

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Guilherme Marques Ribeiro

Introdução aos Sistemas Vinculados e aos Formalismos Simplético e de Dirac

Juiz de Fora

2015

Guilherme Marques Ribeiro

Introdução aos Sistemas Vinculados e aos Formalismos Simplético e de Dirac

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Teoria Quântica de Campos, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Jorge Ananias Neto

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Marques, Guilherme.

Introdução aos Sistemas Vinculados e aos Formalismos Simplético e de Dirac / Guilherme Marques Ribeiro. – 2015.

169 f. : il.

Orientador: Jorge Ananias Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2015.

1. Simetria. 2. Dirac. 3. Simplético. I. Ananias Neto, Jorge, orient.
II. Introdução aos Sistemas Vinculados e aos Formalismos Simplético e de Dirac.

RESUMO

Nessa dissertação, apresentamos dois formalismos consistentes para tratar a dinâmica de sistemas vinculados: o procedimento de Dirac[15], baseado num algoritmo que substitui os parênteses de Poisson por outra estrutura semelhante, e o método simplético[17], fundamentado na deformação da estrutura simplética do espaço de fase. Aplicamos esses formalismos tanto em exemplos simples quanto em problemas concretos de física teórica, como o modelo de Proca e o campo eletromagnético. Estudamos também as simetrias apresentadas por sistemas vinculados de primeira classe. Apresentamos uma prova da conjectura de Dirac[3] e mostramos que um contra-exemplo apresentado na literatura[2] é consistente com a conjectura .

Palavras-chave: Simetrias. Vínculos. Dirac. Simplético.

ABSTRACT

In this dissertation, we have presented two consistent formalisms to treat the dynamics of constrained systems: the Dirac procedure[15], based on an algorithm that replaces the Poisson brackets by a similar structure, and the symplectic method[17], based on the deformation of the symplectic structure of the phase space. We have applied this formalisms to both simple examples and concrete problems from theoretical physics, such as the Proca model and the electromagnetic field. We also studied the symmetries generated by first class constrained systems. We have presented a prove of Dirac's conjecture[3] and showed that a counter-example found in the literature[2] is consistent with the conjecture

Keywords: Symmetries. Constraints. Dirac. Symplectic.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores doutores Wilson Oliveira, Jorge Ananias Neto, Everton Murilo Carvalho de Abreu e Albert Carlo Rodrigues Mendes pela sua colaboração no desenvolvimento da dissertação. Seus comentários e correções foram fundamentais na conclusão da mesma

Agradeço meus pais pela colaboração financeira e suporte emocional para concluir o projeto

Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro durante o desenvolvimento da dissertação

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Simetrias e Teorias de Calibre	10
2.1	Teorema de Noether	11
2.2	Transformações de Calibre	12
2.3	Teorias de Calibre e a Física de Partículas	19
3	Formalismo de Dirac para Sistemas Vinculados	26
3.1	Sistemas Vinculados: Procedimento de Dirac	26
3.2	Geradores de Transformação de Calibre	39
3.3	Quantização Canônica de Sistemas Vinculados	44
3.4	Contagem do Número de Graus de Liberdade	47
3.5	Exemplos e Aplicações	48
4	Formalismo Simplético para Sistemas Vinculados	69
4.1	Formalismo Simplético de Faddeev- Jackiw	69
4.2	Formalismo Simplético Modificado	73
4.3	Conjectura de Dirac	81
4.4	Contra-Exemplo à Conjectura de Dirac?	83
5	Conclusão	87
	APÊNDICE A – Teoria Clássica de Campos	88
A.1	Teoria de Campos no Formalismo Lagrangiano	89
A.2	Formalismo Hamiltoniano	92
A.3	Teorema de Noether	95
	APÊNDICE B – Propriedades de Equações Diferenciais Ordinárias	98
	APÊNDICE C – Teoria de Grupos	100
	APÊNDICE D – Sistemas Não Vinculados	108
D.1	Formalismo Clássico de Sistemas Não Vinculados	108
D.2	Formalismo Simplético de Sistemas Não Vinculados	120
	APÊNDICE E – Outros Exemplos e Aplicações	126
E.1	Formalismo de Dirac	126

E.2	Formalismo Simplético Modificado	141
	REFERÊNCIAS	167

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Órbitas de Calibre	39
Figura 2 – Campo Eletromagnético sem fontes	68
Figura 3 – Sistema Contínuo de Massas Iguais Ligadas por Molas	88
Figura 4 – Curva Integral do Campo $g^i(z^j)$	99
Figura 5 – Simetrias de um Quadrado	103

1 Introdução

C.N. Yang e R. L. Mills[55], em seus estudos sobre Spins Isotópicos, foram os primeiros a conciliar, de maneira consistente, a relação entre a invariância de fase global da função de onda e a velocidade finita de propagação de informação, que deu origem as teorias de calibre, de ampla importância em teorias físicas modernas, como a Eletrodinâmica Quântica (QED) e a Cromodinâmica Quântica (QCD). O crescente interesse em estudá-las levou os físicos a perceberem que elas podiam ser formuladas em termos de Lagrangeanas possuindo simetrias locais. No entanto, a quantização desses sistemas apresenta problemas especiais, já que existem infinitas soluções para as equações de movimento que são fisicamente equivalentes. Alguns métodos de quantização foram desenvolvidos para modelos específicos, como o formalismo de Gupta-Bleuler, para o campo eletromagnético[59], o formalismo BRST[60] e a formulação funcional de integrais de caminho[56]

No entanto, seria interessante desenvolver um formalismo geral, que englobasse todas as teorias de calibre. Motivados por esse objetivo, descobriu-se então que todas elas pertencem a classe de sistemas singulares, caracterizados pelo fato de que, entre as equações de Euler-Lagrange, incluem-se equações algébricas entre as coordenadas e as velocidades. Essas relações diferem daqueles vínculos conhecidos na mecânica, pois são intrínsecos às equações de movimento, e não impostos externamente. Logo, um entendimento profundo da quantização de teorias de calibre requer um estudo das propriedades de sistemas vinculados

Dirac[15], estudando campos gravitacionais na abordagem canônica, e P.G. Bergmann[61] foram os primeiros a fornecer uma análise coerente e sistemática de teorias vinculadas, particularmente aquelas que possuíam simetrias de calibre. Uma formalismo mais moderno, utilizando a geometria simplética do espaço de fase, foi desenvolvido recentemente por Faddeev e Jackiw [16], baseado na abordagem de Sudarshan[62], e uma modificação desse mecanismo foi proposto por Barcelos-Neto e Wotzasek[17].

Essa dissertação é dedicada ao estudo da dinâmica clássica de sistemas vinculados. Tem como principal alvo os estudantes de graduação ou pós-graduação que estão iniciando sua pesquisa em teoria quântica de campos; mais especificamente em quantização canônica. Tentaremos apresentar os principais conceitos de maneira mais clara possível e ilustrá-los com um número extensivo de exemplos e aplicações. Isso permitirá ao leitor absorver a parte teórica e desenvolver uma certa prática na resolução de problemas, que lhe será útil quando for estudar problemas de seu interesse.

A dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentaremos, de maneira geral, o conceito de simetrias, concentrando-se na importância que elas tiveram (e tem) no desenvolvimento de teorias físicas. Mostraremos que o Teorema de Noether encarna a relação entre matemática e física, estabelecendo uma conexão entre simetrias da Lagrangeana e quantidades conservadas. Em seguida, discutiremos Lagrangeanas singulares, onde verificaremos que sistemas com simetrias de calibre fazem parte dessa classe de Lagrangeanas. Desenvolveremos, também, um algoritmo para revelar todas as simetrias apresentadas por esses sistemas. Por fim, faremos uma

rápida introdução à física de partículas, mostrando que a invariância de calibre implica na interação entre campos.

No capítulo 3 apresentaremos a formulação Hamiltoniana de sistemas vinculados, baseado no trabalho de Dirac. Nesse formalismo, estudaremos uma classificação sistemática dos vínculos em primários e secundários, de primeira e segunda classe. Construiremos uma estrutura apropriada para sistemas vinculados que assume o papel dos parênteses de Poisson nas equações de Hamilton. Mostraremos que os vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de calibre, e desenvolveremos uma fórmula para obter os parâmetros de transformação. Apresentaremos o método de quantização canônica e a maneira de contar o número de graus de liberdade desses sistemas. Por fim, alguns exemplos e aplicações serão utilizados para ilustrar o formalismo desenvolvido.

Capítulo 4 será destinado ao formalismo simplético, que é um método alternativo para lidar com sistemas vinculados. É uma abordagem baseada em Lagrangeanas de primeira ordem, através da deformação da estrutura simplética. Estudaremos brevemente o formalismo de Faddeev-Jackiw, caracterizado pela diminuição sistemática das variáveis canônicas, de forma a obter o espaço de fase reduzido. Passamos então para o formalismo simplético modificado, inicialmente desenvolvido por Barcelos-Neto e Wotzasek, e levemente transmutado aqui, e mostramos, de forma semelhante a Montani[54], que ele é equivalente ao formalismo de Dirac. Por fim, apresentaremos uma possível demonstração, com auxílio do formalismo simplético, da conjectura de Dirac, e analisaremos um contra-exemplo apresentado na literatura.

A dissertação apresenta cinco apêndices. No Apêndice A, revisamos alguns conceitos de teoria clássica de campos. Apêndice B possui alguns conceitos de equações diferenciais ordinárias. Já no Apêndice C, introduzimos alguns conceitos relacionados à teoria de grupos. Apêndice D apresenta uma revisão de sistemas não vinculados. Por fim, no Apêndice E estão vários exemplos e aplicações das teorias desenvolvidas ao longo da dissertação.

2 Simetrias e Teorias de Calibre

Uma das ferramentas conceituais mais importantes em física teórica é a noção de simetria. Embora todos tenhamos uma noção intuitiva do que significa algo ser simétrico, a ciência requer uma definição mais rigorosa. A definição mais usada foi dada pelo matemático Herman Weyl[13]:

Um objeto é dito simétrico se, após efetuada uma certa operação sobre o objeto, ele permanece igual ao que era antes da operação ser realizada.
Essa operação é chamada simetria do objeto

Vamos considerar um exemplo:

Vamos ilustrar a utilidade da equivalência das leis físicas em diferentes referenciais inerciais com o seguinte exemplo: vamos determinar o campo elétrico e o campo magnético gerado por uma partícula puntiforme com velocidade constante \vec{v} e carga elétrica q . Esse é um problema longo, que tem como base a modificação dos potenciais ϕ e \vec{A} para incluir o efeito de propagação da informação eletromagnética com velocidade finita, para depois aplicar um extenso cálculo vetorial para obter o campo elétrico e o campo magnético[36]. No entanto, podemos obter uma solução exata desse problema de forma simples, desde que se escolha um referencial no qual a partícula se encontre na origem deste, cujo campo gerado é simplesmente o campo elétrico estático de uma partícula puntiforme. Utilizamos então as leis de transformação para obter os campos correspondentes no referencial original.

No referencial de repouso, temos

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = 0 \quad (2.1)$$

onde $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$. Em coordenadas cartesianas, temos

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.2)$$

Aplicando as leis de transformação do campo elétrico e magnético, obtemos[31]:

$$E_x = \frac{q\gamma(x - ut)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_x = 0$$
$$E_y = \frac{q\gamma y}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_y = -\frac{u}{c^2} E_z$$
$$E_z = \frac{q\gamma z}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_z = \frac{u}{c^2} E_y \quad (2.3)$$

Como pode ser observado, obtivemos as equações (2.3) que descrevem o campo eletromagnético gerado por uma partícula carregada em movimento utilizando somente a equivalência das leis do eletromagnetismo em diferentes referenciais - em exemplo de como a presença de uma simetria em um determinado problema pode ser útil para facilitar o estudo desse.

2.1 Teorema de Noether

Na seção anterior discutimos o conceito de simetria e vimos alguns exemplos de como ela está presente na descrição da natureza. Nessa seção, aprofundaremos o nosso conhecimento de simetrias, mostrando que elas estão profundamente relacionadas com a existência de leis de conservação.

Uma lei de conservação diz que alguma quantidade X na descrição matemática da evolução de um sistema permanece constante ao longo do movimento, ou seja, X é um invariante. Matematicamente, a taxa de variação de X se anula

$$\frac{dX}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

Essas quantidades são ditas conservadas. Elas são frequentemente chamadas de constantes do movimento e são muito úteis para simplificar a solução de alguns problemas

Por exemplo, a homogeneidade do tempo: A homogeneidade do tempo significa invariância das leis da natureza em sistemas isolados em relação a translações temporais, isso é, em $t + t_0$ elas têm a mesma forma que em t . Isso é expresso matematicamente pelo fato de que a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.5)$$

Logo

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (2.6)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.7)$$

encontra-se

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 \quad (2.8)$$

Isso expressa a conservação da quantidade

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \pi_i - L = H \quad (2.9)$$

que representa a energia total do sistema (função Hamiltoniana)

Esse exemplo ajudará a apreciar melhor a essência do Teorema de Noether.

Teorema de Noether:

Se as equações de Euler-Lagrange são invariantes sob uma transformação de coordenadas $(t, q) \rightarrow (t'(t), q'(q, t))$, então existe uma integral do movimento, isto é, uma quantidade conservada dada por $Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta t$

Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [46]

As leis de conservação fundamentais são casos particulares do teorema de Noether, o que revela o seu poderio e sua generalidade. Vamos mostrar isso em um exemplo. Vamos utilizar o teorema de Noether para mostrar que a invariância das leis físicas sobre translação temporal e espacial implicam na conservação da energia e do momento. Para isso, considere primeiramente um deslocamento puramente temporal, ou seja, uma transformação da forma

$$t' = t + \epsilon$$

$$q'_i = q_i \tag{2.10}$$

Substituindo na expressão para a quantidade conservada Q , temos que

$$\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}^i \right) \tag{2.11}$$

é uma constante, corroborando o resultado (2.8)

Considere, agora um deslocamento puramente espacial, tal que as transformações são da forma

$$t' = t$$

$$q'_i = q_i + \epsilon_i \tag{2.12}$$

Substituindo na expressão encontrada para Q , temos que

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante} \tag{2.13}$$

que é a conservação do momento conjugado total

2.2 Transformações de Calibre

Já vimos até o momento que as simetrias observadas na natureza fazem um importante papel na construção de qualquer teoria descrevendo um sistema físico. Para que nossa teoria seja consistente, a Lagrangeana que descreve o nosso modelo deve apresentar todas as simetrias

observadas. Por outro lado, nem todas as simetrias da ação podem ser observadas na natureza. Esse é o caso das simetrias de calibre, que começaremos a explorar a partir de agora.

Transformações de calibre pertencem a classe de sistemas vinculados, cuja dinâmica é obtida a partir de Lagrangeanas denominadas singulares (a ser definida abaixo). Teorias derivadas a partir desse tipo de Lagrangeanas são muito importantes, pois acredita-se que todas as interações da natureza são descritas por teorias de calibre.

Antes de prosseguirmos, apresentaremos um exemplo de um sistema que apresenta simetria de calibre, para ilustrar a necessidade de estudar esses sistemas com cautela.

Considere a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 \right) \quad (2.14)$$

Vamos obter as equações de movimento a partir do princípio variacional:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 + \dot{q}_1 \delta q_2 + q_2 \delta \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \delta q_1 + q_1 \delta \dot{q}_2)$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt ([-\ddot{q}_1 - \dot{q}_2 + \dot{q}_2] \delta q_1 + [\dot{q}_1 - \dot{q}_1] \delta q_2)$$

Como as variações são arbitrárias, obtemos a equação de movimento

$$\ddot{q}_1 = 0, \quad (2.15)$$

cuja solução é

$$q_1(t) = q_1(0) + v_1(0)t. \quad (2.16)$$

Observe o que acaba de acontecer. Aplicamos o princípio variacional e, no entanto, não conseguimos determinar a dinâmica de q_2 ! Por outro lado, note que podemos reescrever a ação da seguinte maneira

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{d}{dt}(q_1 q_2) \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \right) + q_1 q_2 \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \right)$$

Uma vez que Lagrangeanas que se diferem por uma derivada total em relação ao tempo geram as mesmas equações de movimento, somos levados a concluir que o sistema equivale a uma partícula livre com um único grau de liberdade. A variável q_2 não representa nenhum grau de liberdade físico do sistema, é arbitrária e pode ser modificada a vontade, sem perda de significado físico.

O exemplo acima mostra uma das particularidades de sistemas de calibre: a presença de variáveis sem nenhum significado físico. Nem sempre é possível (ou desejável) eliminar as variáveis que não são graus de liberdade do sistema. Inclusive, já mencionamos que a presença delas implica na presença de interação entre as partículas, como teremos a oportunidade de ver. Por essa razão, necessitamos de um método sistemático para tratar esses sistemas. No restante dessa seção, mostraremos como é possível, utilizando um algoritmo, revelar todas as transformações de calibre da teoria. Conquanto nos restringiremos a reproduzir o método apresentado em [3], desenvolveremos alguns cálculos com mais detalhes.

Inicialmente, apresentamos a definição de Lagrangeana singular. Para esses fins, considere um sistema com um número finito de graus de liberdade, e que sua dinâmica possa ser descrita por uma Lagrangeana $L(q, \dot{q})$, sendo $q = \{q^1, \dots, q^N\}$ coordenadas generalizadas. O princípio variacional implica nas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

Vamos calcular essa derivada total. Utilizando a regra da cadeia, vem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k} \dot{q}^i \right)$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \ddot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k} \dot{q}^i \quad (2.18)$$

ou, em notação matricial

$$W \ddot{\vec{q}} = \vec{K} \quad (2.19)$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^N} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{q}^N \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q^1} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^1} \dot{q}^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial L}{\partial q^N} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^N} \dot{q}^i \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Se a matriz W , denominada Matriz Hessiana, for não degenerada, a sua inversa existe e podemos colocar o sistema de equações diferenciais em forma normal:

$$\ddot{q}^i = f^i(q, \dot{q}) \quad (2.22)$$

É um fato matemático que toda equação diferencial de segunda ordem na forma normal, junto com as condições iniciais $q^i(0) = q_0^i$, $\dot{q}^i(0) = v_0^i$, $i = 1, \dots, N$ possui solução única. Por outro lado, se a matriz for não inversível, as equações de movimento não tomarão a forma usual, e falamos de um sistema com Lagrangeana singular

Para investigar as simetrias da ação, isso é, as transformações de coordenada que deixam a ação invariante, considere as transformações infinitesimais gerais

$$q^i(t) \rightarrow q^i(t) + \delta q^i(t)$$

$$\dot{q}^i(t) \rightarrow \dot{q}^i(t) + \delta\dot{q}^i(t) = \dot{q}^i(t) \rightarrow \dot{q}^i(t) + \frac{d}{dt}\delta q^i(t) \quad (2.23)$$

para cada $i = 1, \dots, N$. Dizemos que essa transformação é uma simetria se a ação fica invariante sob essa transformação, ou seja, se a variação na Lagrangeana é igual a uma derivada total de uma função que se anula nas extremidades. A variação da ação é dada por

$$\delta S = - \int dt [E_i^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \delta q^i] \quad (2.24)$$

sendo $E_i^{(0)}$ a derivada de Euler,

$$E_i^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (2.25)$$

que se anula na trajetória física. Queremos determinar as variações nas trajetórias que deixam a ação invariante. Para esses fins, note que podemos escrever a derivada de Euler em termos da matriz Hessiana, como já fizemos antes:

$$\vec{E}^{(0)} = W^{(0)} \ddot{\vec{q}} + \vec{K}^{(0)} \quad (2.26)$$

Nosso interesse é estudar Lagrangeanas singulares, tal que a matriz Hessiana é singular. Isso implica que existem vetores não nulos pertencentes ao núcleo da matriz Hessiana, que dão origem a relações algébricas entre as coordenadas e as velocidades generalizadas. Vamos formular isso de maneira mais precisa.

Seja N a dimensão do espaço de configurações e R o posto da matriz Hessiana. Então existem $N - R$ vetores $\vec{w}^{(0,k)} \in \mathfrak{R}^N$, $k = 1, \dots, N - R$ no núcleo de W tal que

$$W \vec{w}^{(0,k)} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, N - R \quad (2.27)$$

Segue que as funções definidas por

$$\phi^{(0,k)} = \vec{w}^{(0,k)} \cdot \vec{E}^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \vec{w}^{(0,k)} \cdot \vec{K}^{(0)}(q, \dot{q}) \quad , \quad k = 1, \dots, N - R \quad (2.28)$$

só dependem das coordenadas e das velocidades generalizadas, e se anulam na trajetória física. Chamaremos essas funções de vínculos originais. É possível que alguns dos vínculos sejam linearmente dependentes, isso é, que seja possível encontrar uma solução não trivial para os c_k , definidos por

$$\sum_{k=1}^{N-R} c_k \phi^{(0,k)} = 0 \quad (2.29)$$

Se esse for o caso, existem $N_0 \leq N$ combinações lineares

$$\vec{v}^{(0,n_0)} = \sum_{k=1}^{N-R} c_k^{n_0} \vec{w}^{(0,k)} \quad (2.30)$$

tal que temos, identicamente,

$$G^{(0,n_0)} = \vec{v}^{(0,n_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} = 0 \quad , \quad n_0 = 1, \dots, N_0 \quad (2.31)$$

Essas funções são denominadas Identidades de Calibre. Sua importância será discutida abaixo. Note que já é possível identificar que as transformações da forma

$$\delta q^i = \sum_{n_0=1}^{N_0} \epsilon_{n_0}(t) v_i^{(0,n_0)}$$

para quaisquer valores de $\epsilon_{n_0}(t)$, deixam a ação invariante, já que

$$\delta S = - \int dt [E_i^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \delta q^i] = - \int dt \left[\sum_{n_0=1}^{N_0} \epsilon_{n_0}(t) \vec{v}^{(0,n_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right] = 0$$

Após encontrar as Identidades de Calibre, podemos reduzir os vínculos para um conjunto de \bar{N}_0 vínculos genuínos (linearmente independentes)

$$\phi^{(0,n_0)} = \vec{u}^{(0,\bar{n}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \quad , \quad \bar{n}_0 = 1, \dots, \bar{N}_0 \quad (2.32)$$

sendo $\left\{ \vec{u}^{(0,n_0)} \right\}_{n_0=1}^{\bar{N}_0} \subset \left\{ \vec{u}^{(0,k)} \right\}_{k=1}^{N-R}$

Vimos que os modos zeros da matriz Hessiana geram relações algébricas (vínculos) entre as coordenadas e as velocidades generalizadas. É possível que existam mais relações como estas, que são consequência de exigirmos uma teoria consistente. Para ver isso, note que, para um sistema não vinculado, a dinâmica ocorre num espaço de dimensão N . Quando há a presença de vínculos, as coordenadas não são mais todas independentes, e a dinâmica ocorre num espaço de dimensão menor. Esse subespaço é definido pelos vínculos. Para que a dinâmica permaneça sempre nesse subespaço, é necessário que os vínculos sejam preservados no tempo, ou seja

$$\frac{d}{dt} \phi^{(0,\bar{n}_0)} = 0 \quad \bar{n}_0 = 1, \dots, \bar{N}_0 \quad (2.33)$$

Motivados por essa justificativa, construímos o vetor coluna definido por

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt} \phi^{(0,1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \phi^{(0,\bar{N}_0)} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Esse vetor é análogo ao vetor derivada de Euler: ele se anula na trajetória física. A diferença é que ele é definido em uma subvariedade do espaço de configurações. Assim como fizemos antes, podemos escrever esse vetor na forma $A\ddot{\vec{q}} + \vec{b}$. Para ver isso, note que

$$\frac{d}{dt} \phi^{(0,k)} = \sum_j \frac{\partial \phi^{(0,k)}}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \sum_j \frac{\partial \phi^{(0,k)}}{\partial q^j} \dot{q}^j$$

Logo, podemos escrever $\vec{E}^{(1)}$ como

$$\vec{E}^{(1)} = W^{(1)} \ddot{\vec{q}} + K^{(1)} \quad (2.35)$$

sendo

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} & & & & W^{(0)} \\ & & & & \\ \frac{\partial \phi^{(0,1)}}{\partial \dot{q}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi^{(0,1)}}{\partial \dot{q}^N} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \phi^{(0,\bar{N}_0)}}{\partial \dot{q}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi^{(0,\bar{N}_0)}}{\partial \dot{q}^N} \end{pmatrix}, \quad \vec{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{K}^{(0)} \\ \sum_j \frac{\partial \phi^{(0,1)}}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_j \frac{\partial \phi^{(0,\bar{N}_0)}}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Como antes, procuramos os vetores pertencentes ao núcleo de $W^{(1)}$, Assim, teremos possíveis novos vínculos e novas Identidades de Calibre ao contraírmos esses vetores com $E^{(1)}$. Os chamaremos de vínculos de primeira geração e Identidades de Calibre de primeira geração, respectivamente. As Identidades de Calibre de primeira geração serão da forma

$$G^{(1,n_1)} = \vec{v}^{(1,n_1)} \cdot \vec{E}^{(1)} + \sum_{\bar{n}_0=1}^{\bar{N}_0} A_{n_1,\bar{n}_0}^{(1,0)} [\vec{u}^{(0,\bar{n}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}] = 0, \quad n_1 = 1, \dots, N_1 \quad (2.37)$$

sendo o primeiro termo relacionado à combinação linear dos vínculos de primeira geração e o segundo termo relacionado a uma combinação linear com os vínculos originais. Após identificarmos as identidades de calibre, podemos selecionar um conjunto de vínculos linearmente independentes

$$\phi^{(1,\bar{n}_1)} = \vec{u}^{(1,\bar{n}_1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = 0, \quad \bar{n}_1 = 1, \dots, \bar{N}_1 \quad (2.38)$$

que utilizamos para construir a matriz Hessiana de segunda geração $W^{(2)}$. O processo iterativo termina quando, para alguma geração M , temos:

- (i) $\{\vec{x}; W^{(N)}\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ ou
- (ii) Os vetores pertencentes ao núcleo de $W^{(N)}$ dão origem somente a identidade de calibre.

Quando um deles acontece, descobrimos todos os vínculos e todas as Identidades de calibre da teoria.

Em cada geração l , as Identidades de calibre tem a seguinte forma:

$$G^{(l,n_l)} = \vec{v}^{(l,n_l)} \cdot \vec{E}^{(l)} + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{\bar{n}_m=1}^{\bar{N}_m} A_{n_l,\bar{n}_m}^{(l,m)} [\vec{u}^{(m,\bar{n}_m)} \cdot \vec{E}^{(m)}] = 0, \quad n_l = 1, \dots, N_l \quad (2.39)$$

sendo o primeira termo relacionado as combinações lineares dos vínculos da geração l e o segundo termo relacionado à combinação linear dos vínculos das gerações anteriores. Para nossos propósitos, é conveniente escrever as identidades de calibre como função apenas da derivada de Euler $\vec{E}^{(0)}$. Com

esse objetivo em mente, note que podemos seguir de maneira iterativa para escrever $\vec{E}^{(s)}$, para cada geração s , como função de $\vec{E}^{(0)}$, pois

$$\vec{E}^{(l)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(0,1)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(0,\bar{N}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(l-1,1)} \cdot \vec{E}^{(l-1)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(l-1,\bar{N}_l)} \cdot \vec{E}^{(l-1)} \right) \end{pmatrix}, \quad \vec{E}^{(l-1)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(0,1)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(0,\bar{N}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(l-2,1)} \cdot \vec{E}^{(l-2)} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(l-2,\bar{N}_{l-1})} \cdot \vec{E}^{(l-2)} \right) \end{pmatrix}, \quad \dots etc \quad (2.40)$$

Assim, chegamos numa expressão da forma

$$G^{(l,n_l)} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^l \rho_{mi}^{(l,n_l)} \frac{d^m}{dt^m} E_i^{(0)} = 0 \quad (2.41)$$

sendo $\rho_{mi}^{(l,n_l)}$ funções das coordenadas generalizadas e de suas derivadas. Segue que a identidade

$$\sum_{l=0}^M \sum_{n_l=1}^{N_l} \epsilon^{(l,n_l)}(t) G^{(l,n_l)} = 0 \quad (2.42)$$

vale para quaisquer funções arbitrárias $\epsilon^{(l,n_l)}(t)$. Podemos aplicar sucessivas regras do produto para aparecer a derivada de Euler fora da derivada. Para visualizar o procedimento, considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$. Então

$$\begin{aligned} f(t) \frac{d^m}{dt^m} g(t) &= \frac{d}{dt} \left(f(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} g(t) \right) - \frac{df}{dt} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} g(t) = \dots \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{F} + (-1)^m g(t) \frac{d^m}{dt^m} f(t) \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa maneira, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^N \delta q^i E_i^{(0)} - \frac{dF}{dt} = 0 \quad (2.43)$$

sendo

$$\delta q^i = \sum_{l=0}^M \sum_{n_l=1}^{N_l} \sum_{m=0}^l (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left(\rho_{mi}^{(l,n_l)} \epsilon^{(l,n_l)}(t) \right) \quad (2.44)$$

e F uma função das coordenadas e das velocidades generalizadas. Conseguimos expressar a variação da Lagrangeana

$$\delta L = -[E_i^{(0)}(q, \dot{q}, \ddot{q})\delta q^i]$$

como sendo igual a uma derivada total de uma função. Portanto, as transformações de coordenadas são simetrias e deixam as equações de movimento invariantes. Destacamos a importância das Identidades de Calibre: elas não só foram fundamentais para conseguir achar a forma de δq^i , como também determinam quantos parâmetros independentes caracterizam essa transformação, isso é, determinam a dimensão do grupo o qual as transformações pertencem

2.3 Teorias de Calibre e a Física de Partículas

Até agora discutimos apenas alguns resultados que seguem da análise matemática de alguns sistemas. Embora tenhamos aplicado o que desenvolvemos em alguns exemplos, pouco conectamos com a física.

Em meados da década de 50, dois físicos, C.N. Yang da Instituição para Estudos Avançados da Universidade de Princeton, e R.L. Mills do Laboratório Nacional de Brookhaven ficaram interessados na questão da invariância de fase em mecânica quântica[45]. O que mais os intrigava era que a ideia da invariância de fase global não era compatível com a natureza relativística de Einstein: para exibir essa independência da fase, era necessário mudar a fase globalmente, pela mesma quantidade em todo os pontos do espaço-tempo:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(\vec{x}, t) \quad (2.45)$$

A teoria da relatividade tinha feito grande progresso no contexto de evitar a noção inquietante de ação à distância. A relatividade de Einstein nos diz que nenhum objeto que possua massa-energia pode viajar mais rápido que a luz, e como a ação de uma força por um objeto em outro geralmente requer a troca de energia entre eles, nenhuma força pode agir instantaneamente em um ponto remotamente distante do agente

Como essa noção relativística poderia se conciliar com o fato de que o valor da função de onda num ponto x do espaço-tempo saberia instantaneamente qual a escolha foi feita para a fase da função de onda em um ponto distante x' ? Informação não pode ser trocada instantaneamente entre dois pontos separados espacialmente. Nada que aconteça no ponto \vec{x} no instante t pode influenciar no ponto \vec{x}' no mesmo instante t

Yang e Mills trabalharam na ideia de que não devemos falar em invariância de fase global, pois nem todos os pontos do espaço-tempo estão causalmente conectados, não tendo sentido requerer que a fase da função de onda mude igualmente em todos os pontos do espaço instantaneamente. Em vez disso, devemos considerar mudanças de fase locais, isso é, uma fase que varia de ponto a ponto no espaço:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(\vec{x}, t) \quad (2.46)$$

No entanto, isso apresenta um problema fundamental. A equação satisfeita pela função de onda envolve uma derivada espacial da função. Se tomarmos a função de onda original, que satisfaz a equação de onda, e mudarmos a fase por uma quantidade que varia de ponto a ponto no espaço, modificaremos a forma da equação de onda, não mais fornecendo uma descrição válida do fenômeno físico em estudo. Yang e Mills decidiram então trabalhar em cima desse problema. Eles esperavam resolver esse conflito forçando a função de onda a ser invariante sob uma mudança local de fase, utilizando o seguinte procedimento: Sempre que a fase da função de onda muda localmente, a derivada na equação de onda introduz um “erro” que muda a equação, tornando-a não mais adequada para a descrição física. Eles então adicionavam o termo relacionado ao “erro”, mas com o sinal contrário, de forma que os termos se cancelavam e a equação continuava correta.

Yang e Mills adicionaram um termo extra na equação que corrigia o “erro” introduzido ao forçar a equação de onda a ser invariante sob mudança local de fase. Assim, o termo adicional era uma função do espaço que tinha como função consertar o “erro” para todos os pontos.

Ou seja, pegamos uma equação de onda que era coerente para descrever fenômenos físicos e adicionamos uma função cuja única informação que temos é que ela deve corrigir, em cada ponto do espaço, o problema introduzido pela derivada do fator de fase dependente da posição, com o intuito de forçar a equação a obedecer uma simetria. O truque que fizemos, por construção, permite a nova função de onda, modificada por uma fase que é função do espaço, seja solução da equação de onda, mas se tratar de uma equação diferente daquela satisfeita pela função de onda original. Se a nova função de onda satisfaz uma equação de onda diferente da original, então deve descrever uma situação física distinta.

Entretanto, note que, se descrevermos o campo eletromagnético por um campo vetorial $\vec{A}(\vec{x})$, o chamado potencial vetor magnético, e uma função $\Phi(\vec{x})$, o potencial escalar, a forma das equações de Maxwell permanecem invariantes sob a transformação

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &\rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) + \nabla\epsilon(\vec{x}, t) \\ \Phi(\vec{x}, t) &\rightarrow \Phi(\vec{x}, t) - \partial_t\epsilon(\vec{x}, t).\end{aligned}\tag{2.47}$$

Esse incrível fato foi explorado por Yang e Mills: O fator que deveria ser adicionado, apesar de introduzir uma nova função na equação, descrevia o mesmo fenômeno físico descrito pela equação original! A mudança que deve ser feita na função para corrigir o erro introduzido ao forçar a equação de onda a se tornar invariante sob mudança local de fase é permitida pela liberdade de escolha dessa função. Para visualizar isso matematicamente, considere a função de onda, que obedece a equação de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x) + V(x)\psi(x)\tag{2.48}$$

Então, após uma mudança de fase local, ela fica

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}[\nabla^2 - iq\vec{A}(x)]^2\psi(x) + [V(x) + \hbar\Phi(x)]\psi(x)\tag{2.49}$$

sendo

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\frac{1}{q} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial t} \\ \vec{A}(x) &= \frac{1}{q} \nabla \alpha(x).\end{aligned}\tag{2.50}$$

Note que a equação acima é a equação de Schrödinger na presença de um campo eletromagnético nulo, já que

$$\begin{aligned}B &= \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{q} \nabla \times \nabla \alpha = 0 \\ E &= -\nabla \Phi - \partial_t \vec{A} = \frac{1}{q} (\nabla \partial_t \alpha - \partial_t \nabla \alpha) = 0\end{aligned}\tag{2.51}$$

Ou seja, representa o mesmo sistema físico descrito pela equação de Schrödinger para uma partícula num potencial $V(x)$

Essa liberdade na escolha da função é conhecida como liberdade de calibre (*gauge freedom*). É a partir dessa ideia que surgem as conhecidas Teorias de Calibre, que discutiremos brevemente agora

Considere uma Lagrangeana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, a qual é invariante sob um grupo de Lie G de transformações globais¹. As transformações dos campos são dadas por matrizes de uma representação deste grupo, que indicamos por S . Assim

$$\phi' = S\phi.\tag{2.52}$$

Vamos agora considerar as transformações locais, isto é, $S = S(x)$. Os termos $\partial_\mu \phi$ na Lagrangeana são os responsáveis pela não invariância de \mathcal{L} sob as transformações dadas por $S(x)$. De forma equivalente ao que foi feito por Yang-Mills na equação de Schrödinger, vamos introduzir um campo vetorial e impor a invariância da Lagrangeana sob as transformações de calibre $S(x)$. Este campo vetorial é introduzido trocando-se as derivadas por combinações da forma

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu\tag{2.53}$$

em que g é a constante de acoplamento da interação (no caso eletromagnético, corresponderia à carga elétrica e). O campo vetorial introduzido depende da representação Γ da álgebra de Lie do grupo de Lie, de modo que

$$A_\mu = A_\mu^a T^a\tag{2.54}$$

em que T^a são os geradores da álgebra na representação Γ . A álgebra é dada por

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c\tag{2.55}$$

O campo A_μ é dito campo de Yang-Mills.

¹ Ver Apêndice C

Veamos como o campo A_μ transforma-se sob transformações de calibre, utilizando a condição de invariância

$$(D_\mu\phi)' = S(x)D_\mu\phi. \quad (2.56)$$

Para o lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi' + igA'_\mu\phi' &= \partial_\mu(S\phi) + igA'_\mu S\phi \\ &= (\partial_\mu S)\phi + S\partial_\mu\phi + igA'_\mu + igA'_\mu S\phi \\ &= S \left\{ S^{-1}(\partial_\mu S)\phi + \partial_\mu\phi + igS^{-1}A'_\mu S\phi \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$S \left\{ S^{-1}(\partial_\mu S)\phi + \partial_\mu\phi + igS^{-1}A'_\mu S\phi \right\} = S\partial_\mu\phi + igA'_\mu\phi \quad (2.57)$$

ou

$$S^{-1}A'_\mu S = A_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu S$$

ou ainda

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} + \frac{i}{g}S(\partial_\mu S)S^{-1}. \quad (2.58)$$

Essa é a lei de transformação para o campo de Yang-Mills sob a transformação de calibre $S(x)$.

Considerando uma transformação infinitesimal

$$S(x) = 1 + ig\epsilon^a(x)T^a \quad (2.59)$$

temos

$$\begin{aligned} A'^a_\mu T^a &= (1 + ig\epsilon^b T^b)A^c_\mu T^c (1 - ig\epsilon^d T^d) + \frac{i}{g}(1 + ig\epsilon^e T^e)\partial_\mu(1 + ig\epsilon^f T^f)(1 - ig\epsilon^h T^h) \\ &= A^a_\mu T^a - igA^c_\mu T^c \epsilon^d T^d + ig\epsilon^b T^b A^c_\mu T^c + \frac{i}{g}(1 + ig\epsilon^e T^e)(ig(\partial_\mu \epsilon^f)T^f)(1 - ig\epsilon^h T^h) \\ &= A^a_\mu T^a + igA^c_\mu (T^b T^c - T^c T^b)\epsilon^b - \partial_\mu \epsilon^a T^a \\ &= A^a_\mu T^a + igA_\mu [T^b, T^c]\epsilon^b - \partial_\mu \epsilon^a T^a \end{aligned}$$

Considerando que

$$[T^b, T^c] = if^{bca}T^a \quad (2.60)$$

então

$$A'^a_\mu T^a = A^a_\mu T^a - gf^{bca}A^c_\mu \epsilon^b T^a - \partial_\mu \epsilon^a T^a$$

Logo

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - gf^{bca}A^c_\mu \epsilon^b - \partial_\mu \epsilon^a \quad (2.61)$$

o que implica

$$\delta A^a_\mu = (-\delta^{ac}\partial_\mu + gf^{abc}A^b_\mu)\epsilon^c \quad (2.62)$$

Essa é a lei de transformação de um vetor da representação adjunta da álgebra de Lie.

Obtemos, por construção, uma Lagrangeana invariante de calibre que automaticamente inclui a interação do campo ϕ com o campo de Yang-Mills A_μ^a . Como o campo de calibre é uma variável dinâmica da teoria, devemos acrescentar ainda um termo cinético \mathcal{L}_A ligado à dinâmica de A_μ^a na densidade de Lagrangeana. Este termo cinético, que envolve as derivadas de A_μ^a , deve obedecer a duas restrições: ser invariante de calibre e invariante de Lorentz. Uma forma de construirmos este termo é fazendo uso da derivada covariante. Para isso, note-se que

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\phi &= (\partial_\mu + igA_\mu)(\partial_\nu + igA_\nu)\phi - (\partial_\nu + igA_\nu)(\partial_\mu + igA_\mu)\phi \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\phi + ig\partial_\mu(A_\nu\phi) + igA_\mu\partial_\nu\phi - g^2A_\mu A_\nu\phi - \partial_\nu\partial_\mu\phi - ig\partial_\nu(A_\mu\phi) - igA_\nu\partial_\mu\phi + g^2A_\nu A_\mu\phi \\ &= ig(\partial_\mu A_\nu)\phi + igA_\nu\partial_\mu\phi + igA_\mu\partial_\nu\phi - g^2[A_\mu, A_\nu]\phi - ig(\partial_\nu A_\mu)\phi - igA_\mu\partial_\nu\phi - igA_\nu\partial_\mu\phi \\ &= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi - g^2[A_\mu, A_\nu]\phi. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ϕ , temos

$$[D_\mu, D_\nu] = ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2[A_\mu, A_\nu] \quad (2.63)$$

lembrando que $A_\mu = A_\mu^a T^a$ e $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, então

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= ig(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)T^a - ig^2A_\mu^b A_\nu^c f^{abc}T^a \\ &= ig\left\{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - igf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right\}T^a \\ &= igF_{\mu\nu}^a T^a \end{aligned}$$

sendo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - igf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.64)$$

é fácil verificar que o termo

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.65)$$

obedece as condições necessárias. A densidade de Lagrangeana total é dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, A_\mu^a, \partial_\mu A_\nu^a) = \mathcal{L}(\phi, D_\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Por fim, vejamos as equações de movimento para o campo A_μ^a . Utilizando as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\eta^a} &= -\frac{1}{2}F^{b\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}^b}{\partial A_\eta^a} \\ &= \frac{1}{2}gf^{bmn}F^{b\mu\nu}(\delta_{\mu\eta}\delta^{ma}A_\nu^m + A_\mu^m\delta_{\eta\nu}\delta^{na}) \\ &= \frac{1}{2}gf^{ban}F^{b\eta\nu}A_\nu^n + \frac{1}{2}gf^{bma}F^{b\mu\eta}A_\mu^m \\ &= -\frac{1}{2}gf^{abc}F^{b\eta\nu}A_\nu^c + \frac{1}{2}gf^{abc}F^{b\mu\eta}A_\mu^c \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} g f^{abc} F^{b\nu\eta} A_\nu^c + \frac{1}{2} g f^{abc} F^{b\nu\eta} A_\nu^c = g f^{abc} F^{b\nu\eta} A_\nu^c.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\eta^a)} &= -\frac{1}{2} F^{b\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^b}{\partial(\partial_\alpha A_\eta^a)} \\ &= -\frac{1}{2} F^{b\mu\nu} (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\eta} \delta^{ab} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\mu\eta} \delta^{ab}) \\ &= -\frac{1}{2} F^{a\alpha\eta} + \frac{1}{2} F^{a\eta\alpha} = F^{a\eta\alpha}. \end{aligned}$$

Logo

$$\partial_\nu F^{a\mu\nu} = g f^{abc} F^{b\nu\mu} A_\nu^c. \quad (2.67)$$

Por exemplo, podemos considerar o campo escalar complexo, descrito pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi). \quad (2.68)$$

É evidente que \mathcal{L} é invariante sob uma transformação global do tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ie\epsilon} \phi \quad (2.69)$$

em que ϵ é um parâmetro real e e é uma constante real, ou seja, temos uma simetria $U(1)$. Na forma infinitesimal, temos

$$\delta\phi = ie\phi\epsilon$$

$$\delta\phi^* = -ie\phi^*\epsilon. \quad (2.70)$$

Consideramos agora uma transformação local

$$\phi' = e^{ie\epsilon(x)} \phi \quad (2.71)$$

Os termos $m^2 \phi^* \phi$ e $V(\phi^* \phi)$ são obviamente invariantes, pois $\phi'^* = e^{-ie\epsilon(x)} \phi^*$. No entanto, a presença de termos com derivada ∂_μ faz com que o termo cinético não seja invariante

Para contornar este problema, vamos introduzir o campo de Yang-Mills A_μ através da derivada

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

tal que

$$D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' = e^{ie\epsilon(x)} D_\mu \phi.$$

A lei de transformação para A_μ é dada por (2.61). Em particular, temos $f^{abc} = 0$. Logo

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \epsilon(x). \quad (2.72)$$

Note-se que uma transformação deste tipo deixa invariante a teoria eletromagnética. Assim nada mais natural do que identificar o campo A_μ com o potencial vetor do campo eletromagnético $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$.

Para completar, devemos obter o termo cinético responsável pela dinâmica do campo eletromagnético. De acordo com (2.64), temos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.73)$$

A Lagrangeana total fica

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - m^2 \phi \phi^* - V(\phi \phi^*) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.74)$$

A dinâmica obtida para o campo A_μ , de acordo com (2.67), é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.75)$$

3 Formalismo de Dirac para Sistemas Vinculados

No final do século XIX e no início do século XX foram realizados experimentos cujos resultados não podiam ser satisfatoriamente explicados utilizando a Física Clássica. O espectro de radiação de corpo negro e o efeito fotoelétrico foram fundamentais para a busca de novas formas de descrever a natureza, e o resultado foi o desenvolvimento da mecânica quântica. Da mesma maneira, a experiência de Micksen-Morley foi combustível para o surgimento da teoria da relatividade especial. Embora apresentassem ideias controversas, o sucesso dessas teorias em descrever fenômenos conhecidos e fazer previsões que mais tarde seriam confirmadas experimentalmente foram fundamentais para sua aceitação no meio científico. Por essa razão, acredita-se que, para fazer uma descrição adequada dos fenômenos naturais, devemos utilizar uma formulação quântica relativística. A dificuldade está no fato que nem sempre é fácil criar uma teoria quântica a partir do zero. Diversas técnicas foram desenvolvidas para contornar esse problema. Uma delas, que abordaremos aqui, é a construção de uma teoria clássica que, através de métodos de quantização, são transformadas, como uma primeira aproximação, em uma teoria quântica. Existem várias maneiras de abordar essa questão, e nesse capítulo vamos focar na quantização canônica desenvolvida por Dirac[15] e Bergmann [61].

3.1 Sistemas Vinculados: Procedimento de Dirac

Vamos agora verificar a necessidade de um método especial para tratar sistemas singulares. Seja a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \{[\dot{x}y + x\dot{y}]^2 + x^2 + y^2\}. \quad (3.1)$$

A matriz Hessiana¹ $W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ é dada por

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Temos que

$$\det W = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0 \quad (3.3)$$

Logo, essa é uma Lagrangeana singular. As equações de movimento são

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dt}(\dot{x}y + x\dot{y}) &= y \\ y \frac{d}{dt}(\dot{x}y + x\dot{y}) &= x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dividindo uma pela outra, obtemos

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$$

¹ Ver Seção 2.2

ou

$$y = \pm x \quad (3.5)$$

Substituindo no sistema de equações diferenciais (3.4), temos

$$x \frac{d}{dt}(\dot{x}(\pm x) + x(\pm \dot{x})) = \pm x$$

isto é

$$2 \frac{d}{dt}(\dot{x}x) = 1$$

ou

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) = 1 \\ y = \pm x \end{cases} \quad (3.6)$$

Assim, a solução geral é dada por

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{(t^2/2) + at + b} \\ y = \pm x \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo a e b constantes arbitrárias, determinadas pelas condições iniciais.

Vamos agora passar para o formalismo Hamiltoniano. Começamos introduzindo os momentos canonicamente conjugados

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}y + x\dot{y})y \\ \pi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}y + x\dot{y})x \end{aligned} \quad (3.8)$$

invertendo a primeira expressão, obtemos

$$\dot{x} = \frac{p}{y^2} - \frac{x\dot{y}}{y} \quad (3.9)$$

Substituindo na segunda expressão de (3.8), vem

$$\pi = xy \left(\frac{p}{y^2} - \frac{x\dot{y}}{y} \right) + x^2\dot{y} = \frac{xp}{y}$$

Logo, obtemos a relação algébrica

$$\pi - \frac{x}{y}p = 0 \quad (3.10)$$

entre os momentos canonicamente conjugados. Vamos calcular a função Hamiltoniana, através da transformação de Legendre

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} + \pi\dot{y} - L \\ &= p \left(\frac{p}{y^2} - \frac{x\dot{y}}{y} \right) + \pi\dot{y} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p}{y^2} - \frac{x\dot{y}}{y} \right) y + x\dot{y} \right]^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

ou

$$H = \frac{p^2}{2y^2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \quad (3.11)$$

As equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{y^2} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \pi} = 0 \\ \dot{\pi} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{p^2}{y^3} + y \end{aligned} \quad (3.12)$$

Das equações acima, tiramos que

$$y = \text{constante}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{y^2}x \quad (3.13)$$

ou

$$\begin{aligned} x &= a \exp\left(-\frac{t}{y}\right) + b \exp\left(\frac{t}{y}\right) \\ y &= \text{constante} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Note que o resultado é inconsistente com (3.7): A Hamiltoniana não fornece as equações de movimento corretas.

De acordo com o Apêndice D, os dois formalismos deveriam ser equivalentes. No entanto, em algum momento nosso procedimento falhou. É possível constatar, baseado em nosso último comentário do referido Apêndice, que o procedimento falha por que a troca de variáveis ²

$$q^a(\tau) \xrightarrow{\text{reduz ordem}} (q^a, \dot{q}^a) \xrightarrow{\text{troca de variáveis}} (q^a, p_a)$$

não é bem definida, levando a inconsistências. Vamos ver isso agora em mais detalhes.

Como sempre, nosso ponto inicial para discussão é uma ação

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (3.15)$$

As equações de movimento do sistema são obtidas fazendo a ação estacionária sob variações $\delta q^n(t)$ das variáveis q^n ($n=1, \dots, N$) que se anulam nas extremidades t_1 e t_2 . Essas equações são dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad n = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

² ver (D.88)

Como antes, podemos escrever como

$$W_{ij}\ddot{q}^j = K_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

com

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (3.18)$$

e

$$K_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k} \dot{q}^i \quad (3.19)$$

Vemos que as acelerações são univocamente determinadas em termos das posições e velocidades se e somente se a matriz Hessiana W for inversível, isso é, se

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \neq 0 \quad (3.20)$$

Por outro lado, se o determinante for zero, as acelerações não serão unicamente determinadas e a solução das equações de movimento terão funções arbitrárias do tempo. Para visualizar isso, considere $\{q^n(t)\}$ como solução. Então, podemos escrever

$$q^n(t) = q^n(t_0) + t\dot{q}^n(t_0) + \frac{t^2}{2}\ddot{q}^n(t_0) + \dots \quad (3.21)$$

e, a partir do terceiro termo, a série fica indeterminada. Quando isso ocorre, dizemos que o sistema é singular

O primeiro passo para passar ao formalismo Hamiltoniano é definir os momentos canonicamente conjugados

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (3.22)$$

Podemos ver diretamente que dizer que a matriz Hessiana possui determinante nulo é equivalente a dizer que nem todas as velocidades podem ser escritas como funções das coordenadas e momenta, já que o determinante da matriz Jacobiana se anula:

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = \det \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (3.23)$$

É importante notar que a não inversibilidade da matriz Hessiana implica que existirão relações algébricas entre as coordenadas e os momenta, chamadas de vínculos. Para ver isso, seja W_{ab} , ($a, b = 1, \dots, R_W = \text{rank} W_{ij}$) a maior submatriz inversível de W_{ij} . Isso sempre pode ser arranjado fazendo, se necessário, uma reordenação das coordenadas. Podemos então resolver (3.17) para R_W velocidades \dot{q}^a em termos das coordenadas q^i , dos momenta p_a e das outras velocidades \dot{q}^α

$$\dot{q}^a = f^a(q, p_b, \dot{q}^\beta) \quad a, b = 1, \dots, R_W; \beta = R_W + 1, \dots, N \quad (3.24)$$

Inserindo essa expressão em (3.22), chegamos a uma relação da forma

$$p_j = h_j(q, p_a, \dot{q}^\alpha) \quad (3.25)$$

Para $j = a$ ($a = 1, \dots, R_W$), essa relação se reduz a uma identidade. As equações restantes são

$$p_\alpha = h_\alpha(q, p_a, \dot{q}^\beta). \quad (3.26)$$

Mas o lado direito de (3.26) não pode depender de velocidades \dot{q}^β , senão ainda poderíamos expressar mais velocidades do conjunto \dot{q}^α em termos das coordenadas, dos momenta e das outras velocidades, o que contradiz a nossa hipótese de $\text{rank}W_{ij} = R_W$. Portanto, temos relações da forma

$$\phi_\alpha(q, p) = p_\alpha - h_\alpha(q, p_a) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, M = N - R_W \quad (3.27)$$

A essas relações, damos o nome de vínculos primários. Eles recebem esse nome para enfatizar que as equações de movimento não são utilizadas para obter essas relações.

É interessante notar que essas funções impõem restrições no espaço de fase. Assim, os vínculos definem uma subvariedade Γ_P no espaço de fase de dimensão $2N - M = N + R_W$, onde o sistema evolui.

Vamos agora derivar as equações de Hamilton para sistemas singulares. Para esse fim, considere a transformação de Legendre

$$H_c = p_i \dot{q}^i - L \quad (3.28)$$

Sendo H_c a Hamiltoniana canônica, vale dizer, igual àquela obtida para sistemas não vinculados. É fácil ver que, assim como no caso não-singular, H_c depende somente de q^i e de p_i . É suficiente tomar variações arbitrárias de q^i , \dot{q}^i e p_i , dadas por δq^i , $\delta \dot{q}^i$ e δp_i . Logo

$$\delta H_c = p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i. \quad (3.29)$$

Utilizando a definição de momento canônico $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$, concluímos que

$$\delta H_c = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \quad (3.30)$$

O que implica que a função H_c depende apenas de q^i e de p_i .

Partiremos agora para o princípio de ação estacionária, com o objetivo de obter as equações de movimento, mas pelo formalismo Hamiltoniano. Assim

$$0 = \delta \int (\dot{q}^i p_i - H_c) dt = \int \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] \quad (3.31)$$

onde usamos integração por partes e o fato que δq^i se anula nas extremidades. As variações δp_i e δq^i são funções arbitrárias do tempo, e portanto a integração só será nula se o integrando o for. Logo

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \right) \delta q^i = 0 \quad (3.32)$$

Como existem $M = N - R_W$ vínculos que relacionam os p_i e os q^i , as variações δq^i , δp_i não são todas independentes, e não podemos dizer que os termos entre parênteses são igual a zero. No entanto,

como pode ser visto no Apêndice D, é possível introduzir $M = N - R_W$ multiplicadores de lagrange u^r e escrever, de forma análoga a (D.62), as equações de movimento

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u^r \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + u^r \frac{\partial \phi_r}{\partial q^i} \\ \phi_r(q, p) &= 0\end{aligned}\tag{3.33}$$

com $i = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, M$.

A primeira dessas equações é particularmente importante, pois ela permite recuperar as velocidades generalizadas \dot{q}^i em termos dos momentos p_i e de parâmetros extras u^r . Assim, a inversibilidade da transformação de Legendre pode ser recuperada ao custo de variáveis extras:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^i = q^i \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\ u^r = u^r(q, p) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^i = q^i \\ \dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u^r \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} \\ \phi_r(q, p) = 0 \end{array} \right.\tag{3.34}$$

Voltamos agora as equações de Hamilton. Podemos escrever as equações de movimento de forma mais compacta com auxílio dos parênteses de Poisson, introduzidos no Apêndice D. Elas são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \{q^i, H_c\} + u^r \{q^i, \phi_r\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_c\} + u^r \{p_i, \phi_r\}\end{aligned}\tag{3.35}$$

E, de forma mais geral, a evolução temporal de uma quantidade arbitrária, que seja função de q e p , pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u^r \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - u^r \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_r}{\partial q^i} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \right) + u^r \left(\frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_r}{\partial q^i} \right)\end{aligned}$$

ou

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^r \{g, \phi_r\}\tag{3.36}$$

Antes de prosseguirmos, é importante fazermos um comentário a respeito de cálculos envolvendo os vínculos. Nas expressões (3.35) e (3.36), vimos que, para obter a evolução temporal de variáveis dinâmicas, precisamos calcular os parênteses de Poisson, definidos em (D.37), de vínculos com outras quantidades. No entanto, de acordo com (3.27), os vínculos são quantidades nulas, e o cálculo do parênteses de Poisson dos vínculos com qualquer função deveria ser zero. Essa confusão ocorre porque o vínculo, embora seja numericamente igual a zero, não é identicamente nulo em todo

o espaço de fase. Para evitar esse tipo de confusão, é costume introduzir a notação “igualdade fraca” \approx para quantidades que se anulam somente na subvariedade definida pelos vínculos. Isso significa, em termos práticos, que calcularemos os parênteses de Poisson dos vínculos antes de igualá-los a zero.

Tendo discutido esse fato, podemos escrever a evolução temporal das funções dinâmicas de uma forma ainda mais compacta. Temos que

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^r \{g, \phi_r\} \approx \{g, H_c\} + u^r \{g, \phi_r\} + \phi_r \{g, u^r\}$$

e, pela regra do produto, escrevemos

$$\dot{g} \approx \{g, H_c + u^r \phi_r\} \quad (3.37)$$

O termo $H_c + u^r \phi_r$ recebe o nome de Hamiltoniana total H_T . Assim, escrevemos

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\} \quad (3.38)$$

com $H_T = H_c + u^r \phi_r$. É importante notar que conseguimos escrever a evolução temporal de forma semelhante à escrita para sistemas não singulares. Isso mostra que a Hamiltoniana que corresponde à Lagrangeana singular L é na verdade H_T , e não H_c

Para que tenhamos uma teoria consistente, devemos impor que os vínculos sejam preservados em todos os tempos. Com isso, garantimos que o sistema sempre permanecerá na subvariedade física. Assim, devemos impor que a derivada dos vínculos primários seja zero. Em fórmulas, temos

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H_c\} + u^s \{\phi_r, \phi_s\} \approx 0 \quad r = 1, \dots, M \quad (3.39)$$

Para cada uma das M equações, três casos podem ocorrer:

Caso 1: Encontramos $0 = 0$, isto é, a equação é identicamente satisfeita. Se assim for, não obteremos nenhuma informação nova

Caso 2: Encontramos uma equação que independe dos u^s , envolvendo apenas as coordenadas q^s e os momenta p^s , isto é, encontramos um vínculo

$$\chi_{k'}(q, p) \approx 0 \quad (3.40)$$

Esses diferem dos vínculos primários pelo fato de terem sido determinados fazendo uso das equações de movimento, enquanto que os vínculos primários são uma consequência apenas da definição dos momentos

Caso 3: Encontramos restrições nos u^s

Seja K' o número de novos vínculos independentes encontrados, que chamaremos de vínculos secundários. O conjunto de todos os vínculos (primários e secundários) define uma nova subvariedade Γ' de dimensão $2N - M - K'$. A condição de consistência da teoria impõe que esses vínculos também satisfaçam a condição

$$\dot{\chi}_{k'}(q, p) = \{\chi_{k'}, H_c\} + u^s \{\chi_{k'}, \phi_s\} \approx 0 \quad k' = 1, \dots, K' \quad (3.41)$$

Devemos então ver em que caso estamos. Se for o segundo caso, repetiremos o processo até encontrar todos os vínculos da teoria. O resultado final será que ficaremos com um certo número de vínculos secundários K que, junto com os M vínculos primários, define uma subvariedade Γ de dimensão $2N - M - K$. Teremos então o seguinte sistema de equações lineares nos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \{\phi_r, H_c\} + u^s \{\phi_r, \phi_s\} &\approx 0 \quad r = 1, \dots, M \\ \{\chi_k, H_c\} + u^s \{\chi_k, \phi_s\} &\approx 0 \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.42)$$

A solução desse sistema linear sempre existe (caso contrário estaríamos trabalhando com uma Lagrangeana inconsistente). Vamos agora escrever uma solução explícita para esse sistema. Primeiramente, vamos introduzir uma definição:

Definição: Seja g uma variável dinâmica, função dos q 's e dos p 's. Chamamos g de função de primeira classe se possui parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos:

$$\begin{aligned} \{g, \phi_r\} &\approx 0 \quad r = 1, \dots, M \\ \{g, \chi_k\} &\approx 0 \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.43)$$

Caso contrário, a chamaremos de função de segunda classe. Naturalmente, chamaremos de vínculos de primeira classe os vínculos cujo parênteses de Poisson com todos os outros vínculos são fracamente nulos. Os outros vínculos, aqueles que possuem pelo menos um parênteses de Poisson com outro vínculo não nulo são de segunda classe.

Como exemplo, podemos mostrar que a Hamiltoniana total H_T é uma função de primeira classe. Para ver isso, note que

$$\begin{aligned} \{\phi_s, H_T\} &= \{\phi_s, H_c + u^r \phi_r\} \approx \{\phi_s, H_c\} + u^r \{\phi_s, \phi_r\} \approx 0 \\ \{\chi_k, H_T\} &= \{\chi_k, H_c + u^r \phi_r\} \approx \{\chi_k, H_c\} + u^r \{\chi_k, \phi_r\} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Antes de prosseguirmos, gostaria de apresentar dois teoremas que serão importantes no desenvolvimento da teoria:

Teorema 1: Se uma função G do espaço de fase se anula na superfície definida pelo vínculos, então ela é uma combinação linear dos vínculos, isto é:

$$G(q, p) = 0 \mid_{\Gamma} \rightarrow G = U^r \phi_r + V^k \chi_k \quad (3.45)$$

Demonstração: A demonstração é baseada no fato de que sempre podemos escolher os vínculos independentes $\phi_j = (\phi_r, \phi_k)$ como as primeiras $M + K$ coordenadas y_j no espaço de fase reduzido $\Gamma[2]$

$$(y_j, x_\alpha)$$

$$j = 1, \dots, M + K$$

$$\alpha = M + K + 1, \dots, 2N - (M + K) \quad (3.46)$$

Nesse sistema de coordenadas, temos $G(0, x) = 0$, já que

$$G(y, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(ty, x) dt = y_j \int_0^1 G'(ty, x) dt \quad (3.47)$$

onde a notação F' significa derivada da forma da função. Assim

$$G = g^j \phi_j$$

com

$$g^j = \int_0^1 G'(ty, x) dt$$

Com o uso desse teorema, segue diretamente que, se F é uma função de primeira classe, então

$$\{F, \phi_{r'}\} = U_{r'}^r \phi_r + V_{r'}^k \chi_k \quad r' = 1, \dots, M$$

$$\{F, \chi_{k'}\} = \tilde{U}_{k'}^r \phi_r + \tilde{V}_{k'}^k \chi_k \quad k' = 1, \dots, K \quad (3.48)$$

Teorema 2: Sejam F e G duas funções de primeira classe. Então $\{F, G\}$ também é de primeira classe.

Demonstração: Considere a identidade de Jacobi

$$\{\{F, G\}, \phi_{r'}\} + \{\{G, \phi_{r'}\}, F\} + \{\{\phi_{r'}, F\}, G\} \approx 0 \quad (3.49)$$

Como F e G são de primeira classe, vem

$$\{\{F, G\}, \phi_{r'}\} + \{U_{r'}^r \phi_r + V_{r'}^k \chi_k, F\} + \{\tilde{U}_{r'}^r \phi_r + \tilde{V}_{r'}^k \chi_k, G\} \approx 0 \quad (3.50)$$

Utilizando a regra do produto, temos

$$\{\{F, G\}, \phi_{r'}\} + U_{r'}^r \{\phi_r, F\} + V_{r'}^k \{\chi_k, F\} + \tilde{U}_{r'}^r \{\phi_r, G\} + \tilde{V}_{r'}^k \{\chi_k, G\} \approx 0 \quad (3.51)$$

Finalmente, como F e G são de primeira classe, temos

$$\{\{F, G\}, \phi_{r'}\} \approx 0 \quad (3.52)$$

A demonstração da segunda parte, referente ao caso

$$\{\{F, G\}, \chi_{k'}\} \approx 0 \quad (3.53)$$

é análoga.

A distinção entre vínculos primários e secundários não será importante para a construção da teoria. No entanto, a classificação dos vínculos como funções de primeira e segunda classe terá consequências físicas importantes para o formalismo. Assim, fazemos a decomposição dos vínculos em primeira e segunda classe:

$$\begin{aligned}\phi_r &= (\phi_{a_1}, \phi_{\alpha_1}), & a_1 = 1, \dots, P_1 & \quad \alpha_1 = 1, \dots, S_1 \\ \chi_k &= (\phi_{a_2}, \phi_{\alpha_2}), & a_2 = 1, \dots, P_2 & \quad \alpha_2 = 1, \dots, S_2\end{aligned}\tag{3.54}$$

Os índices latinos a, a', b, b', \dots serão assinalados para os vínculos de primeira classe, enquanto que os índices gregos $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \dots$ denominarão os vínculos de segunda classe. Os números nos índices especificam se eles são primários (1) ou secundários (2). Com essa decomposição, o nosso sistema linear (3.42) toma a forma

$$\begin{aligned}\{\phi_{a_1}, H_c\} + \eta^{b_1} \{\phi_{a_1}, \phi_{b_1}\} + \kappa^{\alpha_1} \{\phi_{a_1}, \phi_{\alpha_1}\} &\approx 0, & a_1 = 1, \dots, P_1 \\ \{\phi_{\alpha_1}, H_c\} + \eta^{a_1} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{a_1}\} + \kappa^{\beta_1} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}\} &\approx 0, & \alpha_1 = 1, \dots, S_1 \\ \{\phi_{a_2}, H_c\} + \eta^{b_1} \{\phi_{a_2}, \phi_{b_1}\} + \kappa^{\alpha_1} \{\phi_{a_2}, \phi_{\alpha_1}\} &\approx 0, & a_2 = 1, \dots, P_2 \\ \{\phi_{\beta_2}, H_c\} + \eta^{b_1} \{\phi_{\beta_2}, \phi_{b_1}\} + \kappa^{\alpha_1} \{\phi_{\beta_2}, \phi_{\alpha_1}\} &\approx 0, & \beta_2 = 1, \dots, S_2\end{aligned}\tag{3.55}$$

em que decomposemos os multiplicadores de Lagrange $u^s = (\eta^{a_1}, \kappa^{\alpha_1})$. Como os vínculos de primeira classe possuem parênteses de Poisson nulos com todos os outros vínculos, ficamos com

$$\begin{aligned}\{\phi_{a_1}, H_c\} &\approx 0, & a_1 = 1, \dots, P_1 \\ \{\phi_{a_2}, H_c\} &\approx 0, & a_2 = 1, \dots, P_2 \\ \{\phi_{\alpha_1}, H_c\} + \kappa^{\beta_1} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}\} &= 0, & \alpha_1 \approx 1, \dots, S_1 \\ \{\phi_{\beta_2}, H_c\} + \kappa^{\alpha_1} \{\phi_{\beta_2}, \phi_{\alpha_1}\} &\approx 0, & \beta_2 = 1, \dots, S_2\end{aligned}\tag{3.56}$$

A primeira coisa que notamos é que os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos de primeira classe desaparecem, isto é, permanecem indeterminados. Mais adiante veremos que esse fato possui um significado físico importante, relacionado à teoria de calibre. Por hora, com objetivo de distinguir mais facilmente as duas classes de vínculos, denominaremos todos os vínculos de primeira classe por

$$\gamma_m = (\phi_{a_1}, \phi_{a_2}), \quad m = 1, \dots, P = P_1 + P_2\tag{3.57}$$

e vínculos de segunda classe por

$$\xi_\mu = (\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}), \quad \mu = 1, \dots, S = S_1 + S_2\tag{3.58}$$

Nessa nova nomenclatura, escrevemos as equações de uma maneira mais compacta

$$\{\gamma_m, H_c\} \approx 0, \quad m = 1, \dots, P$$

$$\{\xi_\mu, H_c\} + \kappa^{\alpha_1} \{\xi_\mu, \phi_{\alpha_1}\} \approx 0, \quad \mu = 1, \dots, S \quad (3.59)$$

Para encontrar a solução desse sistema (achar os κ^{α_1}), introduzimos a matriz $S \times S$ que consiste nos parênteses de Poisson de todos os vínculos de segunda classe:

$$\Delta_{\mu\nu} = (\{\xi_\mu, \xi_\nu\}) = \begin{pmatrix} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}\}_{S_1 \times S_1} & \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}\}_{S_1 \times S_2} \\ \{\phi_{\alpha_2}, \phi_{\alpha_1}\}_{S_2 \times S_1} & \{\phi_{\beta_2}, \phi_{\alpha_2}\}_{S_2 \times S_2} \end{pmatrix}$$

de forma que podemos escrever a equação como

$$\{\xi_\mu, H_c\} + \kappa^{\alpha_1} \Delta_{\mu\alpha_1} \approx 0 \quad (3.60)$$

Antes de prosseguir, vamos provar duas proposições:

Proposição 1: A matriz $\Delta = (\Delta_{\mu\nu})$ é não singular.

Demonstração: Suponhamos que $\det\Delta = 0$. Então podemos encontrar uma solução $\vec{\lambda}$ para o sistema

$$\Delta_{\mu\nu} \lambda^\nu = 0 \quad (3.61)$$

Com isso, temos

$$0 = \{\xi_\mu, \xi_\nu\} \lambda^\nu = \{\xi_\mu, \lambda^\nu \xi_\nu\} \quad (3.62)$$

Isso implica que $\lambda^\nu \xi_\nu$ ou ξ_μ é um vínculo de primeira classe, o que é uma contradição, pela definição da matriz Δ

Proposição 2: A matriz $\Delta = (\Delta_{\mu\nu})$ possui dimensão par; equivalentemente, o número de vínculos secundários é sempre par

Demonstração: A demonstração que faremos aqui serve, de fato, para qualquer matriz antissimétrica inversível. Temos:

$$\det\Delta = \det(-\Delta^T) = (-1)^S \det\Delta \quad (3.63)$$

Se o número de vínculos secundários S é ímpar, então $\det\Delta = 0$, o que é uma contradição com a proposição 1

Podemos então encontrar sua inversa, que denotaremos por $\Delta^{\mu\nu}$. Usando-a na equação (3.60), temos

$$\Delta^{\nu\mu} \{\xi_\mu, H_c\} + \kappa^{\alpha_1} \Delta^{\nu\mu} \Delta_{\mu\alpha_1} \approx 0 \quad (3.64)$$

mas, por definição

$$\Delta^{\nu\mu} \Delta_{\mu\alpha_1} = \delta_{\alpha_1}^\nu \quad (3.65)$$

Assim, para $\nu = \alpha_1$, temos

$$\kappa^{\alpha_1} \approx -\Delta^{\alpha_1\mu} \{\xi_\mu, H_c\} \quad (3.66)$$

e para $\nu = \alpha_2$, temos

$$\Delta^{\alpha_2\mu} \{\xi_\mu, H_c\} \approx 0 \quad (3.67)$$

Podemos agora escrever a Hamiltoniana total H_T como

$$H_T \approx H_c + \kappa^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} + \eta^{a_1} \phi_{a_1} \approx H_c - \Delta^{\alpha_1\mu} \{\xi_\mu, H_c\} \phi_{\alpha_1} + \eta^{a_1} \phi_{a_1} \quad (3.68)$$

e com auxílio de (3.67), escrevemos

$$H_T \approx H_c - \Delta^{\nu\mu} \{\xi_\mu, H_c\} \phi_\nu + \eta^{a_1} \phi_{a_1}. \quad (3.69)$$

Podemos também inserir esses multiplicadores de Lagrange, agora determinados, nas equações de movimento, e encontramos

$$\begin{aligned} \dot{g} &\approx \{g, H_c\} + \eta^{a_1} \{g, \phi_{a_1}\} + \kappa^{\alpha_1} \{g, \phi_{\alpha_1}\} \\ &\approx \{g, H_c\} + \eta^{a_1} \{g, \phi_{a_1}\} - \{g, \phi_{\alpha_1}\} \Delta^{\alpha_1\nu} \{\xi_\nu, H_c\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ou, escrevendo de forma mais simétrica, com auxílio de (3.67), temos

$$\dot{g} \approx \{g, H_c\} - \{g, \phi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, H_c\} + \eta^{a_1} \{g, \phi_{a_1}\}. \quad (3.71)$$

Em resumo: vimos que é possível determinar somente os u 's associados com vínculos primários de segunda classe. A existência de vínculos de primeira classe implica na presença de funções arbitrárias do tempo, já que não é possível determinar os η^{a_1} . Discutiremos o significado físico disso mais a frente, embora seja possível ver que implica em mais de um conjunto de variáveis canônicas correspondentes a um dado estado físico.

Agora, introduziremos uma nova operação $\{, \}_D$ que toma duas funções na subvariedade Γ do espaço de fase definida pelos vínculos e transforma e outra função de Γ

$$\{, \}_D : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

tal que

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \xi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, G\} \quad (3.72)$$

Esses novos parênteses, chamados parênteses de Dirac, apresentam as seguintes propriedades:

i) Antissimetria

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \quad (3.73)$$

ii) Regra do Produto

$$\{F, GH\}_D = \{F, G\}_D H + G \{F, H\}_D$$

$$\{FH, G\}_D = \{F, G\}_D H + F \{H, H\}_D \quad (3.74)$$

iii) Identidade de Jacobi

$$\{\{F, G\}_D, H\}_D + \{\{G, H\}_D, F\}_D + \{\{H, F\}_D, G\}_D \quad (3.75)$$

iv) Linearidade

$$\{cF + H, G\}_D = c \{F, G\}_D + \{H, G\}_D$$

$$\{F, cG + H\}_D = c \{F, G\}_D + \{F, H\}_D \quad (3.76)$$

v) O parênteses de Dirac entre uma variável dinâmica F e um vínculo de segunda classe é sempre zero

$$\{F, \xi_\mu\}_D = 0 \quad (3.77)$$

vi) O parênteses de Dirac entre uma variável dinâmica F e um vínculo de primeira classe é igual ao parênteses de Poisson entre elas

$$\{F, \gamma_m\}_D = \{F, \gamma_m\} \quad (3.78)$$

vii) Para F e G variáveis de primeira classe e R uma variável dinâmica arbitrária,

$$\{R, \{F, G\}_D\}_D = \{R, \{F, G\}\} \quad (3.79)$$

A demonstração das propriedades acima, com exceção da identidade de Jacobi, é bem simples e direta. Basta usar a definição dos parênteses de Dirac e as propriedades dos parênteses de Poisson para verificá-las. Em particular, a propriedade (v) será muito importante quando discutirmos o processo de quantização. Por isso, fazemos sua demonstração aqui:

$$\{F, \xi_\mu\}_D = \{F, \xi_\mu\} - \{F, \xi_\nu\} \Delta^{\nu\nu'} \{\xi_{\nu'}, \xi_\mu\} \quad (3.80)$$

Lembramos que $\Delta_{\mu\nu} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\}$ e que $\Delta^{\mu\nu}$ é sua inversa, isso é,

$$\Delta_{\mu\nu'} \Delta^{\nu'\nu} = \delta_\mu^\nu$$

Logo

$$\{F, \xi_\mu\}_D = \{F, \xi_\mu\} - \{F, \xi_\nu\} \delta_\mu^\nu = 0 \quad (3.81)$$

Isso implica que todos os vínculos de segunda classe pode ser igualados a zero fortemente (são, a partir de agora, identicamente nulos em todo o espaço de fase). Utilizando essa nova operação, podemos escrever a evolução temporal de uma variável dinâmica por

$$\dot{g} \approx \{g, H_c\}_D + \eta^{a_1} \{g, \phi_{a_1}\}. \quad (3.82)$$

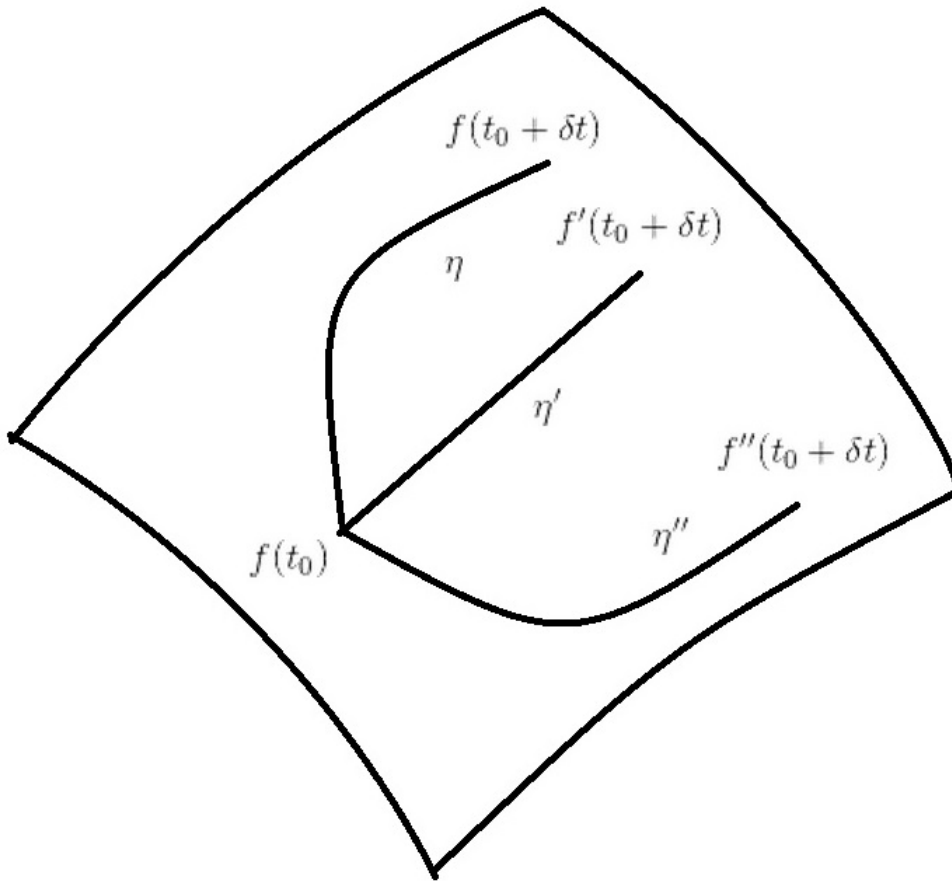


Figura 1 – Órbitas de Calibre

3.2 Geradores de Transformação de Calibre

Na seção anterior, vimos que as equações de movimento para sistemas com vínculos de primeira classe apresentam funções arbitrárias do tempo em suas soluções, representadas por meio da existência dos parâmetros indeterminados η^{a_1} na equação (3.82). Isso implica que as condições iniciais não determinam univocamente as variáveis dinâmicas em tempos futuros. Dado o estado inicial $f(q(0), p(0)) = f(t_0)$ compatível com os vínculos, o estado físico do sistema no instante t é representado pela classe de equivalência das trajetórias $\{f(q(t), p(t)) = f(t_0 + \delta t)\}$ que só diferem entre si na escolha dos coeficientes $\{\eta\}$, como pode ser visto na fig 3.1. Chamaremos essas trajetórias no espaço definido pelos vínculos de primeira classe de trajetórias de calibre.

Como essa arbitrariedade não pode ter nenhum significado físico, devem existir transformações que transmudem entre as diferentes evoluções de uma função no espaço de fase, de forma a não afetar os observáveis. Discutiremos nessa seção como essas transformações se relacionam com os vínculos. Além disso, discutiremos quais dessas transformações deixam a ação invariante.

No capítulo 2, apresentamos um algoritmo que tinha como objetivo revelar as transformações que mantinham a ação invariante. Mencionamos que era interessante trabalhar no formalismo Lagrangeano pois tinha a vantagem de encontrar essas transformações sem estudar outros aspectos

da teoria. No entanto, se estivermos interessados em estudar outras características do sistema, como sua formulação quântica, somos levados a trabalhar em outros formalismos, como o Hamiltoniano ou o Simplético. Por isso, é interessante sabermos também como encontrar as transformações de simetria nesses formalismos.

Considere uma função $f(q(t), p(t))$ definida no espaço de fase, que denotaremos aqui simplesmente por $f(t)$. Seja conhecido seu valor em t_0 , e queremos encontrar seu valor em um instante $t = t_0 + \delta t$, sendo δt infinitesimal. Logo

$$f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \dot{f}(t_0)\delta t + \mathcal{O}[(\delta t)^2] \quad (3.83)$$

Lembrando que a evolução temporal de uma função é dada por seus parênteses de Dirac com a Hamiltoniana total, temos

$$f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \{f, H_c\}_D \delta t + \eta^{a_1} \{f, \phi_{a_1}\} \delta t \quad (3.84)$$

Para uma escolha distinta de parâmetros $\tilde{\eta}^{a_1}$, segue que

$$f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \{f, H_c\}_D \delta t + \tilde{\eta}^{a_1} \{f, \phi_{a_1}\} \delta t \quad (3.85)$$

A diferença δf entre os dois resultados é, em primeira ordem, dada por

$$\delta f = \delta \rho^{a_1} \{f, \phi_{a_1}\} \quad (3.86)$$

sendo $\delta \rho^{a_1} = \delta t(\eta^{a_1} - \tilde{\eta}^{a_1})$ um parâmetro arbitrário, já que η^{a_1} e $\tilde{\eta}^{a_1}$ são arbitrários. Se considerarmos as coordenadas, temos

$$\delta q^i = \epsilon^{a_1} \{q^i, \phi_{a_1}\} \quad (3.87)$$

Se compararmos com a expressão (C.28)

$$\delta \vec{q} = i \sum_a \epsilon_a (G_a \vec{q}),$$

obtida no Apêndice C, vemos que a ação da matriz iG_a em \vec{q} equivale a ação de $\{\cdot, \phi_{a_1}\}$ nas coordenadas, ou seja, os vínculos de primeira classe são, num certo sentido, os geradores de transformação de calibre. Devido à arbitrariedade dos parâmetros, esperamos que cada vínculo primário de primeira classe seja, individualmente, um gerador de transformação de calibre.

Um ponto importante a ser notado é que os observáveis devem ser invariantes sob uma transformação entre duas órbitas de calibre, ou seja, devemos ter para todo observável $O(q, p)$ a seguinte relação

$$\{O, \phi_{a_1}\} = 0 \quad \forall a_1$$

No entanto, a transformação (3.87) não é a única que relaciona as órbitas de calibre. Para ver isso, considere duas transformações infinitesimais consecutivas:

$$f \xrightarrow{\rho^{a_1} \phi_{a_1}} f' \xrightarrow{\epsilon^{b_1} \phi_{b_1}} f''$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
f'' &= f' + \epsilon^{b_1} \{f' \phi_{b_1}\} \\
f'' &= f + \rho^{b_1} \{f, \phi_{b_1}\} + \epsilon^{b_1} \{f + \rho^{a_1} \{f, \phi_{a_1}\}, \phi_{b_1}\} \\
&= f + \rho^{b_1} \{f, \phi_{b_1}\} + \epsilon^{b_1} \{f, \phi_{b_1}\} + \epsilon^{b_1} \rho^{a_1} \{\{f, \phi_{a_1}\}, \phi_{b_1}\}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Podemos realizar as mesmas transformações, só que agora na ordem oposta:

$$f \xrightarrow{\epsilon^{b_1} \phi_{b_1}} \tilde{f}' \xrightarrow{\rho^{a_1} \phi_{a_1}} \tilde{f}''$$

e temos

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'' &= \tilde{f}' + \rho^{b_1} \{\tilde{f}', \phi_{b_1}\} \\
\tilde{f}'' &= f + \epsilon^{b_1} \{f, \phi_{b_1}\} + \rho^{b_1} \{f, \phi_{b_1}\} + \epsilon^{a_1} \rho^{b_1} \{\{f, \phi_{a_1}\}, \phi_{b_1}\}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

A diferença $\delta f = \tilde{f}'' - f''$ é dada, em primeira ordem, por

$$\delta f = 2\rho^{a_1} \epsilon^{b_1} \{f, \{\phi_{a_1}, \phi_{b_1}\}\} \tag{3.90}$$

Como os ρ^{a_1} e ϵ^{b_1} são parâmetros arbitrários, então $2\rho^{a_1} \epsilon^{b_1}$ também é arbitrário. Assim, temos que $\{\phi_{a_1}, \phi_{b_1}\}$ também são geradores de transformações de calibre.

Por fim, considere uma variável dinâmica f . Primeiramente, realizamos uma transformação de calibre e em seguida evoluímos o sistema com H_T .

$$f(t) \xrightarrow{\epsilon^{a_1} \phi_{a_1}} f'(t) \xrightarrow{H_T} f'(t + \delta t)$$

Temos

$$\begin{aligned}
f'(t + \delta t) &= f'(t) + \delta t \{f'(t), H_T\}_D + \mathcal{O}[(\delta t)^2] \\
&= f(t) + \epsilon^{a_1} \{f(t), \phi_{a_1}\} + \delta t \{f(t) + \epsilon^{a_1} \{f(t), \phi_{a_1}\}, H_T\}_D
\end{aligned} \tag{3.91}$$

ou

$$f'(t + \delta t) = f(t) + \epsilon^{a_1} \{f(t), \phi_{a_1}\} + \delta t \{f, H_T\}_D + \epsilon^{a_1} \delta t \{\{f(t), \phi_{a_1}\}, H_T\} \tag{3.92}$$

Agora podemos realizar as mesmas operações, mas na ordem reversa:

$$f(t) \xrightarrow{H_T} f(t + \delta t) \xrightarrow{\epsilon^{a_1} \phi_{a_1}} f'(t + \delta t)$$

Logo

$$\begin{aligned}
f'(t + \delta t) &= f(t + \delta t) + \epsilon^{a_1} \{f(t + \delta t), \phi_{a_1}\} \\
&= f(t) + \delta t \{f, H_T\}_D + \epsilon^{a_1} \{f(t) + \delta t \{f, H_T\}, \phi_{a_1}\}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

ou

$$f'(t + \delta t) = f(t) + \delta t \{f, H_T\}_D + \epsilon^{a_1} \{f(t), \phi_{a_1}\} + \epsilon^{a_1} \delta t \{\{f, H_T\}, \phi_{a_1}\} \tag{3.94}$$

A diferença deve ser uma transformação de calibre. Assim

$$\begin{aligned}\delta f &= \epsilon^{\alpha_1} \delta t [\{f, H_T\}, \phi_{\alpha_1} - \{\{f, \phi_{\alpha_1}\}, H_T\}] \\ &= \epsilon^{\alpha_1} \delta t [-\{\phi_{\alpha_1}, \{f, H_T\}\} + \{H_T, \{f, \phi_{\alpha_1}\}\}] \\ &= 2\epsilon^{\alpha_1} \delta t \{f, \{\phi_{\alpha_1}, H_T\}\}\end{aligned}\tag{3.95}$$

Temos então que $\{\phi_{\alpha_1}, H_T\}$ também é gerador de transformações de calibre. Mas de acordo com os teoremas 1 e 2 da pág. 24, temos que, como ϕ_{α_1} e H_T são funções de primeira classe, os parênteses de Poisson $\{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}\}$ e $\{\phi_{\alpha_1}, H_T\}$ podem ser escritos como uma combinação linear dos vínculos de primeira classe (Teorema 1 garante que podemos expressar como uma combinação linear dos vínculos, e o Teorema 2 garante que somente vínculos de primeira classe aparece). Logo

$$\begin{aligned}\{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}\} &= U_{\alpha_1 \beta_1}^m \gamma_m \\ \{\phi_{\alpha_1}, H_T\} &= V_{\alpha_1}^m \gamma_m\end{aligned}\tag{3.96}$$

Como todos os vínculos de primeira classe aparecem no lado direito de (3.96) (e não apenas vínculos primários de primeira classe), é possível que alguns (ou todos) dos vínculos secundários de primeira classe também sejam geradores de transformações de calibre. Esse fato levou Dirac a especular que devemos considerar que TODOS os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre. Essa especulação, conhecida como **Conjectura de Dirac**, foi alvo de muitos estudos ao longo dos anos e ainda é alvo de algumas controversias. É possível encontrar nos livros exemplos em que a conjectura de Dirac parece falhar[2]. Para discutir esse assunto, é necessário um estudo da geometria simplética da mecânica clássica e por isso adiamos essa discussão para o próximo capítulo, que trata do formalismo simplético. Por hora, apenas diremos que, de fato, todos os vínculos de primeira classe podem ser considerados geradores de transformações de calibre e utilizaremos esse fato daqui por diante.

A partir de agora, vamos procurar as transformações de calibre que mantêm a ação invariante. Veremos que essa imposição implica numa dependência entre os parâmetros da transformação, e obteremos uma forma explícita para essa dependência. Também será necessário, em alguns casos, alterar os multiplicadores de Lagrange η^{α_1} por uma quantidade que também obteremos.

Considere a ação

$$S = \int dt (\dot{q}^i p_i - H_T)\tag{3.97}$$

sendo

$$H_T = H_c + \kappa^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} + \eta^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1}\tag{3.98}$$

e $\kappa^{\alpha_1} = -\Delta^{\alpha_1 \nu} \{\xi_\nu, H_c\}$, embora aqui os chamaremos simplesmente de κ^{α_1} . Para uma variação arbitrária

$$p_i \rightarrow p_i + \delta p_i$$

$$q^i \rightarrow q^i + \delta q^i \quad (3.99)$$

temos

$$\delta S = \int dt \left(\delta (\dot{q}^i p_i) - \delta H_T \right) \quad (3.100)$$

Vamos tratar cada uma das variações separadamente. Para o primeiro termo, vem:

$$\delta (\dot{q}^i p_i) = p_i \frac{d}{dt} \delta q^i + \delta p_i \frac{d q^i}{dt} = \frac{d}{dt} (p_i \delta q^i) + \delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta q^i \quad (3.101)$$

Em particular, para transformações de calibre da forma

$$\begin{aligned} \delta q^i &= \epsilon^m \{q^i, \gamma_m\} = \epsilon^m \frac{\partial \gamma_m}{\partial p_i} \\ \delta p_i &= \epsilon^m \{p_i, \gamma_m\} = -\epsilon^m \frac{\partial \gamma_m}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (3.102)$$

a variação acima toma a forma

$$\begin{aligned} \delta (\dot{q}^i p_i) &= \frac{d}{dt} \left(p_i \epsilon^m \frac{\partial \gamma_m}{\partial p_i} \right) - \epsilon^m \frac{d \gamma_m}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\epsilon^m \left[\frac{\partial \gamma_m}{\partial p_i} p_i - \gamma_m \right] \right) + \dot{\epsilon}^m \gamma_m \end{aligned} \quad (3.103)$$

Considere agora a variação em H_T

$$\begin{aligned} \delta H_T &= \delta H_c + \eta^{a_1} \delta \phi_{a_1} + \delta \eta^{a_1} \phi_{a_1} + \delta \kappa^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} + \kappa^{\alpha_1} \delta \phi_{\alpha_1} \\ &= \epsilon^m \{H_c, \gamma_m\} + \eta^{a_1} \epsilon^m \{\phi_{a_1}, \gamma_m\} + \kappa^{\alpha_1} \epsilon^m \{\phi_{\alpha_1}, \gamma_m\} + \delta \eta^{a_1} \phi_{a_1} + \delta \kappa^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Note que, como γ_m são vínculos de primeira classe, os parênteses de Poisson deles com quaisquer vínculos se anulam fracamente, de forma que $\{\phi_{a_1}, \gamma_m\} = \{\phi_{\alpha_1}, \gamma_m\} = 0$. Além disso, de acordo com (3.44), $\{H_c, \gamma_m\} = 0$. Mas pelo teorema 1 da pág 25, temos

$$\begin{aligned} \{H_c, \gamma_m\} &= A_m^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} + B_m^{a_1} \phi_{a_1} + C_m^{\alpha_2} \phi_{\alpha_2} + D_m^{a_2} \phi_{a_2} \\ \{\phi_{\alpha_1}, \gamma_m\} &= A_{\alpha_1 m}^{\beta_1} \phi_{\beta_1} + B_{\alpha_1 m}^{a_1} \phi_{a_1} + C_{\alpha_1 m}^{\alpha_2} \phi_{\alpha_2} + D_{\alpha_1 m}^{a_2} \phi_{a_2} \\ \{\phi_{a_1}, \gamma_m\} &= A_{a_1 m}^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1} + B_{a_1 m}^{b_1} \phi_{b_1} + C_{a_1 m}^{\alpha_2} \phi_{\alpha_2} + D_{a_1 m}^{a_2} \phi_{a_2} \end{aligned} \quad (3.105)$$

sendo A,B,C e D coeficientes que definem a combinação. Inserindo esses resultados na expressão da variação da ação (3.100), temos³:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left\{ \left(\dot{\epsilon}^{a_1} - \epsilon^m \left[B_m^{a_1} + \eta^{b_1} B_{b_1 m}^{a_1} + \kappa^{\beta_1} B_{\beta_1 m}^{a_1} \right] - \delta \eta^{a_1} \right) \phi_{a_1} + \left(\dot{\epsilon}^{a_2} - \epsilon^m \left[D_m^{a_2} + \eta^{b_1} D_{b_1 m}^{a_2} + \kappa^{\beta_1} D_{\beta_1 m}^{a_2} \right] \right) \phi_{a_2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\epsilon^m \left[A_m^{\alpha_1} + \eta^{b_1} A_{b_1 m}^{\alpha_1} + \kappa^{\beta_1} A_{\beta_1 m}^{\alpha_1} \right] + \delta \kappa^{\alpha_1} \right) \phi_{\alpha_1} - \epsilon^m \left[C_m^{\alpha_2} + \eta^{b_1} C_{b_1 m}^{\alpha_2} + \kappa^{\beta_1} C_{\beta_1 m}^{\alpha_2} \right] \phi_{\alpha_2} \right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

³ Assumimos que os termos de contorno que surge devido a derivada total não contribui, isso é, que os ϵ^m se anulam nas bordas

Requerendo que $\delta S = 0$, somos levados ao conjunto de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\eta^{a_1} = \dot{\epsilon}^{a_1} - \epsilon^m \left[B_m^{a_1} + \eta^{b_1} B_{b_1 m}^{a_1} + \kappa^{\beta_1} B_{\beta_1 m}^{a_1} \right] \\ \dot{\epsilon}^{a_2} = \epsilon^m \left[D_m^{a_2} + \eta^{b_1} D_{b_1 m}^{a_2} + \kappa^{\beta_1} D_{\beta_1 m}^{a_2} \right] \\ \epsilon^m \left[A_m^{\alpha_1} + \eta^{b_1} A_{b_1 m}^{\alpha_1} + \kappa^{\beta_1} A_{\beta_1 m}^{\alpha_1} \right] + \delta\kappa^{\alpha_1} = 0 \\ \epsilon^m \left[C_m^{\alpha_2} + \eta^{b_1} C_{b_1 m}^{\alpha_2} + \kappa^{\beta_1} C_{\beta_1 m}^{\alpha_2} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (3.107)$$

A primeira equação determina as modificações que precisamos fazer nos parâmetros arbitrários da teoria de forma que a variação das coordenadas mantenha a ação invariante. A segunda expressa os parâmetros da transformação correspondentes aos vínculos secundários de primeira classe em função dos parâmetros de transformação dos vínculos primários de primeira classe. As duas últimas determinam mais condições nos parâmetros de transformação.

Para exemplificar, considere um sistema que possua somente vínculos de primeira classe. Nesse caso, todos os termos com índices gregos somem, e ficamos com

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\eta^{a_1} = \dot{\epsilon}^{a_1} - \epsilon^m \left[B_m^{a_1} + \eta^{b_1} B_{b_1 m}^{a_1} \right] \\ \dot{\epsilon}^{a_2} = \epsilon^m \left[D_m^{a_2} + \eta^{b_1} D_{b_1 m}^{a_2} \right] \end{array} \right. \quad (3.108)$$

Podemos observar, nesse caso, que todos os parâmetros de transformação associados aos vínculos primários de primeira classe ϵ^{a_1} são arbitrários.

3.3 Quantização Canônica de Sistemas Vinculados

Agora vamos discutir o processo de quantização de sistemas vinculados. A primeira coisa é mostrar que quando existem vínculos na teoria, é necessário um tratamento especial na passagem do mundo clássico para o quântico.

Para esses fins, suponha a existência de um vínculo na teoria dado por

$$\phi(q, p) = 0 \quad (3.109)$$

De acordo com a prescrição de Dirac, (D.46), ao passar para a teoria quântica, devemos substituir o vínculo pelo operador nulo

$$\phi(q, p) = 0 \rightarrow \hat{\phi}(q, p) = \hat{0} \quad (3.110)$$

Daí segue que

$$[\hat{A}, \hat{\phi}] = \hat{A}\hat{\phi} - \hat{\phi}\hat{A} = \hat{A}\hat{0} - \hat{0}\hat{A} = \hat{0} \quad (3.111)$$

Por outro lado,

$$[\hat{A}, \hat{\phi}] = i\hbar \{A, \phi\} \quad (3.112)$$

e, quando calculamos o comutador utilizando (3.111) ele sempre se anula. Os parênteses de Poisson do lado direito de (3.112) não é necessariamente nulo. Isso leva a uma inconsistência

Exemplo: Partícula relativística

Considere a partícula relativística. Ela possui o vínculo⁴

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0 \quad (3.113)$$

sendo p_μ momento canonicamente conjugado de x_μ . Tomando o parênteses de Poisson deste vínculo com, por exemplo, a coordenada x_μ , temos

$$\begin{aligned} \{x_\mu, p_\nu p^\nu - m^2\} &= \{x_\mu, p^\nu p_\nu\} \\ &= \{x_\mu, p^\nu\} p_\nu + p^\nu \{x_\mu, p_\nu\} \\ &= \delta_\mu^\nu p_\nu + \eta_{\mu\nu} p^\nu \end{aligned} \quad (3.114)$$

ou seja

$$\{x_\mu, p^2 - m^2\} = 2p_\mu \neq 0 \quad (3.115)$$

Foi Dirac quem descobriu a forma adequada de lidar com o problema. Como já mostramos, os parênteses de Dirac de uma variável dinâmica com qualquer vínculo de segunda classe é sempre igual a zero, de forma que a inconsistência pode ser removida para sistemas de segunda classe: para sistemas que possuem somente vínculos de segunda classe, a evolução temporal de uma quantidade $g(q, p)$ é dada por

$$\dot{g} = \{g, H_c\}_D \quad (3.116)$$

Nesse caso, em vez de mapearmos o parênteses de Poisson nos comutadores, a escolha correta é mapear o parênteses de Dirac nos comutadores, através da relação

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A, B\}_D \quad (3.117)$$

Como $\{F, \xi_\mu\}_D = 0$, o problema da inconsistência desaparece.

Agora, precisamos tratar de sistemas que também apresentam vínculos de primeira classe. Quando isso ocorre, a evolução não toma a forma elegante que aparece em (3.116). De fato, a evolução temporal é dada por

$$\dot{g} = \{g, H_c\}_D + \eta^{a_1} \{g, \phi_{a_1}\}$$

Estudaremos agora um procedimento para modificar essa estrutura, de forma que obtenhamos, ao final do procedimento, uma evolução temporal semelhante a (3.116). A ideia básica é transformar um sistema misto (que apresenta vínculos de primeira e de segunda classe) em um sistema de segunda classe. Vejamos como isso pode ser feito e discutiremos as vantagens e desvantagens do processo.

Como já vimos, a presença de coeficientes u 's não determinados (e conseqüentemente, a razão pela qual a evolução temporal toma a forma (3.82)) é devido à existência de vínculos de primeira

⁴ Para mais detalhes, veja Apêndice E

classe. Essa indeterminação é um reflexo da existência de variáveis redundantes na teoria, isto é, tem-se mais variáveis que o número de graus de liberdade do sistema. Uma maneira de eliminar essas variáveis redundantes consiste na introdução de condições complementares sobre as variáveis dinâmicas, denominadas de condições de calibre.

As condições de calibre devem ser introduzidas na teoria de tal maneira que, ao serem levadas em conta, fique estabelecido uma correspondência entre os estados físicos e o conjunto de valores daquelas variáveis canônicas que ficam independentes⁵. O objetivo das condições de calibre é, portanto, a de remover os elementos arbitrários da teoria que não afetam as propriedades observáveis do sistema, já que um observável não pode depender da escolha aleatória de parâmetros indeterminados

Pelo que vimos, um sistema que apresenta apenas vínculos de segunda classe não tem arbitrariedade, e o formalismo que desenvolvemos é tal que os vínculos ficam respeitados, isto é, já são levados em conta pelo uso do parênteses de Dirac. Disto sai a ideia de quebrar a arbitrariedade: podemos introduzir condições de calibre de tal modo que o conjunto total de vínculos (condições de calibre + vínculos de primeira classe) seja de segunda classe, através de um procedimento denominado fixação de calibre. Isto é a essência da ideia mas, é claro, alguns critérios devem ser obedecidos, como veremos agora.

Um conjunto satisfatório de condições de calibre

$$\Omega_\alpha(q, p) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, G \quad (3.118)$$

deve satisfazer as seguintes condições:

i) As condições de calibre devem ser atingíveis no sentido de que, dado um conjunto de variáveis canônicas que não satisfazem (3.118), deve existir uma transformação de calibre que leve em um outro conjunto que satisfaça aquelas condições. Esta transformação deve ser obtida por intermédio das transformações infinitesimais geradas pelos vínculos de primeira classe, isto é, da forma

$$\begin{aligned} \delta q^i &= \epsilon^m \{q^i, \gamma_m\} \\ \delta p_i &= \epsilon^m \{p_i, \gamma_m\} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Esta condição garante que (3.118) não afeta as propriedades observáveis do sistema (que são invariantes de calibre). O número de parâmetros independentes ϵ^m é igual ao número de vínculos de primeira classe e o número de condições de calibre não pode ser maior que o número destes vínculos

ii) As condições de calibre devem remover a liberdade de calibre do sistema no sentido que, uma vez

⁵ Existem outros métodos que não introduzem vínculos adicionais, mas não trabalharemos com eles aqui

impostos sobre um dado conjunto de variáveis canônicas, nenhum outro conjunto obtido por uma transformação de calibre satisfaça aquelas condições. Isso significa que as equações

$$\delta\Omega_\alpha = \epsilon^m \{\Omega_\alpha, \gamma_m\} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, G \quad (3.120)$$

devem implicar em $\epsilon^m = 0$, o que só é possível se

$$\det(\{\Omega_\alpha, \gamma_m\}) \neq 0 \quad (3.121)$$

de modo que o numero de condições de calibre deve ser igual ao numero de vínculos de primeira classe

- iii) As condições de calibre devem ser preservadas pela evolução dinâmica do sistema. Uma vez dadas as condições (3.118) sobre uma hipersuperfície $t = \text{constante}$, em particular sobre a hipersuperfície inicial, a evolução do sistema deve garantir que elas serão válidas sobre qualquer outra hipersuperfície.
- iv) Para os sistemas relativísticos, em particular, as condições de calibre não devem destruir a invariância de Poincaré da teoria.

No caso geral, depois de impostas as condições de calibre, tem-se um conjunto de vínculos de primeira classe γ_m , um conjunto de vínculos de segunda classe ξ_μ e um conjunto de vínculos de calibre Ω_α . Devemos mostrar que o conjunto de todos os vínculos ($\gamma_m, \xi_\mu, \Omega_\alpha$) é de segunda classe. Para isto é suficiente demonstrar que a matriz cujos elementos são os colchetes de Poisson de todos os vínculos tem determinante diferente de zero. Este determinante pode ser escrito em blocos:

$$\begin{vmatrix} \{\xi_\mu, \xi_\nu\} & \{\xi_\mu, \gamma_m\} & \{\xi_\mu, \Omega_\alpha\} \\ \{\gamma_m, \xi_\nu\} & \{\gamma_m, \gamma_n\} & \{\gamma_m, \Omega_\alpha\} \\ \{\Omega_\alpha, \xi_\nu\} & \{\Omega_\alpha, \gamma_m\} & \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{\xi_\mu, \xi_\nu\} & 0 & \{\xi_\mu, \Omega_\alpha\} \\ 0 & 0 & \{\gamma_m, \Omega_\alpha\} \\ \{\Omega_\alpha, \xi_\nu\} & \{\Omega_\alpha, \gamma_m\} & \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} \end{vmatrix} = \det(\{\xi_\mu, \xi_\nu\}) [\det(\{\gamma_m, \Omega_\alpha\})]^2 \neq 0 \quad (3.122)$$

Conseqüentemente, após implementar um conjunto completo de condições de calibre, ficamos com um sistema com vínculos de segunda classe.

Escolhidos os vínculos de calibre satisfazendo as condições dadas anteriormente, devemos usar os colchetes de Dirac e, desta forma, teremos uma teoria efetivamente livre de vínculos, no sentido que todos podem ser tratados como identidades que expressam algumas variáveis dinâmicas em termos de outras.

3.4 Contagem do Número de Graus de Liberdade

Como já sabemos, em uma teoria possuindo apenas vínculos de segunda classe não aparecem funções arbitrárias. Logo, um conjunto de variáveis que satisfaz as equações de vínculo determinam um e somente um estado físico. Além disso, após uma fixação de calibre, temos somente vínculos de segunda classe, de forma que a contagem é dada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& 2 \times \{ \text{Número de graus de liberdade} \} = \{ \text{Número de variáveis independentes} \} \\
& = \{ \text{Número total de variáveis canônicas} \} - \{ \text{Número de vínculos de segunda classe} \} \\
& \quad - \{ \text{Número de vínculos de primeira classe} \} - \{ \text{Número de condições de calibre} \}
\end{aligned}$$

Como o número de condições de calibre é igual ao número de vínculos de primeira classe, temos finalmente

$$2 \times \{ \text{Número de graus de liberdade} \} = \{ \text{Número total de variáveis canônicas} \} - \{ \text{Número de vínculos de segunda classe} \} - 2 \times \{ \text{Número de vínculos de primeira classe} \}$$

Como o número de vínculos de segunda classe é sempre par⁶, vemos que o número de variáveis canônicas independentes é também par. Na seção 3.5, quando contarmos o número de graus de liberdade do campo eletromagnético e do campo de Proca, faremos algumas considerações sobre o significado dos graus de liberdade na teoria de campos

3.5 Exemplos e Aplicações

3.5.1 - Considere a Lagrangeana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x}y + \frac{1}{2}(x - y)^2 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x}y + \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}.$$

Essa Lagrangeana é invariante sob as transformações

$$\delta x = \epsilon, \quad \delta y = \epsilon - \dot{\epsilon}$$

Vamos ver como essa invariância se manifesta no formalismo de Dirac. Os momentos canonicamente conjugados são

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + y \\
p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Encontramos o vínculo primário

$$\phi_1 = p_y = 0 \tag{3.124}$$

A Hamiltoniana canônica é dada por

$$\begin{aligned}
H_c &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L \\
&= p_x(p_x - y) - \frac{1}{2}(p_x - y)^2 - (p_x - y)y - \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}
\end{aligned}$$

⁶ Existem algumas exceções, como o boson quiral, que possui apenas 1 vínculo de segunda classe, mas não entraremos em detalhes aqui

$$= p_x^2 - yp_x - \frac{p_x^2}{2} + yp_x - \frac{y^2}{2} - yp_x + y^2 - \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$$

$$H_c = \frac{p_x^2}{2} - yp_x - \frac{x^2}{2} + xy \quad (3.125)$$

E a Hamiltoniana total é

$$H_T = \frac{p_x^2}{2} - yp_x - \frac{x^2}{2} + xy + \lambda p_y \quad (3.126)$$

Além disso, temos os parênteses de Poisson canônicos

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = 1 \quad (3.127)$$

e todos os outros igual a zero. Aplicamos a condição de continuidade para o vínculo $\phi_1 = 0$

$$\dot{\phi}_1 = \{p_y, H_T\} = 0$$

$$0 = \{p_y, (x - p_x)y\} = \{p_y, y\} (x - p_x) = p_x - x \quad (3.128)$$

Logo, encontramos um vínculo secundário

$$\phi_2 = p_x - x = 0 \quad (3.129)$$

Aplicamos também a condição de consistência para ele:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= \{(p_x - x), H_c\} = 0 \\ \{p_x, H_c\} + \{x, H_c\} &= 0 \\ 0 &= \left\{ p_x, xy - \frac{x^2}{2} \right\} - \left\{ x, \frac{p_x^2}{2} - yp_x \right\} \end{aligned}$$

$$0 = \{p_x, x\} y - \frac{1}{2} \{p_x, x^2\} - \frac{1}{2} \{x, p_x^2\} + y \{x, p_x\} \quad (3.130)$$

O primeiro termo cancela com o quarto. Temos também

$$\{p_x, x^2\} = x \{p_x, x\} + \{p_x, x\} x = -2 \{x, p_x\} x = -2x$$

$$\{x, p_x^2\} = p_x \{x, p_x\} + \{x, p_x\} p_x = 2 \{x, p_x\} p_x = 2p_x \quad (3.131)$$

Então

$$0 = x - p_x = -\phi_2 \quad (3.132)$$

Não temos novos vínculos e o processo iterativo termina aqui. Note que não determinamos o multiplicador de Lagrange λ , o que sugere que temos vínculos de primeira classe. De fato, o seguinte cálculo mostra que ϕ_1 e ϕ_2 são ambos de primeira classe:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{p_y, (p_x - x)\} = 0 \quad (3.133)$$

Adotando a notação da seção 3.1, escrevemos

$$\gamma_1 = p_y = 0$$

$$\gamma_2 = p_x - x = 0 \quad (3.134)$$

Como discutido na seção 3.2, os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre, no seguinte sentido:

$$\delta A(q, p) = \epsilon_1 \{A, \gamma_1\} + \epsilon_2 \{A, \gamma_2\} = \epsilon_1 \{A, p_y\} + \epsilon_2 \{A, (p_x - x)\} \quad (3.135)$$

em particular

$$\delta x = \epsilon_2, \quad \delta y = \epsilon_1$$

$$\delta p_x = \epsilon_2, \quad \delta p_y = 0 \quad (3.136)$$

Vamos procurar as transformações que deixam a ação invariante. A relação entre ϵ_1 e ϵ_2 é definida em (3.108), com os coeficientes dados em (3.105). Temos

$$\{H_c, \gamma_1\} = \{H_c, p_y\} = -p_x + x = -\phi_2$$

$$\{H_c, \gamma_2\} = p_x - x = \phi_2$$

$$\{\phi_1, \gamma_1\} = \{p_y, p_y\} = 0$$

$$\{\phi_1, \gamma_2\} = \{p_y, p_x - x\} = 0 \quad (3.137)$$

Comparando (3.137) com (3.105), tiramos que

$$D_2 = 1, \quad D_1 = -1 \quad (3.138)$$

e todos os outros coeficientes nulos. Obtemos então, utilizando (3.108), a relação

$$\dot{\epsilon}_2 = -\epsilon_1 + \epsilon_2$$

Denominando $\epsilon_2 = \epsilon$, temos as transformações de calibre

$$\delta x = \epsilon, \quad \delta y = \dot{\epsilon} - \epsilon$$

$$\delta p_x = \epsilon, \quad \delta p_y = 0 \quad (3.139)$$

Se estivessemos interessados em quantizar essa teoria, o próximo passo seria introduzir duas condições de calibre, de maneira que ficássemos com um sistema de segunda classe. Teremos a oportunidade de fazer isso em outros exemplos. Por hora, seguimos adiante para o próximo exemplo

3.5.2 - Modelo O(N) Sigma Não-Linear: A partir de agora (neste e nos próximos dois problemas) vamos estudar sistemas contínuos, com um número infinito de graus de liberdade. Uma pequena revisão pode ser encontrada no Apêndice A

Em Teoria Quântica de Campos, o modelo Sigma Não-linear descreve um campo φ que toma valores em uma variedade não linear. O modelo foi introduzido por Gell-Mann e Levy em 1960 [48].

A variedade tangente T é equipada com uma métrica Riemanniana g ; φ é um mapeamento diferenciável do espaço de Minkowski em T. A densidade Lagrangeana para descrever esse modelo é

$$\mathcal{L}(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^b, \lambda) = \frac{1}{2} g_{ab} (\partial_\mu \varphi^a) (\partial^\mu \varphi^b) + \lambda F(\varphi) \quad (3.140)$$

Um dos modelos mais famosos, de particular interesse devido a suas propriedades topológicas[58], é o modelo dado por

$$L = \int d^3x \frac{1}{2} (\partial_\mu^x \varphi^a(x)) (\partial_x^\mu \varphi_a(x)) + \frac{\lambda(x)}{2} (\varphi^a(x) \varphi_a(x) - 1) \quad (3.141)$$

Como você pode observar, a semelhança dessa Lagrangeana com (E.47) é notável, quando consideramos

$$q^a \rightarrow \varphi^a(x), \quad \frac{d}{dt} q^a \rightarrow \partial_\mu \varphi^a(x)$$

$$V(q) = 0 \quad (3.142)$$

Escolhemos esse modelo justamente por isso: poderemos comparar cada passo dado e fazer a transição de discreto para contínuo mais fácil.

Considere os momentos canonicamente conjugados

$$\begin{aligned} \pi_a(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^a}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial (\partial_\mu \varphi^b)}{\partial (\partial_0 \varphi^a)} \partial^\mu \varphi_b(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\partial^\mu \varphi_b)}{\partial (\partial_0 \varphi^a)} \partial_\mu \varphi^b(x) = \frac{\partial (\partial_\mu \varphi^b)}{\partial (\partial_0 \varphi^a)} \partial^\mu \varphi_b(x) = \\ &= \delta_\mu^0 \delta_a^b \partial^\mu \varphi_b(x) = \dot{\varphi}_a(x) \end{aligned}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}(x) = 0 \quad (3.143)$$

Obtemos o vínculo primário

$$\phi_1(x) = \pi(x) = 0 \quad (3.144)$$

A densidade Hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_c(x) = \pi^a(x) \dot{\varphi}^a(x) - \mathcal{L}(x) = \pi^a(x) \pi_a(x) - \frac{1}{2} \pi^a(x) \pi_a(x) + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi^a(x)) (\partial^i \varphi_a(x)) - \frac{\lambda(x)}{2} (\varphi^a(x) \varphi_a(x) - 1)$$

$$\mathcal{H}_c(x) = \frac{1}{2}\pi^a(x)\pi_a(x) + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi^a(x))(\partial^i\varphi_a(x)) - \frac{\lambda(x)}{2}(\varphi^a(x)\varphi_a(x) - 1) \quad (3.145)$$

em que usamos a separação

$$\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi_a = \partial_0\varphi^a\partial^0\varphi_a - \partial_i\varphi^a\partial^i\varphi_a = \pi^a\pi_a - \partial_i\varphi^a\partial^i\varphi_a \quad (3.146)$$

Logo, a Hamiltoniana total é

$$H_T = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\pi^a(x)\pi_a(x) + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi^a(x))(\partial^i\varphi_a(x)) - \frac{\lambda(x)}{2}(\varphi^a(x)\varphi_a(x) - 1) + \epsilon(x)\pi(x) \right\} \quad (3.147)$$

sendo $\epsilon(x)$ um multiplicador de Lagrange para cada x . Os parênteses de Poisson fundamentais são

$$\{\varphi^a(x), \pi_b(y)\} = \delta_b^a\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{\lambda(x), \pi(y)\} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

e todos os outros nulos. Aplicamos a condição de consistência para $\phi_1 = 0$:

$$\dot{\phi}_1 = \{\pi(x), H_T\} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2} \int d^3y (\varphi^a(y)\varphi_a(y) - 1) \{\pi(x), \lambda y\} = \frac{1}{2} \int d^3y (\varphi^a(y)\varphi_a(y) - 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.148)$$

o que implica no vínculo secundário

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(\varphi^a(x)\varphi_a(x) - 1) = 0 \quad (3.149)$$

que é equivalente ao vínculo (E.53). Aplicamos também a ele a condição de consistência

$$\dot{\phi}_2(x) = \frac{1}{2} \{\varphi^a(x)\varphi_a(x), H_T\} = \varphi_a(x) \{\varphi^a(x), H_T\} = 0 \quad (3.150)$$

Mas, por outro lado, temos

$$\{\varphi^a(x), H_T\} = \frac{1}{2} \int d^3y \{\varphi^a(x), \pi^b(y)\pi_b(y)\} = \int d^3y \pi^b(y) \{\varphi^a(x), \pi_b(y)\} = \int d^3y \pi^b(y) \delta_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \pi^a(x) \quad (3.151)$$

Inserindo em (3.150), temos o vínculo

$$\phi_3(x) = \varphi^a(x)\pi_a(x) = 0 \quad (3.152)$$

De forma análoga, temos

$$0 = \{\varphi^a(x)\pi_a(x), H_T\} = \varphi^a(x) \{\pi_a(x), H_T\} + \pi_a(x) \{\varphi^a(x), H_T\} \quad (3.153)$$

Já sabemos, de (3.152), que $\{\varphi^a(x), H_T\} = \pi^a(x)$. Vamos ver o outro parênteses de Poisson

$$\{\pi_a(x), H_T\} = \frac{1}{2} \int d^3y \left(\{\pi_a(x), \partial_i^y\varphi^b(y)\partial_y^i\varphi_b(y)\} - \lambda(y) \{\pi_a(x), \varphi^b(y)\varphi_b(y)\} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3y \left(\partial_y^i \varphi_b(y) \partial_i^y \{ \pi_a(x), \varphi^b(y) \} - \lambda(y) \varphi_b(y) \{ \pi_a(x), \varphi^b(y) \} \right) = \\
&= \int d^3y \left(-\partial_y^i \varphi_b(y) \delta_a^b \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{t}) + \lambda(y) \varphi_b(y) \delta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{y}) \right) \quad (3.154)
\end{aligned}$$

Utilizando integração por partes na primeira parcela da direita, temos

$$\begin{aligned}
\{ \pi_a(x), H_T \} &= \int d^3y \left(\partial_i^y \partial_y^i \varphi_a(y) \delta(\vec{x} - \vec{t}) + \lambda(y) \varphi_a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \right) \\
&= \partial_i^x \partial_x^i \varphi_a(x) + \lambda(x) \varphi_a(x) \quad (3.155)
\end{aligned}$$

Assim, com auxílio de (3.154), obtemos o vínculo

$$\phi_4(x) = \pi^a(x) \pi_a(x) + \lambda(x) \varphi_a(x) \varphi^a(x) + \varphi^a(x) \Delta^x \varphi_a(x) = 0 \quad (3.156)$$

Por coerência, temos que aplicar a condição de consistência para $\phi_4 = 0$ também. Mas isso simplesmente determinará o multiplicador de Lagrange ϵ , dando uma expressão explícita para ele, o que não nos interessa. Vamos calcular os parênteses de Poisson entre os vínculos, para ver quais são de primeira e segunda classe:

$$\begin{aligned}
\{ \phi_1(x), \phi_2(y) \} &= \left\{ \pi(x), \frac{1}{2} (\varphi^a(y) \varphi_a(y) - 1) \right\} = 0 \\
\{ \phi_1(x), \phi_3(y) \} &= \{ \pi(x), \varphi^a(y) \pi_a(y) \} = 0 \\
\{ \phi_1(x), \phi_4(y) \} &= \{ \pi(x), \pi^a(y) \pi_a(y) + \lambda(y) \varphi_a(y) \varphi^a(y) + \varphi^a(y) \Delta^x \varphi_a(y) \} = \varphi_a(y) \varphi^a(y) \{ \pi(x), \lambda(y) \} = \\
&= -\varphi_a(y) \varphi^a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = -(\varphi_a(y) \varphi^a(y) - 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \delta(\vec{x} - \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{ \phi_2(x), \phi_3(y) \} &= \left\{ \frac{1}{2} (\varphi^a(x) \varphi_a(x) - 1), \varphi^b(y) \pi_b(y) \right\} = \frac{\varphi^b(y)}{2} \{ \varphi^a(x) \varphi_a(x), \pi_b(y) \} = \\
&= \varphi^b(y) \varphi_a(x) \{ \varphi^a(x), \pi_b(y) \} = \varphi^b(y) \varphi_a(x) \delta_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) = (\varphi^a(y) \varphi_a(x) - 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{ \phi_2(x), \phi_4(y) \} &= \left\{ \frac{1}{2} (\varphi^a(x) \varphi_a(x) - 1), \pi^b(y) \pi_b(y) + \lambda(y) \varphi_b(y) \varphi^b(y) + \varphi^b(y) \Delta^y \varphi_b(y) \right\} = \\
&= 2\varphi_a(x) \pi^b(y) \{ \varphi^a(x), \pi_b(y) \} = 2\varphi_a(x) \pi^b(y) \delta_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \varphi_a(x) \pi^a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \varphi_a(x) \pi^a(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \\
\{ \phi_3(x), \phi_4(y) \} &= \left\{ \varphi^a(x) \pi_a(x), \pi^b(y) \pi_b(y) + \lambda(y) \varphi_b(y) \varphi^b(y) + \varphi^b(y) \Delta^y \varphi_b(y) \right\} = \\
&= \varphi^a(x) \left\{ \pi_a(x), \lambda(y) \varphi_b(y) \varphi^b(y) + \varphi^b(y) \Delta^y \varphi_b(y) \right\} + \pi_a(x) \left\{ \varphi^a(x), \pi^b(y) \pi_b(y) \right\} \\
&= -2\lambda(y) \varphi^a(x) \varphi_a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x) \varphi_a(y) \Delta^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x) \Delta^y \varphi_a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + 2\pi_a(x) \pi^a(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= 4\pi^a(x) \pi_a(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x) \varphi_a(x) \Delta^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x) \Delta^x \varphi_a(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.157)
\end{aligned}$$

Todos os vínculos são de segunda classe:

$$\xi_1(x) = \pi(x) = 0, \quad \xi_2(x) = \frac{1}{2} (\varphi^a(x) \varphi_a(x) - 1) = 0$$

$$\xi_3(x) = \varphi^a(x)\pi_a(x) = 0, \quad \xi_4(x) = \pi^a(x)\pi_a(x) + \lambda(x)\varphi_a(x)\varphi^a(x) + \varphi^a(x)\Delta^x\varphi_a(x) = 0 \quad (3.158)$$

Vamos obter os parênteses de Dirac. A matriz $\Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y})$ é

$$\Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & K(\vec{x}, \vec{y}) \\ \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & -K(\vec{x}, \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

sendo $K(\vec{x}, \vec{y}) = 4\pi^a(x)\pi_a(x)\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x)\varphi_a(x)\Delta^x\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varphi^a(x)\Delta^x\varphi_a(x)\delta(\vec{x} - \vec{y})$. Sua inversa, definida por

$$\int d^3z \Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{z}) \Delta^{\nu\eta}(\vec{z}, \vec{y}) = \delta_\mu^\eta \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.160)$$

é

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & K(\vec{x}, \vec{y}) & 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ -K(\vec{x}, \vec{y}) & 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.161)$$

Os parênteses de Dirac são dados por

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D &= \{F(x), G(y)\} - \int d^3z d^3w \{F(x), \xi_\mu(z)\} \Delta^{\mu\nu}(\vec{z}, \vec{w}) \{\xi_\nu(w), G(y)\} = \\ &= \{F(x), G(y)\} - \frac{1}{2} \int d^3z d^3w \{F(x), \pi(z)\} K(\vec{z}, \vec{w}) \{\varphi^a(w)\varphi_a(w), G(y)\} - \\ &\quad - \int d^3z \{F(x), \pi(z)\} \{\pi^a(z)\pi_a(z) + \lambda(z)\varphi_a(z)\varphi^a(z) + \varphi^a(z)\Delta^z\varphi_a(z), G(y)\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3z d^3w \{F(x), \varphi^a(z)\varphi_a(z)\} K(\vec{z}, \vec{w}) \{\pi(w), G(y)\} + \frac{1}{2} \int d^3z \{F(x), \varphi^a(z)\varphi_a(z)\} \{\varphi^a(z)\pi_a(z), G(y)\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^3z \{F(x), \varphi^a(z)\pi_a(z)\} \{\varphi^a(z)\varphi_a(z), G(y)\} + \\ &\quad + \int d^3z \{F(x), \pi^a(z)\pi_a(z) + \lambda(z)\varphi_a(z)\varphi^a(z) + \varphi^a(z)\Delta^z\varphi_a(z)\} \{\pi(z), G(y)\} \end{aligned} \quad (3.162)$$

Os parênteses de Dirac fundamentais importantes são:

i) $\{\varphi^a(x), \varphi_b(y)\}_D$:

$$\{\varphi^a(x), \varphi_b(y)\}_D = 0 \quad (3.163)$$

ii) $\{\varphi^a(x), \pi_b(y)\}_D$:

$$\begin{aligned} \{\varphi^a(x), \pi_b(y)\}_D &= \delta_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \int d^3z \varphi^c(z)\varphi_d(z) \{\varphi^a(x), \pi_c(z)\} \{\varphi^d(z), \pi_b(y)\} = \\ &= \delta_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \int d^3z \varphi^c(z)\varphi_d(z) \delta_c^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_b^d \delta(\vec{z} - \vec{y}) = (\delta_b^a - \varphi^a(x)\varphi_b(x))\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.164)$$

iii) $\{\pi^a(x), \pi_b(y)\}_D$:

$$\begin{aligned} \{\pi^a(x), \pi_b(y)\}_D &= \int d^3z \varphi^c(z) \pi_d(z) \{\pi^a(x), \varphi_c(z)\} \{\varphi^d(z), \pi_b(y)\} - \int d^3z \pi_c(z) \varphi_d(z) \{\pi_a(x), \varphi^c(z)\} \{\varphi^d(z), \pi_b(y)\} \\ &= \int d^3z \pi_c(z) \varphi_d(z) \delta_c^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_b^d \delta(\vec{z} - \vec{y}) - \int d^3z \varphi^c(z) \pi_d(z) \delta_c^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_b^d \delta(\vec{z} - \vec{y}) = \\ &= (\pi_a(x) \varphi_b(x) - \varphi^a(x) \pi_b(x)) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.165)$$

A partir de agora, todos os vínculos podem ser considerados igual a zero em todos os momentos. Partimos para o processo de quantização canônica:

$$\begin{aligned} \varphi^a(x) &\rightarrow \hat{\varphi}^a(x), \quad \pi_a(x) \rightarrow \hat{\pi}_a(x) \\ H_T &\rightarrow \hat{H}_T = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \hat{\pi}^a(x) \hat{\pi}_a(x) + \frac{1}{2} (\partial_i \hat{\varphi}^a(x)) (\partial^i \hat{\varphi}_a(x)) \right\} \\ [\hat{\varphi}^a(x), \hat{\varphi}_b(y)] &= 0 \\ [\hat{\varphi}^a(x), \hat{\pi}_b(y)] &= i\hbar (\delta_b^a - \hat{\varphi}^a(x) \hat{\varphi}_b(x)) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

$$[\hat{\pi}^a(x), \hat{\pi}_b(y)] = i\hbar (\hat{\pi}_a(x) \hat{\varphi}_b(x) - \hat{\varphi}^a(x) \hat{\pi}_b(x)) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.166)$$

3.5.3 - Modelo de Proca: Vamos considerar o modelo de Proca, que consiste na introdução de um termo de massa na Lagrangeana do campo eletromagnético. Deveríamos, é claro, trabalhar com a Lagrangeana de Maxwell primeiro, para em seguida apresentar modificações da mesma. No entanto, o modelo de Proca, como veremos, apresenta apenas vínculos de segunda classe, o que o torna um exemplo bem mais fácil (não há simetrias, nem a necessidade de fixação de calibre). Nosso único trabalho é encontrar os parênteses de Dirac.

Considere a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}[A_\mu, \dot{A}_\nu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (3.167)$$

em que $A_\mu = A_\mu(x)$ é um quadrivetor, ou seja, $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_\alpha} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \dot{A}_\alpha} \quad (3.168)$$

Para calcular essa derivada, note que

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \dot{A}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_\alpha} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3.169)$$

Lembrando que $\dot{A}_\alpha = \partial_0 A_\alpha$, é fácil ver que as únicas derivadas não nulas são quando aparece o termo $\partial_0 A_\alpha$. Logo

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \dot{A}_\alpha} = \delta_\mu^0 \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^0 \delta_\mu^\alpha \quad (3.170)$$

Assim,

$$\pi^\alpha = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\alpha - \delta_\mu^\alpha\delta_\nu^0) = -\frac{1}{2}(F^{0\alpha} - F^{\alpha 0}) = F^{\alpha 0} \quad (3.171)$$

onde usamos o fato que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ (antissimetria). Escrevendo explicitamente, temos

$$\pi^0 = F^{00} = 0$$

$$\pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i \quad (3.172)$$

A primeira expressão de (3.172) nos mostra que temos o vínculo primário

$$\phi_1 = \pi^0 = 0 \quad (3.173)$$

A segunda nos permite escrever as velocidades generalizadas \dot{A}^i em termos dos momentos π^i :

$$\dot{A}^i = \partial^i A^0 - \pi^i \quad (3.174)$$

Os parênteses de Poisson canônicos são

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), \pi_\nu(y)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta A^\mu(x)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta \pi_\nu(y)}{\delta \pi_\lambda(z)} - \frac{\delta \pi_\nu(y)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \pi_\lambda(z)} \right) = \int d^e z \delta_\lambda^\mu \delta(\vec{x}-\vec{z}) \delta_\nu^\lambda \delta(\vec{y}-\vec{z}) = \delta_\nu^\mu \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ \{A^\mu(x), A_\nu(y)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta A^\mu(x)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta A_\nu(y)}{\delta \pi_\lambda(z)} - \frac{\delta A_\nu(y)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \pi_\lambda(z)} \right) = 0 \\ \{\pi^\mu(x), \pi_\nu(y)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta \pi^\mu(x)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta \pi_\nu(y)}{\delta \pi_\lambda(z)} - \frac{\delta \pi_\nu(y)}{\delta A^\lambda(z)} \frac{\delta \pi_\mu(x)}{\delta \pi_\lambda(z)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.175)$$

A densidade Hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_c = \dot{A}_i \pi^i - \mathcal{L} = (\partial_i A^0 - \pi_i) \pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (3.176)$$

em que o termo $\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ foi separado da seguinte maneira

$$\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} = \frac{1}{2} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} = \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \quad (3.177)$$

Juntando os termos semelhantes, temos

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - A^0 \partial_i \pi^i \quad (3.178)$$

Para obter o último termo, utilizamos integração por partes em $\partial_i A^0 \pi^i$ e desconsideramos os termos de borda. Obtemos a Hamiltoniana total através da introdução dos vínculos por meio de multiplicadores de Lagrange:

$$H_T = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - A^0 \partial_i \pi^i + \lambda \pi^0 \right) \quad (3.179)$$

Aplicamos agora a condição de consistência para o vínculo $\phi_1 = 0$:

$$\dot{\phi}_1(x) = \left\{ \pi^0(x), H_T \right\} = \int d^3y \left\{ \pi^0(x), -\frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \pi^0(x), -A^0(y) \partial_i^y \pi^i(y) \right\} = 0 \quad (3.180)$$

Na expressão acima, incluímos somente os termos da Hamiltoniana que tem parênteses de Poisson não nulos com π^0 . Por essa razão, não incluímos os termos $\frac{1}{2} \pi^i \pi_i$, que só contêm termos com π^i , os termos $\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}$, os quais só contêm termos com A^i , e os termos $\lambda \pi^0$. Utilizando a regra do produto e os parênteses de Poisson canônicos, obtemos

$$\begin{aligned} & -m^2 \int d^3y A_m u(y) \left\{ \pi^0(x), A^\mu(y) \right\} - \int d^3y \partial_i^y \pi^i(y) \left\{ \pi^0(x), A^0(y) \right\} = \\ & m^2 \int d^3y A_m u(y) \delta_0^\mu \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \int d^3y \partial_i^y \pi^i(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = m^2 A_0(x) + \partial_i^x \pi^i(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.181)$$

Obtemos assim o vínculo secundário

$$\phi_2 = m^2 A_0(x) + \partial_i^x \pi^i(x) = 0 \quad (3.182)$$

Aplicamos a condição de consistência para ele

$$\dot{\phi}_2 = \left\{ \left(m^2 A_0(x) + \partial_i^x \pi^i(x) \right), H_T \right\} = 0$$

$$\int d^3y \left\{ \partial_i^x \pi^i(x), \frac{1}{4} F^{ij}(y) F_{ij}(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \partial_i^x \pi^i(x), -\frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} + m^2 \int d^3y \left\{ A_0(x), \lambda(y) \pi^0(y) \right\} = 0 \quad (3.183)$$

Vamos calcular cada um desses termos separadamente

I) Primeiro Termo:

$$\begin{aligned} & \int d^3y \left\{ \partial_i^x \pi^i(x), \frac{1}{4} F^{kj}(y) F_{kj}(y) \right\} = \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \left\{ \pi^i(x), F_{kj}(y) \right\} F^{kj}(y) \\ & = \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \left\{ \pi^i(x), \partial_k^y A_j(y) \right\} F^{kj}(y) - \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \left\{ \pi^i(x), \partial_j^y A_k(y) \right\} F^{kj}(y) \\ & = \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \partial_k^y \left\{ \pi^i(x), A_j(y) \right\} F^{kj}(y) - \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y \left\{ \pi^i(x), A_k(y) \right\} F^{kj}(y) \\ & = -\frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) F^{ji}(y) - \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) F^{ji}(y) \\ & = \partial_i^x \int d^3y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \partial^y_j F^{ji}(y) \\ & = \partial_i^x \partial_j^x F^{ji}(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.184)$$

Onde usamos uma integração por partes da quarta para a quinta linha. Na última linha, o resultado é zero, pois $\partial_i^x \partial_j^x$ é simétrico nos índices i e j , enquanto que F^{ji} é antissimétrico nos mesmos índices

II) Segundo termo:

$$\int d^3y \left\{ \partial_i^x \pi^i(x), -\frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} = -m^2 \partial_i^x \int d^3y A^\mu(y) \left\{ \pi^i(x), A_\mu(y) \right\} = m^2 \partial_i^x \int d^3y A^\mu(y) \delta_\mu^i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$= m^2 \partial_i^x A^i(x) \quad (3.185)$$

III) Terceiro Termo :

$$\begin{aligned} m^2 \int d^3 y \{A_0(x), \lambda(y) \pi^0(y)\} &= m^2 \int d^3 y \lambda(y) \{A_0(x), \pi^0(y)\} = m^2 \int d^3 y \lambda(y) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= m^2 \lambda(x) \end{aligned} \quad (3.186)$$

Finalmente, obtemos a relação

$$m^2 \lambda + m^2 \partial_i A^i = 0 \quad (3.187)$$

Note que essa relação não é um novo vínculo. De fato, ela determina o multiplicador de Lagrange λ . Por essa razão, nosso algoritmo termina aqui: temos somente dois vínculos na teoria. Como o multiplicador de Lagrange foi determinado, significa que não existem funções arbitrárias na evolução do sistema. Isso é uma indicação que ambos os vínculos são de segunda classe. É fácil confirmar essa hipótese: basta calcular os parênteses de Poisson de ϕ_1 com ϕ_2 :

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = \{\pi^0(x), \partial_i^y \pi^i(y) + m^2 A_0(y)\} = m^2 \{\pi^0(x), A_0(y)\} = -m^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.188)$$

De fato, ambos os vínculos são de segunda classe:

$$\xi_1 = \pi^0 = 0, \quad \xi_2 = \partial_i \pi^i + m^2 A_0 = 0 \quad (3.189)$$

Para obter os parênteses de Dirac, calculamos a matriz $\Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = (\{\xi_\mu(x), \xi_\nu(y)\})$ que é

$$\Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = m^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.190)$$

A sua inversa $\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y})$, definida por

$$\int d^3 z \Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{z}) \Delta^{\nu\sigma}(\vec{z}, \vec{y}) = \delta_\mu^\sigma \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.191)$$

é dada por

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.192)$$

Podemos agora obter os parênteses de Dirac para duas funções $F(x)$ e $G(y)$ arbitrárias:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D &= \{F(x), G(y)\} - \int d^3 z d^3 z' \{F(x), \xi_\mu(z)\} \Delta^{\mu\nu}(z, z') \{\xi_\nu(z'), G(y)\} \\ &= \{F(x), G(y)\} - \frac{1}{m^2} \int d^3 z d^3 z' \{F(x), \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z)\} \delta(\vec{z} - \vec{z}') \{\pi^0(z'), G(y)\} \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3 z d^3 z' \{F(x), \pi^0(z)\} \delta(\vec{z} - \vec{z}') \{\partial_i^{z'} \pi^i(z') + m^2 A_0(z'), G(y)\} \end{aligned}$$

ou seja

$$\{F(x), G(y)\}_D = \{F(x), G(y)\} - \frac{1}{m^2} \int d^3 z \{F(x), \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z)\} \{\pi^0(z), G(y)\}$$

$$+\frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ F(x), \pi^0(z) \right\} \left\{ \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z), G(y) \right\} \quad (3.193)$$

Vamos calcular os parênteses de Dirac fundamentais:

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), A_\nu(y)\}_D &= \{A^\mu(x), A_\nu(y)\} - \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ A^\mu(x), \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z) \right\} \left\{ \pi^0(z), A_\nu(y) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ A^\mu(x), \pi^0(z) \right\} \left\{ \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z), A_\nu(y) \right\} \\ &= \frac{1}{m^2} \int d^3z \partial_i^z \left\{ A^\mu(x), \pi^i(z) \right\} \delta_\nu^0 \delta(\vec{z} - \vec{y}) + \frac{1}{m^2} \int d^3z \delta_0^\mu \delta(\vec{x} - \vec{z}) \partial_i^z \left\{ \pi^i(z), A_\nu(y) \right\} \\ &= \frac{1}{m^2} \partial_i^y \left\{ A^\mu(x), \pi^i(y) \right\} \delta_\nu^0 + \frac{1}{m^2} \partial_i^x \left\{ \pi^i(x), A_\nu(y) \right\} \delta_0^\mu \\ &= \frac{1}{m^2} \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_\nu^0 \eta^{\mu i} - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_0^\mu \delta_\nu^i \\ &= \frac{1}{m^2} \partial_y^\mu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_\nu^0 - \frac{1}{m^2} \partial_\nu^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_0^\mu \end{aligned} \quad (3.194)$$

Escrevendo explicitamente, temos

$$\{A^i(x), A_j(y)\}_D = 0$$

$$\{A^i(x), A_0(y)\}_D = \frac{1}{m^2} \partial_y^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.195)$$

Como já vimos, os parênteses de Dirac de um vínculo com qualquer variável dinâmica é igual a zero. Por esse motivo, não é necessário calcular o parênteses de Dirac de π^0 , pois este dará sempre zero, já que $\pi^0 = 0$ é um vínculo da teoria. Logo

$$\begin{aligned} \{\pi^i(x), \pi_j(y)\}_D &= \{\pi^i(x), \pi_j(y)\} - \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ \pi^i(x), \partial_k^z \pi^k(z) + m^2 A_0(z) \right\} \left\{ \pi^0(z), \pi_j(y) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ \pi^i(x), \pi^0(z) \right\} \left\{ \partial_k^z \pi^k(z) + m^2 A_0(z), \pi_j(y) \right\} \end{aligned} \quad (3.196)$$

Como $\{\pi^i(x), \pi_j(y)\} = \{\pi^i(x), \pi^0(z)\} = \{\pi^0(z), \pi_j(y)\} = 0$, Temos

$$\{\pi^i(x), \pi_j(y)\}_D = 0 \quad (3.197)$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), \pi_j(y)\}_D &= \{A^\mu(x), \pi_j(y)\}_{\delta_i^\mu \delta(\vec{x} - \vec{y})} - \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ A^\mu(x), \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z) \right\} \left\{ \pi^0(z), \pi_j(y) \right\}_0 \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3z \left\{ A^\mu(x), \pi^0(z) \right\} \left\{ \partial_i^z \pi^i(z) + m^2 A_0(z), \pi_j(y) \right\}_0 = \delta_j^\mu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.198)$$

Ou, explicitamente,

$$\{A^0(x), \pi_j(y)\}_D = 0$$

$$\{A^i(x), \pi_j(y)\}_D = \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.199)$$

Podemos observar que A^i e π_j continuam sendo pares conjugados. No entanto, A_0 não é mais independente de π_i .

Agora que construímos os parênteses de Dirac, podemos igualar todos os vínculos igual a zero, mesmo antes de efetuar os parênteses deles com outras variáveis dinâmicas. Por isso, a Hamiltoniana total pode, a partir de agora, ser considerada simplesmente a seguinte:

$$H_T = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right) \quad (3.200)$$

A quantização canônica segue diretamente: Trocamos as variáveis dinâmicas por operadores e os parênteses de Dirac por Comutadores:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow \hat{A}_\mu(x), \quad \pi_i(x) \rightarrow \hat{\pi}_i(x) \\ \hat{H}_T &= \int d^3x \left(\frac{1}{4} \hat{F}^{ij} \hat{F}_{ij} - \frac{1}{2} \hat{\pi}^i \hat{\pi}_i - \frac{m^2}{2} \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu \right) \\ [\hat{A}^i(x), \hat{A}_j(y)]_D &= 0, \quad [\hat{\pi}^i(x), \hat{\pi}_j(y)]_D = 0, \quad [\hat{A}^0(x), \hat{\pi}_j(y)]_D = 0 \\ [\hat{A}^i(x), \hat{A}_0(y)]_D &= \frac{i}{m^2} \partial_y^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad [\hat{A}^i(x), \hat{\pi}_j(y)]_D = i \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.201)$$

Por fim, vamos calcular o número de graus de liberdade que a teoria possui. De acordo com a prescrição da seção 3.4, o número de graus de liberdade é dado por

$$\frac{1}{2} 8 - \frac{1}{2} 2 = 3$$

3.5.4 - Campo Eletromagnético: Agora que já vimos em detalhes a quantização do campo de Proca, vamos ver o que acontece quando trabalhamos com massa $m = 0$. Nesse caso, obtemos a Lagrangeana de Maxwell, que descreve o campo eletromagnético na ausência de cargas e correntes. Muitas das contas serão semelhantes ao modelo de Proca, por isso as contas que eu já foram feitas serão simplesmente apresentadas com o resultado final.

A densidade Lagrangeana que descreve os campos eletromagnéticos sem fonte é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.202)$$

Os momentos canonicamente conjugados são dados por

$$\pi^\alpha = F^{\alpha 0} \quad (3.203)$$

Temos o vínculo primário

$$\phi_1 = \pi^0 = 0 \quad (3.204)$$

e a Hamiltoniana total

$$H_T = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i - A_0 \partial_i \pi^i + \lambda \pi^0 \right) \quad (3.205)$$

Os parênteses de Poisson canônicos são

$$\{A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\} = \delta_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{A^\mu, A_\nu\} = \{\pi^\mu, \pi_\nu\} = 0 \quad (3.206)$$

Utilizamos a condição de consistência para procurar novos vínculos ou determinar λ . Por razões óbvias, encontraremos o mesmo vínculo que encontramos no modelo de Proca, mas agora com $m = 0$:

$$\phi_2 = \partial_i \pi^i = 0 \quad (3.207)$$

Curiosidade: note que esta é a lei de Gauss, já que $\pi^i = E^i$ [6]

Aplicamos agora a condição de consistência para o vínculo secundário $\phi_2 = 0$ e não encontramos nenhuma informação nova ⁷. Note que, diferentemente do modelo de Proca, não conseguimos determinar o multiplicador de Lagrange λ . Isso indica que temos vínculos de primeira classe na teoria. Os parênteses de Poisson entre os vínculos confirmam isso:

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = \partial_i^y \{ \pi^0(x), \pi^i(y) \} = 0 \quad (3.208)$$

Utilizando nossa nomenclatura, vem que $\gamma_1 = \pi^0 = 0$ e $\gamma_2 = \partial_i \pi^i = 0$. Esses vínculos serão os geradores de transformações de calibre, da seguinte maneira: Seja $F(x)$ uma variável dinâmica da teoria. A transformação de calibre gerada por γ_1 e γ_2 é dada por

$$\delta F(x) = \int d^3y \left(\epsilon_1(y) \{F(x), \pi^0(y)\} + \epsilon_2(y) \{F(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} \right) \quad (3.209)$$

Vamos ver em particular, como são as transformações de calibre dos campos A_μ π_μ :

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= \int d^3y \left(\epsilon_1(y) \{A_\mu(x), \pi^0(y)\} + \epsilon_2(y) \partial_i^y \{A_\mu(x), \pi^i(y)\} \right) \\ &= \int d^3y \left(\epsilon_1(y) \delta_\mu^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \epsilon_2(y) \delta_\mu^i \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \right) \\ &= \delta_\mu^0 \epsilon_1(x) - \delta_\mu^i \partial_i^x \epsilon_2 \end{aligned}$$

$$\delta \pi_\mu(x) = \int d^3y \left(\epsilon_1(y) \{ \pi_\mu(x), \pi^0(y) \} + \epsilon_2(y) \partial_i^y \{ \pi_\mu(x), \pi^i(y) \} \right) = 0 \quad (3.210)$$

De fundamental importância são as transformações de calibre que deixam a ação invariante. Essa condição implica em relações nos coeficientes ϵ_1 e ϵ_2 , de forma que somente aqueles coeficientes que

⁷ Isso é fácil de ver, observando a mesma condição de consistência já realizada no modelo de Proca. Lá, todos os termos tinham como coeficiente a massa m . Portanto, aqui, encontraremos simplesmente a identidade $0=0$

obedecem essas relações geram transformações de calibre que deixam a ação invariante. Para obter essas relações, utilizamos o formalismo descrito na seção 3.2. Assim

$$\{H_c, \gamma_1(x)\} = \{H_c, \pi^0(x)\} = -\partial_i^x \pi^i(x) = (-1)\gamma_2$$

$$\{H_c, \gamma_2(x)\} = \{H_c, \partial_i^x \pi^i(x)\} = 0 \quad (3.211)$$

de forma que

$$D_1 = -1, D_2 = 0, \quad (3.212)$$

Além disso

$$\{\phi_1(x), \gamma_1(y)\} = \{\pi^0(x), \pi^0(y)\} = 0$$

$$\{\phi_1(x), \gamma_2(y)\} = \{\pi^0(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} = 0 \quad (3.213)$$

de maneira que

$$D_{11} = D_{12} = 0 \quad (3.214)$$

Dessa maneira, a relação entre os coeficientes é dada por

$$\epsilon_2 = \epsilon_1(D_1 + \eta^1 D_{11}) + \epsilon_2(D_2 + \eta^1 D_{12}) = -\epsilon_1 \quad (3.215)$$

Assim, considerando $\epsilon_2 = \epsilon$ um parâmetro arbitrário, devemos ter $\epsilon_1 = -\dot{\epsilon}$. Podemos agora substituir esse resultado nas transformações de calibre e obter

$$\delta F(x) = \int d^3y \left(-\dot{\epsilon}(y) \{F(x), \pi^0(y)\} + \epsilon(y) \{F(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} \right) \quad (3.216)$$

em particular

$$\delta A_\mu(x) = -\delta_\mu^0 \dot{\epsilon}(x) - \delta_\mu^i \partial_i^x \epsilon \quad (3.217)$$

mas $\dot{\epsilon}(x) = \partial_0 \epsilon$, de forma que

$$\delta A_\mu(x) = -\delta_\mu^0 \partial_0 \epsilon(x) - \delta_\mu^i \partial_i^x \epsilon = -\partial_\mu \epsilon(x)$$

ou

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \epsilon(x) \quad (3.218)$$

que é a transformação de calibre já conhecida da teoria eletromagnética

Com o objetivo de quantizar a teoria eletromagnética, precisamos introduzir as condições de calibre. Existem várias possibilidades, e aqui escolhemos trabalhar com a condição conhecida como Calibre de Radiação, definido por

$$\phi_3 = A_0 = 0$$

$$\phi_4 = \partial_i A^i = 0 \quad (3.219)$$

A primeira coisa a ser feita é verificar se o calibre de radiação satisfaz os critérios estabelecidos na seção 3.3. Primeiramente, verificaremos se o conjunto $(\gamma_1, \gamma_2, \phi_3, \phi_4)$ é um conjunto de segunda classe. Para verificar isso, devemos calcular os parênteses de Poisson entre os vínculos:

$$\begin{aligned}
\{\phi_1(x), \phi_3(y)\} &= \{\pi^0(x), A^0(y)\} = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}') \\
\{\phi_1(x), \phi_4(y)\} &= \{\pi^0(x), \partial_i^y A^i(y)\} = \partial_i^y \{\pi^0(x), A^i(y)\} = 0 \\
\{\phi_2(x), \phi_3(y)\} &= \{\partial_i^x \pi^i(x), A_0(y)\} = \partial_i^x \{\pi^i(x), A_0(y)\} = 0 \\
\{\phi_2(x), \phi_4(y)\} &= \{\partial_i^x \pi^i(x), \partial_j^y A^j(y)\} = \partial_i^x \partial_j^y \underbrace{\{\pi^i(x), A^j(y)\}}_{\delta_j^i \delta(\vec{x}-\vec{y})} = \partial_x^i \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{\phi_3(x), \phi_4(y)\} &= \{A_0(x), \partial_i^y A^i(y)\} = \partial_i^y \{A_0(x), A^i(y)\} = 0
\end{aligned} \tag{3.220}$$

Cada vínculo possui parênteses de Poisson não nulo com pelo menos um vínculo, configurando um sistema de segunda classe.

Em segundo lugar, precisamos mostrar que a condição de calibre pode sempre ser atingido por meio de uma transformação de calibre. Para esses fins, supomos que (A_0, A_i) não satisfaz (3.219), e façamos a transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \int dt A_0(x_0, \vec{x}) \tag{3.221}$$

para obter

$$A'_0 = 0$$

$$A'_i = A_i - \partial_i \int dt A_0(x_0, \vec{x}) \tag{3.222}$$

Como A'_i não satisfaz a (3.219), vamos fazer outra transformação de calibre

$$A'_\mu \rightarrow A''_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \int d^3z \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{z}|} \frac{\partial}{\partial z^i} A'_i(x_0, \vec{z}) \tag{3.223}$$

Neste calibre,

$$A''_0 = 0 \quad e \quad \partial_i A''^i = 0 \tag{3.224}$$

que é o resultado que queremos. Logo, o calibre de radiação sempre pode ser atingido

Em terceiro lugar, temos que garantir que as condições de calibre devem ser preservadas pela evolução dinâmica do sistema, isso é, devemos aplicar a condição de consistência para esses novos vínculos. Temos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_3(x) &= \{A_0(x), H_T\} = 0 \\
\int d^3y \{A_0(x), \lambda(y) \pi^0(y)\} &= \int d^3y \lambda(y) \{A_0(x), \pi^0(y)\} = \lambda(x) = 0 \\
\dot{\phi}_4(x) &= \{\partial_i^x A^i(x), H_T\} = 0
\end{aligned}$$

$$\int d^3y \left(\left\{ \partial_i^x A^i(x), -\frac{1}{2} \pi_j(y) \pi^j(y) \right\} + \left\{ \partial_i^x A^i(x), -A_0(y) \partial_j^y \pi^j(y) \right\} \right) = 0$$

$$-\partial_i^x \int d^3y \pi^j(y) \left\{ A^i(x), \pi_j(y) \right\} - \partial_i^x \int d^3y A_0(y) \partial_j^y \left\{ A^i(x), \pi_j(y) \right\} = 0$$

$$-\partial_i^x \pi^i(x) + \partial_i^x \partial_x^i A_0(x) = -\phi_2(x) + \partial_i^x \partial_x^i \phi_3(x) = 0 \quad (3.225)$$

Em palavras, a condição de consistência de $\phi_3 = 0$ determina o multiplicador de Lagrange λ , enquanto que a condição para ϕ_4 é identicamente satisfeita.

Por último, devemos verificar que as condições de calibre não destroem a invariância de Poincaré da teoria. Aparentemente, essa condição não é satisfeita, pois as condições de calibre não são covariantes. Na realidade, o que estamos perdendo é a covariância manifesta, que podemos recuperar por meios de transformações de Poincaré. Por outro lado, é suficiente verificar se a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita, a fim de constatar que, embora tenhamos partido de dados não covariantes, o resultado final é de fato, covariante. Considere então os geradores [50]

$$P^0 = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right)$$

$$P^i = \int d^3x x \pi_k (\partial^i A^k)$$

$$M^{0i} = x^0 P^i - \int d^3x x^i \left(\frac{1}{2} \pi^j \pi^j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right)$$

$$M^{ij} = \int d^3x \left[(\pi^j A^i - \pi^i A^j) - \pi^k (x^i \partial^j - x^j \partial^i) A_k \right] \quad (3.226)$$

Um cálculo (bastante) longo, mas direto, mostra que os geradores acima satisfazem a álgebra do grupo de Poincaré no sentido dos parênteses de Dirac:

$$\{P^\mu, P^\nu\}_D = 0$$

$$\{M^{\alpha\beta}, P^\mu\}_D = \eta^{\mu\alpha} P^\beta - \eta^{\mu\beta} P^\alpha$$

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\}_D = -\eta^{\nu\beta} M^{\alpha\mu} + \eta^{\mu\beta} M^{\alpha\nu} - \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + \eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (3.227)$$

Agora precisamos calcular os parênteses de Dirac. A matriz Δ é dada por

$$\Delta_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_i^y \partial_x^i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_i^y \partial_x^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.228)$$

É fácil ver que a forma da matriz inversa é

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G(\vec{x}, \vec{y}) \\ -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G(\vec{x}, \vec{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.229)$$

Mas qual é função $G(\vec{x}, \vec{y})$? Como $\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y})$ é a inversa de $\Delta_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y})$, sabemos que elas obedecem a relação

$$\int d^3z \Delta_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{z}) \Delta^{\nu\rho}(\vec{z}, \vec{y}) = \delta_{\mu}^{\rho} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.230)$$

Escolhendo $\mu = 2$ e $\rho = 4$, obtemos

$$-\partial_i^x \int d^3z \partial_z^i \delta(\vec{x} - \vec{z}) G(\vec{z}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.231)$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\partial_i^x \int d^3z \partial_z^i G(\vec{z}, \vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{z}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.232)$$

ou seja

$$\partial_i^x \partial_x^i G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.233)$$

Vemos que $G(\vec{x}, \vec{y})$ é exatamente a função de Green do Operador Laplaciano $\partial_i^x \partial_x^i$ [31]

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.234)$$

de forma que a inversa é dada por

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \\ -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.235)$$

Agora, calculamos os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D &= \{F(x), G(y)\} - \int d^3z d^3z' \{F(x), \pi^0(z)\} \delta(\vec{z} - \vec{z}') \{A^0(z'), G(y)\} \\ &- \int d^3z d^3z' \{F(x), \partial_i^z \pi^i(z)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \{\partial_k^{z'} A^k(z'), G(y)\} + \int d^3z d^3z' \{F(x), A^0(z)\} \delta(\vec{z} - \vec{z}') \{\pi^0(z'), G(y)\} \\ &+ \int d^3z d^3z' \{F(x), \partial_i^z A^i(z)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \{\partial_k^{z'} \pi^k(z'), G(y)\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D &= \{F(x), G(y)\} - \int d^3z \{F(x), \pi^0(z)\} \{A^0(z), G(y)\} \\ &- \int d^3z d^3z' \partial_i^z \{F(x), \pi^i(z)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{A^k(z'), G(y)\} + \int d^3z \{A^0(z), F(x)\} \{G(y), \pi^0(z)\} \\ &+ \int d^3z d^3z' \partial_i^z \{A^i(z), F(x)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{G(y), \pi^k(z')\} \end{aligned} \quad (3.236)$$

Agora podemos obter os parênteses de Dirac Fundamentais ⁸

$$I) \left\{ A^i(x), A_j(y) \right\}_D = \left\{ A^i(x), A_j(y) \right\} - \int d^3z \left\{ A^i(x), \pi^0(z) \right\} \left\{ A^0(z), A_j(y) \right\}$$

⁸ Com o mesmo raciocínio utilizado no modelo de Proca, não é necessário calcular os parênteses de Dirac de π^0 e de A^0

$$\begin{aligned}
& - \int d^3 z d^3 z' \partial_k^z \{A^i(x), \pi^k(z)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{A^k(z'), A_j(y)\} + \int d^3 z \{A^0(z), A^i(x)\} \{A_j(y), \pi^0(z)\} \\
& \quad + \int d^3 z d^3 z' \partial_k^z \{A^k(z), A^i(x)\} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{A_j(y), \pi^k(z')\} = 0 \tag{3.237}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& II) \quad \{ \pi^i(x), \pi_j(y) \}_D = \{ \pi^i(x), \pi_j(y) \} - \int d^3 z \{ \pi^i(x), \pi^0(z) \} \{ A^0(z), \pi_j(y) \} \\
& - \int d^3 z d^3 z' \partial_i^z \{ \pi^i(x), \pi^i(z) \} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{ A^k(z'), \pi_j(y) \} + \int d^3 z \{ A^0(z), \pi^i(x) \} \{ \pi_j(y), \pi^0(z) \} \\
& \quad + \int d^3 z d^3 z' \partial_k^z \{ A^k(z), \pi^i(x) \} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{ \pi_j(y), \pi^k(z') \} = 0 \tag{3.238}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& III) \quad \{ A^i(x), \pi_j(y) \}_D = \{ A^i(x), \pi(y) \} - \int d^3 z \{ A^i(x), \pi^0(z) \} \{ A^0(z), \pi(y) \} \\
& \quad \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
& - \int d^3 z d^3 z' \partial_i^z \{ A^i(x), \pi^i(z) \} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{ A^k(z'), \pi(y) \} + \int d^3 z \{ A^0(z), A^i(x) \} \{ \pi(y), \pi^0(z) \} \\
& \quad + \int d^3 z d^3 z' \partial_i^z \{ A^i(z), A^i(x) \} \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_k^{z'} \{ \pi(y), \pi^k(z') \} \tag{3.239}
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\{ A^i(x), \pi_j(y) \}_D &= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \delta_k^i \int d^3 z d^3 z' \partial_z^k \delta(\vec{x} - \vec{z}) \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} \partial_i^{z'} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \delta_k^i \int d^3 z \partial_z^k \delta(\vec{x} - \vec{y}) \partial_i^y \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{y}'|} \\
&= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_x^i \partial_j^y \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} \tag{3.240}
\end{aligned}$$

Após a fixação de calibre, todos os vínculos são de segunda classe, de forma que podemos igualá-los a zero mesmo antes de calcular os parênteses de Dirac. A Hamiltoniana toma a forma

$$H_T = \int d^3 x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i \right) \tag{3.241}$$

A quantização canônica é imediata:

$$A_i(x) \rightarrow \hat{A}_i(x), \quad \pi_i(x) \rightarrow \hat{\pi}_i(x)$$

$$\hat{H}_T = \int d^3 x \left(\frac{1}{4} \hat{F}^{ij} \hat{F}_{ij} - \frac{1}{2} \hat{\pi}^i \hat{\pi}_i \right)$$

$$[\hat{A}^i(x), \hat{A}_j(y)] = 0, \quad [\hat{\pi}^i(x), \hat{\pi}_j(y)] = 0$$

$$[\hat{A}^i(x), \hat{\pi}_j(y)] = \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_x^i \partial_j^y \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}'|} \tag{3.242}$$

O número de graus de liberdade é dada por:

$$\frac{1}{2}8 - 2 = 2$$

Note que interessante: No modelo de Proca, o número de graus de liberdade era igual a 3, enquanto que o fóton possui apenas 2 graus de liberdade. O que significa isso?

Para entender o significado por trás desses números, primeiro temos que definir a expressão “número de graus de liberdade”. A definição mais comum na literatura indica que o número de graus de liberdade de um sistema é o número de variáveis necessárias para determinar o estado de um sistema físico num dado instante de tempo. Na Mecânica Clássica, essas variáveis são denominadas coordenadas generalizadas. Uma partícula pontual pode ser descrita por três coordenadas, se puder se mover livremente pelo espaço tridimensional, por duas coordenadas se seu movimento estiver restrito a uma superfície e por uma única coordenada, se estiver limitada a se mover numa dada curva.

Em teoria quântica de campos, conquanto não podemos falar em translação ao longo de espaços tridimensionais, a definição apresentada continua válida. Nesse contexto, não mais falamos em coordenadas generalizadas, mas em números quânticos (NQ) associados aos campos. E que “números quânticos” seriam esses?. Na Mecânica Quântica, quando estudamos o átomo de hidrogênio sob a perspectiva de uma partícula sem spin se movimentado em torno de um núcleo fixo, descrevemos o sistema por meio de três números quânticos⁹: principal, azimutal e magnético. Eles descrevem a órbita atômica e a caracterização da partícula que nela se encontra. Ademais, o experimento de Stern-Gerlach nos mostrou a necessidade de introduzir um outro número quântico para descrever algumas partículas atômicas: o número de spin. Posteriormente, vários outros NQ foram introduzidos nas teorias físicas, para descreverem outras características, como a cor, em Gluons e Quarks. Atualmente, esses números são tratados no contexto da Teoria de Grupos, sendo associados a grupos como SU(2) e SU(3)[56].

Sabemos da Teoria Quântica que uma partícula massiva de spin s possui $(2s+1)$ configurações. A explicação para esse relação consiste na constatação de que a invariância de Lorentz implica na existência de um sistema referencial no qual a partícula está em repouso, de forma que, exigindo a invariância de rotação nesse referencial, é necessário que existam $(2s+1)$ subestados[57]. Se esses forem os únicos números necessários para descrever o estado da partícula, então, por definição, eles correspondem ao número de graus de liberdade do sistema.

Assim, para o modelo de Proca, temos que o campo de Proca pode ser associado a uma partícula de spin 1, pois

$$2s + 1 = 3 \Rightarrow s = 1$$

Por outro lado, partículas sem massa, como o fóton, não possuem um sistema de referencial no qual

⁹ A nomenclatura mais empregada é (n,l,m)

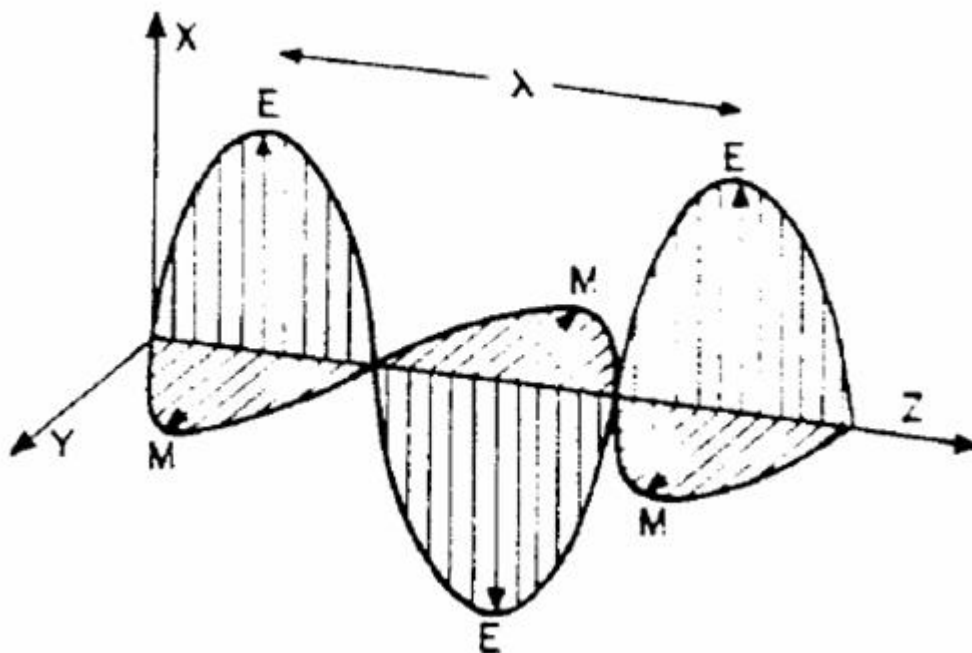


Figura 2 – Campo Eletromagnético sem fontes

estão em repouso: em qualquer sistema de referência, a sua velocidade será igual a velocidade da luz, de forma que o argumento do parágrafo anterior não pode ser aplicado.

Nesse caso, malgrado temos uma partícula de spin 1, o número de graus de liberdade não é dado por $(2s + 1)$. Ela está limitada a duas configurações que costumam ser associadas a helicidade do fóton [56]

Sem prejuízo do disposto nos parágrafos anteriores, podemos dar uma interpretação clássica para essa diferença no número de graus de liberdade. O campo eletromagnético, na ausência de fontes, é caracterizado por ser uma onda plana, com direção de propagação perpendicular a ao plano onde se desenvolve a sua dinâmica, como pode ser visto na fig. 3.2. Essa característica - evolução da dinâmica em um plano - resulta na existência de apenas dois graus de liberdade para o sistema, não obstante a existência de uma infinidade de planos paralelos que produzem a mesma evolução (diferentes escolhas de funções de calibre)

Por outro lado, quando introduzimos um termo de massa na Lagrangeana, para obter o modelo de Proca, quebramos essa simetria existente, de maneira que a evolução temporal do sistema não mais está limitada a planos perpendiculares a direção de propagação, e o sistema possui três graus de liberdade

4 Formalismo Simplético para Sistemas Vinculados

No capítulo 3, discutimos o método Hamiltoniano, proposto por Dirac, para tratar sistemas vinculados. Esse apresenta um método consistente para a revelar todos os vínculos presentes numa teoria com uma Lagrangeana singular; permite a classificação dos vínculos em primeira classe, relacionados com transformações de calibre entre órbitas que representam o mesmo estado físico, e em segunda classe, que podem ser implementados para encontrar o espaço de fase reduzido ; além de substituir os parênteses de Poisson por uma estrutura mais conveniente para tratar as coordenadas e realizar o processo de quantização canônica.

No entanto, como vimos nos exemplos, a obtenção dos parênteses de Dirac envolve o cálculo de um grande número de parênteses de Poisson: dada duas funções F e G , o parênteses de Dirac entre eles é

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \xi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, G\}$$

ou, no caso contínuo,

$$\{F(\vec{x}, t), G(\vec{y}, t)\}_D = \{F(\vec{x}, t), G(\vec{y}, t)\} - \int d^3z d^3z' \{F(\vec{x}, t), \xi_\mu(\vec{z}, t)\} \Delta^{\mu\nu}(\vec{z}, \vec{z}') \{\xi_\nu(\vec{z}', t), G(\vec{y}, t)\}$$

Esse cálculo todo muitas vezes não é conveniente, principalmente quando vamos utilizar métodos numéricos, nos quais é preferencial trabalhar com formalismos matemáticos mais simples, como matrizes. Em razão disso, outros métodos foram desenvolvidos: O método de integrais de caminho[2], o formalismo BRST[2,3], mais recentemente, o formalismo simplético[3,14,17,18,19,20], que discutiremos aqui entre outros

4.1 Formalismo Simplético de Faddeev- Jackiw

Agora direcionamos nosso estudo para sistemas vinculados através do formalismo de Faddeev-Jackiw. Alguns conceitos e resultados do formalismo simplético serão usados aqui. Por isso, recomendamos a leitura do tópico D.2

Iniciamos nossa discussão com a Lagrangeana de primeira ordem

$$L_S^{(0)} = a_a(Q)\dot{Q}^a - V(Q) \quad (4.1)$$

onde o somatório em a vai de 1 a N . As equações de movimento são dadas de forma similar a (D.111)

$$f_{ab}^{(0)}\dot{Q}^b = \frac{\partial V}{\partial Q^a}, \quad a = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Em (D.111), f_{ab} era inversível, de forma que podíamos obter as equações de primeira ordem (D.113). Suponhamos agora que f_{ab} seja singular. Seja $N_1 = N - M$ seu posto. Então existem M

modos-zeros[53]

$$\vec{v}_\alpha(Q), \quad \alpha = 1, \dots, M \quad (4.3)$$

Aplicando-os em (4.2), temos

$$0 = v_\alpha^a f_{ab} \dot{Q}^b = v_\alpha^a \frac{\partial V}{\partial Q^a} \quad (4.4)$$

Temos então os vínculos

$$\phi_\alpha = v_\alpha^a \frac{\partial V}{\partial Q^a} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, M \quad (4.5)$$

O método dos multiplicadores de Lagrange, estudado na seção D.1, prescreve que devemos incorporar os vínculos na Lagrangeana, com auxílio de parâmetros indeterminados λ^α , $\alpha = 1, \dots, M$. Jackiw sugeriu[14] que, em vez disso, utilizemos os vínculos para eliminar o máximo de variáveis, escrevendo-as em função das outras. Nesse caso, teremos N_1 coordenadas independentes e escrevemos

$$L_S^{(1)} = a_{a_1}(Q^{b_1}) \dot{Q}^{a_1} - V(Q^{b_1}), \quad b_1 = 1, \dots, N_1 \quad (4.6)$$

em que o somatório em a_1 vai de 1 a N_1 . Agora precisamos analisar se a matriz $N_1 \times N_1$ $f_{a_1 b_1}^{(1)}$ é singular ou não. No segundo caso, caímos em (D.111), e podemos utilizar o aparato teórico desenvolvido a partir dela. Se for o primeiro caso, repetimos o procedimento: procuramos os modos-zero de $f_{a_1 b_1}^{(1)}$, encontramos os vínculos utilizando a expressão (4.4), utilizamos eles para escrever algumas coordenadas em termos das outras, e verificamos se $f_{a_2 b_2}^{(2)}$ é singular. Esse algoritmo acaba quando:

- i) A matriz $f_{a_1 b_1}^{(L)}$ é inversível, para algum L , ou
- ii) A matriz $f_{a_1 b_1}^{(L)}$ é singular e, para algum L , seus modos-zero não implica em novos vínculos

Note que, quando obtemos o caso ii), o procedimento falha. Isso ocorre porque os vínculos de primeira classe não podem ser utilizados para eliminar algumas variáveis em termos de outras¹, já que os vínculos de primeira classe apenas relacionam estados físicos equivalentes. Eles são geradores de transformações entre conjuntos de coordenadas que representam o mesmo estado físico. Como o formalismo não apresenta uma maneira consistente de identificar quais vínculos são de primeira ou segunda classe, ele só deve ser utilizado para sistemas que sabemos ser de segunda classe². Além disso, nem sempre é fácil utilizar os vínculos para escrever algumas coordenadas em termos de outras.

Esses dois problemas, discutidos no parágrafo anterior, fazem com que esse formalismo, da maneira que foi apresentado aqui, não seja um dos melhores. No entanto, ele possui a sua importância, especialmente histórica, pois foi a primeira tentativa de se usar os vínculos para modificar a estrutura simplética a fim de obter parênteses de Poisson modificados. O modelo foi inspiração para o desenvolvimento do Formalismo Simplético de Barcelos-Neto e Wotzasek e a sua posterior modificação, aqui realizada

¹ Isso só pode ser feito após a introdução de condições de calibre, em que todos os vínculos se tornam de segunda classe (ver seção 3.4)

² Nada impede, é claro, de introduzirmos condições de calibre para transforma-lo em um sistema de segunda classe. No entanto, como o método não permite separar os vínculos em classes, torna-se uma tarefa complicada

Vamos agora estudar alguns exemplos, para compreender melhor as vantagens e desvantagens do formalismo de Faddeev- Jackiw

Exemplo 4.1-1: Considere a Lagrangeana

$$L = \dot{x}\dot{y} - z(x + y)$$

Temos o vínculo $p_z = 0$ e a Hamiltoniana

$$H = p_x p_y + z(x + y)$$

Construímos a Lagrangeana de primeira ordem

$$L_S^{(0)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - V^{(0)} \quad (4.7)$$

com $V^{(0)} = H$. Aplicando o vínculo, temos

$$L_S^{(1)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - V^{(1)} \quad (4.8)$$

sendo $V^{(1)} = H$. Vamos verificar se a matriz $f_{a_1 b_1}^{(1)}$ é singular ou não. Temos

$$Q^{a_1} = (x, y, z, p_x, p_y)$$

$$a_{a_1} = (p_x, p_y, 0, 0, 0) \quad (4.9)$$

de forma que

$$f_{a_1 b_1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

a matriz é singular, com o modo zero $\vec{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, que implica, de acordo com (4.4), no vínculo

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial z} = x + y = 0 \quad (4.11)$$

escrevendo $y = -x$, e inserindo em (4.8) temos

$$L_S^{(2)} = (p_x - p_y)\dot{x} - V^{(2)} \quad (4.12)$$

em que $V^{(2)} = p_x p_y$. Note que, mesmo não utilizando explicitamente um vínculo para eliminar a coordenada z , a Lagrangeana (4.12) não depende dela. Verificamos agora se $f_{a_2 b_2}^{(2)}$ possui modos-zero. Logo

$$Q^{a_2} = (x, p_x, p_y)$$

$$a_{a_2} = (p_x - p_y, 0, 0) \quad (4.13)$$

tal que

$$f_{a_2 b_2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz é singular, e possui o modo zero $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$, que implica no vínculo

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial p_x} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial p_y} = p_x + p_y = 0 \quad (4.14)$$

Escrevendo $p_y = -p_x$, vem

$$L_S^{(4)} = 2p_x \dot{x} + p_x^2 \quad (4.15)$$

Temos agora

$$Q^{a_3} = (x, p_x)$$

$$a_{a_1} = (2p_x, 0) \quad (4.16)$$

de maneira que

$$f_{a_3 b_3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Essa matriz é não singular, e sua inversa é dada por

$$f^{a_3 b_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

obtemos então os parênteses

$$\{x, p_x\} = f^{12} = 1/2 \quad (4.19)$$

que podem ser utilizados para escrever os outros parênteses

$$\{x, y\} = -\{x, x\} = 0$$

$$\{x, p_y\} = -\{x, p_x\} = -1/2$$

$$\{y, p_x\} = -\{x, p_x\} = -1/2$$

$$\{y, p_y\} = (-1)^2 \{x, p_x\} = 1/2$$

$$\{p_x, p_y\} = -\{p_x, p_x\} = 0 \quad (4.20)$$

Exemplo 4.1-2: Considere a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + y \dot{x} + \frac{1}{2} (x - y)^2$$

Temos o vínculo $p_y = 0$ e a Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2}{2} - yp_x - \frac{x^2}{2} + xy$$

Podemos construir a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(0)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - V^{(0)} \quad (4.21)$$

com $V^{(0)} = H$. Aplicando o vínculo $p_y = 0$, temos

$$L_S^{(1)} = p_x \dot{x} - V^{(1)} \quad (4.22)$$

sendo $V^{(1)} = H$. Temos agora

$$Q^{a_2} = (x, y, p_x)$$

$$a_{a_1} = (p_x, 0, 0) \quad (4.23)$$

e a matriz $f_{a_1 b_1}^{(1)}$ é

$$f^{a_1 b_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

que possui o modo-zero $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$. Utilizando (4.4), obtemos o vínculo

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} = p_x - x = 0 \quad (4.25)$$

Escrevendo $p_x = x$, e inserindo em (4.22), temos

$$L_S^{(2)} = x \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2 \quad (4.26)$$

Note que a Lagrangeana resultante é uma derivada total de um termo, de forma que ela é equivalente a uma Lagrangeana nula. Fica claro que o procedimento apresenta falhas intrínsecas na presença de vínculos de primeira classe.

4.2 Formalismo Simplético Modificado

No capítulo 3, estudamos o formalismo de Dirac para sistemas vinculados. Naquele procedimento, mantivemos, até o fim, o mesmo número de coordenadas do espaço de fase inicial. Já na seção anterior, vimos um outro formalismo, no qual o espaço das coordenadas é reduzido a cada passo do algoritmo. Nessa seção, apresentaremos um terceiro procedimento, inspirado no procedimento de Faddeev-Jackiw, mas que aumenta o número de variáveis em cada passo.

Originalmente, o método foi proposto por Barcelos-Neto e Wotzasek em [17]. Nesse artigo, a proposta era modificar a estrutura simplética f_{ab} introduzindo multiplicadores de Lagrange na

parte cinética da Lagrangeana, em contraposição ao método de Dirac, no qual os multiplicadores são inseridos na parte potencial.

Alguns problemas, porém, podem ser apontados. Previamente, precisamos ressaltar que a prescrição é desenvolvida para Lagrangeanas de primeira ordem. No entanto, isso não provoca limitações substanciais, já que sempre é possível transformar uma Lagrangiana de segunda ordem (que são recorrentes nas teorias) em uma de primeira ordem, através de uma substituição do espaço de configurações por um espaço estendido (geralmente o espaço de fase), introduzindo variáveis extras³. O mais comum, embora não seja necessário, é que essas variáveis extras sejam os momentos canonicamente conjugados das variáveis originais. Quando isso ocorre, isto é, quando utilizamos os momentos como variáveis extras, realizamos o seguinte procedimento: i) calculamos os momentos canonicamente conjugados, ii) realizamos uma transformação de Legendre, de (q, \dot{q}) para (q, p) e iii) definimos uma nova Lagrangeana, nesse novo espaço, de forma que as variáveis (q, p) apareçam como coordenadas numa Lagrangiana de primeira ordem⁴. Caso a Lagrangiana original (definida no espaço de configurações) seja singular, como definido na seção 2.2, a transformação de Legendre não será bem definida, como já vimos na seção 3.1, ensejando a introdução de multiplicadores de Lagrange. Estes, por sua vez, aparecerão na parte potencial da nova Lagrangeana.

Em [17], os autores, com o intuito de deformar a estrutura simplética f_{ab} , introduzem uma dinâmica para os multiplicadores de Lagrange, eliminando-os da parte potencial e inserindo-os na parte cinética, da seguinte maneira:

$$L_s = p\dot{q} - H_c - u^r \phi_r \xrightarrow{u^r \rightarrow -\dot{u}^r} L_s = p\dot{q} + \dot{u}^r \phi_r - H_c$$

Portanto, ousamos discordar dessa técnica, pelas razões a seguir expostas:

1) Não é possível fazer uma identificação, em cada etapa do processo, com o método de Dirac. De fato, o procedimento de Dirac é baseado na construção dos parênteses que substituem os de Poisson, sendo aquele definido em função deste e dos multiplicadores de Lagrange associado aos vínculos primários de segunda classe, e na manutenção dos multiplicadores associados aos vínculos primários de primeira classe, até que se faça a fixação de calibre, se for o caso. Se esses multiplicadores são substituídos por outros, que agora apresentam uma dinâmica, resta claro que os procedimentos não serão equivalentes

2) Tratando, ainda, dos multiplicadores de Lagrange, é mister ressaltar que eles são introduzidos na teoria com o intuito de garantir que a relação $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$ seja, de fato, uma transformação de coordenadas bem definida⁵. Qualquer procedimento, realizado posteriormente a essa etapa, deve respeitar essa operação, sob risco de incorrer em inconsistências

3) O procedimento dá origem a um número de vínculo, ao final do processo, menor do que

³ ver D. 90

⁴ ver D.96

⁵ ver (3.34)

aquele obtido no procedimento de Dirac, levando-os a denominar de “vínculos verdadeiros” apenas aqueles que são revelados em seu formalismo. De fato, o procedimento ocorre de maneira que, no fim, so restam vínculos secundários de primeira classe. Os vínculos de segunda classe existentes são, ao longo do processo, incorporados na estrutura simplética, de forma que é automático o processo de iguala-los fortemente igual a zero (Em consonância com o método de Dirac). No entanto, os vínculos primários de primeira classe simplesmente desaparecem, de forma que, em algum momento do processo, houve uma fixação de calibre não intencional. Se a teoria apresentar somente vínculos primários de segunda classe, não haverá inconsistências, já que os vínculos de segunda classe são igualados fortemente a zero no fim do procedimento. No entanto, se existirem vínculos primários de primeira classe, teremos dois problemas: i) como os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre (todos, como veremos na seção 4.3), caso tenhamos interesse em encontrar as simetrias da teoria ficaremos limitados às simetrias geradas pelos vínculos secundários de segunda classe; ii) Caso estejamos interessados em uma forma particular de fixação de calibre, não poderemos fazê-la, já que o processo já realizou esse procedimento de forma automática

Com base nos argumentos apresentados acima, propomos a modificação do método de Barcelos-Neto e Wotzasek, com o intuito de eliminar alguns desses problemas. Nossa proposta é **manter** os vínculos primários na parte potencial e, simultaneamente, introduzi-los também na parte cinética. Isso será feito por meio da adição de uma derivada total à Lagrangeana e da implementação da condição de consistência. É importante ressaltar que esse procedimento (adicionar derivada total à Lagrangeana) não implica em alteração da dinâmica do sistema, **exceto** em teorias que apresentam problemas de borda (*boundary problems*), como é comum ocorrer na teoria de cordas.

Levando em conta os pontos apresentados nos parágrafos anteriores, podemos concluir que, em teorias nas quais seja necessário transformar uma Lagrangeana de segunda ordem em uma Lagrangeana de primeira ordem, e dessa transformação resultarem vínculos primários de primeira classe, não é possível utilizar o método de Barcelos-Neto e Wotzasek, **caso** estejamos interessados em encontrar simetrias ou fixar o calibre de uma maneira particular, sendo método apresentado a seguir mais aconselhável, sem prejuízo da utilização de outros métodos, como o de Dirac. Por outro lado, caso estejamos trabalhando com teorias em que haja problemas de borda, não é possível utilizar o método aqui exposto, de forma que o leitor deve investigar a possibilidade de se utilizar o método de Barcelos-Neto e Wotzasek (caso não incorra na vedação já exposta), ou outro método.

Considere então a Lagrangeana simplética⁶, análoga a (D.96), mas adaptada para o caso vinculado (ver seção 3.1)

$$L_S^{(0)} = p_i \dot{q}^i - H_T = p_i \dot{q}^i - H_c - u^r \phi_r \quad (4.27)$$

onde o somatório em i vai de 1 até N , e em r vai de 1 até M , como em (3.27).

O formalismo é iniciado considerando q^i , p^i e os multiplicadores de Lagrange u^r como

⁶ Como pode ser visto na seção D.2, sempre é possível fazer uma transformação de Darboux na maior projeção não singular de f_{ab} , de forma que é suficiente considerar esse caso particular

coordenadas. Nesse caso

$$Q^a = (\vec{q}_{1 \times N}, \vec{p}_{1 \times N}, \vec{u}_{1 \times M})$$

$$a_a = (\vec{p}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times M}) \quad (4.28)$$

Logo, a matriz f_{ab} é dada por

$$f_{ab}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Essa matriz é singular e possui os modos-zero

$$\vec{v}(r) = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \hat{n}(r)_{1 \times M}) \quad (4.30)$$

onde $\hat{n}(r)$ é um vetor linha com 1 na r -ésima coluna e zero em todas as outras entradas. Esses modos-zero podem ser utilizados para obter vínculo, como em (4.4):

$$0 \approx \frac{\partial H_T}{\partial u^r} = \phi_r, \quad r = 1, \dots, M \quad (4.31)$$

Obtemos os mesmos vínculos que já tínhamos. Vamos mostrar agora como podemos revelar possíveis novos vínculos, assim como fizemos no procedimento de Dirac.

Como sabemos, podemos adicionar uma derivada total no tempo à Lagrangeana sem alterar as equações de movimento⁷. Seja então

$$L_S^{(0)} = p_i \dot{q}^i - H_c - u^r \phi_r + \frac{d}{dt}(\phi_r \epsilon^r) = p_i \dot{q}^i - H_c - u^r \phi_r + \dot{\phi}_r \epsilon^r + \phi_r \dot{\epsilon}^r \quad (4.32)$$

Em que ϵ^r são coordenadas extras. De forma análoga ao formalismo de Dirac, exigimos, para que a teoria seja coerente, a condição de consistência $\dot{\phi}_r = 0$. Temos então

$$L_S^{(1)} = p_i \dot{q}^i + \phi_r \dot{\epsilon}^r - H_c - u^r \phi_r \quad (4.33)$$

Dessa forma, temos

$$Q^a = (\vec{q}_{1 \times N}, \vec{p}_{1 \times N}, \vec{u}_{1 \times M}, \vec{\epsilon}_{1 \times M})$$

$$a_a = (\vec{p}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times M}, \vec{\phi}_{1 \times M}) \quad (4.34)$$

A matriz $f_{ab}^{(1)}$ toma a forma

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} & \nabla \phi_1^T & \cdots & \nabla \phi_M^T \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \tilde{\nabla} \phi_1^T & \cdots & \tilde{\nabla} \phi_M^T \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} & \vec{0}_{M \times 1}^T & \cdots & \vec{0}_{M \times 1}^T \\ -\nabla \phi_1 & -\tilde{\nabla} \phi_1 & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla \phi_M & -\tilde{\nabla} \phi_M & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

⁷ Desde que não haja problemas de borda, como destacamos na introdução dessa seção

sendo

$$\begin{aligned}\nabla\phi_r &= \left(\frac{\partial\phi_r}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial\phi_r}{\partial q^N}\right) \\ \tilde{\nabla}\phi_r &= \left(\frac{\partial\phi_r}{\partial p^1}, \dots, \frac{\partial\phi_r}{\partial p^N}\right)\end{aligned}\quad (4.36)$$

Agora devemos procurar modos-zero para ver se encontramos novos vínculos. Mas há um detalhe: devemos procurar modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & -\mathbf{I}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times M} \\ \mathbf{I}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{M\times N} & \mathbf{0}_{M\times N} & \mathbf{0}_{M\times M} \\ -\nabla\phi_1 & -\tilde{\nabla}\phi_1 & \vec{0}_{1\times M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\nabla\phi_M & -\tilde{\nabla}\phi_M & \vec{0}_{1\times M} \end{pmatrix}\quad (4.37)$$

e não da matriz (4.35). A razão ficará evidente mais adiante. Por hora, note que os modos zero são

$$\vec{v}_1(r) = (\vec{0}_{1\times N}, \vec{0}_{1\times N}, \hat{n}(r)_{1\times M}, \vec{0}_{1\times M}),$$

$$\vec{v}_2(r) = (-\tilde{\nabla}\phi_{r1\times N}, \nabla\phi_{r1\times N}, \vec{0}_{1\times M}, \hat{e}(r)_{1\times M}), \quad r = 1, \dots, M \quad (4.38)$$

sendo $e(r) = n(r)$. Os primeiros M modos-zero reproduzem os vínculos iniciais. Os M últimos implicam nas relações

$$\begin{aligned}0 &= -\tilde{\nabla}\phi_r \cdot \nabla H_T + \nabla\phi_r \cdot \tilde{\nabla} H_T + \frac{\partial H_T}{\partial \epsilon^r} = \\ &= \frac{\partial\phi_r}{\partial q^i} \frac{\partial H_T}{\partial p_i} - \frac{\partial\phi_r}{\partial p_i} \frac{\partial H_T}{\partial q^i} = \{\phi_r, H_T\}\end{aligned}\quad (4.39)$$

ou

$$\{\phi_r, H_c\} + \lambda^s \{\phi_r, \phi_s\} \approx 0, \quad r = 1, \dots, M \quad (4.40)$$

Note que essa condição é equivalente a (3.39).

Agora podemos entender porque procuramos os modos-zero de (4.37). Se tivéssemos procurado modos zero de (4.35), teríamos encontrado um subespaço de $\{\vec{v}_2(r)\}$. Para ver isso, note que, para $\vec{v}_2(r)$ ser modo-zero de (4.35), é necessário que

$$\{\phi_r, \phi_s\} = 0, \quad s = 1, \dots, M \quad (4.41)$$

Isso resultaria que a condição de consistência não seria aplicada para os vínculos que não satisfizessem (4.41)

Retomamos agora as condições (4.40). Assim como no procedimento de Dirac, podemos obter um dos 3 casos, já descritos na página 23. Isso implica que teremos K' novos vínculos ($K' \leq M$)

$\chi_{k'}$. Incorporamo-os em (4.33) por meio de uma derivada total e novas coordenads $\epsilon_{k'}$, e aplicando a condição de consistência, temos

$$L_S^{(2)} = p_i \dot{q}^i + \phi_{j'} \dot{\epsilon}^{j'} - H_c - u^r \phi_r \quad (4.42)$$

com j' somando de 1 a $J' = M + K'$ e denominamos $\phi_{j'} = (\phi_r, \chi_{k'})$. Dessa forma, temos

$$Q^a = (\vec{q}_{1 \times N}, \vec{p}_{1 \times N}, \vec{u}_{1 \times M}, \vec{\epsilon}_{1 \times J'})$$

$$a_a = (\vec{p}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times M}, \vec{\phi}_{1 \times J'}) \quad (4.43)$$

De maneira que

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} & \nabla \phi_1^T & \cdots & \nabla \phi_{J'}^T \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \tilde{\nabla} \phi_1^T & \cdots & \tilde{\nabla} \phi_{J'}^T \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} & \vec{0}_{M \times 1}^T & \cdots & \vec{0}_{M \times 1}^T \\ -\nabla \phi_1 & -\tilde{\nabla} \phi_1 & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla \phi_{J'} & -\tilde{\nabla} \phi_{J'} & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Procuramos então modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} \\ -\nabla \phi_1 & -\tilde{\nabla} \phi_1 & \vec{0}_{1 \times M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\nabla \phi_{J'} & -\tilde{\nabla} \phi_{J'} & \vec{0}_{1 \times M} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Como antes, os modos-zero são

$$\vec{v}_1(r) = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \hat{n}(r)_{1 \times M}, \vec{0}_{1 \times M}),$$

$$\vec{v}_2(j') = (-\tilde{\nabla} \phi_{j' 1 \times N}, \nabla \phi_{j' 1 \times N}, \vec{0}_{1 \times M}, \hat{\epsilon}(j')_{1 \times J'}), \quad j' = 1, \dots, J' \quad (4.46)$$

o que implica nas condições

$$\{\phi_{j'}, H_c\} + \lambda^s \{\phi_{j'}, \phi_s\} \approx 0, \quad j' = 1, \dots, J' \quad (4.47)$$

Temos então que ver em qual dos 3 casos estamos. A situação final é que, após L repetições, temos J vínculos, que são incorporados na parte cinética da Lagrângiana simplética

$$L_S^{(L)} = p_i \dot{q}^i + \phi_j \dot{\epsilon}^j - H_c - u^r \phi_r \quad (4.48)$$

e a matriz f_{ab}^L é

$$f_{ab}^{(L)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times M} & \nabla \phi_1^T & \cdots & \nabla \phi_J^T \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \tilde{\nabla} \phi_1^T & \cdots & \tilde{\nabla} \phi_J^T \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} & \vec{0}_{M \times 1}^T & \cdots & \vec{0}_{M \times 1}^T \\ -\nabla \phi_1 & -\tilde{\nabla} \phi_1 & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla \phi_J & -\tilde{\nabla} \phi_J & \vec{0}_{1 \times M} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Por construção, os modos-zero da submatriz associada a (4.49) não geram mais vínculos. Logo, utilizamos as relações

$$\{\phi_j, H_c\} + \lambda^s \{\phi_j, \phi_s\} \approx 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (4.50)$$

para determinar os multiplicadores de Lagrange λ^s . Já fizemos isso na seção 3.1, e não repetiremos aqui. Mencionamos apenas duas coisas: i) os vínculos são separados em primeira e segunda classe, denotados por γ_m , $m = 1, \dots, P$ e ξ_μ , $\mu = 1, \dots, S$ respectivamente; ii) somente os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos de segunda classe são determinados, e são dados por (3.66).

Ficamos então com a Lagrangeana simplética⁸

$$L_S^{(L)} = p_i \dot{q}^i + \gamma_m \dot{\epsilon}^m + \xi_\mu \dot{\epsilon}^\mu - H_c - \eta^{a_1} \phi_{a_1} + \phi_{\alpha_1} \Delta^{\alpha_1 \mu} \{\xi_\mu, H_c\} \quad (4.51)$$

De maneira que

$$Q^a = (\vec{q}_{1 \times N}, \vec{p}_{1 \times N}, \vec{\eta}_{1 \times P_1}, \vec{\epsilon}_{1 \times P}, \vec{\epsilon}_{1 \times S})$$

$$a_a = (\vec{p}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times P_1}, \vec{\gamma}_{1 \times P}, \vec{\xi}_{1 \times S}) \quad (4.52)$$

e a matriz f_{ab}^L toma a forma

$$f_{ab}^{(L)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times P_1} & \nabla \gamma_1^T & \cdots & \nabla \gamma_P^T & \nabla \xi_1^T & \cdots & \nabla \xi_S^T \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times P_1} & \tilde{\nabla} \gamma_1^T & \cdots & \tilde{\nabla} \gamma_P^T & \tilde{\nabla} \xi_1^T & \cdots & \tilde{\nabla} \xi_S^T \\ \mathbf{0}_{P_1 \times N} & \mathbf{0}_{P_1 \times N} & \mathbf{0}_{P_1 \times P_1} & \vec{0}_{P_1 \times 1}^T & \cdots & \vec{0}_{P_1 \times 1}^T & \vec{0}_{P_1 \times 1}^T & \cdots & \vec{0}_{P_1 \times 1}^T \\ -\nabla \gamma_1 & -\tilde{\nabla} \gamma_1 & \vec{0}_{1 \times P_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla \gamma_P & -\tilde{\nabla} \gamma_P & \vec{0}_{1 \times P_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\nabla \xi_1 & -\tilde{\nabla} \xi_1 & \vec{0}_{1 \times P_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla \xi_S & -\tilde{\nabla} \xi_S & \vec{0}_{1 \times P_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Agora que não há mais vínculos e já encontramos aqueles multiplicadores de Lagrange que podem ser determinados, vejamos quais modos-zero da submatriz são também modos-zero de (4.53). De fato, eles são apenas

⁸ ver seção 3.2 para a notação

$$\vec{v}_1(a_1) = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \hat{n}(a_1)_{1 \times P_1}, \vec{0}_{1 \times M}), \quad a_1 = 1, \dots, P_1$$

$$\vec{v}_2(m) = (-\tilde{\nabla}\gamma_{m_{1 \times N}}, \nabla\gamma_{m_{1 \times N}}, \vec{0}_{1 \times P_1}, \hat{n}(m)_{1 \times P}), \quad m = 1, \dots, P \quad (4.54)$$

Isso indica que, quando o sistema possui apenas vínculos de segunda classe, a matriz $f_{ab}^{(L)}$ é inversível. Vamos explorar esse caso primeiramente. Nesse caso, ela toma a forma

$$f_{a_{L+1}b_{L+1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & -\mathbf{I}_{N \times N} & \nabla\xi_1^T & \cdots & \nabla\xi_S^T \\ \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \tilde{\nabla}\xi_1^T & \cdots & \tilde{\nabla}\xi_S^T \\ -\nabla\xi_1 & -\tilde{\nabla}\xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nabla\xi_S & -\tilde{\nabla}\xi_S & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

ou

$$f_{a_{L+1}b_{L+1}} = \begin{pmatrix} \omega_{2N \times 2N} & M^T \\ -M & 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

sendo

$$M = \begin{pmatrix} \nabla\xi_1 & \tilde{\nabla}\xi_1 \\ \vdots & \vdots \\ \nabla\xi_S & \tilde{\nabla}\xi_S \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Após um pequeno cálculo, temos que a matriz inversa é dada por[54]

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} - \omega^{-1}M(M^T\omega^{-1}M)^{-1}M^T\omega^{-1} & -\omega^{-1}M(M^T\omega^{-1}M)^{-1} \\ (M^T\omega^{-1}M)^{-1}M^T\omega^{-1} & (M^T\omega^{-1}M)^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Seja então $A(q, p)$ e $B(q, p)$ duas funções arbitrárias. Então, de acordo com (D.124)

$$\{A, B\}^* = \partial_a A f^{ab} \partial_b B = \frac{\partial A}{\partial Q^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial Q^j} - \frac{\partial A}{\partial Q^i} \omega^{ik} M_{k\mu} (M^T \omega^{-1} M)^{\mu\nu} M_{\nu l}^T \omega^{lj} \frac{\partial B}{\partial Q^j} \quad (4.59)$$

Mas, por outro lado,

$$(M^T \omega^{-1} M)_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\mu}{\partial Q^i} \omega^{ij} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial Q^j} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\} = \Delta_{\mu\nu} \quad (4.60)$$

De forma que podemos escrever

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \xi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, B\} = \{A, B\}_D \quad (4.61)$$

Vemos então que obtivemos os parênteses de Dirac.

Caso tenhamos vínculos de primeira classe, temos duas opções: i) introduzir condições de calibre que satisfaçam os critérios estabelecidos na seção 3.3, de forma que o sistema passe a ter somente vínculos de segunda classe ou ii) utiliza-los para encontrar transformações de calibre.

No primeiro caso, não precisamos discutir nada: o processo é idêntico àquela já apresentado na seção 3.3. O segundo caso será discutido em detalhes na próxima seção, quando demonstraremos que todos os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre, provando assim a conjectura de Dirac

4.3 Conjectura de Dirac

Como mencionamos na seção 3.2, Dirac postulou que todos os vínculos de primeira classe seriam geradores de transformação de calibre. Ele se baseou no fato de que $\{\phi_{a_1}, \phi_{b_1}\}$ também são geradores de transformações de calibre, e que a álgebra dos vínculos primários de primeira classe não é fechada, isso é, que

$$\{\phi_{a_1}, \phi_{b_1}\} = C_{a_1 b_1}^m \gamma_m. \quad (4.62)$$

No entanto, ele nunca chegou a demonstrar isso. Para piorar a situação, começaram a surgir contra-exemplos, o que poderia ser uma indicação de que a conjectura de Dirac seria falsa.

Nessa seção, reproduzimos uma demonstração da conjectura de Dirac, encontrada em [3], utilizando o formalismo simplético para isso. Na próxima seção, estudaremos em detalhes um dos contra-exemplos presente literatura e mostramos que, se corretamente interpretado, ele é coerente com a conjectura de Dirac.

Considere inicialmente o princípio da ação

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (4.63)$$

Como pode ser visto no Apêndice D, podemos, equivalentemente, partir da ação

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_T) \quad (4.64)$$

já que o princípio de Hamilton implica nas mesmas equações de movimento para ambas. Por fim, note que podemos também utilizar a ação

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i + \gamma_m \dot{\epsilon}^m + \xi_\mu \dot{\epsilon}^\mu - H_c + \phi_{\alpha_1} \Delta^{\alpha_1 \mu} \{\xi_\mu, H_c\} - \eta^{a_1} \phi_{a_1}) \quad (4.65)$$

baseada na Lagrangeana (4.51), já que as equações obtidas pela diferença entre elas são apenas

$$\dot{\xi}_\mu = 0, \quad \dot{\gamma}_m = 0 \quad (4.66)$$

que são as equações de consistência.

Assim como na seção 4.2, identificamos

$$Q^a = (\vec{q}_{1 \times N}, \vec{p}_{1 \times N}, \vec{\eta}_{1 \times P_1}, \vec{\epsilon}_{1 \times P}, \vec{\epsilon}_{1 \times S})$$

$$a_a = (\vec{p}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times P_1}, \vec{\gamma}_{1 \times P}, \vec{\xi}_{1 \times S}) \quad (4.67)$$

e escrevemos

$$S = \int dt (a_a(Q) \dot{Q}^a - H_T) \quad (4.68)$$

O princípio de Hamilton implica que

$$0 = \delta S = \int dt E_a \delta Q^a \quad (4.69)$$

sendo

$$E_a = f_{ab}\dot{Q}^b - \partial_a H_T \quad (4.70)$$

que se anula na trajetória física. A matriz f_{ab} é dada em (4.53).

Se encontrarmos uma expressão para δQ^a de forma que

$$E_a \delta Q^a = 0 \quad (4.71)$$

então encontramos as transformações de calibre que deixam a ação invariante⁹

Para esses fins, considere os modos-zero (4.54) de f_{ab} . Aplicando os m vetores $\vec{v}_2(m)$ em (4.70), temos

$$v_2^a(m)E_a = -v_2^a(m)\partial_a H_T = \frac{\partial \gamma_m}{\partial p_i} \frac{\partial H_T}{\partial q^i} - \frac{\partial \gamma_m}{\partial q^i} \frac{\partial H_T}{\partial p_i} = \{H_T, \gamma_m\}, \quad m = 1, \dots, P, \quad (4.72)$$

em que os índices a variam de 1 a $2N + P_1 + P + S$, e os índices i variam de 1 a N . Por outro lado, sabemos dos teoremas 1 e 2, localizados na página 24, que

$$\{H_T, \gamma_m\} = C_m^{m'} \gamma_{m'}, \quad (4.73)$$

pois H_T e γ_m são de primeira classe e $\{H_T, \gamma_m\} = 0$, fracamente, pela condição de consistência.

Além disso, do algoritmo desenvolvido na seção 4.2, temos que os vínculos γ_m são originados do produto de $\vec{v}_1(a_1)$, $\vec{v}_2(m)$ com $\partial_a H_T$. Logo

$$\gamma_{m'} = \sum_{a_1=1}^{P_1} A_{m'}(a_1) v_1^a(a_1) E_a + \sum_{m''=1}^P B_{m'}(m'') v_2^a(m'') E_a, \quad m' = 1, \dots, P \quad (4.74)$$

sendo $A_{m'}(a_1)$ e $B_{m'}(m'')$ coeficientes. Inserindo (4.73) e (4.74) em (4.72), obtemos uma expressão da forma

$$\left(\sum_{m'=1}^P \left[\sum_{a_1=1}^{P_1} h_{mm'}(a_1) v_1^a(a_1) + \sum_{m''=1}^P g_{mm'}(m'') v_2^a(m'') \right] \right) E_a = 0, \quad m = 1, \dots, P \quad (4.75)$$

sendo $h_{mm'}(a_1)$ e $g_{mm'}(m'')$ coeficientes resultantes da combinação de $C_m^{m'}$ com $A_{m'}(a_1)$ e $B_{m'}(m'')$. Multiplicando essas equações por m parâmetros arbitrários e somando em m , temos uma expressão da forma

$$\left(\sum_{m'=1}^P \left[\sum_{a_1=1}^{P_1} \epsilon_{m'}(a_1) v_1^a(a_1) + \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') v_2^a(m'') \right] \right) E_a = 0 \quad (4.76)$$

em que $\epsilon_{m'}(a_1)$ e $\epsilon_{m'}(m'')$ são alguns coeficientes. Comparando com (4.71), temos as transformações

$$\delta Q^a = \sum_{m'=1}^P \left[\sum_{a_1=1}^{P_1} \epsilon_{m'}(a_1) v_1^a(a_1) - \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') v_2^a(m'') \right] \quad (4.77)$$

⁹ Já fizemos algo semelhante na seção 2.3

As únicas coordenadas que nos interessam são, é claro, q^i e p_i . Vejamos como elas se transformam:

$$\begin{aligned}\delta q^i &= \sum_{m'=1}^P \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') \frac{\partial \gamma_{m''}}{\partial p_i} = \sum_{m'=1}^P \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') \{q^i, \gamma_{m''}\} \\ \delta p_i &= - \sum_{m'=1}^P \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') \frac{\partial \gamma_{m''}}{\partial q^i} = \sum_{m'=1}^P \sum_{m''=1}^P \epsilon_{m'}(m'') \{p_i, \gamma_{m''}\}\end{aligned}\quad (4.78)$$

Equações (4.78) demonstram, assim, que todos os vínculos de primeira classe γ_m são geradores de transformações de calibre, que deixam a ação invariante

4.4 Contra-Exemplo à Conjectura de Dirac?

Vimos na seção anterior que todos os vínculos de primeira classe, e não apenas os primários, são geradores de transformações de calibre. No entanto, é comum encontrar Lagrangeanas que aparentemente contradizem esse fato[63]. Nessa seção vamos analisar um desses contra-exemplos, que pode ser encontrado em [2], e mostrar que a confusão ocorre porque o autor considera uma falsa equivalência.

Para esses fins, considere a Lagrangeana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{e^y}{2} \dot{x}^2 \quad (4.79)$$

Vamos obter as equações de Euler-Lagrange para ela. Temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^y \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^y \dot{x}) = 0 \Rightarrow e^y \dot{x} = \text{constante} \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} e^y \dot{x}$$

$$\frac{1}{2} e^y \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \quad (4.81)$$

Essas equações tem como solução¹⁰

$$x = \text{constante}$$

$$y = \text{arbitrário} \quad (4.82)$$

Vamos agora passar para o formalismo Hamiltoniano. Os momentos canonicamente conjugados são

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^y \dot{x}$$

¹⁰ Devemos tomar cuidado, entretanto, quando $y = \pm\infty$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (4.83)$$

Temos então o vínculo primário

$$\phi_1 = p_y = 0 \quad (4.84)$$

A Hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 \quad (4.85)$$

e a Hamiltoniana total é

$$H_T = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 + \lambda p_y \quad (4.86)$$

sendo λ um multiplicador de Lagrange. Aplicamos a condição de consistência para $\phi_1 = 0$:

$$\dot{\phi}_1 = \{p_y, H_T\} = 0$$

$$\frac{p_x^2}{2} \{p_y, e^{-y}\} = -\frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 \{p_y, y\} = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 = 0 \quad (4.87)$$

Em [2], o autor afirma que o vínculo é

$$\phi_2 = p_x = 0 \quad (4.88)$$

Nesse caso, $p_x = 0$ e $p_y = 0$ seriam os dois vínculos da teoria, e ambos seriam de primeira classe. Eles seriam geradores de transformações, no seguinte sentido

$$\delta x = \{x, \epsilon_1 p_y + p_x \epsilon_2\} = \epsilon_2$$

$$\delta y = \{y, \epsilon_1 p_y + p_x \epsilon_2\} = \epsilon_1 \quad (4.89)$$

Tanto x quanto y seriam variáveis de calibre, em contradição com (4.82).

Embora $p_x = 0$ e $\frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 = 0$ representem a mesma equação matemática, eles são vínculos distintos. Com base no teorema 1 da página 25 sabemos que se os parênteses de Poisson entre duas funções são nulos, então eles são uma combinação linear dos vínculos. Se escolhermos $\phi_2 = p_x = 0$ como sendo o vínculo, ficamos com a relação

$$\{p_y, H_T\} = \frac{1}{2}e^{-y}p_x \phi_2 \quad (4.90)$$

Por esse motivo, o vínculo verdadeiro é¹¹

$$\phi_2 = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 = 0 \quad (4.91)$$

A condição de consistência para ele é

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{2} \{e^{-y}p_x^2, H_T\} = 0$$

¹¹ ou, se preferir $\phi_2 = e^{-y}p_x^2 = 0$

$$\frac{p_x^2}{2} \{e^{-y}, \lambda p_y\} = -\frac{\lambda}{2} e^{-y} p_x^2 \{y, p_y\} = -\lambda \phi_2 = 0 \quad (4.92)$$

Logo, não temos nenhuma informação nova e só existem os dois vínculos. Eles são de primeira classe, como podemos ver no cálculo

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \frac{1}{2} \{p_y, e^{-y} p_x^2\} = \frac{1}{2} e^{-y} p_x^2 = \phi_2 = 0 \quad (4.93)$$

Logo, ambos são geradores de transformações de calibre, no sentido discutido na seção 3.2

$$\begin{aligned} \delta x &= \left\{ x, \epsilon_1 p_y + \frac{1}{2} e^{-y} p_x^2 \epsilon_2 \right\} = e^{-y} p_x \epsilon_2 \\ \delta y &= \left\{ y, \epsilon_1 p_y + \frac{1}{2} e^{-y} p_x^2 \epsilon_2 \right\} = \epsilon_1 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Em particular, queremos encontrar as transformações que deixam a ação invariante. Para encontrá-las, utilizaremos o formalismo desenvolvido no fim da seção 3.2. Temos

$$\begin{aligned} \{H_c, \phi_1\} &= \{\phi_2, \phi_1\} = -\phi_2 \\ \{H_c, \phi_2\} &= \{\phi_2, \phi_2\} = 0 \\ \{\phi_1, \phi_2\} &= \phi_2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

Comparando (4.95) com (3.105), obtemos $D_1^2 = -1$ e $D_{12}^2 = 1$, com todos os outros coeficientes nulos. Inserindo em (3.108), obtemos as relações

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_2 &= -\epsilon_1 + \lambda \epsilon_2 \\ \delta \lambda &= \dot{\epsilon}_1 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Denominando $\epsilon_2 = \epsilon$, temos as transformações

$$\begin{aligned} \delta x &= e^{-y} p_x \epsilon \\ \delta y &= \lambda \epsilon - \dot{\epsilon} \\ \delta \lambda &= \frac{d}{dt} (\lambda \epsilon) - \ddot{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.97)$$

As equações de movimento são dadas pelas equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H_T\} = e^{-y} p_x \\ \dot{y} &= \{y, H_T\} = \lambda \\ \dot{p}_x &= \{p_x, H_T\} = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\} = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2$$

$$\frac{1}{2}e^{-y}p_x^2 = 0$$

$$p_y = 0 \quad (4.98)$$

Vamos verificar que, de fato, elas são invariantes sob as transformações infinitesimais (4.97). Considere outras coordenadas x' e y' , obtidas por meio das transformações

$$x' = x + \delta x$$

$$y' = y + \delta y.$$

$$\lambda' = \lambda + \delta \lambda$$

Então

$$x' = x + \delta x = x + e^{-y}p_x \epsilon$$

$$\dot{x}' = \dot{x} + e^{-y}p_x \dot{\epsilon} - \dot{y}e^{-y}p_x \epsilon$$

$$\dot{x}' = e^{-y}p_x(1 + \dot{\epsilon} - \lambda \epsilon)$$

$$\dot{x}' = e^{-y}p_x(1 - \delta y) \quad (4.99)$$

Como a transformação δy é infinitesimal, $1 - \delta y = e^{-\delta y}$. Logo

$$\dot{x}' = e^{-(y+\delta y)}p_x = e^{-y'}p_x \quad (4.100)$$

Temos também

$$y' = y + \delta y = y + \lambda \epsilon - \dot{\epsilon}$$

$$\dot{y}' = \dot{y} + \frac{d}{dt}(\lambda \epsilon) - \ddot{\epsilon}$$

$$\dot{y}' = \lambda + \delta \lambda = \lambda' \quad (4.101)$$

Logo, as equações de movimento são invariantes sob as transformações (4.97), o que confirma que ambos os vínculos são geradores de transformações de calibre

5 Conclusão

Nessa dissertação, fizemos um estudo de sistemas vinculados, baseado na sua dinâmica clássica, e na obtenção das transformações de simetrias apresentada por esses sistemas

No capítulo 2, demonstramos a importância das simetrias como ferramenta para desenvolver conceitos físicos e facilitar a solução de problemas concretos de interesse da física teórica. Definimos Lagrangeanas singulares e apresentamos um algoritmo para revelar as transformações de simetrias presente nelas. Apresentamos, também, uma breve introdução da física de partículas, relacionando as teorias de calibre com o mecanismo de acoplamento mínimo

No capítulo 3, estudamos a dinâmica de sistemas vinculados por meio do formalismo Hamiltoniano de Dirac. Vimos que os parênteses de Dirac são a estrutura adequada para quantizar sistemas de segunda classe, e que se o sistema apresentar também vínculos de primeira classe, sempre é possível introduzir condições externas (de calibre) que permitem a quantização desses. Associamos os vínculos de primeira classe com os geradores de transformações de calibre, e desenvolvemos as equações que determinam os parâmetros da transformação. Aplicamos a teoria a um grande número de exemplos, selecionados de forma a ter uma variedade de situações, como o campo eletromagnético, o modelo de proca e a partícula numa esfera.

Capítulo 4 foi dedicado a apresentar o formalismo simplético e a introduzir uma modificação no método de Barcelos-Neto e Wotzasek. Mostramos que o formalismo modificado permite a manutenção de todos os vínculos primários de primeira classe até o fim do procedimento, evitando a perda desses no início do processo, como ocorre no método de Barcelos-Neto e Wotzasek. Vimos, também, que esse formalismo alterado permite fazer uma correspondência, em cada etapa do procedimento, com o método de Dirac, de forma a corroborar a sua validade.

Por fim, embora controvérsias sobre a validade da Conjectura de Dirac ainda permaneçam, reproduzimos uma demonstração dessa e vimos que o contra-exemplo, famoso na literatura, não a contradiz, se corretamente interpretado.

APÊNDICE A – Teoria Clássica de Campos

Um curso de mecânica clássica, no nível de graduação, cobre, em geral, os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas com um número finito de graus de liberdade. No entanto, existem diversos problemas mecânicos, como a vibração de um sólido elástico, que envolve sistemas contínuos, que possui um número infinito de graus de liberdade. Isso sem mencionar as teorias modernas, que são descritas por campos. O conceito de teoria de campos por ser desenvolvido, pelo menos aproximadamente, tomando o limite de sistemas discretos. Por isso, não é difícil generalizar a formulação da mecânica para esses sistemas. Considere o seguinte exemplo

Exemplo A-1: Considere uma cadeia infinita de massas m igualmente espaçadas por uma distância a , conectadas por molas com constante elástica k , como mostra a figura A.1 A Lagrangiana desse sistema é construída de acordo com a prescrição clássica:

$$L = T - V \quad (\text{A.1})$$

A energia cinética é dada por

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{\eta}_i^2 \quad (\text{A.2})$$

sendo η_i o deslocamento da partícula i da sua posição de equilíbrio

A energia potencial é dada por

$$V = \frac{k}{2} \sum_i (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \quad (\text{A.3})$$

de forma que a Lagrangiana toma a forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_i [m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2] = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{A.4})$$

No limite contínuo, a infinitesimal, temos

$$\frac{m}{a} \rightarrow \mu$$

$$ka \rightarrow Y$$

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} = \frac{d\eta}{dx} = \eta' \quad (\text{A.5})$$

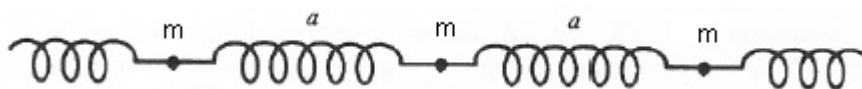


Figura 3 – Sistema Contínuo de Massas Iguais Ligadas por Molas

sendo μ a densidade linear de massa e Y o modulo de Young. Dessa forma, a Lagrangiana no limite contínuo é dada por

$$L = \frac{1}{2} \int [\mu\eta^2 - Y\eta'^2] dx \quad (\text{A.6})$$

Não é difícil, utilizando as equações de Euler lagrange, mostrar que a equação de movimento para esse sistema é

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Esse é a equação que descreve uma onda unidimensional que se propaga com velocidade

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} \quad (\text{A.8})$$

A.1 Teoria de Campos no Formalismo Lagrangiano

Vamos agora desenvolver o formalismo para sistemas contínuos de forma mais precisa. Sabemos que a dinâmica de sistemas contáveis é descrita por uma função L , chamada Lagrangiana, que depende de um conjunto de coordenadas generalizadas q_k , tal que as equações de movimento são obtidas por meio do princípio variacional

$$\delta \int L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0 \quad (\text{A.9})$$

que dá origem as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Para descrevermos sistemas contínuos precisamos especificar uma coordenada para cada ponto do espaço. Dessa forma, o índice discreto k é substituído pelo índice contínuo \vec{x} . Assim, sistemas com infinitos graus de liberdade serão descritos por campos $\phi_a(\vec{x}, t)$. A Lagrangiana de sistemas discretos envolve uma soma sobre todos os graus de liberdade, de forma que, para um sistema contínuo, devemos ter um integral espacial de uma função \mathcal{L} , chamada de densidade Lagrangiana. Essa deve ter um termo cinético, relacionado com $\dot{\phi}_a(\vec{x}, t)$. Consideramos ainda que o campo só interage consigo mesmo numa vizinhança infinitesimal, de forma que \mathcal{L} deve depender de $\phi_a(\vec{x}, t)$ e $\phi_a(\vec{x} + d\vec{x}, t)$, isto é, de $\nabla\phi_a(\vec{x}, t)$. Consideramos ainda uma possível dependência em $\vec{x}et$. dessa forma, a ação mais geral é da forma

$$S = \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \nabla\phi, \vec{x}, t) \quad (\text{A.11})$$

Para encontrar as equações de movimento, utilizamos o princípio variacional:

$$0 = \delta \int d^4x \mathcal{L}$$

$$0 = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \delta \dot{\phi}_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta (\nabla \phi_a) \right] \quad (\text{A.12})$$

Vamos desenvolver o segundo termo. Utilizando integração por partes, e o fato que o campos devem se anular nas extremidades, temos

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \delta \dot{\phi}_a = - \int d^4x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \right) \delta \phi_a \quad (\text{A.13})$$

Considere agora o terceiro termo. Utilizando o teorema da divergência e o fato que os campos se anulam nos extremos, temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta (\nabla \phi_a) &= \int dt \oint d\vec{a} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta \phi_a - \int d^4x \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta \phi_a \right) \\ &= - \int d^4x \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta \phi_a \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, teremos

$$0 = \int d^4x \sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta \phi_a \right) \right) \delta \phi_a \quad (\text{A.15})$$

como as variações $\delta \phi_a$ são arbitrárias, devemos ter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_a)} \delta \phi_a \right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Em teorias relativísticas, construímos modelos cujas equações que descrevem o sistema físico tomam a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, construímos nossos modelos de forma tal que eles sejam invariantes sob transformações de Lorentz. A melhor maneira de fazer isso é tratar tempo e espaço igualmente, isso é, tratar (ct, x^i) como coordenadas no espaço de Minkowski. Com essa idéia em mente, escrevemos a equação de Euler-Lagrange para sistemas contínuos pela expressão equivalente

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0 \quad (\text{A.17})$$

sendo

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (\text{A.18})$$

e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (\text{A.19})$$

Exemplo A.1-1: Considere o campo escalar ϕ e a Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad (\text{A.20})$$

sendo

$$(\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi = \partial^0 \phi \partial^0 \phi - \partial^1 \phi \partial^1 \phi - \partial^2 \phi \partial^2 \phi - \partial^3 \phi \partial^3 \phi \quad (\text{A.21})$$

Vejamos qual é a equação de movimento para esse campo. Aplicando as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (\text{A.22})$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi \quad (\text{A.23})$$

Assim

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad (\text{A.24})$$

Essa é a equação de Klein-Gordon, que descreve (na teoria quântica de campos) uma partícula de spin 0 e massa m

Exemplo A.1-2: Considere o spinor ψ ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

onde ψ_i são funções e a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (\text{A.26})$$

sendo

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

as matrizes de Dirac. Tratamos ψ e seu adjunto $\bar{\psi}$ como campos independentes. Aplicando a equação de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$, encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \psi \quad (\text{A.28})$$

Logo

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad (\text{A.29})$$

Essa é a equação de Dirac, que na teoria quântica de campos descreve uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ e de massa m . Se aplicarmos a equação de Euler-Lagrange para ψ , encontramos a adjunta da equação de Dirac:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc^2 \bar{\psi} \quad (\text{A.30})$$

Assim

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0 \quad (\text{A.31})$$

Exemplo A.1-3: Finalmente, considere os campos A^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, com a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}A^\nu A^\nu \quad (\text{A.32})$$

Temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (\text{A.33})$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \quad (\text{A.34})$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange leem

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (\text{A.35})$$

Essa equação é conhecida como equação de Proca. Ela descreve uma partícula de spin 1 e massa m .
Comentários:

(i) Como o termo $(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ aparece constantemente na teoria, é comum utilizar a notação

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{A.36})$$

de forma que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (\text{A.37})$$

e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (\text{A.38})$$

(ii) Se a notação parece familiar da formulação relativística do eletromagnetismo, isso não é um acidente. O campo eletromagnético é exatamente um campo de spin 1 e com massa $m = 0$

A.2 Formalismo Hamiltoniano

Nosso ponto de partida para trabalhar no formalismo Hamiltoniano é a definição dos momentos canonicamente conjugados. De forma análoga a mecânica de sistemas com número finito de graus de liberdade, definimos

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a} \quad (\text{A.39})$$

A função densidade Hamiltoniana é construída por meio da transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \quad (\text{A.40})$$

e a Hamiltoniana é dada por

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\phi_a, \nabla\phi_a, \pi_a) \quad (\text{A.41})$$

A ação é dada por

$$S = \int d^4x [\sum_a \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{H}] \quad (\text{A.42})$$

Utilizando o princípio variacional

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sum_a \left(\pi_a \delta\dot{\phi}_a + \dot{\phi}_a \delta\pi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)} \delta(\nabla\phi_a) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a} \delta\pi_a \right) \\ &= \int d^4x \sum_a \left(\left[-\dot{\pi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a} + \nabla \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)} \right) \right] \delta\phi_a + \left[\dot{\phi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a} \right] \delta\pi_a \right) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

onde utilizamos integração por partes e o fato que os campos se anulam nas extremidades. Como as variações $\delta\phi_a$ e $\delta\pi_a$ são arbitrárias, devemos ter

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_a &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a} + \nabla \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)} \right) \\ \dot{\phi}_a &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Exemplo A.2-1: Considere novamente a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

O momentum canonicamente conjugado é dado por

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi})} = \dot{\phi} \quad (\text{A.45})$$

Assim, a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é dada por

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + (\partial_i\phi)(\partial^i\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad (\text{A.46})$$

Logo, as equações de Hamilton leem:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a} = \pi(x) \\ \dot{\pi}(x) &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a} + \nabla \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)} \right) = \nabla^2\phi(x) - m^2\phi(x) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Na teoria de campos, é comum lidar com funcionais. Um funcional é uma regra que associa um numero real $F[f]$ a cada função f . Já tivemos a chance de encontrar um funcional aqui: a ação S pega um conjunto $\{\phi_a; a = 1, \dots, N\}$ e leva num numero real

$$S[\phi_1, \dots, \phi_N] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) \quad (\text{A.48})$$

Por essa razão, a derivada funcional desempenha um papel fundamental. Existe várias maneiras de definir a derivada funcional (muitas delas melhores do que a que apresentaremos aqui). No entanto, para nossos fins é suficiente defini-la como o termo de primeira ordem da expansão de $F[f + \delta f]$ em potências de δf . Mais precisamente, seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um ponto de \mathfrak{R}^n e $f(x)$ uma função suficientemente diferenciável de n variáveis reais. A derivada funcional de F em relação a f no ponto x , denodada por $\frac{\delta F}{\delta f}$, é definida por

$$\delta F = \int d^n x \sum_a \frac{\delta F}{\delta \phi_a} \delta \phi_a \quad (\text{A.49})$$

Exemplo A.2-2: Considere o funcional Identidade, definido por

$$I[\phi_a] = \phi_a \quad (\text{A.50})$$

Logo

$$\phi_a(\vec{x}) = I[\phi_a(\vec{x})] = \int d^3 y \sum_b \frac{\delta I[\phi_a(\vec{x})]}{\delta \phi_b} \delta \phi_b(\vec{y}) \quad (\text{A.51})$$

Para que os dois lados sejam iguais, é necessário que

$$\frac{\delta I[\phi_a(\vec{y})]}{\delta \phi_b(\vec{x})} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \quad (\text{A.52})$$

ou, usando um abuso de linguagem,

$$\frac{\delta \phi_a(\vec{y})}{\delta \phi_b(\vec{x})} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \quad (\text{A.53})$$

Exemplo A.2-3: Considere a ação clássica. Temos

$$\delta S = \int d^4 x \sum_a \left(\left[-\dot{\pi}_a - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_a} \right] \delta \phi_a + \left[\dot{\phi}_a - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_a} \right] \delta \pi_a \right) \quad (\text{A.54})$$

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \phi_a} &= -\dot{\pi}_a - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_a} \\ \frac{\delta S}{\delta \pi_a} &= \dot{\phi}_a - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_a} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Assim, nessa notação, as equações de Hamilton tomam a forma

$$\dot{\phi}_a = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_a} \quad (\text{A.56})$$

Podemos ainda escrever essas equações de outra maneira. Para isso, considere o seguinte funcional, que pega duas funções e leva num numero real:

$$\{X(\vec{y}), Y(\vec{y})\} = \int d^3 x \sum_a \left(\frac{\delta X(\vec{y})}{\delta \phi_a(\vec{x})} \frac{\delta Y(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} - \frac{\delta Y(\vec{y})}{\delta \phi_a(\vec{x})} \frac{\delta X(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} \right) \quad (\text{A.57})$$

Esse funcional é chamado Parênteses de Poisson. Podemos escrever as equações de Hamilton em função dele. Para ver isso, considere a seguinte operação

$$\{\phi_b(\vec{y}), \mathcal{H}\} = \int d^3x \sum_a \left(\frac{\delta\phi_b(\vec{y})}{\delta\phi_a(\vec{x})} \frac{\delta\mathcal{H}(\vec{y})}{\delta\pi_a(\vec{x})} - \frac{\delta\mathcal{H}(\vec{y})}{\delta\phi_a(\vec{x})} \frac{\delta\phi_b(\vec{y})}{\delta\pi_a(\vec{x})} \right) = \int d^3x \sum_a \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \frac{\delta\mathcal{H}(\vec{y})}{\delta\pi_a(\vec{x})} = \frac{\delta\mathcal{H}(\vec{y})}{\delta\pi_b(\vec{y})} \quad (\text{A.58})$$

onde abreviamos a notação $\mathcal{H}(\phi_a(\vec{y}), \partial_\mu\phi_a(\vec{y})) = \mathcal{H}(\vec{y})$. De forma análoga, temos

$$\{\pi_b(\vec{y}), \mathcal{H}\} = -\frac{\delta\mathcal{H}(\vec{y})}{\delta\phi_b(\vec{y})} \quad (\text{A.59})$$

Assim, podemos escrever

$$\dot{\phi}_a(\vec{x}) = \{\phi_a(\vec{x}), \mathcal{H}\}$$

$$\dot{\pi}_a(\vec{x}) = \{\pi_a(\vec{x}), \mathcal{H}\} \quad (\text{A.60})$$

A.3 Teorema de Noether

No capítulo 2, já vimos a versão do teorema de Noether para sistemas com numero finito de graus de liberdade. A generalização para sistemas contínuos é direta: Tomamos variações arbitrárias das coordenadas x^μ e dos campos ϕ_A , e investigamos quais variações que deixam a ação invariante. Em muitos casos, trataremos apenas de variações nos campos, deixando as coordenadas fixas. Derivaremos o teorema de Noether para essa situação particular.

Considere a variação infinitesimal

$$\phi'_A(x) = \phi_A(x) + \delta\phi_A \quad (\text{A.61})$$

Ela implica na variação da Lagrangiana

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi'_A, \partial_\mu\phi'_A) - \mathcal{L}(\phi_A, \partial_\mu\phi_A) = \sum_A \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_A} \delta\phi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \partial_\mu(\delta\phi_A) \right) \quad (\text{A.62})$$

Utilizando as equações de movimento

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_A} = 0 \quad (\text{A.63})$$

Temos

$$\delta\mathcal{L} = \sum_A \left(\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \delta\phi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \partial_\mu(\delta\phi_A) \right) = \partial_\mu \left(\sum_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \delta\phi_A \right) \quad (\text{A.64})$$

Se a transformação for uma simetria da ação, $\delta\mathcal{L} = 0$, o que implica que em uma lei de conservação local na forma covariante. Para ver isso, seja

$$\Theta^\mu = \sum_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \delta\phi_A \quad (\text{A.65})$$

Então

$$\partial_\mu \Theta^\mu = 0 \quad (\text{A.66})$$

ou

$$\partial_0 \Theta^0 + \nabla \cdot \vec{\Theta} = 0 \quad (\text{A.67})$$

Assim

$$\frac{d}{dx^0} \int_V d^3x \Theta^0 = \int_V d^3x \partial_0 \Theta^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \vec{\Theta} = - \oint_{\partial V} \vec{\Theta} \cdot d\vec{a} \quad (\text{A.68})$$

Se a região de integração V engloba todo o espaço tridimensional e os campos tendem a zero com suficiente rapidez no infinito, a integral de superfície é nula e

$$j^0 = \int_V d^3x \Theta^0 \quad (\text{A.69})$$

é uma quantidade conservada

Por fim, considere que a transformação infinitesimal é gerada a partir de um conjunto de parâmetros infinitesimais (ver fim do capítulo 2). Nesse caso

$$\delta \phi_A = \sum_a i \epsilon_a T^a \phi_A \quad (\text{A.70})$$

Assim

$$i \partial_\mu \left(\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \sum_a \epsilon_a T^a \phi_A \right) = 0 \quad (\text{A.71})$$

Como os parâmetros da transformação são arbitrários, temos

$$\partial_\mu \left(\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} T^a \phi_A \right) = 0 \quad (\text{A.72})$$

de forma que

$$j^0 = \int d^3x \left(\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_A)} T^a \phi_A \right) \quad (\text{A.73})$$

é uma quantidade conservada

Exemplo A.3-1: Considere novamente a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi$$

É fácil ver que a Lagrangiana é invariante sob a transformação

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad (\text{A.74})$$

já que $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\theta} \bar{\psi}$ e temos

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) (e^{-i\theta} \bar{\psi}) \gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta} \psi) - (mc^2) (e^{-i\theta} \bar{\psi}) (e^{i\theta} \psi) = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (\text{A.75})$$

Note que isso não ocorreria se $\theta = \theta(x)$. Essa transformação é, portanto, uma simetria da ação. Vejamos qual é a quantidade conservada via teorema de Noether. A forma infinitesimal dessa transformação é

$$\psi' = e^{i\theta}\psi = \psi + i\theta\psi$$

$$\bar{\psi}' = e^{-i\theta}\bar{\psi} = \bar{\psi} - i\theta\bar{\psi} \quad (\text{A.76})$$

ou seja

$$\delta\psi = i\theta\psi$$

$$\delta\bar{\psi} = -i\theta\bar{\psi} \quad (\text{A.77})$$

Assim, temos

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta\bar{\psi} \right) = \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad (\text{A.78})$$

de forma que

$$j^0 = \int d^3x (\bar{\psi}\gamma^0\psi) \quad (\text{A.79})$$

é uma quantidade conservada. Essa é a lei de conservação da carga elétrica.

APÊNDICE B – Propriedades de Equações Diferenciais Ordinárias

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) aparecem em diferentes contextos na matemática e na ciência, já que a descrição matemática de variações envolve o uso de diferenciais e derivadas. Como a descrição da dinâmica de um dado fenômeno relaciona funções, derivadas e diferenciais, EDO's emergem naturalmente no estudo desses sistemas. Nesse apêndice, queremos apenas apresentar alguns fatos conhecidos da teoria de equações diferenciais ordinárias, que serão úteis no estudo de sistemas singulares. Uma abordagem mais profunda e rigorosa pode ser encontrado em [25]

Seja τ uma variável independente e $q^a(\tau)$, ($a = 1, \dots, N$) N variáveis dependentes. Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é uma equação da forma

$$F(q^b, \dot{q}^b, \ddot{q}^b) = 0 \quad b = 1, \dots, N \quad (\text{B.1})$$

Se essa equação puder ser escrita na forma

$$\ddot{q}^a = f^a(q^b, \dot{q}^b) \quad (\text{B.2})$$

ela é dita estar na forma normal. É um fato matemático que

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}^a = f^a(q^b, \dot{q}^b) \\ q^a(0) = q_0^a \\ \dot{q}^a(0) = v_0^a \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

possui solução única (Problema de Cauchy)[25]

Podemos trocar equações diferenciais ordinárias de segunda ordem por equações diferenciais de primeira ordem introduzindo variáveis extras, $v^a(\tau)$ $a = 1, \dots, N$, definidas por

$$v^a = \dot{q}^a \quad (\text{B.4})$$

Então, os seguintes sistemas são equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} F^a(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \\ v^a = \dot{q}^a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F^a(q, v, \dot{v}) = 0 \\ \dot{q}^a = v^a \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Esse processo é chamado de Redução de Ordem. Se definirmos $z^i(\tau) = (q^a, v^b)$, teremos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$G^i(z^j, \dot{z}^j) = 0 \quad (\text{B.6})$$

que, se puder ser escrito na forma $\dot{z}^i = g^i(z^j)$ possui um significado bem definido na geometria diferencial: $g^i(z^j)$ é um campo vetorial definido na variedade, e buscamos uma curva que tem como vetor tangente em todo ponto o campo $g^i(z^j)$ como mostra figura B.1 Seja

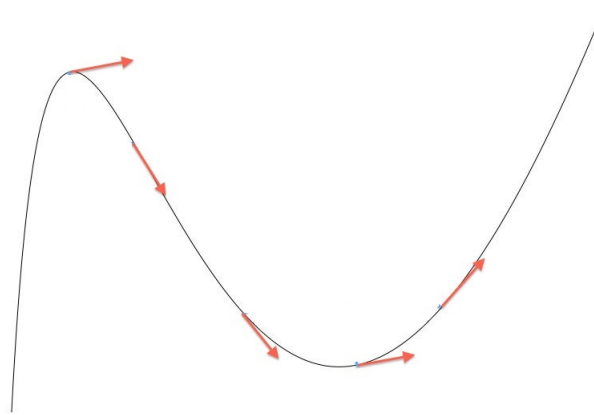


Figura 4 – Curva Integral do Campo $g^i(z^j)$

$$z^i \rightarrow z'^i = z'^i(z^j) \quad (\text{B.7})$$

Essa transformação é uma mudança de variável se o determinante da matriz Jacobiana é diferente de zero:

$$\det(M_{ij}) = \det\left(\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}\right) \neq 0 \quad (\text{B.8})$$

Nesse caso, a EDO pode ser escrita por

$$G^i\left(z^j(z'^k), \frac{\partial z^j}{\partial z'^k} z'^k\right) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Por fim, considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{q}^a = Q^a(q, p) \\ \dot{p}^a = P^a(q, p) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Esse sistema é chamado Hamiltoniano se existe uma função $H(q, p)$ tal que

$$Q^a(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$P^a(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q_a} \quad (\text{B.11})$$

APÊNDICE C – Teoria de Grupos

Teoria de Grupos é a melhor linguagem matemática para descrever simetrias. De fato, os dois assuntos são inseparáveis, já que qualquer grupo define uma simetria (uma relação de equivalência) através de suas órbitas, e qualquer simetria define um grupo. Essa é uma ampla área de estudo da matemática, e existem diversos livros dedicados ao assunto[39,40,41,42]. Para nossos objetivos, não é necessário um estudo profundo do assunto, mas é necessário a introdução de alguns termos e propriedades que serão úteis na nossa discussão. Essa seção é dedicada a introduzir alguns conceitos e resultados da Teoria de Grupos.

Começemos com a definição. Um Grupo é um sistema $\{C, \cdot\}$, isso é, um conjunto C com uma operação " \cdot ", que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Fechamento: Se $a, b \in C$, então $a \cdot b \in C$
- (ii) Associatividade: Para todo $a, b, c \in C$, temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (iii) Elemento nulo: $\exists e \in C$ tal que para $\forall a \in C$ temos $a \cdot e = e \cdot a = a$
- (iv) Elemento Inverso: $\forall a \in C$ existe um elemento inverso que chamamos a^{-1} , $a^{-1} \in C$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Além disso, se $\forall a, b \in C$ tivermos $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade), então o grupo é chamado abeliano

O número de elementos de um grupo é chamado ordem do grupo. Naturalmente, denominamos grupo finito um grupo cuja ordem é finita; caso contrário, diz-se que o grupo é infinito. Um grupo contínuo é um grupo infinito que pode ser caracterizado por um certo número de parâmetros contínuos. O número de parâmetros independentes que determinam um grupo é chamado de dimensão do grupo. Dentre esses grupos, o mais importante para nós são os grupos de Lie.

Os grupos de Lie são a teoria mais bem desenvolvida de simetrias contínuas, o que os tornam uma ferramenta indispensável para grande parte da matemática e da física teórica moderna. Grupos de Lie são também variedades diferenciáveis, e portanto podem ser estudados utilizando o cálculo diferencial, ao contrário da maioria dos grupos topológicos[43]. Uma das ideias principais da teoria de grupos de Lie é a substituição de objetivos globais por versões locais, que Lie denominou grupo infinitesimal. Não temos aqui o intuito de desenvolver em detalhes um estudo sobre os grupos de Lie. Apenas trataremos de alguns aspectos gerais desse assunto.

Antes de prosseguir, vamos ilustrar esses conceitos com alguns exemplos

Exemplo 1: $GL(2, \mathfrak{R})$

O grupo $GL(2, \mathfrak{R})$ (general linear group) de grau 2 é o conjunto das matrizes 2×2 inversíveis,

junto com a operação de multiplicação de matrizes

$$GL(2, \mathfrak{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \det A = ad - bc \neq 0 \right\} \quad (\text{C.1})$$

Vamos mostrar, primeiramente, que esse conjunto com essa operação forma um grupo. Temos que verificar as quatro propriedades da definição:

(i) Seja $A, B \in GL(2, \mathfrak{R})$. Então $AB \in GL(2, \mathfrak{R})$ pois

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$$

(ii) A propriedade associativa é trivialmente satisfeita, pois o produto de matrizes é associativo.

(iii) O elemento neutro do grupo é a matriz identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) É conhecido da álgebra linear que uma condição suficiente e necessária para uma matriz ter inversa é que seu determinante seja diferente de zero. Logo, $\forall A \in GL(2, \mathfrak{R}), \exists A^{-1} \in GL(2, \mathfrak{R})$ já que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \neq 0$$

Portanto, $GL(2, \mathfrak{R})$ é um grupo. Além disso, ele é um grupo de Lie, já possui infinitos elementos (matrizes 2×2 com determinante não nulo) e é caracterizado por 4 parâmetros (as entradas das matrizes) que variam continuamente já que $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 2: $SO(2, \mathfrak{R})$

O grupo $SO(2, \mathfrak{R})$ (special orthogonal group) é um subgrupo de $GL(2, \mathfrak{R})$, conhecido como o grupo de rotações no plano. Ele é caracterizado pelo conjunto de matrizes ortogonais com determinante igual a +1, com a operação de multiplicação de matrizes

$$SO(2, \mathfrak{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \quad (\text{C.2})$$

A verificação que ele é um grupo é idêntica ao exemplo anterior, e pode ser efetuada facilmente. A diferença é que agora o grupo é caracterizado por um único parâmetro contínuo, ou seja, é um grupo de Lie de dimensão 1. Isso ocorre porque a condição de ortogonalidade implica em duas equações de vínculos entre as entradas da matriz, e o fato que o determinante é igual a 1 implica num vínculo extra.

Exemplo 3: O Grupo de Lorentz

Uma quantidade importante para a geometrização de um espaço vetorial é o elemento de linha, o qual é invariante mediante certas transformações características do espaço vetorial considerado.

Para o espaço de Minkowski, esse elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{C.3})$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{se } \mu = \nu = i \quad (i = 1, 2, 3) \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Esse tensor métrico é conhecido como a métrica de Bjorken-Drell. Existe um conjunto de transformações que deixam a forma do elemento de linha invariante, isso é:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.5})$$

ou, em forma matricial

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (\text{C.6})$$

o conjunto dessas transformações, denominadas transformações de Lorentz, junto com o produto de matrizes, forma um grupo

$$L(4) = \{ \Lambda; \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \} \quad (\text{C.7})$$

De fato, note que:

(i) Sejam Λ e Λ' duas transformações de Lorentz. Então $\Lambda\Lambda'$ é também uma transformação de Lorentz, pois

$$(\Lambda\Lambda')^T \eta (\Lambda\Lambda') = (\Lambda')^T (\Lambda^T \eta \Lambda) \Lambda' = (\Lambda')^T \eta \Lambda' = \eta$$

(ii) O produto dos elementos é associativo, já que o produto usual de matrizes é associativo

(iii) A matriz unidade é o elemento, pois $I \in L(4)$ e

$$I^T \eta I = \eta$$

(iv) Por fim, note que todas as matrizes pertencentes a $L(4)$ possuem determinante ± 1 :

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta$$

$$[\det(\Lambda)]^2 = 1$$

$$\det \Lambda = \pm 1$$

Logo elas são inversíveis e existe o elemento inverso para cada matriz

Esse é o chamado grupo de Lorentz. Ele é um grupo de Lie de dimensão 6. Para ver isso, note que a condição $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ fornece 10 equações que fazem com que apenas 6 das 16 entradas das matrizes sejam independentes.

Agora que nos familiarizamos com os grupos de Lie, vamos discutir as representações. Mas antes, um exemplo que vai explorar esse conceito de uma maneira intuitiva

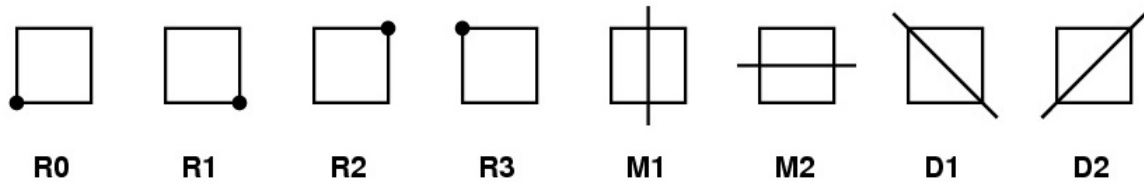


Figura 5 – Simetrias de um Quadrado

Exemplo 4: Simetrias do Quadrado D_4

Na seção 1.1 vimos que o quadrado possui oito simetrias: quatro rotações em torno do eixo perpendicular que passa pelo centro ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$), duas rotações em torno dos eixos que passam pelo centro e pelos pontos médios das faces opostas (180°) e duas rotações em torno dos eixos que passam pelas diagonais (180°). Vamos chamar essas simetrias de $R_0, R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, D_1, D_2$. O conjunto

$$D_4 = \{R_0, R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, D_1, D_2\} \quad (\text{C.8})$$

junto com a operação "composição das operações", que significa realizar uma depois realizar outra, é um grupo. De fato, você pode se convencer, fazendo alguns exemplos mentais, de que a aplicação de duas operações seguidas também deixa a figura invariante (você com certeza não quer fazer as 8^2 possíveis combinações!). A associatividade é direta pois a composição é associativa. O elemento neutro é R_0 . A inversa de R_1 é R_3 e vice versa, enquanto que para todos os outros elementos, eles são igual a própria inversa. Esse é um grupo discreto, que possui 8 elementos. Considere agora um sistema de coordenadas Oxy, com um quadrado de lado $2l$ desenhado tal que seu centro fica na origem. Assim, as equações analíticas do quadrado são:

$$x = l, \quad y \in [-l, l]$$

$$x = -l, \quad y \in [-l, l]$$

$$y = l, \quad x \in [-l, l]$$

$$y = -l, \quad x \in [-l, l] \quad (\text{C.9})$$

Com o intuito de utilizar ferramentas analíticas para estudar as simetrias, note que podemos utilizar as seguintes matrizes para representar os elementos de D_4 :

$$\begin{aligned} R_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & R_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & R_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & D_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & D_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Voce pode calcular alguns produtos e verificar que eles realmente implicam nos resultados intuitivos. Por exemplo, duas rotações consecutivas de 90° dão uma rotação de 180° :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O exemplo acima mostra que é útil introduzir representações de objetos abstratos para tratar o problema de uma forma mais quantitativa. Temos uma situação similar quando trabalhamos, por exemplo, com tensores. Sabemos que um tensor é uma quantidade geométrica que independe da escolha de um sistema de coordenadas. No entanto, precisamos introduzir coordenadas se queremos realizar os cálculos, já os dados de uma medida experimental são sempre coletados em alguns referencial. Vamos desenvolver essa ideia mais formalmente

Seja G um grupo e $g_1, g_2, \dots \in G$. Uma representação D desse grupo é uma aplicação que associa um operador a cada elemento do grupo G , ou seja:

$$\begin{aligned} g_1 &\rightarrow D(g_1) \\ g_2 &\rightarrow D(g_2) \\ &\dots \end{aligned} \tag{C.11}$$

tal que $D(g_1), D(g_2), \dots$ constituem também um grupo, preservando as mesmas leis do grupo (isomorfismo entre grupos). Assim

$$g_1 \cdot g_2 = g_3 \leftrightarrow D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_3) \tag{C.12}$$

Já vimos no exemplo 4 uma ilustração disso. Em uma série de teoremas publicados em 1839, Sophus Lie[44] demonstrou que qualquer grupo de Lie possui uma representação por operadores unitários:

$$U = \exp \left(i \sum_a \alpha_a X_a \right) \tag{C.13}$$

em que $\alpha_a \in \mathfrak{R}$ ($a = 1, 2, \dots, N$) são os parâmetros contínuos que descrevem o grupo, e X_a são operadores hermitianos, chamados geradores do grupo de Lie com N parâmetros.

Exemplo 5: Geradores do $SO(2, \mathfrak{R})$ Vamos determinar quem são os geradores do grupo $SO(2, \mathfrak{R})$. Sabemos que ele é um grupo de dimensão 1 e, portanto, só possui um gerador, denominado G . Para determinar quem é o gerador, considere uma rotação por um ângulo $\varphi = \epsilon$ infinitesimal. Assim

$$U = e^{i\epsilon G} \approx 1 + i\epsilon G \tag{C.14}$$

Por outro lado, uma rotação infinitesimal é dada por

$$U = \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\epsilon \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{C.15}$$

Logo

$$G = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Uma álgebra de Lie é um grupo de Lie \mathcal{G} sobre um corpo F junto com uma operação binária $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ denominada Colchetes de Lie (Lie Brackets) que satisfaz os seguintes axiomas

(i) Bilinearidade: $\forall x, y, z \in \mathcal{G}$ e $\forall a, b \in F$, temos

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \quad [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$$

(ii) $\forall x \in \mathcal{G}$, temos

$$[x, x] = 0$$

(iii) Identidade de Jacobi: $\forall x, y, z \in \mathcal{G}$, temos

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

É interessante mencionar que os parênteses de Poisson da mecânica clássica, e o comutador da mecânica quântica são operações binárias que obedecem a essas propriedades.

Os geradores do grupo de Lie satisfazem a uma álgebra de Lie. Para ver isso, sem muita complicação, considere o produto Q envolvendo dois elementos do grupo e seus inversos

$$Q = \exp(i\alpha_1 G_1) \exp(i\alpha_2 G_2) \exp(-i\alpha_1 G_1) \exp(-i\alpha_2 G_2) \quad (\text{C.17})$$

Expandindo, vem

$$\begin{aligned} Q &= (1 + i\alpha_1 G_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 G_1^2 + \dots)(1 + i\alpha_2 G_2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 G_2^2 + \dots) \\ &\quad (1 - i\alpha_1 G_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 G_1^2 + \dots)(1 - i\alpha_2 G_2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 G_2^2 + \dots) \\ &= 1 - \alpha_1 \alpha_2 [G_1, G_2] + \mathcal{O}(\alpha^3) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

sendo

$$[G_1, G_2] = G_1 G_2 - G_2 G_1 \quad (\text{C.19})$$

o comutador entre os operadores G_1 e G_2 . De acordo com as propriedades de grupos, temos que a quantidade Q é também um elemento do grupo. Portanto, podemos escrever

$$Q = \exp(i \sum_a \alpha_a G_a) \approx 1 + i \sum_a \alpha_a G_a \quad (\text{C.20})$$

comparando (C.18) e (C.20), temos

$$[G_1, G_2] = -i \sum_a \frac{\alpha_a}{\alpha_1 \alpha_2} G_a \quad (\text{C.21})$$

De maneira geral, os geradores do grupo de Lie devem satisfazer

$$[G_a, G_b] = if_{abc}G_c \quad (\text{C.22})$$

As constantes f_{abc} (reais) são chamadas de constantes de estrutura da álgebra de Lie.

Exemplo 6: Geradores e álgebra do grupo $SO(3, \mathfrak{R})$

O grupo $SO(3, \mathfrak{R})$ é o grupo de rotações no espaço. Por hora, não vamos falar em ângulos de rotação. Vamos caracterizá-lo simplesmente como o grupo cujo os elementos são matrizes ortogonais com determinante igual a um. Essa restrição reduz o número de entradas independentes de 9 para 3, isso é, a dimensão do grupo é 3. Vamos utilizar esse fato para encontrar os geradores e sua álgebra.

Sejam A um elemento do grupo $SO(3, \mathfrak{R})$ e G_1, G_2, G_3 os geradores do grupo. Então

$$\begin{aligned} AA^T &= (1 + i \sum_a \alpha_a G_a + \dots)(1 + i \sum_a \alpha_a G_a^T + \dots) \\ &= 1 + i \sum_a \alpha_a (G_a + G_a^T) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Para que a condição de ortogonalidade seja satisfeita, é necessário que os geradores sejam matrizes antissimétricas

$$G_a^T = -G_a \quad (\text{C.24})$$

Assim, a forma geral de $i \sum_a \alpha_a G_a = i\alpha_1 G_1 + i\alpha_2 G_2 + i\alpha_3 G_3$ é do tipo

$$i \sum_a \alpha_a G_a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = i\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + i\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, os geradores são da forma

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ G_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Não é difícil se convencer de que, da forma que os geradores foram construídos, podemos escrever de maneira geral

$$(G_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (\text{C.26})$$

Nesse caso, Vamos ver como fica a álgebra do grupo. Seja G_a, G_b dois geradores. Então

$$\begin{aligned}
[G_a, G_b]_{mn} &= (G_a)_{mp}(G_b)_{pn} - (G_b)_{mp}(G_a)_{pn} \\
&= -\epsilon_{amp}\epsilon_{bpn} + \epsilon_{bmp}\epsilon_{apn} \\
&= \epsilon_{amp}\epsilon_{pbn} + \epsilon_{bmp}\epsilon_{pna} \\
&= \delta_{ab}\delta_{mn} - \delta_{an}\delta_{mb} + \delta_{bn}\delta_{ma} - \delta_{ba}\delta_{mn} \\
&= \delta_{am}\delta_{bn} - \delta_{an}\delta_{bm} \\
&= \epsilon_{abp}\epsilon_{pmn} \\
&= i\epsilon_{abp}(-i\epsilon_{pmn}) \\
[G_a, G_b]_{mn} &= i\epsilon_{abp}(G_p)_{mn}
\end{aligned}$$

Obtemos assim as constantes de estruturas $f_{abc} = \epsilon_{abc}$

Como último comentário, suponhamos que os elementos do grupo de Lie em estudo sejam transformações entre coordenadas (o grupo de Lorentz, o grupo das Rotações, etc). Sejam q'_i um sistema de coordenadas obtidos a partir do sistema q_i por meio dessa transformação. Utilizando a representação unitária, escrevemos

$$\vec{q}' = \exp(i \sum_a \alpha_a G_a) \vec{q} \quad (\text{C.27})$$

Se a transformação for infinitesimal $\alpha_a = \epsilon_a$, podemos escrever

$$\vec{q}' = (1 + i \sum_a \epsilon_a G_a) \vec{q}$$

ou

$$\delta \vec{q} = i \sum_a \epsilon_a (G_a \vec{q}) \quad (\text{C.28})$$

Em outras palavras, a variação infinitesimal é gerada pela ação do gerador na coordenada. Esse fato será útil no entendimento dos geradores de transformações de calibre.

APÊNDICE D – Sistemas Não Vinculados

D.1 Formalismo Clássico de Sistemas Não Vinculados

Considere um sistema físico que queremos estudar. A abordagem moderna para descrevê-lo é achar uma função das coordenadas generalizadas q^a , $a = 1, \dots, N$ chamada Lagrangeana L da qual podemos extrair informações, como sua equação de movimento e suas simetrias. Não quero entrar na questão da existência dessa função, nem da construção da mesma. A partir de agora sempre supomos que ela existe e que podemos obtê-la. O princípio de Hamilton diz que

O movimento do sistema do instante t_1 até instante t_2 é tal que a integral de linha (chamada ação) $S = \int_{t_1}^{t_2} L d\tau$ tem um valor estacionário para a trajetória real da partícula

Em outras palavras, de todos os possíveis caminhos pelo qual o sistema pode evoluir a partir de t_1 até t_2 , ele irá percorrer a trajetória para a qual a ação é estacionária. O termo “estacionária” significa que a integral ao longo de um dado caminho possui o mesmo valor (em primeira ordem) que a integral ao longo de caminhos infinitesimalmente próximos (isso é, que difere do caminho real por deslocamentos infinitesimais).

O princípio de Hamilton pode ser resumido da seguinte maneira: A evolução do sistema é tal que a variação da integral de linha (ação) S para t_1 e t_2 fixos é nula:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} d\tau L(q^a(\tau), \dot{q}^a(\tau)) = 0 \quad (\text{D.1})$$

com

$$\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0, (a = 1, \dots, N) \quad (\text{D.2})$$

Vamos derivar as equações de Euler-Lagrange a partir do princípio de Hamilton. Temos:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \right\} \quad (\text{D.3})$$

Os deslocamentos são virtuais, de forma que

$$\delta \dot{q}^a = \frac{d}{dt} \delta q^a \quad (\text{D.4})$$

Logo

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d}{dt} (\delta q^a) \right\}$$

Utilizando integração por partes, temos

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right\} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (\text{D.5})$$

O segundo termo do lado direito é igual a zero, devido a condição (D.2). Como as variações δq^a são arbitrárias, o primeiro termo da direita é igual a zero somente se

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = 0 \quad a = 1, \dots, N \quad (\text{D.6})$$

Exemplo 1: Partícula não relativística sob ação de um potencial

Considere a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^i \dot{q}_i - V(q) \quad (\text{D.7})$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i} &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= m \dot{q}^i \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ m \ddot{q}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

que é equivalente a Lei de Newton

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (\text{D.10})$$

Exemplo 2: Partícula carregada num campo eletromagnético[49]

Sabemos da teoria eletromagnética que o campo elétrico \vec{E} e o campo magnético \vec{B} podem ser expressos em termo do potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ e do vetor potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ da seguinte maneira[31]

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

A Lagrangeana para uma partícula carregada interagindo com campos elétrico e magnético é dada por

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e \Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.12})$$

Como a equação é simétrica em relação a x, y, z , vamos nos restringir a calcular as equações de movimento para a componente x :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

As equações para as outras componente seguem da mesma maneira. Calculamos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + \frac{e}{c}A_x \quad (\text{D.14})$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange para a componente x é

$$\frac{d}{dt}mv_x = -e\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{v} - \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} \quad (\text{D.15})$$

No último termo podemos aplicar a regra da cadeia e obter

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z}v_z \quad (\text{D.16})$$

O termo do meio de (D.15) é escrito explicitamente da forma

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{v} = \frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}v_z \quad (\text{D.17})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{dmv_x}{dt} &= e \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) v_y - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z \\ &= eE_x + \frac{e}{c}(B_x v_y - B_y v_z) \\ &= e \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \right)_x \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Expressões correspondentes são obtidas para as componentes y e z , de forma que obtemos

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{D.19})$$

que é a equação diferencial para uma partícula sujeita a força de Lorentz

Existem outros aspectos do formalismo Lagrangiano que é interessante abordar. No capítulo 2, vimos alguns deles, em particular, a existência de simetrias de calibre para Lagrangeanas singulares e quantidades conservadas via teorema de Noether. Passaremos agora para o formalismo Hamiltoniano que tem como objetivo obter um sistema de equações equivalentes as equações de Euler-Lagrange, mas de primeira ordem.

Para esses fins, considere a função H definida por

$$H = p_i \dot{q}^i - L \quad (\text{D.20})$$

onde p_i é denominado momento canonicamente conjugado a q^i , e definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (\text{D.21})$$

Essa função H é chamada Hamiltoniana. A princípio, essa função parece depender de q^i , \dot{q}^i e de p_i . No entanto, vamos ver que ela depende apenas de q e p . Para isso, considere variações infinitesimais dq^i , $d\dot{q}^i$ e dp_i . Logo

$$dH = p_i dq^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \quad (\text{D.22})$$

mas, de acordo com a definição (D.21), o primeiro e o quarto termo se cancelam, e temos

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \quad (\text{D.23})$$

O que mostra que $H = H(q, p)$.

Vejam agora quais equações são obtidas por meio do princípio de Hamilton, utilizando essa nova função. A ação é definida por

$$S = \int dt L = \int dt (p_i \dot{q}^i - H) \quad (\text{D.24})$$

Logo, temos

$$0 = \delta S = \int dt \left(p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \quad (\text{D.25})$$

Utilizando integração por partes, e considerando que as variações são nulas nas extremidades $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, temos

$$0 = \int dt \left\{ \left(-\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right\} \quad (\text{D.26})$$

Como as variações δq^i e δp_i são arbitrárias e independentes, obtemos as equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Exemplo 3: Partícula não relativística sob ação de um potencial

Considere novamente a Lagrangeana (D.7)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^i \dot{q}_i - V(q)$$

Os momenta canonicamente conjugados são dados por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m \dot{q}_i \quad (\text{D.28})$$

A função Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H = p_i \dot{q}^i - L &= p_i \left(\frac{p_i}{m} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{p_i}{m} \right) \left(\frac{p^i}{m} \right) + V(q) \\ H &= \frac{p_i p^i}{2m} + V(q) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

As equações de Hamilton são

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p^i}{m} \quad (\text{D.30})$$

que são equivalentes as conhecidas equações

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ \vec{F} &= \frac{d}{dt}\vec{p} \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Exemplo 4: Partícula carregada num campo eletromagnético

Já conhecemos a Lagrangeana (D.12)

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}$$

Vamos agora calcular a Hamiltoniana. Como antes, nos restringimos a calcular as equações para a componente x , e estendemos o raciocínio para y e z . Temos o momentum canonicamente conjugado

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + \frac{e}{c}A_x \quad (\text{D.32})$$

ou seja, escrevendo v_x em termos de p_x

$$v_x = \frac{p_x}{m} - \frac{e}{mc}A_x \quad (\text{D.33})$$

Agora, obtemos a Hamiltoniana

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\Phi \quad (\text{D.34})$$

Por fim, vamos analisar uma estrutura que aparece naturalmente no espaço das funções do espaço de fase: Os parênteses de Poisson. Considere uma função $f = f(q, p, t)$ das coordenadas, dos momenta e que pode, possivelmente, depender explicitamente do tempo. A evolução temporal dessa função pode ser escrita, por meio da regra da cadeia, da seguinte maneira

$$\dot{f}(q, p) = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p^i}\dot{p}^i + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{D.35})$$

Utilizando as equações de Hamilton, temos

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{D.36})$$

Definimos os parênteses de Poisson da seguinte maneira: Seja M o espaço das funções definidas no espaço de fase e $F, G \in M$. Então os parênteses de Poisson são uma operação

$$\{, \} : M \times M \rightarrow M$$

definida por

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (\text{D.37})$$

Assim, é possível escrever a evolução temporal de f como

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{D.38})$$

Os parênteses de Poisson satisfazem as seguintes propriedades:

i) Antissimetria

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (\text{D.39})$$

ii) Bilinearidade

$$\{cF + H, G\} = c\{F, G\} + \{H, G\}$$

$$\{F, cG + H\} = c\{F, G\} + \{F, H\} \quad (\text{D.40})$$

iii) Regra do Produto

$$\{FH, G\} = F\{H, G\} + \{F, G\}H$$

$$\{F, HG\} = H\{F, G\} + \{F, H\}G \quad (\text{D.41})$$

iv) Identidade de Jacobi

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0 \quad (\text{D.42})$$

Vamos agora discutir o problema de quantizar uma teoria na formulação Hamiltoniana. Como acabamos de ver, para uma dada variável dinâmica $f(q, p, t)$, a evolução temporal é dada por (D.38). Vamos recordar como é a evolução temporal de um dado operador A da mecânica quântica na formulação de Heinsberg. Seja $A = A^{(H)}(0)$ o operador no instante $t = 0$. O operador em um instante $t > 0$ pode ser obtido por meio da transformação unitária

$$A^{(H)}(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) A \mathcal{U}(t) \quad (\text{D.43})$$

sendo $\mathcal{U}(t)$ o operador unitário

$$\mathcal{U}(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) \quad (\text{D.44})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(H)}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{U}^\dagger}{\partial t} A \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger A \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger A \mathcal{U} + \frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger A \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} + \frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{i\hbar} [A, \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U}] + \frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} \end{aligned}$$

Isso é

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{D.45})$$

A semelhanças entre (D.38) e (D.45) sugere que as relações quânticas devem ser obtidas das análogas clássicas por substituição do tipo

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \hat{q} \\ p &\rightarrow \hat{p} \\ A(q, p) &\rightarrow \hat{A} \end{aligned}$$

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \quad (\text{D.46})$$

Dois pontos importantes suportam essas hipótese. Primeiramente, temos os parênteses fundamentais de Poisson

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{D.47})$$

que possuem análogos bem conhecidos dos comutadores envolvendo os operadores momento e posição

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (\text{D.48})$$

Em segundo lugar, temos que a álgebra dos Parênteses de Poisson é semelhante à dos comutadores, de forma que o último também satisfaz as relações (D.39)-(D.42)

Exemplo 5: Oscilador Harmônico Unidimensional

A Lagrangeana para um oscilador harmônico unidimensional é dada por

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \quad (\text{D.49})$$

A Hamiltoniana é obtida calculando o momento conjugado $p = m\dot{x}$ e fazendo a transformação de Legendre. Obtemos

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \quad (\text{D.50})$$

Temos que x e p são as variáveis canônicas do espaço de fase, de forma que eles satisfazem a relação

$$\{q, p\} = 1$$

$$\{q, q\} = \{p, p\} = 0 \quad (\text{D.51})$$

Utilizando a regra de quantização, obtemos

$$[q, p] = i\hbar$$

$$[q, q] = [p, p] = 0 \quad (\text{D.52})$$

Vamos ver como é a evolução temporal de x e p

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{2mi\hbar} [x, p^2] = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \frac{1}{i\hbar} [p, H] = \frac{k}{2i\hbar} [p, x^2] = -kx \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

que são exatamente as equações do oscilador harmônico

Um aspecto que será essencial em nossa análise de sistemas singulares é a presença de vínculos. Veremos que toda Lagrangeana singular dá origem a vínculos. Por isso, apresentaremos aqui o tratamento de sistemas vinculados com auxílio de multiplicadores de Lagrange. Embora a natureza dos vínculos sejam distintos (aqui, os vínculos são imposições mecânicas externas, enquanto que os vínculos que aparecem nas Lagrangeanas singulares são intrínsecas da teoria), veremos que a forma de incorporá-los a nossa teoria é muito similar.

Dizemos que existem vínculos quando existem relações algébricas entre as coordenadas. Esses vínculos podem ser classificados de varias maneiras: holonômico, não-holonômico, reononomo, escleronomo, etc[46]. Não queremos entrar nesse merito e chamaremos todas as relações algébricas de vínculos.

A existência de relações algébricas entre as coordenadas implica que nem todas as coordenadas são independentes, isso é, que o número de graus de liberdade é menor do que o número de coordenadas. Quando os vínculos são simples, podemos simplesmente escrever algumas variáveis em termos de outras e construir uma teoria num espaço de configurações reduzido. O problema é que nem sempre é possível (ou desejável) fazer esse procedimento. Pode ser que a eliminação de algumas variáveis suprima alguma simetria interessante do problema que, como vimos no capítulo 2, pode ser útil para tirar informações sobre o sistema. Buscamos então outra maneira de lidar com os vínculos de forma que mantemos todas as coordenadas do problema

Para esses fins, considere s vínculos, que denotaremos por

$$\phi_\alpha(q) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s \quad (\text{D.54})$$

Temos a ação dada por

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (\text{D.55})$$

e o princípio de Hamilton implica que

$$0 = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \quad (\text{D.56})$$

Pelo fato de termos vínculos, nem todos os δq^i são independentes. Para levar esse fato em conta, multiplicamos cada um dos vínculo por um (até o momento desconhecidos) fator λ^α , e somamos eles

$$\lambda^\alpha \phi_\alpha = 0 \quad (\text{D.57})$$

adicionando esse termo a ação e utilizando o princípio de Hamilton, temos

$$0 = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^i} \right) \delta q^i \quad (\text{D.58})$$

Os parâmetros λ^α são chamados multiplicadores de Lagrange. Eles podem ser escolhidos arbitrariamente.

Entre as N quantidades δq^i , apenas $N - s$ pode ser escolhidas arbitrariamente, já que as s relações algébricas devem ser satisfeitas. Numeramos os δq^i de forma que os s primeiros são os dependentes. As outras $N - s$ variações δq^i pode ser escolhidas arbitrariamente

Como os parâmetros λ^α são arbitrários, escolhemos eles de tal maneira que os coeficientes das s primeiras variações δq^i se anulem. Isso implica em s equações

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^j} = 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (\text{D.59})$$

Dessa maneira, a equação (D.58) se reduz a

$$0 = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^k} \right) \delta q^k \quad (\text{D.60})$$

onde o somatório de k vai de $s + 1$ até N . Nessa equação, todos os δq^k são independentes e arbitrários, o que implica que a expressão no interior dos parênteses devem se anular para todo valor de $k = s + 1, \dots, N$

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^k} = 0 \quad k = s + 1, \dots, N \quad (\text{D.61})$$

Esse conjunto de equações implica que

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{D.62})$$

Conseguimos obter as equações de movimento, mas em compensação, introduzimos variáveis λ^α desconhecidas para o nosso problema

Exemplo 6: Partícula restrita a mover-se numa superfície esférica

Considere uma partícula sujeita a um potencial $V(\vec{r})$ limitada a mover-se na superfície de uma esfera. Sua dinâmica é obtida por meio da Lagrangeana

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (\text{D.63})$$

junto com o vínculo

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (\text{D.64})$$

A presença de um vínculo implica que o número de graus de liberdade da partícula diminui de 3 para 2. De fato, como é uma partícula pontual, é coerente que sejam necessário somente duas coordenadas para descrever um ponto na superfície de uma esfera.

Para obter a dinâmica dessa partícula, poderíamos utilizar o vínculo para eliminar uma das variáveis. Por exemplo, poderíamos considerar z como a variável dependente e escrever

$$L(x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{d}{dt}\sqrt{R^2 - x^2 + y^2}\right)^2) - V(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 + y^2}) \quad z > 0$$

$$L(x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{d}{dt}\sqrt{R^2 - x^2 + y^2}\right)^2) - V(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 + y^2}) \quad z < 0 \quad (\text{D.65})$$

Outra possibilidade é escrever essa Lagrangeana em coordenadas esféricas

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r, \theta, \varphi) \quad (\text{D.66})$$

E, observando que o vínculo se torna

$$r = R \quad (\text{D.67})$$

Ficamos com a dinâmica determinada pela Lagrangeana

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(R, \theta, \varphi) \quad (\text{D.68})$$

Podemos também utilizar o método de multiplicadores de Lagrange. Vamos incorporar o vínculo na Lagrangeana:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \quad (\text{D.69})$$

As equações de movimento ficam

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} + 2\lambda x \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} + 2\lambda y \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial V}{\partial z} + 2\lambda z \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (\text{D.70})$$

Podemos perceber que o método dos multiplicadores de Lagrange apresenta algumas vantagens:

- i) Permite que encontremos as equações de movimento para x, y e z sem necessidade de troca ou substituição de variáveis.
- ii) Permite obter uma expressão explícita para a força que restringe o sistema a ficar no vínculo. Nesse caso, ela é dada por

$$\vec{F}_{\text{vinculo}} = 2\lambda\vec{r} \quad (\text{D.71})$$

A desvantagem óbvia é que introduzimos um parâmetro λ que não sabemos o que é. Será que ele pode ser determinado? Será que temos que impor uma condição externa para determiná-lo? Se ele

não puder ser determinado, o que significa isso? Essas questões serão abordadas em detalhes na próxima seção.

Agora que já fizemos uma revisão superficial das formulações Lagrangeana e Hamiltoniana, vamos analisar alguns desses pontos de maneira mais profunda, isso é, com uma visão de equações diferenciais ¹. Essa perspectiva nos dará base para discutir as diferenças que existem quando tratarmos sistemas singulares

Considere, como antes, uma ação

$$S = \int dt L(q^a, \dot{q}^a) \quad (\text{D.72})$$

O princípio de Hamilton $\delta S = 0$ implica nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \quad (\text{D.73})$$

Vamos expandir o primeiro do lado esquerdo utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q^b(t), \dot{q}^b(t))}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \ddot{q}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b$$

A matriz Hessiana W_{ij} é definida como em (2.75)

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$$

Podemos então escrever as equações de Euler-Lagrange da seguinte maneira

$$W_{ab} \ddot{q}^b = K_a(q, \dot{q}) \quad (\text{D.74})$$

em que K_a já foi definido em (2.20)

$$K_a(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b$$

Vamos introduzir as variáveis[25]

$$v^b(t), \quad b = 1, \dots, n \quad (\text{D.75})$$

tal que

$$\begin{cases} W_{ab} \ddot{q}^b = K_a \\ v^a = \dot{q}^a \end{cases} \quad (\text{D.76})$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} W_{ab}(q, v) \dot{v}^b = K_a(q, v) \\ \dot{q}^a = v^a \end{cases} \quad (\text{D.77})$$

¹ ver apêndice B para algumas propriedades

Se $\det(W_{ab}) \neq 0$ (sistemas não singulares), podemos colocar o sistema em forma normal

$$\begin{cases} \dot{q}^b = v^b \\ \dot{v}^b = (W^{-1})^{ba} K_a \end{cases} \quad (\text{D.78})$$

O sistema acima não é necessariamente Hamiltoniano. Vamos realizar a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} q'^a = q^a \\ p^a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a} \end{cases} \quad (\text{D.79})$$

Para verificar se essa relação é, de fato, uma transformação de variável, devemos calcular a matriz Jacobiana da transformação

$$\frac{\partial q'^a}{\partial q^b} = I_d$$

$$\frac{\partial p^a}{\partial v^b} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial v^a} = W_{ab} \quad (\text{D.80})$$

Como estamos supondo $\det(W_{ab}) \neq 0$, então é uma transformação de variável.

Com essa transformação, podemos escrever

$$\dot{p}_a = \frac{\partial p_a}{\partial q^b} v^b + \frac{\partial p_a}{\partial v^b} \dot{v}^b = \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial v^a} v^b + \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial v^a} \dot{v}^b = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^b} \right) \quad (\text{D.81})$$

e, utilizando a equação de movimento, escrevemos

$$\begin{cases} \dot{p}_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial q^a} \\ \dot{q}^a = v^a(q,p) \end{cases} \quad (\text{D.82})$$

mas de acordo com a regra da cadeia

$$\frac{\partial L(q, v(q,p))}{\partial q^a} = \frac{\partial L(q,v)}{\partial q^a} + \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^b} \frac{\partial v^b(q,p)}{\partial q^a} \quad (\text{D.83})$$

o que implica

$$\frac{\partial L(q,v)}{\partial q^a} = \frac{\partial L(q, v(q,p))}{\partial q^a} - p_b \frac{\partial v^b(q,p)}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a} (L(q, v(q,p)) - v^b(q,p)p_b) \quad (\text{D.84})$$

Definindo $H(q,p) = v^b(q,p)p_b - L(q, v(q,p))$, escrevemos

$$\dot{p}_a = - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q^a} \quad (\text{D.85})$$

Temos também

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_a} &= \frac{\partial}{\partial p_a} (p_b v^b(q,p) - L(q, v(q,p))) \\ &= v^a(q,p) + p_b \frac{\partial v^b(q,p)}{\partial p_a} - \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^b} \frac{\partial v^b(q,p)}{\partial p_a} = v^a(q,p) \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

Dessa forma, o sistema de equações diferenciais são escritas da seguinte maneira

$$\begin{cases} \dot{q}^a = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_a} \\ \dot{p}_a = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q^a} \end{cases} \quad (\text{D.87})$$

com $H(q, p) = p_a v^a(q, p) - L(q, v(q, p))$

Em resumo:

$$q^a(\tau) \xrightarrow{\text{reduz ordem}} (q^a, v^a) \xrightarrow{\text{troca de variaveis}} (q^a, p_a) \quad (\text{D.88})$$

É possível perceber que a possibilidade de escrever o sistema em forma Hamiltoniana e até mesmo definir a função H depende da possibilidade de poder realizar a troca de variáveis

$$(q^a, v^a) \xrightarrow{\text{troca de variaveis}} (q^a, p_a)$$

Isso só foi possível por que a matriz Hessiana W_{ab} era inversível. No caso de sistemas singulares, isso não ocorre e a passagem para um formalismo Hamiltoniano deve apresentar dificuldades. Essa questão é abordada no capítulo 3

D.2 Formalismo Simplético de Sistemas Não Vinculados

O método simplético foi desenvolvido para lidar com Lagrangeanas de primeira ordem. Isso não apresenta nenhuma restrição significativa, pois a maioria dos sistemas físicos de interesse são descritos por meio de Lagrangeanas quadráticas que, como veremos abaixo, sempre podem ser substituídas por uma Lagrangeana equivalente de primeira ordem ².

Para acostumar com a notação utilizada no método simplético, desenvolveremos nessa seção o formalismo para sistemas não vinculados.

Considere uma Lagrangeana $L(q, \dot{q})$ de segunda ordem, dada por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} W_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q) \quad (\text{D.89})$$

A matriz $W_{ij}(q)$ corresponde exatamente a matriz Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ discutida no capítulo 2, como podemos comprovar tomando a derivada em relação a \dot{q}^i em ambos os lados de (D.89) e depois em relação a \dot{q}^j .

Vamos calcular a Hamiltoniana associada. Os momentos conjugados são dados por

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} W_{ij}(q) (\delta_k^i \dot{q}^j + \delta_k^j \dot{q}^i) \quad (\text{D.90})$$

ou

$$p_k = W_{kj} \dot{q}^j \quad (\text{D.91})$$

² Quando a Lagrangeana não for de segunda ordem, é necessário avaliar, caso a caso, se é possível encontrar uma Lagrangeana equivalente de primeira ordem

onde usamos o fato que W_{ij} é simétrico nos índices i e j . Como estamos considerando inicialmente sistemas não vinculados, a matriz Hessiana é não singular, e podemos invertê-la, para obter

$$\dot{q}^i = W^{ij} p_j \quad (\text{D.92})$$

em que W^{ij} é a inversa de W_{ij}

$$W_{ij} W^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{D.93})$$

Assim, temos

$$H = p_i \dot{q}^i - L = W^{ij} p_i p_j - \frac{1}{2} W_{ij} W^{ik} p_k W^{jl} p_l + V(q) \quad (\text{D.94})$$

ou

$$H(q, p) = \frac{1}{2} W^{ij}(q) p_i p_j + V(q) \quad (\text{D.95})$$

Definimos a Lagrangeana de primeira ordem, denominada Lagrangeana simplética, por

$$L_S(q, p) = p_i \dot{q}^i - H(q, p) \quad (\text{D.96})$$

Note que, se considerarmos q^i e p_i como coordenadas (e não apenas q^i), essa Lagrangeana é de primeira ordem. Escrevemos então³

$$L_S = Q_{N+i} \dot{Q}^i - H(Q) \quad (\text{D.97})$$

com $Q_i = (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$. Falta somente mostrar que as duas Lagrangeanas são equivalentes. Para isso, vamos calcular as equações de movimento (Euler-Lagrange) para ambas:

I) Para $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} W_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q)$:

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \partial_k W_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \partial_k V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = W_{kj} \dot{q}^j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = W_{kj} \ddot{q}^j + \partial_l W_{kj} \dot{q}^j \dot{q}^l \quad (\text{D.98})$$

Assim

$$W_{kj} \ddot{q}^j + \partial_l W_{kj} \dot{q}^j \dot{q}^l - \frac{1}{2} \partial_k W_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \partial_k V = 0 \quad (\text{D.99})$$

II) Para $L_S(Q) = p_i \dot{q}^i - \frac{1}{2} W^{ij}(q) p_i p_j - V(q)$:

Primeiramente calculamos as equações de Euler-Lagrange para $(Q_1, \dots, Q_N) = (q^1, \dots, q^N)$:

$$\frac{\partial L_S}{\partial q^k} = -\frac{1}{2} \partial_k W^{ij} p_i p_j - \partial_k V$$

³ O que fizemos na realidade, é um processo chamado de redução de ordem. Para mais detalhes, ver apêndice B

$$\frac{\partial L_S}{\partial \dot{q}^k} = p_k \quad (\text{D.100})$$

Assim,

$$\dot{p}_k + \frac{1}{2} \partial_k W^{ij} p_i p_j + \partial_k V = 0 \quad (\text{D.101})$$

Agora, calculamos as equações de Euler-Lagrange para $(Q_{N+1}, \dots, Q_{2N}) = (p_1, \dots, p_N)$:

$$\frac{\partial L_S}{\partial p_k} = \dot{q}^k - W^{ki} p_i$$

$$\frac{\partial L_S}{\partial \dot{p}_k} = 0 \quad (\text{D.102})$$

Logo,

$$\dot{q}^k = W^{ki} p_i \quad (\text{D.103})$$

ou

$$p_i = W_{ij} \dot{q}^j \quad (\text{D.104})$$

Substituindo essa segunda equação na primeira, obtemos

$$\frac{d}{dt} W_{ij} \dot{q}^j + \frac{1}{2} \partial_k W^{ij} W_{il} \dot{q}^l W_{js} \dot{q}^s + \partial_k V = 0 \quad (\text{D.105})$$

Utilizando a regra do produto, o segundo termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_k W^{ij} W_{il} \dot{q}^l W_{js} \dot{q}^s &= \frac{1}{2} \partial_k (W^{ij} W_{il} W_{js}) \dot{q}^l \dot{q}^s - \frac{1}{2} W^{ij} W_{il} \partial_k W_{js} \dot{q}^l \dot{q}^s - \frac{1}{2} W^{ij} \partial_k W_{il} W_{js} \dot{q}^l \dot{q}^s \\ &= \frac{1}{2} \partial_k W_{ls} \dot{q}^l \dot{q}^s - \frac{1}{2} \partial_k W_{sl} \dot{q}^l \dot{q}^s - \frac{1}{2} \partial_k W_{sl} \dot{q}^l \dot{q}^s = -\frac{1}{2} \partial_k W_{js} \dot{q}^j \dot{q}^s \end{aligned} \quad (\text{D.106})$$

De forma que temos

$$W_{kj} \ddot{q}^j + \partial_l W_{kj} \dot{q}^j \dot{q}^l - \frac{1}{2} \partial_k W_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \partial_k V = 0 \quad (\text{D.107})$$

Mostramos então que as duas Lagrangeanas implicam nas mesmas equações de movimento, ou seja, são equivalentes.

Após essas considerações, é suficiente supor desde o princípio que a nossa teoria pode ser descrita por uma Lagrangeana de primeira ordem em coordenadas Q^a :

$$L_S = a_a(Q) \dot{Q}^a - V(Q) \quad (\text{D.108})$$

Nessa notação, as equações de movimento são:

$$\frac{\partial L_S}{\partial Q^a} = \partial_a a_b(Q) \dot{Q}^b - \partial_a V(Q)$$

$$\frac{\partial L_S}{\partial \dot{Q}^a} = a_a(Q)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_S}{\partial \dot{Q}^a} = \partial_b a_a(Q) \dot{Q}^b \quad (\text{D.109})$$

Dessa forma, temos

$$\partial_b a_a(Q) \dot{Q}^b - \partial_a a_b(Q) \dot{Q}^b + \partial_a V(Q) = 0 \quad (\text{D.110})$$

ou

$$f_{ba} \dot{Q}^b = -\partial_a V(Q) \quad (\text{D.111})$$

sendo $f_{ab} = \partial_a a_b - \partial_b a_a$, a matriz antissimétrica denominada matriz simplética. Suponhamos que ela seja singular. Isso implica que existem vetores não nulos no núcleo de f , isso é, $\text{Ker}[f] \neq \{\vec{0}\}$. Seja $\vec{v}(Q)$ um desses vetores. Então, aplicando em (D.111), temos

$$v^a(Q) \partial_a V(Q) = 0 \quad (\text{D.112})$$

Isso são relações entre coordenadas, ou seja, vínculos. Como estamos supondo um sistema não vinculado, f deve ser não singular, isso é, inversível. Logo, denotando f^{ab} como a inversa, temos

$$\dot{Q}^a = f^{ab} \partial_b V \quad (\text{D.113})$$

Agora buscamos uma estrutura que possa ser utilizada para o processo de quantização. No capítulo anterior, definimos os parênteses de Poisson no espaço de fase (q, p) por

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (\text{D.114})$$

para que as equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (\text{D.115})$$

pudessem ser escritas como

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \end{aligned} \quad (\text{D.116})$$

De maneira análoga, definimos os parênteses de Poisson no espaço de configurações de Q por

$$\{Q^a, Q^b\} = f^{ab} \quad (\text{D.117})$$

As duas definições devem ser compatíveis, pois toda Lagrangeana de segunda ordem possui uma Lagrangeana simplética associada. Assim, o caso em que $Q^i = q^i$, $Q^{i+N} = p_i$, $a_i = p_i$, $a_{N+i} = 0$ e $V = H$, com $i = 1, \dots, N$ e $a = 1, \dots, 2N$, como antes. Nesse caso em particular, denotaremos

$$f_{ab} = \omega_{ab}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} &= \frac{\partial a_j}{\partial Q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial Q^j} = \frac{\partial p_j}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial q^j} = 0 \\
\omega_{i(j+N)} &= \frac{\partial a_{j+N}}{\partial Q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial Q^{j+N}} = \frac{\partial 0}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\delta_{ij} \\
\omega_{i+Nj} &= \frac{\partial a_j}{\partial Q^{i+N}} - \frac{\partial a_{(i+N)}}{\partial Q^j} = \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial 0}{\partial q^j} = \delta_{ij} \\
\omega_{(i+N),(j+N)} &= \frac{\partial a_{j+N}}{\partial Q^{i+N}} - \frac{\partial a_{i+N}}{\partial Q^{j+N}} = \frac{\partial 0}{\partial p_i} - \frac{\partial 0}{\partial p_j} = 0
\end{aligned} \tag{D.118}$$

em termos matriciais, temos

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\text{nxn}} & -\mathbf{1}_{\text{nxn}} \\ \mathbf{1}_{\text{nxn}} & \mathbf{0}_{\text{nxn}} \end{pmatrix} \tag{D.119}$$

Sua inversa claramente é

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\text{nxn}} & \mathbf{1}_{\text{nxn}} \\ -\mathbf{1}_{\text{nxn}} & \mathbf{0}_{\text{nxn}} \end{pmatrix} \tag{D.120}$$

ou

$$\begin{aligned}
\omega^{ij} &= 0 \\
\omega^{i(j+N)} &= \delta^{ij} \\
\omega^{(i+N)j} &= -\delta^{ij} \\
\omega^{(i+N),(j+N)} &= 0
\end{aligned} \tag{D.121}$$

Então os Parênteses Fundamentais são

$$\begin{aligned}
\{Q^i, Q^j\} &= \{q^i, q^j\} = \omega^{ij} = 0 \\
\{Q^i, Q^{j+N}\} &= \{q^i, p_j\} = \omega^{i(j+N)} = \delta^{ij} \\
\{Q^{i+N}, Q^j\} &= \{p_i, q^j\} = \omega^{(i+N)j} = -\delta^{ij} \\
\{Q^{i+N}, Q^{j+N}\} &= \{p_i, p_j\} = \omega^{(i+N),(j+N)} = 0
\end{aligned} \tag{D.122}$$

que coincidem com a definição no espaço de fase. Por fim, note que o parênteses de Poisson entre duas funções quaisquer é dada por

$$\begin{aligned}
\{F, G\} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial q^i} + 1 \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} + (-1) \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + 0 \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial F}{\partial Q^i} \omega^{ij} \frac{\partial G}{\partial Q^j} + \frac{\partial F}{\partial Q^i} \omega^{i(j+N)} \frac{\partial G}{\partial Q^{(j+N)}} + \frac{\partial F}{\partial Q^{(i+N)}} \omega^{(i+N)j} \frac{\partial G}{\partial Q^j} + \frac{\partial F}{\partial Q^{(i+N)}} \omega^{(i+N)(j+N)} \frac{\partial G}{\partial Q^{(j+N)}}
\end{aligned} \tag{D.123}$$

ou

$$\{F, G\} = \partial_a F \omega^{ab} \partial_b G \tag{D.124}$$

Dessa forma, podemos ver que a equação de movimento também pode ser escrita em termos dos parênteses de Poisson:

$$\{Q^c, V\} = \partial_a Q^c \omega^{ab} \partial_b V = \delta_a^c \omega^{ba} \partial_b V = \omega^{ca} \partial_a V = \dot{Q}^c \quad (\text{D.125})$$

Após essa breve discussão, podemos concluir que (D.117) é uma boa definição para os parênteses de Poisson no espaço de configurações de Q . Assim, a quantização canônica pode ser obtida por

$$Q^a \rightarrow \hat{Q}^a$$

$$[\hat{Q}^a, \hat{Q}^b] = i f^{ab} \quad (\text{D.126})$$

Precisamos agora discutir o caso geral, onde as coordenadas Q^a não podem ser todas identificadas com o espaço de fase (q, p) . Nesse caso, a matriz simplética f_{ab} não necessariamente assume a forma simples dada por ω_{ab} . No entanto, existe um importante teorema, conhecido como Teorema de Darboux, que pode ser formulado da seguinte maneira:

Seja $f_{ab}(Q)$ um tensor obtido de um covetor $a_a(Q)$ por meio da relação
 $f_{ab}(Q) = \partial_a a_b(Q) - \partial_b a_a(Q)$. Se $f_{ab}(Q)$ é não degenerado,
 isso é, se existe uma inversa $f^{ab}(Q)$, então existe uma transformação de coordenada
 $Q^a \rightarrow \xi^a$ tal que $f_{ab}(\xi) = \omega_{ab}$

A demonstração geral pode ser encontrado em [51,52]. Uma demonstração mais direcionada para nossos fins encontra-se em [14]. Esse teorema não é trivial, sendo necessário refletir um pouco para entender as sutilezas. Mas de forma geral, a situação é a seguinte: Temos uma Lagrangeana simplética escrita em termos de coordenadas Q^a :

$$L_S = a_a(Q) \dot{Q}^a - V(Q) \quad (\text{D.127})$$

Nessas coordenadas, a matriz simplética $f_{ab}(Q) = \frac{\partial a_b(Q)}{\partial Q^a} - \frac{\partial a_a(Q)}{\partial Q^b}$ assume uma forma complicada. Mas o teorema de Darboux garante que, se f for inversível, sempre existem coordenadas ξ^a nas quais temos $f_{ab}(\xi) = \omega_{ab}$. Em geral, basta encontrar essa transformação de coordenada, o que não é, em geral, uma tarefa fácil.

APÊNDICE E – Outros Exemplos e Aplicações

E.1 Formalismo de Dirac

Exemplo E.1: Considere a Lagrangeana

$$L = \dot{x}\dot{y} - z(x + y) \quad (\text{E.1})$$

Os momentos canonicamente conjugados são

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{y}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{x}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (\text{E.2})$$

Daí tiramos o vínculo primário

$$\phi_1 = p_z = 0 \quad (\text{E.3})$$

Agora podemos construir a Hamiltoniana canônica

$$H_c = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x p_y + z(x + y) \quad (\text{E.4})$$

e a Hamiltoniana total

$$H_T = p_x p_y + z(x + y) + \lambda p_z \quad (\text{E.5})$$

sendo λ um multiplicador de Lagrange. Os parênteses de Poisson fundamentais são

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \{z, p_z\} = 1 \quad (\text{E.6})$$

e todos os outros nulos. Para que a dinâmica permaneça coerente, aplicamos a condição de consistência

$$\dot{\phi}_1 = \{p_z, H_T\} = 0$$

$$\{p_z, z(x + y)\} = (x + y) \{p_z, z\} = 0 \quad (\text{E.7})$$

que implica no vínculo secundário

$$\phi_2 = x + y = 0 \quad (\text{E.8})$$

Aplicamos também para $\phi_2 = 0$ a condição de consistência

$$\dot{\phi}_2 = \{x + y, H_T\} = 0$$

$$\{x + y, p_x p_y\} = p_y \{x, p_x\} + p_x \{y, p_y\} = 0 \quad (\text{E.9})$$

Temos então o vínculo secundário

$$\phi_3 = p_x + p_y = 0 \quad (\text{E.10})$$

Assim como antes, temos

$$\dot{\phi}_3 = \{p_x + p_y, H_T\} = 0$$

$$\{p_x + p_y, z(x + y)\} = z(\{p_x, x\} + \{p_y, y\}) = 0 \quad (\text{E.11})$$

Obtemos o vínculo

$$\phi_4 = z = 0 \quad (\text{E.12})$$

Condição de consistência para $\phi_4 = 0$

$$\dot{\phi}_4 = \{z, H_T\} = 0$$

$$\lambda \{z, p_z\} = 0 \quad (\text{E.13})$$

Não obtemos mais vínculos, e determinamos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda = 0 \quad (\text{E.14})$$

Agora, precisamos determinar se os vínculos são de primeira ou segunda classe. Para isso, calculamos os parênteses de Poisson $\{\phi_i, \phi_j\}$:

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_2\} &= \{p_z, x + y\} = 0 \\ \{\phi_1, \phi_3\} &= \{p_z, p_x + p_y\} = 0 \\ \{\phi_1, \phi_4\} &= \{p_z, z\} = -1 \\ \{\phi_2, \phi_3\} &= \{x + y, p_x + p_y\} = \{x, p_x\} + \{y, p_y\} = 2 \\ \{\phi_2, \phi_4\} &= \{x + y, p_z\} = 0 \\ \{\phi_3, \phi_4\} &= \{p_x + p_y, z\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Podemos ver que todos os vínculos são de segunda classe, já que $\{\phi_1, \phi_4\} \neq 0$ e $\{\phi_2, \phi_3\} \neq 0$. Utilizando a notação apresentada na teoria, temos

$$\xi_1 = p_z = 0, \quad \xi_2 = x + y = 0, \quad \xi_3 = p_x + p_y = 0, \quad \xi_4 = z = 0 \quad (\text{E.16})$$

Para obter os parênteses de Dirac, calculamos primeiramente a matriz Δ

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.17})$$

cuja inversa é obtida imediatamente

$$\Delta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.18})$$

Podemos encontrar agora os parênteses de Dirac. Para isso, sejam A e B duas funções arbitrárias. Então

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D &= \{A, B\} - \{A, \xi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, B\} \\ &= \{A, B\} - \{A, p_z\} \{z, B\} + \frac{1}{2} \{A, x + y\} \{p_x + p_y, B\} - \frac{1}{2} \{A, p_x + p_y\} \{x + y, B\} + \{A, z\} \{p_z, B\} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Logo, os parênteses de Dirac fundamentais são

$$\{x, y\}_D = 0, \quad \{x, z\}_D = 0, \quad \{x, p_x\}_D = \frac{1}{2}, \quad \{x, p_y\}_D = -\frac{1}{2}, \quad \{x, p_z\}_D = 0$$

$$\{y, z\}_D = 0, \quad \{y, p_x\}_D = -\frac{1}{2}, \quad \{y, p_y\}_D = \frac{1}{2}, \quad \{y, p_z\}_D = 0$$

$$\{z, p_x\}_D = 0, \quad \{z, p_y\}_D = 0, \quad \{z, p_z\}_D = 0$$

$$\{p_x, p_y\}_D = 0, \quad \{p_x, p_z\}_D = 0$$

$$\{p_y, p_z\}_D = 0 \quad (\text{E.20})$$

Como já discutimos, após obter os parênteses de Dirac, é possível igualar os vínculos igual a zero ¹ Façamos isso

$$z = 0, \quad p_z = 0, \quad p_y = -p_x, \quad y = -x$$

$$H_T = -p_x^2 \quad (\text{E.21})$$

Assim, o único parênteses de Dirac necessário é

$$\{x, p_x\}_D = \frac{1}{2} \quad (\text{E.22})$$

O número de graus de liberdade do sistema é

Número de graus de liberdade = $\frac{1}{2}$ **Número total de variáveis canônicas** - $\frac{1}{2}$ **Número de vínculos de segunda classe** = $\frac{1}{2}6 - \frac{1}{2}4 = 1$

o que é esperado, já que todas as variáveis relevantes podem ser escritas em termos de x e p_x .

¹ Como você mesmo pode notar, todos os parênteses de Dirac entre z e outras quantidades é igual a zero, já que $z = 0$. De forma equivalente, para p_z

A quantização canônica é direta:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \hat{x}, & p_x &\rightarrow \hat{p}_x \\ \hat{H}_T &= -\hat{p}_x^2 \\ [\hat{x}, \hat{p}_x] &= \frac{i\hbar}{2}\end{aligned}\tag{E.23}$$

Exemplo E.2: Considere a Lagrangeana

$$L = (q_2 + q_1)\dot{q}_1 + q_4\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2)\tag{E.24}$$

Os momentos canonicamente conjugados são

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = q_2 + q_1, & p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0 \\ p_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = q_4, & p_4 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = 0\end{aligned}\tag{E.25}$$

Obtemos então os vínculos primários

$$\phi_1 = p_1 - q_2 - q_1 = 0, \quad \phi_2 = p_3 - q_4 = 0\tag{E.26}$$

A Hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 + p_4\dot{q}_4 - L(q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = -\frac{1}{2}(q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2)\tag{E.27}$$

e a Hamiltoniana total é

$$H_T = -\frac{1}{2}(q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) + \lambda_1(p_1 - q_2 - q_1) + \lambda_2 p_2 + \lambda_3(p_3 - q_4) + \lambda_4 p_4\tag{E.28}$$

com os parênteses de Poisson canônicos

$$\{q_1, p_1\} = \{q_2, p_2\} = \{q_3, p_3\} = \{q_4, p_4\} = 1\tag{E.29}$$

e todos os outros zero. Aplicamos agora a condição de consistência para os vínculos primários:

i) Para $\phi_1 = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \{p_1 - q_2 - q_1, H_T\} = 0 \\ \{p_1 - q_2 - q_1, \lambda_2 p_2\} &= -\lambda_2 \{q_2, p_2\} = 0\end{aligned}\tag{E.30}$$

Determinamos então um dos multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_2 = 0\tag{E.31}$$

ii) Para $\phi_2 = 0$

$$\dot{\phi}_2 = \{p_3 - q_4, H_T\} = 0$$

$$\left\{ p_2, \left(-\frac{1}{2} (q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \right) \right\} - \{ p_2, \lambda_1(p_1 - q_2 - q_1) \} = 0 \quad (\text{E.32})$$

Obtemos então

$$\lambda_1 = q_3 \quad (\text{E.33})$$

iii) Para $\phi_3 = 0$

$$\dot{\phi}_3 = \{ p_3 - q_4, H_T \} = 0$$

$$\left\{ p_3, \left(-\frac{1}{2} (q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \right) \right\} - \{ q_4, \lambda_4 p_4 \} = 0 \quad (\text{E.34})$$

ou

$$\lambda_4 = -q_2 - q_3 \quad (\text{E.35})$$

iv) Para $\phi_4 = 0$

$$\dot{\phi}_4 = \{ p_4, H_T \} = 0$$

$$\left\{ p_3, \left(-\frac{1}{2} (q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \right) \right\} + \{ p_4, \lambda_3(p_3 - q_4) \} = 0 \quad (\text{E.36})$$

Obtemos assim

$$\lambda_3 = -q_4 \quad (\text{E.37})$$

Vimos que todos os multiplicadores de Lagrange foram determinados. Isso é uma indicação que os vínculos são de segunda classe. De fato, note que

$$\{ \phi_1, \phi_2 \} = \{ p_1 - q_2 - q_1, p_2 \} = -1$$

$$\{ \phi_1, \phi_3 \} = \{ p_1 - q_2 - q_1, p_3 - q_4 \} = 0$$

$$\{ \phi_1, \phi_4 \} = \{ p_1 - q_2 - q_1, p_4 \} = 0$$

$$\{ \phi_2, \phi_3 \} = \{ p_2, p_3 - q_4, \phi_2 \} = 0$$

$$\{ \phi_2, \phi_4 \} = \{ p_2, p_4 \} = 0$$

$$\{ \phi_3, \phi_4 \} = \{ p_3 - q_4, p_4 \} = -1 \quad (\text{E.38})$$

De fato, todos os vínculos são de segunda classe. Escrevemos então

$$\xi_1 = p_1 - q_2 - q_1 = 0, \quad \xi_2 = p_2 = 0, \quad \xi_3 = p_3 - q_4 = 0, \quad \xi_4 = p_4 = 0 \quad (\text{E.39})$$

Partimos agora para o cálculo dos parênteses de Dirac. A matriz Δ é

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.40})$$

cuja inversa é

$$\Delta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.41})$$

Assim, considerando duas funções A e B , temos

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \xi_\mu\} \Delta^{\mu\nu} \{\xi_\nu, B\}$$

$$= \{A, B\} - \{A, p_1 - q_2 - q_1\} \{p_2, B\} + \{A, p_2\} \{p_1 - q_2 - q_1, B\} - \{A, p_3 - q_4\} \{p_4, B\} + \{A, p_4\} \{p_3 - q_4, B\} \quad (\text{E.42})$$

Logo, os parênteses de Dirac fundamentais são

$$\begin{aligned} \{q_1, q_2\}_D = 1 \quad \{q_1, q_3\}_D = 0, \quad \{q_1, q_4\}_D = 0, \quad \{q_1, p_1\}_D = 1, \quad \{q_1, p_2\}_D = 0, \quad \{q_1, p_3\}_D = 0, \quad \{q_1, p_4\}_D = 0 \\ \{q_2, q_3\}_D = 0 \quad \{q_2, q_4\}_D = 0, \quad \{q_2, p_1\}_D = -1, \quad \{q_2, p_2\}_D = 0, \quad \{q_2, p_3\}_D = 0, \quad \{q_2, p_4\}_D = 0 \\ \{q_3, q_4\}_D = 1 \quad \{q_3, p_1\}_D = 0, \quad \{q_3, p_2\}_D = 0, \quad \{q_3, p_3\}_D = 1, \quad \{q_3, p_4\}_D = 0 \\ \{q_4, p_1\}_D = 0, \quad \{q_4, p_2\}_D = 0, \quad \{q_4, p_3\}_D = 0, \quad \{q_4, p_4\}_D = 0 \\ \{p_1, p_2\}_D = 0, \quad \{p_1, p_3\}_D = 0, \quad \{p_1, p_4\}_D = 0 \\ \{p_2, p_3\}_D = 0, \quad \{p_2, p_4\}_D = 0 \\ \{p_3, p - 4\}_D = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

Após obter os parênteses de Dirac, podemos igualar os vínculos a zero:

$$p_1 = q_1 + q_2, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = q_4, \quad p_4 = 0$$

$$H_T = -\frac{1}{2} (q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \quad (\text{E.44})$$

de forma que, os únicos parênteses de Dirac necessários são

$$\begin{aligned} \{q_1, q_2\}_D = 1 \quad \{q_1, q_3\}_D = 0, \quad \{q_1, q_4\}_D = 0 \\ \{q_2, q_3\}_D = 0 \quad \{q_2, q_4\}_D = 0, \quad \{q_3, q_4\}_D = 1 \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Como podemos ver, os momentos canonicamente conjugados são apenas artifícios matemáticos introduzidos para realizar o formalismo, e não representam nenhuma física.

Calculamos agora o número de graus de liberdade do sistema:

$$\text{Número de graus de liberdade} = \frac{1}{2}8 - \frac{1}{2}4 = 2$$

Pode parecer estranho para o leitor que o sistema apresente somente dois graus de liberdade, já que não temos vínculos entre as quatro coordenadas (q_1, q_2, q_3, q_4) . No entanto, observando os parênteses de Dirac, podemos notar que q_2 e q_4 fazem o papel de momentos canonicamente conjugados a q_1 e q_3 , respectivamente.

Por fim, a quantização canônica segue diretamente da nossa prescrição

$$\begin{aligned}
 q_1 &\rightarrow \hat{q}_1, & q_3 &\rightarrow \hat{q}_3 \\
 q_1 &\rightarrow \hat{q}_1, & q_4 &\rightarrow \hat{q}_4 \\
 \hat{H} &= -\frac{1}{2} \left(\hat{q}_4^2 - 2\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_3^2 \right) \\
 [\hat{q}_1, \hat{q}_2] &= i\hbar & [\hat{q}_1, \hat{q}_3] &= 0, & [\hat{q}_1, \hat{q}_4] &= 0 \\
 [\hat{q}_2, \hat{q}_3] &= 0 & [\hat{q}_2, \hat{q}_4] &= 0, & [\hat{q}_3, \hat{q}_4] &= i\hbar
 \end{aligned} \tag{E.46}$$

E.3: Partícula Não Relativística na Superfície de uma Esfera

Considere a Lagrangeana (D.63) sujeita ao vínculo (D.64)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) + \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \tag{E.47}$$

com $m = R = 1$. Note que, se considerarmos (x, y, z) como as coordenadas, temos um sistema não vinculado, isso é, $\frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ se torna simplesmente um potencial. Isso ocorre porque o formalismo de Dirac foi desenvolvido para trabalhar com vínculos provenientes de Lagrangeanas singulares. Para comunicar os vínculos mecânicos externos ao formalismo, é necessário considerar λ como uma coordenada, de forma que

$$L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \lambda) \tag{E.48}$$

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
 p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}, & p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \\
 p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, & \pi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0
 \end{aligned} \tag{E.49}$$

Obtemos o vínculo primário

$$\phi_1 = \pi = 0 \tag{E.50}$$

Realizando a transformação de Legendre e adicionando o vínculo primário com um multiplicador de Lagrange apropriado, temos a Hamiltoniana total

$$H_T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) - \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \epsilon\pi \tag{E.51}$$

É importante resaltar que, da maneira que estamos fazendo, λ é coordenada e ϵ é multiplicador de Lagrange.

Os parênteses de Poisson canônicos são

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \{z, p_z\} = \{\lambda, \pi\} = 1 \quad (\text{E.52})$$

e todos os outros nulos.

Vamos aplicar a condição de consistência para o vínculo $\phi_1 = 0$

$$\dot{\phi}_1 = \{\pi, H_T\} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \{\pi, \lambda\} = 0$$

o vínculo secundário obtido é

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \quad (\text{E.53})$$

Aplicando a condição de consistência a ele, temos

$$0 = \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), H_T \right\} = x \left\{ x, \frac{1}{2}p_x^2 \right\} + y \left\{ y, \frac{1}{2}p_y^2 \right\} + z \left\{ z, \frac{1}{2}p_z^2 \right\}$$

de forma que encontramos o vínculo

$$\phi_3 = xp_x + yp_y + zp_z = 0 \quad (\text{E.54})$$

A condição deve também ser aplicada a esse vínculo

$$0 = \{xp_x, H_T\} + \{yp_y, H_T\} + \{zp_z, H_T\} \quad (\text{E.55})$$

Como a Hamiltoniana total é simétrica em relação a x, y e z , é suficiente calcular um desses parênteses de Poisson. Os outros seguem de maneira análoga. Vamos escolher o primeiro:

$$\begin{aligned} \{xp_x, H_T\} &= x \left\{ p_x, V(x, y, z) - \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \right\} + p_x \left\{ x, \frac{1}{2}p_x^2 \right\} = \\ &= x \{p_x, V(x, y, z)\} - x^2\lambda \{p_x, x\} + p_x^2 \{x, p_x\} \\ &= -x \frac{\partial V}{\partial x} + x^2\lambda + p_x^2 \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

Logo, obtemos o vínculo

$$\phi_4 = -x \frac{\partial V}{\partial x} - y \frac{\partial V}{\partial y} - z \frac{\partial V}{\partial z} + (x^2 + y^2 + z^2)\lambda + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 0 \quad (\text{E.57})$$

Note que essa relação é, de fato, um vínculo, já que aqui λ é uma coordenada.

Com o objetivo de escrever essas equações de forma mais compacta, introduzimos a notação

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}, \quad r = |\vec{r}|, \quad p = |\vec{p}| \quad (\text{E.58})$$

Assim, temos

$$\phi_4 = -r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2\lambda + p^2 = 0 \quad (\text{E.59})$$

sendo $\frac{\partial V}{\partial r} = \hat{r} \cdot \text{grad}V$ a derivada direcional em r . Por fim, a condição de consistência para $\phi_4 = 0$ determina o multiplicador de Lagrange ϵ , sendo a expressão explícita não importante para nosso objetivo.

Agora que já obtemos todos os vínculos, precisamos calcular os parênteses de Poisson entre eles

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_2\} &= 0 & \{\phi_1, \phi_3\} &= 0, & \{\phi_1, \phi_4\} &= -1 \\ \{\phi_2, \phi_3\} &= 1, & \{\phi_2, \phi_4\} &= 0 \\ \{\phi_3, \phi_4\} &= r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \nabla^2 V + 4p^2 \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

Todos os vínculos são de segunda classe. A matriz $\Delta_{\mu\nu}$ é dada por

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \nabla^2 V + 4p^2 \\ 1 & 0 & r - \frac{\partial V}{\partial r} - r^2 \nabla^2 V - 4p^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.61})$$

cuja inversa é

$$\Delta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \nabla^2 V + 4p^2 & 0 & 1 \\ -r \frac{\partial V}{\partial r} - r^2 \nabla^2 V - 4p^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.62})$$

Calculamos então os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D &= \{A, B\} - \frac{r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \nabla^2 V + 4p^2}{2} \{A, \pi\} \{r^2, B\} - \{A, \pi\} \left\{ -r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \lambda + p^2, B \right\} + \\ &+ \frac{r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \nabla^2 V + 4p^2}{2} \{A, r^2\} \{\pi, B\} + \frac{1}{2} \{A, r^2\} \{\vec{r} \cdot \vec{p}, B\} - \frac{1}{2} \{A, \vec{r} \cdot \vec{p}\} \{r^2, B\} + \\ &+ \left\{ A, -r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \lambda + p^2 \right\} \{\pi, B\} \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

Obtemos os parênteses de Dirac fundamentais

$$\begin{aligned} \{x, y\}_D &= 0, & \{x, z\}_D &= 0, & \{x, p_x\}_D &= 1 - x^2, & \{x, p_y\}_D &= -xy, & \{x, p_z\}_D &= -xz \\ \{y, z\}_D &= 0, & \{y, p_x\}_D &= -xy, & \{y, p_y\}_D &= 1 - y^2, & \{y, p_z\}_D &= -yz \\ \{z, p_x\}_D &= -xz, & \{z, p_y\}_D &= -yz, & \{z, p_z\}_D &= 1 - z^2 \\ \{p_x, p_y\}_D &= yp_x - xp_y, & \{p_x, p_z\}_D &= zp_x - xp_z \\ \{p_y, p_z\}_D &= zp_y - yp_z \end{aligned} \quad (\text{E.64})$$

Não calculamos os parênteses de Dirac com λ por duas razões: a) λ não é uma coordenada real; b) como todos os vínculos são de segunda classe, podemos escrever λ em termos de \vec{r} e \vec{p} , de acordo com (E.59), que faremos abaixo

Agora que já calculamos os parênteses de Dirac, podemos igualar os vínculos a zero, e escrever

$$r^2 = 1, \quad \vec{r} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\lambda = r \frac{\partial V}{\partial r} - p^2, \quad \pi = 0$$

$$H_T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (\text{E.65})$$

As duas primeiras equações de (E.65) são vínculos mecânicos reais do problema, indicando que a partícula sempre está sobre uma esfera de raio 1 e que a velocidade da partícula é sempre tangencial². As outras duas permite a eliminação das “coordenadas” λ e π em função de (x, y, z, p_x, p_y, p_z) .

Vamos, como aplicação, encontrar as equações de movimento, e mostrar que elas coincidem com as equações (D.70), com λ dado como em (E.65). Temos, para x :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \{x, H_T\}_D &= \frac{1}{2} \{x, p_x^2\}_D + \frac{1}{2} \{x, p_y^2\}_D + \frac{1}{2} \{x, p_z^2\}_D = p_x(1 - x^2) - p_y x y - p_z x z = \\ &= p_x - x(\vec{r} \cdot \vec{p}) = p_x \end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

Além disso

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = \{p_x, H_T\}_D &= \frac{1}{2} \{p_x, p_y^2\}_D + \frac{1}{2} \{p_x, p_z^2\}_D + \{p_x, V(x, y, z)\}_D \\ &= -p_y(x p_y - y p_x) + p_z(z p_x - x p_z) + \frac{\partial V}{\partial x}(x^2 - 1) + \frac{\partial V}{\partial y} y x + \frac{\partial V}{\partial z} z x \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

Lembrando que o momento angular da partícula é dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, podemos escrever

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} + x(\vec{r} \cdot \nabla V) - (\vec{p} \times \vec{L})_x \quad (\text{E.68})$$

Por outro lado, temos a relação vetorial

$$\vec{p} \times \vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} \times \vec{p} = p^2 \vec{x} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{p} = p^2 \vec{x} \quad (\text{E.69})$$

Logo

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} + x(\vec{r} \cdot \nabla V - p^2) \quad (\text{E.70})$$

² Lembre que esse segundo vínculo foi originado da condição de consistência aplicado ao primeiro. O fato que a partícula fica sempre na esfera implicou que a velocidade é sempre tangencial, o que é bem coerente

De forma análoga para y e z , temos

$$\dot{\vec{r}} = \vec{p}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla V + (\vec{r} \cdot \nabla V - p^2)\vec{r} \quad (\text{E.71})$$

ou, equivalentemente,

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V + (\vec{r} \cdot \nabla V - p^2)\vec{r} \quad (\text{E.72})$$

Esse problema é um caso particular do modelo

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) + \frac{\lambda}{2}(q^2 - 1) \quad (\text{E.73})$$

com $\vec{q} = (q^1, \dots, q^N)$. Não é difícil concluir, observando (E.64), que os parênteses de Dirac são

$$\{q^a, q_b\}_D = 0, \quad \{q^a, p_b\}_D = \delta_b^a - q^a q_b, \quad \{p^a, p_b\}_D = p^a q_b - q^a p_b \quad (\text{E.74})$$

E.4: A Partícula Relativística A ação de uma partícula livre relativística de massa m é [47]

$$S = -m \int ds \quad (\text{E.75})$$

sendo ds o intervalo invariante do espaço de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{E.76})$$

Podemos parametrizar a curva por um parâmetro arbitrário³ τ . Assim, vem

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\tau^2 = \dot{x}^2 d\tau^2 \quad (\text{E.77})$$

Substituindo na ação, temos:

$$S = -m \int \sqrt{\dot{x}^2} d\tau \quad (\text{E.78})$$

Assim, encontramos a Lagrangeana

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2} \quad (\text{E.79})$$

Os momentos canonicamente conjugados são dados por

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \quad (\text{E.80})$$

Embora não seja aparente, temos um vínculo primário. Para ver isso, calculamos p^2 :

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = m^2 \quad (\text{E.81})$$

³ arbitrário até certo ponto: entre dois pontos quaisquer da trajetória τ deve crescer - ou decrescer - monotonicamente

ou seja, temos o vínculo primário

$$\phi_1 = p^2 - m^2 = 0 \quad (\text{E.82})$$

Calculando a Hamiltoniana canônica, encontramos

$$H_c = p_\mu \dot{x}^\mu - L(x, p) = -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu + m\sqrt{\dot{x}^2} = 0 \quad (\text{E.83})$$

e a Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \lambda(p^2 - m^2) \quad (\text{E.84})$$

Temos também os parênteses de Poisson fundamentais

$$\{x^\mu, x_\nu\} = 0, \quad \{p^\mu, p_\nu\} = 0, \quad \{x^\mu, p_\nu\} = \delta_\nu^\mu \quad (\text{E.85})$$

Aplicamos a condição de consistência para o vínculo primário $\phi_1 = 0$

$$\dot{\phi}_1 = \{(p^2 - m^2), H_T\} = 0 \quad (\text{E.86})$$

Como H_T não depende de x^μ , a condição de consistência é satisfeita identicamente. Dessa forma, não há mais vínculos na teoria e não é possível determinar o multiplicador de Lagrange. Por essa razão, o vínculo é de primeira classe ⁴. De acordo com a nossa notação, escrevemos

$$\gamma = p^2 - m^2 = 0 \quad (\text{E.87})$$

Esse vínculo é, portanto, gerador de transformações de calibre. Considere então uma função $F(t)$. A transformação de gauge induzida por $\gamma = 0$ é dada por

$$\delta F = \epsilon \{F, (P^2 - m^2)\} = 2p^\nu \{F, p_\nu\} \epsilon \quad (\text{E.88})$$

Em particular, a transformação de calibre das coordenadas x^μ são dadas por

$$\delta x^\mu = 2p^\nu \{x^\mu, p_\nu\} \epsilon = 2p^\mu \epsilon \quad (\text{E.89})$$

O parâmetro ϵ fica arbitrário. De fato, vamos verificar que essa transformação deixa a ação invariante:

$$\delta L = -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \delta \dot{x}^\mu = p_\mu \delta \dot{x}^\mu \quad (\text{E.90})$$

Inserindo (E.89) em (E.90), temos

$$\delta L = p_\mu \frac{d}{d\tau} (2p^\mu \epsilon) = 2p^2 \dot{\epsilon} + 2\epsilon p_\mu \dot{p}^\mu = \frac{d}{d\tau} (2m^2 \epsilon) + \underbrace{\epsilon \frac{d}{d\tau} (p^2)}_0 = \frac{d}{d\tau} (2m^2 \epsilon) \quad (\text{E.91})$$

Isso é, como a variação da Lagrangeana é igual a uma derivada total, a ação é invariante perante essa transformação.

⁴ Você também pode garantir que o vínculo é de primeira classe lembrando que vínculos de segunda classe sempre aparecem em numero par

Vamos agora obter uma teoria quântica da partícula relativística. Para isso, utilizaremos o processo de quantização descrito anteriormente. O primeiro passo é implementar condições de gauge. Existem várias maneiras fazer isso. Utilizaremos aqui a condição de gauge $x^0 = \tau$, que implica no vínculo

$$\phi_2 = x^0 - \tau = 0 \quad (\text{E.92})$$

Precisamos verificar se essa fixação respeita as quatro condições discutidas na seção 3.3. A primeira condição é que o conjunto (ϕ_1, ϕ_2) seja de segunda classe. De fato, temos

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{(p^2 - m^2), (x^0 - \tau)\} = -2p^0 \quad (\text{E.93})$$

Assim, a primeira condição é satisfeita. A segunda condição é que a condição de consistência não implique em novos vínculos. Temos

$$\dot{\phi}_2 = \{(x^0 - \tau), H_T\} = \lambda \{x^0, (p^2 - m^2)\} = 2\lambda p^0 = 0 \quad (\text{E.94})$$

Realmente, a condição de consistência só implica na determinação do valor do multiplicador de Lagrange λ . A terceira condição é que seja possível chegar nessa condição por meio de uma transformação de calibre. Para isso, suponha que x^0 não satisfaça essa condição. Basta escolher

$$\epsilon(\tau) = \frac{\tau - x^0}{2p^0} \quad (\text{E.95})$$

que temos

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow \tilde{x}^0 = x^0 + 2p^0 \left(\frac{\tau - x^0}{2p^0} \right) = \tau \\ x^i &\rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \frac{p^i}{p^0} (\tau - x^0) \end{aligned} \quad (\text{E.96})$$

Por fim, precisamos verificar que a invariância de Poincaré da teoria não é perdida. Para isso, precisamos verificar que as seguintes relações são válidas[25]

$$\begin{aligned} \{P^\mu, P^\nu\}_D &= 0 \\ \{M^{\alpha\beta}, P^\mu\}_D &= \eta^{\mu\alpha} P^\beta - \eta^{\mu\beta} P^\alpha \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\}_D &= C_{\lambda\rho}^{\mu\nu\alpha\beta} M^{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

onde

$$P^\mu = p^\mu$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad (\text{E.98})$$

e

$$C_{\lambda\rho}^{\mu\nu\alpha\beta} = -\eta_\lambda^\alpha \eta_\rho^\mu \eta^{\nu\beta} + \eta_\lambda^\alpha \eta_\rho^\nu \eta^{\mu\beta} - \eta_\lambda^\mu \eta_\rho^\beta \eta^{\nu\alpha} + \eta_\lambda^\nu \eta_\rho^\beta \eta^{\mu\alpha} \quad (\text{E.99})$$

Deixaremos isso mais para frente, após obtermos os parênteses de Dirac.

Agora podemos passar para o cálculo dos parênteses de Dirac. A matriz Δ é dada por

$$\Delta_{\mu\nu} = 2p^0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.100})$$

e sua inversa é

$$\Delta^{\mu\nu} = \frac{1}{2p^0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.101})$$

Podemos agora obter os parênteses de Dirac. Sejam $F(t)$ e $G(t)$ duas funções arbitrárias. Então

$$\begin{aligned} \{F, G\}_D &= \{F, G\} - \frac{1}{2p^0} \{F, (p^2 - m^2)\} \{(x^0 - \tau), G\} \\ &\quad + \frac{1}{2p^0} \{F, (x^0 - \tau)\} \{(p^2 - m^2), G\} \end{aligned} \quad (\text{E.102})$$

ou

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \frac{p^\nu}{p^0} \{F, p_\nu\} \{x^0, G\} + \frac{p^\nu}{p^0} \{x^0, F\} \{G, p_\nu\} \quad (\text{E.103})$$

Os parênteses de Dirac fundamentais são

$$\begin{aligned} \{x^\mu, x_\nu\}_D &= 0 \\ \{p^\mu, p_\nu\}_D &= 0 \\ \{x^\mu, p_\nu\}_D &= \delta_\nu^\mu - \delta_\nu^0 \frac{p^\mu}{p^0} \end{aligned} \quad (\text{E.104})$$

Agora temos condições de verificar a invariância de Poincaré da teoria. A relação $\{p^\mu, p_\nu\}_D = 0$ já foi obtida. Calculemos agora a segunda relação:

$$\begin{aligned} \{M^{\mu\nu}, p^\lambda\}_D &= \{x^\mu p^\nu, p^\lambda\}_D - \{x^\nu p^\mu, p^\lambda\}_D = p^\nu \{x^\mu, p^\lambda\}_D - p^\mu \{x^\nu, p^\lambda\}_D \\ &= \eta^{\mu\lambda} p^\nu - \eta^{\lambda 0} \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} - p^\mu \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\lambda 0} \frac{p^\mu p^\lambda}{p^0} = \eta^{\mu\lambda} p^\nu - \eta^{\nu\lambda} p^\mu \end{aligned} \quad (\text{E.105})$$

Para facilitar o próximo cálculo, calculamos também a quantidade $\{M^{\mu\nu}, x^\lambda\}_D$:

$$\begin{aligned} \{M^{\mu\nu}, x^\lambda\}_D &= \{x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, x^\lambda\}_D = x^\mu \{p^\nu, x^\lambda\}_D - x^\nu \{p^\mu, x^\lambda\}_D \\ &= x^\nu \{x^\lambda, p^\mu\}_D - x^\mu \{x^\lambda, p^\nu\}_D = \eta^{\lambda\mu} x^\nu - \eta^{\mu 0} \frac{x^\nu p^\lambda}{p^0} - \eta^{\lambda\nu} x^\mu + \eta^{\nu 0} \frac{x^\mu p^\lambda}{p^0} \end{aligned} \quad (\text{E.106})$$

Assim, temos finalmente

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}\}_D = \{M^{\mu\nu}, x^\lambda p^\rho - x^\rho p^\lambda\}_D = x^\lambda \{M^{\mu\nu}, p^\rho\}_D + \{M^{\mu\nu}, x^\lambda\}_D p^\rho - x^\rho \{M^{\mu\nu}, p^\lambda\}_D - \{M^{\mu\nu}, x^\rho\}_D p^\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= x^\lambda \eta^{\mu\rho} p^\nu - x^\lambda \eta^{\nu\rho} p^\mu + \eta^{\lambda\mu} x^\nu p^\rho - \eta^{\lambda\nu} x^\rho p^\mu + \eta^{\nu 0} \frac{x^\mu p^\rho p^\lambda}{p^0} - \eta^{\mu 0} x^\nu \frac{x^\rho p^\rho p^\lambda}{p^0} - \eta^{\mu\lambda} x^\rho p^\nu + \eta^{\nu\lambda} x^\rho p^\mu - \eta^{\rho\mu} x^\nu p^\lambda \\
&\quad + \eta^{\rho\nu} x^\mu p^\lambda + \eta^{\mu 0} \frac{x^\nu p^\rho p^\lambda}{p^0} - \eta^{\nu 0} \frac{x^\mu p^\rho p^\lambda}{p^0}
\end{aligned} \tag{E.107}$$

Reunindo os termos comuns e cancelando os termos opostos, temos

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}\}_D = \eta^{\mu\lambda}(x^\nu p^\rho - x^\rho p^\nu) + \eta^{\nu\rho}(x^\mu p^\lambda - x^\lambda p^\mu) - \eta^{\mu\rho}(x^\nu p^\lambda - x^\lambda p^\nu) - \eta^{\nu\lambda}(x^\mu p^\rho - x^\rho p^\mu)$$

ou

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}\}_D = \eta^{\mu\lambda} M^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} M^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\lambda} M^{\mu\rho} \tag{E.108}$$

Como último comentário, note que, como a Hamiltoniana total é zero, aparentemente qualquer variável dinâmica é uma constante:

$$\dot{A} = \{A, H_T\}_D = \{A, 0\}_D = 0$$

$$A = A_0 \tag{E.109}$$

No entanto, isso é apenas um mal entendido. O que está ocorrendo é que a partícula relativística faz parte de um conjunto de modelos chamados “Sistemas covariantes gerais” [2]. Neles, inclui-se o tempo entre as variáveis canônicas, e a dinâmica é descrita em termos de um parâmetro arbitrário. Esse não possui nenhum significado físico, e o formalismo é invariante sob reparametrização. De fato, temos

$$\int \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}} d\tau = \int \sqrt{\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}} d\tau = \int \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}} d\tilde{\tau} \tag{E.110}$$

Quando fixamos o calibre, com (E.92), quebramos essa invariância de reparametrização. Quando isso ocorre, ocorre algo interessante. Note que

$$S = \int d\tau (\dot{x}^0 p_0 + \dot{x}^i p_i - H_T) = \int d\tau (\dot{x}^i p_i - (H_T - p_0)) \tag{E.111}$$

A Hamiltoniana real fica sendo $H_T - p_0$ ou, nesse caso particular, apenas $-p_0$. Podemos então escrever as equações de movimento

$$\dot{x}^i = - \{x^i, p_0\}_D = \frac{p^i}{p_0} \tag{E.112}$$

que resultam na dinâmica

$$x^i(\tau) = x^i(0) + \frac{p^i}{p_0} \tau \tag{E.113}$$

E.2 Formalismo Simplético Modificado

Exemplo E.5: Considere a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + y\dot{x} + \frac{1}{2}(x - y)^2$$

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \frac{p_x^2}{2} - yp_x - \frac{x^2}{2} + xy + \lambda p_y$$

Dessa forma, podemos escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(0)} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - H_T \quad (\text{E.114})$$

Adicionando a derivada total $\frac{d}{dt}(p_y\epsilon^1)$ e aplicando a condição de consistência $\dot{p}_y = 0$, encontramos

$$L_S^{(1)} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_y\dot{\epsilon}^1 - H_T \quad (\text{E.115})$$

Temos então

$$Q^a = (x, y, p_x, p_y, \lambda, \epsilon^1)$$

$$a_a(Q) = (p_x, p_y, 0, 0, 0, p_y) \quad (\text{E.116})$$

A matriz pré-simplética é

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.117})$$

a submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.118})$$

possui os modos-zero

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.119})$$

O primeiro reproduz o vínculo $p_y = 0$. Já o segundo implica no novo vínculo

$$0 = -\frac{\partial H_T}{\partial y} + \frac{\partial H_T}{\partial \epsilon^1} = p_x - x \quad (\text{E.120})$$

Dessa forma, temos

$$L_S^{(2)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_y \dot{\epsilon}^1 + (p_x - x) \dot{\epsilon}^2 - H_T \quad (\text{E.121})$$

Assim, vem

$$Q^a = (x, y, p_x, p_y, \lambda, \epsilon^1, \epsilon^2)$$

$$a_a(Q) = (p_x, p_y, 0, 0, 0, p_y, p_x - x) \quad (\text{E.122})$$

de maneira que a matriz $f_{ab}^{(2)}$ toma a forma

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.123})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.124})$$

são

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (-1, 0, -1, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.125})$$

Os dois primeiros reproduzem os vínculos já encontrados $p_y = 0$ e $p_x - x = 0$. O último implica também no vínculo $p_x - x = 0$. Logo, não há novos vínculos e não foi possível determinar o multiplicador de Lagrange λ . Isso indica que temos vínculos de primeira classe. De fato, (F.12) são modos-zero de (F.10), de forma que todos os vínculos são de primeira classe.

Exemplo E.6: Considere a Lagrangeana

$$L = \dot{x}\dot{y} - z(x + y)$$

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = p_x p_y + z(x + y) + \lambda p_z$$

Dessa forma, podemos escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(0)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_z \dot{\epsilon}_1 - H_T \quad (\text{E.126})$$

Temos então

$$Q_{(0)}^a = (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \lambda, \epsilon_1)$$

$$a_a^{(0)}(Q) = (p_x, p_y, p_z, 0, 0, 0, 0, p_z) \quad (\text{E.127})$$

A matriz pré-simplética é

$$f_{ab}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.128})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.129})$$

são

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.130})$$

O primeiro modo-zero recupera o vínculo primário

$$\frac{\partial H_T}{\partial \lambda} = p_z = 0 \quad (\text{E.131})$$

O segundo modo-zero implica no vínculo

$$-\frac{\partial H_T}{\partial z} + \frac{\partial H_T}{\partial \epsilon_1} = 0$$

$$\phi_2 = x + y = 0 \quad (\text{E.132})$$

Temos então a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(1)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_z \dot{\epsilon}_1 + (x + y) \dot{\epsilon}_2 - H_T \quad (\text{E.133})$$

Identificamos

$$Q_{(1)}^a = (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \lambda, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$a_a^{(1)}(Q) = (p_x, p_y, p_z, 0, 0, 0, 0, p_z, x + y) \quad (\text{E.134})$$

Logo, a matriz pré-simplética é

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.135})$$

Como antes, procuramos os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.136})$$

que são

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.137})$$

Os dois primeiros apenas reproduzem os vínculos anteriores. O terceiro modo-zero implica no vínculo

$$\frac{\partial H_T}{\partial p_x} + \frac{\partial H_T}{\partial p_y} + \frac{\partial H_T}{\partial \epsilon_2} = 0$$

$$\phi_3 = p_x + p_y = 0 \quad (\text{E.138})$$

Temos agora a Lagrangeana

$$L_S^{(2)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_z \dot{\epsilon}_1 + (x + y) \dot{\epsilon}_2 + (p_x + p_y) \dot{\epsilon}_3 - H_T \quad (\text{E.139})$$

com

$$Q_{(2)}^a = (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \lambda, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$$

$$a_a^{(2)}(Q) = (p_x, p_y, p_z, 0, 0, 0, 0, p_z, x + y, p_x + p_y) \quad (\text{E.140})$$

Assim, a matriz pré-simplética é

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.141})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.142})$$

são

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Procuramos os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.148})$$

que são

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ \vec{v}_2 &= (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \vec{v}_3 &= (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \vec{v}_4 &= (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \vec{v}_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (\text{E.149})$$

Não há mais vínculos: \vec{v}_5 simplesmente determina o multiplicador de Lagrange λ

$$\frac{\partial H_T}{\partial p_z} + \frac{\partial H_T}{\partial \epsilon_4} = 0$$

$$\lambda = 0 \quad (\text{E.150})$$

Como determinamos λ , ele não é mais uma coordenada, de forma que temos

$$L_S^{(4)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_z \dot{\epsilon}_1 + (x + y) \dot{\epsilon}_2 + (p_x + p_y) \dot{\epsilon}_3 + z \dot{\epsilon}_4 - H_c e \quad (\text{E.151})$$

$$Q_{(4)}^a = (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$$

$$a_a^{(3)}(Q) = (p_x, p_y, p_z, 0, 0, 0, p_z, x + y, p_x + p_y, z) \quad (\text{E.152})$$

Logo

$$f_{ab}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.153})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.154})$$

são apenas

$$\vec{v}_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_4 = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.155})$$

Como é possível notar, nenhum desses vetores é modo-zero da matriz $f_{ab}^{(4)}$. Portanto, todos os

vínculos são de segunda classe, e a matriz é inversível. Sua inversa é dada por

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos então escrever os parênteses modificados

$$\begin{aligned} \{x, y\}^* &= \{Q^1, Q^2\}^* = f^{12} = 0 \\ \{x, z\}^* &= \{Q^1, Q^3\}^* = f^{13} = 0 \\ \{x, p_x\}^* &= \{Q^1, Q^4\}^* = f^{14} = 1/2 \\ \{x, p_y\}^* &= \{Q^1, Q^5\}^* = f^{15} = -1/2 \\ \{x, p_z\}^* &= \{Q^1, Q^6\}^* = f^{16} = 0 \\ \{y, z\}^* &= \{Q^2, Q^3\}^* = f^{23} = 0 \\ \{y, p_x\}^* &= \{Q^2, Q^4\}^* = f^{24} = -1/2 \\ \{y, p_y\}^* &= \{Q^2, Q^5\}^* = f^{25} = 1/2 \\ \{y, p_z\}^* &= \{Q^2, Q^6\}^* = f^{26} = 0 \\ \{z, p_x\}^* &= \{Q^3, Q^4\}^* = f^{34} = 0 \\ \{z, p_y\}^* &= \{Q^3, Q^5\}^* = f^{35} = 0 \\ \{z, p_z\}^* &= \{Q^3, Q^6\}^* = f^{36} = 0 \\ \{p_x, p_y\}^* &= \{Q^4, Q^5\}^* = f^{45} = 0 \\ \{p_x, p_z\}^* &= \{Q^4, Q^6\}^* = f^{46} = 0 \\ \{p_y, p_z\}^* &= \{Q^5, Q^6\}^* = f^{56} = 0 \end{aligned} \tag{E.156}$$

Exemplo E.7: Considere a Lagrangeana

$$L = (q_2 + q_1)\dot{q}_1 + q_4\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2)$$

Ela já é de primeira ordem, de forma que podemos considerá-la como a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(0)} = (q_2 + q_1)\dot{q}_1 + q_4\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(q_4^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \quad (\text{E.157})$$

Logo

$$Q_{(0)}^a = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$a_a^{(0)} = (q_2 + q_1, 0, q_4, 0) \quad (\text{E.158})$$

A matriz pré-simplética é dada por

$$f_{ab}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.159})$$

Podemos ver que essa matriz é não singular, sendo portanto o tensor simplético. Sua inversa é

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.160})$$

Assim, os parênteses modificados são

$$\begin{aligned} \{q_1, q_2\}^* &= \{Q^1, Q^2\}^* = f^{12} = 1 \\ \{q_1, q_3\}^* &= \{Q^1, Q^3\}^* = f^{13} = 0 \\ \{q_2, q_3\}^* &= \{Q^2, Q^3\}^* = f^{23} = 0 \\ \{q_2, q_4\}^* &= \{Q^2, Q^4\}^* = f^{24} = 0 \\ \{q_3, q_4\}^* &= \{Q^3, Q^4\}^* = f^{34} = 1 \end{aligned} \quad (\text{E.161})$$

E.8: Partícula Não-Relativística na Superfície de uma Esfera Considere a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}_a + \frac{\lambda}{2}(q^a q_a - 1)$$

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \frac{1}{2}p_a p^a - \frac{\lambda}{2}(q^a q_a - 1) + \epsilon\pi$$

Dessa forma, podemos escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(1)} = p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\lambda} + \pi \dot{u}^1 - H_T \quad (\text{E.162})$$

Podemos então fazer a identificação

$$Q^a = (\vec{q}, \vec{p}, \lambda, \pi, \epsilon, u^1)$$

$$a_a(Q) = (\vec{p}, \vec{0}_{1 \times N}, \pi, 0, 0, \pi) \quad (\text{E.163})$$

Temos então a matriz pré-simplética $f_{ab}^{(0)}$

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.164})$$

Procuramos agora os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.165})$$

eles são

$$\vec{v}_1 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, -1, 0, 0, 1) \quad (\text{E.166})$$

O primeiro modo-zero recupera o primeiro vínculo $\pi = 0$. O segundo implica no vínculo

$$0 = -\frac{\partial H_T}{\partial \lambda} + \frac{\partial H_T}{\partial u^i} = \frac{1}{2}(q^a q_a - 1) \quad (\text{E.167})$$

Incluindo o vínculo na Lagrangeana simplética por meio da nova coordenada u^2 , temos

$$L_S^{(2)} = p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\lambda} + \pi \dot{u}^1 + \frac{1}{2}(q^a q_a - 1) \dot{u}^2 - H_T \quad (\text{E.168})$$

Logo

$$Q^a = (\vec{q}, \vec{p}, \lambda, \pi, \epsilon, u^1, u^2)$$

$$a_a(Q) = (\vec{p}, \vec{0}_{1 \times N}, \pi, 0, 0, \pi, \frac{1}{2}(q^a q_a - 1)) \quad (\text{E.169})$$

de maneira que a matriz $f_{ab}^{(2)}$ é

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & 0^T & \vec{q}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.170})$$

Assim, os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.171})$$

são

$$\vec{v}_1 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, -1, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{q}, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.172})$$

O novo vínculo, proveniente do terceiro modo-zero, é

$$0 = q^a \frac{\partial H_T}{\partial p_a} + \frac{\partial H_T}{\partial u^2} = q^a p_a \quad (\text{E.173})$$

Como antes, incorporamo-o a Lagrangeana simplética por meio de uma nova coordenada u^3

$$L_S^{(3)} = p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\lambda} + \pi \dot{u}^1 + \frac{1}{2}(q^a q_a - 1) \dot{u}^2 + q^a p_a \dot{u}^3 - H_T \quad (\text{E.174})$$

Assim

$$Q^a = (\vec{q}, \vec{p}, \lambda, \pi, \epsilon, u^1, u^2, u^3)$$

$$a_a(Q) = (\vec{p}, \vec{0}_{1 \times N}, \pi, 0, 0, \pi, \frac{1}{2}(q^a q_a - 1), q^a p_a) \quad (\text{E.175})$$

A nova matriz pré-simplética é

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & 0^T & \vec{q}^T & \vec{p}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{q}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & -\vec{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.176})$$

Procuramos por novos vínculos, através dos modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & -\vec{q} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.177})$$

que são dados por

$$\vec{v}_1 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{q}, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_4 = (-\vec{q}, \vec{p}, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.178})$$

O novo vínculo, gerado por \vec{v}_4 , é dado por

$$0 = -q^a \frac{\partial H_T}{\partial q^a} + p_a \frac{\partial H_T}{\partial p_a} + \frac{\partial H_T}{\partial u^3} = \lambda q_a q^a + p_a p^a \quad (\text{E.179})$$

Como auxílio da nova coordenada u^4 , obtemos

$$L_S^{(4)} = p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\lambda} + \pi \dot{u}^1 + \frac{1}{2}(q^a q_a - 1)\dot{u}^2 + q^a p_a \dot{u}^3 + (\lambda q_a q^a + p_a p^a)\dot{u}^4 - H_T \quad (\text{E.180})$$

de maneira que

$$Q^a = (\vec{q}, \vec{p}, \lambda, \pi, \epsilon, u^1, u^2, u^3, u^4)$$

$$a_a(Q) = (\vec{p}, \vec{0}_{1 \times N}, \pi, 0, 0, \pi, \frac{1}{2}(q^a q_a - 1), q^a p_a, \lambda q^a q_a + p_a p^a) \quad (\text{E.181})$$

Obtemos assim a matriz pré-simplética

$$f_{ab}^{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & 0^T & \vec{q}^T & \vec{p}^T & \lambda \vec{q}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & \vec{0}^T & \vec{q}^T & \vec{p}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & -\vec{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \vec{q} & -\vec{p} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.182})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & 0^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & -\vec{q} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \vec{q} & -\vec{p} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.183})$$

são

$$\vec{v}_1 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{q}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_4 = (-\vec{q}, \vec{p}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_5 = (-\vec{p}, \lambda \vec{q}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.184})$$

Não há mais vínculos na teoria. Os 4 primeiros modos-zero recuperam os vínculos anteriores, enquanto \vec{v}_5 determina o multiplicador de Lagrange ϵ . Logo, temos a mesma Lagrangeana simplética, mas com a nova identificação

$$Q^a = (\vec{q}, \vec{p}, \lambda, \pi, u^1, u^2, u^3, u^4)$$

$$a_a(Q) = (\vec{p}, \vec{0}_{1 \times N}, \pi, 0, \pi, \frac{1}{2}(q^a q_a - 1), q^a p_a, \lambda q^a q_a + p_a p^a) \quad (\text{E.185})$$

o que implica na nova matriz

$$f_{ab}^{(5)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T & 0^T & \vec{q}^T & \vec{p}^T & \lambda \vec{q}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T & \vec{q}^T & \vec{p}^T & \vec{p}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & -\vec{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \vec{q} & -\vec{p} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.186})$$

A submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \vec{0}^T & 0^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vec{0}^T & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 \\ \vec{q} & \vec{0} & 0 & 0 \\ \vec{p} & \vec{q} & 0 & 0 \\ \vec{q} & \vec{p} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.187})$$

possui apenas os modos-zero

$$\vec{v}_2 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{0}_{1 \times N}, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (\vec{0}_{1 \times N}, \vec{q}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_4 = (-\vec{q}, \vec{p}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_5 = (-\vec{p}, \lambda \vec{q}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.188})$$

que não implicam em nenhuma informação nova. Precisamos agora ver quais desses vetores são modos-zero de (F.73). De fato, nenhum deles é, de forma que a matriz é inversível. Todos os vínculos são de segunda classe, e a matriz inversa é

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} - \vec{q}^T \vec{q} & -\vec{p}^T & \vec{0}^T & \vec{p}^T & -\vec{q}^T & \vec{0}^T & \vec{0}^T \\ -\mathbf{I} + \vec{q}^T \vec{q} & \vec{p}^T \vec{q} - \vec{q}^T \vec{p} & p^2 \vec{q}^T & \vec{0}^T & -p^2 \vec{q}^T & \vec{p}^T & -\vec{q}^T & \vec{0}^T \\ \vec{p} & -p^2 \vec{q} & 0 & 0 & 0 & -p^2 - \lambda & 0 & -1 \\ \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{p} & p^2 \vec{q} & 0 & 1 & 0 & \lambda + p^2 & 0 & 1 \\ \vec{q} & -\vec{p} & -\lambda - p^2 & 0 & -p^2 - \lambda & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{q} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.189})$$

Obtemos assim os parênteses modificados que interessam:

$$\{q^a, q_b\}^* = 0, \quad \{q^a, p_b\}^* = \delta_b^a - q^a q_b, \quad \{p^a, p_b\}^* = p^a q_b - q^a p_b \quad (\text{E.190})$$

E.9: A Partícula Relativística Considere a Lagrangeana

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2}$$

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \lambda(p^2 - m^2)$$

Dessa forma, podemos escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(1)} = p_0 \dot{x}^0 + p_i \dot{x}^i + (p^2 - m^2) \dot{u}^1 - H_T \quad (\text{E.191})$$

em que a separação $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ é feita por conveniência. Podemos então fazer a identificação

$$Q^a = (x^0, \vec{x}, p_0, \vec{p}, \lambda, u^1)$$

$$a_a(Q) = (p_0, \vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, p^2 - m^2) \quad (\text{E.192})$$

Temos então a matriz pré-simplética $f_{ab}^{(1)}$

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 2p^0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & 2\vec{p}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.193})$$

os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.194})$$

são

$$\vec{v}_1 = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (-2p^0, -2\vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1) \quad (\text{E.195})$$

O primeiro modo-zero recupera o vínculo $p^2 - m^2 = 0$. O segundo não gera nenhum vínculo novo e nem determina o multiplicador de Lagrange λ . Como não temos nenhuma informação nova, verificamos se os vetores são modos-zero de (F.80). De fato, eles são, de maneira que o vínculo é de primeira classe. Vamos então proceder para a fixação de calibre⁵. Escolhemos

$$x^0 - \tau = 0 \quad (\text{E.196})$$

Incluindo na Lagrangeana simplética por meio de uma coordenada u^2 , vem

$$L_S^{(2)} = p_0 \dot{x}^0 + p_i \dot{x}^i + (p^2 - m^2) \dot{u}^1 + (x^0 - \tau) - H_T \quad (\text{E.197})$$

Logo

$$Q^a = (x^0, \vec{x}, p_0, \vec{p}, \lambda, u^1, u^2)$$

$$a_a(Q) = (p_0, \vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, p^2 - m^2, x^0 - \tau) \quad (\text{E.198})$$

Temos assim a matriz

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 2p^0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & 2\vec{p}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.199})$$

A submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.200})$$

possui os modos-zero

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 &= (-2p^0, -2\vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1, 0) \\ \vec{v}_3 &= (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (\text{E.201})$$

O novo modo-zero serve para determinar o multiplicador de Lagrange λ . Obtemos então a mesma Lagrangeana, mas com a nova identificação

⁵ para verificar que essa fixação de calibre é consistente, veja seção 3.6.2

$$Q^a = (x^0, \vec{x}, p_0, \vec{p}, u^1, u^2)$$

$$a_\alpha(Q) = (p_0, \vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, p^2 - m^2, x^0 - \tau) \quad (\text{E.202})$$

de forma que

$$f_{ab}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 2p^0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 2\vec{p}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} & 0 & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.203})$$

Temos que a submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -2p^0 & -2\vec{p} \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix} \quad (\text{E.204})$$

possui apenas os modos-zero

$$\vec{v}_2 = (-2p^0, -2\vec{p}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1) \quad (\text{E.205})$$

que não são modos-zero de (F.90). Logo, a matriz $f_{ab}^{(3)}$ é não singular, com a sua inversa dada por

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & -1 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\frac{\vec{p}^T}{p^0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\frac{\vec{p}^T}{p^0} \\ 0 & \frac{\vec{p}}{p^0} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -\frac{1}{2p^0} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & \frac{1}{2p^0} & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \frac{1}{2p^0} \\ 1 & \frac{\vec{p}^T}{p^0} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -\frac{1}{2p^0} & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos então os parênteses modificados importantes não nulos

$$\{x^i, p_0\}^* = -\frac{p^i}{p^0}$$

$$\{x^i, p_j\}^* = \delta_j^i \quad (\text{E.206})$$

E. 10: Modelo de Proca Considere a Lagrangeana

$$L = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right)$$

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - A^0 \partial_i \pi^i + \lambda \pi^0 \right)$$

Dessa forma, podemos escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(1)} = \int d^3x \left(\pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \pi_0 \dot{u}^1 \right) - H_T \quad (\text{E.207})$$

em que as separações $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ e $\pi_\mu = (\pi_0, \vec{\pi})$ são feitas por conveniência. Podemos então fazer a identificação

$$Q^a(x) = (A^0(x), \vec{A}(x), \pi_0(x), \vec{\pi}(x), \lambda(x), u^1(x))$$

$$a_a(Q(x)) = (\pi_0(x), \vec{\pi}(x), 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \pi_0(x)) \quad (\text{E.208})$$

Temos então a matriz pré simplética $f_{ab}^{(1)}$

$$f_{ab}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.209})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.210})$$

são

$$\vec{v}_1(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.211})$$

O primeiro modo-zero recupera o vínculo $\pi_0 = 0$. O segundo implica no novo vínculo

$$0 = \int d^3y v_2^a(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial H_T}{\partial Q^a(y)} = - \int d^3y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial H_T}{\partial A^0(y)} = - \frac{\partial H_T}{\partial A^0}(x) = m^2 A^0(x) + \partial_x^i \pi_i(x) \quad (\text{E.212})$$

Incorporando-o na Lagrangeana simplética por meio de uma nova coordenada u^2 , temos

$$L_S^{(2)} = \pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \pi_0 \dot{u}^1 + (m^2 A^0 + \partial^i \pi_i) \dot{u}^2 - H_T \quad (\text{E.213})$$

Logo

$$Q^a = (A^0, \vec{A}, \pi_0, \tilde{\pi}, \lambda, u^1, u^2)$$

$$a_a(Q) = (\pi_0, \tilde{\pi}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \pi_0, m^2 A^0 + \partial^i \pi_i) \quad (\text{E.214})$$

Obtemos assim a matriz

$$f_{ab}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & m^2 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\tilde{\nabla}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ -m^2 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.215})$$

A submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ -m^2 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.216})$$

possui os modos-zero

$$\vec{v}_1(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \tilde{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), m^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 1) \quad (\text{E.217})$$

O novo modo-zero não implica em novos vínculos, mas determina o multiplicador de Lagrange λ . Logo, obtemos a mesma Lagrangeana simplética que tínhamos em (E.100), com a nova identificação

$$Q^a = (A^0, \vec{A}, \pi_0, \tilde{\pi}, u^1, u^2)$$

$$a_a(Q) = (\pi_0, \tilde{\pi}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, \pi_0, m^2 A^0 + \partial^i \pi_i) \quad (\text{E.218})$$

de forma que

$$f_{ab}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & m^2 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\tilde{\nabla}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ -m^2 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.219})$$

Os modos-zero da submatriz

$$f_{ab}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ -m^2 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.220})$$

são apenas os vetores

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \tilde{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), m^2, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.221})$$

Por outro lado, nenhum deles é modo-zero de (E.107). Isso implica que os vínculos são de segunda classe. A matriz $f_{ab}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y})$ é não singular, com inversa dada por

$$f^{ab}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^{-2} \tilde{\nabla} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & -m^{-2} \\ m^{-2} \tilde{\nabla}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m^{-2} \tilde{\nabla}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & m^{-2} \tilde{\nabla} & 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & m^{-2} \\ m^{-2} & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & -m^{-2} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.222})$$

Obtemos então os parênteses modificados

$$\{\hat{A}^i(x), \hat{A}_j(y)\}^* = 0, \quad \{\hat{\pi}^i(x), \hat{\pi}_j(y)\}^* = 0, \quad \{\hat{A}^0(x), \hat{\pi}_j(y)\}^* = 0$$

$$\{\hat{A}^i(x), \hat{A}_0(y)\}^* = \frac{1}{m^2} \partial_y^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \{\hat{A}^i(x), \hat{\pi}_j(y)\}^* = \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.223})$$

E.11: Campo Eletromagnético Considere a Lagrangeana

$$L = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

Temos o vínculo e a Hamiltoniana total

$$\pi_0 = 0$$

$$H_T = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - A^0 \partial_i \pi^i + \lambda \pi^0 \right)$$

Podemos então escrever a Lagrangeana simplética

$$L_S^{(1)} = \int d^3x \left(\pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \pi_0 \dot{u}^1 \right) - H_T \quad (\text{E.224})$$

Dessa forma, podemos identificar

$$Q^a(x) = (A^0(x), \vec{A}(x), \pi_0(x), \tilde{\pi}(x), \lambda(x), u^1(x))$$

$$a_a(Q(x)) = (\pi_0(x), \tilde{\pi}(x), 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \pi_0(x)) \quad (\text{E.225})$$

Temos então a matriz pré-simplética $f_{ab}^{(1)}$

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.226})$$

A submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.227})$$

possui os modos-zero

$$\vec{v}_1(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.228})$$

O primeiro modo-zero recupera o vínculo $\pi_0 = 0$. O segundo implica no novo vínculo

$$0 = \int d^3y v_2^a(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial H_T}{\partial Q^a(y)} = - \int d^3y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial H_T}{\partial A^0(y)} = - \frac{\partial H_T}{\partial A^0}(x) = \partial_x^i \pi_i(x) \quad (\text{E.229})$$

Incorporando-o na Lagrangeana simplética por meio de uma nova coordenada u^2 , temos

$$L_S^{(2)} = \pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \pi_0 \dot{u}^1 + (\partial^i \pi_i) \dot{u}^2 - H_T \quad (\text{E.230})$$

Logo

$$Q^a = (A^0, \vec{A}, \pi_0, \tilde{\pi}, \lambda, u^1, u^2)$$

$$a_a(Q) = (\pi_0, \tilde{\pi}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \pi_0, \partial^i \pi_i) \quad (\text{E.231})$$

Obtemos assim a matriz

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\tilde{\nabla}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.232})$$

Os modos-zero da submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \tilde{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.233})$$

são

$$\vec{v}_1(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \tilde{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 1) \quad (\text{E.234})$$

O novo modo-zero não implica em novos vínculos e não determina o multiplicador de Lagrange λ . Notamos também que os vetores (E.121) são modos-zero de (E.119), o que implica que os vínculos são de primeira classe. Com o intuito de realizar a quantização canônica do campo eletromagnético, procedemos para a fixação de calibre.

$$\partial_i A^i = 0, \quad e \quad A^0 = 0$$

Incluindo-os na Lagrangeana simplética por meio de coordenadas u^3 e u^4 , vem

$$L_S^{(3)} = \pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \pi_0 \dot{u}^1 + (\partial^i \pi_i) \dot{u}^2 + A^0 \dot{u}^3 + (\partial_i A^i) \dot{u}^4 - H_T \quad (\text{E.235})$$

Assim

$$Q^a = (A^0, \vec{A}, \pi_0, \tilde{\pi}, \lambda, u^1, u^2, u^3, u^4)$$

$$a_a(Q) = (\pi_0, \tilde{\pi}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \pi_0, \partial^i \pi_i, A^0, \partial_i A^i) \quad (\text{E.236})$$

A nova matriz pré-simplética, obtida após a fixação do calibre, é

$$f_{ab}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\vec{\nabla}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\vec{\nabla}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{\nabla} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\nabla} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.237})$$

os modos-zero associados a submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{\nabla} & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \\ 0 & \vec{\nabla} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.238})$$

são

$$\vec{v}_1(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0, 0, 0, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1, 0, 0, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_4(\vec{x}, \vec{y}) = (1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 0, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_5(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, -\vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), 0, 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.239})$$

Os dois primeiros vetores apenas recuperam os vínculos $\pi_0 = 0$ e $\partial_i \pi^i = 0$. v_4 determina o valor de λ^6 , enquanto v_3 e v_5 não implicam em nenhuma informação nova. Assim, obtemos a mesma Lagrangeana simplética já existente em (E.100), com a nova identificação

$$Q^a = (A^0, \vec{A}, \pi_0, \tilde{\pi}, u^1, u^2, u^3, u^4)$$

$$a_a(Q) = (\pi_0, \tilde{\pi}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, \pi_0, \partial^i \pi_i, A^0, \partial_i A^i) \quad (\text{E.240})$$

Logo, a matriz $f_{ab}^{(4)}$ é

$$f_{ab}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\vec{\nabla}^T \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\vec{\nabla}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \vec{0}_{3 \times 1}^T \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{\nabla} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\nabla} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.241})$$

A submatriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \vec{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -1 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{\nabla} \\ -1 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \\ 0 & \vec{\nabla} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.242})$$

possui apenas os modos-zero

$$\vec{v}_2(\vec{x}, \vec{y}) = (-1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 1, 0, 0, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{v}_4(\vec{x}, \vec{y}) = (1, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, 0, 1, 0) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vec{v}_5(\vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}_{1 \times 3}, 0, -\vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{y}), 0, 0, 0, 1) \quad (\text{E.243})$$

⁶ ver 3.426

Necessitamos agora verificar se os vetores (E.130) são modos-zero de (E.128). De fato, nenhum deles é, de maneira que a matriz é não-singular. Sua inversa é dada por

$$f^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & \delta(\vec{x}-\vec{y})\mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 & 0 & -\vec{\nabla}^T \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & 0 & \vec{0}_{1 \times 3} & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}_{3 \times 1} & -\delta(\vec{x}-\vec{y})\mathbf{I}_{3 \times 3} + \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & \vec{0}_{3 \times 1} & \vec{0}_{3 \times 1} & 0 & -\vec{\nabla}^T \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 & \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.244})$$

Podemos então obter os parênteses modificados importantes não nulos

$$\begin{aligned} \{\hat{A}^i(x), \hat{A}_j(y)\}^* &= 0, \quad \{\hat{\pi}^i(x), \hat{\pi}_j(y)\}^* = 0 \\ \{\hat{A}^i(x), \hat{\pi}_j(y)\}^* &= \delta_j^i \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_x^i \partial_j^y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned} \quad (\text{E.245})$$

REFERÊNCIAS

- [1] Blagojevic, M. (2002). *Gravitation and Gauge Symmetries*. Belgrade: Institute of Physics Publishing
- [2] Henneaux, M., Teitelboim, C. (1994). *Quantization of Gauge Systems*. New Jersey: Princeton University Press
- [3] Rothe, H.J., Rothe, K.D. (2010). *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*. Singapore: World Scientific Publishing
- [4] Rosen, J. (1975). *Symmetry Discovered: Concepts and Applications in Nature and Science*. Cambridge: Cambridge University Press
- [5] Rosen, J. (2008). *Symmetry Rules: How Science and Nature Are Founded on Symmetry*. Berlin: Springer
- [6] Sundermeyer, K. (1982). *Constrained Dynamics*. Berlin: Springer
- [7] Stewart, I., Golubitsky, M. (1993). *Fearful Symmetry: Is God a Geometer*. London: Penguin Books
- [8] Oliver, P.J. (1995). *Equivalence, Invariance and Symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press
- [9] Straumann, N., O’Raifeartaigh, L. (2000). *Gauge theory: Historical origins and some modern developments*. Rev. Mod. Phys. Vol. 72
- [10] Hermann, R. (1992). *Constrained Mechanics and Lie Theory*. Brookline: Math Sci Press
- [11] Frampton, P. (2000). *Gauge Field Theories*. North Carolina: Wiley-Interscience Publication
- [12] Yaglom, I.M. (1988). *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. Moscow: Academy of Pedagogical Press
- [13] Weyl, H. (1952). *Symmetry*. New Jersey: Princeton University Press
- [14] W Jackiw, R. (1993). *Constrained Quantization Without Tears*. arXiv:hep-th/9306075
- [15] Dirac, P.A.M. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University Press
- [16] Faddeev, L., Jackiw, R. (1988). *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*. Phys. Rev. Lett. 60
- [17] Barcelos-Neto, J., Wotzasek, C. (1992). *Symplectic quantization of constrained systems*. Mod.Phys.Lett. A7
- [18] Shirzad, A., Mojiri, M. (2001). *Constraint structure in modified Faddeev-Jackiw method*. Mod.Phys.Lett. A16
- [19] Garcia, J. A., Pons, J. M. (1997). *Equivalence of Faddeev-Jackiw and Dirac approaches for gauge theories*. Int.J.Mod.Phys. A12
- [20] Defterli, O., Baleanu, D. (2006). *Symplectic algorithm for systems with second-class constraints*. Czech.J.Phys.56:1117-1122

- [21] Garcia, J. A., Pons, J. M. (1997). *Faddeev-Jackiw approach to gauge theories and ineffective constraints*. Int.J.Mod.Phys. A13
- [22] Deriglazov, A.A. (1995). *FNotes on Lagrangean and Hamiltonian Symmetries*. arXiv:hep-th/9412244
- [23] Deriglazov, A.A. (2005). *Analysis of constrained theories without use of primary constraints*. Phys.Lett. B626
- [24] Deriglazov, A.A., Kuznetsova, Z. (2006). *Conversion of second class constraints by deformation of Lagrangian local symmetries*. Phys.Lett.B646:47-53
- [25] Deriglazov, A.A. (2010). *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian formalism*. London: Springer
- [26] Deriglazov, A.A. (2007). *Formulation of a constrained system in terms of extended Lagrangian and its local symmetries*. arXiv:0708.3511v2
- [27] Deriglazov, A.A., Rizzuti, B.F. (2011). *Generalization of the Extended Lagrangian Formalism on a Field Theory and Applications*. Phys.Rev.D83:125011
- [28] Deriglazov, A.A. (2009). *Improved extended Hamiltonian and search for local symmetries*. J. Math. Phys. 50
- [29] Deriglazov, A.A. (2005). *Search for gauge symmetry generators of singular Lagrangian theory*. arXiv:hep-th/0509222
- [30] Hanson, A., Regge, T., Teitelboim, C. (1976). *Constrained Hamiltonian Systems*. Roma: Accademia Nazionale Dei Lincei
- [31] Jackson, J.D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc
- [32] Gomes, M. (2001). *Summary talk: Field Theory*. Brazilian Journal of Physics, vol 31
- [33] Lahiri, A. (1993). *Constrained Dynamics of the Coupled Abelian Two-Form*. Mod. Phys. Lett. A8
- [34] Lahiri, A. (1993). *Constrained Dynamics of the Coupled Abelian Two-Form*. Mod. Phys. Lett. A8
- [35] Boas, M.L. (1993). *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc
- [36] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall
- [37] Dean, R. (2008). *Symmetry, Structure and Spacetime*. Amsterdam: Elsevier
- [38] Newton, I. (1729). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world*. Los Angeles: University of California Press
- [39] Kirillov, A. (2008). *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge: Cambridge University Press
- [40] Suzuki, M. (1982). *Group Theory*. Berlin: Springer
- [41] Gersten, S.M. (1987). *Essays in Group Theory*. Berlin: Springer

- [42] Littlewood, D.E. (1987). *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*. Providence: AMS Chelsea Publishing
- [43] Tkachenko, M., Arkhangel'skii, A. V. (2008). *Topological Groups and Related Structures*. Paris: Atlantis Press
- [44] Fritzsche, B. (1999). *Sophus Lie: A Sketch of his Life and Work*. Journal of Lie Theory 9
- [45] Schumm, B. A. (2004). *Deep Down Things: The Breathtaking Beauty of Particle Physics*. Maryland: Johns Hopkins University Press
- [46] Goldstein, H., Safko, J. L., Poole, C. P. (2001). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company
- [47] Landau, L. D., Lifshitz, E. m., (1994). *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann
- [48] Gell-Mann, M., Levy, M. (1960). *The axial vector current in beta decay*. Butterworth-Heinemann
- [49] Greiner. (2003). *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*. Springer
- [50] Oliveira, W. (2013). *Notas de aula de Introdução a Teoria Quântica de Campos*.
- [51] Olsen, L. (2004). *A New Proof of Darboux's Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 8
- [52] Larson, R., Hostetler, R.P. (2006). *Calculus of a single variable* . Boston, Mass.: Houghton Mifflin
- [53] Lima, E. L. (2014). *Algebra Linear*. Coleção Matemática Universitária, IMPA
- [54] Montani, H. (1993). *Symplectic analysis of constrained systems*. International Journal of Modern Physics A
- [55] Yang, C. N., Mills, R. L. (1954). *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*. Brookhaven National Laboratory, Upton, New York
- [56] Peskin, M., Schroeder, D. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company