isotropic, Classical Geometries,*” Phys. Rev. D **20** (1979) 1757.
- [54] V. F. Mukhanov e G. V. Chibisov, “*Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. (In Russian),*” JETP Lett. **33** (1981) 532 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1981) 549].
- [55] I. L. Shapiro e J. Sola, “*Massive fields temper anomaly induced inflation,*” Phys. Lett. B **530** (2002) 10 [hep-ph/0104182].  
I. L. Shapiro, “*The Graceful exit from the anomaly induced inflation: Supersymmetry as a key,*” Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 1159 [hep-ph/0103128].
- [56] P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], arXiv:1403.3985 [astro-ph.CO].
- [57] A. M. Pelinson, I. L. Shapiro e F. I. Takakura, “*On the stability of the anomaly-induced inflation,*” Nucl. Phys. B **648** (2003) 417.
- [58] R. J. Riegert, “*A Nonlocal Action for the Trace Anomaly,*” Phys. Lett. B **134** (1984) 56.
- [59] E. S. Fradkin e A. A. Tseytlin, “*Conformal Anomaly in Weyl Theory and Anomaly Free Superconformal Theories,*” Phys. Lett. B **134** (1984) 187.
- [60] S. G. Mamaev e V. M. Mostepanenko, “*Isotropic Cosmological Models Determined By Vacuum Quantum Effects,*” Sov. Phys. JETP **51** (1980) 9 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **78** (1980) 20].
- [61] A. Vilenkin, “*Classical and Quantum Cosmology of the Starobinsky Inflationary Model,*” Phys. Rev. D **32** (1985) 2511.
- [62] I. L. Shapiro e A. G. Zhukhsenaev, “*Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem,*” Phys. Lett. B **324** (1994) 286.
- [63] P. O. Mazur e E. Mottola, “*Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies,*” Phys. Rev. D **64** (2001) 104022 [hep-th/0106151].

- E. Mottola e R. Vaulin, “*Macroscopic Effects of the Quantum Trace Anomaly*,” Phys. Rev. D **74** (2006) 064004 [gr-qc/0604051].
- [64] A. M. Pelinson e I. L. Shapiro, A. M. Pelinson and I. L. Shapiro, “*On the scaling rules for the anomaly induced effective action of metric and electromagnetic field*,” Phys. Lett. B **694** (2011) 467 [arXiv:1005.1313 [hep-th]].
- [65] M. Gasperini, “*Tensor perturbations in high curvature string backgrounds*,” Phys. Rev. D **56**, 4815 (1997)
- [66] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2013). S. Wolfram, MATHEMATICA, Version 9; [www.wolfram.com/mathematica/](http://www.wolfram.com/mathematica/).
- [67] M. Gasperini e G. Veneziano, “*The Pre - big bang scenario in string cosmology*,” Phys. Rept. **373** (2003) 1 [hep-th/0207130].
- [68] D. Larson *et al.*, “*Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*,” Astrophys. J. Suppl. **192** (2011) 16 [arXiv:1001.4635 [astro-ph.CO]].
- [69] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], “*Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*,” Astrophys. J. Suppl. **192** (2011) 18 [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [70] J. Dunkley *et al.* [WMAP Collaboration], “*Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP data*,” Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 306 [arXiv:0803.0586 [astro-ph]].
- [71] <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~robbers/cmbeasy/>.
- [72] M. Doran, “*CMBEASY:: an Object Oriented Code for the Cosmic Microwave Background*,” JCAP **0510** (2005) 011 [arXiv:astro-ph/0302138].
- [73] M. Doran e C. M. Mueller, “*Analyze This! A Cosmological Constraint Package for cmbeasy*”, JCAP **0409** (2004) 003 [arXiv:astro-ph/0311311].

- [74] S. Deser e P. van Nieuwenhuizen, “*One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields*”, Phys. Rev. **D10** (1974) 401; “*Nonrenormalizability of the Quantized Dirac-Einstein System*”, Phys. Rev. **D10** (1974) 411; S. Deser, H. Sh. Tsao e P. van Nieuwenhuizen, “*One Loop Divergences of the Einstein Yang-Mills System*”, Phys. Rev. **D10** (1974) 3337.
- [75] M. H. Goroff e A. Sagnotti, “*The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity*”, Nucl. Phys. **B266** (1986) 709.
- [76] K. S. Stelle, “*Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*”, Phys. Rev. **D16** (1977) 953.
- [77] M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersburg VI **4** (1985) 385.
- [78] M. J. G. Veltman, “*Unitarity and causality in a renormalizable field theory with unstable particles*”, Physica **29** (1963) 186.
- [79] E. Tomboulis, “*1/N Expansion and Renormalization in Quantum Gravity*”, Phys. Lett. **B70** (1977) 361; “*Renormalizability And Asymptotic Freedom In Quantum Gravity*”, Phys. Lett. **B97** (1980) 77; “*Unitarity In Higher Derivative Quantum Gravity*”, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1173.
- [80] A. Salam and J. A. Strathdee, “*Remarks on High-energy Stability and Renormalizability of Gravity Theory*,” Phys. Rev. D **18** (1978) 4480.
- [81] I. Antoniadis e E.T. Tomboulis, “*Gauge Invariance And Unitarity In Higher Derivative Quantum Gravity*”, Phys. Rev. **D33** (1986) 2756.
- [82] D. A. Johnston, “*Sedentary Ghost Poles In Higher Derivative Gravity*”, Nucl. Phys. **B297** (1988) 721.
- [83] S. W. Hawking e Th. Hertog, “*Living with ghosts*”, Phys. Rev. **D65** (2002) 103515
- [84] K. Hinterbichler, “*Theoretical Aspects of Massive Gravity*”, Rev. Mod. Phys. **84** (2012) 671, 710, arXiv: 1105.3735.

- [85] M. Jaccard, M. Maggiore e E. Mitsou, “*A non-local theory of massive gravity*”, Phys. Rev. **D88** (2013) 044033, arXiv: 1305.3034.
- [86] I. Antoniadis, E. Dudas e D. M. Ghilencea “*Living with ghosts and their radiative corrections*”, Nucl. Phys. **B767** (2007) 29, hep-th/0608094.
- [87] B. Whitt, “*Stability of Schwarzschild black holes in fourth-order gravity*”, Phys. Rev. **D32** (1985) 379.
- [88] Yu. S. Myung, “*Stability of Schwarzschild black holes in fourth-order gravity revisited*”, Phys. Rev. **D88** (2013) 024039, arXiv:1306.3725.
- [89] A. L. Maroto e I. L. Shapiro, “*On the inflationary solutions in higher derivative gravity with dilaton field,*” Phys. Lett. B **414** (1997) 34 [hep-th/9706179].
- [90] A. V. Toporensky e P. V. Tretyakov, “*De Sitter stability in quadratic gravity*”, Int. J. Mod. Phys. **D16** (2007) 1075, gr-qc/0611068.
- [91] N. Deruelle, M. Sasaki, Yu. Sendouda e A. Youssef “*Inflation with a Weyl term, or ghosts at work*”, JCAP **1103** (2011) 040, arXiv:1012.5202; “*Lorentz-violating vs ghost gravitons: the example of Weyl gravity*”, JHEP **1209** (2012) 009, arXiv:1202.3131.
- [92] Ph.D. Mannheim, “*Solution to the ghost problem in fourth order derivative theories*”, Found. Phys. **37** (2007) 532, hep-th/0608154.
- [93] V. I. Tkach, “*Towards Ghost-Free Gravity and Standard Model*”, Mod. Phys. Lett. **A27** (2012) 1250131, arXiv:1204.6523.
- [94] A. V. Smilga, “*Benign versus malicious ghosts in higher-derivative theories*”, Nucl. Phys. **B706** (2005) 598; “*Comments on the Dynamics of the Pais’Uhlenbeck Oscillator?*”, SIGMA **5** (2009) 017;  
V. V. Nesterenko, “*On the instability of classical dynamics in theories with higher derivatives*”, Phys. Rev. **D75** (2007) 087703, hep-th/0612265.

- [95] R. Woodard, *Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity*, Lect. Notes Phys. **720** (2007) 403.
- [96] J. B. Jimenez, E. Dio e R. Durrer, “*A longitudinal gauge degree of freedom and the Pais Uhlenbeck field*”, JHEP **1304** (2013) 030.
- [97] S. I. Kruglov, “*Higher Derivative Scalar Field Theory in the First Order Formalism*”, Annales Fond. Broglie **31** (2006) 343, hep-th/0606128.
- [98] J. Julve e M. Tonin, “*Quantum Gravity with Higher Derivative Terms*,” Nuovo Cim. B **46** (1978) 137.
- [99] E. S. Fradkin e A. A. Tseytlin, “*Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*,” Nucl. Phys. B **201** (1982) 469.
- [100] I. G. Avramidi e A. O. Barvinsky, “*Asymptotic Freedom In Higher Derivative Quantum Gravity*,” Phys. Lett. B **159** (1985) 269.  
 I. G. Avramidi, “*Asymptotic Behavior of the Quantum Theory of Gravity With Higher Order Derivatives. (In Russian)*,” Yad. Fiz. **44** (1986) 255.  
 I. G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity*, (Ph.D. thesis, Moscow University, 1986); [hep-th/9510140].
- [101] G. de Berredo-Peixoto e I.L. Shapiro, “*Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term*”, Phys. Rev. **D71** (2005) 064005, hep-th/0412249; “*Conformal quantum gravity with the Gauss-Bonnet term*”, Phys. Rev. **D70** (2004) 044024, hep-th/0307030.
- [102] “*Fixed points of higher derivative gravity*”, A. Codello e R. Percacci, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 221301, hep-th/0607128; “*Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*”, Annals Phys. **324** (2009) 414, arXiv:0805.2909.
- [103] A. A. Starobinsky, “*Relict Gravitation Radiation Spectrum and Initial State of the Universe. (In Russian)*”, JETP Lett. **30** (1979) 682 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**

- (1979) 719];
- A. A. Starobinsky, “*Evolution Of Small Excitation Of Isotropic Cosmological Models With One Loop Quantum Gravitation Corrections. (in Russian)*”, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 460;
- A. A. Starobinsky, “*The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy*”, Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.
- [104] I. L. Buchbinder, “*On Renormalization Group Equations in Curved Space-Time*”, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 393.
- [105] D. J. Toms, “*The Effective Action And The Renormalization Group Equation In Curved Space-Time*”, Phys. Lett. **B126** (1983) 37.
- [106] P. M. Lavrov e I. L. Shapiro, “*On the renormalization of gauge theories in curved space-time*”, Phys. Rev. **D81** (2010) 044026, arXiv:0911.4579.
- [107] S. W. Hawking, “*Black hole explosions,*” Nature **248** (1974) 30.  
S. W. Hawking, “*Particle Creation by Black Holes,*” Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199 [Erratum-ibid. **46** (1976) 206].
- [108] M. Asorey, J.L. López e I. L. Shapiro, “*Some remarks on high derivative quantum gravity*”, Int. Journ. Mod. Phys. **A12** (1997) 5711.
- [109] P. Hořava, “*Quantum gravity at a Lifshitz point*”, Phys. Rev. **D79** (2009) 084008, arXiv:0901.3775.
- [110] G. Giribet, D. L. Nacir e F. D. Mazzitelli, “*Counterterms in semiclassical Horava-Lifshitz gravity*”, JHEP **1009** (2010) 009, arXiv:1006.2870.
- [111] I. L. Shapiro, “*Physical Aspects of the Space-Time Torsion*”, Phys. Repts. **357** (2002) 113.
- [112] G. Narain e R. Anishetty, “*Unitary and Renormalizable Theory of Higher Derivative Gravity*”, J. Phys. Conf. Ser. **405** (2012) 012024, arXiv:1210.0513.

- [113] E. T. Tomboulis, “*Superrenormalizable gauge and gravitational theories*”, hep-th/9702146.
- [114] L. Modesto, “*Super renormalizable Higher Derivative Quantum Gravity*,” arXiv:1202.0008 [hep-th].
- [115] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto e a A. Mazumdar, “*Towards singularity and ghost free theories of gravity*”, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 031101, arXiv:1110.5249.
- [116] F. J. de Urries, J. Julve e E. J. Sánchez, “*Higher-derivative boson field theories and constrained second-order theories*”, J. Phys. A Math. Gen. **34** (2001) 8919, hep-th/0105301;  
 F. J. de Urries, e J. Julve, “*Ostrogradski formalism for higher derivative scalar field theories*”, J. Phys. **A31** (1998) 6949, hep-th/9802115;  
 A. Bartoli, J. Julve e E. J. Sánchez, “*Gauge fixing in higher-derivative gravity*”, Class. Quantum Grav. **16** (1999) 2283, gr-qc/9811041.
- [117] A.M. Lyapunov, “*The General Problem of the Stability of Motion*”, (Doctoral Thesis, 1892, In Russian);  
 English translations: *Stability of Motion* (Academic Press, NY, 1966) and *The General Problem of the Stability of Motion*, (Taylor and Francis, London 1992);  
 For the modern treatment see, e.g., L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, (Springer; 3rd Edition, 2012).
- [118] J. F. Donoghue, “*Leading quantum correction to the Newtonian potential*,” Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2996 [gr-qc/9310024].  
 J. F. Donoghue, “*General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*,” Phys. Rev. D **50** (1994) 3874 [gr-qc/9405057].
- [119] A. Z. Petrov, “*Einstein Spaces*”, (Pergamon, Oxford, 1969).
- [120] T. S. Bunch e L. Parker, “*Feynman Propagator in Curved Space-Time: A Momentum Space Representation*”, Phys. Rev. **D20** (1979) 2499.

- [121] L. Parker e D. J. Toms, “*Renormalization group analysis of grand unified theories in curved space-time*”, Phys. Rev. **D29** (1984) 1584.
- [122] F. Sobreira, B. J. Ribeiro e I. L. Shapiro, “*Effective potential in curved space and cut-off regularizations*”, Phys. Lett. **B705** (2011) 273.
- [123] G. Dvali, S. Folkerts, e C. Germani, “*Physics of Trans-Planckian Gravity*,” Phys. Rev. D **84** (2011) 024039 [arXiv:1006.0984 [hep-th]].  
G. Dvali e C. Gomez, “*Black hole’s quantum N-portrait*”, Fortschr. Phys. **63** (2013) 742, arXiv:1112.3359.
- [124] G. Cardano, “*Artis Magnae*”, (1545).  
For a modern reference, see M. Artin, “*Algebra*”, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991).