Tese de Doutorado

# Tópicos Especiais em Dinâmica dos Fluidos.

Nélio Martins da Silva Azevedo Sasaki

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Co-orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Juiz de Fora
Junho de 2015

# Tópicos Especiais em Dinâmica dos Fluidos.

Nélio Martins da Silva Azevedo Sasaki

Tese para o Curso de Doutorado em Física, Área da Física Teórica, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Tese aprovada em 06 de Agosto de 2015.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (Co-orientador)
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Sidiney de Andrade Leonel
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel
Universidade Federal de Itajubá

*Dedico esta tese à minha mãe (in memoriam), ao meu pai (in memoriam) e ao Prof. Dr. Wilson Oliveira (in memoriam).*

## AGRADECIMENTOS


Aos meus pais que me instruíram e acreditaram em mim em todo o tempo que a vida permitiu que eles estivessem ao meu lado. Ao Prof. Dr. **Wilson Oliveira**, por acreditar em mim e dar-me a oportunidade em crescer no curso de doutorado e sempre ter-me incentivado.

Ao meu orientador Prof. Dr. **Everton Murilo de Carvalho Abreu**, pelas correções, conselhos e dicas que sempre me valeram. Ao meu co-orientador Prof. Dr. **Albert Carlo Rodrigues Mendes** e ao Prof. Dr. **Jorge Ananias Neto** que me incentivaram, apoiaram e muito contribuíram nas discussões desta tese.

A Coordenação de Pós-Graduação e ao professores do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física da UFJF. A minha esposa pelo amor, carinho e apoio constantes.

A **Universidade Federal de Juiz de Fora** e ao **Departamento de Física**.

Também gostaria de agradecer imensamente aos meus amigos da SBF , SAB , ABP que sempre me incentivaram a continuar e concluir este doutoramento. Agradeço ainda, à Universidade do Estado do Amazonas (UEA) pelo apoio dado. E as agências de fomento **CNPq**, **CAPES**, **FAPEMIG** e **FAPEAM**.

# Resumo

Esta tese visa obter as equações tipo-Maxwell, para um fluido compressível. A dinâmica do sistema é construída em função da vorticidade e do vector de Lamb. Uma função correlação e a relação de dispersão foram analisados como função do número de Reynolds. Uma Lagrangeana para o vetor de Lamb e a vorticidade foi construída e as equações de movimento foram discutidas. Em seguida, analisamos a dinâmica para o caso de um fluido carregado. Por fim, introduzimos a generalização não-Abeliana de alguns resultados conhecidos. No apêndice, encontra-se uma breve revisão sobre fluidos não-Abelianos.

Palavras-Chave: Dinâmica dos fluidos, formulação não-Abeliana, equações tipo-Maxwell.

# Abstract

This thesis aims to obtain the Maxwell-type equations for a compressible fluid whose sources are functions of velocity and vorticity. A correlation function and the dispersion relation were analyzed as functions of the Reynolds number. A Lagrangian for the Lamb vector and the vorticity were constructed, and the equations of motion were discussed. After that, we have analyzed the case of a charged fluid dynamics. Finally, the non-Abelian generalization of some results was introduced. A basic review for non-Abelian fluids was described in the Appendix.

Keywords: Fluids dynamics, non-Abelian formulation, Maxwell-type equations.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A eletrodinâmica de Maxwell é a teoria de campo clássica que usamos como base para uma nova abordagem da dinâmica de fluidos. Uma vez que a teoria de Maxwell passou por um processo de generalização não-Abeliano, o mesmo comportamento é esperado da dinâmica de fluidos. O auge desta evolução não-Abeliana é o chamado plasma de quark-glúons, ou simplesmente QGP [Quark-Gluons Plasma], o qual é obtido a partir das colisões a alta energia de núcleos pesados. Esse estado da matéria tem atraído grande interesse tanto de teóricos, quanto em experimentos no Colisor de Íons Pesados Relativísticos (RHIC) e no CERN. O QGP é um líquido denso. Entretanto, ele aparentemente flui com muita pouca viscosidade, fato que o aproxima de um fluido ideal, o qual é regido pelas leis da hidrodinâmica padrão. Assim, ao analisarem-se os resultados oriundos do RHIC pode-se adotar um ponto de vista hidrodinâmico para o plasma para a construção de suas propriedades. A fim de descrever uma dinâmica adequada para quarks e glúons faz-se necessário considerar as cargas não-Abelianas dos mesmos. Há no meio científico inúmeras teorias sobre alguns aspectos de um fluido ideal em interação com o campo de Yang-Mills ([2] - [6]).

Um dos objetivos para se criar QGP a partir da colisão de íons pesados - a alta energia, é testar a previsão para uma transição de um confinamento de cor para uma fase não confinada em QCD a alta temperatura e/ou densidade. Trabalhos mais atuais têm apresentado uma forma alternativa para descrever a dinâmica de fluidos, fluidos compressíveis [7] e as equações de um plasma[8]. Esses resultados foram obtidos através da reformulação das equações e pela obtenção de um conjunto de equações tipo-Maxwell para fluidos. Esta transformação na estrutura das equações implica numa generalização dos conceitos de carga e corrente relacionadas à dinâmica do fluido [9]. A compreensão do que será considerado como um termo de fonte (gerador) no formalismo final depende da escolha das quantidades e será a principal questão desta nova estrutura de dinâmica de fluidos. No trabalho de Lighthill sobre o som [10], o tensor de tensão aplicado é considerado como sendo a fonte do campo de radiação.

O objetivo aqui é construir as equações tipo-Maxwell para fluidos compressíveis considerando a presença do termo dissipativo desde o início do processo - analogamente ao que fizera Marmanis, porém, para um fluido incompressível. Neste caso, nota-se que há uma diferença fundamental entre as definições dos termos de fontes.

Outro ponto importante que será analisado é a possibilidade em se obter uma descrição de Lagrangeana para o fluido compressível. Em [8] os autores têm recentemente introduzido uma extensão desta nova estrutura das equações de plasma, para cada tipo de fluido, começando com as equações de movimento que descrevem tal sistema.

Podem-se obter as equações através da extensão da descrição Lagrangeana em relação ao fluido compressível. Porém, neste caso, precisa-se realizar uma parametrização da velocidade, conforme sugerido por [1] Considerar-se-á um fluido carregado e seu acoplamento com o campo eletromagnético. Combinar-se-á vorticidade e vetor de Lamb com os campos elétricos e magnéticos. Certificar-se-á que este acoplamento com o campo eletromagnético resultará em algumas mudanças do conjunto de equações tipo-Maxwell que descrevem o sistema e também serão obtidos novos termos fontes.

Apesar da exposição acima ter se concentrado em QGP e plasmas, há inúmeras aplicações de fluidos tipo-Maxwell. Artigos recentes apontam para estudos sobre o limite Newtoniano de tais fluidos, investigando e comprovando validade da analogia entre as equações constitutivas de Maxwell e a lei de Newton para a viscosidade. Outros, por sinal, optam por explorarem a versão não-Abeliana de fluidos tipo-Maxwell porém, aos olhos da Física Quântica.

Só para registro, há ainda trabalhos em magnetohidrodinâmica (MHD) e um dos que nos fascina é a aplicação à astrofísica; em particular, quando se analisa modelos de fluidos não-Abelianos relativísticos nos quais os efeitos da rotação do fluido de matéria se relacionam com a vorticidade e densidade de spin do “background” cosmológico. Em grande escala, a métrica FRW descreve o universo homogêneo e isotrópico. Porém, esta aproximação não consegue descrever de maneira fidedigna as complexidades e riquezas de nosso universo. O espectro da anisotropia tem sido mapeado e pode-se afirmar que nosso universo é a consequência da presença de anisotropia nas estruturas do universo recente. Neste sentido, é possível estudar a presença de vorticidade e densidade de spin ao longo da evolução cosmológica do universo. E o podemos fazer via Dinâmica Metafluida (DM), além de aplicarmos DM às equações da Magnetohidrodinâmica, que abordam estrelas densas e objetos compactados em rotação. Tais aplicações são mencionadas em [29]- [35].

Essa tese [36] está assim composta: no capítulo 2 serão apresentadas as equações básicas da Mecânica de fluidos explicitando aquelas que regem o movimento de um fluido, a saber: Equação da Continuidade, Equação do Momentum linear, Equação de Navier-Stokes e Equação da vorticidade. No capítulo 3, será introduzida a Dinâmica Metafluida (DM) como um sistema vinculado. E em seguida, no capítulo 4, será calculada a função correlação para a velocidade. No capítulo 5, serão apresentadas as formulações Lagrangeana e Hamiltoniana para fluidos compressíveis e será realizada uma extensão para o campo não-Abeliano. No capítulo 6, serão realizadas as análises para um fluido compressível carregado. E por fim, serão apresentadas as conclusões.

# Capítulo 2

# Conceitos básicos de Mecânica dos Fluidos

Segundo [26], "fluere" que significa fluir (em português) é o termo latino para toda e qualquer substância que flui. Portanto, fluidos. A nomenclatura "fluidos" engloba não somente líquidos e gases, mas também, plasmas e qualquer outra substância que se deforme sob a ação de tensões, como por exemplo, a de cisalhamento. A Mecânica dos Fluidos costumeiramente é apresentada em duas partes: a estática de fluidos e a dinâmica de fluidos. Em particular, quando o objeto de estudo for a água, temos respectivamente, hidrostática e hidrodinâmica.

Ao estudar fluidos, o primeiro passo é dominar as equações que os regem. A saber,

a) Equação da Continuidade.

b) Equação do Momentum linear.

c) Equação de Navier-Stokes.

d) Equação da Vorticidade.

Iniciemos, portanto, a exposição de cada uma das equações acima.

## 2.1 Equação da Continuidade

Dado um volume de controle qualquer, o balanço de massa que atravessa as fronteiras daquele é dado por

$$\frac{dm_{entrou}}{dt} - \frac{dm_{saiu}}{dt} = \frac{dm_{elemento}}{dt}, \tag{2.1}$$

onde $m_{entrou}$, $m_{saiu}$ e $m_{elemento}$ ,são respectivamente, a massa que entrou e saiu do volume de controle e a massa do elemento. Em termos das quantidades $\rho v_x$ , $\rho v_y$ e $\rho v_z$, onde $\rho$ é a densidade do fluido e $\vec{v}$ é a velocidade do fluido, a equação (2.1) torna-se

$$\begin{aligned} [ \quad & \rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}]dydz - [\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}]dydz + [\rho v_y - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\frac{dy}{2}]dxdz - \\ - \quad & [\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\frac{dy}{2}]dxdz + [\rho v_z - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\frac{dz}{2}]dydz - [\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\frac{dz}{2}]dxdy = \frac{\partial(\rho dxdydz)}{dt}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Após algumas simplificações, segue-se que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydz - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydz - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydz &= \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz. \\ -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} &= \frac{\partial\rho}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Efetuemos as derivadas,

$$\rho[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}] + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \rho[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}] + [v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}]\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} &= 0, \\ \rho(\nabla.\vec{v}) + \underbrace{(\vec{v}.\vec{\nabla})\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\frac{D\rho}{Dt}} &= 0. \end{aligned}$$

$$\rho(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \frac{D\rho}{Dt} = 0. \qquad \text{(Equação da Continuidade)} \tag{2.4}$$

Na equação acima, o termo

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho, \tag{2.5}$$

é a derivada substancial da massa específica ($\rho$). Denominamos por fluxos incompressíveis, àqueles em que - ao longo do movimento de uma partícula, a densidade específica do mesmo é mantida invariável. Ou seja, aqueles para os quais é válida a relação

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0. \qquad \text{(Fluidos Incompressíveis)}$$

Consequentemente, denominaremos por fluidos compressíveis àqueles em que o termo $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ for não-nulo.

## 2.2 Equação de Navier-Stokes

Quanto à viscosidade, há dois tipos de fluidos. Chamam-se Fluidos Newtonianos àqueles em que a viscosidade é constante, e a tensão de cisalhamento ($\sigma_{jk}$) é escrita pela lei da Viscosidade de Newton

$$\sigma_{jk} = \mu \partial_j v_k, \qquad \text{(Lei da Viscosidade de Newton)} \tag{2.6}$$

onde $\partial_j v_k$ é o gradiente de velocidade, $\mu$ é a viscosidade dinâmica do fluido e $\tau$ é a tensão de cisalhamento. Por conseguinte, fluidos que não obedecem à lei da viscosidade de Newton são denominados fluidos não-Newtonianos. Entretanto, nos casos mais gerais, a tensão não é um simples vetor, e sim, um tensor. O que equivale a dizer que a tensão apresenta vários componentes. Para um fluido Newtoniano, as componentes da tensão total são dadas por:

$$\tau_{ij} = -\Big(p + \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\Big)\delta_{ij} + \mu\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big). \tag{2.7}$$

Uma vez que a equação de Cauchy é dada por [28]

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.8}$$

onde $g_i$ é a componente do vetor aceleração da gravidade, e $\tau_{jk}$ é a tensão total, então, substitui-se (2.7) em (2.8), logo em notação vetorial tem-se

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \mu\nabla^2\vec{v} + \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),\\
\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

que é a **Equação de Navier-Stokes** para fluidos compressíveis. Para os fluidos incompressíveis, tem-se que $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ e a equação de Navier-Stokes se reduz a

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{v}. \tag{2.10}$$

Ou explicitando a derivada material, onde $\nu$ é a viscosidade cinemática do fluido,

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \vec{\nabla}(\frac{p}{\rho}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{v}. \tag{2.11}$$

O penúltimo termo à direita da equação (2.11) tem dimensão de $\frac{[v]^2}{L}$ ao passo que o último termo, da mesma equação, tem dimensão de $[\nu]\frac{[v]}{[L]^2}$. A razão entre esses dois termos (para o caso incompressível) é o número de Reynolds. Define-se por número de Reynolds ($R_e$) à razão entre a força de corpo (forças de inércia) e a força viscosa. Assim, a dimensão do $R_e$ é dada por

$$[R_e] = \frac{[F_{corpo}]}{[F_{viscosa}]},$$

$$[R_e] = \left[\frac{\rho v \frac{\partial v}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right],$$
$$[R_e] = \frac{[\rho]}{[\mu]}\frac{[v]^2}{[L]}\frac{[L]^2}{[v]},$$
$$[R_e] = \frac{[v][L]}{[\nu]},$$

considerando as equações acima, nota-se que o número de Reynolds é adimensional. Assim

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu}, \tag{2.12}$$

onde $\rho$ é a densidade do fluido, $v$ é a velocidade e $L$ a escala de distância presente em cada problema (por exemplo, se o fluido estivesse escoando em um cano, $L$ seria o diâmetro do mesmo) e $\mu$ a viscosidade do fluido. Analisando a equação (2.12), se $Re$ for muito grande, então, os efeitos viscosos serão desprezíveis. Por outro lado, para situações nas quais a viscosidade é relevante, o número de Reynolds é pequeno. Também, para um número de Reynolds pequeno, o escoamento do fluido será laminar, caso no qual a viscosidade tende a amortecer qualquer presença de vórtice. Ao passo que será denominado escoamento turbulento quando $R_e$ for grande. Fato que será possível se a densidade, ou a velocidade ou as dimensões lineares forem grandes.

## 2.3 Equação do Momentum Linear

A partir da segunda lei de Newton, ao dividir ambos os membros da equação pelo volume e a lembrar que $\rho = \frac{m}{V}$ e $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a}, \\ \frac{\sum \vec{F}}{V} &= \frac{m}{V}\vec{a}, \\ &= \rho\vec{a}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

para uma partícula do fluido que ocupa um elemento infinitesimal, as contribuições para a força são dadas pelas componentes do tensor das tensões (2.7), lembrando que a componente $x$ do vetor aceleração da gravidade é dada por $\frac{Dv_x}{Dt}$, a equação acima (2.13) fica após uma expansão em Taylor

$$\begin{aligned} &\Big( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\Big)dydz + \Big(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\Big)dxdz + \\ &+ \Big(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\Big)dxdy - \Big(\tau_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\Big)dydz + \\ &- \Big(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\Big)dxdz - \Big(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\Big)dxdy + \\ &+ \rho g_x dxdydz = \rho dxdydz\frac{Dv_x}{Dt}, \\ \rho\frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho g_x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Analogamente, temos para as componentes $y$ e $z$, respectivamente,

$$\rho\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} - \rho g_y, \tag{2.15}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} - \rho g_z, \tag{2.16}$$

nas equações acima (2.14)-(2.16) $\tau_{xx}$, $\tau_{yy}$ e $\tau_{zz}$ são respectivamente as componentes normais à superfície, ao passo que $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz}$ são as componentes da tensão de cisalhamento.

Sem comprometer a generalidade da equação acima, faremos a seguinte aproximação para o tensor de tensão: consideraremos desprezíveis as contribuições devido às componentes da tensão de cisalhamento e assumiremos que as componentes normais da tensão sejam iguais ao negativo da pressão $P$, assim as equações acimas são reescritas como

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x. \tag{2.17}$$

$$\rho\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y. \tag{2.18}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z. \tag{2.19}$$

Novamente, explicitamos a derivada substancial e re-escrevemos a equação acima em notação vetorial

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{g}. \tag{2.20}$$

Da equação acima, notamos que um caso particular da equação do Momentum-linear é a equação de Euler.

## 2.4 Equação da vorticidade

Define-se **vorticidade** por

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}, \tag{2.21}$$

e usando a identidade vetorial $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$, percebemos que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = 0, \tag{2.22}$$

para quaisquer tipos de escoamento, laminar, ou turbulento. Para obtermos a equação da vorticidade, partiremos da aplicação do rotacional à Equação de Navier-Stokes (para fluidos incompressíveis), isto é, a partir de (2.10).

$$
\begin{aligned}
\frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}. \\
\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} &= \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}. \\
\vec{\nabla}\times\Big[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\Big] &= \vec{\nabla}\times\Big[\vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}\Big]. \\
\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} &= \nu\nabla^2\vec{\omega}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

A equação (2.23) é a equação da vorticidade. Porém, vamos trabalhá-la um pouco mais e escrevê-la de maneira mais elegante. Para isso, partiremos da seguinte identidade vetorial [28]

$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\times\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}), \qquad (2.24)$$

após identificarmos $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ tem

$$
\begin{aligned}
(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} &= (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}), \\
(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} &= \vec{\omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}). \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Agora, ao aplicar o rotacional

$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) + \frac{1}{2}\underbrace{\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})]}_{=0},$$

usando a identidade

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}, \qquad (2.26)$$

e identificando $\vec{A} = \vec{\omega}$ e $\vec{B} = \vec{v}$ segue que

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) &= \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{\omega}}_{=0} - \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})\vec{v}}_{=0} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \\
\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) &= (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Portanto, a equação da vorticidade (2.23) fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} &+ \vec{\nabla}\times(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \nu\nabla^2\vec{\omega}. \\
\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} &+ (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \nu\nabla^2\vec{\omega}. \\
\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} &+ (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\omega}. \\
\frac{D\vec{\omega}}{Dt} &= (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\omega}. \qquad \text{(Equação da Vorticidade)} \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Vale lembrar que a equação (2.27) guarda informações similares à equação (2.10), haja vista que se (2.28) é o rotacional da equação de Navier-Stokes.

# Capítulo 3

# Equações tipo-Maxwell para um fluido compressível

Antes de iniciarmos o estudo com fluidos compressíveis, vamos primeiro fazer o desenvolvimento para fluidos incompressíveis. Sempre em um primeiro momento, levaremos em conta fluidos invíscidos e em seguida introduziremos a viscosidade. A equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis e invíscidos, desprezando-se o termo da gravidade e levando-se em consideração as equações (2.11) e (2.25) é dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\Big). \tag{3.1}$$

onde $\vec{v}(\vec{x},t)$, $\vec{\omega}(\vec{x},t)$, $p(\vec{x},t)$, são respectivamente, os campos de velocidade, vorticidade e pressão do fluido e $\rho$ é a densidade do mesmo. Aliás, o termo entre parênteses na equação (3.1) é a energia de Bernoulli $\phi$ que será representada por

$$\phi = \Big(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\Big). \tag{3.2}$$

Usando (3.2), podemos reescrever (3.1) como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\nabla}\phi, \tag{3.3}$$

que é a equação para um fluido incompressível e invíscido. Notamos se tratar de uma equação linear. Entretanto, se estivéssemos lidando com um fluido viscoso, teríamos que acrescentar um termo não-linear à equação acima - o que levaria o escoamento para o regime turbulento. Sendo assim, nossa proposta será encarar a turbulência como fruto da interação entre duas outras grandezas, a saber: vorticidade e o vetor de Lamb, assim definidos:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \quad \text{(vorticidade)} \tag{3.4}$$

$$\vec{l} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad \text{(vetor de Lamb)} \tag{3.5}$$

Denomina-se "Dinâmica Metafluida"(DM) [9] à esta "nova teoria" da turbulência a qual visa obter um conjunto de equações para os valores médios da vorticidade e do vetor de Lamb. Para alcançar este objetivo, iniciamos por aplicar o rotacional à equação (3.3)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}) &= \vec{\nabla}\times[-\vec{\nabla}\phi-(\vec{\omega}\times\vec{v})].\\ \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} &= -\vec{\nabla}\times\vec{l}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, busquemos uma equação para o vetor de Lamb e para isso, apliquemos a divergência à equação (3.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla}\phi-(\vec{\omega}\times\vec{v}).\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{l} &= -\nabla^2\phi.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Comparando (2.22) e (3.7) percebemos que há uma equação para a divergência da vorticidade e outra para a divergência do vetor de Lamb,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = 0, \tag{3.8}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{l} = -\nabla^2\phi. \tag{3.9}$$

Entretanto, não há até o momento uma equação correspondente para a evolução da vorticidade. Com o intuito de buscar tal expressão, vamos re-escrever a equação de Navier-Stokes somente em função do vetor de Lamb, velocidade e da energia total. Desta maneira, de (3.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\omega}\times\vec{v}-\vec{\nabla}\phi,\\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} &= -\vec{l}-\vec{\nabla}\phi,\\ \vec{l} &= -\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{v}}{\partial t},\end{aligned} \tag{3.10}$$

agora, deriva-se a expressão acima com respeito à variável tempo ( $t$) para obter-se

$$\frac{\partial\vec{l}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, a partir de (3.5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{l}}{\partial t} &= \frac{\partial(\vec{\omega}\times\vec{v})}{\partial t},\\ \frac{\partial\vec{l}}{\partial t} &= \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\times\vec{v}+\vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, aplicando-se (3.10) e (3.6) na equação acima, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \\
&= -(\vec{\nabla} \times \vec{l}) \times \vec{v} + \vec{\omega} \times [-\vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{v})], \\
&= -(\vec{\nabla} \times \vec{l}) \times \vec{v} + \vec{\omega} \times [-\vec{\nabla}\phi - \vec{l}], \\
&= -(\vec{\nabla} \times \vec{l}) \times \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{l}). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \qquad (3.14)$$

identificando-se $\vec{A} = \vec{v}$ e $\vec{B} = \vec{l}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{l}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + \vec{l} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}), \\
&= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + (\vec{l} \times \vec{\omega}), \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

lembrando-se que

$$\vec{v} \cdot \vec{l} = \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0,$$

a equação (3.15) nos fornece

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{l}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + (\vec{l} \times \vec{\omega}), \\
0 &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + (\vec{l} \times \vec{\omega}), \\
0 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) + (\vec{l} \times \vec{\omega}), \\
-\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} + (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{l} \times \vec{\omega}), \\
\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{l}) &= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l} \times \vec{\omega}), \\
-(\vec{\nabla} \times \vec{l}) \times \vec{v} &= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l} \times \vec{\omega}). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Com o resultado acima, a equação (3.13) fica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= -(\vec{\nabla} \times \vec{l}) \times \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{l}), \\
&= [-(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l} \times \vec{\omega})] - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{l}), \\
&= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l} \times \vec{\omega}) - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{l}), \\
&= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{l}) - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi - (\vec{\omega} \times \vec{l}), \\
&= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Introduzimos agora, a densidade de carga turbulenta $n(\vec{x}, t)$, definida em [9] dada por:

$$n(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{l}, \qquad (3.18)$$

assim

$$\begin{aligned}
n(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{l}, \\
n(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}),
\end{aligned}$$

como $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ e identificando $\vec{A}=\vec{\omega}$ e $\vec{B}=\vec{v}$ segue que

$$\begin{aligned} n(\vec{x},t) &= \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}) - \vec{\omega}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}), \\ n(\vec{x},t) &= \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}) - \vec{\omega}\cdot\vec{\omega}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

e consequentemente, a densidade de carga turbulenta é nula para um escoamento irrotacional. A equação (3.16) pode ser escrita em termos da densidade de carga turbulenta, para isso, observemos que

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B},$$

identificamos $\vec{A}=\vec{v}$ e $\vec{B}=\vec{l}$ para obter

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{l}) &= \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}) - \vec{l}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{=0} + (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l}, \\ \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{l}) &= \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}) + (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l}, \\ \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{l}) &= \vec{v}n + (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l}, \\ -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} &= \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{l}) - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \\ -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} &= \vec{\nabla}\times[\vec{v}\times(\vec{\omega}\times\vec{v})] - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

mas, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$ para $\vec{A}=\vec{v}$, $\vec{B}=\vec{\omega}$ e $\vec{C}=\vec{v}$ temos

$$\vec{v}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) = v^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v}. \tag{3.21}$$

Após substituir (3.21) em (3.20) temos

$$\begin{aligned} -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} &= \vec{\nabla}\times[\vec{v}\times(\vec{\omega}\times\vec{v})] - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \\ &= \vec{\nabla}\times[v^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v}] - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \\ &= \vec{\nabla}\times(v^2\vec{\omega}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando a identidade vetorial $\vec{\nabla}\times(\Psi\vec{A}) = \Psi\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\Psi\times\vec{A}$, onde $\Psi = v^2$ e $\vec{A}=\vec{\omega}$,

$$\vec{\nabla}\times(v^2\vec{\omega}) = v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} + \vec{\nabla}(v^2)\times\vec{\omega}. \tag{3.23}$$

Logo, (3.22) fica

$$\begin{aligned} -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} &= \vec{\nabla}\times(v^2\vec{\omega}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \\ -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} &= v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} + \vec{\nabla}(v^2)\times\vec{\omega} - \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substitui-se (3.24) em (3.17) onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{l}}{\partial t} &= -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{l} - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{\nabla}\phi. \\ &= v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} + \vec{\nabla}(v^2)\times\vec{\omega} - \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{\nabla}\phi. \\ &= v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} - \vec{\omega}\times\vec{\nabla}(v^2) - \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \omega\times\vec{\nabla}\phi. \\ &= v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} - \vec{v}n - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\cdot\vec{\omega})\vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{\nabla}(\phi+v^2) - 2(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Comparando a equação (3.25) e a equação que descreve a evolução da vorticidade

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{l}, \\
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{v} n - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}(\phi + v^2) - 2(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v},
\end{aligned}
$$

percebemos que há uma correspondência entre o primeiro termo do lado direito de ambas as equações. Haja vista que ambos envolvem um rotacional. Olhando somente para este termo, uma equação reproduz a outra a menos do sinal negativo e/ou do fator $v^2$, bastando trocar $\vec{\omega}$ por $\vec{l}$ e vice-versa. Entretanto, os demais termos da equação (3.25) não possuem seus correspondentes na equação de evolução da vorticidade. Introduzindo o vetor corrente turbulenta $\vec{j}(\vec{x}, t)$ definido por [9]

$$
\vec{j} = \vec{v} n + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\nabla}(\phi + v^2) + 2(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \tag{3.26}
$$

a equação (3.25) pode ser re-escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{v} n - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\nabla}(\phi + v^2) - 2(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - [\vec{v} n + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\nabla}(\phi + v^2) - 2(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j}. 
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Portanto, a Dinâmica Metafluida nos fornece o seguinte conjunto de equações

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.28}
$$

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = n, \tag{3.29}
$$

$$
\vec{\nabla} \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \tag{3.30}
$$

$$
\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \frac{1}{v^2} \Big( \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \vec{j} \Big). \tag{3.31}
$$

As equações acima são aquelas que a DM [9] nos apresenta para um fluido incompressível e invíscido. Segundo o teorema de Helmoltz, todo campo fica completamente definido através de seu divergente e de seu rotacional. Neste sentido, temos do lado esquerdo das equações da DM, para um fluido incompressível, os campos de Lamb e vorticidade. E do lado direito daquelas, temos as "fontes" desses campos, neste caso, $n$ e $j$ são os termos-fonte de turbulência. Outro detalhe encontra-se no fato da taxa de variação temporal da vorticidade gerar um campo de Lamb e vice-versa. O conjunto de equações acima sugerem uma analogia com as equações de Maxwell (do eletromagnetismo). Tal analogia fica mais clara ao reescrevermos as equações acima, porém, sem os termos-fonte

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.32}
$$

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = 0, \tag{3.33}
$$

$$
\vec{\nabla} \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \tag{3.34}
$$

$$
\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} \tag{3.35}
$$

Voltaremos a discutir sobre esta analogia mais adiante. Por ora, falta-nos introduzir a viscosidade à equação de Navier-Stokes e para tal finalidade basta acrescentar o termo viscoso à equação (3.1) que ficará

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\Big) + \nu \nabla^2 \vec{v}. \tag{3.36}$$

Usando a energia de Bernoulli $\phi$ e a definição do vetor de Lamb, a equação acima fica

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{l} - \vec{\nabla}\phi + \nu \nabla^2 \vec{v}. \tag{3.37}$$

Aplica-se o rotacional à equação (3.36) e encontramos a taxa de variação temporal da vorticidade

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{l} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \tag{3.38}$$

Para obtermos a equação que descreve a evolução do vetor de Lamb, basta isolá-lo em (3.37) e derivar com respeito ao tempo. Após alguns cálculos similares àqueles realizados na primeira parte deste capítulo, podemos expressar a taxa temporal do vetor de Lamb (levando em consideração os termos-fonte)

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3.39}$$

A partir de (3.39) segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial t}. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla^2 [-\vec{l} - \vec{\nabla}\phi + \nu \nabla^2 \vec{v}]. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu \nabla^2 (-\vec{\nabla}\phi) + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu \vec{\nabla}(-\nabla^2 \phi) + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}. \\
&= v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{j} - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{l}) + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}. \\
&= v^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) - \vec{j} - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu \vec{\nabla} n + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}. \\
&= v^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) - \vec{j} + \nu \vec{\nabla} n - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}. \\
&= v^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) - \vec{j} + \nu \vec{\nabla} n - \nu \nabla^2 \vec{l}. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Notamos que na penúltima passagem, acima, desprezamos o último termo da equação (3.40) por se tratar de uma correção de segunda ordem para a viscosidade. Conforme [9] afirma, a equação (3.40) implica em duas correções à equação (3.27), no caso invíscido. A saber, uma diz respeito ao gradiente da carga turbulenta podendo ser interpretado como uma correção viscosa ao vetor corrente turbulenta $\vec{j}$. A outra envolve os gradientes espaciais do vetor de Lamb e descrevem como tais gradientes afetam à evolução do mesmo através da viscosidade. Marmanis chama a atenção para o sinal negativo em frente a estes termos, uma vez que tais sinais serão determinantes na obtenção de uma equação de onda simples tanto para a vorticidade, quanto para o vetor de Lamb.

Assim, a DM fornece o seguinte conjunto de equações para um fluido incompressível e viscoso

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.41}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = n, \tag{3.42}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \tag{3.43}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \vec{j} - \nu \vec{\nabla} n + \nu \nabla^2 \vec{l}\Big], \tag{3.44}$$

que é um sistema de equações lineares e válido tanto escoamentos laminares, quanto turbulentos. na qual evidencia os campos (do lado esquerdo das equações acima) e as "fontes" (do lado direito - neste sentido, a taxa temporal de variação de $\vec{l}$ é vista como termo gerador de $\vec{\omega}$ e vice-versa). Observamos que não há fonte para o campo vorticidade. Ao passo que o campo do vetor de Lamb apresenta uma fonte, a densidade de carga turbulenta. Notamos também que um sinal negativo em seu "fluxo" ao passo que o outro apresenta sinal positivo. Por fim, na última das quatro equações acima (3.44) aparece o termo $1/v^2$ que sugere-nos uma equação de onda. Com tais evidências, torna-se natural averiguar a semelhança desses campos com o eletromagnético.

## 3.1 Analogia entre as equações de Maxwel e as equações da Dinâmica Metafluida

Para facilitar nossa tarefa, escreveremos as equações [3.41- 3.44], ao lado das equações microscópicas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0, \tag{3.45}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = n, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 4\pi\rho, \tag{3.46}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \tag{3.47}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \vec{j}\,\Big], \quad \vec{\nabla} \times \vec{b} = \frac{1}{c^2}\Big[\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + 4\pi\vec{i}\Big], \tag{3.48}$$

sendo $\vec{b}(\vec{x},t)$ o campo magnético microscópico, $\vec{e}(\vec{x},t)$ o campo elétrico microscópico, $\rho(\vec{x},t)$ é a densidade de carga microscópica e $\vec{i}(\vec{x},t)$ é a densidade de corrente microscópica. Ou em termos do potencial, temos

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \qquad \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}, \tag{3.49}$$
$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \qquad \vec{e} = -\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Psi. \tag{3.50}$$

Aplicando o divergente à equação (3.48)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{\omega} &= \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}+\vec{j}\,\Big],\\
\vec{\nabla}\cdot\Big(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}\Big) &= \vec{\nabla}\cdot\Big[\frac{1}{v^2}\Big(\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}+\vec{j}\Big)\Big],\\
0 &= \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{l})}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})\Big],\\
\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{l})}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j} &= 0,\\
\frac{\partial n}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j} &= 0. \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Do eletromagnetismo temos

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{i} = 0, \qquad (3.52)
$$

ao compararmos (3.51) com (3.52) fica mais claro os nomes para $n$ e $\vec{j}$, respectivamente, densidade de carga turbulenta e corrente turbulenta.

As equações de onda para $\vec{\omega}$ e $\vec{l}$ são, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{\omega} &= \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}+\vec{j}\Big],\\
\vec{\nabla}\times\Big[\vec{\nabla}\times\vec{\omega}\Big] &= \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{l})}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{j}\Big],\\
-\nabla^2\vec{\omega} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{l})}{\partial t},\\
\nabla^2\vec{\omega} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial t^2}. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{l} &= -\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t},\\
\vec{\nabla}\times\Big[\vec{\nabla}\times\vec{l}\Big] &= -\vec{\nabla}\times\Big[\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\Big],\\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{l})-\nabla^2\vec{l} &= -\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})}{\partial t},\\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{l})-\nabla^2\vec{l} &= -\frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}+\vec{j}\Big],\\
\nabla^2\vec{l} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{l}}{\partial t^2}. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\vec{\omega} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{b}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{b}}{\partial t^2}, \qquad (3.55)\\
\nabla^2\vec{l} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{l}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{e}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{e}}{\partial t^2}. \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

As equações (3.55) e (3.56) são as equações de onda para os campos $\vec{\omega}$ e $\vec{l}$, e ao lado, suas "correspondentes" equações no eletromagnetismo de Maxwell]. Tais equações evidenciam o caráter ondulatório da dinâmica de fluidos, além do mais, sugerem uma analogia funcional (sugerida primeiramente por [9])entre as seguintes grandezas :

$$\vec{b} \Leftrightarrow \vec{\omega}; \tag{3.57}$$
$$\vec{e} \Leftrightarrow \vec{l}; \tag{3.58}$$
$$\rho \Leftrightarrow n; \tag{3.59}$$
$$\vec{i} \Leftrightarrow \vec{j}; \tag{3.60}$$
$$\tag{3.61}$$

Uma vez que o campo de Lamb e de vorticidade são definidos pelas equações abaixo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.62}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = n, \tag{3.63}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \tag{3.64}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \frac{1}{v^2}\Big[\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \vec{j} - \nu \vec{\nabla} n + \nu \nabla^2 \vec{l}\Big], \tag{3.65}$$

agora, estamos em condições de fazer as médias das quantidades envolvidas, e para isso aplicaremos o método de filtragem desenvolvido por Russakoff [27]. Segundo tal método, a média espacial de uma dada função $A(\vec{x}, t)$ com respeito a uma função teste $f(\vec{x})$ é dada por

$$< A(\vec{x}, t) >= \int f(\vec{x}')A(\vec{x} - \vec{x}', t)d^3x'. \tag{3.66}$$

Macroscopicamente, os campos de Lamb e vorticidade, são respectivamente,

$$\vec{L} =< \vec{l}(\vec{x}, t) >, \tag{3.67}$$

$$\vec{W} =< \vec{\omega}(\vec{x}, t) > . \tag{3.68}$$

Em termos das grandezas acima, as equações [3.62 - 3.65] ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \tag{3.69}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = N(\vec{x}, t), \tag{3.70}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{L} = -\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \vec{W}, \tag{3.71}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = \frac{1}{< v^2 >}\Big[\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + < \vec{j}(\vec{x}, t) > -\nu < \vec{\nabla} n(\vec{x}, t) > +\nu \nabla^2 \vec{L}\Big]. \tag{3.72}$$

Nas equações acima [3.69 - 3.72], percebemos dois tipos de escoamentos, um denominado "escoamento homogêneo, caso em que as fontes turbulentas são nulas - e outro denominado "escoamento inomogêneo - caso nos quais as fontes turbulentas estão presentes. Outro detalhe é que a média dos termos-fontes são dados de entrada da equação e são determinados pela experimentação e/ou simulação numérica. A média espacial de uma função $\vec{A}(\vec{x},t)$dada por (3.66) é na verdade uma integral de convolução. E pelo teorema da convolução, a transformada de Fourier de uma convolução de duas funções absolutamente integráveis é igual ao produto das transformadas de Fourier de cada função. Dito de outra maneira, a convolução em um domínio é equivalente a uma multiplicação ponto a ponto no outro domínio. Este teorema é verdadeiro, entretanto, a demonstração do mesmo foge ao escopo desta tese. Na abordagem acima, assumiu-se também a seguinte aproximação: $< v^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega} >=< v^2 > \vec{\nabla}\times\vec{\omega}$.

## 3.2 Eqs. da Dinâmica de fluidos - fluidos compressíveis

Recentemente, a analogia funcional entre as equações da eletrodinâmica clássica e a dinâmica de fluidos tem sido usada para escrever as equações de movimento de um fluido com a mesma estrutura que as equações de Maxwell do eletromagnetismo - daí a expressão "equações tipo-Maxwell da dinâmica dos fluidos". Marmanis [9] descreveu o comportamento dinâmico de quantidades de escoamento médio em escoamento de fluidos incompressíveis com alto número de Reynolds. Kambe [7] apresentou uma generalização de [9], porém, tratando-se de um fluido compressível.

Diferentemente do que fora realizado em [7], a nossa proposta é obter as equações tipo-Maxwell considerando a viscosidade desde o princípio e construir um sistema de equações como funções do campo vorticidade ($\vec{\omega}$) e campo de Lamb ($\vec{l}=\vec{\omega}\times\vec{v}$).
A equação de movimento para um fluido compressível e não-viscoso é

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{\nabla}\Big(\frac{v^2}{2}\Big)=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \tag{3.73}$$

onde $v^2/2$ é a energia cinética, e esta equação é complementada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\vec{v}\rho)=0, \tag{3.74}$$

e pela equação da entropia

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s=0. \quad \text{(caso entrópico)} \tag{3.75}$$

Da termodinâmica temos

$$-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p=-\vec{\nabla}h+T\vec{\nabla}s, \tag{3.76}$$

onde $\rho$ é a densidade do fluido, $s$ é a entropia por unidade de massa,$T$ é a temperatura, $p$ é a pressão e $\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v}$ é a vorticidade. Assim, para levarmos em consideração os termos viscoso, teremos que inseri-los via tensor das tensões, assim definido

$$\tau_{ij}=\mu e_{ij}+\xi\delta_{ij}D, \tag{3.77}$$

$$e_{ij}=\partial_j u_i+\partial_i u_j-\frac{2}{3}\delta_{ij}D, \tag{3.78}$$

onde $D \equiv \partial_m u_m$, e os coeficientes $\mu$ e $\xi$ são denominados coeficientes de viscosidade (e $\xi$ é também conhecido como a segunda viscosidade). Dessa maneira, a Eq. (3.73) fica

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{\nabla}\Big(\frac{1}{2}v^2\Big) = -\vec{\nabla}h + \vec{\kappa}, \tag{3.79}$$

onde

$$\vec{\kappa} = T\vec{\nabla}s + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\tau, \tag{3.80}$$

$h$ é a entalpia, $s$ é a entropia e a eq.( 3.79) é a **equação de Navier-Stokes** para um fluido compressível e viscoso [11]. Ao fazermos uma análise dimensional da Eq. (3.80) notamos que $\vec{\kappa}$ tem dimensão de aceleração.

$$[\kappa] = \frac{[\sigma]}{[\rho][L]},$$

$$[\kappa] = \frac{kg}{m.s^2}\frac{m^3}{kg}\frac{1}{m} = \frac{m^3}{m^2 s^2},$$

$$[\kappa] = \frac{m}{s^2}. \tag{3.81}$$

Agora, reescrevamos a equação de movimento

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{\nabla}\Big(\frac{1}{2}v^2\Big) &= -\vec{\nabla}h + \vec{\kappa}, \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{l} &= -\vec{\nabla}\Big(h + \frac{1}{2}v^2\Big) + \vec{\kappa}, \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{l} &= -\vec{\nabla}\Omega + \vec{\kappa}, \\
\vec{l} &= -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Omega + \vec{\kappa},
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde

$$\Omega = h + \frac{1}{2}v^2 \tag{3.83}$$

é a energia total.

Em seguida, após calcularmos a divergência, o rotacional e a derivada do vetor Lamb, vem que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = n + \vec{\nabla} \cdot \vec{\kappa}, \tag{3.84}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{l} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{\kappa}, \tag{3.85}$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} - v^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = -\vec{j} + \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t}. \tag{3.86}$$

Para completar as equações básicas da dinâmica de fluidos, calculamos o divergente do campo vorticidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.87}$$

repare nas equações acima que $\vec{j}$ (que será definido posteriormente) e $n$, que é dado por

$$n = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \nabla^2\Omega, \tag{3.88}$$

em analogia, respectivamente, à densidade de corrente e carga elétrica, serão relacionados com o termo "fonte", sendo denominados, respectivamente por densidade de corrente turbulenta e carga turbulenta. Nota-se que $n$ é diretamente proporcional à variação temporal da dilatação e à variação espacial da energia. Por outro lado, sabe-se que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{l} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\vec{\omega}$$

e a partir de [11] pode-se escrever que

$$n = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\omega} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}$$

o que significa que o termo fonte pode ser determinado apenas pela velocidade e vorticidade.

A partir da fórmula da aceleração de Lagrange [17] dada por

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\nabla}\Big(\frac{1}{2}v^2\Big) \implies \vec{\nabla}\times\dot{\vec{v}} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{l},$$

a qual é análoga à Eq.(3.85), e como fora dito acima, $\vec{\kappa}$ é a aceleração. Na Eq. (3.84) tem-se que as fontes do vetor de Lamb são a pressão, entalpia e o gradiente de velocidade. Na Eq. (3.85) pode-se mostrar que a variação temporal da velocidade angular é igual ao torque dado pela força de Coriolis, que é o vetor Lamb. A última equação representa a conservação do fluxo vorticidade ao longo de um tubo de vorticidade. Analogamente ao caso eletromagnético, pode-se dizer que isso significa a ausência de (fontes) monopolos de vorticidade. Mais ainda, de volta a Eq.(3.85), no caso de um movimento com vorticidade constante ($\partial\vec{\omega}/\partial t = 0$) e um vetor de Lamb lamilar, ou seja, $\vec{\nabla}\times\vec{l} = 0$, tem-se com o uso da Eq.(3.80) que

$$\vec{\nabla}T\times\vec{\nabla}s = -\vec{\nabla}\frac{1}{\rho}\times\vec{\nabla}\sigma,$$

a qual é a condição para o segundo e terceiro teoremas da vorticidade de Helmholtz [17].

A novidade é que esta última equação é a condição para a preservação da circulação do movimento independentemente de $\vec{\omega}$ e $\vec{l}$. Desta forma, o vetor de Lamb e a vorticidade podem ser tomados como o Kernel da dinâmica turbulenta através dos campos velocidades e vorticidade ou dos campos velocidade e pressão [9]. Assim, alguns termos que não podem ser explicitamente escritos como uma função somente de $\vec{\omega}$ ou $\vec{l}$, serão tratados como um termo de fonte. Dentro do termo relacionado com a viscosidade através do termo fonte nas Eqs.(3.88) e

$$\vec{j} = \vec{v}n + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\cdot\vec{\omega})\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{\nabla}(\Omega + u^2) + 2[(\vec{\omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\nabla}]\vec{v} - (\vec{\omega}\times\vec{v})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}), \tag{3.89}$$

onde nota-se que os termos de fonte nas Eqs. (3.88) e (3.89), diferem daqueles termos fontes dados em [9] graças à presença do termo $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, uma vez que o fluido é compressível. A densidade de carga $n$, relacionada à vorticidade pode ser considerada como uma característica topológica do escoamento [18]. Uma importante observação pode ser feita sobre a presença do termo $\vec{\kappa}$ na Eq. (3.84) e seu efeito nas equações tipo-Maxwell, as quais podem ser reescritas como

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{l}-\vec{\kappa}\right)=n, \tag{3.90}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{l}-\vec{\kappa}\right)+\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=0, \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial(\vec{l}-\vec{\kappa})}{\partial t}-u^2\vec{\nabla}\times\vec{\omega}=-\vec{j} \tag{3.92}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}=0. \tag{3.93}$$

Pode-se ver que a presença do termo $\vec{\kappa}$, em analogia com o eletromagnetismo de Maxwell, mostra que $\vec{\kappa}$ atua como um vetor polarização para o vetor Lamb, tal como o vetor $\vec{P}$ para o campo elétrico em eletrodinâmica clássica. Então, introduzindo-se um novo vetor de Lamb $\vec{l'}=\vec{l}-\vec{\kappa}$ nas equações [3.90 - 3.93] e consequentemente, re-obteremos o mesmo conjunto de equações [3.84 - 3.87] para os vetores $\vec{l'}$ e $\vec{\omega}$ [7]. O sistema de equações [3.90 - 3.93] apresenta uma característica comum com as equações microscópicas de Maxwell em relação a campos que variam extremamente rápidos no espaço e no tempo. Como em [9] para um fluido incompressível, usar-se-á o método de filtragem espacial, proposto por Russakoff [27] para obter o comportamento dinâmico das quantidades médias do escoamento. Após a aplicação de tal processo, tem-se que

$$\vec{\nabla}\cdot<\vec{l'}>=<n>, \tag{3.94}$$

$$\vec{\nabla}\times<\vec{l'}>+\frac{\partial<\vec{\omega}>}{\partial t}=0, \tag{3.95}$$

$$\frac{\partial<\vec{l'}>}{\partial t}-<v^2>\vec{\nabla}\times<\vec{\omega}>=-<\vec{j}> \tag{3.96}$$

$$\vec{\nabla}\cdot<\vec{\omega}>=0, \tag{3.97}$$

onde $<v^2>=a^2$ é a velocidade quadrática média. Pode-se promover uma extensão desta analogia, introduzindo os potenciais que, neste caso, correspondem ao campo de velocidade média $<\vec{v}>$ (potencial vetor) e à função energia $<\Omega>$ (o potencial escalar). Como no eletromagnetismo de Maxwell, às vezes é mais apropriado trabalhar com as equações que envolvam apenas o potencial, com a finalidade de manter um número menor de equações de segunda ordem, do que se trabalhar com um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem [3.94 - 3.97]. Assim, a partir da Eq. (3.96) e usando a expressão em (3.84), pode-se mostrar que a velocidade média obedece a seguinte equação de onda, vamos a prova.

Primeiro para a obtenção da equação de onda para $<\vec{v}>$

$$\begin{aligned}\frac{\partial<\vec{l'}>}{\partial t}-<v^2>\vec{\nabla}\times<\vec{\omega}>&=-<\vec{j}>,\\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{\partial<\vec{v}>}{\partial t}-\vec{\nabla}<\Omega>\Big)-<v^2>\vec{\nabla}\times<\vec{\omega}>&=-<\vec{j}>,\\ \nabla^2<\vec{v}>-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2<\vec{v}>}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\Big[\vec{\nabla}\cdot<\vec{v}>+\frac{1}{a^2}\frac{\partial<\Omega>}{\partial t}\Big]&=-a^{-2}<\vec{j}>,\end{aligned} \tag{3.98}$$

procedimento análogo, nos levará a

$$\nabla^2 < \Omega > + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot < \vec{v} >= - < \hat{n} >, \tag{3.99}$$

para a função energia $< \Omega >$. As Eqs.[3.98- 3.99] mostram, novamente, o caráter ondulatório das equações da dinâmica de fluidos descritas pelas Eqs. [3.94 - 3.97]. Além disso, elas nos permite fazer uma observação interessante sobre a diferença conceitual entre ambas as teorias, a saber, o eletromagnetismo e as teorias de fluidos. As equações para os potenciais eletromagnéticos $(\vec{A}, \Phi)$, os quais têm expressões análogas às equações matemáticas, podem ser desacopladas através de uma escolha adequada para o potencial - chamado transformações de calibre (ou de gauge)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \text{(Calibre de Coulomb)} \tag{3.100}$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \text{(Calibre de Lorentz)} \tag{3.101}$$

os quais não afetam a física do sistema. Na dinâmica de fluidos, essa liberdade não é simplesmente uma escolha de calibre, ela tem implicações sobre a natureza física do escoamento.

A relação $\vec{\nabla}\cdot < \vec{v} >= 0$ em dinâmica de fluidos, que é equivalente ao gauge de Coulomb, não é um verdadeiro calibre, mas é uma escolha da incompressibilidade do escoamento. Do mesmo modo, o gauge de Lorentz tem uma equação correspondente que liga a dinâmica dos fluidos dada por

$$\vec{\nabla}\cdot < \vec{v} > + \frac{1}{a^2}\frac{\partial < \Omega >}{\partial t} = 0, \tag{3.102}$$

e que está relacionada com um escoamento compressível. De fato, observou-se que a "escolha do gauge", em dinâmica dos fluidos está diretamente relacionada com a hipótese feita sobre a compressibilidade ou incompressibilidade do fluido [8].

## 3.3 A função de correlação

Um objeto matemático de grande importância na teoria estatística da dinâmica de fluidos é a função de correlação de dois pontos do campo velocidade, assim definida

$$R_{ij}(\vec{r}) \equiv < v_i(\vec{x})v_j(\vec{x} + \vec{r}) > \tag{3.103}$$

para dois pontos separados por um vetor deslocamento $\vec{r}$. Ambos os pressupostos: o da estacionaridade e da homogeneidade permitem (como fora dito acima) estabelecer que esta correlação independe do tempo, mas somente do vetor deslocamento $\vec{r}$. As correlações do espaço-tempo são fundamentais em dinâmica dos fluidos e tem uma ampla aplicação [19]. Ao longo dos anos, a ciência tem buscado entender como a energia cinética de um fluido em escoamento turbulento é dividida durante o seu escoamento em certas escalas. A chave para esta questão encontra-se no estudo do espectro de energia do escoamento turbulento no espaço de Fourier. A propósito, isso é realizado através da função de correlação da velocidade.

Nossa proposta é esclarecer a relação entre essa função e a densidade de corrente $\vec{j}$. Para alcançar nosso objetivo, há de se ponderar que tanto para fluidos incompressíveis, quanto compressíveis tal relação não é algo trivial. Para elucidar essa afirmação, abordaremos um fluido incompressível e viscoso ( com alto número de Reynolds) sob um regime completamente turbulento [20]. Neste caso, a equação de onda em (3.98) (sem o campo eletromagnético acoplado) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \vec{v} + \vec{j} - \vec{\nabla}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big) + \nu^2 \nabla^4 \vec{v}, \tag{3.104}$$

onde $\nu$ é a viscosidade cinemática, $\vec{v} =< \vec{v} >$ e $\phi =< \Omega >$. Assim como na teoria eletromagnética, temos a liberdade em decompor $\vec{j}$ em sua parte longitudinal (irrotacional) $\vec{j}_l$ e sua parte transversal (solenoidal) $\vec{j}_t$, ou seja,

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t, \tag{3.105}$$

onde identificamos a componente transversal da densidade de corrente

$$\vec{j}_l = \vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.106}$$

e a Eq.(3.104) pode ser reescrita como segue

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \vec{v} + \nu^2 \nabla^4 \vec{v} + \vec{j}_t, \tag{3.107}$$

a qual é uma equação de onda com um termo de força exclusivamente expresso em termos das fontes de turbulência. A equação de onda não-homogênea (3.107) tem uma solução do tipo

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \int d^4\vec{x} G(\vec{x}, t; \vec{x}', t) \vec{j}_t(\vec{x}', t') \tag{3.108}$$

onde a função de Green em (3.108) satisfaz a equação não-homogênea

$$\Big(a^2 \nabla^2 + \nu^2 \nabla^4 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big) G(\vec{x}', t; \vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'). \tag{3.109}$$

A equação de onda em (3.107) descreve ondas com a seguinte relação de dispersão [9],

$$\omega = ak\Big(1 - \frac{\nu^2}{2a^2}k^2\Big), \tag{3.110}$$

onde, no limite superior para o valor do vetor de onda ($\vec{k}$) ($k_f$: filtro de microescala) tem-se

$$\frac{\nu^2 k_f^2}{a^2} = O({R_e}^{-1}).$$

Para fluidos com alto $R_e$ há uma lei linear para a relação de dispersão, a saber: $\omega(\kappa) = a\kappa$. Neste caso, o operador em (3.109) é o tipo D'Alembertiano com a função de Green usual, assim como

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}, t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{a})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} & \text{se } (t > t'). \\ 0 & \text{se } (t < t'). \end{cases} \tag{3.111}$$

Agora, substituindo (3.111) em (3.108) e resolvendo a integração em $t'$ tem-se que

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}, t) &= \int d^4\vec{x} G(\vec{x}, t; \vec{x}', t) \vec{j}_t(\vec{x}', t'), \\ &= \int d^4\vec{x} \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{a})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}_t(\vec{x}', t'), \\ &= \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}_t(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{a})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \tag{3.112}$$

e com este resultado, pode-se escrever a função de correlação como

$$\begin{aligned} R_{ij}(\vec{r}) &= < v_i(\vec{x}) v_j(\vec{x} + \vec{r}) >= \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{r}} d^3\vec{y} \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{r}} d^3\vec{z} < f_i(\vec{y}) f_j(\vec{z}) >, \\ R_{ij}(\vec{r}) &= \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{r}} d^3\vec{y} \int_{\vec{x}-\vec{y}}^{\vec{x}+\vec{r}-\vec{y}} d^3\vec{\rho} < f_i(\vec{y}) f_j(\vec{y} + \vec{\rho}) >, \end{aligned} \tag{3.113}$$

onde definiu-se

$$\vec{f}(\vec{x}'; t) = \frac{\vec{j}_t(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{a})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{3.114}$$

Percebemos na equação (3.113) que a função de correlação do campo de velocidade depende tanto da função de correlação da densidade de corrente $\vec{j}_t$, quanto do vetor de deslocamento $\vec{r}$. A densidade de corrente é uma variável de entrada e não pode ser determinada, a priori, pela teoria, ela depende da observação e da geometria do escoamento.

# Capítulo 4

# Formalismo Lagrangeano e acoplamento mínimo

## 4.1 Lagrangeana de um fluido compressível descarregado

Arnold [14] mostrou que o escoamento de Euler pode ser apresentado como um formalismo Hamiltoniano, o que acarreta em algumas consequências, tal como na possibilidade em se introduzir métodos estatísticos no estudo de sistemas dinâmicos. Embora a Hamiltoniana seja útil na construção de uma medida estatística, não é trivial o processo de obtenção da mesma quando se trata de fluidos viscosos (haja vista que temos a existência de sistemas vinculados). Entretanto, se forem consideradas as equações da dinâmica de fluidos, a obtenção da Hamiltoniana torna-se uma tarefa possível, como fora provado em [13]. Desde que as estruturas das Eqs. [(3.94) - (3.97)] sejam as mesmas que as equações de DM, embora tenha-se trabalhado com um fluido compressível; podemos, similarmente, escrever abaixo a densidade de Lagrangeana da teoria de um fluido compressível. Por esta razão, iniciaremos com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{l}^2 - a^2\vec{\omega}^2) \tag{4.1}$$

onde definir-se-á o vetor de Lamb médio $\vec{l} =< \vec{l} >$, como

$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}, \tag{4.2}$$

onde $\vec{\omega} =< \vec{\omega} >$ e $\vec{\kappa} =< \vec{\kappa} >$. Escrita da maneira acima, a Lagrangeana dada em (4.1) apresenta um tipo de dualidade, haja vista que a mesma é invariante sob a substituição $l \rightarrow ia\omega$ e $a\omega \rightarrow il$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\vec{l}^2 - a^2\vec{\omega}^2), \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(ia\omega^2) - (il)^2)], \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[-a^2\omega^2 + l^2].
\end{aligned}$$

A densidade de Lagrangeana pode ser reescrita em função do potencial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big( - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}\Big)^2 - \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla} \times \vec{v})^2, \tag{4.3}$$

que (4.3) é a Lagrangeana de um fluido compressível e invíscido. Notamos que a equação de Navier-Stokes pode ser obtida diretamente a partir do momento conjugado do campo de velocidade

$$\vec{\pi} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi - \vec{\kappa} = -\vec{l}, \tag{4.4}$$

quando ela é comparada com a equação (4.2). Desta maneira, a equação de Navier-Stokes para o campo médio

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{l} - \vec{\nabla}\phi - \vec{\kappa}, \tag{4.5}$$

onde $\vec{l} = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Para tratarmos com fluidos compressíveis viscosos, basta averiguar que as contribuições da viscosidade e $T\vec{\nabla}s$ estão contempladas em $\vec{\kappa}$. Mais ainda, a densidade de Lagrangeana (4.3) dá o conjunto de equações do tipo Maxwell [3.84- 3.87] para o caso homogêneo (sem fontes). Vamos explicitar isso, a começar pelo cálculo das equações de Euler-Lagrange em relação a $\phi$ e $\vec{v}$ a partir da equação (4.4), respectivamente, pode-se escrever que

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{v}} + \vec{k}) = 0, \tag{4.6}$$

e usando a equação (4.2), vê-se que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l} = 0. \tag{4.7}$$

Para o campo de velocidade $\vec{v}$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{v}} + \vec{\kappa}) = a^2(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}), \tag{4.8}$$

e a partir da Eq.(4.2) e usando a definição $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, a equação (4.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = a^2(\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) + \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t}. \tag{4.9}$$

As outras duas equações, (3.85) e (3.87), podem ser obtidas diretamente a partir das definições de $\vec{\omega}$ e $\vec{l}$. Tomando a divergência de $\vec{\omega}$, pode-se obter a Eq.(3.87). Para obter a Eq.(3.85), tem-se que tomar o rotacional da Eq.(4.2).

Agora, considera-se o caso onde as fontes estejam presentes. Desta vez, elas aparecem dentro das equações de movimento e, como consequência, sua densidade de Lagrangeana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big( - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}\Big)^2 - \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla} \times \vec{v})^2 + \vec{J} \cdot \vec{v} - N\phi \tag{4.10}$$

onde $N = < n >$ e $\vec{J} = < \vec{j} >$.

Considerando o termo $\vec{\kappa}$ como um vetor de polarização para o vetor de Lamb, define-se

$$\vec{l}' =< \vec{l} - \vec{\kappa} >= -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \tag{4.11}$$

e pode-se reescrever a densidade de Lagrangeana (na ausência de fontes) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\vec{l}'^2 - a^2\vec{\omega}^2\Big) = \frac{1}{2}\Big( - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\Big)^2 - \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla}\times\vec{v})^2. \tag{4.12}$$

Por esta razão, olhando para o vetor de Lamb definido em (4.11) e a vorticidade média

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}. \tag{4.13}$$

Pela analogia que estamos a desenvolver façamos tal como fora feito para os campos elétrico e magnético, a composição dos componentes de um tensor de segunda ordem, um tensor intensidade (análogo ao tensor intensidade do eletromagnetismo). Porém, cujas componentes sejam $\vec{l}'$ e $\vec{\omega}$. Neste contexto, o tensor intensidade, é definido por

$$T^{\mu\nu} = \tilde{\partial}^{\mu}U^{\nu} - \tilde{\partial}^{\nu}U^{\mu}, \tag{4.14}$$

onde $\tilde{\partial}^{\mu} = (\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$ e o potencial quadri-vetor é

$$U^{\mu} \equiv (\phi, a\vec{v}). \tag{4.15}$$

Os componentes não-nulos do $T^{\mu\nu}$ são

$$T^{0i} = l'^{i} \quad \text{e} \quad T^{ij} = a\omega^{k} \quad \text{com } i,j,k \text{ cíclicos.} \tag{4.16}$$

Desta maneira pode-se ver que, comparado com o vetor de segunda ordem em (4.14), o tensor de segunda ordem introduzido por Mahajan em [16] é uma extensão relativística do vetor de Lamb e da vorticidade dados em (4.16). Portanto, pode-se escrever (4.12) usando $T^{\mu\nu}$ como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \tag{4.17}$$

ou considerando a presença do termo de fonte, tem-se que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - \frac{1}{a}J_{\mu}U^{\mu}, \tag{4.18}$$

em que o quadri-vetor $J^{\mu}$ é definido como

$$J^{\mu} \equiv (a\ N, \vec{J}). \tag{4.19}$$

As equações não-homogêneas do fluido compressível (3.94) e (3.96), em termos de $T^{\mu\nu}$ e a quadri-corrente $J^{\mu}$, permitem que estas grandezas sejam relacionadas através de uma expressão covariante

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{a}J^{\nu}. \tag{4.20}$$

Similarmente, as equações homogêneas Eqs. (3.95) e (3.97) podem ser escritas em termos do tensor dual campo-intensidade como

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.21}$$

onde $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. De fato o tensor $T^{\mu\nu}$ é dado pela seguinte matriz

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l'_x}{a} & \frac{l'_y}{a} & \frac{l'_z}{a} \\ -\frac{l'_x}{a} & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\frac{l'_y}{a} & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ -\frac{l'_x}{a} & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

e

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & -\frac{l'_z}{a} & \frac{l'_y}{a} \\ -\omega_y & \frac{l'_z}{a} & 0 & -\frac{l'_x}{a} \\ -\omega_z & -\frac{l'_y}{a} & \frac{l'_x}{a} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

onde $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ é o tensor dual do tensor $T^{\mu\nu}$. De (4.14) segue que

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu, \\ T^{01} &= \partial^0 V^1 - \partial^1 V^0, \\ T^{01} &= -\frac{1}{a}\frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{\partial \phi}{\partial x} = +\frac{l'_x}{a}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

de maneira similar temos

$$\begin{aligned} T^{02} &= \partial^0 V^2 - \partial^2 V^0, \\ T^{02} &= -\frac{1}{a}\frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{\partial \phi}{\partial y} = +\frac{l'_y}{a}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} T^{03} &= \partial^0 V^3 - \partial^3 V^0, \\ T^{03} &= -\frac{1}{a}\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{\partial \phi}{\partial z} = +\frac{l'_z}{a}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} T^{10} &= \partial^1 V^0 - \partial^0 V^1, \\ T^{10} &= -(\partial^0 V^1 - \partial^1 V^0) \\ T^{10} &= -T^{01} = -\frac{l'_x}{a}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} T^{12} &= \partial^1 V^2 - \partial^2 V^1, \\ T^{12} &= \partial_x v_y - \partial_y v_x, \\ T^{12} &= (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = +\omega_z, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} T^{13} &= \partial^1 V^3 - \partial^3 V^1, \\ T^{13} &= \partial_x v_z - \partial_z v_x, \\ T^{13} &= -(\vec{\nabla} \times \vec{v})_y = -\omega_y, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} T^{20} &= \partial^2 V^0 - \partial^0 V^2, \\ T^{20} &= -(\partial^0 V^2 - \partial^2 V^0) \\ T^{20} &= -T^{02} = -\frac{l'_y}{a}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} T^{21} &= \partial^2 V^1 - \partial^1 V^2, \\ T^{21} &= -(\partial^1 V^2 - \partial^2 V^1) \\ T^{21} &= -T^{12} = -\omega_z, \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} T^{23} &= \partial^2 V^3 - \partial^3 V^2, \\ T^{23} &= \partial_y v_z - \partial_z v_y, \\ T^{23} &= (\vec{\nabla} \times \vec{v})_x = +\omega_x, \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} T^{30} &= \partial^3 V^0 - \partial^0 V^3, \\ T^{30} &= -(\partial^0 V^3 - \partial^3 V^0) \\ T^{30} &= -T^{03} = -\frac{l'_z}{a}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} T^{31} &= \partial^3 V^1 - \partial^1 V^3, \\ T^{31} &= -(\partial^1 V^3 - \partial^3 V^1) \\ T^{31} &= -T^{13} = \omega_y, \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} T^{32} &= \partial^3 V^2 - \partial^2 V^3, \\ T^{32} &= -(\partial^2 V^3 - \partial^3 V^2) \\ T^{32} &= -T^{23} = -\omega_x. \end{aligned} \tag{4.35}$$

De (4.24) temos para $\nu = 0$

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} &= \frac{1}{a} J^0, \\ \partial_x l'_x + \partial_y l'_y + \partial_z l'_z &= \frac{1}{a}(aN), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{l'} &= N. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Para $\nu = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_0 T^{10} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{12} + \partial_3 T^{13} &= \frac{1}{a} J^1, \\
-\frac{1}{a}\frac{\partial T^{10}}{\partial t} + \frac{\partial T^{12}}{\partial y} + \frac{\partial T^{13}}{\partial z} &= \frac{1}{a} J_x, \\
-\frac{1}{a}\frac{\partial l'_x}{\partial t} + a\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{v})_z}{\partial y} + a\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{v})_y}{\partial z} &= \frac{1}{a} J_x,
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial l'_x}{\partial t} + a^2(\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y) = J_x,$$

$$\frac{\partial l'_x}{\partial t} - a^2(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_x = -J_x, \tag{4.37}$$

analogamente, para $\nu = 2$ e $\nu = 3$ temos que

$$\frac{\partial l'_y}{\partial t} - a^2(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_y = -J_y, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial l'_z}{\partial t} - a^2(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_z = -J_z, \tag{4.39}$$

logo, chegamos a

$$\frac{\partial \vec{l'}}{\partial t} - a^2(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}) = -\vec{J}. \tag{4.40}$$

As outras duas equações para a vorticidade podem ser obtidas via tensor dual $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ e da equação

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{4.41}$$

para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{T}^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{T}^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathcal{T}^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathcal{T}^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{T}^{03}}{\partial x^3} &= 0, \\
-\Big(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\Big) &= 0, \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Para $\mu = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{T}^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{T}^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathcal{T}^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathcal{T}^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{13}}{\partial x^3} &= 0, \\
-\frac{1}{a}\frac{\partial(\omega_x)}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial l'_z}{\partial y} - \frac{1}{a}\frac{\partial l'_y}{\partial z} &= 0, \\
-\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (\vec{\nabla}\times\vec{l'})_x &= 0, \\
\frac{\partial \omega_x}{\partial t} &= -(\vec{\nabla}\times\vec{l'})_x.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Procedimento análogo, fornece-nos para $\mu = 2$ e $\mu = 3$, respectivamente,

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \times \vec{l'})_y. \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \times \vec{l'})_z. \tag{4.45}$$

Ou ainda, em notação vetorial

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{l'}. \tag{4.46}$$

A equação (4.3) representa a densidade de Lagrangeana para um fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}\Big) + \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} + \partial_{jk} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk} \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t v_k)}\Big) + \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j v_k)} + \partial_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{ij} v_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} = 0. \tag{4.48}$$

Ao levarmos em consideração que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = 0, \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk} \phi)} = 0, \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk} \phi)} = -(-\partial_i \phi - v_i + k_i) = -l_i \delta_{ij}. \tag{4.52}$$

A equação (4.47) fornece

$$\begin{aligned} \partial_j(-l_i)\delta_{ij} &= 0, \\ -\partial_j l_i \delta_{ij} &= 0, \\ \partial_i l_i &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{l} &= 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Também temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t v)} = -(-\partial_i \phi - \dot{v}_i + k_i) = -l_i, \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j v_k)} = -a^2 \epsilon_{lji} (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i, \tag{4.55}$$

$$\partial_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{ij} v_i)} = 0, \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = 0. \tag{4.57}$$

Desta maneira, (4.48) fica

$$
\begin{aligned}
-\partial_t l_i + a^2 \epsilon_{lji} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i &= 0, \\
-\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= -a^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}), \\
\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= a^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega}.
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

Definiremos a densidade de Lagrangeana de interação $\mathcal{L}_{int}$

$$\mathcal{L}_{int} = \vec{J} \cdot \vec{v} - N\phi - \nu(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} N), \tag{4.59}$$

e através dela introduziremos os termos com fontes. Na verdade, basta acrescentar a Lagrangeana de interação à (4.3)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big( - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}\Big)^2 - \frac{1}{2} a^2 (\vec{\nabla} \times \vec{v})^2 + \vec{J} \cdot \vec{v} - N\phi - \nu(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} N). \tag{4.60}$$

O cálculo do momentum conjugado $\vec{\pi}$ fornece-nos a equação de Navier-Stokes e as equações de movimento para $\phi$ e $\vec{v}$ nos fornecem, respectivamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l'} = N, \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial \vec{l'}}{\partial t} = a^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega} + \vec{k} - \vec{J} + \nu \vec{\nabla} N. \tag{4.62}$$

Observemos que isso se deu pois

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \vec{J} - \nu \vec{\nabla} N, \tag{4.63}$$

em (4.48), graças a (4.60). Outro detalhe encontra-se no fato de, na hipótese de termos um fluido incompressível, mesmo assim a contribuição desse termo oriundo da densidade de Lagrangeana de interação ser não-nulo. Uma vez que as fontes estejam presentes.

## 4.2 Obtenção da Hamiltoniana

Vamos primeiro calcular o momento conjugado

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} = -(-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{v}} + \vec{k}) = -\vec{l}. \tag{4.64}$$

A Hamiltoniana é definida por

$$H = \int d^3\vec{x} (\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} - \mathcal{L}), \tag{4.65}$$

mas,

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\pi} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}, \tag{4.66}$$

logo

$$\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{\pi}^2 - \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\phi + \vec{\pi}\cdot\vec{\kappa}. \tag{4.67}$$

Assim, a Hamiltoniana ( para um fluido compressível e com termos de fonte)fica

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 - \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\phi + \vec{\pi}\cdot\vec{\kappa} + \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla}\times\vec{v})^2 - \vec{J}\cdot\vec{v} + N\phi + \nu\vec{v}\cdot\vec{\nabla}N. \tag{4.68}$$

As equações de movimento para (4.68) são

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{\pi}} = \vec{\pi} - \vec{\nabla}\phi + \vec{\kappa}, \tag{4.69}$$

$$-\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{v}} = \nu\nabla^2\vec{\pi} + a^2\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + \nu\vec{\nabla}N - \vec{J}. \tag{4.70}$$

Entretanto, temos que garantir que a natureza física do problema não tenha mudado, embora a maneira de descrevê-lo o tenha. Iniciemos por escrever a Hamiltoniana para um fluido tipo Maxwell

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 - \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\Omega + \frac{1}{2}a_0^2(\vec{\nabla}\times\vec{v})^2. \tag{4.71}$$

A Lagrangeana pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Omega)^2 + \dot{\vec{v}}\cdot\vec{\nabla}\Omega - \frac{1}{2}a_0^2(\vec{\nabla}\times\vec{v})^2, \tag{4.72}$$

onde seus respectivos momentos conjugados são:

$$\pi_0^\Omega = 0, \quad \pi_i^v = \dot{v}_i + \partial_i\Omega \tag{4.73}$$

e $\phi_1 \equiv \pi_0^\Omega \approx 0$ é um vínculo primário no formalismo de Dirac. A partir daqui,a condição de consistência para $\phi_1$ é dada por

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, \mathcal{H}_\mathcal{T}\} = 0, \tag{4.74}$$

onde

$$\mathcal{H}_\mathcal{T} = \mathcal{H}_c + \lambda_1\phi_1 \tag{4.75}$$

sendo $\lambda_1$ um multiplicador de Lagrange. Portanto, nós temos que

$$\phi_2 = \dot{\phi}_1 \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}, \tag{4.76}$$

onde $\phi_1$ e $\phi_2$ são vínculos de primeira classe. A contagem dos graus de liberdade segue a fórmula

$$2G = 2N - C_2 - 2C_1, \tag{4.77}$$

onde $G$ é o número de graus de liberdade, $N$ é o número de variáveis, $C_2$ é o número de vínculos de segunda-classe e $C_1$ é o número de vínculos de primeira classe. Nesses termos, o nosso sistema acima tem 2 graus de liberdade.

A fim de comparar este resultado com a formulação padrão para um fluido compressível o qual é representado pela Hamiltoniana dada por [1]

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 - V(\rho), \tag{4.78}$$

neste caso, a descrição Lagrangena correspondente é possível após a parametrização da velocidade

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\theta + \alpha\vec{\nabla}\beta, \tag{4.79}$$

conhecida por parametrização de Clebsch (ou decomposição) e $(\alpha, \beta)$ são os potenciais Gaussianos. Assim, a Lagrangeana fica:

$$\mathcal{L} = -\rho(\dot{\theta} + \alpha\dot{\beta}) - \frac{\rho}{2}(\vec{\nabla}\theta + \alpha\vec{\nabla}\beta)^2 + V(\rho). \tag{4.80}$$

Agora o espaço de fase é dado por $(\rho, \theta, \alpha, \beta)$ e os momenta conjugados são dados por

$$\pi_\rho = 0, \quad \pi_\alpha = 0, \quad \pi_\beta = -\rho\alpha, \quad \pi_\theta = -\rho, \tag{4.81}$$

os quais são vínculos de segunda classe [fato que pode ser visto após alguns cálculos]. E a Hamiltoniana total fica

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \lambda_1\pi_\rho + \lambda_2(\pi_\theta + \rho) + \lambda_3(\pi_\beta + \rho\alpha) + \lambda_4\pi_\alpha, \tag{4.82}$$

e a evolução temporal dos vínculos em (4.81) são dados por

$$\chi_1 = \pi_\rho, \quad \chi_2 = \pi_\theta + \rho, \quad \chi_3 = \pi_\rho + \rho\alpha, \quad \chi_4 = \pi_\alpha. \tag{4.83}$$

Usando a equação (4.77), temos $N = 4$, $C_1 = 0$, $C_2 = 4$ o que resulta em $G = 2$. Portanto, temos apenas dois graus de liberdade, o mesmo valor apresentado pela nossa descrição para o fluido compressível. O que equivale a dizer que mudamos a maneira de descrever o nosso problema, porém, não mudamos a natureza física do mesmo.

## 4.3 A generalização não-Abeliana

Aqui vamos fazer uma generalização não-Abeliana (NA) para os fluidos compressíveis. Uma das vantagens mais fascinantes em se ter uma versão NA para tais fluidos encontra-se no fato de que na Teoria não-Abeliana estão presentes termos não-lineares nas equações de campos clássicos. E por conseguinte, o campo de calibre pode apresentar um comportamento caótico, mesmo na ausência de fontes. Para maior compreensão dos cálculos abaixo, sugerimos a leitura prévia do Apêndice. Em 2006, Bambah e colaboradores [25] fizeram uma generalização NA do trabalho de Mahajan (2003) [16], visando a aplicação ao formalismo para QGP. Nossa motivação encontra-se na seguinte questão: será que existe uma generalização "análoga" àquela feita em [25] para um fluido? Caso a resposta seja afirmativa, os campos de Lamb e vorticidade exerceriam quais papeis?

Para respondermos essas indagações, consideraremos $Q_a$ a cor clássica da carga de uma partícula definiremos a álgebra de Lie a qual é definida com os objetos da álgebra de Lie anti-Hermitiana com base $T^a$

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= f^{abc}T^c \\ tr(T^aT^b) &= -\frac{1}{2}\delta^{ab}, \end{aligned} \tag{4.84}$$

o qual permite definir a velocidade do fluido como

$$\vec{u} = \vec{u}^a T^a \tag{4.85}$$

e a vorticidade como $\vec{\omega} = \vec{\omega}^a T^a$ onde

$$\vec{\omega}^a = \vec{\nabla} \times \vec{u}^a \tag{4.86}$$

e o vetor de Lamb é $\vec{l} = \vec{l}^a T^a$ em que

$$\vec{l'}^a = \omega^b \times u^c. \tag{4.87}$$

Daqui pode-se reescrever a Lagrangeana na Eq.(4.12) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{l'}^2_a - a^2\vec{\omega}^2_a) = \frac{1}{2}\Big( - \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_a\Big)^2 - \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla} \times \vec{v}_a)^2, \tag{4.88}$$

onde $\vec{\omega}_a = Q_a\vec{\omega}$ e $\vec{l}_a = Q_a\vec{l}$. O tensor intensidade na equação (4.14) pode ser escrito na forma NA como

$$T^a_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu U^a_\nu - \tilde{\partial}_\nu U^a_\mu - ig[U_\mu, U_\nu]^a \tag{4.89}$$

onde $[U_\mu, U_\nu]^a = f^a_{bc} U^b_\mu U^c_\nu$ e $g$ é a carga de calibre. O quadri-vetor potencial NA é dada por

$$U^\mu_a = Q_a U^\mu, \tag{4.90}$$

onde $T^{0ia} = l'^{ia}$ e $T^{ija} = a\omega^{ka}$ onde $i, j, k =$ cíclicas, e a Lagrangeana para o campo NA na Eq.(4.17)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, T^{\mu\nu a}\, T^a_{\mu\nu} \tag{4.91}$$

e, considerando o termo de fonte tem-se que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, T^{\mu\nu a}\, T^a_{\mu\nu} - \frac{1}{a} J^a_\mu U^{\mu a} \tag{4.92}$$

onde $J^\mu = (N_a, a\vec{J}_a)$; $N_a = Q_a < u >$ e $J^\mu_a = Q_a < j^\mu_a >$. O processo de "não-abelianização" das equações (4.20) e (4.21) é direto. E de maneira similar, pode-se fazer a não-abelianização para o caso de um fluido carregado.

Por ora, temos desenvolvido uma generalização NA para obter um sistema de fluido NA análogo ao conhecido fluido de Yang-Mills.

# Capítulo 5

# Análise da interação eletromagnética

Vamos considerar agora o caso onde o fluido descrito pelas equações [3.1 - 3.3] é um fluido carregado, de carga $\epsilon_\alpha$, sendo que cada espécie é caracterizada pelo índice $\alpha$. Além do que, ele pode ser descrito por um conjunto de equações lineares tipo-Maxwell para o campo médio, tal como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{l}'_\alpha = N_\alpha, \tag{5.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{l}'_\alpha + \frac{\partial \vec{\omega}_\alpha}{\partial t} = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \vec{l}'_\alpha}{\partial t} - a^2 \vec{\nabla} \times \vec{\omega}_\alpha = -\vec{J}_\alpha \tag{5.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}_\alpha = 0, \tag{5.4}$$

onde $\vec{l}'_\alpha =< \vec{l}_\alpha - \vec{\kappa}_\alpha >$ é analogamente para as Eqs.[3.94 -3.97], as quais podem ser obtidas a partir da densidade de Lagrangeana para cada espécie dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{l'}^2_\alpha - a^2_\alpha \vec{\omega}^2_\alpha), \tag{5.5}$$

onde $a^2_\alpha =< \vec{v}^2_\alpha >$. Em trabalhos recentes ([8] e [16]) apresentaram uma extensão da analogia entre dinâmica dos fluidos e eletrodinâmica clássica por considerar um plasma multifluido usando diferentes abordagens. De qualquer forma, em qualquer caso tem-se como ponto de partida as equações de movimento. Propõe-se aqui, o tratamento do fluido considerando-o imerso no campo eletromagnético e a interação entre eles a partir da densidade de Lagrangeana dada em (5.5) Considera-se o campo de Lamb ($\vec{l'}_\alpha$) e o campo de vorticidade ($\vec{\omega}_\alpha$) pela definição do acoplamento com o campo eletromagnético tal como

$$\vec{l'}_\alpha \quad \Longrightarrow \hat{\vec{l}}_\alpha = \vec{l'}_\alpha + g\vec{E} \tag{5.6}$$

e

$$\vec{\omega}_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \hat{\vec{\omega}}_\alpha = \vec{\omega}_\alpha + b\vec{B}, \tag{5.7}$$

onde $g$ e $b$ são as constantes de acoplamento que serão calculadas posteriormente. Usando equações (5.6) e (5.7), pode-se escrever a nova densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}'$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\hat{\vec{l}}_\alpha^2 - a_\alpha^2 \vec{\omega}_\alpha^2) \\
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\vec{l'}_\alpha + g\vec{E})^2 - \frac{1}{2}a_\alpha^2(\vec{\omega}_\alpha + b\vec{B})^2 \\
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(-\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_\alpha + \vec{\kappa} + g\vec{E})^2 - \frac{1}{2}a_\alpha^2(\vec{\nabla} \times \vec{v}_\alpha + b\vec{B})^2,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

a qual é a densidade de Lagrangeana do fluido carregado imerso em um campo eletromagnético onde o termo $\vec{\kappa}_\alpha$ carrega as contribuições devido à viscosidade e as características estatísticas $T\ \vec{\nabla}s$ dos fluidos. O momento conjugado associado à velocidade é calculado como

$$\vec{\pi}'_\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \dot{\vec{v}}_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi_\alpha - \vec{\kappa}_\alpha - g\vec{E} = -\hat{\vec{l}}_\alpha \tag{5.9}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi_\alpha - \vec{\kappa}_\alpha - g\vec{E} = -\hat{\vec{\omega}}_\alpha \times \vec{v}_\alpha. \tag{5.10}$$

Usando a relação (5.7), finalmente tem-se que

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{\omega}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = -\vec{\nabla}\phi_\alpha + \vec{\kappa}_\alpha + g\vec{E} + b(\vec{v}_\alpha \times \vec{B}). \tag{5.11}$$

Ao comparar-se a equação acima com a equação para o momento para um fluido carregado imerso no campo eletromagnético [8], vê-se que os últimos dois termos do lado direito da equação (5.11) é a força de Lorentz. Portanto, as constantes de acoplamento $g$ e $b$ são ambas iguais e dadas por

$$g = b = \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}, \tag{5.12}$$

onde $\epsilon_\alpha$ é a carga e $m_\alpha$ é a massa da carga. Então, a equação de Navier-Stokes pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{\omega}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = -\vec{\nabla}\phi_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}\right] + \vec{\kappa}_\alpha, \tag{5.13}$$

o qual é um resultado muito interessante, pois, tem-se que uma densidade de Lagrangeana que descreve um fluido compressível e carregado em uma representação muito geral. Usando o potencial vetor $(\vec{A})$ e o potencial escalar $(\Phi)$ do campo eletromagnético em (5.8) pode-se reescrever a Lagrangeana como segue

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\Big[-\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_\alpha + \vec{\kappa}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\Big(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi\Big)\Big]^2 - \frac{1}{2}a_\alpha^2\Big(\vec{\nabla} \times \vec{v}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\vec{\nabla} \times \vec{A}\Big)^2, \tag{5.14}$$

a qual pode ser escrita como

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\partial \hat{\vec{v}}_\alpha}{\partial t} - \vec{\nabla}\hat{\phi}_\alpha + \vec{\kappa}_\alpha\Big)^2 - \frac{1}{2}a_\alpha^2\Big(\vec{\nabla} \times \hat{\vec{v}}_\alpha\Big)^2, \tag{5.15}$$

onde

$$\hat{\vec{v}}_\alpha = \vec{v}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\vec{A}, \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_\alpha = \phi_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\vec{\Phi}. \tag{5.16}$$

Nota-se que a Lagrangeana na equação (5.15) tem a mesma estrutura que a Lagrangeana em (4.12) onde o campo eletromagnético é zero. Entretanto, pode ser visto que o acoplamento introduz algumas modificações às equações do tipo-Maxwell da dinâmica dos fluidos carregados mostradas em [5.1 - 5.4]. Usando as Eqs. (5.6) e (5.7) tem-se que

$$\hat{\vec{l}}_\alpha = -\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \vec{\nabla}\hat{\phi}_\alpha + \vec{\kappa}_\alpha \tag{5.17}$$

e

$$\hat{\vec{\omega}}_\alpha = \vec{\nabla} \times \hat{\vec{v}}_\alpha. \tag{5.18}$$

Aplica-se o divergente, o rotacional, e a derivada temporal ao vetor de Lamb na Eq.(5.17) e finalmente o divergente da vorticidade, obtém-se

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{l}}_\alpha = \hat{N}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{el} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\kappa}_\alpha, \tag{5.19}$$

e usando ambos a lei de Ampere e

$$\hat{N}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{v}}_\alpha - \nabla^2 \hat{\phi}_\alpha, \tag{5.20}$$

tem-se que

$$\vec{\nabla} \times \hat{l}_\alpha + \frac{\partial \hat{\omega}_\alpha}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{\kappa}_\alpha. \tag{5.21}$$

Substituindo a Eq. (5.21) na derivada temporal do vetor de Lamb, de tal forma que se pode escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\vec{l}}_\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\vec{\omega}}_\alpha}{\partial t} \times \hat{\vec{v}}_\alpha + \hat{\vec{\omega}}_\alpha \times \frac{\partial \hat{\vec{v}}_\alpha}{\partial t}, \\ \frac{\partial \hat{\vec{l}}_\alpha}{\partial t} &= (\vec{\nabla} \times \hat{\vec{l}}_\alpha) \times \hat{\vec{v}}_\alpha + \hat{\vec{\omega}}_\alpha \times \frac{\partial \hat{\vec{v}}_\alpha}{\partial t}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

e depois de alguns cálculos vê-se que

$$\frac{\partial \hat{\vec{l}}_\alpha}{\partial t} - a_\alpha^2 \nabla \times \hat{\vec{\omega}}_\alpha = -\hat{\vec{J}}_\alpha + \frac{\partial \vec{\kappa}_\alpha}{\partial t}, \tag{5.23}$$

onde a nova equação para a densidade de corrente é dada por

$$\hat{\vec{J}}_\alpha = \left(\hat{N}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{el} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\kappa}_\alpha\right)\hat{\vec{v}}_\alpha + 2\hat{\vec{l}}_\alpha \cdot \vec{\nabla}\hat{\vec{v}}_\alpha - \hat{\vec{l}}_\alpha(\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{v}}_\alpha) + \hat{\vec{l}}_\alpha \times \hat{\vec{\omega}}_\alpha - \hat{\vec{\omega}}_\alpha \times \frac{\partial \hat{\vec{v}}_\alpha}{\partial t}. \tag{5.24}$$

Finalmente, substituindo o divergente da vorticidade na Eq. (5.18) obtem-se a última equação

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{\omega}}_\alpha = 0. \tag{5.25}$$

Para resumir, tem-se um conjunto de equações dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{l}}_\alpha = \hat{N}_\alpha + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{el} + \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{\kappa}}_\alpha, \tag{5.26}$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{\vec{l}}_\alpha + \frac{\partial \hat{\vec{\omega}}_\alpha}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \hat{\vec{\kappa}}_\alpha, \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial \hat{\vec{l}}_\alpha}{\partial t} - a_\alpha^2 \vec{\nabla} \times \hat{\vec{\omega}}_\alpha = -\hat{\vec{J}}_\alpha + \frac{\partial \hat{\vec{\kappa}}_\alpha}{\partial t}, \tag{5.28}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{\omega}}_\alpha = 0. \tag{5.29}$$

Da mesma forma como em (4.14), pode-se introduzir um tensor de segunda ordem levando-se em conta o acoplamento com campo eletromagnético, dado por

$$G_\alpha^{\mu\nu} = T_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\epsilon_\alpha}{m_\alpha} F^{\mu\nu}, \tag{5.30}$$

onde

$$T_\alpha^{\mu\nu} = \tilde{\partial}^\mu U_\alpha^\nu - \tilde{\partial}^\nu U_\alpha^\mu, \tag{5.31}$$

e

$$U_\alpha^{\mu\nu} = (\hat{\phi}_\alpha, a\hat{\vec{v}}_\alpha), \tag{5.32}$$

e onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de segunda ordem do campo eletromagnético. A densidade de Lagrangeana (4.18) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} G_\alpha^{\mu\nu} G_{(\alpha)\mu\nu} - \frac{1}{a} J_\alpha^\mu U_{(\alpha)\mu}, \tag{5.33}$$

onde $J_\alpha^\mu = (\hat{N}_\alpha, a\hat{\vec{J}}_\alpha)$, a quadri-corrente carrega consigo os termos de fonte $\hat{N}_\alpha$ e $\hat{J}_\alpha$.

# Capítulo 6

# Conclusões

Em [9], o autor desenvolveu um formalismo tipo-Maxwell análogo para um fluido incompressível sem considerar termos dissipativos. Nesta tese, acreditamos que fora dado um passo à frente nesta questão, uma vez que foi realizado um modelo com equações tipo-Maxwell para um fluido compressível com termos dissipativos, desde os primeiros princípios.

A fim de apresentar o formalismo de uma forma completa, construímos uma Lagrangeana para o fluido compressível e, em seguida, fizemos uma generalização NA para o mesmo. Também foi levada em consideração a Lagrangeana para um fluido compressível carregado.

Verificamos que o espaço de configuração para ambos os fluidos compressíveis (carregado ou não) é formado pelos campos de Lamb e vorticidade. Os quais podem ser organizados como componentes de um tensor de intensidade de campo e assim, a analogia com a Lagrangeana de Maxwell é direta. Além disso, a fim de analisar as aplicações deste eletromagnetismo de fluido em QGP, realizou-se uma versão NA do fluido compressível descarregado. O mesmo procedimento para um fluido carregado pode ser obtido, como já fora visto. Como uma perspectiva óbvia. Pode-se usar alguma análise das teorias de Yang-Mills para atacar o problema QGP. Além disso, também pode-se considerar outras analogias para formalismos eletromagnéticos alternativos como Podolsky (Lee-Wick) e outros.

# Apêndice A

# Fluidos não-Abelianos

A principal motivação para se investigar fluidos não-Abelianos (NA) encontra-se no crescente interesse na dinâmica de plasmas NA a elevadíssimas temperatura e densidade. Outras análises podem ser realizadas em relação aos plasmas NA relativísticos em condições cosmológicas e astrofísicas extremas. Como exemplos, citam-se

a) o plasma eletro-fraco no universo recente.

b) a física das explosões que ocorrem em supernovas.

c) a física das densas estrelas de neutrons.

Portanto, faz-se necessária a obtenção de uma descrição teórica de um cenário quantitativo para plasmas NA tanto dentro, quanto fora do equilíbrio. Considerando, por exemplo, o QGP, a equação cinemática para uma partícula pode ser escrita como

$$P^{\mu}\Big[\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} + gQ_a F^{a}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial P_{\nu}} + gf_{abc}A^{b}_{\mu}Q_c\frac{\partial}{\partial Q_c}\Big]f(X,P,Q) = C(t) \tag{A.1}$$

onde $f(X,P,Q)$ é a função distribuição para uma partícula; $C$ é o termo integral de colisão, o qual considera o espalhamento da partícula; $A^{b}_{\mu}$ e $F^{a}_{\mu\nu}$ são, respectivamente, o quadri-potencial e o campo para a teoria não Abeliana, a qual conta com um grupo de calibre cuja constante de estrutura é $f_{abc}$; e $Q_a$ é cor clássica da carga da partícula. O caso no qual $C = 0$ implica em plasma não-interagente (sem colisões) e a equação de Boltzman (é a equação para uma função distribuição para partículas isoladas que obedecem as equações clássicas básicas do movimento para partículas não-Abelianas, denominada, equação de Wong e dada por

$$m\frac{dX^{\mu}}{d\tau} = P^{\mu}, \tag{A.2}$$

$$m\frac{dP_{\mu}}{d\tau} = gQ_aF^{a}_{\mu\nu}P^{\nu}, \tag{A.3}$$

$$m\frac{dQ_a}{d\tau} = -gf_{abc}P^{\mu}A^{b}_{\mu}Q^{c}, \tag{A.4}$$

onde os graus de liberdade da propriedade cor variam de $a = 1$ até $N^2 - 1$ para um grupo de calibre SU(N) e $\tau$ é o tempo próprio da partícula. Em uma análise microscópica, as trajetórias no espaço de fase são conhecidas exatamente. As equações de Wong dão as trajetórias $x(\tau)$, $p(\tau)$ e $Q(\tau)$ para cada partícula, ou seja, elas são as equações clássicas do movimento. Nota-se, também, que as cargas NA estão sujeitas à evolução dinâmica. Vê-se que as equações (A.4) podem ser reescritas como $D_\tau Q_a = 0$, onde $D_\tau = \frac{dx^\mu}{d\tau} D_\mu$ é a derivada covariante na linha de mundo, e

$$D_\mu^{ac}[A] = \partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_\mu^b \tag{A.5}$$

é sua representação adjunta. Além disso, a equação de Boltzmann é invariante sob transformações de calibre (gauge), ou seja, se $f(X, P, Q)$ é a solução de (A.1), então, $f(X, P, U^{-1}QU)$ também é uma solução. Em virtude das equações para um fluido Abeliano terem um amplo regime de validade, pode-se considerar uma derivação da mecânica dos fluidos NA, a qual compreenda os graus de liberdade NA, com acoplamento a um campo de calibre NA, etc., tudo válido para sistemas não diluídos, não perturbativos e densos. Os tensores campo $F^a_{\mu\nu}$ e energia-momento (dos campos de gauge) são escritos-respectivamente- como

$$F^a_{\mu\nu}[A] = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\nu A^c_\mu \tag{A.6}$$

$$\Theta^{\mu\nu}[A] = 1/4 g^{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}_a + F^{\mu\rho}_a F^{a\nu}_\rho \tag{A.7}$$

mais uma vez $f^{abc}$ são as constantes de estrutura de $SU(N)$ e está a se trabalhar com unidades naturais. As constantes de estrutura anti-simétricas $f_{abc}$ resultam do comutador $[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c$ onde $\lambda_a$ são as matrizes de Gell-Mann. A partir de (A.4), vê-se que as cargas NA têm, também, uma evolução dinâmica. Com as soluções das equações de Wong, pode-se construir a "corrente de cor" para as partículas dadas por

$$\begin{aligned} j^\mu_a(x) &= g \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} Q_a(\tau) \delta^{(4)}[x - \overline{x}] \\ &= g \int d\tau \frac{p^\mu}{m} Q_a(\tau) \delta^{(4)}[x - \overline{x}] \end{aligned} \tag{A.8}$$

e usam-se (A.2) e (A.3) para escrever

$$m\ddot{x}^\mu(\tau) = g Q^a F^{\mu\nu}_a(x(\tau)) \dot{x}_\nu(\tau) \tag{A.9}$$

onde os pontos denotam as derivadas com respeito a $\tau$. Com o uso das equações de Wong encontra-se que $D_\mu j^\mu = 0$, ou seja, a corrente é conservada. O tensor energia-momentum das partículas é dado por

$$T^{\mu\nu}_{part.}(x) = \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} p^\nu(\tau) \delta^{(4)}[x - \overline{x}(\tau)] \tag{A.10}$$

e as equações de Yang-Mills são

$$D_\mu F^{\mu\nu}(x) = J^\nu(x) \tag{A.11}$$

o qual tem o termo fonte como

$$J^\nu(x) = \sum_{particles} j^\nu(x) \tag{A.12}$$

para a soma de todas as partículas. O tensor energia-momentum do campo de Yang-Mills (cor) é dado por

$$T^{\mu\nu}_{YM} = F^{\mu\rho}_a F^{a\nu}_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2, \tag{A.13}$$

onde $F^2 = F^{\mu\nu a} F^a_{\mu\nu}$ [o que é idêntico a eq. (A.7)]. Consequentemente, tem-se a lei de conservação

$$\partial_\mu [T^{\mu\nu}_{part.}(x) + T^{\mu\nu}_{YM}(x)] = 0 \tag{A.14}$$

onde o divergente $\partial_\mu T^{\mu\nu}_{YM}$ é dado por

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{YM} = g j^a_\mu F^{\mu\nu}_a \tag{A.15}$$

nota-se que foi usado

$$\Big(D_\mu F^{\mu\nu}\Big)_a(x) = \partial_\mu F^{\mu\nu}_a(x) + g f_{abc} A^b_\mu(x) F^{\mu\nu c}(x) = g j^\mu_a(x) \tag{A.16}$$

sendo $j^\mu_a(x)$ é a corrente de cor das partículas dadas pela equação (A.8). Portanto, tomando-se por base as equações (A.8) e (A.14) pode-se escrever que

$$\int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} Q_a(\tau) \delta^{(4)}[x - \overline{x}(\tau)] = 0 \tag{A.17}$$

a qual é especificamente válido somente na aproximação de campo clássico para o setor de cor. As leis de conservação (A.8) e (A.14) podem ser usadas como padrão para uma análise macroscópica da dinâmica de fluidos para o plasma de quarks e glúons. No entanto, é importante salientar que o fluxo (no espaço-tempo) das variáveis macroscópicas (energia e densidade de momentum), densidade de entropia, a temperatura, etc, as quais regulam a estrutura geral do tempo de vida e evolução do plasma. Nesse conjunto de leis de conservação pode-se notar que é mostrado o acoplamento do fluido-quark colorido ao campo de cor NA, que é diferente daquela dinâmica de fluido padrão, ela é a tão conhecida cromohidrodinâmica, que é a extensão de física de plasmas.

# Bibliografia


[1] R. Jackiw,"Inserting Group Variables into Fluid Mechanics," arxiv: hep-th/0410284.

[2] U. Heinz, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 351.

[3] Y. Choquet-Bruhat, J. Kath. Phys. 33 (1992) 1782.

[4] D. D. Holm and B. A. Kupershmidt, Phys. Rev. D 30 (1984) 2557.

[5] M. H. P. M. van Putten, "The Theory Of Ideal Yang-Mills Fluids In Symmetric Hyperbolic Form," arxiv: hep-ph/9310315.

[6] J-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B 421 (1994) 565.

[7] T. Kambe, Fluid Dyn. Res. 42, 055502 (2010).

[8] R. J. Thompson and T. M. Moeller, Phys. of Plasmas 19, 010702 (2012); 19, 082116 (2012).

[9] H . Marmanis, Phys. Fluids. 10, 1428 (1998).

[10] M. J. Lighthill, Proc. R. Soc. Lond. A 211 (1952) 564; ibid 222 (1954) 1.

[11] L. D. Landau and E.M. Lifshits, Fluid Mechanics (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[12] G. Russakoff, Am. J. Phys. 38. 1188 (1970).

[13] A. C. R. Mendes, C. Neves. W. Oliveira and F.I. Takakura, Braz. J. Phys. 33, 346 (2003).

[14] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer, New York, 1989).

[15] V. I. Arnold and B. A. Khesin, Ann. Rev. Fluid Mech. 24, 145 (1992); V. Zeitlin, J. Phys. A24, L171 (1992).

[16] S. M. Mahajan, Phys. Rev. Lett. 90, 035001 (2003).

[17] C. Truesdell, "The kinematics of Vorticity," Indiana University Press, USA, 1954.

[18] C. W. Hamman, J. C. Klewicki and R.M. Kirby, J. Fluid Mech. 610, 261 (2008).

[19] X. Zhao and G-W. He, Phys. Rev. E 79, 046316 (2009).

[20] U. Frish, Turbulence: The Legacy A.N. Kolmogorov (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[21] R. Jackiw, V. P. Nair, S. Y. Pi and A. P. Plolychronakus, J. Phys. A 37 (2004) R327.

[22] S. K. Wong, Nuovo Cimento A 65 (1970) 689.

[23] D. F. Litim and C. Manuel, Phys. Rept. 364 (2002) 451.

[24] U. Heinz, Ann. Phys. 161 (1985) 48.

[25] B. A. Bambah, S. M. Mahajan and C. Mukku, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 072301.

[26] F.R. Saraiva dos Santos. Novíssimo dicionário Latino-português. 10a. ed. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, 1993.

[27] G. Russakoff, *A derivation of the macroscopic Maxwell equations*, Am. J. Phys. 38, 1188 (1970).

[28] P. K. Kundu and I. M. Cohen, Fluid Mechanics (Academic Press, Califórnia, 2002).

[29] G. I. Ogilvie. "James Clerk Maxwell and the dynamics of astrophysical discs", arxiv:[astro-ph]0802.1333.

[30] Z. B. Etienne, Y. T. Liu and S. L. Shapiro. "Relativistic magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: A new AMR implementation." arxiv:[astro-ph] 1007.2848.

[31] Wen-An Yong. "Newtonian Limit of Maxwell Fluid Flows." arxiv: [math-ph] 1303.0373.

[32] L. Chevry, N. K. Sampathkumar, A. Cebers and J. -F. Berret. Phys. Rev. E. (2013)

[33] D. Capasso. "Spin-density and Vorticity Contribution to the Cosmological Background." arxiv[hep-th]1411.7750.

[34] R. Brady and R. Anderson. "Maxwell's fluid model of magnetism." arxiv[quant-ph] 1502.05926.

[35] T. P. Djun. " Viscosities of Gluon Dominated QGP model within relativistic non-Abelian hydrodynamics." arviv[hep-th]1505.0499

[36] Abreu, E. M. C, Neto, J. A., Mendes, A. C. R., Sasaki, N. M. S. A. Phys. Rev. D 91, 125011 (2015)