

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Cleber Abrahão de Souza

**Campos de Dirac no universo de
Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker**

Juiz de Fora

2011

Cleber Abrahão de Souza

**Campos de Dirac no universo de
Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Berredo de Peixoto

Juiz de Fora

2011

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus,

Aos meus pais Luciene e Manoel, e à minha irmã Elaine Cristina (Nani), que me apoiaram incondicionalmente para a realização deste trabalho.

Ao professor Guilherme de Berredo Peixoto pela orientação e esclarecimento durante o trabalho, e ao professor Ilya Shapiro pelos esclarecimentos e pelo seu curso de Relatividade Geral e Cosmologia que teve importância para o entendimento de nosso trabalho.

Aos demais professores do departamento que ministraram disciplinas que também foram importantes para o meu desenvolvimento.

Agradeço aos meus colegas de pós-graduação, por terem me acompanhado nessa jornada e pelos bons momentos que compartilhamos, bem como pelas inúmeras conversas informais sobre física que contribuíram para o engrandecimento deste trabalho.

Ao Sr. Pedro e à memória da Sra. Teoteonilia.

Agradeço à UFJF, pela estrutura oferecida, incluindo todos os funcionários, e à CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos que me ajudaram e estiveram juntos durante a realização do meu trabalho.

A única generalização cem por cento segura sobre a história é aquela que diz que enquanto houver raça humana haverá história.

Eric Hobsbawn

RESUMO

A teoria relativística da gravitação é uma ferramenta fundamental para a compreensão da cosmologia moderna. Ela descreve a dinâmica do campo gravitacional ao longo do espaço-tempo. Dentre os possíveis modelos de universo, um dos mais comuns é o descrito pela métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW). Esta métrica pode ser escrita em termos do tempo conforme e descreve um universo homogêneo e isotrópico. Neste trabalho investigamos os campos de Dirac não massivos neste modelo de universo. Os resultados mostram uma compatibilidade entre as equações de Dirac e a métrica de FLRW. Os efeitos do parâmetro de Immirzi junto com os férmions podem ser descritos em termos de um fluido perfeito usual intermediário entre a poeira e radiação.

Palavras-chave: 1. Gravitação e Cosmologia. 2. Campo de Dirac. 3. Parâmetro de Immirzi.

ABSTRACT

The general relativity theory is fundamental tool for understanding the modern cosmology. In this work we investigated the massless Dirac fields in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker universe. The metric is written in terms of conformal time which describes a homogeneous and isotropic universe. We show that the effects of Immirzi parameter along with the fermions can be described in terms of a usual perfect fluid intermediate between dust and radiation.

Keyword : 1. Gravitation and Cosmology. 2. Dirac Field. 3. Immirzi Parameter.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE	10
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA RELATIVIDADE GERAL	12
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	12
2.2	TENSOR CURVATURA	17
2.3	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	18
2.4	EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	19
3	COSMOLOGIA RELATIVISTA	22
3.1	O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO	22
3.2	POSTULADO DE WEYL	22
3.3	ESPAÇO COM CURVATURA CONSTANTE	23
3.4	AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN	24
3.5	ALGUNS PARÂMETROS COSMOLÓGICOS	25
4	CAMPO DE DIRAC	27
4.1	OS ESPINORES DE DIRAC	27
4.2	FORMALISMO MATEMÁTICO	28
4.2.1	Conexão de Spin	28
4.2.2	Derivada Covariante de um espinor	29
4.3	CAMPO FERMIÔNICO	29
4.3.1	Procedimento e solução	31

5	CONCLUSÕES	39
	APÊNDICE A – TENSOR DE RIEMANN	40
	APÊNDICE B – EQUAÇÕES DE FRIEDMANN	41
	APÊNDICE C – CONEXÃO DE SPIN	44
	APÊNDICE D – VARIAÇÃO DA CONEXÃO DE SPIN	45
	APÊNDICE E – MOSTRANDO QUE A EQUAÇÃO (4.3.17) É IDENTICAMENTE NULA	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Um dos primeiros trabalhos que abordam a relação entre a teoria da Relatividade Geral (RG) com a teoria de Dirac foi publicado em 1929 por H. Weyl [1]. Nele, apresenta-se as equações de campo levando em conta o spin do elétron com a ajuda da teoria de Dirac. O processo de acoplamento da teoria de Dirac com a gravitação Einsteiniana é feito através de uma constante de acoplamento. A lagrangiana total do sistema é dada pela soma do termo devido ao campo gravitacional com o termo referente ao campo fermiônico [2]. Alguns trabalhos investigam o comportamento de férmions não massivos no espaço-tempo curvo [3, 4]. Kerlick [5] considerou que a interação spin-spin representa um papel importante no processo de produção de pares de partículas no Universo jovem .

O campo fermiônico é muitas vezes examinado como possível ingrediente relacionado ao processo de expansão acelerada do universo. No caso massivo, este campo pode ter sido responsável pelo processo de inflação do universo jovem e pode ser interpretado como energia escura [6].

O acoplamento entre o campo de Dirac e a RG pode ser visto em [7]. A transição acelerada-desacelerada no universo primordial é investigada a partir da análise da dinâmica do campo fermiônico dentro do contexto da teoria de Einstein-Cartan, e a curvatura do espaço-tempo é também descrita pelo campo de torção. O termo associado ao spin do campo fermiônico contribui para o regime acelerado ao passo que a massa do férmion se comporta como um campo de matéria, o qual é responsável pelo regime desacelerado [8].

Nesta dissertação, estudamos o campo de Dirac no modelo de universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Neste capítulo, veremos as principais idéias básicas que ajudaram a formular a teoria RG. No capítulo 2, os fundamentos matemáticos da teoria RG são apresentados. No capítulo 3, apresentamos os principais aspectos da cosmologia relativista e alguns parâmetros fundamentais da cosmologia moderna. No capítulo 4, apresentamos o formalismo matemático da teoria de Dirac e mostramos os resultados do estudo do campo de

Dirac no modelo cosmológico de FLRW. Finalmente, apresentamos as conclusões no capítulo 5 e algumas demonstrações matemáticas úteis são apresentadas nos apêndices.

1.1 PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE

Em 1905, A. Einstein formulou a teoria da Relatividade Especial (RE) partindo dos seguintes postulados:

Postulado 1: *Os observadores inerciais são equivalentes para a formulação de todas as leis físicas.*

Postulado 2: *A luz propaga-se no vácuo com uma velocidade finita c , para todos os observadores inerciais.*

Este segundo postulado trata-se do princípio da invariância da velocidade da luz. Observador inercial é um observador em repouso num referencial inercial [9]. Este é um sistema de referência onde as partículas livres se movem com velocidade uniforme segundo linhas retas no espaço-tempo ou permanecem em repouso. Um dos pressupostos subjacentes à teoria da Relatividade é que o espaço e o tempo tornam-se uma única entidade, diferente da física newtoniana. Esse espaço-tempo quadridimensional é munido de uma métrica que caracteriza um espaço plano em RE. Como podemos ver, esta teoria não inclui a interação gravitacional. Outro aspecto importante dessa teoria é que o tempo deixa de ser absoluto e o conceito de simultaneidade deixa de existir. A teoria da RE trouxe consequências físicas importantes como a dilatação temporal e a contração das distâncias quando relaciona observadores em diferentes referenciais inerciais.

Em 1915, A. Einstein formulou a teoria da RG, a qual descreve a interação gravitacional. Esta teoria estende a equivalência das leis físicas para todos os observadores, e não para uma classe privilegiada (os observadores inerciais) como em RE. A teoria da RG deve manter as leis da física invariantes sob transformações de coordenadas. As equações que descrevem os fenômenos físicos devem ser apresentadas na forma tensorial já que os tensores possuem elementos invariantes sob transformações de coordenadas. Este é um princípio importante conhecido como princípio de covariância.

A teoria da RG é capaz de fazer uma conexão entre referenciais acelerados e o campo gravitacional. Esta conexão é garantida por um princípio básico que é o princípio de equivalência, o qual diz que um sistema de referência inercial não acelerado imerso num campo gravitacional

uniforme é equivalente a um sistema de referência uniformemente acelerado na ausência de um campo gravitacional. Outro princípio importante é o princípio de Mach, segundo o qual cada partícula do Universo exerce uma influência sobre todas as demais partículas [11]. Todas essas idéias serviram de base para a construção dessa teoria.

Na RG, o espaço-tempo torna-se uma quantidade dinâmica. Esse espaço-tempo quadridimensional possui uma métrica que caracteriza um espaço riemanniano. O aspecto mais importante dessa teoria consiste na capacidade que ela tem de relacionar a estrutura geométrica do espaço-tempo com a distribuição de matéria nele contida.

No próximo capítulo, veremos o ferramental matemático da teoria da RG. Esta teoria tem importante aplicação no estudo da cosmologia moderna que será tratada no capítulo 3.

2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA RELATIVIDADE GERAL

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Em relatividade, o espaço-tempo é constituído pelo conjunto de todos os acontecimentos físicos. Esse espaço-tempo pode ser representado por uma variedade diferenciável Riemanniana. O conceito de covariância implica numa descrição física independente do sistema de coordenadas escolhido. As quantidades físicas são representadas por objetos geométricos na variedade riemanniana.

Consideremos dois pontos vizinhos P e Q que pertencem a variedade Riemanniana. As coordenadas destes pontos são x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, respectivamente. Esses dois pontos definem um vetor infinitesimal \overrightarrow{PQ} . Suas componentes num outro sistema de coordenadas são x'^μ e $x'^\mu + dx'^\mu$. A lei de transformação entre esses sistemas de coordenadas é tal que podemos escrever

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (2.1.1)$$

Consideremos um campo vetorial A^μ no sistema de coordenadas x^μ , associado com o ponto P, chamamos de tensor contravariante de primeira ordem a quantidade

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x), \quad (2.1.2)$$

que se transforma sob mudança de coordenadas. Podemos representar um tensor contravariante de segunda ordem na seguinte forma:

$$A'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta}(x). \quad (2.1.3)$$

De maneira análoga, um tensor covariante de segunda ordem se transforma como

$$A'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta}(x). \quad (2.1.4)$$

Existem objetos que possuem tanto índices covariantes como contravariantes, são os tensores mistos. Definimos um tensor misto de terceira ordem na forma:

$$A'^{\mu}{}_{\nu\alpha}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A^{\beta}_{\zeta\lambda}(x). \quad (2.1.5)$$

De maneira geral, o produto tensorial de dois tensores resultará em tensores de ordem superior [10]. Então, podemos escrever

$$A_{\mu_1 \dots \mu_n}{}^{\nu_1 \dots \nu_n}(x) \cdot C_{\alpha_1 \dots \alpha_s}{}^{\beta_1 \dots \beta_t}(x) = D_{\mu_1 \dots \mu_n}{}^{\nu_1 \dots \nu_n}{}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}{}^{\beta_1 \dots \beta_t}(x). \quad (2.1.6)$$

No espaço Riemanniano, veremos um novo conceito de derivada. Essa derivada deve manter a covariância da teoria, logo ela se comportará como um tensor. Diferente da derivada usual no espaço plano, este novo objeto é chamado de derivada covariante. Consideremos aqui a abordagem geométrica para a construção da derivada covariante. Considere um campo vetorial $A^\mu(x)$ no espaço plano. Assumimos que um conjunto de vetores iguais (paralelos) em cada ponto do espaço pode representar esse campo. Em coordenadas cartesianas, temos $dA^\mu = 0$.

A construção do campo $A^\mu(x)$ consiste no transporte paralelo do mesmo, que é descrito pela relação

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = 0. \quad (2.1.7)$$

A relação (2.1.7) não é covariante, ou seja, não vale para um sistema arbitrário de coordenadas. No sistema de coordenadas esféricas, por exemplo, as componentes de dois vetores paralelos não serão necessariamente iguais entre si, ou seja, $\partial A^\mu / \partial x^\nu \neq 0$.

Busquemos uma noção covariante de transporte paralelo. De acordo com a Figura 2.1, depois de transportado paralelamente ao longo do segmento dx^ν , as componentes A^μ definidas no ponto P sofrem uma alteração caracterizada por δA^μ .

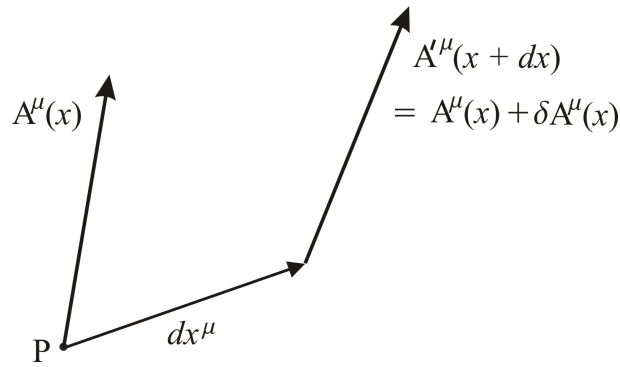


Figura 2.1: O vetor A^μ sofre uma alteração δA^μ quando é transportado paralelamente ao longo de um segmento infinitesimal.

Suponhamos que a quantidade δA^μ seja proporcional a A^ν e dx^α . Isso pode ser expresso através da equação

$$\delta A^\mu = dx^\lambda \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} A^\rho dx^\lambda, \quad (2.1.8)$$

onde o objeto $\Gamma^\mu_{\rho\lambda}$ é a conexão afim e depende do ponto P . Este objeto é responsável por fazer a conexão entre dois pontos. A conexão pode ser escrita em termos das derivadas da métrica através da relação

$$\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\partial_\rho g_{\beta\lambda} + \partial_\lambda g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\lambda}). \quad (2.1.9)$$

Quando a conexão é expressa desta forma, ela é conhecida como símbolos de Christoffel. Este objeto é simétrico, $\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\rho}$, uma vez que em nossa teoria não consideramos a torção, [12].

Considere a quantidade $A'^\mu(x+dx) - A^\mu(x) = \delta A^\mu(x)$. Temos

$$A'^\mu(x+dx) - A^\mu(x) - \delta A^\mu(x) = 0, \quad (2.1.10)$$

que é equivalente a

$$\frac{A'^\mu(x+dx) - A^\mu(x)}{dx^\nu} - \frac{\delta A^\mu(x)}{dx^\nu} = 0, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} A^\rho = 0. \quad (2.1.12)$$

A equação (2.1.12) diz que uma determinada quantidade que expressa uma variação do vetor A^μ é identicamente nula. Essa quantidade é a definição de derivada covariante,

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu} A^\rho, \quad (2.1.13)$$

onde $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$. Ela é sempre nula para um campo de vetores paralelos em qualquer sistema

de coordenadas.

A nossa discussão está baseada no espaço quadridimensional. Então os objetos aqui representados são acompanhados por índices gregos que variam de 0 a 3. A quantidade $g_{\mu\nu}$ é chamada de métrica do espaço-tempo e está relacionada com a distância infinitesimal entre dois pontos. É natural exigimos que a métrica seja covariante, ou seja,

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} \equiv 0, \quad (2.1.14)$$

que também é conhecida como condição de metricidade. A distância entre dois pontos no espaço-tempo é chamada de intervalo, e deve ser invariante sob transformações de Lorentz [13]. Tal intervalo invariante, em coordenadas cartesianas, é dado por

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1.15)$$

Estamos usando o sistema de unidades no qual $c = 1$. Os sinais são definidos dessa forma por conveniência. Considerando o espaço-tempo quadridimensional, definimos as coordenadas

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, +x, +y, +z), \quad (2.1.16)$$

e

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z). \quad (2.1.17)$$

De fato, a quantidade ds^2 é um invariante, pois temos

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu=0}^3 g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} = \sum_{\mu=0}^3 dx^{\mu} dx_{\mu} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1.18)$$

que é exatamente a relação (2.1.15). O produto interno das quantidades x^{μ} e x_{μ} é um invariante escalar. Podemos escrever x_{μ} em função da métrica $g_{\mu\nu}$ na seguinte forma

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}. \quad (2.1.19)$$

O tensor métrico em coordenadas cartesianas pode ser escrito na forma de uma matriz diagonal:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.20)$$

A forma contravariante ($g^{\mu\nu}$) é dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.21)$$

Donde $g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}$. A métrica $g_{\mu\nu}$ contém informações da geometria do espaço-tempo. Na variedade riemanniana, a métrica $g_{\mu\nu}$ se transforma de acordo com [11]

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x). \quad (2.1.22)$$

Seja $A^{\mu\nu}$ um tensor de segunda ordem definido no espaço-tempo. Sabemos que sob as transformações $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$, suas componentes satisfazem

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} A^{\rho\lambda}. \quad (2.1.23)$$

A equação acima pode ser escrita na forma matricial:

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} A'^{\rho\lambda} \Lambda_{\lambda}^{\nu}. \quad (2.1.24)$$

Note que $\Lambda_{\lambda}^{\nu} = (\Lambda^{\nu}_{\lambda})^t$. Em notação matricial, temos

$$\mathbb{A}' = \Lambda \mathbb{A} \Lambda^t. \quad (2.1.25)$$

Tomando o determinante da equação acima, obtemos

$$\det(\mathbb{A}') = \det(\Lambda)^2 \det(\mathbb{A}), \quad (2.1.26)$$

ou, escrito de outra forma,

$$\det(\mathbb{A}') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 \det(\mathbb{A}).$$

A equação acima mostra que o determinante de uma matriz não é apenas um escalar que satisfaz $\phi'(x') = \phi(x)$, mas sim uma densidade escalar de peso 2. A diferença é a presença do determinante da matriz Λ na lei de transformação. Com base nessa relação podemos considerar a métrica $g_{\mu\nu}$ e escrever $\det(g)' \equiv g' = \det^{-2}(\Lambda)g$, ou seja,

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{-g}. \quad (2.1.27)$$

Dizemos que a quantidade \sqrt{g} é uma densidade escalar de peso 1.

2.2 TENSOR CURVATURA

Consideremos o operador comutador para duas derivadas covariantes que atuam sobre um vetor qualquer A^μ [14]. Temos

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\mu = A^\lambda R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}, \quad (2.2.1)$$

onde

$$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} \Gamma^\tau_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\alpha\lambda}. \quad (2.2.2)$$

O objeto $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ é conhecido como tensor curvatura ou tensor de Riemann (ver Apêndice A). Para o espaço plano, temos $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\mu = 0$, ou seja, curvatura nula, $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = 0$.

Outra maneira de escrever o tensor de Riemann é

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} = g_{\mu\nu} R^\nu{}_{\lambda\alpha\beta}. \quad (2.2.3)$$

O tensor de Riemann possui as seguintes propriedades de simetria:

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\lambda}, \quad (2.2.4)$$

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} = -R_{\lambda\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\lambda\beta\alpha} = R_{\lambda\mu\beta\alpha}, \quad (2.2.5)$$

$$R_{\mu\lambda\alpha\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\lambda} = 0. \quad (2.2.6)$$

Esta última relação é conhecida como primeira identidade de Bianchi. Chamamos de tensor de Ricci a quantidade resultante da contração do tensor de Riemann, ou seja,

$$R_{\lambda\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\lambda\alpha\beta}, \quad (2.2.7)$$

que é equivalente à definição

$$R_{\lambda\beta} \equiv R^\tau{}_{\lambda\tau\beta}. \quad (2.2.8)$$

O tensor de Ricci é simétrico

$$R_{\lambda\beta} = R_{\beta\lambda}. \quad (2.2.9)$$

Também podemos escrever

$$R^\gamma{}_\beta = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta}, \quad (2.2.10)$$

que é o tensor de Ricci misto.

O escalar de Ricci, ou escalar de curvatura, é uma quantidade escalar obtida através do traço

do tensor de Ricci

$$R = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\beta} = R^\beta{}_\beta. \quad (2.2.11)$$

Outra relação a qual o tensor de Riemann satisfaz é

$$\nabla_\eta R_{\mu\lambda\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\lambda\eta\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\lambda\beta\eta} = 0, \quad (2.2.12)$$

que é conhecida como a segunda identidade de Bianchi [11]. Como consequência dessa relação, temos também

$$\nabla_\eta R_{\lambda\beta} - \nabla_\beta R_{\lambda\eta} + \nabla_\gamma R^\gamma{}_{\lambda\beta\eta} = 0. \quad (2.2.13)$$

A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, definimos o tensor

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \quad (2.2.14)$$

que é denominado tensor de Einstein. E como consequência das identidades de Bianchi, podemos escrever

$$\nabla_\beta G_\alpha{}^\beta \equiv 0. \quad (2.2.15)$$

2.3 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Partimos de uma ação de qualquer sistema físico dado na forma integral

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.3.1)$$

onde Λ é a densidade lagrangiana. A integração se estende sobre todo espaço quadridimensional [14]. Esta integral é dada numa região infinita contida entre duas hipersuperfícies no espaço-tempo Riemanniano. A ação (2.3.1) é um invariante escalar, o que implica que tal quantidade não deve mudar sob transformações de coordenadas.

O objeto $T^{\alpha\beta}$ é definido na forma

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}. \quad (2.3.2)$$

Este objeto é conhecido como tensor energia-momento (EM). Este tensor é simétrico, $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$.

O tensor EM descreve a matéria. Ele contém informações sobre massa, momento e energia. Em nossos estudos, o tensor EM torna-se diagonal, pois consideramos as coordenadas de um observador que se move com a matéria (co-móvel). No próximo capítulo, veremos como este tensor irá descrever um fluido perfeito, esse é um aspecto indispensável à compreensão da cosmologia.

2.4 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = -\frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.4.1)$$

onde $\kappa = 16\pi G$. Podemos derivar as equações de campo dessa ação ao considerarmos as correções até primeira ordem para a métrica $g_{\alpha\beta}$, R e $\sqrt{-g}$,

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.4.2)$$

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2} h \right), \quad (2.4.3)$$

onde $h = h_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$. Para as conexões, temos

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad (2.4.4)$$

podemos escrever a variação da conexão como

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g'^{\lambda\tau} (\nabla_{\mu} h_{\nu\tau} + \nabla_{\nu} h_{\mu\tau} - \nabla_{\tau} h_{\mu\nu}), \quad (2.4.5)$$

onde $\delta g_{\rho\lambda} = h_{\rho\lambda}$. Essa variação resulta na mudança do tensor de Ricci:

$$R'_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \delta R_{\alpha\beta}. \quad (2.4.6)$$

Podemos escrever

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\lambda} (\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\alpha} (\delta\Gamma^{\lambda}_{\beta\lambda}). \quad (2.4.7)$$

O escalar de curvatura δR é dado por

$$\delta R = g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (2.4.8)$$

e, de acordo com (2.4.7), temos

$$\delta R = -h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda) - g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda). \quad (2.4.9)$$

Levando em conta que

$$\delta \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} \nabla_\beta h, \quad (2.4.10)$$

podemos escrever

$$\delta R = -h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \square h, \quad (2.4.11)$$

onde $\square \equiv \nabla_\tau \nabla^\tau$ é o operador D'Alembertiano definido na variedade munida da métrica $g_{\alpha\beta}$.

Supomos que a ação pode ser escrita como uma soma de dois termos, ou seja, a ação total é a contribuição do campo de matéria mais a ação do campo gravitacional que é dada por (2.4.1). Considerando a variação da ação total, temos:

$$\delta S = \delta S_m + \delta S_{EH}, \quad (2.4.12)$$

onde S_m é a ação que corresponde à matéria. De acordo com a equação (2.3.2), podemos escrever

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (2.4.13)$$

e a variação da ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$\delta S_{EH} = -\frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} h R - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \square h \right]. \quad (2.4.14)$$

Reescrevendo a equação (2.4.12), temos,

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} h R - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \square h - \frac{\kappa}{2} T^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

É importante notar que os termos das derivadas totais na equação acima são reescritas na forma de integrais de superfície onde exigimos que $h_{\alpha\beta}|_{\partial\alpha} = 0$. Então, temos:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (2.4.16)$$

onde $\kappa = 16\pi G$. Este conjunto de equações é conhecido como equações de Einstein. Portanto, da equação (2.2.14), podemos escrever,

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (2.4.17)$$

Como podemos ver, este é um aspecto muito importante da teoria da RG. Estas equações de

campo associam o conteúdo material-energético (lado direito da eq.) com a estrutura geométrica (lado esquerdo da eq.) da variedade que define o espaço-tempo em questão. Devido a essa eficácia, tais equações serão usadas nos próximos capítulos em aplicações em cosmologia.

3 COSMOLOGIA RELATIVISTA

3.1 O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

O princípio cosmológico é um dos princípios básicos da cosmologia moderna [11]. Este princípio diz que, em larga escala, o Universo pode ser considerado espacialmente homogêneo e isotrópico. Isso quer dizer que o Universo possui as mesmas propriedades em todos os pontos e em todas as direções do espaço. A isotropia é a invariância em relação às rotações e a homogeneidade é a invariância em relação às translações.

Este princípio foi estabelecido como base da teoria, mas algumas evidências observacionais o favorecem como, por exemplo, a descoberta da radiação cósmica de fundo em 1965 por Penzias e Wilson. Segundo os cálculos, esta radiação tem uma temperatura de aproximadamente 2,7 K e é considerada isotrópica. Atualmente, aceita-se a hipótese de que essa radiação seja um resquício do Universo primordial. Embora este princípio seja válido, hoje existem modelos de Universo anisotrópico e não homogêneo, mas estes casos não serão discutidos.

3.2 POSTULADO DE WEYL

A essência desse postulado está na suposição de que toda a matéria presente no Universo compõem um fluido que pode ser considerado perfeito (ausência de interação entre as moléculas). No Universo em grande escala, os aglomerados e os superaglomerados de galáxias se comportam como moléculas de um gás perfeito. Os aglomerados de galáxias se movimentam como partículas fundamentais. Suas trajetórias são descritas por geodésicas que nunca se interceptam, ao menos que seja em um único ponto no passado ou no futuro. Essas geodésicas são

ortogonais a uma família de hipersuperfícies do tipo espaço (as geodésicas são ortogonais aos planos tangentes às hipersuperfícies).

O Universo evolui no tempo, ele é homogêneo e isotrópico apenas no espaço. Com esse pressuposto, podemos pensar num modelo geométrico para o Universo caracterizado por uma folheação de hipersuperfícies homogêneas e isotrópicas que evoluem no tempo. Essa família de hipersuperfícies podem ser parametrizadas por um parâmetro chamado de tempo cosmológico (lembrando que cada hipersuperfície tridimensional são parametrizadas por três parâmetros).

3.3 ESPAÇO COM CURVATURA CONSTANTE

Atendendo a todas essas exigências que vimos até agora, o elemento de linha da métrica é dada na forma

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.3.1)$$

onde a função $a(t)$ é o fator de escala, o qual determina as distâncias na hipersuperfície espacial num dado instante t . Estamos adotando o sistema de unidades em que $c = 1$ (velocidade da luz).

Outra exigência que deve ser satisfeita é que a curvatura em qualquer ponto na hipersuperfície deve ser constante. Matematicamente, um espaço com curvatura constante é caracterizado pela equação

$$R_{\alpha\beta\zeta\eta} = K(g_{\alpha\zeta}g_{\beta\eta} - g_{\alpha\eta}g_{\beta\zeta}), \quad (3.3.2)$$

onde K é a constante de curvatura [11]. Em torno de um ponto num espaço tridimensional isotrópico, a simetria é esférica nas vizinhanças desse ponto. O elemento de linha que descreve este espaço com curvatura constante é dada na forma

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.3.3)$$

A combinação dessa relação com (3.3.1), fornece-nos o elemento de linha da métrica para a cosmologia relativista

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (3.3.4)$$

A constante k pode assumir os valores $+1$, -1 , ou 0 . A equação (3.3.4) é conhecida como métrica de Friedmann-Lamaitre-Robertson-Walker (FLRW). Para $k = +1$ teremos um espaço topológico cilíndrico, para $k = 0$ temos espaço topológico plano e para $k = -1$ o espaço é hiperbólico.

3.4 AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Sabemos que a cosmologia moderna parte do princípio cosmológico e que para atender este princípio o elemento de linha da métrica é dado pela equação (3.3.4). Como já foi visto, no postulado de Weyl considera-se a existência de um fluido perfeito. A matéria contida no Universo pode ser descrita em termos do tensor EM, $T_{\alpha\beta}$, o qual está presente no lado direito da equação de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (3.4.1)$$

A melhor aproximação para o tensor EM para descrever a métrica do Universo atual é dado na forma

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha} u_{\beta}, \quad (3.4.2)$$

onde ρ é a densidade média de massa para a matéria [15]. Mas outras formas de massa e energia estão presentes no Universo. A própria radiação cósmica de fundo que permeia todo o Universo pode ser descrita por um tensor EM de um fluido perfeito. Logo, a pressão não é nula, para essa radiação térmica temos $p = \rho/3$. A forma geral de $T_{\alpha\beta}$ para um fluido perfeito é dada por

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_{\alpha} u_{\beta} - g_{\alpha\beta} p. \quad (3.4.3)$$

Assumimos um sistema de referência co-móvel, as quadrivelocidades das partículas são dadas na forma

$$u^{\alpha} = (1, 0, 0, 0). \quad (3.4.4)$$

Após resolvermos as equações de Einstein (ver apêndice B), chegamos em duas equações independentes. Uma, em relação a parte temporal e a outra em relação a parte espacial. As equações são

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (3.4.5)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p. \quad (3.4.6)$$

Se dividirmos (3.4.5) por 3, teremos a equação que descreve a evolução temporal do fator de escala:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho. \quad (3.4.7)$$

Se substituirmos a equação (3.4.7) em (3.4.6), teremos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left[\rho + \frac{1}{3}\rho \right]. \quad (3.4.8)$$

As equações (3.4.7) e (3.4.8) são chamadas de equações de Friedmann, as soluções destas equações são conhecidas como modelos de Friedmann. Se multiplicarmos a equação (3.4.7) por a^2 e diferenciarmos com respeito ao índice temporal, teremos

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}a^2\dot{\rho} + 2a\dot{a}, \quad (3.4.9)$$

substituindo (3.4.9) em (3.4.8) e rearranjando os termos, obtemos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (3.4.10)$$

que é considerada uma equação de conservação de energia. A equação (3.4.10) também pode ser obtida diretamente da conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ com $\alpha = 0$.

3.5 ALGUNS PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Nas primeiras décadas do século XX, o astrônomo Edwin Powell Hubble estudou a radiação emitida por galáxias distantes. Ele observou que o comprimento de onda dessa radiação sofria variações. Essas variações eram consequências do efeito Doppler.

Hubble notou que os comprimentos de onda da radiação sofriam um deslocamento para o vermelho. Ele concluiu que as galáxias estavam se afastando entre si. A velocidade de distanciamento é proporcional a distância entre as galáxias. Essa relação é conhecida como lei de Hubble.

Podemos expressar a lei de Hubble na seguinte forma:

$$z \simeq H(t)d, \quad (3.5.1)$$

onde z é o redshift (desvio para o vermelho) e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble que caracteriza a taxa de expansão do Universo, d é a distância entre as galáxias. O parâmetro de Hubble é definido em termos do fator de escala $a(t)$,

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.5.2)$$

Outro parâmetro importante é o parâmetro de desaceleração,

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (3.5.3)$$

o qual mede a variação da taxa de expansão do Universo. Escrevendo a equação (3.4.7) em termos do parâmetro de Hubble, temos

$$\frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2} = 1, \quad (3.5.4)$$

onde

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (3.5.5)$$

é o parâmetro de densidade da matéria e

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2H^2} \quad (3.5.6)$$

é o parâmetro de curvatura. Através do sinal de k podemos prever a geometria 3-D do universo:

$$\rho < \rho_c \longleftrightarrow \Omega < 1 \longleftrightarrow k = -1 \longleftrightarrow \textit{aberto},$$

$$\rho = \rho_c \longleftrightarrow \Omega = 1 \longleftrightarrow k = 0 \longleftrightarrow \textit{plano},$$

$$\rho > \rho_c \longleftrightarrow \Omega > 1 \longleftrightarrow k = +1 \longleftrightarrow \textit{fechado},$$

onde $\rho_c = 3H^2/8\pi G$, que é obtido fazendo $k = 0$ na equação (3.5.4).

Embora existam outros modelos de Universo, o modelo cosmológico padrão é a base da cosmologia moderna. Acredita-se que o Universo possua uma idade de aproximadamente 14 bilhões de anos e é considerado isotrópico, homogêneo e espacialmente plano. Segundo dados observacionais, o Universo está experimentando uma fase de expansão acelerada. Existem inúmeros trabalhos que exploram esse cenário sob a luz da RG com campos extras. No próximo capítulo, investigaremos o campo de Dirac acoplado minimamente com o campo gravitacional lançando mão de todas as considerações que fizemos neste capítulo.

4 CAMPO DE DIRAC

4.1 OS ESPINORES DE DIRAC

Os espinores de Dirac descrevem partículas de spin 1/2. A teoria dessas partículas é uma teoria relativística, pois a equação de Dirac é invariante sob transformações de Lorentz [13]. No espaço curvo, a teoria de Dirac tem que satisfazer dois grupos de transformações, o de Lorentz e o de transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos). A equação de Dirac é escrita com o uso de dois tipos de índices, um em relação a invariância sob as transformações de Lorentz e outro em relação a invariância sob difeomorfismos.

O objeto matemático que será usado para descrever o nosso espaço serão os vetores $e^a{}_\mu$, denominados de tetrada ou *vierbeins*, onde o índice latino varia de 1 a 4. As tetradas servem como vetores de base para construção de vetores covariantes por difeomorfismo e covariantes de Lorentz, ou seja,

$$\mathbb{A} = A_a e^a{}_\mu, \quad (4.1.1)$$

e

$$\mathbb{A} = A^\mu e^a{}_\mu, \quad (4.1.2)$$

onde

$$A_\mu = A_a e^a{}_\mu, \quad (4.1.3)$$

e

$$A^a = A^\mu e^a{}_\mu. \quad (4.1.4)$$

As expressões (4.1.3) e (4.1.4) são simultaneamente consistentes, tal que,

$$A^a = A_b e^{b\mu} e^a{}_\mu. \quad (4.1.5)$$

Substituindo (4.1.4) em (4.1.3) obtém-se as seguintes condições:

$$e^{b\mu} e^a{}_{\mu} = \eta^{ab}, \quad (4.1.6)$$

e

$$e^a{}_{\mu} e_{a\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (4.1.7)$$

O objeto η^{ab} é a métrica de Minkowski do espaço plano.

4.2 FORMALISMO MATEMÁTICO

4.2.1 Conexão de Spin

A derivada covariante que definimos anteriormente atua nos índices de coordenadas. No espaço riemanniano, a simetria de Lorentz está definida no espaço tangente em cada ponto do espaço. A derivada covariante em relação às transformações de Lorentz vai atuar nos índices relacionados ao espaço tangente. Esta derivada covariante deverá satisfazer os dois grupos de transformações, difeomorfismos e o de Lorentz. A descrição de partículas de spin 1/2 no espaço curvo requer a introdução dessas derivadas. A nova expressão para a derivada covariante será dada na forma

$$\nabla_{\mu} A^a = \partial_{\mu} A^a - \omega^a{}_{b\mu} A^b, \quad (4.2.1)$$

ou

$$\nabla_{\mu} A_a = \partial_{\mu} A_a + \omega^b{}_{a\mu} A_b. \quad (4.2.2)$$

O objeto $\omega^a{}_{b\mu}$ é dado por [16]

$$\begin{aligned} \omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{4} & \left[e^{b\alpha} \partial_{\mu} e^a{}_{\alpha} - e^{a\alpha} \partial_{\mu} e^b{}_{\alpha} + e^{a\alpha} \partial_{\alpha} e^b{}_{\mu} - e^{b\alpha} \partial_{\alpha} e^a{}_{\mu} + e^{b\nu} e^{a\lambda} e_{c\mu} \partial_{\lambda} e^c{}_{\nu} \right. \\ & \left. - e^{a\nu} e^{b\lambda} e_{c\mu} \partial_{\lambda} e^c{}_{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Este objeto é a conexão de spin, (ver apêndice C). A conexão de spin é uma quantidade antisimétrica, ou seja $\omega^{ab}{}_{\mu} = -\omega^{ba}{}_{\mu}$.

A derivada covariante da tetrada $e^a{}_\alpha$ pode ser escrita como

$$\nabla_\mu e^a{}_\alpha = \partial_\mu e^a{}_\alpha - \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e^a{}_\rho, \quad (4.2.4)$$

que é a derivada com respeito as transformações de Lorentz e transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos).

4.2.2 Derivada Covariante de um espinor

A transformação de Lorentz infinitesimal de um espinor (que é uma matriz coluna) é dada por

$$\delta\psi = \frac{i}{4} \omega^{ab}{}_\mu \sigma_{ab} \psi dx^\mu, \quad (4.2.5)$$

onde σ_{ab} é definido na forma

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2} [\Gamma_a, \Gamma_b], \quad (4.2.6)$$

onde Γ_a e Γ_b são as matrizes de Dirac no espaço plano. Para essa teoria consideramos a quadricorrente fermiônica $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$. O campo de Dirac no espaço curvo é representado por quantidades com índices em relação as transformações gerais de coordenadas e também das transformações de Lorentz, então podemos escrever de forma mais geral as matrizes de Dirac no espaço curvo:

$$\gamma_\mu = e^a{}_\mu \Gamma_a. \quad (4.2.7)$$

4.3 CAMPO FERMIÔNICO

A ação que estamos considerando contém o campo gravitacional e os campos de Dirac. Esta ação é escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{\kappa} R + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - \theta J_\mu J^\mu \right], \quad (4.3.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, e a constante θ é dada por

$$\theta = \frac{3\kappa}{32} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (4.3.2)$$

e as quantidades J^μ e J_μ são definidas como

$$J^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \bar{\psi} \Gamma_5 \gamma^\mu \psi, \quad (4.3.3)$$

$$J_\mu = \sqrt{-g} \bar{\psi} \Gamma_5 \gamma_\mu \psi. \quad (4.3.4)$$

O campo de Dirac junto com a teoria de gravitação representam um papel importante, uma vez que o campo fermiônico descreve um tipo de matéria. O acoplamento spin-spin é descrito pelo parâmetro β . A inclusão desse parâmetro na ação (4.3.1) foi proposta por Perez e Rovelli [17]. Esta ação é equivalente a ação de Einstein-Hilbert na presença de torção. O parâmetro β é conhecido como parâmetro de Barbero-Immirzi (BI). Este parâmetro determina a força da interação quadrifermiônica.

Consideramos apenas os aspectos clássicos do campo de Dirac não massivo no modelo cosmológico espacialmente plano FLRW na presença do parâmetro BI. Esse parâmetro é descrito por um termo presente na ação de Holst [18]. Ele é introduzido sob perspectiva da gravidade quântica não perturbativa e representa um novo parâmetro sem dimensão que vem de teoria mais fundamental.

A ação para o campo gravitacional com o termo de Holst pode ser representada da seguinte forma

$$S_H = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-R + \frac{1}{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \right], \quad (4.3.5)$$

onde $\kappa = 16\pi G$, $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico de Levi-Civita e β é o parâmetro BI, positivo e real. Em RG sem torção esse parâmetro não afeta a equação dinâmica porque $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$ desaparece devido a simetria cíclica do tensor de Riemann, $R^{\alpha\beta\mu\nu} + R^{\alpha\nu\beta\mu} + R^{\alpha\mu\nu\beta} = 0$.

O efeito do parâmetro BI pode ser estudado por diferentes procedimentos de acoplamento [17]. Em [19, 20], uma família de dois parâmetros não minimamente acoplados pode ser considerada separadamente. Em [21] está mostrado que o parâmetro BI não tem nenhum efeito se for absorvido dentro de parâmetros não mínimos. De acordo com [22], o parâmetro BI pode ter efeito dinâmico não trivial, mesmo sem o campo de Dirac, desde que seja tratado como um campo escalar. Já em [23], usa-se uma lagrangiana modificada com o termo de Holst e o campo de Dirac para mostrar que o parâmetro BI não tem nenhum efeito.

O objetivo agora é derivar as equações de campo a partir da variação da ação (4.3.1) com o campo de Dirac não massivo e com o termo de interação quadrifermiônica. Escrevemos estas equações para o tensor energia-momento na forma diagonal. A solução encontrada é tal que descreve um fluido intermediário entre poeira e radiação.

4.3.1 Procedimento e solução

Usaremos o mesmo procedimento do capítulo 2. Consideremos a correção até primeira ordem para a ação (4.3.1). Essas correções são escritas da mesma maneira que em (2.4.2) e (2.4.3), ou seja,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ g'^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \\ \sqrt{-g'} &= \sqrt{-g} + \frac{h}{2}\sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

onde $h = h^\mu{}_\mu$. Apenas as contribuições em primeira ordem em $h^{\mu\nu}$ serão mantidas. Podemos escrever as tetradas como

$$\begin{aligned} e'^{b\alpha} &= e^{b\alpha} - \frac{1}{2}h^\alpha{}_\beta e^{b\beta}, \\ e'^a{}_\alpha &= e^a{}_\alpha + \frac{1}{2}h^\alpha{}_\beta e^a{}_\beta, \end{aligned}$$

e sabemos que $J'^\mu J'_\mu = J^\mu J_\mu$. O que significa que $\delta(J^\rho J_\rho)/\delta g^{\mu\nu} = 0$, e $J'^\mu J'_\mu$ tem contribuição nula em $h^{\alpha\beta}$. Considerando a parte cinética da ação de Dirac (4.3.1), temos

$$S_k = \int d^4x \sqrt{-g} L_k = \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi). \quad (4.3.7)$$

Fazendo a expansão desta equação e considerando $\gamma'_\nu = \gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu \gamma_\rho$, temos

$$\begin{aligned} S_k \rightarrow S'_k &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2}h \right) \left[\bar{\psi} \left(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu \gamma_\rho \right) \partial_\mu \psi (g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \right. \\ &+ \bar{\psi} \left(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu \gamma_\rho \right) \omega'^{ab}{}_\mu \sigma_{ab} \psi (g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \\ &- \partial_\mu \bar{\psi} \left(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu \gamma_\rho \right) \psi (g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \\ &\left. + \omega'^{ab}{}_\mu \bar{\psi} \sigma_{ab} \left(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu \gamma_\rho \right) \psi (g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \right], \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

ficando apenas com os termos de primeira ordem em $h^{\mu\nu}$. Podemos expressar a conexão de spin na forma

$$\omega'^{ab}{}_\mu = \omega^{ab}{}_\mu + \Delta \omega^{ab}{}_\mu. \quad (4.3.9)$$

Substituindo em (4.3.8), temos

$$\begin{aligned} S'_k &= S_k + \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_k - \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_{(\mu} \nabla_{\nu)} \psi - \nabla_{(\nu} \bar{\psi} \gamma_{\mu)} \psi) \right\} h^{\mu\nu} \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\bar{\psi} \gamma^\mu \sigma_{ab} \psi + \bar{\psi} \sigma_{ab} \gamma^\mu \psi] \Delta \omega^{ab}{}_\mu. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Podemos escrever $\Delta\omega^{ab}{}_{\mu}$ (ver Apêndice D) na forma

$$\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{4} \left\{ \nabla_{\beta} \left(e^{a\alpha} e^{b\beta} h_{\alpha\mu} \right) - \nabla_{\beta} \left(e^{b\alpha} e^{a\beta} h_{\alpha\mu} \right) \right\}. \quad (4.3.11)$$

No termo envolvendo $\Delta\omega^{ab}{}_{\mu}$, a quantidade multiplicada por $h_{\alpha\mu}$ é simétrica em relação a α e a μ . Devido a essas propriedades de simetria não haverá contribuição deste termo na expressão (4.3.10), pois ele é identicamente nulo.

As equações de Dirac são obtidas quando variamos a ação (4.3.1) com respeito aos campos de Dirac ψ e $\bar{\psi}$,

$$i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi = 2\theta J^{\mu}\Gamma_5\gamma_{\mu}\psi, \quad (4.3.12)$$

$$i\nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} = -2\theta J^{\mu}\bar{\psi}\Gamma_5\gamma_{\mu}, \quad (4.3.13)$$

onde $\Gamma_5 = i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$.

A lagrangiana L é escrita como

$$L = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - \theta J_{\mu}J^{\mu}, \quad (4.3.14)$$

e a equação de Einstein é expressa em função dessa lagrangiana da seguinte maneira

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{2}T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\kappa (\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi) - \frac{1}{2}\kappa g_{\alpha\beta}L, \quad (4.3.15)$$

onde $\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}$ significa $\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha}\nabla_{\beta} + \gamma_{\beta}\nabla_{\alpha})$. Agora, usando a equação (4.3.9), obtemos a equação

$$G_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\kappa (\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi) - \frac{\theta}{2}\kappa g_{\alpha\beta}J_{\mu}J^{\mu}, \quad (4.3.16)$$

que corresponde à seguinte equação para o tensor energia-momento :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi) - \frac{\theta}{2}g_{\alpha\beta}J_{\mu}J^{\mu}. \quad (4.3.17)$$

Para a métrica de FLRW o lado esquerdo da equação (4.3.16) é nulo ($G_{\alpha\beta} = 0$) para $\alpha \neq \beta$. Como consequência, temos $T_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Para expressar essa condição de consistência, escrevemos

$$T_{ij} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}\gamma_{(i}\nabla_{j)}\psi - \nabla_{(j}\bar{\psi}\gamma_{i)}\psi) = 0, \quad i \neq j, \quad (4.3.18)$$

$$T_{0i} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}\gamma_{(0}\nabla_{i)}\psi - \nabla_{(0}\bar{\psi}\gamma_{i)}\psi) = 0. \quad (4.3.19)$$

A equação (4.3.18) é satisfeita devido à identidade $\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_j + \Gamma_j\Gamma_0\Gamma_i = 0$ para $i \neq j$ (ver Apêndice E). Para calcular as derivadas covariantes para os espinores, usaremos as relações

$$\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}\sigma_{ab}\psi, \quad \nabla_{\mu}\bar{\psi} = \partial_{\mu}\bar{\psi} - \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}\bar{\psi}\sigma_{ab}, \quad (4.3.20)$$

onde a quantidade $\omega^{ab}{}_{\mu}$ é a conexão de spin, a qual já foi definida em (4.2.3). A quantidade σ_{ab} é escrita em termos das matrizes de Dirac no espaço de Minkowski. As tetradas são definidas como

$$\begin{cases} e^o{}_b = (a(\eta), 0, 0, 0), \\ e^1{}_b = (0, a(\eta), 0, 0), \\ e^2{}_b = (0, 0, a(\eta), 0), \\ e^3{}_b = (0, 0, 0, a(\eta)). \end{cases}$$

As tetradas com os índices contravariantes são dadas na forma

$$\begin{cases} e^{11} = e^{22} = e^{33} = -1/a, \\ e^{00} = e_0^0 = e_1^1 = e_2^2 = e_3^3 = 1/a. \end{cases}$$

Estamos usando a métrica FLRW em função do tempo conforme $dt = a(\eta)d\eta$,

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2], \quad (4.3.21)$$

onde $a(\eta)$ é o fator de escala em função do tempo conforme.

Agora, calculemos as derivadas covariantes para os espinores usando as relações (4.3.20). As componentes não nulas das conexões (4.2.3) são dadas por

$$\omega^{01}{}_1 = \omega^{02}{}_2 = \omega^{03}{}_3 = \frac{a'}{2a}, \quad (4.3.22)$$

e

$$\omega^{10}{}_1 = \omega^{20}{}_2 = \omega^{30}{}_3 = -\frac{a'}{2a}, \quad (4.3.23)$$

onde $a' = da/d\eta$. Assim, as derivadas covariantes dos espinores para $\mu = 0$ são

$$\nabla_0 \psi = \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_0 \sigma_{ab} \psi = \partial_0 \psi. \quad (4.3.24)$$

E sabemos que as conexões $\omega^{ab}{}_0$ são nulas. Para $\mu = 1$ temos

$$\nabla_1 \psi = \partial_1 \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_1 \sigma_{ab} \psi, \quad (4.3.25)$$

como os espinores só dependem do tempo, as derivadas ordinárias com relação aos índices espaciais são nulas.

Podemos usar os resultados (4.3.22), (4.3.23) e escrever

$$\nabla_1 \psi = -\frac{a'}{2a} \Gamma_0 \Gamma_1 \psi, \quad (4.3.26)$$

analogamente, para $\mu = 2$ e $\mu = 3$:

$$\nabla_2 \psi = -\frac{a'}{2a} \Gamma_0 \Gamma_2 \psi, \quad (4.3.27)$$

$$\nabla_3 \psi = -\frac{a'}{2a} \Gamma_0 \Gamma_3 \psi. \quad (4.3.28)$$

De uma maneira mais geral podemos escrever

$$\nabla_i \psi = -\frac{a'}{2a} \Gamma_0 \Gamma_i \psi, \quad (4.3.29)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Analogamente, para $\bar{\psi}$ obtemos

$$\nabla_0 \bar{\psi} = \partial_0 \bar{\psi}, \quad \nabla_i \bar{\psi} = \frac{a'}{2a} \bar{\psi} \Gamma_0 \Gamma_i. \quad (4.3.30)$$

Usaremos a relação $\nabla_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = 0$, conhecida como lei de conservação da corrente. Lembramos que a derivada covariante tensorial de um objeto qualquer é dada por (2.1.13):

$$\nabla_\nu A^\alpha = \partial_\nu A^\alpha + \Gamma_{\kappa\nu}^\alpha A^\kappa, \quad (4.3.31)$$

onde o objeto $\Gamma_{\kappa\nu}^\alpha$ é a conexão afim ou conhecido como símbolos de Christoffel e são dados por (2.1.9):

$$\Gamma_{\kappa\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} [\partial_\kappa g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\kappa\tau} - \partial_\tau g_{\kappa\nu}]. \quad (4.3.32)$$

Podemos escrever

$$\nabla_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] + \Gamma_{\rho\mu}^\mu [\bar{\psi} \gamma^\rho \psi]. \quad (4.3.33)$$

Faremos os cálculos para $\mu = 0, 1, 2, 3$ uma vez que (4.3.33) pode ser escrita como

$$\nabla_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = \nabla_0 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] + \nabla_1 [\bar{\psi} \gamma^1 \psi] + \nabla_2 [\bar{\psi} \gamma^2 \psi] + \nabla_3 [\bar{\psi} \gamma^3 \psi]. \quad (4.3.34)$$

De acordo com a métrica (4.3.21), os símbolos de Christoffel não nulos são dados por

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{a'}{a}, \quad (4.3.35)$$

como já sabemos, $\partial_i [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Substituindo esses resultados em (4.3.34) temos

$$\partial_0 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] + \Gamma_{00}^0 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] + \Gamma_{01}^1 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] + \Gamma_{02}^2 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] + \Gamma_{03}^3 [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] = 0.$$

Então,

$$\frac{d}{d\eta} [\bar{\psi} \gamma^0 \psi] = -4 \frac{a'}{a} [\bar{\psi} \gamma^0 \psi]. \quad (4.3.36)$$

Substituindo $\gamma^0 = \frac{1}{a}\Gamma^0$ na (4.3.36) e usando a regra de Leibniz, temos

$$\frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} [\bar{\psi}\Gamma^0\psi] - \frac{a'}{a^2} [\bar{\psi}\Gamma^0\psi] = -4 \frac{a'}{a^2} [\bar{\psi}\Gamma^0\psi],$$

logo, a equação na sua forma final será

$$[\bar{\psi}\Gamma^0\psi]' = -\frac{3a'}{a} [\bar{\psi}\Gamma^0\psi]. \quad (4.3.37)$$

Voltamos na equação (4.3.19) e em torno dessas condições podemos escrever, usando a notação (4.2.7)

$$a\bar{\psi}\Gamma_i\partial_0\psi - \frac{a'}{2}\bar{\psi}\Gamma_i\psi - a\partial_0\bar{\psi}\Gamma_i\psi + \frac{a'}{2}\bar{\psi}\Gamma_i\psi = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.38)$$

o que significa que podemos escrever

$$\bar{\psi}\Gamma_i\psi' = \bar{\psi}'\Gamma_i\psi \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.3.39)$$

A equação (4.3.37) também pode ser obtida diretamente das equações de Dirac junto com os resultados (4.3.29) e (4.3.30). A equação (4.3.39) é uma condição necessária de consistência. Podemos supor uma solução do tipo $\psi = f(\eta)\chi$, em que o espinor de Dirac é escrito em termos de uma função real de η e de um espinor constante. Se voltarmos nas equações de Dirac e multiplicarmos (4.3.12) por Γ_0 pela esquerda, teremos, após algumas manipulações matemáticas, a seguinte equação de movimento

$$\psi' + \frac{3a'}{2a}\psi = -2i\theta a\Gamma_0\Gamma_5\Gamma^a\psi(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_a\psi), \quad (4.3.40)$$

analogamente para (4.3.13) multiplicando por Γ_0 pela direita, teremos

$$\bar{\psi}' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi} = 2i\theta a\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma^a\Gamma_0(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_a\psi). \quad (4.3.41)$$

Para investigar a relação entre os parâmetros de densidade e pressão com o parâmetro de Immirzi, seguiremos o mesmo procedimento que foi realizado para obter as equações de Friedmann na seção 3.4. Voltemos nas equações de campo (4.3.16) para calcular a componente temporal e a componente espacial. Podemos escrevê-las da seguinte forma

$$G_{00} = \frac{i}{2}\kappa(\bar{\psi}\gamma_0\nabla_0\psi - \nabla_0\bar{\psi}\gamma_0\psi) - \frac{\theta}{2}\kappa a^2 J_\mu J^\mu \quad (4.3.42)$$

$$G_{ii} = \frac{i}{2}\kappa(\bar{\psi}\gamma_i\nabla_i\psi - \nabla_i\bar{\psi}\gamma_i\psi) + \frac{\theta}{2}\kappa a^2 J^2, \quad (4.3.43)$$

nota-se que nesta equação não há soma de índices. Sabemos que $G^\mu{}_\mu = -R$. Calculamos o

traço de $G_{\mu\nu}$ usando (4.3.42) e (4.3.43), obtemos então,

$$G^0_0 = \frac{i}{4}\kappa(\bar{\psi}\gamma^0\nabla_0\psi - \nabla_0\bar{\psi}\gamma^0\psi) - \frac{\theta}{2}\kappa J^2 \quad (4.3.44)$$

$$G^i_i = \frac{i}{4}\kappa(\bar{\psi}\gamma^i\nabla_i\psi - \nabla_i\bar{\psi}\gamma^i\psi) + \frac{\theta}{2}\kappa J^2, \quad (4.3.45)$$

aqui também não há soma de índices. Podemos escrever $G^0_0 + \sum_{i=1}^3 G^i_i = G^\mu_\mu$, então faremos a soma das duas equações acima e obtemos

$$-R = \frac{i}{4}\kappa(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \theta\kappa J^2. \quad (4.3.46)$$

Usando as equações de Dirac (4.3.12) e (4.3.13), escrevemos

$$R = -2\theta\kappa J^2. \quad (4.3.47)$$

Por outro lado, usando a métrica (4.3.21), temos que $R = -6a''/a^3$, já que

$$G_{00} = \frac{3a'^2}{a^2}, \quad (4.3.48)$$

e

$$G_{ii} = -\frac{2a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}. \quad (4.3.49)$$

De acordo com (4.3.47), podemos escrever

$$\frac{6a''}{a} = 2\theta\kappa a^2 J^2. \quad (4.3.50)$$

Combinando as equações (4.3.42) e (4.3.43) com (4.3.48) e (4.3.49), teremos

$$\frac{3a'^2}{a^2} = -\frac{\theta}{2}\kappa a^2 J^2 + \frac{i}{4}\kappa a(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi), \quad (4.3.51)$$

$$-\frac{2a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} = \frac{\theta}{2}\kappa a^2 J^2. \quad (4.3.52)$$

Direto da manipulação das equações (4.3.51), (4.3.52) e (4.3.50) seguem as seguintes relações:

$$\frac{i}{4}\kappa a(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi) = 4\theta\kappa a^2 J^2, \quad (4.3.53)$$

$$\frac{3a'^2}{a^2} = \frac{7}{2}\theta\kappa a^2 J^2. \quad (4.3.54)$$

A equação (4.3.53) nos mostra que para o parâmetro de Immirzi diferente de zero, a quantidade $\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi$ não deve desaparecer. Por essa última condição, vemos que o ansatz $\psi = f(\eta)\chi$ é descartado. A equação (4.3.54) nos mostra que J^μ deve ser um vetor tipo-tempo, ou seja, $J^2 > 0$. A equação (4.3.50) pode ser expressa em termos da coordenada temporal com a

ajuda de (4.3.54), temos

$$\frac{6\ddot{a}}{a} = -5\kappa\theta J^2. \quad (4.3.55)$$

Essa relação indica uma típica contribuição oriunda da matéria ordinária (que não induz expansão acelerada). De fato podemos expressar o tensor EM na forma padrão para descrever um fluido perfeito (3.4.3),

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (4.3.56)$$

e para nossa métrica, temos que a quadrivelocidade é da forma $u_\mu = (a, 0, 0, 0)$. Calculamos a componente temporal de (4.3.56), sabemos que ela é dada por

$$T_{00} = \rho a^2 \quad (4.3.57)$$

$$T^\mu{}_\mu = \rho - 3p, \quad (4.3.58)$$

onde $T^\mu{}_\mu$ é o traço da equação (4.3.56).

Podemos combinar estas equações com (4.3.54) e (4.3.51) para expressar ρ e p da seguinte forma

$$\rho = \frac{7}{2}\theta J^2, \quad (4.3.59)$$

$$p = \frac{1}{2}\theta J^2. \quad (4.3.60)$$

Dessa maneira, o parâmetro de Immirzi junto com o campo de Dirac não massivo produz o efeito de um fluido perfeito caracterizado pela equação de estado $p = \rho/7$, que pode ser considerado um fluido intermediário entre radiação ($p = \rho/3$) e poeira ($p = 0$). Esse desvio em relação a $p = \rho/3$ é devido a presença da quantidade J^μ . A lei de conservação da energia de um fluido perfeito tem a forma

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (\text{ver eq. (3.4.10)}) \quad (4.3.61)$$

onde p pode ser dado pela equação de estado $p = \rho/7$. Se escrevermos $p = w\rho$, com $w = 1/7$, obtemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.3.62)$$

$$\ln\rho = \ln a^{-3(1+w)} + C, \quad (4.3.63)$$

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}. \quad (4.3.64)$$

Para o fluido que estamos considerando teremos $\rho \sim a^{-24/7}$. Podemos usar a equação de Friedmann (3.4.7) para $k = 0$ e verificar de que maneira o fator de escala a irá depender

do tempo t . Nesse caso temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (4.3.65)$$

De (4.3.64) sabemos que $\rho = \rho_o(a/a_o)^{-24/7}$, substituindo este resultado na equação acima teremos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_o\left(\frac{a}{a_o}\right)^{-24/7}, \quad (4.3.66)$$

Finalmente, fazendo $a_o = 1$ e resolvendo a equação (4.3.66) para a , teremos que $a \sim t^{7/12}$.

5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre a teoria de Dirac em cosmologia. Em particular estamos estudando o campo de Dirac no universo de FLRW.

A ação que descreve o nosso sistema contém o campo fermiônico minimamente acoplado e sem massa, além de um termo de interação quártico, no qual, a constante de acoplamento β está associada ao parâmetro de Immirzi [17].

Apresentamos também as equações de Dirac após variar a ação de nosso sistema, estas equações contém o parâmetro de Immirzi. Mostramos a equação de Einstein e o tensor energia-momento contendo os campos de Dirac e as equações de movimento para esses campos. A classe de soluções tais que as componentes espinoriais são expressas através de uma função real de η é descartada pelas relações de consistência.

A equação (4.3.54) mostra-nos que J^μ deve ser um vetor tipo-tempo. Mostramos que o parâmetro de Immirzi junto com o campo de Dirac não massivo se comporta como um fluido perfeito intermediário entre poeira e radiação.

APÊNDICE A – TENSOR DE RIEMANN

O tensor curvatura é um objeto importante no espaço Riemanniano. Ele contém termos de derivadas segunda, quadrado das derivadas da métrica e se mantém covariante. Neste apêndice iremos deduzir a forma para o tensor de Riemann.

Partimos do comutador das derivadas covariantes do objeto A^μ e usando (2.1.12), temos

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\mu \equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A^\mu.$$

Então

$$\begin{aligned} & \partial_\alpha(\nabla_\beta A^\mu) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\nabla_\lambda A^\mu) + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu(\nabla_\beta A^\lambda) - \\ & \partial_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) + \Gamma_{\alpha\beta}^\tau(\nabla_\tau A^\mu) - \Gamma_{\tau\beta}^\mu(\nabla_\alpha A^\tau) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_\alpha(\partial_\beta A^\mu + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu A^\lambda) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\partial_\lambda A^\mu + \Gamma_{\theta\lambda}^\mu A^\theta) + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu(\partial_\beta A^\lambda + \Gamma_{\theta\beta}^\lambda A^\theta) - \\ & \partial_\beta(\partial_\alpha A^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu A^\lambda) + \Gamma_{\alpha\beta}^\tau(\partial_\tau A^\mu + \Gamma_{\eta\tau}^\mu A^\eta) - \Gamma_{\tau\beta}^\mu(\partial_\alpha A^\tau + \Gamma_{\eta\alpha}^\tau A^\eta) = \end{aligned}$$

$$= A^\lambda R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta},$$

e

$$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu + \Gamma_{\tau\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \Gamma_{\tau\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\lambda}^\tau. \quad (\text{A.0.1})$$

Onde $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ é o tensor de Riemann.

APÊNDICE B – EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Neste apêndice obteremos as equações de Friedmann para a métrica FLRW.

O intervalo que nos fornece a métrica cosmológica FLRW é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (\text{B.0.1})$$

onde as componentes diagonais dos tensores métricos covariantes e contravariantes são dados por

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{a^2}{(1 - kr^2)}, \quad g_{22} = -a^2 r^2, \quad g_{33} = -a^2 r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (\text{B.0.2})$$

e

$$g^{00} = -1, \quad g^{11} = -\frac{(1 - kr^2)}{a^2}, \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2 r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2\theta}. \quad (\text{B.0.3})$$

As componentes não nulas para os símbolos de Christoffel, equação (2.1.10), em relação a métrica dada são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)}, & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{10}^1 &= \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{(1-kr^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^2 &= -\text{sen}\theta\cos\theta, & \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta.
\end{aligned} \tag{B.0.4}$$

As componentes do tensor de Ricci para as conexões não nulas são dadas por

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k]}{(1-kr^2)} \\
R_{22} &= r^2[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k] \\
R_{33} &= r^2[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k]\text{sen}^2\theta.
\end{aligned} \tag{B.0.5}$$

Supondo a homogeneidade e a isotropia do universo, o escalar de curvatura é dado por

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \tag{B.0.6}$$

e então:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right]. \tag{B.0.7}$$

Haverá duas equações de Einstein independentes, uma em relação a componente temporal e a outra em relação a componente espacial. Usando a equação (3.0.5)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{B.0.8}$$

onde $T_{\alpha\beta}$ é o tensor energia-momento para um fluido perfeito dado pela equação (3.0.7). Agora, resolvendo o lado esquerdo de (B.0.8) para a componente temporal, teremos

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2}, \tag{B.0.9}$$

para o lado direito de (B.0.8) :

$$T_{00} = (\rho + p)u_0u_0 - pg_{00} = \rho. \tag{B.0.10}$$

Então,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi\rho. \quad (\text{B.0.11})$$

Para a componente espacial, temos que

$$G_{ij} = 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.0.12})$$

logo,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p. \quad (\text{B.0.13})$$

Da equação (B.0.11), escrevemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.0.14})$$

substituindo (B.0.13) em (B.0.11) :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi \left(p + \frac{1}{3}\rho \right). \quad (\text{B.0.15})$$

As equações (B.0.14) e (B.0.15) representam a evolução temporal do fator de escala e são conhecidas como as equações cosmológicas de Friedmann.

APÊNDICE C – CONEXÃO DE SPIN

Para mostrar a relação (4.2.3), multiplicamos (4.2.4) pela tetrada e_c^α e usamos $e_c^\alpha e^b_\alpha = \delta_c^b$, então obtemos a conexão na forma mais geral, ou seja, com a parte antissimétrica:

$$\omega^{ab}_\mu = \frac{1}{2}(e^{b\alpha}\partial_\mu e^a_\alpha - e^{a\alpha}\partial_\mu e^b_\alpha) - \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\alpha\mu}(e^{b\alpha}e^a_\rho - e^{a\alpha}e^b_\rho). \quad (\text{C.0.1})$$

Substituímos nessa última equação a quantidade $\Gamma^\rho_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\sigma\alpha,\mu} + g_{\sigma\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\sigma})$. Consideramos, também, a relação

$$g^{\rho\sigma} = e^\rho_a e^{a\sigma}, \quad (\text{C.0.2})$$

então, a equação (C.0.1) em termos das tetradas será

$$\begin{aligned} \omega^{ab}_\mu = \frac{1}{2}(e^{b\alpha}\partial_\mu e^a_\alpha - e^{a\alpha}\partial_\mu e^b_\alpha) - \frac{1}{2}e^\rho_a e^{a\sigma}[\partial_\mu(e^a_\sigma e_{a\alpha}) + \\ \partial_\alpha(e^a_\sigma e_{a\mu}) - \partial_\sigma(e^a_\alpha e_{a\mu})](e^{b\alpha}e^a_\rho - e^{a\alpha}e^b_\rho). \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

Após algumas manipulações matemáticas, temos a relação para a conexão de spin (4.2.3):

$$\begin{aligned} \omega^{ab}_\mu = \frac{1}{4} [e^{b\alpha}\partial_\mu e^a_\alpha - e^{a\alpha}\partial_\mu e^b_\alpha + e^{a\alpha}\partial_\alpha e^b_\mu - e^{b\alpha}\partial_\alpha e^a_\mu + e^{bv}e^{a\lambda}e_{c\mu}\partial_\lambda e^c_v \\ - e^{av}e^{b\lambda}e_{c\mu}\partial_\lambda e^c_v]. \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

APÊNDICE D – VARIAÇÃO DA CONEXÃO DE SPIN

Partimos da seguinte equação:

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{4} \left\{ e^a{}_{\alpha} \partial_{\mu} e^{b\alpha} + e^a{}_{\rho} e^{b\alpha} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ e^b{}_{\alpha} \partial_{\mu} e^{a\alpha} + e^b{}_{\rho} e^{a\alpha} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} \right\}, \quad (\text{D.0.1})$$

usando o fato que

$$\Delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} h^{\alpha}{}_{\nu)} - \frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h_{\mu\nu}. \quad (\text{ver eq. (2.4.5)}) \quad (\text{D.0.2})$$

Temos que

$$\omega'^{ab}{}_{\mu} = \omega^{ab}{}_{\mu} + \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{2} h_{\alpha}{}^{\beta} e^a{}_{\beta} \partial_{\mu} e^{b\alpha} \right\}. \quad (\text{D.0.3})$$

$$2\omega^{ab}{}_{\mu} e_{b\alpha} = -\partial_{\mu} e^a{}_{\alpha} + e^a{}_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} \quad (\text{D.0.4})$$

$$\begin{aligned} 2\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} e_{b\alpha} - \omega^{ab}{}_{\mu} h_{\alpha}{}^{\beta} e_{b\beta} &= \frac{1}{2} \partial_{\mu} (h_{\alpha}{}^{\beta} e^a{}_{\beta}) \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{\rho}{}^{\beta} e^a{}_{\beta} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} + e^a{}_{\rho} \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}, \end{aligned} \quad (\text{D.0.5})$$

se multiplicarmos (D.0.5) por $e^{c\alpha}$ e depois trocarmos c por b, teremos

$$\begin{aligned} 2\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} e^b{}_{\alpha} e^a{}_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \frac{1}{2} h_{\rho\beta} e^{b\alpha} e^{a\beta} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} \\ &\quad + e^{b\alpha} e^a{}_{\rho} \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}, \end{aligned} \quad (\text{D.0.6})$$

onde

$$\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} e^b{}_{\alpha} \partial_{\mu} e^a{}_{\beta} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} e^b{}_{\alpha} e^a{}_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \omega^{ac}{}_{\mu} e_{c\beta} h^{\alpha\beta} e^b{}_{\alpha}. \quad (\text{D.0.7})$$

Os termos com as conexões Γ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} e^b{}_{\alpha} e^a{}_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \frac{1}{2} h_{\rho\beta} e^{b\alpha} e^{a\beta} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} &= \\ (h^{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} - h_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}) e^{b\alpha} e^{a\beta}. \end{aligned} \quad (\text{D.0.8})$$

O objeto $\Delta\omega^{ab}{}_{\mu}$ deve ser antissimétrico em a e b , mas o termo entre parênteses é simétrico em α e β . Logo teremos

$$\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{2}e^{b\alpha}e^a{}_{\rho}\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}e^{a\alpha}e^b{}_{\rho}\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}, \quad (\text{D.0.9})$$

por fim, usando (D.0.2), temos

$$\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} = \nabla_{\beta} \left[\frac{1}{4}e^{b\beta}e^{a\alpha}h_{\alpha\mu} \right] - \nabla_{\beta} \left[\frac{1}{4}e^{a\beta}e^{b\alpha}h_{\alpha\mu} \right]. \quad (\text{D.0.10})$$

APÊNDICE E – MOSTRANDO QUE A EQUAÇÃO (4.3.17) É IDENTICAMENTE NULA

Nesta seção mostraremos que as condições de consistência para $T_{ij} = 0$ na seção (4.3) satisfaz uma identidade. Sabemos que o tensor EM com o campo de Dirac é dado na forma

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi} \gamma_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \psi - \nabla_{(\beta} \bar{\psi} \gamma_{\alpha)} \psi \right] - \frac{\theta}{2} g_{\alpha\beta} J^{\mu} J_{\mu}. \quad (\text{E.0.1})$$

Então supondo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, teremos $g_{12} = 0$,

$$T_{12} = \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma_1 \nabla_2 \psi + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma_2 \nabla_1 \psi, \quad (\text{E.0.2})$$

ou usando as equações (4.3.18) e (4.3.19) teremos

$$\frac{i}{8} a' \bar{\psi} [-\Gamma_1 \Gamma_0 \Gamma_2] \psi + \frac{i}{8} a' \bar{\psi} [-\Gamma_2 \Gamma_0 \Gamma_1] \psi = T_{12}, \quad (\text{E.0.3})$$

ou

$$-\frac{i}{8} a' \bar{\psi} [\Gamma_1 \Gamma_0 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_0 \Gamma_1] \psi = T_{12}. \quad (\text{E.0.4})$$

Então, sabendo que $\Gamma_1 \Gamma_0 \Gamma_2 = -\Gamma_2 \Gamma_0 \Gamma_1$ temos naturalmente que

$$-\frac{i}{8} a' \bar{\psi} [\Gamma_1 \Gamma_0 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_0 \Gamma_1] \psi = 0. \quad (\text{E.0.5})$$

Concluimos que $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$, assim a equação (4.3.18) se anula naturalmente.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Weyl, *Elektron und Gravitation. I.* (Eingegangen, 1929).
- [2] H. Weyl, *Phys. Rev* 77: 5, 1950.
- [3] A. O. Barut e I. H. Duru, *Phys. Rev D* 36: 12, 1987.
- [4] D.R. Brill e J.A. Wheeler, *Reviews of Modern Physics* 29: 3, 1957.
- [5] G.David Kerlick, *Phys. Rev D* 12: 10, 1975.
- [6] M.O.Ribas, F.P.Devicchi e G.M.Kremer, *Phys. Rev D* 72: 123502, 2005.
- [7] G. de Berredo-Peixoto e E.A. de Freitas, *Class. Quantum Grav.* 26: 2009.
- [8] M.O.Ribas e G.M.Kremer, arXiv: 0902.2696v2, 2010.
- [9] A.Einstein, H.A.Lorentz, H.Weyl e H.Minkowski, *The Principle of Relativity.* (Editora Dover, 1952).
- [10] I.L.Shapiro, *Lecture Notes on Vector and Tensor, Algebra and Analysis* (Brazil).
- [11] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity.* (Oxford University Press 1992).
- [12] I.L.Shapiro, *Physical Aspects of the Space-Time Torsion.* *Phys. Rep.* 357 (2002).
- [13] Ryder, L.H., *Quantum Field Theory.* (Cambridge University Press 1985, 1996).
- [14] Landau, L.D., e Lifshits, E.M., *The Classical Theory of Fields, V.2.* (Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.S.S.R).
- [15] Wald, R.M., *General Relativity.* (University of Chicago Press, 1984).
- [16] Kaku, M., *Quantum Field Theory, A Modern Introduction.* (Oxford University Press, 1993).
- [17] A. Perez e C. Rovelli, *Phys. Rev D* 73: 044013, 2006.

- [18] S.Holst, Phys. Rev. D53: 5966, 1996.
- [19] L.Freidel, D. Minic e T. Takeuchi, Phys. Rev. D 72: 104002, 2005.
- [20] S. Mercuri, Phys. Rev. D 73: 084016, 2006.
- [21] S. Alexandrov, Class. Quantum Grav. 25: 145012, 2008.
- [22] V. Taveras e N. Yunes, Phys. Rev. D 78: 064070, 2008.
- [23] M.-H. Lagraa e M. Lagraa, Class. Quantum Grav. 27: 095012, 2010.