UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Dissertação de Mestrado

Transformações Conformes em Seis Dimensões. Aplicação à Densidade de Euler $E_{(6)}$.

Fabricio Matos Ferreira

27 DE FEVEREIRO DE 2015

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

Instituto de Ciências Exatas – ICE

Departamento de Física – DF

Dissertação de Mestrado

Transformações Conformes em Seis Dimensões. Aplicação à Densidade de Euler $E_{(6)}$.

Autor: Fabricio Matos Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Guilherme de Berredo Peixoto

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

27 de Fevereiro de 2015

Juiz de Fora–MG, Brasil

Para minha esposa Elayne e meu filho Marcel.

Agradecimentos

Um agradecimento especial ao amigo professor Marco Antônio Costa Fioravante por me fazer acreditar que tudo isto seria possível. Ao professor Ilya Lvovich Shapiro pela proposição do tema tão fascinante e orientação. Ao professor Guilherme de Berredo Peixoto pela coorientação e ajuda. A todos os professores e funcionários do departamento de Física da UFJF em particular aos professores Jens Karl Heinz Mund, Maria Cristina Andreolli Lopes, Sidiney de Andrade Leonel, Paulo Monteiro Vieira Braga Barone, Sergio Saul Makler e Fernando Sato e ao funcionário Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes. Aos amigos nesta jornada por toda ajuda e colaboração em especial a Simpliciano Castardelli dos Reis, Poliane de Morais Teixeira, Filipe de Oliveira Salles. Às agências de fomento FAPEMIG e CAPES por todo apoio.

“Há quem diga que a ciência acabou, que a história acabou. Isso é uma besteira; como se fôssemos Deus e conhecêssemos a estrutura de todo o Universo. $(\cdots)$ Há sempre coisas novas, há sempre perguntas a fazer.”

José Leite Lopes

Resumo

Teorias com derivadas de alta ordem e sua invariância sob transformações conformes são ferramentas poderosas em Teoria Quântica de Campos em espaços curvos. O principal propósito de nosso estudo é trabalhar no sentido de obter uma generalização do operador quadridimensional conforme de Paneitz para um operador análogo em seis dimensões (Δ_6). A consecução de um operador conformalmente invariante contendo seis derivadas justifica a escolha de se trabalhar nesta dimensão como um recurso mais simples para sua obtenção. Tal operador seria de fundamental importância na integração da anomalia conforme em teorias com derivadas de sexta ordem. A forte relação entre operadores conformes e a densidade de Euler foi investigada em $D = 2$ e $D = 4$. O termo da densidade de Euler - o qual é conhecido em $4D$ como termo topológico de Gauss-Bonnet - foi estendido a seis dimensões. Em dimensões pares, tal termo é representado por potências de $D/2$ de contrações dos tensores de Riemann e Ricci, cada um dos quais contendo D derivadas. A transformação dos escalares de terceira ordem na curvatura os quais aparecem no estudo da anomalia conforme e da densidade de Euler em seis dimensões foi obtida como um primeiro passo rumo ao nosso objetivo de obter Δ_6.

Palavras-chave : *Transformação conforme; operador conforme de alta ordem; densidade de Euler; termo topológico.*

Abstract

Higher-derivative theories and their invariance under conformal transformations are powerful tools in Quantum Field Theory in curved spaces. The main purpose of our study is to work towards achievement of a generalization of the four dimensional Paneitz conformal operator to analogous six dimension one (Δ_6). Achieving a six derivative conformally invariant operator justifies the choice of working in such dimension as a simpler resource for obtaining it. This operator would be of fundamental account in the integration of the conformal anomaly in sixth order derivatives theories. The strong relation between conformal operators and Euler density has been investigated in $D = 2$ e $D = 4$. Euler density term - which $4D$ version is known as topological Gauss-Bonnet term - was extended to the six dimension. In even dimensions, it is represented by $D/2$ powers of contracted Riemann and Ricci tensors, each of them carrying D derivatives. The transformation of the third order curvature scalars that arise in the study of the conformal anomaly and Euler density in six dimension was obtained as a first step to our goal of achieving Δ_6.

Keywords: *Conformal transformation; high-order conformal operator; Euler density; topological term .*

Conteúdo

Notação e Convenções

Salvo menção em contrário, usaremos sempre a convenção da soma de Einstein na qual $x^\mu x_\mu \equiv \sum x^\mu x_\mu$ e a adotaremos de $c = 1$.

Principais notações utilizadas:

- $D:$ dimensão do espaço;
- $\mathrm{diag}:$ matriz diagonal;
- $A_{\mu\nu\lambda\,\cdots}:$ tensor com componentes covariantes;
- $A^{\mu\nu\lambda\,\cdots}:$ tensor com componentes contravariantes;
- $A_{\mu\nu\lambda\,\cdots}A^{\mu\nu\lambda\,\cdots} = A^2_{\mu\nu\lambda\,\cdots}:$ contração de todos os índices de um tensor consigo mesmo ou "*quadrado*" do tensor.
- δ^μ_ν: delta de Kronecker;
- $g_{\mu\nu}:$ tensor métrico;

- $g^{\mu\nu}$: tensor métrico inverso;
- $g \;=\; det \, \|g_{\mu\nu}\|$: determinante da métrica;
- $\eta_{\mu\nu} \;=\; \mathrm{diag}\,[1, -1, -1, -1]$: métrica de um espaço de Minkowski;
- $C \;=\; g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} \;=\; A^{\mu} B_{\mu}$: definição de escalar;
- $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$: símbolo de Christoffel ou conexão afim;
- $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$: tensor de Riemann;
- $R_{\mu\nu}$: tensor de Ricci
- R : escalar de Ricci ou de curvatura;
- $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$: derivada parcial;
- ∇_{μ}: derivada covariante;
- $\Delta^{(D)}_{N}$: operador escalar conforme de ordem N na dimensão D;
- $g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \;=\; \nabla^{\mu} \nabla_{\mu} \;=\; \nabla^{2} \;=\; \Box$: operador D'Alembertiano generalizado;
- $g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \sigma \nabla_{\nu} \sigma \;=\; \nabla^{\mu} \sigma \nabla_{\mu} \sigma \;=\; (\nabla \sigma)^{2}$: contração de duas derivadas covariantes atuando sobre um escalar;
- $[\nabla_{\mu}\,, \nabla_{\nu}] \;=\; \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}$: comutador de derivadas covariantes;
- $\varepsilon^{\lambda_1 \ldots \lambda_D}$: tensor de Levi-Civita;
- $E_{(D)}$: densidade de Euler em uma variedade D-dimensional.

As derivadas parciais de um tensor podem ser representadas utilizando-se uma vírgula antes do índice em relação ao qual se deriva

$$T^{\lambda_1 \ldots}_{\tau_1 \ldots\,,\,\mu} \equiv \; \partial_{\mu} T^{\lambda_1 \ldots}_{\tau_1 \ldots}$$

e de modo análogo usando ponto e vírgula representamos as derivadas covariantes

$$T^{\lambda_1 \ldots}_{\tau_1 \ldots\,;\,\mu} \equiv \; \nabla_{\mu} T^{\lambda_1 \ldots}_{\tau_1 \ldots} \; .$$

Introdução

Transformações conformes e operadores diferenciais conformalmente invariantes ou, simplesmente, *operadores conformes* desempenham um importante papel no que diz respeito a questões de Relatividade Geral (RG) [1, 2, 3] e Teoria Quântica de Campos (TQC) em espaços curvos [4, 5]. Através da parametrização do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ utilizando-se um escalar $\sigma(x^\mu)$, obtemos certas propriedades e vantagens matemáticas na resolução de uma vasta coleção de problemas de interesse, bem como conseguimos revelar propriedades físicas de grande importância.

Como ferramenta matemática de trabalho da RG e da TQC, a álgebra tensorial[1] é um dos requisitos mais importantes em suas formulações e seu domínio é *conditio sine qua non* para sua compreensão, evolução e desenvolvimento. Vale ressaltar que desde a equação de campo de Einstein sem constante cosmológica, formulada há cem anos, notamos a importância de se relacionar o tensor de momento-energia $T_{\mu\nu}$ com os tensores ou escalares associados à curvatura do espaço-tempo, respectivamente $R_{\mu\nu}$ e R; estas últimas quantidades sendo, na verdade, contrações do *tensor de curvatura* ou *tensor de Riemann*

[1] Para abordagens alternativas como *formas diferencias* ver p. ex. [6].

$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, objeto ao qual dedicaremos o capítulo 1 e grande parte de nosso esforço. É no domínio dessas quantidades tensoriais que seguramente encontramos a pedra fundamental deste trabalho.

Além de propriedades do tensor de curvatura vistas no capítulo inicial, abordaremos no capítulo 2 as *transformações conformes* deste tensor e suas contrações. Este tipo de transformação em escalares de segunda ordem na curvatura e termos superficiais de 4 derivadas aqui obtidas serão de grande utilidade para os desdobramentos desejados no capítulo 4.

Como veremos no capítulo 3, em dimensões pares, os operadores conformes se relacionam com as denominadas *densidades de Euler* de uma forma muito explícita. Em $D = 2$ e $D = 4$ esta relação é bem conhecida embora em $D \geq 6$ seja objeto de cobiça[2] A conjectura de que a validade deste tipo de relação seja geral sugere que busquemos por propriedades semelhantes e de grande interesse em $D = 6$ [8]. Por esta razão, dedicamos o capítulo 4 à determinação das propriedades conformes de $E_{(6)}$, estendendo para $D = 6$ grande parte do que fora discutido nos capítulos 2 e 3. Neste último capítulo apresentamos a parte inédita do trabalho, a obtenção das transformações conforme dos escalares de terceira ordem na curvatura que constituem a base para densidade de Euler em seis dimensões além da própria transformação conforme de $E_{(6)}$ que encerra esta dissertação.

Um aspecto motivador em futuros esforços para se obter o operador conforme de sexta ordem é a importância de se integrar a chamada *anomalia de Weyl* ou *anomalia conforme* - casos em que o traço do tensor momento-energia $g^{\mu\nu}\langle T_{\mu\nu}\rangle$ de teorias conformes não se anula - como correções quânticas de vácuo [9]. A *ação efetiva*[3] Γ gerada pela não nulidade do traço de $T_{\mu\nu}$ foi obtida por Riegert [11] e também por Fradkin e Tseytlin [12], tal ação permanece invariante por substituições do tipo $\Gamma \to \Gamma + S_c$, em que $S_c(g_{\mu\nu})$ é um *invariante conforme* [13]. $S_c(g_{\mu\nu})$ é um funcional que desempenha um papel análogo a uma constante de integração na determinação da ação efetiva [14]. A ação efetiva para um campo escalar é não-local e estas não-localidades se relacionam com funções de Green por operadores diferenciais conformes de ordem *par* Δ_N $(N = 2, 4, \dots)$. O mais notável

[2]Para maior aprofundamento sobre *operadores diferenciais conformes* ver p. ex. [7].

[3]Ver p. ex. [10].

destes é o operador conforme de quarta ordem Δ_4 ou *operador de Paneitz*, a ser definido no capítulo 3, de fundamental importância na integração da anomalia conforme em $D = 4$. Entretanto, trata-se de um problema em aberto a obtenção de operadores conformes de ordem igual ou superior a seis e, de fato, esta é a principal motivação de nosso trabalho: a busca de um análogo de sexta ordem (Δ_6) ao operador de Paneitz. O sucesso nesta missão seria de grande relevância na integração da anomalia conforme em seis dimensões.

Considerando que teorias com altas derivadas e sua invariância conforme são ferramentas imprescindíveis em TQC em espaços curvos, apressentamos na conclusão desta obra nossa perspectiva de trabalho futuro e os avanços rumo à obtenção do operador Δ_6.

CAPÍTULO 1

O Tensor de curvatura e suas propriedades

1.1 Aspectos matemáticos relevantes

Faremos uma breve revisão de alguns conceitos básicos da álgebra tensorial e que são de suma importância para a RG e TQC em espaços curvos. Inicialmente lembramos que o tensor métrico permite que estabeleçamos a relação da distância infinitesimal entre dois pontos de uma dada variedade [15]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu \, . \tag{1.1}$$

Naturalmente para uma espaço euclideano tridimensional ($D = 3$)

$$g_{\mu\nu} \;=\; \mathrm{diag}\,[1, 1, 1] \tag{1.2}$$

e para um espaço pseudoeuclideano de Minkowski ($D = 4$)

$$g_{\mu\nu} \;=\; \eta_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

A assinatura adotada para o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ segue aquela encontrada na página **ix** [1].

[1]Para maiores detalhes, ver p. ex.[2].

A contração dos dois índices do tensor métrico fornece o traço de δ^{μ}_{ν}, o delta de Kronecker [2], de acordo com

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = D. \tag{1.4}$$

As métricas não-euclideanas de um modo geral possuem derivadas que não necessariamente se anulam, ou seja, $\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} \neq 0$. A imposição da condição de *metricidade*, ou seja, de que exista algum tipo de derivada da métrica que seja identicamente nula, nos conduz à definição da derivada *covariante*. Para um tensor, de uma forma mais geral possível, esta derivada é dada por [15]

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T^{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}_{\tau_1\tau_2\ldots} = \partial_{\mu}T^{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}_{\tau_1\tau_2\ldots} + \Gamma^{\lambda_1}_{\mu\eta}T^{\eta\lambda_2\ldots}{}_{\tau_1\tau_2\ldots} + \Gamma^{\lambda_2}_{\mu\eta}T^{\lambda_1\eta\ldots}{}_{\tau_1\tau_2\ldots} + \ldots - \\ - \Gamma^{\eta}_{\mu\tau_1}T^{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}_{\eta\tau_2\ldots} - \Gamma^{\eta}_{\mu\tau_2}T^{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}_{\tau_2\eta\ldots} - \ldots \ .\end{aligned} \tag{1.5}$$

Nos espaços sem *torção*[2], a relação (1.5) juntamente com o fato de que

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0\,, \tag{1.6}$$

nos leva à obtenção da expressão dos objetos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ denominados símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(\partial_{\mu}g_{\tau\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\tau} - \partial_{\tau}g_{\mu\nu}). \tag{1.7}$$

Da equação acima, depreendemos que os símbolos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ são simétricos em seus índices inferiores.

1.2 O tensor de curvatura

As derivadas covariantes de quantidades tensoriais são *a priori* não-comutativas, exceto para escalares ou para tensores pertencentes a espaços descritos por métricas em que $\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$, assim sendo, podemos afirmar que

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu},]T^{\lambda_1\lambda_2\ldots}_{\tau_1\tau_2\ldots} \neq 0 \tag{1.8}$$

de um modo geral. A expressão (1.8) está associada a um dos mais relevantes entes matemáticos da *Geometria Diferencial* e que dá vasto suporte a RG, o *tensor de curvatura de*

[2]Para maiores detalhes sobre espaços com torção ver p. ex. [15, 16]

Riemann-Christoffel $R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda}$ [3] ou simplesmente *tensor de Riemann*. Este objeto depende explicitamente dos símbolos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e de suas derivadas parciais de acordo com

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho\,,\,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda\,,\,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\,\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\,. \tag{1.9}$$

Embora o símbolo de Christoffel não se transforme como um tensor verdadeiramente, o tensor de curvatura dado por (1.9) é de fato uma quantidade tensorial pois possui todas as suas propriedades de transformação. Sua forma com componentes exclusivamente covariantes é obtida aplicando-se a métrica para abaixar o índice superior.

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\mu\tau}R^{\tau}{}_{\nu\rho\lambda} \tag{1.10}$$

A partir do tensor de Riemann, apresentamos dois novos objetos a ele associados, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R assim definidos:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\tau}{}_{\mu\tau\nu} = g^{\lambda\tau}R_{\lambda\mu\tau\nu} \tag{1.11}$$

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,. \tag{1.12}$$

O tensor de Ricci (1.11) é simétrico e, como veremos a seguir, esta é apenas uma dentre as várias propriedades decorrentes de simetrias intrínsecas ao tensor de Riemann.

1.3 Propriedades do tensor de curvatura

O tensor de Riemann possui, como já citado, um extenso rol de propriedades e simetrias [15]. Para apresentá-las, iniciaremos com aquelas relacionadas à permuta na posição de seus índices. Os dois primeiros índices e os dois últimos são antissimétricos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} \tag{1.13}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \tag{1.14}$$

e o par formado pelos dois primeiros índices é simétrico com o par formado pelos dois últimos tal que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}\,. \tag{1.15}$$

Decorre de (1.15) que o tensor de Ricci (1.11) é de fato simétrico. Além destas, temos uma propriedade de permutação cíclica nos três últimos índices tal que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0 . \tag{1.16}$$

Há ainda três propriedades de extrema importância relacionadas às derivadas covariantes de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ e seus traços e que são conhecidas como *identidades de Bianchi*. A primeira delas dada por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta\,;\,\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\alpha\,;\,\beta} + R_{\mu\nu\beta\lambda\,;\,\alpha} = 0 \tag{1.17}$$

e que gera duas formas reduzidas[3]

$$R_{\mu\nu\,;\,\lambda} - R_{\mu\lambda\,;\,\nu} + R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda\,;\,\alpha} = 0 \tag{1.18}$$

$$R^{\mu}_{\nu\,;\,\mu} = \frac{1}{2} R_{;\,\nu} \tag{1.19}$$

baseadas na contração apropriada de seus índices.

O conjunto das propriedades de simetria do tensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ leva a um número de componentes independentes, ou seja, de graus de liberdade em um espaço de dimensão D [17] fornecido por

$$N_D = \frac{D^2(D^2-1)}{12} . \tag{1.20}$$

Para um espaço D-dimensional, a combinação entre $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$[17]

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{D-2}\big(g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha} - g_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha}\big) + \\ + \frac{1}{(D-1)(D-2)}\big(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\big)R, \end{aligned} \tag{1.21}$$

e que outrossim é de grande relevância no estudo da RG e TQC, é conhecida como *tensor de Weyl*. Este tensor possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann análogas às equações de (1.13) a (1.16) mas a diferença essencial reside no fato de que

$$g^{\lambda\tau}C_{\lambda\mu\tau\nu} = C^{\tau}{}_{\mu\tau\nu} \equiv 0 . \tag{1.22}$$

[3](1.18) e (1.19) são denominadas respectivamente primeira e segunda identidades reduzidas de Bianchi.

Em particular, para $D \leq 3$

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv 0\,. \tag{1.23}$$

Como remanescente consideração sobre o tensor de Weyl, é possível mostrar que seu quadrado[4] origina a identidade

$$C^2_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{4}{D-2}R^2_{\mu\nu} + \frac{2}{(D-2)(D-1)}R^2\,. \tag{1.24}$$

Para o caso particular $D = 4$, existe outra combinação envolvendo os quadrados dos tensores de Riemann, Ricci e da curvatura escalar denominado termo de Gauss-Bonnet e que será abordado no capítulo 3.

[4]Ver Notações e Convenções.

CAPÍTULO 2

Transformações conformes locais

2.1 Considerações preliminares

Uma maneira muito útil de parametrizar o tensor métrico, visando a facilitar muitos cálculos bem como revelar propriedades físicas de grande interesse [17], é a denominada *transformação conforme*

$$g_{\mu\nu} \,=\, \bar{g}_{\mu\nu}\, e^{2\sigma(x)}\,. \tag{2.1}$$

Como já visto *en passant* na Introdução, σ é o parâmetro escalar da transformação e depende das coordenadas $x \equiv x^{\mu}$. Em decorrência da definição (2.1), é facilmente verificado que para a métrica inversa

$$g^{\mu\nu} \,=\, \bar{g}^{\mu\nu}\, e^{-2\sigma}\,, \tag{2.2}$$

de modo que

$$g_{\mu\tau}g^{\nu\tau} \,=\, \bar{g}_{\mu\tau}\bar{g}^{\nu\tau} \,=\, \delta^{\nu}_{\mu}\,. \tag{2.3}$$

Para o determinante da métrica vale a relação

$$g \,=\, det\,\|g_{\mu\nu}\| \,=\, det\,\|e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}\,\| \,=e^{2D\sigma}\bar{g}\,. \tag{2.4}$$

Passemos a investigar como o tensor de curvatura dado por (1.9) se transforma mediante a parametrização (2.1), para tanto, necessitamos preliminarmente encontrar a transformação para os símbolos $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ definidos em (1.7), assim

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau}(\partial_\beta g_{\alpha\tau} + \partial_\alpha g_{\tau\beta} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} e^{-2\sigma} \bar{g}^{\lambda\tau}[\partial_\beta(e^{2\sigma}\bar{g}_{\alpha\tau}) + \\ + \partial_\alpha(e^{2\sigma}\bar{g}_{\tau\beta}) - \partial_\tau(e^{2\sigma}\bar{g}_{\alpha\beta})] = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} + \delta^{\lambda}_{\alpha}\partial_\beta\sigma + \delta^{\lambda}_{\beta}\partial_\alpha\sigma - \bar{g}_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\sigma\,, \quad (2.5)$$

ou simplesmente [17],

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} &= \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\,, \\ \text{com}\ \ \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} &= \delta^{\lambda}_{\alpha}\bar{\nabla}_\beta\sigma + \delta^{\lambda}_{\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma - \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma\,; \end{aligned} \quad (2.6)$$

obviamente como σ é escalar, $\partial_\mu\sigma = \nabla_\mu\sigma = \bar{\nabla}_\mu\sigma$. É importante ressaltar que embora $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ e $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}$ não sejam tensores, $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ é quantidade tensorial de fato.

2.2 Transformação dos tensores de curvatura

O tensor de Riemann pode ser obtido substituindo-se as equações (2.5) e (2.6) na expressão (1.9) de modo que

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + [\,\partial_\mu(\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) + \delta\Gamma^{\tau}_{\beta\nu}\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\tau\mu} + \bar{\Gamma}^{\tau}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} + \delta\Gamma^{\tau}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu)\,]\,. \quad (2.7)$$

Adicionando e subtraindo convenientemente o termo $\bar{\Gamma}^{\tau}_{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}$ encontramos

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + [\,\bar{\nabla}_\mu(\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) + \delta\Gamma^{\tau}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu)\,] \quad (2.8)$$

e, finalmente, desenvolvendo (2.8) obtemos a relação

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \;=\;& \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\beta\sigma - \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}_\beta\sigma + \bar{g}_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \bar{g}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{g}_{\mu\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\ -\;& \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{g}_{\nu\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\beta\sigma - \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\,\bar{\nabla}_\beta\sigma + \bar{g}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\mu\sigma\,\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \bar{g}_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,. \end{aligned} \quad (2.9)$$

É importante frisar que as quantidades tensoriais grafadas com *barra* tem seus índices abaixados e levantados pela métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$.

A parir de (2.9) podemos chegar sem muito esforço à transformação para o tensor de Ricci de acordo com

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\sigma + (D-2)[\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2\,]\,. \quad (2.10)$$

A contração de (2.10) gera

$$R \,=\, R^{\mu}_{\mu} \,=\, e^{-2\sigma}\,[\bar{R} - 2(D-1)\bar{\nabla}^2\sigma - (D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^2\,]\,. \tag{2.11}$$

Substituindo (2.9), (2.10) e (2.11) na definição do tensor de Weyl (1.21), encontramos que sua transformação é simplesmente

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} \,=\, e^{2\sigma}\bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{2.12}$$

ou de forma mais simples ainda

$$C^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \,=\, \bar{C}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}\,. \tag{2.13}$$

2.3 Escalares de segunda ordem na curvatura

Os escalares de segunda ordem na curvatura aparecem com muita frequência nos integrandos de ações que geram equações de campo, portanto, o conhecimento de suas transformações conformes é de grande interesse. Iniciaremos com o cálculo do quadrado do tensor de Riemann ou escalar de Kretschmann $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv R^2_{\mu\nu\alpha\beta}$. Sua transformação é tal que

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \;&=\; \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-4)\sigma}[\,\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 8\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma + 8\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;+ \\
&+\; 4(D-2)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 + 4(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 - 8(D-2)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma \;+ \\
&+\; 8(D-2)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4]\,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Utilizando a mesma receita para o quadrado do tensor de Ricci obteremos

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}R^2_{\mu\nu} \;&=\; \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-4)\sigma}[\,\bar{R}^2_{\mu\nu} \;-2(D-2)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma + 2(D-2)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - 2\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma \;- \\
&-\; 2(D-2)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-2)^2(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 + (3D-4)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 \\
&-\; 2(D-2)^2\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma \;+2(2D-3)(D-2)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;+ \\
&+\; (D-2)^2(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

e, finalmente, para o quadrado do escalar de curvatura chegamos a

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|g|}R^2 = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-4)\sigma}[\,\bar{R}^2 - 4(D-1)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma - 2(D-2)(D-1)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+4(D-1)^2(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 \;+4(D-2)(D-1)^2\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-2)^2(D-1)^2(\bar{\nabla}\sigma)^4\,]\,.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Para o quadrado do tensor de Weyl, pode-se verificar que a fórmula de transformação é muito simples

$$\sqrt{|g|}\, C^2_{\mu\nu\alpha\beta} \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}\, e^{(D-4)\sigma}\, \bar{C}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\,. \tag{2.17}$$

Além de (2.17), há uma outra e importantíssima combinação destes escalares de segunda ordem na curvatura denominada termo de Gauss-Bonnet[1]

$$E \;=\; R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2 \tag{2.18}$$

que tem como transformação conforme a relação

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}E \;&=\; \sqrt{|\bar{g}|}\, e^{(D-4)\sigma}\, [\, \bar{E} \,+ 8(D-3)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - 8(D-3)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma \;- \\
&-\; 4(D-3)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma \,- 2(D-4)(D-3)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4(D-3)(D-2)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 \;+ \\
&+\; 4(D-3)(D-2)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 8(D-3)(D-2)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma \;+ \\
&+\; 4(D-3)^2(D-2)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \,+ (D-4)(D-3)(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4\,]\,.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Este termo e sua transformação guardam íntima relação com o operador conforme de quarta ordem e será abordado futuramente. Esta relação também envolve o termo superficial $\Box R$ ou, como adotamos neste trabalho, $\nabla^2 R$. Na seção seguinte, trataremos da transformação deste termo.

2.4 Termo superficial com quatro derivadas

O termo superficial $\nabla^2 R$ pode ser transformado conformalmente assim como fizemos com os escalares de segunda ordem na curvatura. Preliminarmente faremos separadamente a transformação do operador ∇^2. Vale ressaltar que atuando sobre um escalar $\nabla_\mu\varphi \equiv \bar{\nabla}_\mu\varphi$. Utilizando as equações (2.2) e (2.6)

$$\begin{aligned}
\nabla^2\varphi \;&=\; g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi = e^{-2\sigma}\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\varphi - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\bar{\nabla}_\lambda\varphi) \\
&=\; e^{-2\sigma}[\,\bar{\nabla}^2\varphi - \bar{g}^{\mu\nu}(\delta^{\lambda}_{\mu}\bar{\nabla}_\nu\sigma + \delta^{\lambda}_{\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma - \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma)\bar{\nabla}_\lambda\varphi\,] \\
&=\; e^{-2\sigma}[\,\bar{\nabla}^2\varphi + (D-2)\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma\bar{\nabla}_\lambda\varphi\,]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

[1] Ver maiores detalhes no capítulo 3.

e multiplicando, como de praxe, pela raiz quadrada do determinante da métrica, obtemos a transformação do operador ∇^2 atuando sobre um escalar

$$\sqrt{|g|}\,\nabla^2 \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-2)\sigma}\,[\bar{\nabla}^2 + (D-2)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\,]\,. \tag{2.21}$$

As relações (2.11) e (2.21) permitem-nos escrever

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,\nabla^2 R \;\;=&\;\; \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-4)\sigma}\,[\bar{\nabla}^2\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma - 2(D-4)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-6)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\bar{R} - \\
&- \;\; 2(D-1)\bar{\nabla}^4\sigma + 4(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 - 2(D-6)(D-1)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}^2\sigma) + \\
&+ \;\; 2(3D-10)(D-1)\bar{\nabla}^2\sigma(\nabla\sigma)^2 - (D-2)(D-1)\bar{\nabla}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- \;\; (D-6)(D-2)(D-1)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(D-4)(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4\,]\,.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De posse de todos os resultados aqui obtidos, daremos um próximo passo e demonstraremos no capítulo 3 a relação que eles guardam entre si e os operadores conformes a serem definidos na sequência.

CAPÍTULO 3

Densidades de Euler e sua relação com operadores conformes

3.1 Densidades de Euler

Na geometria riemanniana, o teorema de Gauss-Bonnet relaciona propriedades topológicas de uma variedade D-dimensional com quantidades que são construídas numa base formada por tensores de curvatura [18], tais quantidades são denominadas *densidades de Euler* e são de grande interesse no estudo da invariância conforme devido a propriedades sobre as quais trataremos neste capítulo. Para $D = 2n$ dimensões ($n = 1, 2 \ldots$), este termo é dado pela expreessão [19]

$$E_{(2n)} = \frac{1}{2^n} \varepsilon^{\alpha_1 \beta_1 \ldots \alpha_n \beta_n} \varepsilon^{\gamma_1 \delta_1 \ldots \gamma_n \delta_n} R_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1} \ \ldots \ R_{\alpha_n \beta_n \gamma_n \delta_n} \,, \tag{3.1}$$

onde $\varepsilon^{\alpha_1 \beta_1 \cdots}$ é o tensor de Levi-Civita. Em variedades simplesmente conexas de dimensão D, $E_{(D)}$ é topológico, ou seja, estes termos em integrandos do tipo

$$\int d^D x \sqrt{|g|}\, E_{(D)} \tag{3.2}$$

não contribuem para equações dinâmicas clássicas [10]. Entretanto, o mesmo não é necessariamente verificado se a dimensão do domínio de integração for diferente de D ou se este domínio for multiplamente conexo.

Nosso interesse reside nas propriedades conformes das densidades de Euler (termos topológicos) em dimensões pares [9] e no modo como estas se relacionam com os operadores conformes de ordem N igual à dimensão D do espaço considerado. Estes operadores serão definidos na seção a seguir. No presente capítulo trataremos exclusivamente de duas e quatro dimensões reservando a discussão em $D = 6$ para o capítulo 4. A bem da simplicidade, utilizaremos a notação $\Delta_D \equiv \Delta_N^{(D=N)}$.

Verificaremos nas seções seguintes que $\exists\, \chi^\mu$ e $\exists\, k$ (constante) tais que

$$\sqrt{|g|}(E_{(D)} + \nabla_\mu \chi^\mu) \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}(\bar{E}_{(D)} + \bar{\nabla}_\mu \bar{\chi}^\mu + k\bar{\Delta}_D \sigma\,)\,. \tag{3.3}$$

Esta equação foi obtida em [11, 12] para 4 dimensões, mas como veremos a seguir, ela também é válida para 2 dimensões. Podemos especular sua validade para outras dimensões pares maiores que 4 como uma forma de encontrar o operador Δ_D . Em (3.3) observa-se que os termos de ordem maior ou igual a dois em σ desaparecem, ou seja, a combinação entre parêntesis é linear neste parâmetro [11].

3.2 A densidade de Euler em duas dimensões e o operador conforme de segunda ordem

O cálculo da densidade de Euler neste caso particular, obtido a partir de (3.1) gera

$$E_{(2)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\alpha\beta} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}. \tag{3.4}$$

O produto dos dois tensores $\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\alpha\beta}$ pode ser substítuido por um determinante 2×2 o que permite constatarmos facilmente que

$$E_{(2)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta \end{vmatrix} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = R. \tag{3.5}$$

Utilizando-se de transformações para um campo escalar φ de forma que $g_{\mu\nu}$ seja dada por (2.1) e $\varphi = e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}$, o operador conforme de segunda ordem em uma dimensão arbitrária pode ser definido[1] tal que seja válida a identidade

$$\int d^D x \sqrt{|g|}\,\varphi\Delta_2\varphi = \int d^D x \sqrt{|\bar{g}|}\,\bar{\varphi}\bar{\Delta}_2\bar{\varphi}\,, \tag{3.6}$$

[1]Alternativamente Δ_2 pode ser definido como em [20] tal que $e^{\frac{D+2}{2}}\Delta_2\varphi = \bar{\Delta}_2\bar{\varphi}$, com $\varphi = e^{\frac{D-2}{2}}\bar{\varphi}$.

sua expressão é dada por (ver p. ex. [13, 7, 20])

$$\Delta_2^{(D)} = \nabla^2 - \frac{D-2}{4(D-1)} R. \tag{3.7}$$

Para verificarmos a validade deste resultado, inicialmente iremos assumir que Δ_2 tenha a forma

$$\Delta_2 = \nabla^2 + aR\,, \tag{3.8}$$

onde a deve ser determinado e ∇^2 e R são dados respectivamente por (2.21) e (2.11). Para o cálculo de a faremos

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\Delta_2\varphi = \sqrt{|g|}(\nabla^2 + aR)\varphi = e^{(D-2)\sigma}\sqrt{|\bar{g}|}[\bar{\nabla}^2 + (D-2)\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu + \\ + a\bar{R} - 2a(D-1)\bar{\nabla}^2\sigma - a(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^2](e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}\,)\end{aligned} \tag{3.9}$$

Para detalharmos este cálculo, observemos que as derivadas são tais que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\mu(e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}\,) &= e^{\frac{2-D}{2}\sigma}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\varphi} + \frac{2-D}{2}\bar{\varphi}\bar{\nabla}_\mu\sigma) \\ \bar{\nabla}^2(e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}\,) &= e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\left[\bar{\nabla}^2\bar{\varphi} + (2-D)\bar{\nabla}_\mu\bar{\varphi}\bar{\nabla}^\mu\sigma + \frac{(2-D)^2}{4}\bar{\varphi}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \frac{2-D}{2}\bar{\varphi}\bar{\nabla}^2\sigma\right]\end{aligned} \tag{3.10}$$

Desta forma, substituindo as relações (3.10) em (3.9) e simplificando os termos semelhantes

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\Delta_2\varphi = e^{\frac{D-2}{2}\sigma}\sqrt{|\bar{g}|}\left[\bar{\nabla}^2\bar{\varphi} - \frac{(2-D)^2}{4}\bar{\varphi}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \frac{2-D}{2}\bar{\varphi}\bar{\nabla}^2\sigma + a\bar{R}\bar{\varphi} - \right. \\ \left. - 2a(D-1)\bar{\varphi}\bar{\nabla}^2\sigma - a(D-2)(D-1)\bar{\varphi}(\bar{\nabla}\sigma)^2\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Multiplicando ambos os membros por φ, tal que

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\varphi\Delta_2\varphi = \sqrt{|\bar{g}|}\bar{\varphi}\left\{\bar{\Delta}_2\bar{\varphi} - \left[\frac{(D-2)^2}{4} + a(D-2)(D-1)\right]\bar{\varphi}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{2-D}{2} - 2a(D-1)\right]\bar{\varphi}\bar{\nabla}^2\sigma\right\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

e anulando os termos entre colchetes, obteremos a solução

$$a = -\frac{(D-2)}{4(D-1)}, \tag{3.13}$$

o que demonstra (3.7).

Para o caso particular $D = 2$, temos a inocente relação

$$\Delta_2 = \nabla^2 \tag{3.14}$$

que, aliada a (2.21), gera para o operador conforme a simples transformação

$$\sqrt{|g|}\Delta_2 \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}\,\bar{\Delta}_2. \tag{3.15}$$

Utilizando (3.5) e (2.11) podemos verificar que

$$\sqrt{|g|}E_{(2)} = \sqrt{|\bar{g}|}(\bar{E}_{(2)} - 2\bar{\Delta}_2\sigma), \tag{3.16}$$

o que se enquadra perfeitamente nos moldes de (3.3) desde que $\nabla_\mu\chi^\mu = \bar{\nabla}_\mu\bar{\chi}^\mu \equiv 0$ e $k = -2$.

3.3 A densidade de Euler em quatro dimensões e o operador conforme de quarta ordem

Novamente utilizando (3.1), desta vez em $D = 4$, veremos que

$$E_{(4)} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\tau}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\xi\eta}{}_{\lambda\tau}\,. \tag{3.17}$$

Representando os dois tensores $\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\tau}$ por um determinante 4×4 veremos que

$$E_{(4)} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\beta_\mu & \delta^\lambda_\mu & \delta^\tau_\mu \\ \delta^\alpha_\nu & \delta^\beta_\nu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\tau_\nu \\ \delta^\alpha_\xi & \delta^\beta_\xi & \delta^\lambda_\xi & \delta^\tau_\xi \\ \delta^\alpha_\eta & \delta^\beta_\eta & \delta^\lambda_\eta & \delta^\tau_\eta \end{vmatrix} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\xi\eta}{}_{\lambda\tau} = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2 = E\,, \tag{3.18}$$

que é a famosa combinação dos escalares de segunda ordem na curvatura conhecida como termo de Gauss-Bonnet, já mencionado na equação (2.18).

Também de acordo com [13, 7, 20], o operador conforme de quarta ordem em uma dimensão arbitrária D atuando em um campo escalar cuja transofrmação seja dada por

$$\int d^Dx\sqrt{|g|}\,\varphi\Delta_4\varphi = \int d^Dx\sqrt{|\bar{g}|}\,\bar{\varphi}\bar{\Delta}_4\bar{\varphi}\,, \tag{3.19}$$

com $g_{\mu\nu}$ dada por (2.1) e $\varphi = e^{\frac{4-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}$, é

$$\Delta_4^{(D)} = \nabla^4 + \frac{4}{D-2}\left[R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{1}{2}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\right] - \frac{D^2-4D+8}{2(D-2)(D-1)}[R\nabla^2 + (\nabla^\mu R)\nabla_\mu] - \\ -(D-4)\left[\frac{1}{4(D-1)}\nabla^2 R - \frac{5D-8}{16(D-2)(D-1)^2}R^2 + \frac{1}{(D-2)^2}R^2_{\mu\nu}\right] \quad (3.20)$$

e que para o caso particular $D = 4$ se reduz a

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\,\nabla_\mu\,. \quad (3.21)$$

O operador diferencial, acima representado por (3.20) e (3.21), é conhecido como operador de Paneitz [20].

Por outro lado, resultados obtidos no capítulo 2, como por exemplo (2.19), em quatro dimensões são reescritos de forma um pouco mais simples tal que

$$\sqrt{|g|}E = \sqrt{|\bar{g}|}\,[\,\bar{E} + 8\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma - 8\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 4\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma - 8(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + \\ + 8(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 16\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 8\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2\,]\,, \quad (3.22)$$

e de modo semelhante, (2.22) torna-se

$$\sqrt{|g|}\,\nabla^2 R = \sqrt{|\bar{g}|}\,[\,\bar{\nabla}^2\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma - 2\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu\bar{R} - 6\bar{\nabla}^4\sigma + 12(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + \\ + 12\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^2\sigma) + 12\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 6\bar{\nabla}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 12\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}\sigma)^2\,]\,. \quad (3.23)$$

Algumas modificações nesta expressão se fazem convenientes. No sexto termo entre colchetes de (3.23), encontramos as derivadas $\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^2\sigma)$, é válido notar que

$$[\bar{\nabla}_\mu\,,\bar{\nabla}^2]\,\sigma = [\bar{\nabla}_\mu\,,\bar{\nabla}_\nu]\,\bar{\nabla}^\nu\sigma + \bar{\nabla}_\nu[\bar{\nabla}_\mu\,,\bar{\nabla}^\nu]\,\sigma\,. \quad (3.24)$$

O comutador de derivadas covariantes atuando sore um vetor contravariante é tal que[2]

$$[\nabla_\mu\,,\nabla_\nu]\,A^\lambda = R^\lambda{}_{\tau\mu\nu}A^\tau$$

e, assim sendo,

$$[\bar{\nabla}_\mu\,,\bar{\nabla}^2]\,\sigma = [\bar{\nabla}_\mu\,,\bar{\nabla}_\nu]\,\bar{\nabla}^\nu\sigma = \bar{R}^\nu{}_{\lambda\mu\nu}\bar{\nabla}^\lambda\sigma = -\bar{R}_{\mu\lambda}\bar{\nabla}^\lambda\sigma \text{ , ou seja,}$$
$$\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^2\sigma) = \bar{\nabla}^2\bar{\nabla}_\mu\sigma - \bar{R}_{\mu\lambda}\bar{\nabla}^\lambda\sigma\,. \quad (3.25)$$

[2] Ver p. ex. [15].

Renomeando $\lambda \to \nu$, o sexto termo de (3.23) pode ser substituído por

$$12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}^{2}\sigma) = 12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma - 12\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,. \tag{3.26}$$

O oitavo termo de (3.23) também pode ser alterado para

$$\begin{aligned} -6\bar{\nabla}^{2}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} &= -6\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma) = -6\bar{\nabla}^{\mu}[\,(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,] \\ &= -12\bar{\nabla}^{\mu}(\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma) = -12(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2} - 12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma \end{aligned} \tag{3.27}$$

e o nono ou último termo de (3.23) pode ser substituído na forma

$$\begin{aligned} 12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} &= 12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma) = 12\bar{\nabla}^{\mu}\sigma[\,(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,] \\ &= 24\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Substituindo os resultados de (3.26) a (3.28) em (3.23) e levando em conta que o primeiro termo do segundo membro de (3.26) se cancela com o segundo termo do segundo membro de (3.27), encontramos

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\,\nabla^{2}R = \sqrt{|\bar{g}|}\,[\,&\bar{\nabla}^{2}\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\nabla}^{2}\sigma - 2\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\bar{R} - 6\bar{\nabla}^{4}\sigma + 12(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2} + \\ &- 12\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 12\bar{\nabla}^{2}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - 12(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2} + 24\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma] \end{aligned} \tag{3.29}$$

Um fato notável é que a seguinte combinação das equações (3.22) e (3.29)

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}(E_{(4)} - \frac{2}{3}\nabla^{2}R\,) = \sqrt{|\bar{g}|}(&\bar{E}_{(4)} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}^{2}\bar{R} + 4\bar{\nabla}^{4}\sigma + \\ &+ 8\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - \frac{8}{3}\bar{R}\bar{\nabla}^{2}\sigma + \frac{4}{3}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{R}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) \end{aligned} \tag{3.30}$$

elimina termos todos os termos de ordem superior ou igual a σ^2 [11]. Mais notável ainda é o fato de que se compararmos esta expressão com (3.21), veremos que

$$\sqrt{|g|}(E_{(4)} - \frac{2}{3}\nabla^{2}R\,) = \sqrt{|\bar{g}|}(\bar{E}_{(4)} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}^{2}\bar{R} + 4\bar{\Delta}_{4}\sigma). \tag{3.31}$$

Novamente obtivemos uma relação entre o termo topológico e o operador conforme que se enquadra perfeitamente nos moldes de (3.3) se observarmos que

$$\chi^{\mu} = -\frac{2}{3}\nabla^{\mu}R \quad \text{e} \quad k = 4\,. \tag{3.32}$$

A busca por relações entre $E_{(D)}$, $\bar{E}_{(D)}$ e $\bar{\Delta}_D$, análogas às obtidas em (3.16) e (3.31), será estendida para seis dimensões no capítulo 4. Neste caso, veremos que $E_{(6)}$ depende de terceira potência das contrações dos tensores de Riemann e Ricci, cada um dos quais contendo consigo seis derivadas.

CAPÍTULO 4

A densidade de Euler em D = 6 e sua transformação conforme

4.1 Em busca do operador conforme de sexta ordem

A forte relação existente entre densidades de Euler em dimensões pares, sua transformação conforme e os operadores diferenciais conformes, identificada pela relação (3.3), nos motiva a ir além, ou seja, tentar obter o operador Δ_6 utilizando o termo topológico em seis dimensões e sua transformação. O objeto $E_{(6)}$ é construído a partir de uma base formada por escalares de terceira ordem na curvatura; veremos adiante que tal base é constituída por oito elementos linearmente independentes. Nas linhas que se seguem, apresentaremos o termo $E_{(6)}$ e calcularemos as transformações conformes de cada um de seus termos, após este feito, finalmente estabeleceremos a desejada relação entre $E_{(6)}$ e $\bar{E}_{(6)}$.

Os cálculos deste capítulo são razoavelmente complexos e, embora sejam conferidos manualmente, utilizamos em grande medida o software *Cadabra* [21, 22] que roda em ambiente *Linux*. Alguns detalhamentos de cálculos mais onerosos serão apresentados no Apêndice deste trabalho.

4.2 A densidade de Euler em seis dimensões

(3.1) A densidade de Euler para $D = 6$ é dada, a partir de (3.1), por

$$E_{(6)} = \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\lambda\xi}\,\varepsilon^{\rho\sigma\kappa\omega\eta\chi}\,R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\,R^{\alpha\beta}{}_{\kappa\omega}\,R^{\lambda\xi}{}_{\eta\chi}\,. \tag{4.1}$$

O desenvolvimento de (4.1) fornece a expressão[1]

$$E_{(6)} = -8R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} + 4R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu} - 24R^{\nu}_{\mu}R_{\alpha\beta\lambda\nu}R^{\alpha\beta\lambda\mu} + \\ + 24R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} + 16R^{\nu}_{\mu}R^{\mu}_{\alpha}R^{\alpha}_{\nu} + 3RR^{2}_{\mu\nu\alpha\beta} - 12RR^{2}_{\mu\nu} + R^{3} \tag{4.2}$$

e que por simplicidade e comodidade escreveremos como

$$E_{(6)} = -8A_1 + 4A_2 - 24A_3 + 24A_4 + 16A_5 + 3A_6 - 12A_7 + A_8. \tag{4.3}$$

Uma vez obtida a expressão de $E_{(6)}$, passamos a obtenção das transformações de cada um de seus termos A_i de terceira ordem na curvatura.

Alguns resultados obtidos no capítulo 2 como a transformação do tensor de Riemann (2.9) podem alternativamente ser apresentados como

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= e^{-2\sigma}\,[\,\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \delta^{\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \delta^{\nu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - \delta^{\nu}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\ &- \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \delta^{\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \delta^{\mu}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \delta^{\nu}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - \delta^{\nu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,] \end{aligned} \tag{4.4}$$

ou

$$\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} &= e^{-2\sigma}\,[\,\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \delta^{\nu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\ &- \bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \delta^{\mu}_{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \delta^{\nu}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,]\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

assim como a transformação do tensor de Ricci (2.10) também pode ser reescrita de modo que

$$R^{\mu}_{\nu} = e^{-2\sigma}\,\{\bar{R}^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}^2\sigma + (D-2)[\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - \bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - \delta^{\mu}_{\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2\,]\,\}. \tag{4.6}$$

Aplicando estas últimas relações, além de várias outras obtidas no capítulo 2, chegaremos às transformações nos termos da equação (4.2).

[1] Este resultado pode ser encontrado p. ex. em [23].

4.3 Transformações conformes dos termos A_i

Faremos, por analogia ao que foi feito no capítulo 2, os cálculos das transformações dos escalares de terceira ordem na curvatura em D dimensões embora nosso interesse maior seja o caso particular $D = 6$.

4.3.1 Transformação do termo A_1

Iniciaremos com o termo A_1 que, diga-se de passagem, é o que gera cálculos mais laboriosos. Por comodidade, omitimos aqui intencionalmente a exponencial. Façamos inicialmente a transformação de dois dos tensores de Riemann de A_1. De acordo com (4.5)

$$
\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} = {} & \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} + \bar{R}^{\mu}{}_{\tau}{}^{\nu}{}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda} \bar{\nabla}_{\tau}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + \bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\tau} \bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \\
& + \bar{R}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\tau} \bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \bar{g}_{\lambda\tau}\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \bar{R}^{\mu}{}_{\tau}{}^{\nu}{}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \\
& - \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda} \bar{\nabla}_{\tau}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\tau} \bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \bar{R}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\tau} \bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} \bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + \\
& + \bar{g}_{\lambda\tau}\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 2\bar{R}^{\mu}{}_{\tau}{}^{\nu}{}_{\lambda}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \bar{R}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma - \bar{R}_{\lambda\tau} \bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \bar{R}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\bar{\nabla}_{\tau}\sigma + \\
& + \bar{R}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\lambda\tau}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \bar{g}_{\lambda\tau}\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma + (D-4)\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\, \bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma - \\
& - 2\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - 2\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \delta^{\mu}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \delta^{\nu}_{\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + \\
& + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + \bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\lambda\tau}\,(\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)^2 - (D-4)\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\, \bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\sigma - \\
& - (D-4)\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\, \bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\sigma - 2\, \bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\sigma - 2\, \bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\, \bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, \bar{\nabla}_{\lambda}\sigma + \\
& + 2\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 2\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\tau}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 2\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma + 2\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \\
& - \delta^{\mu}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\sigma\, \bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \delta^{\mu}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\sigma\, \bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \delta^{\nu}_{\tau}\, \bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\, \bar{\nabla}_{\alpha}\sigma - \delta^{\nu}_{\tau}\, \bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\, \bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, \bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + \\
& + (D-5)\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-5)\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2\delta^{\mu}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}_{\tau}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2\delta^{\nu}_{\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
& - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\, \bar{\nabla}_{\tau}\sigma\, \bar{\nabla}^2\sigma - \bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, \bar{\nabla}^{\nu}\sigma\, \bar{\nabla}^2\sigma - 2\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 2\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
& + (D-2)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\bar{\nabla}_{\tau}\sigma - (D-3)\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\bar{\nabla}_{\tau}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - (D-3)\bar{g}_{\lambda\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
& - \delta^{\mu}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\tau}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \delta^{\nu}_{\tau}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-3)\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\lambda\tau}(\bar{\nabla}\sigma)^4 + \delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\tau}(\bar{\nabla}\sigma)^4 .
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Contraindo este último resultado com $R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu}$, ainda seguindo a receita dada por (4.5)[2], chegaremos à transformação conforme de A_1. Outrossim, recuperaremos a exponencial

[2] Ver Apêndice.

omitida e, do mesmo modo como feito no capítulo 2, multiplicaremos ambos os membros pela raiz quadrada do determinante da métrica, assim sendo

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,A_1 &= \sqrt{|g|}\,R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\,R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} = \sqrt{|\bar g|}\,e^{(D-6)\sigma}\,[\,\bar R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\,\bar R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} + \\
&+ 3\bar R_{\mu\nu\alpha\beta}\bar R^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\beta\sigma - 3\bar R_{\mu\nu\alpha\beta}\bar R^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\beta\sigma + \frac{3}{2}\,\bar R^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar\nabla\sigma)^2 - \\
&- 6\,\bar R^{\mu\nu}\bar R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar\nabla_\alpha\bar\nabla_\beta\sigma + 6\,\bar R^{\mu\nu}\bar R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar\nabla_\alpha\sigma\,\bar\nabla_\beta\sigma + 3(D-4)\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\beta\sigma - \\
&- 6(D-4)\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\beta\sigma - 3\,\bar R^2_{\mu\nu}\,(\bar\nabla\sigma)^2 - 12\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\bar\nabla^\alpha\sigma + \\
&+ 6\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^2\sigma + 24\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma - 6\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^2\sigma + \\
&+ 6(D-5)\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 - 6(D-3)\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 + 3\bar R(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2 - \\
&- 6\bar R\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\mu\sigma\,\bar\nabla^\nu\sigma + 6\bar R\bar\nabla^2\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^2 + 3(D-3)\bar R(\bar\nabla\sigma)^4 + \\
&+ 2(3D-8)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\mu\sigma - 6(D-3)(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,\bar\nabla^2\sigma - 2(\bar\nabla^2\sigma)^3 - \\
&- 6(3D-8)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma - 3(D^2-8D+14)(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2 + \\
&+ 12(D-3)\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\,\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla^2\sigma - 3(3D-8)(\bar\nabla^2\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2 + \\
&+ 6(D-3)(D-2)\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^2 - 6(D-3)(D-2)\bar\nabla^2\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^4 - \\
&- (D-3)(D-2)(D-1)(\bar\nabla\sigma)^6\,]\,. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

4.3.2 Transformação do termo A_2

Para os cálculos da transformação do segundo termo de (4.2), faremos um procedimento análogo, lembrando que a exponencial será novamente omitida

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau} &= \bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau} - 4\bar R^{\mu\nu}{}_{\lambda\tau}(\bar\nabla\sigma)^2 + 2\bar R^{\nu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\mu\sigma - 2\bar R^{\mu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\nu\sigma + \\
&+ 2\bar R^{\mu\nu}{}_{\tau\alpha}\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\alpha\sigma - 2\bar R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha}\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\alpha\sigma + 2\bar R^{\mu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma - 2\bar R^{\nu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma + \\
&+ 2\bar R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha}\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma - 2\bar R^{\mu\nu}{}_{\tau\alpha}\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma + 2\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma - 2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma + \\
&+ 2\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma - 2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma + 4\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\nu\sigma - 4\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\nu\sigma + \\
&+ 4\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 - 4\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 + 4\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 - 4\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2 + \\
&+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla_\alpha\sigma - 2\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla_\alpha\sigma + 2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\,\bar\nabla_\tau\sigma\,\bar\nabla_\alpha\sigma - 2\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\,\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla_\alpha\sigma + \\
&+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma - 2\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma + 2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma - 2\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma +
\end{aligned}$$

$$+\,4\,\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\mu\sigma-4\,\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\mu\sigma+4\,\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\nu\sigma-4\,\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\nu\sigma+$$
$$+\,2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-2\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-2\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+$$
$$+\,2\,\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\tau(\bar\nabla\sigma)^4-2\,\delta^\mu_\tau\delta^\nu_\lambda(\bar\nabla\sigma)^4\,, \tag{4.9}$$

ou de uma forma mais compacta

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}=\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}-4\bar R^{\mu\nu}{}_{\lambda\tau}(\bar\nabla\sigma)^2+\left[\,2\bar R^{\nu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\mu\sigma+2\bar R^{\mu\alpha}{}_{\lambda\tau}\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma-(\mu\leftrightarrow\nu)\right]+$$
$$+\left[\,2\bar R^{\mu\nu}{}_{\tau\alpha}\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\alpha\sigma+2\bar R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha}\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma+2\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma+2\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma+\right.$$
$$+\,4\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\nu\sigma+4\,\delta^\mu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+4\,\delta^\nu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla_\alpha\sigma+$$
$$+2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla^\alpha\bar\nabla^\mu\sigma\;\bar\nabla_\tau\sigma\;\bar\nabla_\alpha\sigma+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla_\lambda\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma+2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla_\tau\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma+4\,\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\mu\sigma+$$
$$\left.+4\,\bar\nabla_\tau\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\nu\sigma+2\,\delta^\nu_\lambda\bar\nabla_\tau\sigma\bar\nabla^\mu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+2\,\delta^\mu_\tau\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2+2\,\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\tau(\bar\nabla\sigma)^4-(\lambda\leftrightarrow\tau)\right]. \tag{4.10}$$

A equação (4.9) multiplicada por $R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu}$, recuperando o que foi omitido e realizando procedimento semelhante ao feito para obtenção de (4.8)[3], nos fornece

$$\sqrt{|g|}\,A_2=\sqrt{|g|}\,R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu}=\sqrt{|\bar g|}\,e^{(D-6)\sigma}\left[\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}\bar R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu}-\right.$$
$$-\;12\,\bar R_{\mu\nu\alpha\beta}\bar R^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\beta\sigma+\;12\,\bar R_{\mu\nu\alpha\beta}\bar R^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar\nabla_\lambda\sigma\,\bar\nabla^\beta\sigma\;-\;6\,\bar R^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar\nabla\sigma\,)^2+$$
$$+\;24\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\beta\sigma\;-\;48\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\beta\sigma\;+\;24\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\bar\nabla^\alpha\sigma-$$
$$-\;48\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma\;+\;48\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-\;24\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2\;+12\,\bar R(\bar\nabla\sigma\,)^4-$$
$$-8(D-4)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\mu\sigma-24\,(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,\bar\nabla^2\sigma\,+24(D-4)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma-$$
$$-\;24(D-3)(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2\;+48\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\;\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^2\sigma\;-\;24\,(\bar\nabla^2\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2+$$
$$\left.+\,24(D-2)\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\;\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-24(D-2)\bar\nabla^2\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^4\,-4(D-2)(D-1)\,(\bar\nabla\sigma)^6\,\right]. \tag{4.11}$$

Os cálculos das subseções seguintes são um pouco menos extensos e serão realizados diretamente no próprio corpo do capítulo 4 sem a necessidade de se utilizar o Apêndice.

---

[3] Ver Apêndice.

4.3.3 Transformação do termo A_3

Para aplicarmos a transformação no terceiro termo de (4.2), observamos que, a menos do fator exponencial

$$
\begin{aligned}
R_{\nu\lambda\alpha\beta}R^{\mu\lambda\alpha\beta} = R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\nu}R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\nu\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\lambda\alpha\beta} - 4\bar{R}^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\beta\sigma + 4\bar{R}^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - \\
- 2\bar{R}^\mu_\alpha\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 2\bar{R}^\alpha_\nu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma + 2\bar{R}^\mu_\alpha\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 2\bar{R}^\alpha_\nu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma - 4\bar{R}^\mu_\nu(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
+ 2(D-4)\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 2\delta^\mu_\nu(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 + 4\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^2\sigma + 4(D-3)\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
- 4\bar{\nabla}^2\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 2(D-4)\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 2(D-4)\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma - \\
- 4\delta^\mu_\nu\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 4\delta^\mu_\nu\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 2(D-2)\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(D-2)\delta^\mu_\nu(\bar{\nabla}\sigma)^4
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

e finalmente contraindo (4.12) com $\bar{R}^\nu_\mu$ dado por (4.6), encontramos para o sexto termo de (4.2) o resultado

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,A_3 \;=\; & \sqrt{|g|}\,R^\nu_\mu R_{\alpha\beta\lambda\nu}R^{\alpha\beta\lambda\mu} = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-6)\sigma}\,[\bar{R}^\nu_\mu\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\nu}\bar{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} - (D-2)\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\bar{\nabla}^\beta\sigma + \\
+ \; & (D-2)\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - \bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\nabla}^2\sigma - (D-2)\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
- \; & 4\bar{R}^{\mu\nu}\,\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^\beta\sigma + 4\bar{R}^{\mu\nu}\,\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 4(D-2)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\beta\sigma - \\
- \; & 8(D-2)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\beta\sigma - 4\bar{R}^{\mu\alpha}\,\bar{R}_{\nu\alpha}\,\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + \\
+ \; & 4\bar{R}^{\mu\alpha}\,\bar{R}_{\nu\alpha}\,\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma - 4\bar{R}^2_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(3D-8)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma + \\
+ \; & 12\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 4(3D-8)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 12\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + \\
+ \; & 4(4D-9)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 10(D-2)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2\bar{R}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 - \\
- \; & 4\bar{R}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 8\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 6(D-2)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 - \\
- \; & 2(D-4)(D-2)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\mu\sigma - 10(D-2)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma - \\
- \; & 4(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 + 6(D-4)(D-2)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma - \\
- \; & 2(4D-11)(D-2)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 20(D-2)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
- \; & 16(D-2)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 10(D-2)^2\,\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
- \; & 2(6D-11)(D-2)\bar{\nabla}^2\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^4 - 2(D-2)^2(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^6\,].
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

4.3.4 Transformação do termo A_4

Inicialmente o quarto termo de (4.2) pode ser reescrito de modo que

$$R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} = R^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}R^{\nu}_{\mu}R^{\beta}_{\alpha}\,. \tag{4.14}$$

Com $R^{\nu}_{\mu}R^{\beta}_{\alpha}$, dado por (4.6) e omitindo a exponencial, obtemos

$$\begin{aligned}
R^{\nu}_{\mu}R^{\beta}_{\alpha} &= \bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{R}^{\beta}_{\alpha} + \{\, -(D-2)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + (D-2)\bar{R}^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \delta^{\nu}_{\mu}\bar{R}^{\beta}_{\alpha}\bar{\nabla}^{2}\sigma - \\
&- (D-2)\delta^{\nu}_{\mu}\bar{R}^{\beta}_{\alpha}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + (D-2)\delta^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma - (D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \\
&- (D-2)\delta^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma + (D-2)^{2}\delta^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - (D-2)^{2}\delta^{\nu}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&+ [\,(\mu\leftrightarrow\alpha) \text{ e } (\nu\leftrightarrow\beta)\,]\,\} + (D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + \delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha}(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2} + \\
&+ 2(D-2)\delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha}\bar{\nabla}^{2}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + (D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + (D-2)^{2}\delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^{4}\,.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Multiplicando esta expressão por $R^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}$, recuperando a exponencial omitida e reorganizando os índices teremos para o termo A_4:

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,A_4 &= \sqrt{|g|}R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-6)\sigma}\,[\,\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta} - 2(D-2)\bar{R}^{\mu\nu}\,\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + \\
&+ 2(D-2)\bar{R}^{\mu\nu}\,\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 2\bar{R}^{\mu\alpha}\,\bar{R}_{\nu\alpha}\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - 2\bar{R}^{\mu\alpha}\,\bar{R}_{\nu\alpha}\,\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \\
&- 2\bar{R}^{2}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{2}\sigma - (2D-5)\bar{R}^{2}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - 2\bar{R}\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 2\bar{R}\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - \bar{R}^{2}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&+ (D-2)^{2}\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\;\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - 2(D-2)^{2}\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\;\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \\
&- 4(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 6(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma + 8(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \\
&- 6(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma + 4(D-3)(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - \\
&- 4(D-2)^{2}\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + 2(D-2)\bar{R}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2} + 3\bar{R}(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2} - \\
&- 4(D-2)\bar{R}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\;\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 8(D-2)\bar{R}\bar{\nabla}^{2}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + 3(D-2)^{2}\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^{4} + \\
&+ 2(D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\;\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\;\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - 4(D-2)^{2}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,\bar{\nabla}^{2}\sigma - 2(2D-3)(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{3} - \\
&- 6(D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\;\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\;\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - (2D-7)(D-2)^{2}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&+ 8(D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\;\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma - (D-2)(10D-17)(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2}(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&+ 4(D-2)^{3}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\;\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - 2(D-2)^{2}(3D-5)\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{4} - \\
&- (D-2)^{3}(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^{6}\,]\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3.5 Transformação do termo A_5

Este escalar apresenta três tensores de Ricci contraídos $R_\mu^\nu R_\alpha^\mu R_\nu^\alpha$. Tomaremos dois deles, por exemplo $R_\mu^\nu R_\alpha^\mu$, sua transformação equivale à contração de um par de índices de (4.15). A menos do fator $e^{-4\sigma}$, ela é tal que

$$\begin{aligned} R_\mu^\nu R_\alpha^\mu = {} & \bar{R}_\mu^\nu \bar{R}_\alpha^\mu - (D-2)\bar{R}^{\nu\mu}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\mu\sigma - (D-2)\bar{R}_{\alpha\mu}\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\mu\sigma + (D-2)\bar{R}^{\nu\mu}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\mu\sigma \\ & + (D-2)\bar{R}_{\alpha\mu}\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma - 2\bar{R}_\alpha^\nu\bar{\nabla}^2\sigma - 2(D-2)\bar{R}_\alpha^\nu(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-2)^2\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\mu\sigma \\ & + \delta_\alpha^\nu(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 2(D-2)\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - (D-2)^2\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\mu\sigma - (D-2)^2\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma \\ & - 2(D-2)\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + 2(D-2)^2\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(D-2)\delta_\alpha^\nu\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ & - (D-2)^2\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-2)^2\delta_\alpha^\nu(\bar{\nabla}\sigma)^4 . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Multiplicando a expressão acima por R_ν^α, devolvendo o fator $e^{-6\sigma}$ que foi omitido, e também multiplicando, como de praxe, ambos os membros por $\sqrt{-g}$, vemos que o quinto termo de $E_{(6)}$ torna-se

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\,A_5 \;=\; & \sqrt{|g|}R_\mu^\nu R_\alpha^\mu R_\nu^\alpha = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-6)\sigma}[\,\bar{R}_\mu^\nu\bar{R}_\alpha^\mu\bar{R}_\nu^\alpha - 3(D-2)\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma \;+ \\ + \;& 3(D-2)\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma \;- 3\bar{R}_{\mu\nu}^2\bar{\nabla}^2\sigma - 3(D-2)\bar{R}_{\mu\nu}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;+ \\ + \;& 3(D-2)^2\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 6(D-2)\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 6(D-2)^2\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma \;- \\ - \;& 6(D-2)\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + 6(D-2)^2\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;- 3(D-2)^2\bar{R}_\nu^\mu\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ + \;& 3\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 6(D-2)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 3(D-2)^2\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 - (D-2)^3\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\mu\sigma \;- \\ - \;& 3(D-2)^2(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma \;- 2(2D-3)(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 + 3(D-2)^3\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma \;- \\ - \;& 3(D-2)^3(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;+ 6(D-2)^2\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma \;- \\ - \;& 3(D-2)(3D-5)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 3(D-2)^3\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \;- \\ - \;& 3(D-2)^2(2D-3)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4 - (D-2)^3(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^6\,]\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como veremos a seguir, as transformações nos termos A_6, A_7 e A_8 são relativamente mais simples, pois são produtos dos escalares de segunda ordem na curvatura pelo escalar R já obtidas no capítulo 2.

4.3.6 Transformação do termo A_6

O sexto termo de $E_{(6)}$ se transforma de modo que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,A_6 &= \sqrt{|g|}RR^2_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-6)\sigma}[\bar{R}\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2(D-1)\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\nabla}^2\sigma - (D-2)(D-1)\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- 8\bar{R}\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma + 8\bar{R}\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 4\bar{R}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
&- 16(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + 8(D-2)(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- 8(D-2)(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 4(D-2)\bar{R}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + 4\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 - \\
&- 8(D-2)\bar{R}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 8(2D-3)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 6(D-2)(D-1)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 - \\
&- 8(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma - 8(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 - 4(D-2)^2(D-1)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ 16(D-2)(D-1)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 20(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ 8(D-2)^2(D-1)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4(D-2)(D-1)(3D-5)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4 - \\
&- 2(D-2)^2(D-1)^2(\bar{\nabla}\sigma)^6\,]\,. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

4.3.7 Transformação do termo A_7

O sétimo termo de $E_{(6)}$ tem sua parametrização conforme dada por

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,A_7 &= \sqrt{|g|}RR^2_{\mu\nu} = \sqrt{|\bar{g}|}\,e^{(D-6)\sigma}[\bar{R}\bar{R}^2_{\mu\nu} - 2(D-1)\bar{R}^2_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\sigma - (D-2)(D-1)\bar{R}^2_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- 2(D-2)\bar{R}\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma + 2(D-2)\bar{R}\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 2\bar{R}^2\bar{\nabla}^2\sigma - 2(D-2)\bar{R}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ 4(D-2)(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 4(D-2)(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + \\
&+ 2(D-2)^2(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 2(D-2)^2(D-1)\bar{R}^\nu_\mu\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ (D-2)^2\bar{R}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + (7D-8)\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 - 2(D-2)^2\bar{R}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + \\
&+ 2(D-2)(5D-6)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 3(D-2)^2(D-1)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 - \\
&- 2(D-2)^2(D-1)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma - 2(3D-4)(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 - \\
&- (D-2)^3(D-1)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 4(D-2)^2(D-1)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
&- (D-2)(D-1)(11D-16)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2(D-2)^3(D-1)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- 2(D-2)^2(D-1)(3D-4)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4 - (D-2)^3(D-1)^2(\bar{\nabla}\sigma)^6\,]\,. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

4.3.8 Transformação do termo A_8

O oitavo termo de $E_{(6)}$, o menos trabalhoso, transforma-se de modo que

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\, A_8 &= \sqrt{|g|}R^3 \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}\, e^{(D-6)\sigma}[\, \bar{R}^3 - 6(D-1)\bar{R}^2\bar{\nabla}^2\sigma - 3(D-2)(D-1)\bar{R}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 \; + \\ &+ \; 12(D-1)^2\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 12(D-2)(D-1)^2\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 3(D-2)^2(D-1)^2\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 \; - \\ &- \; 8(D-1)^3(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 - 12(D-2)(D-1)^3(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 6(D-2)^2(D-1)^3\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4 \; - \\ &- \; (D-2)^3(D-1)^3(\bar{\nabla}\sigma)^6\,] \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.4 Transformação conforme de $E_{(6)}$

Seguindo um procedimento análogo ao que foi feito no capitulo 2, reuniremos os resultados de (4.8) a (4.21) combinando-os segundo os coeficientes da equação (4.3). De fato, poderíamos antecipadamente substituir nestas equações o valor $D = 6$ que, a bem da verdade, é o que se pretende, pois o cálculo da densidade de Euler $E_{(6)}$ em (4.1) é realizado obviamente para seis dimensões. Entretanto, a fim de se verificar certas propriedades dos coeficientes polinomiais em D de cada um dos termos da transformação de $E_{(6)}$, manteremos *a priori* os coeficientes como função de D.

Fato notável é o de que a fatoração destes coeficientes polinomiais, como veremos, nos conduz sempre a raízes inteiras compreendidas entre 1 e 6. Outro aspecto de grande peculiaridade é que em todos os coeficientes dos termos contendo derivadas de σ encontramos o coeficiente $(D-5)$. Chamamos a atenção para o ocorrido na transformação de $E = E_{(4)}$ obtida em (2.19) em que em todos os termos com derivadas de σ, encontra-se o fator $(D-3)$, assim como, para a transformação conforme de $R = E_{(2)}$ (2.11), encontramos de modo semelhante o coeficiente $(D-1)$.

Adotamos para a representação da transformação conforme de $E_{(6)}$ que mantém os coeficientes dos termos com as derivadas de σ como função de D, a notação $E_{(6\,;\,D)}$; seu resultado é, utilizando as transformações de (4.8) a (4.21),

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|g|}E_{(6\,;\,D)} &= \sqrt{|\bar{g}|}\, e^{(D-6)\sigma}\, [\, \bar{E}_{(6)} + 24(D-5)\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\bar{\nabla}^\beta\sigma - 24(D-5)\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - \\
&- \;\; 6(D-5)\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\nabla}^2\sigma - 3(D-6)(D-5)\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 48(D-5)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^\beta\sigma + \\
&+ \;\; 48(D-5)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - 48(D-5)\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + 48(D-5)\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + \\
&+ \;\; 24(D-5)\bar{R}^2_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\sigma + 12(D-6)(D-5)\bar{R}^2_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 24(D-5)\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma - \\
&- \;\; 24(D-5)\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 6(D-5)\bar{R}^2\bar{\nabla}^2\sigma - 3(D-6)(D-5)\bar{R}^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ \;\; 24(D-5)(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\beta\sigma - 48(D-5)(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + \\
&+ \;\; 48(D-5)(D-4)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 48(D-5)(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
&- \;\; 96(D-5)(D-4)\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 48(D-5)(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
&- \;\; 24(D-5)^2(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 24(D-5)(D-4)(D-3)\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
&- \;\; 12(D-5)(D-4)\bar{R}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + 12(D-5)(D-4)\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + \\
&+ \;\; 24(D-5)(D-4)\bar{R}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 12(D-5)^2(D-4)\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ \;\; 3(D-6)(D-5)(D-4)(D-3)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 - 16(D-5)(D-4)(D-3)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\mu\sigma + \\
&+ \;\; 24(D-5)(D-4)(D-3)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma - 8(D-5)(D-4)(D-3)(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 + \\
&+ \;\; 48(D-5)(D-4)(D-3)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma + 12(D-5)(D-4)^2(D-3)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- \;\; 48(D-5)(D-4)(D-3)\,\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 12(D-5)(D-4)^2(D-3)(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- \;\; 24(D-5)(D-4)(D-3)(D-2)\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \\
&- \;\; 6(D-5)^2(D-4)(D-3)(D-2)\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4 - \\
&- \;\; (D-6)(D-5)(D-4)(D-3)(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^6\,]\,. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos, de posse do resultado acima, fazer a substituição $D = 6$ e obter a tão desejada transformação do termo $E_{(6)}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\,E_{(6)} &= \sqrt{|\bar{g}|}\,[\,\bar{E}_{(6)} + 24\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\bar{\nabla}^\beta\sigma - 24\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - \\
&- 6\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\nabla}^2\sigma - 48\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^\beta\sigma + 48\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - 48\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + \\
&+ 48\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 24\bar{R}^2_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\sigma + 24\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma - 24\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - 6\bar{R}^2\bar{\nabla}^2\sigma + \\
&+ 48\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\beta\sigma - 96\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 96\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma - \\
&- 96\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 192\bar{R}^\mu_\nu\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 96\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - 48\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ 144\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 24\bar{R}(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + 24\bar{R}(\bar{\nabla}^2\sigma)^2 + 48\bar{R}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + \\
&+ 24\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 96\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\,\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\mu\sigma + 144(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,\bar{\nabla}^2\sigma - 48(\bar{\nabla}^2\sigma)^3 + \\
&+ 288\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\,\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}^\mu\sigma + 144(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 288\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\nabla}^2\sigma - \\
&- 144(\bar{\nabla}^2\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 576\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\,\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 144\bar{\nabla}^2\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4\,]\,.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Os resultados (4.22) e (4.23), obtidos neste capítulo, representam um importante progresso no estudo teorias conformes de alta ordem, neste caso, com seis derivadas. Embora sejam ainda uma pequena parte de um todo, certamente mais complexo, devemos considerá-los como um êxito de grande relevância.

Conclusão

A obtenção da relação entre $E_{(6)}$ e $\bar{E}_{(6)}$ representa um salto importante na busca do operador conforme Δ_6. Embora tenhamos realizado apenas uma primeira etapa, perspectivas futuras de progresso neste intento se revelam bastante promissoras. Optamos neste trabalho em trilhar um caminho para chegar ao análgo $6D$ do operador de Paneitz via relações com a densidade de Euler na mesmo dimensão. Nosso objetivo em obter a expressão da densidade de Euler numa base de escalares de terceira ordem na curvatura e suas propriedades conformes foi atingido como ponto de partida para futuros avanços.

Fez-se necessário um estudo sobre os tensores de curvatura e suas propriedades, tais como, simetrias e contrações. Estes objetos são protagonistas em todo o trabalho pois é através de combinações lineares de escalares originados de suas contrações que obtemos as densidades de Euler. Além disso, como nossa intenção futura é encontrar um operador conforme de alta ordem, via equação (3.3) e que satisfaça relações análogas a (3.6) e (3.19), foi mister um estudo detalhado sobre transformações conformes e sua aplicação nos tensores de curvatura e suas contrações.

Como este trabalho revelou, em $D = 2$ e $D = 4$ há uma forte relação, eq (3.3), entre o operador conforme, a densidade de Euler e termos com derivadas totais $\nabla_\mu \chi^\mu$. Obviamente χ^μ deve ser um vetor constituído por termos que contenham $D-1$ derivadas. No caso $D = 6$ em que buscamos encontrar relação semelhante, conjecturamos que χ^μ é um objeto a ser determinado que deve conter termos tais como

$$\chi^\mu = \alpha_1 R \nabla^\mu R + \alpha_2 R_{\alpha\beta} \nabla^\mu R^{\alpha\beta} + \alpha_3 R^\mu_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta} + \alpha_4 R^{\mu\alpha} \nabla_\alpha R + \cdots .$$

Por fim, acreditamos que a pesquisa sobre propriedades conformes e transformações de termos desta espécie é tema em aberto e motivação para a continuidade de pesquisa nesta linha.

Apêndice

Apresentamos alguns detalhes dos cálculos referentes ao capítulo 4 dos termos A_1 e A_2 que são os que envolvem três tensores de Riemann e, portanto, são os mais custosos de serem realizados. Os desenvolvimentos aqui mostrados omitem intencionalmente os fatores $e^{\pm 2\sigma}$.

Detalhamento do cálculo do termo A_1

Faremos estes cálculos em quatro etapas, a primeira delas é a contração de (4.7) com o primeiro termo de (4.5) que nos dá

$$
\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\, \bar{R}^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} &= \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, \bar{R}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\, \bar{R}^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} + 4\,\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, \bar{R}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\nabla}^{\beta}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma - \\
&- 4\,\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, \bar{R}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma + 2\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, \bar{R}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4\,\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + \\
&+4\,\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + (D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - 2(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \\
&- 2\,\bar{R}^2_{\mu\nu}\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 2\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + 8\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \\
&- 2\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^2\sigma + 2(D-5)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 2(D-3)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ \bar{R}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 - 2\,\bar{R}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 2\,\bar{R}\bar{\nabla}^2\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-3)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \quad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

Fazendo o mesmo com os quatro termos de (4.5) que possuem segundas derivadas de σ obtemos

$$
\begin{aligned}
&R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\,(\,\delta^{\lambda}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\tau}\sigma\,-\,\bar{g}^{\lambda\tau}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,+\,\delta^{\tau}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma\,-\,\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\lambda}\bar{\nabla}^{\tau}\sigma\,) = \\
&\quad = 2\,\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar{R}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\nabla}^{\beta}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma - 2\,\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + 2(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \\
&\quad - 2(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma\, - 8\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, + 4\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma + \\
&\quad + 8\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, - \,2\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma\, + 2(D-5)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} \\
&\quad + 2\bar{R}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2} - 2\,\bar{R}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + \,2\,\bar{R}\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&\quad + 2(3D-8)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, - 6(D-3)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,\bar{\nabla}^{2}\sigma\, - 2(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{3} - \\
&\quad - 4(3D-8)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\, - 2(D^{2}-8D+14)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&\quad + 8(D-3)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{2}\sigma\, - 2(3D-8)(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&\quad + 2(D-3)(D-2)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - 2(D-3)(D-2)\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{4}\,, \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

contraindo (4.7) com os termos de (4.5) que contém $(\bar{\nabla}\sigma)^2$ teremos

$$
\begin{aligned}
&R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\,[\,\delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\tau}_{\mu}(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, - \bar{g}^{\lambda\tau}\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^{2}] = \\
&\quad = \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar{R}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, - \bar{R}^{2}_{\mu\nu}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, + 2(D-4)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - \\
&\quad - 2(D-4)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, + 2\,\bar{R}\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, + 2(D-3)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^{4} - \\
&\quad - (D-4)(D-2)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, - 3(D-2)(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&\quad + 2(D-4)(D-2)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, - 2(2D-5)(D-2)\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{4} - \\
&\quad - (D-3)(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^{6} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

e finalmente com os termos com produtos de duas derivadas de σ chegamos a

$$
\begin{aligned}
&R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\, R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}\,(\bar{g}^{\lambda\tau}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\, - \delta^{\lambda}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\tau}\sigma\, + \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma\,\bar{\nabla}^{\tau}\sigma\, - \delta^{\tau}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\lambda}\sigma) = \\
&\quad = -2\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar{R}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\lambda}\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma\,\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma + 2\,\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - 2(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + \\
&\quad + 8\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\, - \,2\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{2}\sigma\, - 2\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - \\
&\quad -2(D-2)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\,\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} - 2\,\bar{R}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - 2(3D-8)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma + \\
&\quad + 2(D-3)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2}\, + 4(D-3)\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{2}\sigma\, + 2(\bar{\nabla}^{2}\sigma)^{2}\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + \\
&\quad + 2(D-2)^{2}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{2} + 2(D-2)\bar{\nabla}^{2}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^{4}\,. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

Somando os resultados de (A.1) a (A.4), recolocando o fator exponencial omitido e multiplicando ambos os membros pela raiz quadrada do determinante da métrica, obtemos a transformação do termo A_1 dada no capítulo 4 pela equação (4.8). Devido às propriedades de permutação cíclica de índices do tensor de Riemann (1.16), é importante notar que o escalar $\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar{R}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{\alpha} \equiv \bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{R}^{\mu\beta\nu\alpha}$ que aparece no quarto termo do segundo membro de (A.1) e no primeiro termo do segundo membro de (A.3) é tal que

$$\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\,\bar{R}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\,. \tag{A.5}$$

De modo análogo, termos em que aparecem expressões do tipo $\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\lambda}$ devem ser substituídos de modo que

$$\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{R}^{\nu\alpha\mu\lambda} = \frac{1}{2}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\lambda}\,. \tag{A.6}$$

Detalhamento do cálculo do termo A_2

De modo semelhante ao que efetuamos para A_1, contrairemos separadamente (4.9) com alguns grupos de termos da eq. (4.4). Inicialmente para o primeiro termo desta, teremos

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}\bar{R}^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} = {} & \bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho}\bar{R}^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} - 8\,\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 8\,\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\lambda}\sigma\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - \\
& - 4\,\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 8\,\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - 16\,\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + \\
& + 8\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - 16\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 16\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 8\,\bar{R}^{\mu}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
& + 4\,\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4\,.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Implementando o mesmo com os quatro termos de (4.4) que contém as derivadas segundas de σ encontramos

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}\,(\delta^\lambda_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\tau\sigma-\delta^\lambda_\mu\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\tau\sigma+\delta^\tau_\mu\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\lambda\sigma-\delta^\tau_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\lambda\sigma)=$$
$$=-4\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar R^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}\bar\nabla_\lambda\bar\nabla^\beta\sigma+16\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\beta\sigma-16\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\beta\sigma+$$
$$+\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\,\bar\nabla^\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,-\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma\,+\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-$$
$$-8(D-4)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\bar\nabla^\mu\sigma-24\,(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,\bar\nabla^2\sigma+16(D-4)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma-$$
$$-\,16(D-3)(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2\,+\,32\,\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla^2\sigma\,-\,16\,(\bar\nabla^2\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2+$$
$$+\,8(D-2)\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2\,-\,8(D-2)\bar\nabla^2\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^4\,. \tag{A.8}$$

Utilizando os dois termos de (4.4) que contém $(\bar\nabla\sigma)^2$ encontramos

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}\,[\delta^\lambda_\nu\delta^\tau_\mu(\bar\nabla\sigma)^2-\delta^\lambda_\mu\delta^\tau_\nu(\bar\nabla\sigma)^2]\,=\,-2\,\bar R^2_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar\nabla\sigma)^2+\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2-$$
$$-\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2\,+\,8\,\bar R(\bar\nabla\sigma)^4-\,8(D-2)\,(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2\,-\,8\,(\bar\nabla^2\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2+$$
$$+\,16(D-2)\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma(\bar\nabla\sigma)^2\,-\,16(D-2)\bar\nabla^2\sigma\,(\bar\nabla\sigma)^4\,-4(D-2)(D-1)\,(\bar\nabla\sigma)^6 \tag{A.9}$$

e com último grupo de quatro termos de (4.4) geramos

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}\,(\delta^\lambda_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\bar\nabla^\tau\sigma-\delta^\lambda_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\tau\sigma+\delta^\tau_\nu\bar\nabla_\mu\sigma\bar\nabla^\lambda\sigma-\delta^\tau_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\bar\nabla^\lambda\sigma)=$$
$$=\,4\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar R^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}\bar\nabla_\lambda\sigma\bar\nabla^\beta\sigma\,-\,16\,\bar R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\,\bar\nabla_\nu\sigma\bar\nabla^\beta\sigma\,-\,16\,\bar R^\mu_\nu\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^\alpha\sigma+$$
$$+\,8(D-4)\bar\nabla_\mu\bar\nabla^\nu\sigma\,\bar\nabla_\nu\bar\nabla^\alpha\sigma\,\bar\nabla_\alpha\sigma\bar\nabla^\mu\sigma\,+\,8\,(\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma)^2\,(\bar\nabla\sigma)^2\,+16\bar\nabla_\mu\bar\nabla_\nu\sigma\,\bar\nabla^\mu\sigma\bar\nabla^\nu\sigma\bar\nabla^2\sigma\,. \tag{A.10}$$

Novamente somando os resultados de (A.7) a (A.10), reintroduzindo o fator exponencial omitido e multiplicando ambos os membros pela raiz quadrada do determinante da métrica, obtemos a transformação do termo A_2 dada no capítulo 4 pela equação (4.11).

Bibliografia

[1] A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1923).

[2] L. Landau, E. Lifshitz, *Física Teórica - Vol. 2 - Teoria do campo* , (Mir, Moscou, 1980).

[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972).

[4] N.D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[5] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[6] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman, New York, 1973).

[7] J. Erdmenger, *Conformally Covariant Differential Operators: Properties and Applications*, Class. Quant. Grav. *14*, 2061-2084 (1997).

[8] F. Bastianelli, S. Frolov and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly of (2,0) tensor multiplet in six dimensions and AdS/CFT correspondence*, JHEP **0002** (2000) 013.

[9] M.J. Duff, *Twenty Years of the Weyl Anomaly*, Class. Quant. Grav. **11**, 1387-1404 (1994).

[10] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov e I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing, Bristol, 1992).

[11] R.J. Riegert, *A Nonlocal Action for the Trace Anomaly*, Phys. Lett. B **134**, 56-60 (1984).

[12] E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, *Conformal Anomaly in Weyl Theory and Anomaly Free Superconformal Theories*, Phys. Lett. B **134**, 187-193(1984).

[13] J.A. de Barros, I.L. Shapiro, *Renormalization group study of the higher derivative conformal scalar model*, Phys. Lett. B **412**, 242-252 (1997).

[14] Sebastião Mauro, I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action and Chern-Simons modification of general relativity*, e-Print: arXiv:1412.5002 (2014).

[15] S. Carroll, *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*, (Addison Wesley, San Francisco, 2004)

[16] A.S. Belyaev, I.L. Shapiro, *Torsion action and its possible observables*, Nucl. Phys. B **543**, 20-46 (1999).

[17] D.F. Carneiro, E.A. Freiras, B. Gonçalves, A.G. de Lima, I.L. Shapiro, *On Useful Conformal Tranformations in General Relativity*, Grav. Cosmol. **10**, 305-312 (2004).

[18] I. Chavel, *Riemannian Geometry - A Modern Introduction - 2nd ed.*, (Cambridge University Press, New York, 2006).

[19] Y. Décanini and A. Folacci, *Irreducible forms for the metric variations of the action terms of sixth-order gravity and approximated stress-energy tensor*, Class. Quant. Grav. **24**, 4777-4799 (2007).

[20] S.M. Paneitz, *A Quartic Conformally Covariant Differential Operator for Arbitrary Pseudo-Riemannian Manifolds (Summary)*, SIGMA **4**, 36-38 (2008).

[21] K. Peeters, *A Field-theory motivated approach to symbolic computer algebra*, Comput. Phys. Commun. **176**, 550-558 (2007).

[22] K. Peeters, *Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems*, SPIN-06-46, ITP-UU-06-56, e-Print: hep-th/0701238.

[23] R.C. Myers, B. Robinson, *Black Holes in Quasi-topological Gravity*, JHEP **1008**, 067 (2010).