Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF

Programa de Pós–Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Análise Geral da Não-Comutatividade em Mecânica Quântica e Teoria Quântica dos Campos

Aluno: Adriano de Oliveira Zangirolami

Orientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Co-Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira

19 de Fevereiro de 2011

Juiz de Fora–MG

Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF
Programa de Pós–Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Análise Geral da Não-Comutatividade em Mecânica Quântica e Teoria Quântica dos Campos

Aluno: Adriano de Oliveira Zangirolami

Orientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu
Co-Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

19 de Fevereiro de 2011
Juiz de Fora–MG

Dedicatória

Dedico esta dissertação a todos os meus familiares, aos professores do Departamento de Física da UFJF e aos meus amigos.

Agradecimentos

A Deus, que esteve comigo durante toda a minha vida.

Aos meus pais, Vanor e Sueli, que me deram todo o apoio que precisei e souberam compreender os momentos de ausência devido a realização deste trabalho.

Aos meus irmãos, André e Andréia.

À minha tia Lúcia e aos meus primos Júnior, Raphael e Roberta, por sempre me motivarem e acreditarem que sou capaz de alcançar todos os meus objetivos.

À minha namorada Aline, pelo amor, carinho e amizade que sempre teve comigo.

Aos professores Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu (Orientador) e Dr. Wilson Oliveira (Co-orientador), pela escolha do tema, pela atenção e confiança em meu trabalho.

À coordenação da pós-graduação, Dra. Maria Cristina Andreolli Lopes e Dr. Sócrates de Oliveira Dantas, ao secretário da pós-graduação Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes e aos professores do Departamento de Física da UFJF.

Agradeço a Tiago Mendes Rodrigues, pela sua amizade ao longo de todos os anos, pelas inúmeras horas de estudo juntos e principalmente pelas correções de erros de Português e inglês que tanto contribuíram para este trabalho.

Agradeço a Evandro Bastos dos Santos, por ter sido peça fundamental ao longo dos anos de graduação e mestrado, e por ter me auxiliado com recursos de informática na fase de conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, Alison Arantes Gonçalves, Clarice Parreira Senra, Dante Donizeti Pereira, Félix Soares de Lima Neto, Pedro Vitor Coelho Cibrão e Wagner Tadeu Jardim.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que direta e/ou indiretamente estiveram ao meu lado na realização deste trabalho.

Todos os dias, lembro a mim mesmo, que as minhas vidas interior e exterior são baseadas nos trabalhos de outros Homens, vivos ou mortos, e que devo me empenhar a fim de dar na mesma medida o que recebi e estou recebendo ainda.

Albert Einstein

Resumo

No espaço não-comutativo de Doplicher, Fredenhagen, Roberts e Amorim (DFRA), que é uma extensão do espaço DFR, o objeto da não-comutatividade (θ^{ij}) é uma variável do sistema não-comutativo e tem um momento canônico conjugado. Nesta dissertação, mostraremos que θ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, na Mecânica Quântica Não-Comutativa (MQNC), é um operador no espaço de Hilbert e exploraremos as consequências da chamada "operalização". A álgebra DFRA será construída em um espaço-tempo estendido com graus de liberdade independentes associados com o objeto da não-comutatividade θ^{ij}. Mostraremos as propriedades de simetrias de um espaço-tempo estendido $x + \theta$ $(D = 10)$, dado pelo grupo $\mathcal{P}'$, que tem o grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ como um subgrupo. O formalismo de Noether adaptado a tal espaço-tempo estendido $x + \theta$ será descrito. Uma álgebra consistente que envolve o conjunto ampliado de operadores canônicos será explicada, o que permitirá construir teorias que são dinamicamente invariantes perante a ação do grupo de rotação. Nessa estrutura também é possível fornecer dinâmica ao setor operatorial da não-comutatividade resultando em novas características. Uma formulação consistente da mecânica clássica vai ser analisada de tal maneira que, sob quantização, fornecerá uma teoria quântica não-comutativa com resultados interessantes. O formalismo de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados é considerado e o objeto da não-comutatividade θ^{ij} tem um papel fundamental como uma quantidade independente. Em seguida, explicaremos as simetrias dinâmicas nas teorias relativísticas não-comutativas usando a álgebra DFRA. Também falaremos sobre a equação de Dirac generalizada, em que o campo fermiônico não depende somente das coordenadas comuns mas também de θ^{ij}. A simetria dinâmica satisfeita por tal teoria fermiônica será discutida e mostraremos que sua ação é invariante perante $\mathcal{P}'$. Na última parte deste trabalho descreveremos os campos escalares quânticos complexos usando esta nova estrutura. Em um formalismo de primeira quantização, θ^{ij} e seu momento canônico π_{ij} são vistos como operadores que vivem em algum espaço de Hilbert. Na perspectiva do formalismo de segunda quantização, mostraremos uma forma explícita para os geradores de Poincaré estendidos e a mesma álgebra é gerada via relações de Heisenberg generalizadas. Também consideraremos um termo fonte e construiremos uma solução geral para os campos escalares quânticos complexos usando a técnica da função de Green.

Palavras–chave : não-comutatividade; mecânica quântica; teorias de calibre

Abstract

In the Doplicher, Fredenhagen, Roberts and Amorim (DFRA) noncommutative (NC) space, which is an extension of the DFR space, the object of noncommutativity (θ^{ij}) is a variable of the NC system and has a canonical conjugate momentum. In this dissertation, we will show that θ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, in NC quantum mechanics, is an operator in Hilbert space and we will explore the consequences of this so-called "operationalization". The DFRA algebra is constructed in an extended space-time with independent degrees of freedom associated with the object of noncommutativity θ^{ij}. We will show the symmetry properties of an extended x+θ (D=10) space-time, given by the group $\mathcal{P}'$, which has the Poincaré group $\mathcal{P}$ as a subgroup. The Noether formalism adapted to such extended x+θ (D = 4 +6) space-time will be depicted. A consistent algebra involving the enlarged set of canonical operators will be described, which permits one to construct theories that are dynamically invariant under the action of the rotation group. In this framework it is also possible to give dynamics to the NC operator sector, resulting in new features. A consistent classical mechanics formulation will be analyzed in such a way that, under quantization, furnishes a NC quantum theory with interesting results. The Dirac formalism for constrained Hamiltonian systems is considered and the object of noncommutativity θ^{ij} plays a fundamental role as an independent quantity. Next, we will explain the dynamical spacetime symmetries in NC relativistic theories by using the DFRA algebra. It is also explained about the generalized Dirac equation issue, that the fermionic field depends not only on the ordinary coordinates but also θ^{ij}. The dynamical symmetry content of such fermionic theory is discussed, and we will show that its action is invariant under $\mathcal{P}'$. In the last part of this work we will depict the complex quantum scalar fields using this new framework. In a first quantized formalism, θ^{ij} and its canonical momentum π_{ij} are seen as operators living in some Hilbert space. In a second quantized formalism perspective, we will show an explicit form for the extended Poincaré generators and the same algebra is generated via generalized Heisenberg relations. We also will consider a source term and construct a general solution for the complex quantum scalar fields using the Green function technique.

Keywords : noncommutativity; quantum mechanics; gauge theories

Conteúdo

Introdução

O LHC (Large Hadron Collider)[1] é uma das grandes esperanças dos físicos teóricos, pois acredita-se que possa haver manifestações experimentais a respeito da Física na escala de Planck[2], ou seja, nos primeiros momentos do Big Bang. Essa manifestação poderia levar, por exemplo, ao fato de que o espaço-tempo quadridimensional padrão pode tornar-se não-comutativo, ou seja, que o operador quadrivetor posição $\mathbf{x}^{\mu}$ obedeça à seguinte relação de não-comutação

$$[\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz real, antissimétrica e constante. Neste espaço não-comutativo, a definição de teorias de campo envolvem operadores de campo que são funções das coordenadas não-comutativas. Em outras palavras, espera-se que a geometria do espaço-tempo, na escala de Planck, seja não-comutativa.

Outra constatação que talvez possa ser encontrada graças ao LHC é a existência de dimensões extras. Vamos ver que o espaço-tempo não-comutativo no qual vamos trabalhar é composto de dez dimensões, o que não é desconfortável em Teoria Quântica dos Campos (TQC), pois é o mesmo número de dimensões da supergravidade.

Em busca de uma TQC renormalizável, Heisenberg[3] sugeriu que poderíamos usar uma estrutura não-comutativa para as coordenadas do espaço-tempo nas escalas de comprimentos muito pequenos (na escala de Planck) para introduzir um "parâmetro de corte" ultravioleta efetivo. Após conversar com Oppenheimer[4], este passou o problema para o seu aluno de doutorado Snyder, que publicou o primeiro trabalho considerando uma

[1]Para informações adicionais sobre o LHC consulte o site oficial do LHC, http://lhc.web.cern.ch/lhc/.

[2]Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947), físico alemão, considerado o pai da física quântica e um dos físicos mais importantes do século XX.

[3]Werner Karl Heisenberg (1901-1976), físico alemão, um dos fundadores da Mecânica Quântica.

[4]Julius Robert Oppenheimer (1904-1967), físico norte-americano, que dirigiu o projeto Manhattan para o desenvolvimento da bomba atômica, durante a Segunda Guerra Mundial, no Laboratório Nacional de Los Álamos, no Novo México.

não-comutatividade do espaço-tempo em 1947 [1] onde sua motivação principal era evitar singularidades em TQC. Atualmente, o problema é motivado pela teoria de cordas [2], pois nesta teoria quando se introduz um campo magnético, a álgebra obtida é a não-comutativa [3], ou seja, quando cordas abertas têm suas extremidades sobre D-branas na presença de um campo magnético constante, teorias de calibre efetivas sobre um espaço não-comutativo surgem [3, 4]. Nessas teorias de campo não-comutativas (TCNC's) [5], usamos a Eq. (1). Isto provocou um ressurgimento do trabalho de Snyder.

Snyder introduziu um espaço-tempo com cinco dimensões tendo o SO(4,1) como grupo de simetria, com geradores $\mathbf{M}^{AB}$, que satisfazem a álgebra de Lorentz[5], onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ e usando o sistema de unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$. Além disso, ele postulou a relação entre as coordenadas e os geradores da álgebra SO(4,1)

$$\mathbf{x}^{\mu} = a\mathbf{M}^{4\mu}, \tag{2}$$

(onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e o parâmetro a tem dimensão de comprimento), promovendo as coordenadas do espaço-tempo a operadores Hermitianos. A relação mencionada acima introduz o comutador através da Eq. (1),

$$[\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{x}^{\nu}] = ia^2\mathbf{M}^{\mu\nu} \tag{3}$$

e as identidades

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{x}^{\lambda}] = i(\mathbf{x}^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - \mathbf{x}^{\nu}\eta^{\mu\lambda}) \tag{4}$$

e

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}] = i(\mathbf{M}^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \mathbf{M}^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \mathbf{M}^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \mathbf{M}^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}), \tag{5}$$

que estão de acordo com a invariância de Lorentz quadridimensional. Dessa forma Snyder recupera a invariância explícita de Lorentz perdida em (1), pois $\theta^{\mu\nu}$ é uma constante. Entretanto, C. N. Yang[6] [6] mostra logo em seguida (no mesmo ano do trabalho de Snyder) que os problemas de divergência na teoria quântica de campos continuavam presentes no espaço-tempo não-comutativo de Snyder. Isto provocou um esquecimento do trabalho de Snyder.

[5] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), físico holandês, que recebeu em 1902 o Nobel de Física por seu trabalho sobre as radiações eletromagnéticas.

[6] Chen-Ning Franklin Yang (1922-), físico chinês, que trabalha com mecânica estatística e física de partículas.

Explicando melhor, o ponto fundamental sobre o espaço não-comutativo padrão é que o objeto da não-comutatividade $\theta^{\mu\nu}$ geralmente é considerado como sendo uma matriz antissimétrica nas TCNC's. Isso viola a simetria de Lorentz pois fixa uma direção em um sistema de referência inercial. A violação da invariância de Lorentz é um problema, pois traz efeitos tais como a birrefringência do vácuo [7] (A descrição de tais efeitos fogem aos objetivos deste trabalho). No entanto, ao mesmo tempo nos permite tratar as TCNC's como deformações de teorias quânticas de campos comuns, substituindo produtos comuns por produtos Moyal, e interações de calibre comuns por suas correspondentes não-comutativas. Como é bem conhecido, essas teorias carregam sérios problemas como não-unitariedade, não-localizabilidade, não-renormalizabilidade, mistura UV x IR, etc. Por outro lado, a invariância pode ser recuperada construindo-se o espaço-tempo não-comutativo com $\theta^{\mu\nu}$ sendo um operador tensorial com o mesmo nível hierárquico que os $\mathbf{x}$'s. Isso foi feito em [8] usando uma redução conveniente da álgebra de Snyder. Tanto $\mathbf{x}^\mu$ e $\theta^{\mu\nu}$ pertencem, nesse caso, à mesma álgebra afim. Os campos devem ser funções dos autovalores de $\mathbf{x}^\mu$ e $\theta^{\mu\nu}$. O fato de $\theta^{\mu\nu}$ agora ser uma coordenada resolve o problema da invariância que era quebrada em (1).

Os resultados que aparecem na referência [8] são explorados por alguns autores [8-12]. Alguns deles preferem começar adotando a álgebra de Doplicher-Fredenhagen-Roberts (DFR) [14] que está baseada em príncipios da Relatividade Geral (RG) e da Mecânica Quântica (MQ), que usa a equação (1) como também o desaparecimento do comutador triplo entre os operadores coordenadas

$$[\mathbf{x}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] = 0. \tag{6}$$

Na álgebra de DFR é a representação de Weyl[7] dos operadores NC que obedecem às equações (1) e (6) e mantém a forma usual do produto Moyal [8], e consequentemente a forma usual das TCNC's, embora os campos tenham sido considerados dependentes não somente de $\mathbf{x}^\mu$, mas também de $\theta^{\alpha\beta}$. O argumento é que muitas medidas precisas da localização no espaço-tempo poderiam transferir às partículas teste energia suficiente para criar um campo gravitacional que em princípio poderia confinar fótons. Essa possibilidade

[7] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955), matemático alemão, que desenvolveu suas pesquisas em física teórica bem como a teoria de números e grupos.

[8] José Enrique Moyal (1910-1998), físico matemático, que ajudou a estabelecer a formulação do espaço de fase da Mecânica Quântica em 1949, além de contribuir para a engenharia aeronáutica, engenharia elétrica e estatística.

está relacionada com as relações de incerteza do espaço-tempo que podem ser derivadas das equações (1) e (6) assim como das condições quânticas

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu} &= 0 \\ (\tfrac{1}{4} * \theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu})^2 &= \lambda_P^8, \end{aligned} \tag{7}$$

onde $*\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\theta^{\rho\sigma}$ e λ_P é o comprimento de Planck.

Estes operadores são vistos atuando sobre um espaço de Hilbert[9] $\mathcal{H}$ e esta teoria implica em dimensões extras compactificadas [14]. O uso das condições (7) nas Refs. [7-12] trouxe consequências triviais, uma vez que nesses trabalhos os resultados relevantes dependem do valor de θ^2, que é tomado como uma média com alguma função peso $W(\theta)$. Eles usam nesse processo as transformações de Seiberg-Witten [3]. É claro que esses autores não usam (7), uma vez que suas motivações não estão relacionadas à gravitação quântica, mas com a construção de uma TCNC que mantenha a invariância de Lorentz. Este é um problema fundamental, uma vez que não há evidência experimental para supor a violação da simetria de Lorentz [7].

Uma estrutura interessante para estudar aspectos sobre não-comutatividade é dada pela chamada Mecânica Quântica Não-Comutativa (MQNC) devido a sua abordagem simples. Há vários trabalhos interessantes sobre MQNC [14-29]. Na maioria desses artigos, o objeto da não-comutatividade θ^{ij} (onde $i, j = 1, 2, 3$ e o espaço é Euclidiano), que é o resultado da comutação de dois operadores coordenada, é considerado como uma matriz constante, embora esse não seja o caso geral [1, 8, 12, 14, 21]. Considerar θ^{ij} como uma matriz constante quebra a simetria de Lorentz ou simetria de rotação para teorias não-relativísticas, como já falamos. Em MQNC, o tempo é um parâmetro comutativo e as coordenadas espaciais não comutam. No entanto, os objetos da não-comutatividade não são considerados como operadores no espaço de Hilbert. Como uma consequência, os momentos conjugados correspondentes não são introduzidos. E como é bem conhecido, isso é importante para implementar a rotação como uma simetria dinâmica [31]. Como um resultado, as teorias não são invariantes por rotações.

Em um trabalho recente [32] R. Amorim realizou uma extensão da álgebra de DFR para a mecânica quântica não-relativística de uma maneira não-trivial e mantendo a con-

[9]David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, que contribuiu com idéias brilhantes sendo considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, no mesmo nível de Henri Poincaré. Devemos a ele, principalmente, a lista de 23 problemas, alguns dos quais não foram resolvidos até hoje, que ele apresentou em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris.

sistência. Os objetos da não-comutatividade (as coordenadas θ^{ij}) foram considerados como operadores e seus momentos conjugados foram introduzidos. Isto permite exibir uma álgebra completa e consistente entre os operadores num espaço de Hilbert estendido com seis dimensões novas e construir operadores momentum angular generalizados, que obedecem a álgebra SO(D), e em uma maneira dinâmica, atuando propriamente em todos os setores desse espaço de Hilbert. Se isto não for efetuado, alguns objetos fundamentais geralmente empregados na literatura, como o operador coordenada deslocado, deixam de se transformar perante rotações. A simetria não é implementada de uma maneira algébrica, onde as transformações são baseadas na estrutura dos índices das variáveis, mas vem dinamicamente da ação consistente de um operador, como discutido em [31]. Este novo espaço não-comutativo tem dez dimensões e agora é conhecido como o espaço não-comutativo de Doplicher-Fredenhagen-Roberts-Amorim (DFRA).

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: no capítulo 1 veremos a não-comutatividade via produto Moyal, abordaremos a mecânica clássica não-comutativa e a teoria de calibre U(1) não-comutativa e no capítulo 2 descreveremos os detalhes matemáticos desse novo espaço não-comutativo. Após isso, descreveremos o espaço de Hilbert não-comutativo e construíremos um modelo de oscilador harmônico para esse novo espaço. No capítulo 3, exploraremos as bases para o tratamento de sistemas vinculados no espaço DRFA e trataremos a questão com o formalismo de Dirac[10]. No capítulo 4 explicaremos as simetrias e os detalhes do grupo de simetria de Poincaré[11] estendido. Além disso, também vamos estudar as características relativísticas do espaço de DRFA e construíremos a equação de Klein-Gordon[12] [13] [14] junto com o formalismo de Noether [15]. No capítulo 5, analisaremos os férmions nessa nova estrutura e estudaremos a equação de Dirac. Finalmente, no capítulo 6, consideraremos a elaboração de campos escalares

[10]Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), físico teórico britânico, que contribuiu para o desenvolvimento da mecânica quântica e eletrodinâmica quântica.

[11]Jules Henri Poincaré (1854-1912), matemático, físico e filósofo da ciência francês. Estudou numerosos problemas sobre óptica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, mecânica quântica, teoria da relatividade e cosmologia.

[12]Oskar Benjamin Klein (1894-1977), físico teórico sueco.

[13]Walter Gordon (1893-1939), físico teórico alemão.

[14]ou equação de Klein-Fock-Gordon.

[15]Amalie "Emmy"Noether (1882-1935), matemática e física alemã. Trabalhou nas áreas de teoria dos anéis e álgebra abstrata. Elaborou o Teorema de Noether, que explica as conexões entre simetria e as leis de conservação em física teórica. A maior parte de seu trabalho no entanto, foi centrada no estudo de álgebra.

quânticos complexos e a análise do termo fonte das teorias quânticas dos campos. Nos apêndices encontram-se as demonstrações mais trabalhosas.

Esta dissertação é baseada no artigo de revisão publicado em [35].

Capítulo 1

Aspectos Gerais da Não-Comutatividade via Produto Moyal

Em 1980, a teoria matemática conhecida atualmente como Geometria Não-Comutativa iniciou o seu desenvolvimento com o trabalho de Alain Connes[1] [36], em que as noções básicas da Geometria Não-Comutativa foram introduzidas e aplicadas ao toro não-comutativo, o qual permanece como um modelo de espaço não-comutativo. Seu cálculo diferencial foi generalizado num Congresso ocorrido na cidade alemã Oberwolfach em setembro de 1981. Neste mesmo ano, Alain Connes descobriu uma homologia de correntes para a álgebra de operadores [37] que tornou-se conhecida como cohomologia cíclica [38], sendo desenvolvida em detalhes em um trabalho posterior no ano de 1982 cujo título é *Geometria Diferencial Não-Comutativa* [39]. Embora esta não-comutatividade de Connes não seja explorada neste trabalho, o leitor interessado pode encontrá-los nas referências citadas acima.

1.1 Produto Moyal

Vamos apresentar nesta seção[2], a título de tornar este trabalho auto-consistente, uma versão da não-comutatividade dada pelo chamado *produto Moyal*. Este produto tem que ser consistente com a álgebra do espaço não-comutativo. Vamos procurar, de forma simpli-

[1]Alain Connes (1947-), matemático francês, especialista em álgebra de operadores.

[2]Vamos seguir as referências [40, 41].

ficada, apresentar seu desenvolvimento. Para isso, consideremos uma álgebra comutativa de funções em $\mathbb{R}^D$, munida do produto usual

$$(f.g)(x) = f(x)g(x), \tag{1.1}$$

onde vamos supor que todas as funções são de decréscimo rápido no infinito [42], ou seja,

$$\sup_x (1+|x|^2)^{k+n_1+...+n_D} |\partial_1^{n_1}...\partial_D^{n_D} f(x)|^2 < \infty, \tag{1.2}$$

$\forall k, n_i \in \mathcal{Z}_+$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. A relação (1.2) é conhecida como *condição de Schwartz.*

A condição de Schwartz implica que toda função $\phi(x)$ pode ser descrita pela sua transformada de Fourier[3]

$$\widetilde{\phi}(k) = \int d^D x \;\; e^{-ik_j x^j} \phi(x). \tag{1.3}$$

É fácil notar que $\widetilde{\phi}(-k) = \overline{\widetilde{\phi}(k)}$, desde que $\phi(x) \in \mathbb{R}$.

Um espaço não-comutativo também pode ser construído por meio da substituição das coordenadas locais $x^j \in \mathbb{R}^D$ por operadores hermitianos $\hat{x}^j$, que satisfazem a relação de comutação definida em (1). Os operadores hermitianos $\hat{x}^j$ geram uma álgebra não comutativa. A correspondência entre a álgebra de campos em $\mathbb{R}^D$ e a álgebra de operadores pode ser perfeitamente realizada através da quantização de Weyl. É fácil ver que o produto Moyal preserva (1), como vamos demostrar daqui a pouco.

Dada uma função $\phi(x) \in D$, juntamente com sua transformada de Fourier, dada na equação (1.3), introduzimos o símbolo de Weyl

$$\hat{W}[\phi] \equiv \hat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \;\; \widetilde{\phi}(k) \exp{(ik_j \hat{x^j})}, \tag{1.4}$$

em que adotamos o ordenamento simétrico de operadores proposto por Weyl onde, por exemplo, $\hat{W}[e^{ik_j x^j}] = e^{ik_j \hat{x}^j}$. A partir da equação (1.4), notamos que $\hat{W}[\phi]$ é hermitiano se $\phi(x)$ é real. A equação (1.4) pode ser reescrita em função do operador

$$\hat{T}(k) \equiv e^{ik_j \hat{x}^j} \tag{1.5}$$

da seguinte forma

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \;\; \hat{T}(k) \widetilde{\phi}(k). \tag{1.6}$$

Como os $\hat{x}^i{}'s$ são operadores hermitianos, então

$$\hat{T}^\dagger(k) = \hat{T}(-k). \tag{1.7}$$

[3] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático e físico francês, que iniciou a investigação das séries de Fourier, transformadas de Fourier e lei de Fourier.

Vamos encontrar algumas relações algébricas que serão úteis a seguir. Primeiro, vamos calcular o produto de operadores $\hat{T}(k)\hat{T}(k')$. Logo, considerando a equação (1.5), temos que

$$\hat{T}(k)\hat{T}(k') = e^{ik_j\hat{x}^j}e^{ik'_l\hat{x}^l}. \tag{1.8}$$

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [47],

$$e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{1.9}$$

temos que

$$\begin{aligned}\hat{T}(k)\hat{T}(k') &= e^{ik_j\hat{x}^j+ik'_l\hat{x}^l}e^{\frac{1}{2}[ik_j\hat{x}^j,ik'_l\hat{x}^l]} \\ &= e^{i(k+k')_j\hat{x}^j}e^{-\frac{1}{2}k_jk'_l[\hat{x}^j,\hat{x}^l]}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Usando a equação (1), temos que

$$\begin{aligned}\hat{T}(k)\hat{T}(k') &= e^{i(k+k')_j\hat{x}^j}e^{-\frac{1}{2}k_jk'_l(i\theta^{jl})} \\ &= e^{i(k+k')_j\hat{x}^j}e^{-\frac{i}{2}k_jk'_l\theta^{jl}} \\ &= \hat{T}(k+k')e^{-\frac{i}{2}k_jk'_l\theta^{jl}}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}Tr(\hat{T}(k)) &= \int d^Dx \quad \left\langle x|\hat{T}(k)|x\right\rangle \\ &= \int d^Dx \quad \left\langle x|e^{ik_l\hat{x}^l}|x\right\rangle,\end{aligned} \tag{1.12}$$

onde $|x\rangle$ são autofunções dos operadores $\hat{x}^j$.

Para calcularmos a expressão acima, precisamos definir certas quantidades. Veremos, de uma forma mais geral, como podemos definir uma função arbitrária de um operador. Consideremos uma função F de uma variável z e vamos supor que, em um certo domínio, F pode ser expandida em séries de potências de z

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n. \tag{1.13}$$

Por definição, a função correspondente do operador A é o operador $F(A)$ definido por uma série que tem os mesmos coeficientes f_n

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n. \tag{1.14}$$

Seja $|\phi_a\rangle$ um autovetor de A com autovalor a

$$A|\phi_a\rangle = a|\phi_a\rangle \,. \tag{1.15}$$

Aplicando o operador n vezes, obtemos que

$$A^n|\phi_a\rangle = a^n|\phi_a\rangle \,. \tag{1.16}$$

Logo, aplicando a série (1.13), temos que

$$F(A)|\phi_a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n|\phi_a\rangle = F(a)|\phi_a\rangle \,. \tag{1.17}$$

Isto nos leva a seguinte regra: quando $|\phi_a\rangle$ é um autovetor de A com o autovalor a, $|\phi_a\rangle$ é um autovetor de $F(A)$ com autovalor $F(a)$. Usando este resultado e a definição da função delta, podemos reescrever a equação (1.11)

$$\begin{aligned} Tr(\hat{T}(k)) &= \int d^D x \;\; e^{ik_j x^j} \quad \langle \hat{x}_j|\hat{x}_j\rangle \\ &= \int d^D x \;\; e^{ik_j x^j} \\ &= (2\pi)^D \prod_j \delta(k_j). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Usando as propriedades (1.6), (1.7), (1.11) e (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\Phi}(k')\hat{T}^{\dagger}(k)) &= Tr\left\{\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' \hat{T}(k')\widetilde{\phi}(k')\hat{T}(-k)\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' \widetilde{\phi}(k') Tr(\hat{T}(k')\hat{T}(-k)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' \widetilde{\phi}(k') Tr\left\{\hat{T}(k-k')e^{\frac{i}{2}k_j k'_l \theta^{jl}}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' \widetilde{\phi}(k') e^{\frac{i}{2}k_j k'_l \theta^{jl}} (2\pi)^D \prod_j \delta(k-k')_j \\ &= \widetilde{\phi}(k). \end{aligned} \tag{1.19}$$

e este resultado servirá como motivação para a construção do produto Moyal. Se o operador $\hat{\Phi}$ for substituído pelo produto de dois operadores, $\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2$, em que os operadores $\hat{\Phi}_1$ e $\hat{\Phi}_2$ são definidos de forma análoga a $\hat{\Phi}$, o novo campo $\widetilde{\phi}$ estará relacionado aos campos $\widetilde{\phi}_1$ e

$\widetilde{\phi}_2$ através de um produto diferente do usual

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) &\equiv (2\pi)^D Tr\{\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_2\hat{T}^\dagger(k)\} \\
&= (2\pi)^D Tr\Bigg\{\left(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'\hat{T}(k')\widetilde{\Phi_1}(k')\right). \\
&\quad .\left(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk''\hat{T}(k'')\widetilde{\Phi_2}(k'')\right)\hat{T}(-k)\Bigg\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'd^Dk''\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')Tr\{\hat{T}(k')\hat{T}(k'')\hat{T}(-k)\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'd^Dk''\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')Tr\{\hat{T}(k')\hat{T}(k''-k). \\
&\quad .e^{-\frac{i}{2}k''_j(-k_l)\theta^{jl}}\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'd^Dk''\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')Tr\{\hat{T}(k')\hat{T}(k''-k)\}. \\
&\quad .e^{-\frac{i}{2}k''_jk_l\theta^{jl}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'd^Dk''\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')e^{(\frac{i}{2}\theta^{jl}k''_jk_l)}. \\
&\quad .Tr\{\hat{T}(k'+(k''-k))e^{-\frac{i}{2}k'_m(k''-k)_n\theta^{mn}}\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk'd^Dk''\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')e^{(\frac{i}{2}\theta^{jl}k''_jk_l)}e^{\frac{i}{2}k'_m(k''-k)_n\theta^{mn}}. \\
&\quad .(2\pi)^D\prod_j\Big(\delta(k'+k''-k)_j\Big) \\
&= \int d^Dk'\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k-k')e^{\frac{i}{2}\theta^{jl}(k-k')_jk_l}e^{\frac{i}{2}k'_jk'_l\theta^{jl}} \\
&= \int d^Dk'\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k-k')e^{-\frac{i}{2}k'_jk_l\theta^{jl}},
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

onde $(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k)$ indica transformada de Fourier de $(\phi_1 * \phi_2)(k)$.

A equação (1.20) pode ser reescrita de uma forma mais interessante, usando as seguintes notações

$$\hat{k}_i|k>=k_i|k> \qquad <k|\phi>=\widetilde{\phi}(k), \tag{1.21}$$

$$\hat{x}_i|x>=x_i|x> \qquad <x|\phi>=\phi(x), \tag{1.22}$$

$$<k|x>=\frac{e^{-ik_jx^j}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}, \tag{1.23}$$

juntamente com a noção de produto tensorial $\otimes$, temos que

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\phi_i * \phi_2})(k) &= \int d^Dk'(<k-k'|\otimes<k'|)(|\phi_1>\otimes|\phi_2>)e^{-\frac{i}{2}k_lk'_j\theta^{lj}} \\
&= \int d^Dk'(<k-k'|\otimes<k'|)e^{-\frac{i}{2}(\hat{k}_l\otimes\hat{k}'_j)\theta^{lj}}(|\phi_1>\otimes|\phi_2>) \\
&= \int d^Dk'd^Dxd^Dy(<k-k'|\otimes<k'|)(|x>\otimes|y>). \\
&\quad .(<x|\otimes<y|)e^{-\frac{i}{2}(\hat{k}_l\otimes\hat{k}'_j)\theta^{lj}}(|\phi_1>\otimes|\phi_2>)
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

onde introduzimos uma identidade, a relação de fechamento, na expressão acima, dada por

$$\int d^D x d^D y(|x>\otimes|y>)(<x|\otimes<y|)=1. \tag{1.25}$$

Com isso, segue-se

$$\begin{aligned}(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{2D}}\int d^D k\text{'} d^D x d^D y e^{-i(k-k\text{'})_j x^j - ik\text{'}_j y^j}. \\ &\quad .e^{-\frac{i}{2}\theta^{lj}(-i\partial_l^x)(-i\partial_j^y)}\phi_1(x)\phi_2(y).\end{aligned} \tag{1.26}$$

Mas, sabemos que

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int d^D k e^{ik_j x^j}(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k). \tag{1.27}$$

Logo, o novo produto entre os campos é dado por

$$\begin{aligned}(\phi_1 * \phi_2)(x) &= \int d^D k e^{ik_j x^j}\frac{1}{(2\pi)^{2D}}\int d^D k\text{'} d^D x\text{'} d^D y e^{-i(k-k\text{'})_j x\text{'}^j - ik\text{'}_j y^j}. \\ &\quad .e^{\frac{i}{2}\theta^{lj}\partial_l^{x\text{'}}\partial_j^y}\phi_1(x\text{'})\phi_2(y) \\ &= \int d^D x\text{'} d^D y\left(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k e^{-ik_j(x\text{'}^j - x^j)}\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k\text{'} e^{-ik\text{'}_j(y^j - x^j)}\right). \\ &\quad .e^{\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^{x\text{'}})(\partial_j^y)}\phi_1(x\text{'})\phi_2(y) \\ &= \int d^D x\text{'} d^D y \delta^D(x\text{'}-x)\delta^D(y-x)e^{\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^{x\text{'}})(\partial_j^y)}\phi_1(x\text{'})\phi_2(y) \\ &= \int d^D y \delta^D(y-x)e^{\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^x)(\partial_j^y)}\phi_1(x)\phi_2(y) \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^x)(\partial_j^y)}\phi_1(x)\phi_2(y)\Big|_{x=y}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Portanto,

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^x)(\partial_j^y)\right)\phi_1(x)\phi_2(y)\Big|_{x=y}, \tag{1.29}$$

que é vista como a definição do produto Moyal. Podemos reescrever o produto Moyal de uma outra forma,

$$\begin{aligned}(\phi_1 * \phi_2)(x) &\equiv \phi_1(x) * \phi_2(x) \\ &= \phi_1(x)\exp\left(\frac{i}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\theta^{\mu\nu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu}\right)\phi_2(x) \\ &= \phi_1(x)\phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\Big\{\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}\phi_1(x)\Big\}\theta^{\mu_1\nu_1}. \\ &\quad .\theta^{\mu_2\nu_2}...\theta^{\mu_n\nu_n}\Big\{\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\phi_2(x)\Big\},\end{aligned} \tag{1.30}$$

a qual exibe a não-localidade do produto Moyal, dado que a mesma possui um número infinito de derivadas.

A partir deste momento, discutiremos algumas das propriedades mais importantes do produto Moyal. Usando a expansão

$$e^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall \;\; x \in \mathbf{R}, \tag{1.31}$$

podemos escrever o produto Moyal de maneira análoga,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \phi_1(x)\phi_2(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1(x)\partial_\nu\phi_2(x) + \frac{1}{2!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_\mu\partial_\rho\phi_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\phi_2(x) + \\ &+\frac{1}{3!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\frac{i}{2}\theta^{\xi\eta}\partial_\mu\partial_\rho\partial_\xi\phi_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\eta\phi_2(x) + O(\theta^4). \end{aligned} \tag{1.32}$$

É importante notar que ao realizarmos o produto Moyal entre dois campos iguais, temos uma particularidade: os termos ímpares em θ, isto é, os que contém produto de n matrizes θ antissimétricas, com n ímpar, serão nulos devido a antissimetria.

A partir da expansão acima, podemos encontrar a regra de derivação para o produto Moyal. Como iremos aplicar as regras de derivação usual aos termos da expansão, é imediato que à regra de derivação do produto Moyal seja dada por

$$\partial_\mu(\phi_1 * \phi_2) = (\partial_\mu\phi_1) * \phi_2 + \phi_1 * (\partial_\mu\phi_2), \tag{1.33}$$

que é idêntica a regra de derivação usual.

Uma situação interessante, mas esperada, surge ao realizarmos o produto Moyal entre duas funções ϕ_1 e ϕ_2 definidas por $\phi_1 = x^\mu$ e $\phi_2 = x^\nu$.

$$\begin{aligned} x^\mu * x^\nu &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu x^\mu \partial_\nu x^\nu \\ &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Percebemos que o lado direito da equação anterior tem uma parte simétrica e outra antissimétrica. Deste modo, o comutador Moyal de x^μ com x^ν é dado por

$$\begin{aligned} [x^\mu, x^\nu]_* &\equiv x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu \\ &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\nu\mu} \\ &= i\theta^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

que é a relação de comutação dada em (1). Logo, demonstramos que o produto Moyal preserva a relação fundamental da não-comutatividade.

Para tornar o produto Moyal mais familiar, será descrito a seguir um exemplo bem simples para o produto entre dois campos. Considere um espaço bidimensional ($\theta^{12} \equiv \theta$)

e sejam dois campos $\phi_1 = x^1$ e $\phi_2 = x^2$ definidos nesse espaço, o produto Moyal entre eles é dado por

$$\phi_1 * \phi_2 = x^1 x^2 + i\theta, \tag{1.36}$$

e, consequentemente,

$$[x^1, x^2]_* = i\theta^{12}, \tag{1.37}$$

onde usamos o fato de que a matriz θ^{12} é antissimétrica, por definição.

Algo interessante em relação ao produto Moyal é que apesar de ser não-local, devido à existência de um número infinito de derivadas em sua definição, esta não-localidade não aparece em termos quadráticos da ação. De fato

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^D k_1 d^D k_2 \widetilde{\phi}_1(k_1)\widetilde{\phi}_2(k_2) \int d^D x e^{ik_i x} * e^{ik_2 x}. \tag{1.38}$$

Utilizando a definição de produto Moyal, e considerando que

$$\phi_i(x) = \int d^D k e^{ik_j x^j} \widetilde{\phi}_i(k_i), \tag{1.39}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^D x e^{ik_i x} * e^{ik_2 x} &= \int d^D x \left\{ e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu{}^x \partial_\nu{}^y} e^{ik_1 x} e^{ik_2 x} \right\} \\ &= \int d^D x \left\{ e^{i(k_1+k_2)} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu} e^{i(k_1+k_2)} \right\} \\ &= \int d^D x e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu}} e^{i(k_1+k_2)}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int d^D k_1 d^D k_2 (2\pi)^D \delta(K_1 + k_2) \widetilde{\phi}_1(k_1)\widetilde{\phi}_2(k_2) e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu}} \\ &= \int d^D k_1 d^D k_2 d^D x (e^{i(k_1+k_2)} \widetilde{\phi}_1(k_1)\widetilde{\phi}_2(k_2) \\ &= \int d^D x \Big\{ \int d^D k_1 e^{ik_1 x} \widetilde{\phi}_1(k_1) \Big\} \Big\{ \int d^D k_2 e^{ik_2 x} \widetilde{\phi}_1(k_1) \} \Big\}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

segue que

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int d^D x \phi_1(x)\phi_2(x) \\ &= \int d^D x \phi_2(x)\phi_1(x) \\ &= \int d^D x \phi_2(x) * \phi_1(x), \end{aligned} \tag{1.42}$$

que é o resultado desejado.

Assim como,

$$\int d^D x \partial_\mu \phi_1(x) * \partial^\mu \phi_2(x) = \int d^D x \partial_\mu \phi_1(x) \partial^\mu \phi_2(x), \tag{1.43}$$

em que admitimos o bom comportamento dos campos no infinito, logo, os termos de superfície são nulos.

Notamos que, para o caso de exatamente dois campos,

$$\int d^D x \phi_1 * \phi_2 = \int d^D x \phi_1(x) \phi_2(x). \tag{1.44}$$

Outras propriedades do produto Moyal que seguem diretamente da definição são

$$F(x) * \delta(x-y) = \delta(x-y) * F(y), \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} \big(\phi_1 * \phi_2\big) * \phi_3 &= \phi_1 * \big(\phi_2 * \phi_3\big), \\ &\equiv \phi_1 * \phi_2 * \phi_3. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Essas propriedades serão úteis, como relatado anteriormente, quando utilizarmos o produto Moyal para construção de teorias de campos não-comutativas.

1.2 Mecânica Clássica Não-Comutativa

Os espaços não-comutativos são caracterizados pelas relações entre os operadores coordenadas definidos na seção anterior

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\hbar\theta^{ij}, \tag{1.47}$$

onde o parâmetro da não-comutatividade é dado por $\hbar\theta^{ij}$, o qual é real, antissimétrico e tem dimensão de área.

Como já discutimos anteriormente, uma nova teoria pode ser construída se mudarmos o produto usual de funções pelo produto Moyal

$$(f * g)(x) = exp(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i\partial_j)f(x)g(y)|_{x=y}, \tag{1.48}$$

em que f e g são funções de classe C^∞ em seus domínios de definição.

Com base nesta não-comutatividade, vamos construir os seguintes comutadores

$$[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0 \tag{1.49a}$$

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\hbar\theta^{ij} \tag{1.49b}$$

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta^i_j\ . \tag{1.49c}$$

Logo, uma mecânica quântica não-comutativa pode ser construída, onde $i, j = 1, 2, 3$.

Considerando-se a existência de uma estrutura simplética [43], que vamos definir abaixo, consistente com as regras de comutação (1.49), obteremos as equações de movimento correspondentes.

Consideremos um conjunto de variáveis ξ^a, com $a = 1, 2, ..., 2n$, e uma matriz antissimétrica $\Lambda^{ab} = \{\xi^a, \xi^b\}$, onde $\{\xi^a, \xi^b\}$ representa o parêntese de Poisson[4] entre ξ^a e ξ^b [44]. Dadas duas funções de ξ^a, F e G, podemos definir uma estrutura simplética por

$$\{F, G\} = \{\xi^a, \xi^b\}\frac{\partial F}{\partial \xi^a}\frac{\partial F}{\partial \xi^b}. \tag{1.50}$$

Dada uma Hamiltoniana $H = H(\xi^a)$, podemos obter as equações de movimento usando essa estrutura simplética. A variação temporal de ξ^a é dada por

$$\dot{\xi}^a = \{\xi^a, H\}, \tag{1.51}$$

e em geral, para qualquer função F definida neste espaço de fase, temos que

$$\dot{F} = \{F, H\}. \tag{1.52}$$

[4]Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático e físico francês.

Agora, consideremos o espaço de fase dado por $\xi^a = (x^i, p_i)$, com $i = 1, 2, 3$ e as regras de comutação da mecânica quântica não-comutativa (1.49). A estrutura simplética consistente com estas regras é definida por

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij}, \tag{1.53a}$$

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j, \tag{1.53b}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{1.53c}$$

Se $F = F(x^i, p_j)$ e $G = G(x^i, p_j)$, então usando (1.53) obtemos os seguintes parênteses de Poisson modificados

$$\begin{aligned} \{F, G\}_H &= \{x^i, x^j\}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j} + \{x^i, p_j\}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_j} + \{p_i, x^j\}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x^j} \\ &= \theta^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j} + \delta^i_j\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \delta^j_i\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x^j} \\ &= \theta^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j} + \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x^i}\right). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Dada a Hamiltoniana

$$H = \frac{p_i p^i}{2m} + V(x),$$

as equações de movimento correspondentes a esta nova estrutura simplética podem ser obtidas. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} \\ &= \{x^i, \frac{p_j p^j}{2m} + V(x^j)\}. \end{aligned}$$

Usando a propriedade dos parênteses de Poisson, $\{A, B+C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$, obtemos

$$\dot{x}^i = \{x^i, \frac{p_j p^j}{2m}\} + \{x^i, V(x^j)\}.$$

Usando a equação (1.54) e a propriedade dos parênteses de Poisson, $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$, temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, \frac{p_j}{2m}\}p^j + \frac{p_j}{2m}\{x^i, p^j\} + \theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j} \\ &= \delta^i_j\frac{p^j}{2m} + \frac{p_j}{2m}\delta^{ij} + \theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j} \\ &= \frac{p^i}{2m} + \frac{p^i}{2m} + \theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j} \\ &= \frac{p^i}{m} + \theta^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

que é a primeira equação de movimento. A outra equação de movimento é dada por,

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \{p_i, H\} \\
&= \{p_i, \frac{p_j p^j}{2m} + V(x^j)\} \\
&= \{p_i, \frac{p_j p^j}{2m}\} + \{p_i, V(x^j)\}.
\end{aligned}$$

Usando as equações (1.54), (1.61c) e a propriedade dos parênteses de Poisson, obtemos que

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \{p_i, \frac{p_j}{2m}\}p^j + \frac{p_j}{2m}\{p_i, p^j\} - \frac{\partial V}{\partial x^i} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial x^i}. \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

que é a segunda equação de movimento.

Derivando a equação (1.55) em relação ao tempo e usando a equação (1.56), temos que

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^i &= \frac{\dot{p}^i}{m} + \theta^{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x_k}\dot{x}_k \\
m\ddot{x}^i &= -\frac{\partial V}{\partial x^i} + m\theta^{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x_k}\dot{x}_k. \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

Esta é uma reformulação da segunda lei de Newton[5], onde o primeiro termo do lado direito é o termo usual, enquanto o segundo é proporcional à velocidade e depende do parâmetro não-comutativo θ^{ij} e também da variação do potencial externo.

Note que a construção da segunda lei de Newton não-comutativa (1.57) foi obtida através do produto Moyal onde θ^{ij} é constante. Nos próximos capítulos, este fator será uma coordenada e terá um momento associado a ele. Entretanto, teremos um espaço de nove dimensões, onde três serão do espaço de fase e seis pertencentes ao espaço θ^{ij} e nessa formulação também podemos construir uma formulação da mecânica clássica no espaço DFRA, mas isso foge aos objetivos deste trabalho.

[5]Isaac Newton (1643-1727), cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo. Sua obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, é considerada uma das mais influentes em História da ciência. Publicada em 1687, esta obra descreve a lei da gravitação universal e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica.

1.3 Teoria de Calibre U(1) Não-Comutativa

A ação que descreve a teoria de calibre U(1) comutativa (teoria eletromagnética de Maxwell[6]) é dada por [40, 45]

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{1.58}$$

Nosso objetivo inicial é obter a versão não-comutativa da ação da teoria de calibre U(1). Considerando-se as propriedades (1.43) e (1.44), temos que

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.59}$$

em que tomamos a dimensão do espaço-tempo como sendo quadridimensional.

A diferença entre a teoria de calibre U(1) comutativa e a não comutativa se encontra no tensor de Maxwell. Como sabemos, o tensor de Maxwell é definido por

$$-ieF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu], \tag{1.60}$$

em que a derivada covariante D_μ é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{1.61}$$

Assim, sobre um espaço não-comutativo, temos que

$$\begin{aligned} -ieF_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu]_* \\ &= D_\mu * D_\nu - D_\nu * D_\mu \\ &= (\partial_\mu - ieA_\mu) * (\partial_\nu - ieA_\nu) - (\partial_\nu - ieA_\nu) * (\partial_\mu - ieA_\mu) \\ &= \partial_\mu * \partial_\nu - ie\partial_\mu * A_\nu - ieA_\mu * \partial_\nu + (ie)^2 A_\mu * A_\nu - \partial_\nu * \partial_\mu + ie\partial_\nu * A_\mu + \\ &\quad + ieA_\nu * \partial_\mu - (ie)^2 A_\nu * A_\mu \\ &= -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + (ie)^2(A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Consequentemente,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*. \tag{1.63}$$

Notamos portanto, que o tensor das tensões de Maxwell não-comutativo tem a mesma forma geral do campo da teoria de Yang-Mills[7]. De fato, a teoria U(1) não-comutativa é

[6] James Clerk Maxwell (1831-1879), físico e matemático britânico, mais conhecido por unir a eletricidade, o magnetismo e a óptica, através das equações de Maxwell.

[7] Robert L. Mills (1927-1999), físico americano, especialista em teoria quântica dos campos.

não-abeliana, em que o campo de calibre acopla consigo mesmo por meio do comutador Moyal. Esta teoria também é conhecida na literatura como teoria de Yang-Mills U(1) não-comutativa.

A transformação de calibre A_μ, que deixa a ação invariante, pode ser obtida considerando-se que a transformação de calibre da derivada covariante atuando em algum campo carregado ψ deve satisfazer a relação

$$(D_\mu * \psi)' = U * D_\mu * \psi, \tag{1.64}$$

em que $U(\alpha)$ está relacionado ao grupo de simetria não-comutativo U(1), ou seja,

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= exp * (i\alpha) \\ &= 1 + i\alpha + \frac{1}{2} i\alpha * i\alpha + \frac{1}{3!} i\alpha * i\alpha * i\alpha + ... \end{aligned} \tag{1.65}$$

Logo,

$$U^{-1}(\alpha) = exp * (-i\alpha). \tag{1.66}$$

De fato, usando a definição do produto Moyal dada pela equação (1.29), temos que

$$\begin{aligned} U * U^{-1} &= exp[\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \partial_\nu^y] e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)}\big|_{x=y} \\ &= [e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x e^{i\alpha(x)} \partial_\nu^y e^{-i\alpha(y)} + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_\mu^x\partial_\rho^x e^{i\alpha(x)}\partial_\nu^y\partial_\lambda^y e^{-i\alpha(y)} + ...]\big|_{x=y} \\ &= [e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \alpha(x)\partial_\nu^y \alpha(y) e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)} + ...]\big|_{x=y} \\ &= [(1 + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \alpha(x)\partial_\nu^y \alpha(y) + ...) e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)}]\big|_{x=y} \\ &= [exp(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \alpha(x)\partial_\nu^y \alpha(y)) e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(y)}]\big|_{x=y} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.67}$$

O campo ψ deve se transformar da seguinte maneira

$$\psi' = U * \psi. \tag{1.68}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (D_\mu * \psi)' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu) * \psi' \\ &= (\partial_\mu - ieA'_\mu) * U * \psi \\ &= \partial_\mu U * \psi + U * \partial_\mu \psi - ieA'_\mu * U * \psi \\ &= \partial_\mu (U * \psi) - ieA'_\mu * U * \psi \end{aligned} \tag{1.69}$$

Então, usando (1.61) e (1.64) e comparando com (1.69), A_μ deve transformar-se como

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= U(x) * A_\mu(x) * U^{-1}(x) - \frac{i}{e}\partial_\mu U(x) * U^{-1}(x) \\ &= [U(x) * A_\mu(x) - \frac{i}{e}\partial_\mu U(x)] * U^{-1}(x) \\ &= [U(x) * A_\mu(x) - \frac{i}{e}[D_\mu * U(x) + ieA_\mu * U(x)]] * U^{-1}(x) \\ &= \frac{i}{e}U * D_\mu * U^{-1} \end{aligned} \tag{1.70}$$

Considerando-se, agora, a transformação de $F_{\mu\nu}$, sob a transformação (1.70), temos (esta demonstração encontra-se no Apêndice A),

$$F'_{\mu\nu} = U * F_{\mu\nu} * U^{-1}. \tag{1.71}$$

Com este resultado, a ação (1.58) é invariante sob a transformação de calibre (1.70), ou seja, pela transformação de $F_{\mu\nu}$ dada na equação (1.71). De fato,

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{1}{4}\int d^4x F'_{\mu\nu} * F'^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x U * F_{\mu\nu} * U^{-1} * U * F^{\mu\nu} * U^{-1} \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x U * F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} * U^{-1} \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} * U^{-1} * U \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= S. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Nosso próximo passo é obter as equações de movimento não-comutativas. Para fazermos isso, faremos a variação da ação dada em (1.59). Portanto,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta\Big[-\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x \Big[(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu}) + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu})\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x 2F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Usando as propriedades (1.43) e (1.44), temos que

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * \delta F^{\mu\nu}. \tag{1.74}$$

Substituindo a equação (1.63), obtemos

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie[A^\mu, A^\nu]_*). \tag{1.75}$$

Usando a definição do comutador Moyal ($[A, B]_* = A*B - B*A$), resulta em (no Apêndice A),

$$\delta S \;= -\int d^4xF_{\mu\nu} * \partial^\mu\delta A^\nu + ie\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta A^\mu * A^\nu + ie\int d^4xF_{\mu\nu} * A^\mu * \delta A^\nu, \tag{1.76}$$

onde usamos a antissimetria de $F_{\mu\nu}$ ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$).

Iremos, agora, reescrever o termo $ie\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta A^\mu * A^\nu$ de uma maneira mais conveniente. Logo,

$$\begin{aligned} ie\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta A^\mu * A^\nu &= ie\int d^4xF_{\nu\mu} * \delta A^\nu * A^\mu \\ &= ie\int d^4x(-F_{\mu\nu}) * \delta A^\nu * A^\mu \\ &= -ie\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta A^\nu * A^\mu. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Usando as propriedades (1.43) e (1.44), temos que

$$ie\int d^4xF_{\mu\nu} * \delta A^\mu * A^\nu = -ie\int d^4xA^\mu * F_{\mu\nu} * \delta A^\nu. \tag{1.78}$$

Substituindo (1.78) em (1.76), obtemos

$$\delta S = -\int d^4xF_{\mu\nu} * \partial^\mu\delta A^\nu - ie\int d^4xA^\mu * F_{\mu\nu} * \delta A^\nu + ie\int d^4xF_{\mu\nu} * A^\mu * \delta A^\nu \tag{1.79}$$

de onde teremos que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\partial^\mu F_{\mu\nu} * \delta A^\nu - ie\int d^4xA^\mu * F_{\mu\nu} * \delta A^\nu + ie\int d^4xF_{\mu\nu} * A^\mu * \delta A^\nu \\ &= \int d^4x(\partial^\mu F_{\mu\nu} - ieA^\mu * F_{\mu\nu} + ieF_{\mu\nu} * A^\mu) * \delta A^\nu \\ &= \int d^4x(\partial^\mu F_{\mu\nu} - ie[A^\mu, F_{\mu\nu}]_*) * \delta A^\nu. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Pelo príncipio de Hamilton [8] sabemos que a evolução de um sistema da configuração A para a configuração B é tal que a ação é um mínimo, ou seja, a variação da ação é nula. Logo,

[8]William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático, físico e astrônomo irlandês, que contribuiu no desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra. Sua descoberta mais importante em matemática é a dos quaterniões. Em física é muito conhecido pelo seu trabalho em Mecânica Analítica, que veio a ser influente nas áreas da Mecânica Quântica e da Teoria Quântica de Campos.

da expressão anterior podemos deduzir que as equações de movimento não-comutativas são

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - ie[A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = 0, \tag{1.81}$$

que pode ser escrita em uma forma mais elegante, usando a seguinte propriedade da derivada covariante: $D_\mu * (F * G) = \partial_\mu (F * G) - ie[A_\mu, F * G]_*$, como

$$D^\mu * F_{\mu\nu} = 0 \tag{1.82}$$

Vamos verificar a consistência desta equação. Aplicando a derivada ∂^ν à equação (1.81), obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^\nu(\partial^\mu F_{\mu\nu} - ie[A^\mu, F_{\mu\nu}]_*) &= 0 \\
\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} - ie\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= 0 \\
\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} - ie\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= 0.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Podemos demonstrar facilmente (Apêndice A) que, analogamente ao caso comutativo,

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.84}$$

Então, a equação (1.83) fica

$$-ie\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = 0. \tag{1.85}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= \partial^\nu (A^\mu * F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} * A^\mu) \\
&= \partial^\nu (A^\mu * F_{\mu\nu}) - \partial^\nu (F_{\mu\nu} * A^\mu) \\
&= \partial^\nu A^\mu * F_{\mu\nu} + A^\mu * \partial^\nu F_{\mu\nu} - \partial^\nu F_{\mu\nu} * A^\mu - F_{\mu\nu} * \partial^\nu A^\mu \\
&= [\partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}]_* + [A^\mu, \partial^\nu F_{\mu\nu}]_* \ .
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Vamos analisar cuidadosamente os dois termos da expressão acima. Considerando que um tensor de segunda ordem pode ser decomposto de modo unívoco em dois tensores de segunda ordem, ou seja,

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \tag{1.87}$$

podemos escrever que

$$\partial^\nu A^\mu = \frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu), \tag{1.88}$$

onde o primeiro termo é um tensor simétrico e o segundo termo é um tensor antissimétrico. Já o segundo termo da equação (1.86) pode ser reescrito trocando-se μ por ν e ν por μ, isto é,

$$[A^\mu, \partial^\nu F_{\mu\nu}]_* = [A^\nu, \partial^\mu F_{\nu\mu}]_*. \tag{1.89}$$

Como $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, temos que

$$\begin{aligned} [A^\mu, \partial^\nu F_{\mu\nu}]_* &= [A^\nu, \partial^\mu(-F_{\mu\nu})]_* \\ &= -[A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_*. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Substituindo (1.88) e (1.90) em (1.86), obtemos

$$\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = \big[\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu), F_{\mu\nu}\big]_* - [A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_*. \tag{1.91}$$

Usando o propriedade satisfeita pelo comutador Moyal, $[A+B, C]_* = [A, C]_* + [B, C]_*$, temos que

$$\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = \big[\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu), F_{\mu\nu}\big]_* + \big[\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu), F_{\mu\nu}\big]_* - [A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_*. \tag{1.92}$$

Como $\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu)$ é um tensor simétrico e $F_{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico, podemos concluir que $[\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu), F_{\mu\nu}] = 0$, logo,

$$\begin{aligned} \partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= \big[\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu), F_{\mu\nu}\big]_* - [A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_* \\ &= \big[-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), F_{\mu\nu}\big]_* - [A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_* \\ &= -\frac{1}{2}[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}]_* - [A^\nu, \partial^\mu F_{\mu\nu}]_*. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Usando a equação (1.63) e a equação (1.81), obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= -\frac{1}{2}[F^{\mu\nu} + ie[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - [A^\nu, ie[A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* \\ &= -\frac{1}{2}[F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}]_* - \frac{1}{2}[ie[A^\mu, A^\nu, F_{\mu\nu}] - ie[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_*. \end{aligned} \tag{1.94}$$

O cálculo detalhado do comutador $[F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}]_*$ encontra-se no Apêndice A. Logo,

$$[F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}]_* = 0, \tag{1.95}$$

que é o resultado análogo à versão comutativa.

A equação (1.94) fica

$$\begin{aligned} \partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= -\frac{1}{2}[ie[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - ie[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* \\ &= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - ie[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_*. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Como $F_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem antissimétrico, podemos escrevê-lo como

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}). \tag{1.97}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - ie[A^\nu, [A^\mu, \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu})]_*]_* \\
&= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* - [A^\mu, F_{\nu\mu}]_*]_* \\
&= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* + \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\nu\mu}]_*]_* \\
&= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* + \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, -F_{\mu\nu}]_*]_*.
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Sabemos que $[A, B]_* = -[B, A]_*$, logo

$$\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* + \frac{ie}{2}[A^\nu, [F_{\mu\nu}, A^\mu]_*]_*. \tag{1.99}$$

Como $[A^\nu, [F_{\mu\nu}, A^\mu]_*]_* = -[A^\mu, [F_{\mu\nu}, A^\nu]_*]_*$, a equação anterior fica

$$\begin{aligned}
\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* &= -\frac{ie}{2}[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* - \frac{ie}{2}[A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* - \frac{ie}{2}[A^\mu, [F_{\mu\nu}, A^\nu]_*]_* \\
&= -\frac{ie}{2}([[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* + [A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* + [A^\mu, [F_{\mu\nu}, A^\nu]_*]_*).
\end{aligned} \tag{1.100}$$

Podemos interpretar a expressão entre parênteses no lado direito da equação acima como uma identidade de Jacobi não-comutativa, ou seja,

$$[[A^\mu, A^\nu]_*, F_{\mu\nu}]_* + [A^\nu, [A^\mu, F_{\mu\nu}]_*]_* + [A^\mu, [F_{\mu\nu}, A^\nu]_*]_* = 0. \tag{1.101}$$

Portanto,

$$\partial^\nu [A^\mu, F_{\mu\nu}]_* = 0. \tag{1.102}$$

Isto significa que (1.85) é apenas uma identidade e não alguma relação de vínculo envolvendo o campo de calibre A_μ.

Capítulo 2

Mecânica Quântica Não-Comutativa no espaço DFRA

2.1 A Álgebra Não-Comutativa de Snyder

A Teoria da Relatividade pode ser baseada na invariância da forma quadrática indefinida

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -x_\mu x^\mu, \tag{2.1}$$

para uma transformação de um referencial inercial para outro. Vamos usar a seguinte métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$ = (-1,+1,+1,+1).

Snyder considerou $\mathbf{x}^\mu$ como sendo operadores Hermitianos para as coordenadas do espaço-tempo de um referencial de Lorentz particular. Também considerou que os espectros das coordenadas do espaço-tempo são invariantes perante transformações de Lorentz. Esta última afirmação é claramente satisfeita pelo espaço-tempo contínuo comum. Entretanto não é a única solução. Snyder mostrou que existe um espaço-tempo invariante de Lorentz no qual existe uma unidade natural de comprimento.

Para encontrar os operadores $\mathbf{x}^\mu$ que possuem um espectro invariante de Lorentz, Snyder considerou a forma quadrática homogênea

$$\begin{aligned} -(y)^2 &= (y_0)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2 - (y_3)^2 - (y_4)^2 \\ &= -y_\mu y^\mu - (y_4)^2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde os $y's$ são considerados variáveis reais. Então os operadores $\mathbf{x}^\mu$ são definidos através dos elementos infinitesimais de grupo perante os quais (2.2) é invariante. Os operadores

$\mathbf{x}^\mu$ podem então ser escritos como

$$\mathbf{x}^\mu = ia\left(y_4 \frac{\partial}{\partial y_\mu} - y^\mu \frac{\partial}{\partial y_4} \right), \tag{2.3}$$

onde a é a unidade natural de comprimento. Estes operadores atuam sobre funções de y_μ e y_4. Os espectros de $\mathbf{x}^i$, onde $i = 1,2,3$, são discretos, mas $\mathbf{x}^0$ tem um espectro contínuo que varia de -∞ a ∞.

As transformações que deixam a forma quadrática (2.2) e y_4 invariantes são transformações de Lorentz covariantes sobre y_1, y_2, y_3 e y_0, e estas transformações induzem transformações contravariantes de Lorentz em $\mathbf{x}^\mu$.

Vamos definir operadores adicionais

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = -i\left(y^\mu \frac{\partial}{\partial y_\nu} - y^\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right), \tag{2.4}$$

que são elementos infinitesimais do grupo de Lorentz quadridimensional. Os dez operadores definidos em (2.3) e (2.4) obedecem às seguintes relações de comutação

$$[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] = ia^2 \mathbf{M}^{\mu\nu} \tag{2.5a}$$

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{x}^\lambda] = i(\mathbf{x}^\mu \eta^{\nu\lambda} - \mathbf{x}^\nu \eta^{\mu\lambda}) \tag{2.5b}$$

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}] = i(\mathbf{M}^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \mathbf{M}^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \mathbf{M}^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \mathbf{M}^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}). \tag{2.5c}$$

A simetria de Lorentz $SO(3,1)$ dada em (2.3) foi estendida para a simetria $SO(4,1)$ determinada na equação (2.5).

Como os operadores $\mathbf{x}^i$ têm espectro discreto, podemos entendê-los em termos de uma incerteza mínima não-nula nas posições. É possível [33] obter a parte espacial da álgebra de Snyder considerando-se uma álgebra generalizada de Heisenberg [34].

2.2 O Espaço DFRA

A álgebra de Doplicher-Fredenhagen-Roberts (DFR) [14], que essencialmente parte de (1) assim como do resultado do comutador triplo entre os operadores coordenadas,

$$[\mathbf{x}^\mu, [\mathbf{x}^\nu, \mathbf{x}^\rho]] = 0, \tag{2.6}$$

é baseada em princípios da Relatividade Geral (RG) e da Mecânica Quântica (MQ). Junto com (1), supõe também que

$$[\mathbf{x}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] = 0 \tag{2.7}$$

e considera-se que o espaço tem dimensões arbitrárias $D \geq 2$. Normalmente $\mathbf{x}^\mu$ e $\mathbf{p}^\nu$, onde $\mu\nu = 1, ..., D$, representam o operador posição e seu momento conjugado. A variável não-comutativa $\theta^{\mu\nu}$ representa o operador da não-comutatividade, sendo $\pi_{\mu\nu}$ seu momento conjugado. De acordo com a discussão acima, temos a álgebra

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^\mu, \mathbf{p}_\nu] &= i\delta^\mu_\nu, \\ [\theta^{\mu\nu}, \pi_{\alpha\beta}] &= i\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha$, pois a generalização do delta de Kronecker é efetuada admitindo-se que esse operador fique definido pelo seguinte determinante

$$\delta^{ij\cdots k}_{pq\cdots r} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \cdots & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \cdots & \delta^j_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \cdots & \delta^k_r \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

onde os índices assumem os valores $1, 2, 3, ..., N$. Logo,

$$\delta^{ij}{}_{kl} = \begin{vmatrix} \delta^i_k & \delta^i_l \\ \delta^j_k & \delta^j_l \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

$$\delta^{ij}{}_{kl} = \delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k.$$

A relação (1) em um espaço euclidiano com D dimensões, por exemplo, pode ser escrita como

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\,\theta^{ij} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0, \tag{2.11}$$

juntamente com a condição do comutador triplo (2.6) do espaço-tempo padrão, isto é,

$$[\mathbf{x}^\mu, \theta^{\nu\alpha}] = 0. \tag{2.12}$$

Isso implica que

$$[\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}] = 0\ , \tag{2.13}$$

que é facilmente demonstrável. Sabemos que

$$[\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}] = \theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}\theta^{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

Da primeira equação em (1), temos que

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{i}[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu]. \tag{2.15}$$

Logo, a equação (2.14) fica

$$
\begin{aligned}
[\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}] &= \frac{1}{i}[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu]\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}\frac{1}{i}[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] \\
&= \frac{1}{i}\Big((\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu - \mathbf{x}^\nu\mathbf{x}^\mu)\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}(\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu - \mathbf{x}^\nu\mathbf{x}^\mu)\Big) \\
&= \frac{1}{i}\Big(\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu\theta^{\alpha\beta} - \mathbf{x}^\nu\mathbf{x}^\mu\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu + \theta^{\alpha\beta}\mathbf{x}^\nu\mathbf{x}^\mu\Big) \\
&= \frac{1}{i}\Big([\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu, \theta^{\alpha\beta}] + [\theta^{\alpha\beta}, \mathbf{x}^\nu\mathbf{x}^\mu]\Big)
\end{aligned}
$$

Considerando as propriedades dos comutadores: $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ e $[\mathbf{BC}, \mathbf{A}] = [\mathbf{B}, \mathbf{A}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{C}, \mathbf{A}]$, obtemos

$$
[\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}] = \frac{1}{i}\Big([\mathbf{x}^\mu, \theta^{\alpha\beta}]\mathbf{x}^\nu + \mathbf{x}^\mu[\mathbf{x}^\nu, \theta^{\alpha\beta}] + [\theta^{\alpha\beta}, \mathbf{x}^\nu]\mathbf{x}^\mu + \mathbf{x}^\nu[\theta^{\alpha\beta}, \mathbf{x}^\mu]\Big).
$$

Substituindo a equação (2.12), temos que

$$
[\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}] = 0, \tag{2.16}
$$

que é exatamente a equação (2.13) e completa a álgebra DFR.

Recentemente, com o propósito de obter consistência com a Mecânica Quântica, R. Amorim [32] introduziu o momento canônico conjugado $\pi_{\mu\nu}$, supondo por simplicidade que

$$
[\mathbf{p}_\mu, \theta^{\nu\alpha}] = 0 \ , \quad [\mathbf{p}_\mu, \pi_{\nu\alpha}] = 0 \ . \tag{2.17}
$$

É bem conhecido da MQ que a identidade de Jacobi obedecida pelos operadores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, é dada por

$$
[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + [[\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = 0. \tag{2.18}
$$

Logo, fazendo a identificação: $\mathbf{A} = \mathbf{x}^\mu$, $\mathbf{B} = \mathbf{x}^\nu$ e $\mathbf{C} = \pi_{\alpha\beta}$, temos que

$$
[[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu], \pi_{\alpha\beta}] + [[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\mu] + [[\pi_{\alpha\beta}, \mathbf{x}^\mu], \mathbf{x}^\nu] = 0. \tag{2.19}
$$

Usando a primeira equação em (2.11), resulta em

$$
[i\theta^{\mu\nu}, \pi_{\alpha\beta}] + [[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\mu] - [[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\nu] = 0.
$$

Usando a segunda equação em (2.8), temos que

$$
-\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + [[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\mu] - [[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\nu] = 0
$$

$$
\Longrightarrow \ [[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\nu] - [[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\mu] = -\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}. \tag{2.20}
$$

A solução, a menos de termos triviais, é dada por

$$[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] = -\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\nu, \tag{2.21}$$

pois,

$$I = [[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\nu] - [[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}], \mathbf{x}^\mu] \tag{2.22}$$

onde

$$[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] = -\frac{i}{2}\delta^{\mu\gamma}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\gamma \tag{2.23}$$

e

$$[\mathbf{x}^\nu, \pi_{\alpha\beta}] = -\frac{i}{2}\delta^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho. \tag{2.24}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= [-\frac{i}{2}\delta^{\mu\gamma}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\gamma, \mathbf{x}^\nu] - [-\frac{i}{2}\delta^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho, \mathbf{x}^\mu] \\ &= -\frac{i}{2}(\delta^{\mu\gamma}{}_{\alpha\beta}[\mathbf{p}_\gamma, \mathbf{x}^\nu] - \delta^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta}[\mathbf{p}_\rho, \mathbf{x}^\mu]). \end{aligned}$$

Com a primeira equação em (2.8), teremos que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i}{2}(\delta^{\mu\gamma}{}_{\alpha\beta}(-i\delta^\nu_\gamma) - \delta^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta}(-i\delta^\mu_\rho)) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^{\mu\gamma}{}_{\alpha\beta}\delta^\nu_\gamma - \delta^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta}\delta^\mu_\rho). \end{aligned}$$

Considerando que $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha$, temos que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}((\delta^\mu_\alpha\delta^\gamma_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\gamma_\alpha)\delta^\nu_\gamma - (\delta^\nu_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^\rho_\alpha)\delta^\mu_\rho) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\gamma_\beta\delta^\nu_\gamma - \delta^\mu_\beta\delta^\gamma_\alpha\delta^\nu_\gamma - \delta^\nu_\alpha\delta^\rho_\beta\delta^\mu_\rho + \delta^\nu_\beta\delta^\rho_\alpha\delta^\mu_\rho) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha - \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta + \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Como $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ apresenta antissimetria em relação aos índices superiores, temos que

$$\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = -\delta^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}(\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - (-\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}) \\ &= -\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.21) é solução de (2.20).

Verifica-se que o conjunto inteiro de relações de comutação listadas acima é, de fato, consistente perante todas as identidades de Jacobi possíveis. Para recuperarmos a comutatividade do espaço-tempo, podemos construir o operador coordenada deslocado [16, 24, 25, 28, 46]

$$\mathbf{X}^\mu \equiv \mathbf{x}^\mu \,+\, \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \tag{2.25}$$

que comuta com π_{kl}, θ^{kl} e $\mathbf{X}^j$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
i).\ [\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho] &= \Big[\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \mathbf{x}^\rho + \frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\Big] \\
&= \Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big)\Big(\mathbf{x}^\rho + \frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\Big) - \Big(\mathbf{x}^\rho + \frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\Big)\Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big) \\
&= \mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\rho + \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mu\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\mathbf{x}^\rho + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma - \\
&\quad -\mathbf{x}^\rho\mathbf{x}^\mu - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\rho\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\mathbf{x}^\mu - \frac{1}{4}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu \\
&= [\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\rho] + \frac{1}{2}\Big[\mathbf{x}^\mu, \theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\Big] + \frac{1}{2}\Big[\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \mathbf{x}^\rho\Big] + \frac{1}{4}\Big[\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_\gamma\Big].
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho] &= i\theta^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\Big([\mathbf{x}^\mu, \theta^{\rho\gamma}]\mathbf{p}_\gamma + \theta^{\rho\gamma}[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{p}_\gamma]\Big) + \frac{1}{2}\Big([\theta^{\mu\nu}, \mathbf{x}^\rho]\mathbf{p}_\nu + \theta^{\mu\nu}[\mathbf{p}_\nu, \mathbf{x}^\rho]\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big([\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \theta^{\rho\gamma}]\mathbf{p}_\gamma + \theta^{\rho\gamma}[\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \mathbf{p}_\gamma]\Big).
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (2.8) e (2.12), teremos que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho] &= i\theta^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}(i\delta^\mu_\gamma) + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}(-i\delta^\rho_\nu) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(([\theta^{\mu\nu}, \theta^{\rho\gamma}]\mathbf{p}_\nu + \theta^{\mu\nu}[\mathbf{p}_\nu, \theta^{\rho\gamma}])\mathbf{p}_\gamma + \theta^{\rho\gamma}([\theta^{\mu\nu}, \mathbf{p}_\gamma]\mathbf{p}_\nu + \theta^{\mu\nu}[\mathbf{p}_\nu, \mathbf{p}_\gamma])\Big).
\end{aligned}$$

Usando a equação (2.13), a primeira equação de (2.17) e a segunda equação de (2.11),

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho] &= i\theta^{\mu\rho} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\mu} - \frac{i}{2}\theta^{\mu\rho} \\
&= \frac{i}{2}\theta^{\mu\rho} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\mu}.
\end{aligned}$$

Como o objeto da não-comutatividade é um operador tensorial antissimétrico,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho] &= \frac{i}{2}\theta^{\mu\rho} + \frac{i}{2}(-\theta^{\mu\rho}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Com este resultado, demonstramos que a construção do operador X^μ recupera a comutatividade do espaço-tempo. O uso deste operador afeta os sistemas no qual é usado onde a coordenada $\theta^{\mu\nu}$ é considerada uma contribuição da não-comutatividade.

$$\begin{aligned} ii).\ [\mathbf{X}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] &= \Big[\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \pi_{\alpha\beta}\Big] \\ &= \Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big)\pi_{\alpha\beta} - \pi_{\alpha\beta}\Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big) \\ &= \mathbf{x}^\mu\pi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\pi_{\alpha\beta} - \pi_{\alpha\beta}\mathbf{x}^\mu - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu \\ &= [\mathbf{x}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2}\Big[\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \pi_{\alpha\beta}\Big]. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.21), teremos que

$$[\mathbf{X}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] = -\frac{i}{2}\delta^{\mu\gamma}_{\ \ \alpha\beta}\mathbf{p}_\gamma + \frac{1}{2}\Big([\theta^{\mu\nu}, \pi_{\alpha\beta}]\mathbf{p}_\nu + \theta^{\mu\nu}[\mathbf{p}_\nu, \pi_{\alpha\beta}]\Big).$$

Com a equação (2.8) e a segunda equação em (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}^\mu, \pi_{\alpha\beta}] &= -\frac{i}{2}\delta^{\mu\gamma}_{\ \ \alpha\beta}\mathbf{p}_\gamma + \frac{1}{2}\Big(i\delta^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta}\mathbf{p}_\nu\Big) \\ &= -\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta}\mathbf{p}_\nu + \frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta}\mathbf{p}_\nu \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} iii).\ [\mathbf{X}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] &= \Big[\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \theta^{\alpha\beta}\Big] \\ &= \Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big)\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}\Big(\mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\Big) \\ &= \mathbf{x}^\mu\theta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\alpha\beta}\mathbf{x}^\mu - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu \\ &= [\mathbf{x}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] + \frac{1}{2}\Big[\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu, \theta^{\alpha\beta}\Big]. \end{aligned}$$

Com a equação (2.12), teremos que

$$[\mathbf{X}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\Big([\theta^{\mu\nu}, \theta^{\alpha\beta}]\mathbf{p}_\nu + \theta^{\mu\nu}[\mathbf{p}_\nu, \theta^{\alpha\beta}]\Big).$$

Usando a equação (2.13) e a primeira equação de (2.17), obtemos finalmente que

$$[\mathbf{X}^\mu, \theta^{\alpha\beta}] = 0. \tag{2.28}$$

O operador coordenada deslocado satisfaz uma relação de comutação não-trivial com objetos que dependem de $\mathbf{p}_i$, que podemos escrever

$$[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{p}_\nu] = i\delta^\mu_\nu \tag{2.29}$$

pois,

$$\begin{aligned}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}_{\nu}] &= \Big[\mathbf{x}^{\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}, \mathbf{p}_{\nu}\Big] \\ &= \Big(\mathbf{x}^{\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}\Big)\mathbf{p}_{\nu} - \mathbf{p}_{\nu}\Big(\mathbf{x}^{\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}\Big) \\ &= \mathbf{x}^{\mu}\mathbf{p}_{\nu} + \frac{1}{2}\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}\mathbf{p}_{\nu} - \mathbf{p}_{\nu}\mathbf{x}^{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{\nu}\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma} \\ &= [\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{p}_{\nu}] + \frac{1}{2}\Big[\theta^{\mu\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}, \mathbf{p}_{\nu}\Big],\end{aligned}$$

e usando a primeira equação de (2.8),

$$[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\Big([\theta^{\mu\gamma}, \mathbf{p}_{\nu}]\mathbf{p}_{\gamma} + \theta^{\mu\gamma}[\mathbf{p}_{\gamma}, \mathbf{p}_{\nu}]\Big).$$

Usando a segunda equação de (2.11) e a primeira equação de (2.17), obtemos

$$[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}.$$

2.2.1 O Espaço de Hilbert

Com o intuito de introduzir uma base contínua para um espaço de Hilbert geral com o auxílio das relações de comutação acima, é necessário primeiramente encontrar um conjunto máximo de operadores que comutam entre si. Por exemplo, vamos escolher uma base dos momentos formada pelos autovetores de $\mathbf{p}$ e π. Também pode ser introduzida uma base formada pelos autovetores de $\mathbf{X}$ e θ, entre outras possibilidades. Observamos que não é possível formar uma base que envolva mais de uma componente do operador posição $\mathbf{x}$, uma vez que suas componentes não comutam.

Para esclarecer, vamos exibir as relações fundamentais que envolvem essas bases, isto é, as relações de completeza, ortogonalidade e autovalores

$$\mathbf{X}^i|X',\theta'>=X'^i|X',\theta'> \quad , \qquad \theta^{ij}|X',\theta'>=\theta'^{ij}|X',\theta'> \ , \tag{2.30}$$

$$\mathbf{p}_i|p',\pi'>=p'_i|p',\pi'> \quad , \qquad \pi_{ij}|p',\pi'>=\pi'_{ij}|p',\pi'> \ , \tag{2.31}$$

$$<X',\theta'|X",\theta" \ >=\delta^D(X'-X")\delta^{\frac{D(D-1)}{2}}(\theta'-\theta") \ , \tag{2.32}$$

$$<p',\pi'|p",\pi" \ >=\delta^D(p'-p")\delta^{\frac{D(D-1)}{2}}(\pi'-\pi") \ , \tag{2.33}$$

$$\int d^DX'\, d^{\frac{D(D-1)}{2}}\theta'|X',\theta'><X',\theta'|=\mathbf{1} \ , \tag{2.34}$$

$$\int d^Dp'\, d^{\frac{D(D-1)}{2}}\pi'|p',\pi'><p',\pi'|=\mathbf{1} \ . \tag{2.35}$$

Note que a dimensão D representa as coordenadas espaciais e $\frac{D(D-1)}{2}$ as coordenadas θ. Isso pode ser visto claramente das equações (2.32) até (2.35).

As representações dos operadores nessas bases podem ser obtidas em uma maneira usual. Por exemplo, as relações de comutação (2.8) até (2.29) e as relações de autovalores acima, a menos de termos triviais, resultam em

$$\begin{aligned} <X',\theta'|\mathbf{p}_i|X",\theta" \ > &= \ <X',\theta'|-i\frac{\partial}{\partial X^i}|X",\theta" \ > \\ &= -i\frac{\partial}{\partial X'^i}<X',\theta'|X",\theta" \ > \\ &= -i\frac{\partial}{\partial X'^i}\delta^D(X'-X")\delta^{\frac{D(D-1)}{2}}(\theta'-\theta") \end{aligned} \tag{2.36}$$

e

$$<X',\theta'|\pi_{ij}|X",\theta" \ > \ = \ -i\delta^D(X'-X")\frac{\partial}{\partial\theta'^{ij}}\delta^{\frac{D(D-1)}{2}}(\theta'-\theta") \ . \tag{2.37}$$

O operador π, que obedece as equações (2.8), (2.17), (2.21) e (2.27), pode ser dado por

$$\pi_{ij}=-i\frac{\partial}{\partial\theta^{ij}}. \tag{2.38}$$

As transformações de uma base para a outra são realizadas pela transformada de Fourier estendida. Podemos relacionar essas transformações com a onda plana através de

$$< X', \theta' | p", \pi" >= N \exp(ip" X' + i\pi" \theta') \ , \tag{2.39}$$

onde os produtos internos estão representados em uma maneira compacta. Por exemplo,

$$p" X' + \pi" \theta' = p"_i X'^i + \frac{1}{2} \pi"_{ij} \theta'^{ij} \ . \tag{2.40}$$

Antes de discutir qualquer dinâmica, parece interessante estudarmos os geradores do grupo de rotações $SO(D)$. Sem considerar o setor de spin, vemos que o operador momento angular usual

$$\mathbf{l}^{ij} = \mathbf{x}^i \, \mathbf{p}^j \ - \ \mathbf{x}^j \ \mathbf{p}^i \tag{2.41}$$

não completa a álgebra devido a (2.11). E temos que

$$[\mathbf{l}^{ij}, \mathbf{l}^{kl}] \ = \ i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} \ - \ i\theta^{il}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^i + i\theta^{ik}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^j - i\theta^{jk}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i, \tag{2.42}$$

onde a demonstração encontra-se no Apêndice B.

Vale ressaltar que as componentes de $\mathbf{l}^{ij}$ não são os geradores do grupo SO(D) nesse espaço de Hilbert estendido. Pelo contrário, o operador

$$\mathbf{L}^{ij} = \mathbf{X}^i \mathbf{p}^j - \mathbf{X}^j \mathbf{p}^i \ , \tag{2.43}$$

completa a álgebra $SO(D)$

$$[\mathbf{L}^{ij}, \mathbf{L}^{kl}] = i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li}, \tag{2.44}$$

cujo cálculo encontra-se no Apêndice B.

Para atuar no setor (θ, π), o operador momento angular $\mathbf{L}^{ij}$ tem que ser generalizado para o operador momento angular total

$$\mathbf{J}^{ij} = \mathbf{L}^{ij} - \theta^{il} {\pi_l}^j + \theta^{jl} {\pi_l}^i \ , \tag{2.45}$$

onde demonstramos no apêndice B que

$$[\mathbf{J}^{ij}, \mathbf{J}^{kl}] = i\delta^{il}\mathbf{J}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{J}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{J}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{J}^{li} \ . \tag{2.46}$$

Podemos observar que o operador momento angular total $\mathbf{J}^{ij}$ gera rotações em todos os setores do espaço de Hilbert, ou seja,

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{X}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}\,[\mathbf{X}^i,\mathbf{J}^{kl}] = \epsilon^{ik}\mathbf{X}_k\ , && (2.47a)\\
ii).\ \delta\mathbf{p}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}\,[\mathbf{p}^i,\mathbf{J}^{kl}] = \epsilon^{ik}\mathbf{p}_k\ , && (2.47b)\\
iii).\ \delta\theta^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}\,[\theta^{ij},\mathbf{J}^{kl}] = \epsilon^{ik}\theta_k^{\ j} + \epsilon^{jk}\theta^i_{\ k}\ , && (2.47c)\\
iv).\ \delta\pi^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}\,[\pi^{ij},\mathbf{J}^{kl}] = \epsilon^{ik}\pi_k^{\ j} + \epsilon^{jk}\pi^i_{\ k}\ , && (2.47d)\\
v).\ \delta\mathbf{x}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}\,[\mathbf{x}^i,\mathbf{J}^{kl}] = \epsilon^{ik}\mathbf{x}_k\ , && (2.47e)
\end{aligned}
$$

onde a demonstração de cada equação encontra-se no Apêndice B.

Podemos observar que na MQNC usual, onde os objetos da não-comutatividade são parâmetros ou onde o operador momento angular não foi generalizado, $\mathbf{X}$ não se transforma como um operador vetorial perante $SO(D)$ [16, 24, 25, 28, 46]. A consistência das transformações (2.47) vem do fato de que são geradas através da ação de um operador de simetria e não de operações baseadas na estrutura indicial dessas variáveis.

É oportuno mencionar que em $D = 2$ o operador $\mathbf{J}^{ij}$ reduz-se ao $\mathbf{L}^{ij}$, de acordo com o fato de que nesse caso θ ou π tem somente uma componente independente. Em $D = 3$, é possível representar θ ou π pelos três vetores e ambas as partes do operador momento angular têm o mesmo tipo de estrutura, e então o mesmo espectro. Uma adição inesperada de momento angular surge, embora o setor (θ,π) pode levar a um subespaço de Hilbert $j = 0$. Rotações unitárias são geradas por $U(\omega) = \exp(-i\omega\cdot\mathbf{J})$, enquanto que translações unitárias, por $T(\lambda,\Xi) = \exp(-i\lambda\cdot\mathbf{p} - i\Xi\cdot\pi)$.

2.2.2 O Oscilador Harmônico Não-Comutativo

Nesta seção consideraremos um oscilador harmônico com $D = 10$ dimensões no espaço DFRA onde encontramos várias possibilidades de Hamiltonianas invariantes por rotação que apresentam o limite comutativo próprio [16, 17, 25, 26].

A expressão, bem conhecida, que representa a Hamiltoniana do oscilador harmônico, pode ser escrita como

$$
\mathbf{H}_0 = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2\ , \qquad (2.48)
$$

uma vez que $\mathbf{X}^i$ comuta com $\mathbf{X}^j$, satisfaz a relação canônica (2.29) e se transforma de acordo com (2.47a). Com esses resultados, podemos construir os operadores de criação e aniquilação da maneira usual,

$$\mathbf{A}^i = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\Big(\mathbf{X}^i + \frac{i\mathbf{p}^i}{m\omega}\Big) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}^{\dagger i} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\Big(\mathbf{X}^i - \frac{i\mathbf{p}^i}{m\omega}\Big) \ , \tag{2.49}$$

onde $\mathbf{A}^i$ e $\mathbf{A}^{\dagger\, i}$ satisfazem a álgebra do oscilador harmônico usual e $\mathbf{H}_0$ pode ser escrita em termos da soma dos operadores números $\mathbf{N}^i = \mathbf{A}^{\dagger i}\mathbf{A}^i$, que tem o mesmo espectro e as mesmas degenerescências quando comparado com a Mecânica Quântica comum [47].

O setor (θ, π), no entanto, não é modificado por qualquer nova dinâmica se $\mathbf{H}_0$ representa a Hamiltoniana total. Como o oscilador harmônico descreve um sistema próximo a uma configuração de equilíbrio, parece interessante também adicionar à (2.48) um novo termo

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{1}{2\Lambda}\pi^2 + \frac{\Lambda\Omega^2}{2}\theta^2 \ , \tag{2.50}$$

onde Λ é um parâmetro com dimensão de $(comprimento)^{-3}$ e Ω é uma frequência qualquer. Ambas as Hamiltonianas podem ser simultaneamente diagonalizadas, ou seja, separada em setores, uma vez que elas comutam entre si. Portanto, os estados da Hamiltoniana total serão formados pelo produto direto dos autoestados da Hamiltoniana de cada setor.

Os operadores de criação e aniquilação, considerando o setor (θ, π), são definidos, respectivamente, como

$$\mathbf{A}^{ij} = \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\Big(\theta^{ij} + \frac{i\pi^{ij}}{\Lambda\Omega}\Big) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}^{\dagger\, ij} = \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\Big(\theta^{ij} - \frac{i\pi^{ij}}{\Lambda\Omega}\Big) \ , \tag{2.51}$$

que satisfazem a álgebra do oscilador

$$[\mathbf{A}^{ij}, \mathbf{A}^{\dagger\, kl}] = \delta^{ij,kl} \ , \tag{2.52}$$

pois,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}^{ij}, \mathbf{A}^{\dagger kl}] &= \left[\sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\left(\theta^{ij} + \frac{i\pi^{ij}}{\Lambda\Omega}\right), \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\left(\theta^{kl} - \frac{i\pi^{kl}}{\Lambda\Omega}\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\left(\left(\theta^{ij} + \frac{i\pi^{ij}}{\Lambda\Omega}\right)\left(\theta^{kl} - \frac{i\pi^{kl}}{\Lambda\Omega}\right) - \left(\theta^{kl} - \frac{i\pi^{kl}}{\Lambda\Omega}\right)\left(\theta^{ij} + \frac{i\pi^{ij}}{\Lambda\Omega}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\left(\theta^{ij}\theta^{kl} - \frac{i}{\Lambda\Omega}\theta^{ij}\pi^{kl} + \frac{i}{\Lambda\Omega}\pi^{ij}\theta^{kl} + \frac{1}{(\Lambda\Omega)^2}\pi^{ij}\pi^{kl} - \right. \\
&\quad \left. -\theta^{kl}\theta^{ij} - \frac{i}{\Lambda\Omega}\theta^{kl}\pi^{ij} + \frac{i}{\Lambda\Omega}\pi^{kl}\theta^{ij} - \frac{1}{(\Lambda\Omega)^2}\pi^{kl}\pi^{ij}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\Lambda\Omega}{2}}\left([\theta^{ij}, \theta^{kl}] + \frac{i}{\Lambda\Omega}[\pi^{kl}, \theta^{ij}] + \frac{i}{\Lambda\Omega}[\pi^{ij}, \theta^{kl}] + \frac{1}{(\Lambda\Omega)^2}[\pi^{ij}, \pi^{kl}]\right)
\end{aligned}$$

Usando a equação (2.13), a segunda equação em (2.8) e o fato de que π^{ij} comuta com π^{kl}, resulta em

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}^{ij}, \mathbf{A}^{\dagger kl}] &= \frac{i}{2}(-i\delta^{ij,kl} - i\delta^{kl,ij}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta^{ij,kl} + \delta^{kl,ij}).\end{aligned}$$

Como $\delta^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$, podemos escrever que

$$\delta^{\mu\nu,\alpha\beta} = \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}$$

e

$$\begin{aligned}\delta^{\alpha\beta,\mu\nu} &= \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu} \\ &= \delta^{\mu\nu,\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Logo,

$$[\mathbf{A}^{ij}, \mathbf{A}^{\dagger kl}] = \delta^{ij,kl},$$

e podemos construir os autoestados de H_θ, associados com os números quânticos n^{ij}. Como é bem conhecido, o estado fundamental é aniquilado por $\mathbf{A}^{ij}$ e sua função de onda no setor (θ, π) é

$$< \theta' | n^{ij} = 0, t > = \Big(\frac{\Lambda\Omega}{\pi}\Big)^{\frac{D(D-1)}{8}} exp\Big[-\frac{\Lambda\Omega}{4}\theta'_{ij}\theta'^{ij}\Big]\, exp\Big[-iD(D-1)\frac{\Omega}{4}t\Big]\,. \tag{2.53}$$

No entanto, as funções de onda para os estados excitados podem ser obtidas através da aplicação do operador criação $\mathbf{A}^{\dagger\, kl}$ sobre o estado fundamental. Por outro lado, esperamos que Ω deva ser tão grande que somente o nível fundamental desse oscilador generalizado poderia ser ocupado. Isso gerará somente um deslocamento no espectro do oscilador, que é $\Delta E = \frac{D(D-1)}{4}\Omega$, e essa nova energia de vácuo gerará comportamentos inesperados.

Outra situação relacionada com (2.53) é que ela nos fornece uma maneira natural para introduzir a função peso $W(\theta)$ que aparece, no contexto das TCNC's, em [8, 12]. $W(\theta)$ é uma função normalizada necessária, por exemplo, para controlar a integração θ. Analisando o setor (θ, π), o valor esperado de qualquer função $f(\theta)$ sobre o estado fundamental é

$$\begin{aligned}< f(\theta) > &= < n^{kl} = 0, t | f(\theta) | n^{kl} = 0, t > \\ &= \Big(\frac{\Lambda\Omega}{\pi}\Big)^{\frac{D(D-1)}{4}} \int d^{\frac{D(D-1)}{2}}\theta'\; f(\theta')\, exp\Big[-\frac{\Lambda\Omega}{2}\theta'_{rs}\theta'^{rs}\Big] \\ &\equiv \int d^{\frac{D(D-1)}{2}}\theta'\, W(\theta')\, f(\theta'),\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde

$$W(\theta') \equiv \Big(\frac{\Lambda\Omega}{\pi}\Big)^{\frac{D(D-1)}{4}} exp\Big[-\frac{\Lambda\Omega}{2}\theta'_{rs}\theta'^{rs}\Big] \ , \tag{2.55}$$

e os valores esperados são dados por

$$\begin{aligned} <\mathbf{1}> &= 1 \\ <\theta^{ij}> &= 0 \\ \frac{1}{2}<\theta^{ij}\theta_{ij}> &= <\theta^2> \\ <\theta^{ij}\theta^{kl}> &= \frac{2}{D(D-1)}\delta^{ij,kl}<\theta^2>, \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde

$$<\theta^2>\equiv \frac{1}{2\,\Lambda\,\Omega}$$

e agora podemos calcular os valores esperados para os operadores coordenadas físicos. Pode-se verificar que $<\mathbf{x}^i>=<\mathbf{X}^i>=0$, mas podemos encontrar contribuições da não-comutatividade não-triviais aos valores esperados para outros operadores. Por exemplo, vemos de (2.56) e (2.25) que

$$<\mathbf{x}^2>=<\mathbf{X}^2> + \frac{2}{D}<\theta^2><\mathbf{p}^2> \ ,$$

onde $<\mathbf{X}^2>$ e $<\mathbf{p}^2>$ são os resultados da Mecânica Quântica comum para um oscilador isotrópico em um dado estado. Isso nos mostra que a não-comutatividade amplia o desvio quadrático médio para o operador coordenada físico.

Capítulo 3

Coordenadas Tensoriais na Mecânica Não-Comutativa

3.1 Vínculos no espaço DFRA

Todos os operadores introduzidos até agora pertencem à mesma álgebra e têm o mesmo nível hierárquico. A necessidade de uma invariância por rotação perante o grupo $SO(D)$ é uma consequência desse espaço de Hilbert ampliado (DFRA). A invariância por rotação, em uma teoria não-relativística, é fundamental se pretendemos descrever qualquer sistema físico de uma maneira consistente.

Nas TCNC's é possível obter a invariância $SO(D,1)$ também promovendo $\theta^{\mu\nu}$ de uma matriz constante a um operador tensorial [7-12] como fizemos no capítulo anterior, embora nessa última situação as regras são um pouco diferentes daquelas encontradas na MQNC, uma vez que em uma teoria quântica dos campos os operadores relevantes não são coordenadas, mas sim campos.

Agora que estamos familiarizados com a nova versão proposta da MQNC [32] onde os θ^{ij} são tensores no espaço de Hilbert estendido e π_{ij} são os seus momentos canonicamente conjugados, mostraremos nessa seção que uma possível teoria clássica fundamental, sob quantização, pode reproduzir a estrutura algébrica exibida no capítulo 2.

O formalismo de Dirac [48] para sistemas Hamiltonianos vinculados é usado extensivamente para esse objetivo. Como é bem conhecido, quando uma teoria apresenta um conjunto completo de vínculos de segunda classe $\Xi^a = 0$, $a = 1, 2, ..., 2N$, os parênteses de Poisson $\{A, B\}$ entre duas quantidades quaisquer do espaço de fase A e B devem ser substituídos pelos parênteses generalizados ou parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Xi^a\}\Delta^{-1}_{ab}\{\Xi^b, B\} \ , \tag{3.1}$$

tal que a evolução do sistema respeita a superfície de vínculo dada por $\Xi^a = 0$.

Em (3.1)

$$\Delta^{ab} = \{\Xi^a, \Xi^b\} \tag{3.2}$$

é a chamada matriz de vínculos e Δ^{-1}_{ab} é a sua inversa. O fato dos vínculos Ξ^a serem de segunda classe garante a existência de Δ^{ab}. Se essa matriz fosse singular, combinações lineares de Ξ^a poderiam ser de primeira classe. Para a primeira situação, o número de graus de liberdade efetivos da teoria é dado por $2\mathcal{D} - 2N$, onde $2\mathcal{D}$ é o número de variáveis do espaço de fase e $2N$ é o número de vínculos de segunda classe.

Como o espaço de fase é descrito somente por $2\mathcal{D}$ variáveis x^i, p_i, θ^{ij} e π_{ij} onde

$$2\mathcal{D} = 2D + 2\frac{D(D-1)}{2}$$

a introdução dos vínculos de segunda classe gera uma teoria vinculada quando comparada com a estrutura algébrica dada no capítulo 2. Consequentemente, parece necessário ampliar o espaço de fase para $2N$ variáveis e introduzir ao mesmo tempo $2N$ vínculos de segunda classe. Uma maneira simples de implementar esses conceitos sem destruir a simetria por rotações é ampliar o espaço de fase introduzindo um par de variáveis canônicas (Z^i, K_i), e ao mesmo tempo um conjunto de vínculos de segunda classe (Ψ^i, Φ_i).

Considerando esse conjunto de variáveis do espaço de fase, segue por construção a estrutura dos parentêses de Poisson fundamentais (não-nulos)

$$\begin{aligned} \{x^i, p_j\} &= \delta^i_j, \\ \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\} &= \delta^{ij}{}_{kl}, \\ \{Z^i, K_j\} &= \delta^i_j, \end{aligned} \tag{3.3}$$

e a estrutura de parênteses de Dirac é obtida de acordo com a forma dos vínculos de segunda classe, assunto que será discutido a seguir.

3.2 O formalismo de Dirac no espaço DFRA

Vamos supor que Z^i tem dimensão de comprimento L, como x^i. Isso implica que ambos p_i e K_i tem dimensão de L^{-1}. Como θ^{ij} e π_{ij} têm dimensão de L^2 e L^{-2} respectivamente, a expressão para os vínculos Ψ^i e Φ_i será dada por

$$\Psi^i = Z^i + \alpha x^i + \beta\theta^{ij} p_j + \gamma\theta^{ij} K_j$$

e

$$\Phi_i = K_i + \rho p_i + \sigma\pi_{ij} x^j + \lambda\pi_{ij} Z^j \ ,$$

se somente parâmetros adimensionais $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ e λ forem introduzidos e qualquer potência mais alta do que dois nas variáveis do espaço de fase for descartada. É possível exibir um grupo inteiro de parâmetros durante o cálculo do formalismo de Dirac. No final dos cálculos, os parâmetros foram escolhidos com o intuito de gerar, sob quantização, a estrutura de comutadores que aparece nas equações (2.8) até (2.21). Com essa condição, os vínculos se reduzem, nessa situação, a

$$\begin{aligned} \Psi^i &= Z^i - \frac{1}{2}\theta^{ij} p_j, \\ \Phi_i &= K_i - p_i, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e a matriz de vínculos (3.2) é dada por

$$(\Delta^{ab}) = \begin{pmatrix} \{\Psi^i, \Psi^j\} & \{\Psi^i, \Phi_j\} \\ \{\Phi_i, \Psi^j\} & \{\Phi_i, \Phi_j\} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Calcularemos os elementos da matriz de vínculos acima. O primeiro elemento da matriz é dado por

$$\begin{aligned} i).\ \ \{\Psi^i, \Psi^j\} &= \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il} p_l, Z^j - \frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} \\ &= \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il} p_l, Z^j\} + \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il} p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} \\ &= \{Z^i, Z^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il} p_l, Z^j\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il} p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\}. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^j\} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \{\Psi^i, \Psi^j\} &= \{-\frac{1}{2}\theta^{il} p_l, Z^j\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il} p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{il}\{p_l, Z^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, Z^j\} p_l + \{Z^i, p_k\}\Big(-\frac{1}{2}\theta^{jk}\Big) + p_k\{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{jk}\} - \\ &\quad -\frac{1}{2}\theta^{il}\{p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, -\frac{1}{2}\theta^{jk} p_k\} p_l. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_l, Z^j\} = 0$, $\{\theta^{il}, Z^j\} = 0$, $\{Z^i, p_k\} = 0$, $\{Z^i, \theta^{jk}\} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\{\Psi^i, \Psi^j\} &= -\frac{1}{2}\theta^{il}\{p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk}p_k\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, -\frac{1}{2}\theta^{jk}p_k\}p_l \\
&= -\frac{1}{2}\theta^{il}\Big(\{p_l, p_k\}\Big(-\frac{1}{2}\theta^{jk}\Big) + p_k\{p_l, -\frac{1}{2}\theta^{jk}\}\Big) + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, p_k\}\Big(-\frac{1}{2}\theta^{jk}\Big) + \\
&\quad + p_k\{-\frac{1}{2}\theta^{il}, -\frac{1}{2}\theta^{jk}\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_l, p_k\} = 0$, $\{p_l, \theta^{jk}\} = 0$, $\{\theta^{il}, p_k\} = 0$, $\{\theta^{il}, \theta^{jk}\} = 0$,

$$\Longrightarrow \{\Psi^i, \Psi^j\} = 0. \tag{3.7}$$

O segundo elemento da matriz é dado por

$$\begin{aligned}
ii).\ \{\Phi_i, \Phi_j\} &= \{K_i - p_i, K_j - p_j\} \\
&= \{K_i - p_i, K_j\} + \{K_i - p_i, -p_j\} \\
&= \{K_i, K_j\} + \{-p_i, K_j\} + \{K_i, -p_j\} + \{-p_i, -p_j\}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_i, K_j\} = 0, \{p_i, K_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0$,

$$\Longrightarrow \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0. \tag{3.9}$$

O terceiro elemento da matriz é dado por

$$\begin{aligned}
iii).\ \{\Psi^i, \Phi_j\} &= \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il}p_l, K_j - p_j\} \\
&= \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il}p_l, K_j\} + \{Z^i - \frac{1}{2}\theta^{il}p_l, -p_j\} \\
&= \{Z^i, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}p_l, K_j\} + \{Z^i, -p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}p_l, -p_j\}\ .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z_i, K_j\} = \delta^i_j$ e $\{Z^i, p_j\} = 0$,

$$\{\Psi^i, \Phi_j\} = \delta^i_j + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}p_l, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}p_l, -p_j\} \tag{3.11}$$

$$= \delta^i_j - \frac{1}{2}\theta^{il}\{p_l, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, K_j\}p_l - \frac{1}{2}\theta^{il}\{p_l, -p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{il}, -p_j\}p_l. \tag{3.12}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_l, K_j\} = 0$, $\{\theta^{il}, K_j\} = 0$, $\{p_l, p_j\} = 0$, $\{\theta^{il}, p_j\} = 0$,

$$\Longrightarrow \{\Psi^i, \Phi_j\} = \delta^i_j. \tag{3.13}$$

O quarto elemento da matriz é dado em função do terceiro, usando a propriedade de antissimetria dos parênteses de Poisson

$$iv). \;\; \{\Phi_i, \Psi^j\} = -\{\Psi^j, \Phi_i, \}. \tag{3.14}$$

Usando a equação (3.13), obtemos

$$\Longrightarrow \{\Phi_i, \Psi^j\} = -\delta_i^j. \tag{3.15}$$

Portanto, a matriz de vínculos (3.2) torna-se

$$(\Delta^{ab}) = \begin{pmatrix} \{\Psi^i, \Psi^j\} & \{\Psi^i, \Phi_j\} \\ \{\Phi_i, \Psi^j\} & \{\Phi_i, \Phi_j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_i^j & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

Note que (3.16) é regular mesmo se θ^{ij} for singular. Esse fato garante que o limite comutativo correto da teoria pode ser tomado.

A inversa de (3.16) é trivialmente dada por

$$(\Delta_{ab}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^{\ j} \\ \delta^i_{\ j} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

e os parênteses de Dirac envolvendo somente o conjunto original das variáveis do espaço de fase são

$$\begin{aligned} i). \; \{x^i, p_j\}_D &= \delta_j^i & ; \quad & ii). \; \{x^i, x^j\}_D = \theta^{ij} \\ iii). \; \{p_i, p_j\}_D &= 0 & ; \quad & iv). \; \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D = \delta^{ij}_{\ kl} \\ v). \; \{\theta^{ij}, \theta^{kl}\}_D &= 0 & ; \quad & vi). \; \{\pi_{ij}, \pi_{kl}\}_D = 0 \\ vii). \; \{x^i, \theta^{kl}\}_D &= 0 & ; \quad & viii). \; \{x^i, \pi_{kl}\}_D = -\frac{1}{2}\delta^{ij}_{\ kl}p_j \\ ix). \; \{p_i, \theta^{kl}\}_D &= 0 & ; \quad & x). \; \{p_i, \pi_{kl}\}_D = 0 \; . \end{aligned} \tag{3.18}$$

As demonstrações dessas relações em (3.18) encontram-se no Apêndice C.

Nas equações em (3.18), se y^A representar as variáveis do espaço de fase e $\mathbf{y}^A$ os operadores do espaço de Hilbert estendido, o procedimento de quantização de Dirac

$$\{y^A, y^B\}_D \rightarrow \frac{1}{i}[\mathbf{y}^A, \mathbf{y}^B]$$

resultará nos comutadores em (2.8) até (2.21). Por completeza, os parênteses de Dirac envolvendo Z^i e K_i são (Apêndice C),

$$
\begin{array}{rcl}
i).\ \{Z^i, K_j\}_D = 0 & ; & ii).\ \{Z^i, Z^j\}_D = 0 \\
iii).\ \{K_i, K_j\}_D = 0 & ; & iv).\ \{Z^i, x^j\}_D = -\dfrac{1}{2}\theta^{ij} \\
v).\ \{K_i, x^j\}_D = -\delta_i^j & ; & vi).\ \{Z^i, p_j\}_D = 0 \\
vii).\ \{K_i, p_j\}_D = 0 & ; & viii).\{Z^i, \theta^{kl}\}_D = 0 \\
ix).\ \{Z^i, \pi_{kl}\}_D = \dfrac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl}p_j & ; & x).\ \{K^i, \theta^{kl}\}_D = 0 \\
xi).\ \{K_i, \pi_{kl}\}_D = 0 & . &
\end{array}
\tag{3.19}
$$

As identidades de Jacobi não-triviais que envolvem os parênteses de Dirac que aparecem em (3.18) e (3.19) são dadas por

$$
\begin{aligned}
i).\ J_1 &= \{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, x^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, x^j\}_D, x^i\}_D + \{\{x^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D, \\
ii).\ J_2 &= \{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, Z^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, Z^j\}_D, x^i\}_D + \{\{Z^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D\ ,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

sendo ambas nulas.

Para demonstrar as equações (3.20) vamos considerar a identidade de Jacobi generalizada,

$$\{\{A, B\}_D, C\}_D + \{\{B, C\}_D, A\}_D + \{\{C, A\}_D, B\}_D = 0.$$

i). Fazendo $A = x^i, B = \pi_{kl}$ e $C = x^j$, temos que,

$$J_1 = \{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, x^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, x^j\}_D, x^i\}_D + \{\{x^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D.$$

Usando a equação (3.18), $\{x^i, \pi_{kl}\}_D = -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}p_q,\ \{x^i, x^j\}_D = \theta^{ij}$,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \{-\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}p_q, x^j\}_D + \{\frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}p_s, x^i\}_D + \{-\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}\{p_q, x^j\}_D + \frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}\{p_s, x^i\}_D - \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D.
\end{aligned}
$$

E com a equação (3.18), $\{x^i, p_j\}_D = \delta_j^i,\ \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D = \delta^{ij}{}_{kl}$,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}(-\delta_q^j) + \frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}(-\delta_s^i) - \delta^{ij}{}_{kl} \\
&= \frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl} - \frac{1}{2}\delta^{ji}{}_{kl} - \delta^{ij}{}_{kl} \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl} - \frac{1}{2}\delta^{ji}{}_{kl}.
\end{aligned}
$$

Como $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$, podemos escrever que,

$$\begin{aligned} \delta^{ji}{}_{kl} &= \delta^{j}_{k}\delta^{i}_{l} - \delta^{j}_{l}\delta^{i}_{k} \\ &= -(\delta^{i}_{k}\delta^{j}_{l} - \delta^{i}_{l}\delta^{j}_{k}) \\ &= -\delta^{ij}{}_{kl}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl} - \frac{1}{2}(-\delta^{ij}{}_{kl}) \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl} + \frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, x^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, x^j\}_D, x^i\}_D + \{\{x^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D = 0.$$

ii). Fazendo $A = x^i, B = \pi_{kl}$ e $C = Z^j$, temos que

$$J_2 = \{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, Z^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, Z^j\}_D, x^i\}_D + \{\{Z^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D.$$

Usando a equação (3.18), $\{x^i, \pi_{kl}\}_D = -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}p_q$ e a equação (3.19), $\{Z^i, \pi_{kl}\}_D = \frac{1}{2}\delta^{ij}{}_{kl}p_j, \{Z^i, x^j\} = -\frac{1}{2}\theta^{ij}$,

$$\begin{aligned} J_2 &= \{-\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}p_q, Z^j\}_D + \{-\frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}p_s, x^i\}_D + \{-\frac{1}{2}\theta^{ji}, \pi_{kl}\}_D \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}\{p_q, Z^j\}_D - \frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}\{p_s, x^i\}_D - \frac{1}{2}\{\theta^{ji}, \pi_{kl}\}_D. \end{aligned}$$

E com a equação (3.18), $\{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D = \delta^{ij}{}_{kl}, \{x^i, p_j\}_D = \delta^i_j$ e também com a equação (3.19), $\{Z^i, p_j\}_D = 0$, podemos escrever que,

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2}\delta^{js}{}_{kl}(-\delta^i_s) - \frac{1}{2}\delta^{ji}{}_{kl} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ji}{}_{kl} - \frac{1}{2}\delta^{ji}{}_{kl} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\{\{x^i, \pi_{kl}\}_D, Z^j\}_D + \{\{\pi_{kl}, Z^j\}_D, x^i\}_D + \{\{Z^j, x^i\}_D, \pi_{kl}\}_D = 0.$$

É claro que (3.19) é apenas um conjunto auxiliar, uma vez que devido aos vínculos (3.4), Z^i e K_i podem ser vistos como variáveis dependentes. Depois de usar os parênteses de Dirac, esses vínculos podem ser usados fortemente.

Nessa teoria clássica a coordenada deslocada, definida no capítulo anterior

$$X^i = x^i + \frac{1}{2}\theta^{ij}p_j \ , \tag{3.21}$$

que corresponde ao operador (2.25), também tem um papel fundamental. Pode-se verificar (Apêndice C) que

$$\begin{aligned} i).\ \{X^i, X^j\}_D = 0 \quad &; \quad ii).\ \{X^i, p_j\}_D = \delta^i_j \\ iii).\ \{X^i, x^j\}_D = \frac{1}{2}\theta^{ij} \quad &; \quad iv).\ \{X^i\theta^{kl}\}_D = 0 \\ v).\ \{X^i, \pi_{kl}\}_D = 0 \quad &; \quad vi).\ \{X^i, Z^j\}_D = -\frac{1}{2}\theta^{ij} \\ vii).\ \{X^i, K_j\}_D = \delta^i_j \quad &. \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3 Simetrias

O tensor momento angular

$$J^{ij} = X^i p^j - X^j p^i - \theta^{il}\pi_l{}^j + \theta^{jl}\pi_l{}^i \tag{3.23}$$

obedece a álgebra $SO(D)$ clássica, usando os parênteses de Dirac ao invés de comutadores. De fato,

$$\{J^{ij}, J^{kl}\}_D = \delta^{il}J^{kj} - \delta^{jl}J^{ki} - \delta^{ik}J^{lj} + \delta^{jk}J^{li} \ , \tag{3.24}$$

e como no caso quântico, as transformações de simetrias próprias sobre todas as variáveis do espaço de fase são geradas por (3.23). Começando com

$$\delta A = -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\{A, J^{kl}\}_D \ , \tag{3.25}$$

temos como resultado que

$$\begin{aligned} \delta X^i &= \epsilon^i{}_j X^j, \\ \delta x^i &= \epsilon^i{}_j x^j, \\ \delta p_i &= \epsilon_i{}^j p_j, \\ \delta\theta^{ij} &= \epsilon^i{}_k\theta^{kj} + \epsilon^j{}_k\theta^{ik}, \\ \delta\pi_{ij} &= \epsilon_i{}^k\pi_{kj} + \epsilon_j{}^k\pi_{ik}, \\ \delta Z^i &= \frac{1}{2}\epsilon^i{}_j\theta^{jk}p_k, \\ \delta K_i &= \epsilon_i{}^j p_j \ . \end{aligned} \tag{3.26}$$

As últimas duas equações acima também fornecem o resultado correto sobre a superfície de vínculos. Portanto, foi possível gerar toda estrutura desejada exibida no capítulo 2 usando os parênteses de Dirac e os vínculos dados em (3.4). Esses vínculos, também como os parênteses de Poisson fundamentais em (3.3), podem ser gerados pela ação de primeira ordem

$$S = \int dt\ L_{FO} \tag{3.27}$$

onde

$$L_{FO} = p \cdot \dot{x} \, + \, K \cdot \dot{Z} + \pi \cdot \dot{\theta} \, - \, \lambda_a \Xi^a - H \ . \tag{3.28}$$

As $2D$ quantidades λ_a são os multiplicadores de Lagrange introduzidos convenientemente para implementar os vínculos $\Xi^a = 0$ dados por (3.4), e H é uma Hamiltoniana. Os pontos "$\cdot$"entre as coordenadas do espaço de fase representam produtos internos. O momento canonicamente conjugado aos multiplicadores de Lagrange são vínculos primários que, quando conservados no tempo, geram vínculos secundários $\Xi^a = 0$. Uma vez que esses vínculos são de segunda classe, são automaticamente conservados pela teoria e os multiplicadores de Lagrange são determinados no processo.

A expressão geral para a Lagrangeana de primeira ordem em (3.28) mostra que a implementação dos vínculos nesse espaço ampliado é um resultado trivial, análogo ao procedimento padrão através dos multiplicadores de Lagrange. Para obter uma Lagrangeana de segunda ordem mais clara, devemos seguir o procedimento padrão e com a ajuda da Hamiltoniana, integrar sobre as variáveis de momento em (3.28).

Como explicamos anteriormente, além da introdução da referida estrutura algébrica, uma Hamiltoniana específica foi fornecida, representando um oscilador harmônico isotrópico generalizado, que contempla com dinâmica não somente às coordenadas vetoriais usuais, mas também com o setor da não-comutatividade gerado pelas quantidades tensoriais θ e π. A Hamiltoniana clássica correspondente pode ser escrita mais uma vez como

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} X^2 + \frac{1}{2\Lambda} \pi^2 + \frac{\Lambda \Omega^2}{2} \theta^2 \ , \tag{3.29}$$

que sabemos ser invariante perante rotações. Em (3.29) m é a massa, Λ é um parâmetro com dimensão de L^{-3} e ω e Ω são as frequências. Outras escolhas para a Hamiltoniana podem ser feitas sem quebrar a estrutura algébrica discutida acima.

O sistema clássico dado por (3.27), (3.28) e (3.29) representa dois osciladores isotrópicos independentes em D e $\frac{D(D-1)}{2}$ dimensões, expressos em termos das variáveis X^i, p_i, θ^{ij} e π_{ij}. A solução é elementar, mas quando se expressam os osciladores em termos de variáveis físicas x^i, p_i, θ^{ij} e π_{ij}, uma interação aparece entre eles, com equações de movimento simples. Nesse sentido, o conjunto formador das variáveis nos fornece, no espaço de fase, as coordenadas normais que desacoplam ambos osciladores.

Portanto, podemos considerar possível gerar uma estrutura algébrica de parênteses de Dirac que, quando quantizada, reproduz exatamente a álgebra de comutadores que aparece nas últimas seções. Demonstramos que a teoria apresentada é invariante perante a ação do grupo de rotação $SO(D)$ e poderia ser derivada através de um princípio variacional. Uma vez que essa estrutura foi dada, não é difícil construir uma generalização relativística de tal modelo. Os parênteses de Poisson fundamentais tornam-se

$$\begin{aligned} \{x^\mu, p_\nu\} &= \delta^\mu_\nu \\ \{\theta^{\mu\nu}, \pi_{\rho\sigma}\} &= \delta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \\ \{Z^\mu, K_\nu\} &= \delta^\mu_\nu \ , \end{aligned} \tag{3.30}$$

e os vínculos (3.4) são generalizados a

$$\begin{aligned} \Psi^\mu &= Z^\mu - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}p_\nu \\ \Phi_\mu &= K_\mu - p_\mu \ , \end{aligned} \tag{3.31}$$

gerando uma matriz de vínculo inversível

$$(\Delta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \{\Psi^\mu, \Psi^\nu\} & \{\Psi^\mu, \Phi^\nu\} \\ \{\Phi^\mu, \Psi^\nu\} & \{\Phi^\mu, \Phi^\nu\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{\mu\nu} \\ -\eta^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.32}$$

Para terminar este capítulo, podemos dizer que os parênteses de Dirac entre as variáveis do espaço de fase podem também ser generalizados de (3.18) e (3.19). A Hamiltoniana, é claro, não pode ser dada por (3.29), mas pelo menos para a partícula livre é identicamente nula, como é usual aparecer em sistemas clássicos covariantes [48]. É necessário também para um novo vínculo, que deve ser de primeira classe, gerar as transformações de reparametrização. Em uma extensão mínima do caso comutativo usual, é dada pela camada de massa

$$\chi = p^2 + m^2 = 0 \ ,$$

mas outras escolhas são possíveis, fornecendo dinâmica ao setor da não-comutatividade ou ampliando a simetria satisfeita pela ação relativística.

Capítulo 4

Simetrias Dinâmicas em Teorias Não-Comutativas

Neste capítulo, analisaremos as simetrias dinâmicas do espaço-tempo em teorias não-comutativas usando a álgebra DFRA descrita nos capítulos anteriores. Como já foi explicado, o formalismo é construído em um espaço-tempo estendido com graus de liberdade independentes associados com o objeto da não-comutatividade $\theta^{\mu\nu}$. Nessa estrutura, podemos considerar teorias que são invariantes perante o grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ ou perante sua extensão $\mathcal{P}'$, quando translações em dimensões extras são permitidas. Vamos neste capítulo usar o conhecido formalismo de Noether adaptado a tal espaço-tempo estendido $x + \theta$ [31].

Ainda neste capítulo, generalizaremos o formalismo que aparece em [32] para o caso relativístico, estudando como as simetrias podem ser implementadas dinamicamente usando a álgebra DFRA. Estudaremos a estrutura algébrica dos operadores coordenada generalizados e seus momentos conjugados. Além disso, construiremos as representações apropriadas para os geradores contidos em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, assim como para os operadores de Casimir. Algumas ações na MQNC construídas com esses operadores de Casimir serão introduzidas, e após isso investigaremos a simetria satisfeita por cada uma dessas teorias usando o procedimento de Noether.

4.1 Operadores coordenadas e suas transformações na MQNC relativística

Nas formulações usuais da MQNC, interpretadas aqui como teorias relativísticas, as coordenadas $\mathbf{x}^\mu$ e seus momentos conjugados $\mathbf{p}_\mu$ são operadores que atuam em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfazendo as relações de comutação fundamentais dadas no capítulo 2. Então, podemos definir o operador

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{L}^{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

notando que é possível gerar dinamicamente transformações infinitesimais sobre qualquer operador $\mathbf{A}$ seguindo a regra usual $\delta\mathbf{A} = i[\mathbf{A}, \mathbf{G}_1]$.

Para $\mathbf{X}^\mu$, $\mathbf{p}_\mu$ e $\mathbf{L}^{\mu\nu}$, dados em (2.25) e (2.43) , com as coordenadas do espaço-tempo, temos os seguintes resultados (Apêndice D),

$$\begin{aligned} i).\ \delta\mathbf{X}^\mu &= \omega^\mu{}_\nu \mathbf{X}^\nu, \\ ii).\ \delta\mathbf{p}_\mu &= \omega_\mu{}^\nu \mathbf{p}_\nu, \\ iii).\ \delta\mathbf{L}^{\mu\nu} &= \omega^\mu{}_\rho \mathbf{L}^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho \mathbf{L}^{\mu\rho}\ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

No entanto, as coordenadas físicas deixam de se transformar de uma maneira apropriada.

Como pode ser visto, a mesma regra aplicada sobre $\mathbf{x}^\mu$ fornece como resultado (Apêndice D),

$$iv).\ \delta\mathbf{x}^\mu = \omega^\mu{}_\nu(\mathbf{x}^\nu + \frac{1}{2}\theta^{\rho\nu}\mathbf{p}_\nu) - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}\mathbf{p}^\rho, \tag{4.3}$$

que é uma consequência de $\theta^{\mu\nu}$ não ser transformado.

É importante ressaltar que a equação (4.2) provavelmente quebrará a simetria de Lorentz em qualquer teoria. A cura para esses problemas pode ser obtida considerando $\theta^{\mu\nu}$ como um operador em $\mathcal{H}$ e também introduzindo seu momento canônico $\pi_{\mu\nu}$. O preço a ser pago é que $\theta^{\mu\nu}$ terá que ser associado com dimensões extras [7-13].

Além disso, temos que a relação de comutação

$$[\mathbf{x}^\mu, \pi_{\rho\sigma}] = -\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\mathbf{p}_\nu, \tag{4.4}$$

é necessária para a consistência algébrica perante identidades de Jacobi. A equação (4.4) completa a álgebra exibida no capítulo 2, isto é, a álgebra DFRA. Podemos então generalizar a expressão para o momento angular total, dada em (2.45).

A estrutura construída acima permite adotar [49]

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\mu - \theta^{\mu\sigma}\pi_\sigma^{\ \nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_\sigma^{\ \mu} \tag{4.5}$$

e considerar esse objeto como o gerador do grupo de Lorentz, uma vez que obedece uma álgebra apropriada (Apêndice D),

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} - i\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} + i\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu} \ . \tag{4.6}$$

Vale ressaltar que o objeto dado na equação (4.5) gera as transformações de Lorentz esperadas sobre os operadores do espaço de Hilbert. Na verdade, para $\delta\mathbf{A} = i[\mathbf{A}, \mathbf{G}_2]$, com $\mathbf{G}_2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu}$, teremos que (Apêndice D),

$$\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{x}^\mu &= \omega^\mu{}_\nu \mathbf{x}^\nu, \\
ii).\ \delta\mathbf{X}^\mu &= \omega^\mu{}_\nu \mathbf{X}^\nu, \\
iii).\delta\mathbf{p}_\mu &= \omega_\mu{}^\nu \mathbf{p}_\nu, \\
iv).\delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho \theta^{\mu\rho}, \\
v).\ \delta\pi_{\mu\nu} &= \omega_\mu{}^\rho \pi_{\rho\nu} + \omega_\nu{}^\rho \pi_{\mu\rho}, \\
vi).\ \delta\mathbf{M}^{\mu\nu} &= \omega^\mu{}_\rho \mathbf{M}^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho \mathbf{M}^{\mu\rho} \ ,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

que em princípio deveria garantir a invariância de Lorentz de uma teoria consistente. Observamos que essa construção é possível pelo fato da introdução do par canônico $\theta^{\mu\nu}$ e $\pi_{\mu\nu}$ como variáveis independentes. Esse par permite a construção de um objeto como $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ em (4.5), que gera dinamicamente as transformações dadas acima [31] e não simplesmente leva em conta a estrutura indicial das variáveis.

Ao examinarmos a estrutura descrita pela equação (4.7), vemos que o gerador de Lorentz (4.5) pode ser escrito como a soma de dois objetos que comutam entre si,

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = \mathbf{M}_1^{\mu\nu} + \mathbf{M}_2^{\mu\nu} \ ,$$

onde

$$\mathbf{M}_1^{\mu\nu} = \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\mu \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_2^{\mu\nu} = -\theta^{\mu\sigma}\pi_\sigma^{\ \nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_\sigma^{\ \mu} \ ,$$

como na adição usual de momentos angulares. Ambos operadores tem que satisfazer a álgebra de Lorentz. É possível encontrar representações convenientes que reproduzam (4.7). No setor $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ associado com $(\mathbf{X}, \mathbf{p})$, pode ser usada a representação matricial usual 4×4, $D_1(\Lambda) = (\Lambda^\mu{}_\alpha)$ tal que, por exemplo

$$\mathbf{X}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \mathbf{X}^\nu \ .$$

Para o setor de $\mathcal{H}_2$ associado com (θ, π), é possível usar a representação de produto antissimétrico 6×6,

$$D_2(\Lambda) = (\Lambda^{[\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu]}{}_{\beta}) \ ,$$

tal que, por exemplo,

$$\theta'^{\mu\nu} = \Lambda^{[\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu]}{}_{\beta}\theta^{\alpha\beta} \ .$$

A representação completa é dada por $D = D_1 \oplus D_2$. No caso infinitesimal, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ e (4.7) são reproduzidas. Existem quatro operadores invariantes de Casimir nesse contexto e eles são dados por

$$\mathbf{C}_{j_1} = \mathbf{M}_j{}^{\mu\nu}\mathbf{M}_{j_{\mu\nu}}$$

e

$$\mathbf{C}_{j_2} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{M}_j{}^{\mu\nu}\mathbf{M}_j{}^{\rho\sigma} \ ,$$

onde $j = 1, 2$. Notamos que, embora o espaço alvo tenha 10 dimensões, o grupo de simetria tem somente 6 parâmetros independentes e não os 45 parâmetros independentes do grupo de Lorentz em $D = 10$. Lembrando, esse espaço-tempo $D = 10$ compreende as quatro coordenadas do espaço-tempo e as seis coordenadas θ.

É possível implementar a simetria de Lorentz na MQNC seguindo as linhas acima, onde introduzimos uma teoria apropriada, por exemplo, dada por uma ação escalar. Sabemos, no entanto, que as partículas elementares são classificadas de acordo com os autovalores dos operadores de Casimir do grupo de Lorentz não-homogêneo. Portanto, vamos estender essa abordagem ao grupo de Poincaré $\mathcal{P}$.

Considerando os operadores apresentados aqui, podemos em princípio considerar

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu} - a^{\mu}\mathbf{p}_{\mu} + \frac{1}{2}b_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu}$$

como o gerador de algum grupo $\mathcal{P}'$, que tem o grupo de Poincaré como um subgrupo. Seguindo a mesma regra como a usada na obtenção de (4.7), com $\mathbf{G}_2$ substituída por $\mathbf{G}_3$, chegamos ao conjunto de transformações (Apêndice D),

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{X}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu} + a^{\mu}, \\
ii).\ \delta\mathbf{p}_{\mu} &= \omega_{\mu}{}^{\nu}\mathbf{p}_{\nu}, \\
iii).\ \delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + b^{\mu\nu}, \\
iv).\ \delta\pi_{\mu\nu} &= \omega_{\mu}{}^{\rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_{\nu}{}^{\rho}\pi_{\mu\rho}, \\
v).\ \delta\mathbf{M}_1^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{M}_1^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{M}_1^{\mu\rho} + a^{\mu}\mathbf{p}^{\nu} - a^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, \\
vi).\ \delta\mathbf{M}_2^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{M}_2^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{M_2}^{\mu\rho} + b^{\mu\rho}\pi_{\rho}{}^{\nu} + b^{\nu\rho}\pi^{\mu}{}_{\rho}, \\
vii).\ \delta\mathbf{x}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\mathbf{p}_{\nu}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Entretanto, observamos que há um termo inesperado na última equação em (4.8). Isso é uma consequência do operador coordenada em (2.25), que é uma combinação não-linear de operadores que atuam sobre $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.

A ação de $\mathcal{P}'$ sobre os operadores do espaço de Hilbert é em algum sentido igual a ação do grupo de Poincaré com uma translação adicional sobre o setor ($\theta^{\mu\nu}$). Todos os seus geradores completam uma álgebra perante comutação. Então $\mathcal{P}'$ é um grupo bem definido de transformações. Na verdade, a comutação de duas transformações completa uma álgebra

$$[\delta_2, \delta_1]\,\mathbf{y} = \delta_3\,\mathbf{y} \tag{4.9}$$

onde $\mathbf{y}$ representa qualquer um dos operadores que aparecem em (4.8). A regra de composição de pârametros é dada por

$$
\begin{aligned}
&\omega_3^{\mu}{}_{\nu} = \omega_1^{\mu}{}_{\alpha}\omega_2^{\alpha}{}_{\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\alpha}\omega_1^{\alpha}{}_{\nu}, \\
&a_3^{\mu} = \omega_1^{\mu}{}_{\nu}a_2^{\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\nu}a_1^{\nu}, \\
&b_3^{\mu\nu} = \omega_1^{\mu}{}_{\rho}b_2^{\rho\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\rho}b_1^{\rho\nu} - \omega_1^{\nu}{}_{\rho}b_2^{\rho\mu} + \omega_2^{\nu}{}_{\rho}b_1^{\rho\mu}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Vamos examinar a estrutura de simetria dada acima. Se considerarmos os operadores atuando somente sobre $\mathcal{H}_1$, verificamos que se transformam de maneira usual perante o grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ em $D = 4$, cujos geradores são $\mathbf{p}^{\mu}$ e $\mathbf{M}_1^{\mu\nu}$. Como é bem conhecido, ele é formado pelo produto semi-direto entre o grupo de Lorentz L em $D = 4$ e o grupo de translação T_4, e apresenta dois operadores invariantes de Casimir $\mathbf{C}_1 = \mathbf{p}^2$ e $\mathbf{C}_2 = \mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_{\mu}\mathbf{s}^{\mu}$, onde $\mathbf{s}_{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{M}_1^{\nu\rho}\mathbf{p}^{\sigma}$ é o vetor de Pauli-Lubanski. Se incluirmos em $\mathbf{M}_1$ termos associados com o spin, manteremos a classificação usual das partículas elementares baseadas nesses invariantes. Uma representação para $\mathcal{P}$ pode ser dada pela matriz 5×5

$$D_3(\Lambda, A) = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu{}_\nu & A^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

atuando em um vetor com cinco dimensões $\binom{\mathbf{X}^\mu}{1}$.

Considerando os operadores que atuam sobre $\mathcal{H}_2$, encontramos uma estrutura semelhante. Chamando o grupo de simetria correspondente de G que tem como geradores os operadores $\pi^{\mu\nu}$ e $\mathbf{M}_2^{\mu\nu}$. Como podemos verificar, $\mathbf{C}_3 = \pi^2$ e $\mathbf{C}_4 = \mathbf{M}_2^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}$ são os operadores de Casimir correspondentes. Dessa forma G pode ser visto como o produto semi-direto entre o grupo de Lorentz e o grupo de translação T_4. Uma representação possível usa a representação antissimétrica 6×6, $D_2(\Lambda)$ já discutida, e é dada pela matriz 7×7

$$D_4(\Lambda, B) = \begin{pmatrix} \Lambda^{[\mu}{}_\alpha \Lambda^{\nu]}_\beta & B^{\mu\nu} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

atuando em um vetor com sete dimensões $\binom{\theta^{\mu\nu}}{1}$. Vimos que o grupo completo $\mathcal{P}'$ é apenas o produto de $\mathcal{P}$ e G, que tem uma representação matricial 11×11 dada por

$$D_5(\Lambda, A, B) = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu{}_\nu & 0 & A^\mu \\ 0 & \Lambda^{[\mu}{}_\alpha \Lambda^{\nu]}_\beta & B^{\mu\nu} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

atuando em um vetor com 11 dimensões

$$\begin{pmatrix} X^\mu \\ \theta^{\mu\nu} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Um elemento do grupo precisa de $6 + 4 + 6$ parâmetros a serem determinados e $\mathcal{P}'$ é um subgrupo do grupo de Poincaré P_{10} em $D = 10$. Observe que um elemento de $\mathcal{P}_{10}$ precisa de 55 parâmetros a serem especificados. Aqui, no caso infinitesimal, quando A vai para a, B vai para b e $\Lambda^\mu{}_\nu$ vai para $\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, as transformações (4.8) são obtidas da ação de (4.13) definida acima. É claro que $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ e $\mathbf{C}_4$ são os operadores de Casimir de $\mathcal{P}'$.

Então, uma possível estrutura algébrica entre os operadores em $\mathcal{H}$ foi considerada e os conjuntos de transformações possíveis para esses operadores. A escolha de uma teoria específica, no entanto, vai gerar um critério exigente para selecionar entre esses conjuntos de transformações. Teremos então as simetrias dinâmicas da ação. Se a teoria considerada não for invariante perante as translações θ, mas for por transformações de

Lorentz e translações x, o conjunto de transformações de simetria sobre as coordenadas generalizadas será dado por (4.7), mas efetivamente considerando $b_{\mu\nu}$ nulo, o que implica que $\mathcal{P}'$, com essa condição, é contraído dinamicamente no grupo de Poincaré. Observe, no entanto, que $\pi_{\mu\nu}$ será ainda um operador relevante, uma vez que $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ depende da representação adotada. Um ponto importante relacionado com a ação dinâmica de $\mathcal{P}$ é que ela conserva as condições quânticas (7).

Consideraremos alguns pontos referentes a algumas ações que geram modelos para uma MQNC relativística com o intuito de derivar suas equações de movimento e exibir suas simetrias na seção 4.3.

4.2 Ações

Como já foi discutido anteriormente quando introduzimos a MQNC no espaço DFRA, as coordenadas físicas não comutam e seus autovetores não podem ser usados com o intuito de formar uma base em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Isso não ocorre com o operador coordenada deslocado $\mathbf{X}^\mu$ devido a (2.12), (2.13) e (2.26). Consequentemente, seus autovetores podem ser usados na construção de tal base. Generalizando o que foi feito em [32], é possível introduzir uma base de coordenadas $|X', \theta' >= |X' > \otimes |\theta' >$ de tal maneira que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\mu |X', \theta' > &= X'^\mu |X', \theta' > \\ \theta^{\mu\nu} |X', \theta' > &= \theta'^{\mu\nu} |X', \theta' > \end{aligned} \tag{4.14}$$

que satisfaz as relações de ortonormalidade e completeza. Nessa base em dez dimensões

$$< X', \theta' | \mathbf{p}_\mu | X", \theta" >= -i \frac{\partial}{\partial X'^\mu} \delta^4(X' - X") \delta^6(\theta' - \theta") \tag{4.15}$$

e

$$< X', \theta' | \pi_{\mu\nu} | X", \theta" >= -i \delta^4(X' - X") \frac{\partial}{\partial \theta'^{\mu\nu}} \delta^6(\theta' - \theta") \tag{4.16}$$

implicando que ambos momentos adquirem uma relação com derivadas. Podemos construir o operador π_{ij} com a forma já vista anteriormente,

$$\pi_{\mu\nu} = -i \partial_{\mu\nu}. \tag{4.17}$$

Um estado físico $|\phi>$, na base de coordenadas definida acima, será representado pela função de onda $\phi(X', \theta') =< X', \theta'|\phi>$ satisfazendo alguma equação de onda que vamos supor que pode ser derivada de uma ação, através de um princípio variacional. Como é bem conhecido, um caminho direto para a construção de uma teoria quântica livre relativística comum é impor que os estados físicos sejam aniquilados pela condição de massa na camada de massa

$$(\mathbf{p}^2 + m^2)|\phi >= 0 \tag{4.18}$$

construída com o operador de Casimir $\mathbf{C}_1 = \mathbf{p}^2$. Na representação de coordenada, isso gera a equação de Klein-Gordon. O mesmo resultado é obtido da quantização da partícula relativística clássica, cuja ação é invariante perante reparametrização [48], onde o gerador da simetria de reparametrização é o vínculo $(\mathbf{p}^2+m^2) \approx 0$. A condição (4.18) é interpretada como a que seleciona os estados físicos, que devem ser invariantes perante transformações de calibre (reparametrização). No caso não-comutativo, além de (4.18), é razoável supor também que a segunda condição

$$(\pi^2 + \Delta)|\phi >= 0 \tag{4.19}$$

deve ser imposta sobre os estados físicos, uma vez que também é um invariante e não é afetado pela evolução gerada por (4.18). Em (4.19), Δ é alguma constante com dimensão de M^4, cujo sinal e valor dependem se π é tipo-espaço, tipo-tempo ou nulo. Ambas equações permitem construir uma solução generalizada em ondas planas

$$\phi(X', \theta') \equiv< X', \theta'|\phi >\sim exp\Big(ik_\mu X'^\mu + \frac{i}{2}K_{\mu\nu}\theta'^{\mu\nu}\Big) \ ,$$

onde $k^2 + m^2 = 0$ e $K^2 + \Delta = 0$. Na representação de coordenadas dada pelas equações (4.14) até (4.16), a equação (4.18) gera apenas a equação de Klein-Gordon

$$(\Box_X - m^2)\phi(X', \theta') = 0, \tag{4.20}$$

enquanto (4.19) gera a equação suplementar

$$(\Box_\theta - \Delta)\phi(X', \theta') = 0, \tag{4.21}$$

onde

$$\Box_X = \partial^\mu\partial_\mu \ , \tag{4.22}$$

com

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X'^\mu} \ . \tag{4.23}$$

Também

$$\Box_\theta = \frac{1}{2}\partial^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu} \ , \tag{4.24}$$

com

$$\partial_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial\theta'^{\mu\nu}} \ . \tag{4.25}$$

Ambas as equações podem ser derivadas da ação

$$S \ = \int d^4 \, X' \, d^6\theta' \, \Omega(\theta') \left\{ \frac{1}{2}(\, \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2 \, \phi^2) \ - \Lambda(\Box_\theta - \Delta)\phi \right\}. \tag{4.26}$$

Em (4.26) Λ é um multiplicador de Lagrange necessário para impor a condição (4.21). $\Omega(\theta')$ pode ser visto como uma simples constante θ_0^{-6} para manter as dimensões usuais dos campos como S deve ser adimensional em unidades naturais, ou como uma função peso de paridade par como a que aparece em [7-12] usada para fazer a conexão entre o formalismo em $D = 4+6$ e o usual in $D = 4$ após a integração em θ', ou uma distribuição usada para impor condições adicionais como as que aparecem em (7) e adotadas em [14].

Devemos lembrar que a função $\Omega(\theta)$ é uma função peso invariante de Lorentz que tem a seguinte normalização

$$\int d^6 \, \theta \, \Omega(\theta) \ = \ 1 \ . \tag{4.27}$$

Em geral, é considerada como sendo uma função positiva e de paridade par de $\theta^{\mu\nu}$ tal que

$$\int d^6 \, \theta \, \Omega(\theta) \, \theta^{\mu\nu} \ = \ 0 \ . \tag{4.28}$$

Para a função peso invariante de Lorentz de paridade par, temos que

$$\int d^6 \, \theta \, \Omega(\theta) \, \theta^{\alpha\beta} \, \theta^{\mu\nu} \ = \ \frac{< \theta^2 >}{12} \, (g^{\alpha\mu} \, g^{\beta\nu} \ - \ g^{\alpha\nu} \, g^{\beta\mu}) \ , \tag{4.29}$$

onde

$$< \theta^2 > = \int d^6 \, \theta \, \Omega(\theta) \, \theta^{\mu\nu} \, \theta_{\mu\nu} \ , \tag{4.30}$$

e a função peso cai muito rápido no infinito tal que todas as integrais são bem definidas [8, 11].

Um modelo que não envolve os multiplicadores de Lagrange, mas dois dos operadores de Casimir de $\mathcal{P}'$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{p}^2$ e $\mathbf{C}_3 = \pi^2$, é dado por

$$S \ = \int d^4 \, X' \, d^6\theta' \, \Omega(\theta') \, \frac{1}{2} \Big\{ \, \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \ \frac{\lambda^2}{4} \, \partial^{\mu\nu}\phi\partial_{\mu\nu}\phi + m^2 \, \phi^2 \Big\} \ , \tag{4.31}$$

onde λ é um parâmetro com dimensão de comprimento, que tem que ser introduzido por razões dimensionais. Se ele for igualado a zero obteremos a ação de Klein-Gordon.

Na próxima seção construiremos as equações de movimento e analisaremos o teorema de Noether derivado para teorias gerais definidas no espaço $x+\theta$, e especificamente para ação (4.31), considerando $\Omega(\theta)$ como uma função bem comportada.

4.3 Equações de Movimento e Teorema de Noether

Vamos considerar a ação

$$S = \int_R d^4\,x\,d^6\theta\,\Omega(\theta)\,\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i, \partial_{\mu\nu}\phi^i, x, \theta)\ , \tag{4.32}$$

que depende de um conjunto de campos ϕ^i, das derivadas com respeito a x^μ e $\theta^{\mu\nu}$, e das coordenadas x^μ e $\theta^{\mu\nu}$. De agora em diante, usaremos x no lugar de X' e θ no lugar de θ' com o intuito de simplificar a notação. Os campos ϕ^i podem ser funções de x^μ e $\theta^{\mu\nu}$. O índice i permite tratar ϕ de uma maneira geral. Consideramos em (4.32), assim como em (4.31), o elemento de integração modificado pela introdução de $\Omega(\theta)$.

Considerando que S seja estacionária para uma variação arbitrária $\delta\phi^i$ que é nula no contorno ∂R da região de integração R, podemos escrever a equação de Euler-Lagrange como sendo

$$\Omega(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i}) - \partial_{\mu\nu}(\Omega\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\phi^i}) = 0\ . \tag{4.33}$$

Trataremos as variações δx^μ, $\delta\theta^{\mu\nu}$ das coordenadas generalizadas e $\delta\phi^i$ dos campos tal que o integrando se transforma como uma divergência total no espaço $x+\theta$, $\delta(\Omega\,\mathcal{L}) = \partial_\mu(\Omega\,S^\mu) + \partial_{\mu\nu}(\Omega\,S^{\mu\nu})$. Então o teorema de Noether garante que, na camada de massa, ou quando (4.33) for satisfeita, existe uma corrente conservada $(j^\mu, j^{\mu\nu})$ definida por

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i}\delta\phi^i + \mathcal{L}\delta x^\mu, \\ j^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\phi^i}\delta\phi^i + \mathcal{L}\delta\theta^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

tal que,

$$\Xi = \partial_\mu(\Omega\,j^\mu) + \partial_{\mu\nu}(\Omega\,j^{\mu\nu}) \tag{4.35}$$

é nulo. A carga correspondente

$$Q = \int d^3\,x\,d^6\theta\,\Omega(\theta)\,j^0\ , \tag{4.36}$$

é independente do "tempo" x^0. Pelo contrário, se lá existe uma corrente conservada como (4.34), a ação (4.32) é invariante perante as transformações de simetria correspondentes.

Isso é apenas uma extensão trivial da versão usual do teorema de Noether [31] com o intuito de incluir $\theta^{\mu\nu}$ como coordenadas independentes, também como um elemento de integração modificado devido a presença de $\Omega(\theta)$. Note que Ω não foi incluído na definição da corrente (4.34) porque é visto como parte do elemento de integração, mas está presente em (4.35), que é a divergência relevante. Também está dentro da carga (4.36) uma vez que a carga é uma quantidade integrada.

Vamos usar as equações (4.32) até (4.35) no modelo simples dado por (4.31). A equação de Euler-Lagrange resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi} &= -\,\Omega\,(\Box - m^2)\phi - \frac{\lambda^2}{2}\partial_{\mu\nu}(\Omega\,\partial^{\mu\nu}\phi)\\ &= 0 \end{aligned}\tag{4.37}$$

e (4.35) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\Xi &= \partial_\mu\Big\{\Omega\,\partial^\mu\phi\,\delta\phi + \frac{\Omega}{2}\Big(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial_{\alpha\beta}\phi\partial^{\alpha\beta}\phi + m^2\phi^2\Big)\delta x^\mu\Big\} \\ &+ \partial_{\mu\nu}\Big\{\Omega\,\lambda^2\partial^{\mu\nu}\phi\,\delta\phi + \frac{\Omega}{2}\Big(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial_{\alpha\beta}\phi\partial^{\alpha\beta}\phi + m^2\phi^2\Big)\delta\theta^{\mu\nu}\Big\}\;.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Antes de usar (4.38), observamos que a transformação

$$\delta\phi = -(a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu)\,\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(b^{\mu\nu} + 2\omega^\mu{}_\rho\theta^{\rho\nu})\,\partial_{\mu\nu}\phi\;,\tag{4.39}$$

completa uma álgebra, como em (4.9), com a mesma regra de composição definida em (4.10). A equação acima define como um campo escalar se transforma no espaço $x+\theta$ perante a ação de $\mathcal{P}'$.

Vamos agora estudar uma translação rígida (simetria global) em x, dada por

$$\begin{aligned}\delta_a x^\mu &= a^\mu,\\ \delta_a\theta^{\mu\nu} &= 0,\\ \delta_a\phi &= -a^\mu\,\partial_\mu\phi,\end{aligned}\tag{4.40}$$

onde a^μ é constante. Vemos de (4.38) e (4.40) que

$$\Xi_a = a^\mu\,\partial_\mu\phi\;\frac{\delta S}{\delta\phi}\tag{4.41}$$

é nulo na camada de massa, quando (4.37) for válida.

Para uma translação rígida em θ, temos que

$$\begin{aligned}\delta_b x^\mu &= 0,\\ \delta_b\theta^{\mu\nu} &= b^{\mu\nu},\\ \delta_b\phi &= -\frac{1}{2}b^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\phi,\end{aligned}\tag{4.42}$$

onde $b^{\mu\nu}$ é constante e podemos escrever que

$$\Xi_b = \frac{1}{2} b^{\mu\nu} \Big(\partial_{\mu\nu}\phi \, \frac{\delta S}{\delta \phi} + \mathcal{L} \partial_{\mu\nu}\Omega \Big) \; . \tag{4.43}$$

O primeiro termo no lado direito é nulo na camada de massa, mas o segundo depende da forma de Ω.

Por último, vamos considerar uma transformação de Lorentz, dada por

$$\begin{aligned} \delta_\omega x^\mu &= \omega^\mu{}_\nu x^\nu, \\ \delta_\omega \theta^{\mu\nu} &= \omega^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} + \omega^\nu_\rho \theta^{\mu\rho}, \\ \delta_\omega \phi &= -\Big(\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu + \omega^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} \partial_{\mu\nu} \Big) \, \phi, \end{aligned} \tag{4.44}$$

com $\omega^\mu{}_\nu$ constante e antissimétrico. Obtemos que

$$\Xi_\omega = \omega^\mu{}_\nu \, \frac{\delta S}{\delta \phi} (x^\nu \partial_\mu \phi + \theta^{\nu\rho} \partial_{\mu\rho}\phi) + \mathcal{L} \, \partial_{\mu\nu}\Omega \, \omega^\mu{}_\alpha \, \theta^{\alpha\nu}. \tag{4.45}$$

O primeiro termo na expressão anterior é nulo na camada de massa e o segundo também é nulo se Ω for um escalar perante as transformações de Lorentz e depende somente de θ.

Em uma teoria completa onde outras contribuições para a ação total estariam presentes, a simetria perante translações em θ poderia ser quebrada por diferentes razões, como caso da teoria de calibre $U(1)$ não-comutativa. Nessa situação $\mathcal{P}$ poderia ser o grupo de simetria da teoria completa mesmo considerando $\Omega(\theta)$ como uma constante.

Capítulo 5

Férmions e Teorias Não-Comutativas

Usando a estrutura DFRA onde o objeto da não-comutatividade $\theta^{\mu\nu}$ representa graus de liberdade independentes, explicaremos as propriedades de simetria de um espaço-tempo estendido $x+\theta$, dado pelo grupo $\mathcal{P}'$, que tem o grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ como um subgrupo. Nessa seção, usaremos a álgebra DFRA para introduzir uma equação de Dirac generalizada, onde o campo fermiônico não depende somente das coordenadas comuns, mas também de $\theta^{\mu\nu}$. A simetria dinâmica contida em tal teoria fermiônica será discutida e será mostrado que sua ação é invariante perante $\mathcal{P}'$.

Nos capítulos anteriores, vimos que a álgebra DFRA implementada em uma estrutura da MQNC [50] tem a invariância de Poincaré como simetria dinâmica [31]. É claro que isso representa uma entre as várias possibilidades de se incorporar a não-comutatividade em teorias quânticas. Vimos também que não somente as coordenadas $\mathbf{x}^\mu$ e seus momentos conjugados $\mathbf{p}_\mu$ são operadores que atuam em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, mas também $\theta^{\mu\nu}$ e seus momentos canônicos $\pi_{\mu\nu}$ são considerados como operadores que também atuam no espaço de Hilbert. A álgebra DFRA foi dada em (1), (2.8) até (2.13) e (2.21), onde todas as relações são consistentes, por construção, com todas as indentidades de Jacobi.

Como dito antes, um ponto importante é que, devido a (1), o operador $\mathbf{x}^\mu$ não pode ser usado para rotular uma possível base em $\mathcal{H}$. No entanto, como as componentes de $\mathbf{X}^\mu$ comutam, sabemos da Mecânica Quântica que seus autovalores podem ser usados para tal objetivo. Para simplificar a notação, vamos denotar neste capítulo por x e θ os autovalores de $\mathbf{X}$ e θ. Em [51], foram considerados esses pontos de forma mais detalhada e foi proposta uma maneira de construir algumas ações que representam possíveis teorias de campos nesse espaço-tempo estendido $x+\theta$. Uma delas foi dada por

$$S \,=\, -\int d^4\,x\,d^6\theta\,\Omega(\theta)\,\frac{1}{2}\Big\{\,\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{\lambda^2}{4}\,\partial^{\mu\nu}\phi\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\,\phi^2\Big\}\,, \tag{5.1}$$

onde λ já é conhecido assim como $\Omega(\theta)$, que tem o intuito de fazer a conexão entre os formalismos $D=4+6$ e $D=4$ e onde usamos as definições em (4.22) até (4.25).

A equação de Euler-Lagrange correspondente resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi} \;&=\; \Omega\,(\Box - m^2)\phi + \frac{\lambda^2}{2}\partial_{\mu\nu}(\Omega\,\partial^{\mu\nu}\phi)\\ &=\; 0\end{aligned} \tag{5.2}$$

e a ação (5.1) é invariante perante a transformação

$$\delta\phi = -(a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu)\,\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(b^{\mu\nu} + 2\omega^\mu{}_\rho\theta^{\rho\nu})\,\partial_{\mu\nu}\phi, \tag{5.3}$$

e Ω é considerado como uma constante em (5.2). Se Ω for uma função escalar de θ, a transformação acima será somente uma simetria de (5.1) (quando $b^{\mu\nu}$ é nulo) que transforma dinamicamente $\mathcal{P}'$ em $\mathcal{P}$ [51]. Observe que (5.3) completa uma álgebra, como em (4.9), com a mesma regra de composição de parâmetros definida em (4.10). A equação (5.3) define como um campo escalar se transforma no espaço $x+\theta$ perante a ação de $\mathcal{P}'$.

Vamos agora mostrar como introduzir férmions nesse espaço estendido $x+\theta$. Para alcançar esse objetivo, observe que $\mathcal{P}$ é um subgrupo do grupo de Poincaré $\mathcal{P}$'. Denotando os índices $A, B, ...$ como índices do espaço-tempo em $D=10$, $A, B, .. = 0, 1, ..., 9$, um vetor Y^A se transformaria perante $\mathcal{P}$' como

$$\delta Y^A = \omega^A{}_B Y^B + \Delta^A\;,$$

onde os 45 ω's e os 10 Δ's são parâmetros infinitesimais. Se indentificarmos os últimos seis índices $A, B, ..$ com os micro-índices $\mu\nu$, $\mu,\nu, .. = 0,1,2,3$, considerados como quantidades antissimétricas, as relações de transformação dadas acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\delta Y^\mu \;&=\; \omega^\mu{}_\nu Y^\nu + \frac{1}{2}\omega^\mu{}_{\alpha\beta}Y^{\alpha\beta} + \Delta^\mu,\\ \delta Y^{\mu\nu} \;&=\; \omega^{\mu\nu}{}_\alpha Y^\alpha + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}Y^{\alpha\beta} + \Delta^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Com essa notação, a métrica de Minkowski diagonal $D=10$ é rescrita como $\eta^{AB} = (\eta^{\mu\nu}, \eta^{\alpha\beta,\gamma\delta})$ e a álgebra de Clifford $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = -2\eta^{AB}$ como

$$\begin{aligned}\{\Gamma^\mu, \Gamma^{\alpha\beta}\} \;&=\; 0,\\ \{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} \;&=\; -2\eta^{\mu\nu},\\ \{\Gamma^{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha\beta}\} \;&=\; -2\eta^{\mu\nu,\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Essa é apenas uma maneira de se escrever as relações usuais em $D = 10$ [2]. Identificando Y^A com $(x^\mu, \frac{1}{\lambda}\theta^{\alpha\beta})$, vemos da estrutura dada acima que as transformações permitidas em $\mathcal{P}$ são essas de $\mathcal{P}$', submetidas às condições

$$\begin{aligned}
\omega^{\mu\nu}{}_{\alpha} &= \omega_{\mu\nu}{}^{\alpha} = 0, \\
\omega^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= 4\,\omega^{[\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu]}{}_{\beta}, \\
\Delta^\mu &= a^\mu, \\
\Delta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\lambda}b^{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

obviamente mantendo a identificação entre ω^{AB} e $\omega^{\mu\nu}$ quando $A = \mu$ e $B = \nu$. É claro que temos agora somente 6 ω's independentes, 10 a's e b's. Com as relações dadas acima é possível extrair a "raiz quadrada" da equação de Klein-Gordon generalizada (5.2)

$$(\Box + \lambda^2\Box_\theta - m^2)\phi = 0, \tag{5.7}$$

considerando novamente que Ω é uma constante em (5.2). Essa equação pode ser interpretada como uma relação de dispersão nesse espaço-tempo $D = 4 + 6$. Portanto, (5.7) fornece a equação de Dirac generalizada

$$\Big[i(\Gamma^\mu\partial_\mu + \frac{\lambda}{2}\Gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}) - m\Big]\psi = 0\ . \tag{5.8}$$

Vamos aplicar, pela esquerda de (5.8), o operador

$$\Big[i(\Gamma^\nu\partial_\mu + \frac{\lambda}{2}\Gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}) + m\Big]\ .$$

Depois de usar (5.5), observamos que ψ também satisfaz a equação de Klein-Gordon generalizada (5.7). A covariância da equação de Dirac generalizada (5.8) também pode ser provada. Primeiro, notamos que o operador

$$M^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\Big([\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] + [\Gamma^{\mu\alpha}, \Gamma^\nu{}_\alpha]\Big) \tag{5.9}$$

fornece a representação desejada para os geradores do $SO(1,3)$, porque não somente completa a álgebra de Lorentz (4.6), mas também satisfaz as relações de comutação

$$\begin{aligned}
&[\Gamma^\mu, M_{\alpha\beta}] = 2i\delta^\mu_{[\alpha}\Gamma_{\beta]}, \\
&[\Gamma^{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = 2i\delta^\mu_{[\alpha}\Gamma_{\beta]}{}^\nu - 2i\delta^\nu_{[\alpha}\Gamma_{\beta]}{}^\mu.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Com essas relações é possível provar que (5.8) é de fato, covariante perante as transformações de Lorentz dadas por

$$\psi(x', \theta') = exp(-\frac{i}{2}\Lambda^{\mu\nu}M_{\mu\nu})\psi(x,\theta). \tag{5.11}$$

Considerando o grupo completo $\mathcal{P}$', observamos que as transformações infinitesimais de ψ são dadas por

$$\delta\psi \;=\; -\Big[(a^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})\partial_{\mu}+\frac{1}{2}(b^{\mu\nu}+2\omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\nu\rho})\partial_{\mu\nu}+\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\Big]\psi, \tag{5.12}$$

que completa a álgebra de $\mathcal{P}$' com a mesma regra de composição dada em (4.10), que pode ser mostrada após um pouco de álgebra. Por último, podemos mostrar que aqui também existem correntes conservadas de Noether associadas com a transformação (5.12), uma vez que observamos que a equação (5.8) pode ser derivada da ação

$$S=\int d^4\,x\,d^6\theta\,\Omega(\theta)\,\bar{\psi}\Big[i(\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}\Gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta})-m\Big]\psi, \tag{5.13}$$

onde estamos considerando que $\Omega=\theta_0^{-6}$ e $\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\Gamma^0$. Primeiro, notamos que (omitindo fatores triviais θ_0^{-6}),

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^L S}{\delta\bar{\psi}} &= \Big[i(\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}\Gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta})-m\Big]\psi,\\
\frac{\delta^R S}{\delta\psi} &= -\bar{\psi}\Big[i(\Gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+\frac{\lambda}{2}\Gamma^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_{\alpha\beta})+m\Big],
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde as derivadas L e R atuam da esquerda e direita, respectivamente. A corrente $(j^{\mu},j^{\mu\nu})$, analogamente como em [53], é escrita aqui como

$$\begin{aligned}
j^{\mu} &= \frac{\partial^R\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\partial^L\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\bar{\psi}}+\mathcal{L}\delta x^{\mu},\\
j^{\mu\nu} &= \frac{\partial^R\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\psi}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\partial^L\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\bar{\psi}}+\mathcal{L}\delta\theta^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde

$$\delta\bar{\psi} \;=\; -\bar{\psi}\Big[\overleftarrow{\partial}_{\mu}(a^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})+\overleftarrow{\partial}_{\mu\nu}\frac{1}{2}(b^{\mu\nu}+2\omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\nu\rho})-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\Big]\;, \tag{5.16}$$

$\delta\psi$ é dada em (5.12), δx^{μ} e $\delta\theta^{\mu\nu}$ tem a mesma forma encontrada em (4.8). Usando esses últimos resultados, pode-se mostrar que

$$\partial_{\mu}j^{\mu}+\partial_{\mu\nu}j^{\mu\nu}=-\Big(\delta\bar{\psi}\frac{\delta^L S}{\delta\bar{\psi}}+\frac{\delta^R S}{\delta\psi}\delta\psi\Big)\;, \tag{5.17}$$

é nulo na camada de massa, provando a invariância da ação (5.13) perante $\mathcal{P}'$. Podemos concluir que $\mathcal{P}'$ pode ser contraído dinamicamente em $\mathcal{P}$, preservando a estrutura usual dos invariantes de Casimir, característica das teorias quânticas comuns.

Usando (5.17) podemos ver que existe uma carga conservada

$$Q=\int d^3x d^6\theta\, j^0\;, \tag{5.18}$$

para cada uma das transformações específicas dentro de (5.15). Realizando uma simples derivação temporal, temos que

$$\dot{Q} = -\int d^3xd^6\theta\,(\partial_i\, j^i + \partial_{\mu\nu} j^{\mu\nu})\ ,$$

é nulo como uma consequência do teorema da divergência. Considerando somente translações em x^μ, podemos escrever $j^0 = j^0_\mu\, a^\mu$, e consequentemente definir o operador momento

$$P_\mu = -\int d^3xd^6\theta j^0_\mu.$$

Analisando as translações $\theta^{\mu\nu}$ e as transformações de Lorentz, podemos derivar de uma maneira semelhante uma forma explícita para os outros geradores de $\mathcal{P}'$, aqui vamos chamá-los de $\Pi_{\mu\nu}$ e $J_{\mu\nu}$. Perante uma estrutura de parênteses apropriada e seguindo o teorema de Noether, essas cargas conservadas geram as transformações (5.12) e (5.16).

Finalmente, com esses resultados podemos dizer que foi possível introduzir férmions satisfazendo uma equação de Dirac generalizada, que é covariante perante a ação do grupo de Poincaré estendido $\mathcal{P}$'. Essa equação de Dirac foi derivada através de um princípio variacional cuja ação é dinamicamente invariante perante $\mathcal{P}$'. Isso pode justificar possíveis papéis tomados pelas teorias que envolvem não-comutatividade de uma maneira compatível com a RG. É claro que isso é apenas um pequeno passo em direção ao programa de quantização da teoria de campos nesse espaço-tempo estendido $x + \theta$, como veremos a seguir.

Capítulo 6

Campos Escalares Quânticos Complexos e a Não-Comutatividade

Ao longo dos últimos capítulos, vimos que em um formalismo de primeira quantização (MQ) $\theta^{\mu\nu}$ e seu momento canônico $\pi_{\mu\nu}$ são vistos como operadores que vivem em algum espaço de Hilbert estendido. Essa estrutura é compatível com a álgebra DFRA e ela é invariante perante um grupo de simetria de Poincaré estendido. Em um cenário de segunda quantização (TQC), reproduziremos neste capítulo os resultados obtidos em [54]. Uma forma explícita para os geradores de Poincaré estendido é apresentada e a mesma álgebra é gerada por meio de relações de Heinsenberg generalizadas. Introduziremos também um termo fonte e construiremos a solução geral para campos escalares complexos usando a técnica de função de Green. Consideraremos a "segunda quantização" do modelo discutido anteriormente [51], mostrando que a simetria de Poincaré estendida aqui é gerada por meio de relações de Heisenberg generalizadas, fornecendo a mesma álgebra exibida em [51, 54].

Exploraremos uma teoria de Klein-Gordon carregada não-comutativa descrita anteriormente nesse espaço $x+\theta$ em $D=10$ e analisaremos sua estrutura de simetria, associada com a invariância da ação perante algum grupo de Poincaré estendido ($\mathcal{P}'$). Essa estrutura de simetria também será exibida no nível da segunda quantização, construída por meio de relações de Heisenberg generalizadas. Depois disso, os campos serão mostrados como expansões em uma base de onda plana com o intuito de resolver as equações de movimento usando o formalismo de funções de Green adaptado a esse novo espaço $x+\theta$ em $D=10$.

6.1 A ação e as relações de simetria

Um ponto importante é que devido a (1), o operador $\mathbf{x}^\mu$ não pode ser usado para rotular uma base possível em $\mathcal{H}$. No entanto, como as componentes de $\mathbf{X}^\mu$ comutam, como pode ser verificado da álgebra de DFRA e das relações que dela são obtidas, seus autovalores podem ser usados para tal objetivo. Continuaremos a usar que x e θ são os autovalores de $\mathbf{X}$ e θ.

No capítulo 2, vimos que as relações (1), (2.7) até (2.17) e (2.21) nos permitiram utilizar [49] que

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\mu - \theta^{\mu\sigma}\pi_\sigma^{\ \nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_\sigma^{\ \mu}$$

é o gerador do grupo de Lorentz, onde [50]

$$\mathbf{X}^\mu = \mathbf{x}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu \ ,$$

e vimos que a álgebra correta é fechada, isto é,

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} - i\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} + i\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu} \ .$$

Os $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ geram as transformações de simetria esperadas quando atuam sobre todos os operadores no espaço de Hilbert estendido, isto é, definindo a transformação dinâmica de um operador arbitrário $\mathbf{A}$ em $\mathcal{H}$ de tal maneira que $\delta\mathbf{A} = i[\mathbf{A}, \mathbf{G}]$, onde

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu} - a^\mu \mathbf{p}_\mu + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} \ , \tag{6.1}$$

e $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, a^μ, $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$ são parâmetros infinitesimais, como já dissemos antes, e segue que

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^\mu &= \omega^\mu_{\ \nu}\mathbf{x}^\nu + a^\mu + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}p_\nu \ , && (6.2)\\
\delta\mathbf{X}^\mu &= \omega^\mu_{\ \nu}\mathbf{X}^\nu + a^\mu \ , && (6.3)\\
\delta\mathbf{p}_\mu &= \omega_\mu^{\ \nu}\mathbf{p}_\nu \ , && (6.4)\\
\delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^\mu_{\ \rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^\nu_{\ \rho}\theta^{\mu\rho} + b^{\mu\nu} \ , && (6.5)\\
\delta\pi_{\mu\nu} &= \omega_\mu^{\ \rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_\nu^{\ \rho}\pi_{\mu\rho} \ , && (6.6)\\
\delta\mathbf{M}^{\mu\nu} &= \omega^\mu_{\ \rho}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \omega^\nu_{\ \rho}\mathbf{M}^{\mu\rho} + a^\mu\mathbf{p}^\nu - a^\nu\mathbf{p}^\mu + b^{\mu\rho}\pi_\rho^{\ \nu} + b^{\nu\rho}\pi^\mu_{\ \rho} \ , && (6.7)
\end{aligned}$$

cujas demonstrações são análogas às anteriores, generalizando a ação do grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ com intuito de incluir as transformações de θ e π, isto é, obtendo $\mathcal{P}'$. As transformações de $\mathcal{P}'$ completam uma álgebra, tal que

$$[\delta_2, \delta_1]\,\mathbf{A} = \delta_3\,\mathbf{A} \ , \tag{6.8}$$

e a regra de composição de parâmetros é dada por (Apêndice E)

$$\begin{aligned}
\omega_3^{\mu}{}_{\nu} &= \omega_1^{\mu}{}_{\alpha}\omega_2^{\alpha}{}_{\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\alpha}\omega_1^{\alpha}{}_{\nu} \ , \\
a_3^{\mu} &= \omega_1^{\mu}{}_{\nu}a_2^{\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\nu}a_1^{\nu} \ , \\
b_3^{\mu\nu} &= \omega_1^{\mu}{}_{\rho}b_2^{\rho\nu} - \omega_2^{\mu}{}_{\rho}b_1^{\rho\nu} - \omega_1^{\nu}{}_{\rho}b_2^{\rho\mu} + \omega_2^{\nu}{}_{\rho}b_1^{\rho\mu} \ . \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

A estrutura de simetria exibida nas equações (6.2) até (6.7) já foi discutida anteriormente.

Nos últimos capítulos, tentamos esclarecer todos esses pontos de forma detalhada e mostramos uma maneira de construir ações representando possíveis teorias de campos nesse espaço-tempo estendido $x + \theta$. Uma dessas ações, generalizada com o intuito de permitir que os campos escalares sejam complexos, é dada por

$$S = -\int d^4 x\, d^6\theta \, \left\{ \partial^{\mu}\phi^*\partial_{\mu}\phi + \frac{\lambda^2}{4}\,\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\,\phi^*\phi \right\} \ , \qquad (6.10)$$

onde também omitimos um possível fator $\Omega(\theta)$ na medida.

Agora sabemos que a equação de Euler-Lagrange correspondente nos leva à

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \phi} &= (\Box + \lambda^2\Box_{\theta} - m^2)\phi^* \\
&= 0 \ , \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

com uma equação de movimento semelhante para ϕ. A ação (6.10) é invariante perante a transformação

$$\delta\phi = -(a^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})\,\partial_{\mu}\phi - \frac{1}{2}(b^{\mu\nu} + 2\omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu})\,\partial_{\mu\nu}\phi \ . \qquad (6.12)$$

Além disso, também temos a transformação de fase

$$\delta\phi = -i\alpha\,\phi \ , \qquad (6.13)$$

com expressões semelhante para ϕ^*, obtida de (6.12) e (6.13), por conjugação complexa. Observamos que (6.4) completa uma álgebra, como em (6.8), com a mesma regra de composição de parâmetros definida em (6.9). A equação (6.12), que define como um campo escalar carregado, se transforma no espaço $x+\theta$ perante $\mathcal{P}'$. A transformação subalgébrica gerada por (6.5) é Abeliana. Embora poderia ter sido diretamente generalizada para uma configuração mais geral.

Associada com essas transformações de simetria, podemos definir as correntes conservadas [51] como sendo

$$\begin{aligned}
j^{\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi}\delta\phi + \delta\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi^*} + \mathcal{L}\delta x^{\mu} \ , \\
j^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\phi}\delta\phi + \delta\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu\nu}\phi^*} + \mathcal{L}\delta\theta^{\mu\nu} \ . \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

Na verdade, usando (6.4) e (6.5), bem como (6.3) e (6.5), podemos mostrar, depois de algum trabalho algébrico, que

$$\partial_\mu j^\mu + \partial_{\mu\nu} j^{\mu\nu} = -\frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi - \delta\phi^* \frac{\delta S}{\delta\phi^*} \ . \tag{6.15}$$

As expressões acima, como dissemos anteriormente, nos permitiram derivar a carga específica

$$Q = -\int d^3x d^6\theta \, j^0 \ , \tag{6.16}$$

para cada tipo de simetria conservada em (6.4) e (6.5), uma vez que

$$\dot{Q} = \int d^3x d^6\theta \, (\partial_i j^i + \frac{1}{2}\partial_{\mu\nu} j^{\mu\nu}) \tag{6.17}$$

é nula, como uma consequência do teorema da divergência nesse espaço estendido (x, θ). Vamos considerar cada simetria específica em (6.4) e (6.5). Para translações usuais em x, podemos escrever $j^0 = j^0_\mu a^\mu$, e então podemos definir o momento total

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\int d^3x d^6\theta \, j^0_\mu \\ &= \int d^3x d^6\theta \, (\dot{\phi}^* \partial_\mu \phi + \dot{\phi}\partial_\mu \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_\mu) \ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Fazendo $\mu = 0$ na primeira equação em (6.14), resulta em

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi}\delta\phi + \delta\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^*} + \mathcal{L}\delta x^0 \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi + \delta\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} + \mathcal{L}\delta x^0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Substituindo a equação (6.24) (mais a frente) em (6.19), temos que

$$j^0 = \dot{\phi}^* \delta\phi + \delta\phi^* \dot{\phi} + \mathcal{L}\delta x^0.$$

Como podemos escrever $j^0 = j^0_\mu a^\mu$, teremos que

$$\dot{\phi}^* \delta\phi + \delta\phi^* \dot{\phi} + \mathcal{L}\delta x^0 = j^0_\mu x^\mu.$$

Donde se conclui que

$$j^0_\mu = -\dot{\phi}^* \partial_\mu \phi - \dot{\phi}\partial_\mu \phi^* + \mathcal{L}\delta^0_\mu.$$

Substituindo a equação (6.20) na primeira equação de (6.18), obtemos

$$P_\mu = \int d^3x d^6\theta (\dot{\phi}^* \partial_\mu \phi + \dot{\phi}\partial_\mu \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_\mu).$$

Observamos que, para translações em θ, podemos escrever que $j^0 = j^0_{\mu\nu} b^{\mu\nu}$, e consequentemente,

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &= -\int d^3x d^6\theta \, j^0_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x d^6\theta \, (\dot{\phi}^* \partial_{\mu\nu}\phi + \dot{\phi}\partial_{\mu\nu}\phi^*) \ . \end{aligned} \tag{6.20}$$

De uma maneira semelhante, definimos a carga de Lorentz. Usando o operador

$$\Delta_{\mu\nu} = x_{[\mu}\partial_{\nu]} + \theta_{[\mu}{}^{\alpha}\partial_{\nu]\alpha} \tag{6.21}$$

e definindo $j^0 = \bar{j}^0_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= -\int d^3x d^6\theta \, \bar{j}^0_{\mu\nu} \\ &= \int d^3x d^6\theta \, (\dot{\phi}^* \Delta_{\nu\mu}\phi + \dot{\phi}\Delta_{\nu\mu}\phi^* - \mathcal{L}\delta^0_{[\mu}x_{\nu]}) \ . \end{aligned} \tag{6.22}$$

Por último, para a simetria dada por (6.5), podemos escrever a carga $U(1)$ como

$$\mathcal{Q} = i\int d^3x d^6\theta \, (\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*) \ . \tag{6.23}$$

Vamos agora mostrar como essas cargas geram as transformações de campo apropriadas (e dinâmicas) em um cenário quântico, como as relações de Heisenberg generalizadas. Para começar a quantização de tal teoria, podemos definir, como de costume, os momentos do campo

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \ , \\ \pi^* &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \ , \end{aligned} \tag{6.24}$$

satisfazendo os comutadores em tempos iguais não-nulos (daqui em diante os comutadores serão em tempos iguais)

$$\begin{aligned} [\pi(x,\theta), \phi(x',\theta')] &= -i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta') \ , \\ [\pi^*(x,\theta), \phi^*(x',\theta')] &= -i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta') \ . \end{aligned} \tag{6.25}$$

A nossa estratégia será apenas generalizar a teoria de campos usual e reescrever as cargas (6.18) até (6.23) eliminando as derivadas temporais dos campos em favor das de momentos dos campos. Depois disso, usaremos (6.25) para gerar dinamicamente as operações de simetria. Nesse espírito, de acordo com (6.18) e (6.24), a translação espacial é gerada por

$$P_i = \int d^3x d^6\theta \left(\pi\partial_i\phi + \pi^*\partial_i\phi^*\right) \ . \tag{6.26}$$

Com efeito, substituindo a equação (6.24) em (6.18), temos que

$$P_\mu = \int d^3x d^6\theta (\pi \partial_\mu \phi + \pi^* \partial_\mu \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_\mu).$$

Considerando apenas o gerador de translação espacial, ou seja, $\mu = i \neq 0$,

$$\begin{aligned} P_i &= \int d^3x d^6\theta (\pi \partial_i \phi + \pi^* \partial_i \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_i) \\ &= \int d^3x d^6\theta (\pi \partial_i \phi + \pi^* \partial_i \phi^*). \end{aligned}$$

Podemos verificar (Apêndice E), usando a equação (6.25), que

$$[P_i, \mathcal{Y}(x,\theta)] = -i\partial_i \mathcal{Y}(x,\theta) \ , \tag{6.27}$$

onde $\mathcal{Y}$ representa ϕ, ϕ^*, π ou π^*.

É importante ressaltar que a dinâmica é gerada por

$$P_0 = \int d^3x d^6\theta \left(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi \right) \tag{6.28}$$

concordando com (6.18) e (6.24).

Com efeito, substituindo a equação (6.24) em (6.18), temos que

$$P_\mu = \int d^3x d^6\theta (\pi \partial_\mu \phi + \pi^* \partial_\mu \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_\mu).$$

Como queremos obter o gerador da dinâmica, iremos fazer $\mu = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} P_0 &= \int d^3x d^6\theta (\pi \partial_0 \phi + \pi^* \partial_0 \phi^* - \mathcal{L}\delta^0_0) \\ &= \int d^3x d^6\theta \, (\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Substituindo a equação (6.24) em (6.29), teremos que

$$P_0 = \int d^3x d^6\theta \, (\pi\pi^* + \pi^*\pi - \mathcal{L}).$$

Considerando a ação (6.10), temos que a Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi - m^2\phi^*\phi.$$

Logo, a equação (6.29) fica

$$P_0 = \int d^3x d^6\theta (\pi\pi^* + \pi^*\pi + \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi).$$

Como $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} P_0 &= \int d^3x d^6\theta(\pi\pi^* + \pi^*\pi - \partial^0\phi^*\partial_0\phi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\ &= \int d^3x d^6\theta(\pi\pi^* + \pi^*\pi - \dot{\phi}^*\dot{\phi} + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi). \end{aligned}$$

Substituindo a equação (6.24), temos que

$$\begin{aligned} P_0 &= \int d^3x d^6\theta(\pi\pi^* + \pi^*\pi - \pi\pi^* + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\ &= \int d^3x d^6\theta(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi). \end{aligned}$$

Com a Lagrangeana dada em (6.10), temos que

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\nu}\phi)} = \frac{\lambda^2}{4}\,\partial_{\mu\nu}\phi^*,$$

$$\pi^*_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\nu}\phi^*)} = \frac{\lambda^2}{4}\,\partial_{\mu\nu}\phi.$$

Esses são os momentos conjugados no espaço θ, os momentos θ. Junto com π e π^*, temos o espaço de momentos completo.

Vamos agora convenientemente considerar que, classicamente

$$\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi \geq 0$$

para assegurar que a Hamiltoniana $H = P_0$ é definida como sendo positiva. Essa condição também pode ser escrita como

$$\pi^{\mu\nu}\pi^*_{\mu\nu} \geq 0\ ,$$

uma vez que sempre temos um expoente par em λ. Usando os comutadores fundamentais (6.25), as equações de movimento (6.11) e as definições (6.24), é possível provar (Apêndice E) a relação de Heisenberg

$$[P_0, \mathcal{Y}(x,\theta)] = -i\partial_0\mathcal{Y}(x,\theta)\ . \tag{6.30}$$

Observamos que as translações em θ, concordando com (6.20) e (6.24), são geradas por

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^3x d^6\theta\left(\pi\partial_{\mu\nu}\phi + \pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*\right)\ . \tag{6.31}$$

Substituindo a equação (6.24) em (6.20), temos que

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^3x d^6\theta(\pi\partial_{\mu\nu}\phi + \pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*).$$

Agora que obtivemos a equação (6.31), obtemos (Apêndice E) a partir da equação (6.25) que

$$[P_{\mu\nu}, \mathcal{Y}(x,\theta)] = -i\partial_{\mu\nu}\mathcal{Y}(x,\theta) \ . \tag{6.32}$$

As transformações de Lorentz são geradas por (6.22) de uma maneira semelhante. O gerador de rotações espaciais é dado por

$$M_{ij} = \int d^3x d^6\theta \left(\pi\Delta_{ji}\phi + \pi^*\Delta_{ji}\phi^*\right) \ . \tag{6.33}$$

Fazendo $\mu = i$ e $\nu = j$ em (6.22), temos que

$$M_{ij} = \int d^3x d^6\theta \, (\dot{\phi}^*\Delta_{ji}\phi + \dot{\phi}\Delta_{ji}\phi^* - \mathcal{L}\delta^0_{[i}x_{j]}) \ . \tag{6.34}$$

Substituindo a equação (6.24), temos que

$$M_{ij} = \int d^3x d^6\theta \, (\pi\Delta_{ji}\phi + \pi^*\Delta_{ji}\phi^* - \mathcal{L}\delta^0_{[i}x_{j]}) \ . \tag{6.35}$$

Como M_{ij} é o gerador de rotações espaciais, ou seja, $i \neq 0$. Logo, $\delta^0_{[i}x_{j]} = 0$. Então

$$M_{ij} = \int d^3x d^6\theta(\pi\Delta_{ji}\phi + \pi^*\Delta_{ji}\phi^*).$$

Os "boosts" serão gerados por

$$\begin{aligned} M_{0i} \ = \ & \frac{1}{2}\int d^3x d^6\theta \Big\{\pi^*\pi x_i - x_0\left(\pi\partial_i\phi + \pi^*\partial_i\phi^*\right) + \pi\left(2\theta_{[i}{}^{\gamma}\partial_{0]\gamma} - x_0\partial_i\right)\phi + \\ & + \pi^*\left(2\theta_{[i}{}^{\gamma}\partial_{0]\gamma} - x_0\partial_i\right)\phi^* + \left(\partial_j\phi^*\partial_j\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi\right)x_i\Big\} \ . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Pode-se verificar (Apêndice E), de uma maneira direta a partir de (6.33) e de uma maneira indireta a partir de (6.36), que

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{Y}(x,\theta)] = i\Delta_{\mu\nu}\mathcal{Y}(x,\theta) \ , \tag{6.37}$$

para qualquer quantidade dinâmica $\mathcal{Y}$, onde $\Delta_{\mu\nu}$ foi definido em (6.21).

Por último, podemos reescrever (6.23) como

$$\mathcal{Q} = i\int d^3x d^6\theta \left(\pi\phi - \pi^*\phi^*\right) \ , \tag{6.38}$$

gerando (6.5) e sua conjugada, e expressões semelhantes para π e π^*.

Substituindo a equação (6.24) em (6.23), temos que

$$Q = i\int d^3x d^6\theta(\pi\phi - \pi^*\phi^*).$$

As transformações em $\mathcal{P}$' e as de calibre podem ser geradas pela ação do operador

$$G = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - a^{\mu}P_{\mu} + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}P_{\mu\nu} - \alpha\mathcal{Q} \tag{6.39}$$

sobre os campos complexos e seus momentos, usando as relações de comutação canônicas (6.25). Desta forma, as transformações em $\mathcal{P}$' e as de calibre são geradas como relações de Heisenberg generalizadas. Esse é um resultado que mostra a consistência do formalismo de DFRA. Além disso, também existem quatro operadores de Casimir definidos com os operadores dados acima, com a mesma forma que aqueles anteriormente definidos no cenário da primeira quantização. Então a estrutura exibida acima é muito semelhante a usual encontrada em campos escalares complexos quânticos comuns. O nosso próximo passo será expandir os campos e momentos em modos, resultando também alguma outra prescrição, para definir o espaço de Fock relevante, o espectro, as funções de Green e toda estrutura básica relacionada aos campos bosônicos livres.

6.2 Ondas planas e funções de Green

Com o intuito de estudar um pouco mais a estrutura descrita nas últimas seções, iremos reescrever a ação de Klein-Gordon carregada generalizada (6.10) com termos de fonte como

$$S \,=\, -\int d^4x d^6\theta \Big\{\partial^{\mu}\phi^*\partial_{\mu}\phi \,+\, \frac{\lambda^2}{4}\,\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi \,+\, m^2\,\phi^*\phi \,+\, J^*\phi \,+\, J\phi^*\Big\}\,. \tag{6.40}$$

Variando essa ação, obtemos as equações de movimento correspondentes, dadas por

$$\Big(\Box + \lambda^2\Box_{\theta} - m^2\Big)\phi(x,\theta) \,=\, J(x,\theta), \tag{6.41}$$

assim como suas conjugadas complexas. Do estudo de equações diferenciais, sabemos que a solução formal pode ser escrita como

$$\phi(x,\theta) \,=\, \phi_{J=0}(x,\theta) \,+\, \phi_J(x,\theta)\,, \tag{6.42}$$

onde $\phi_{J=0}(x,\theta)$ é a solução sem fontes e $\phi_J(x,\theta)$ é a a solução com fontes, ou seja, $J \neq 0$.

A função de Green para (6.41) satisfaz a seguinte relação

$$(\Box + \lambda^2\Box_{\theta} - m^2)\,G(x-x',\theta-\theta') = \,\delta^4(x-x')\,\delta^6(\theta-\theta')\,, \tag{6.43}$$

onde $\delta^4(x-x')$ e $\delta^6(\theta-\theta')$ são as funções delta de Dirac em x e θ, respectivamente, definidas por

$$\delta^4(x-x') \,=\, \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4K_{(1)}\,e^{iK_{(1)}\cdot(x-x')}\,, \tag{6.44}$$

$$\delta^6(\theta-\theta') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^6}\int d^6K_{(2)}\, e^{iK_{(2)}\cdot(\theta-\theta')}\;. \tag{6.45}$$

Vamos definir, em $D=10$, os seguintes objetos

$$X \;=\; (x^\mu, \frac{1}{\lambda}\,\theta^{\mu\nu}) \tag{6.46}$$

e

$$K \;=\; (K^\mu_{(1)}, \lambda\, K^{\mu\nu}_{(2)})\;, \tag{6.47}$$

onde λ já é um parâmetro conhecido anteriormente. Podemos escrever, a partir de (6.46) e (6.47), que

$$K\cdot X = K_{(1)\mu}\, x^\mu + \frac{1}{2}K_{(2)\mu\nu}\,\theta^{\mu\nu}\;,$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ foi introduzido com o intuito de eliminar termos repetidos. Vamos considerar que

$$d^{10}K = d^4K_{(1)}d^6K_{(2)}$$

e

$$d^{10}X = d^4x\, d^6\theta\;.$$

Então, a partir de (6.41) e (6.43), temos que a solução formal para o caso em que $J\neq 0$ pode ser escrita como

$$\phi_J(X) \;=\; \int d^{10}X'G(X-X')\,J(X')\;. \tag{6.48}$$

Precisamos encontrar agora uma forma explícita para a função de Green. Para fazermos isso iremos expandir $G(X-X')$ em termos de ondas planas. Logo,

$$G(X-X') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{10}}\int d^{10}K\;\tilde{G}(K)\,e^{iK\cdot(X-X')}\;. \tag{6.49}$$

Substituindo (6.44), (6.45) e (6.49) em (6.43), obtemos

$$\Big(\Box+\lambda^2\Box_\theta-m^2\Big)\int\frac{d^{10}K}{(2\pi)^{10}}\,\tilde{G}(K)\,e^{iK\cdot(x-x')} \;=\; \int\frac{d^{10}K}{(2\pi)^{10}}\,e^{iK\cdot(x-x')} \tag{6.50}$$

Após a aplicação do operador $\Big(\Box+\lambda^2\Box_\theta-m^2\Big)$ encontramos a solução para $\tilde{G}(K)$, que seria alguma regularização de

$$\tilde{G}(K) \;=\; -\,\frac{1}{K^2\,+\,m^2}, \tag{6.51}$$

onde K^2, a partir de (6.47), é dado por

$$K^2 = K_{(1)\mu}\, K_{(1)}^{\mu} \;+\; \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)\mu\nu}\, K_{(2)}^{\mu\nu}\;.$$

Para determinarmos $G(x-x',\theta-\theta')$ basta substituirmos a solução para $\tilde{G}(K)$, dada em (6.51), na equação (6.49). Logo,

$$\begin{aligned}
G(x-x',\theta-\theta') &= \frac{1}{(2\pi)^{10}}\int d^{10}K\Big(\frac{-1}{K^2+m^2}\Big)\, e^{iK\cdot(x-x')}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{10}}\int d^{10}K\Big(\frac{1}{-K_{(1)\mu}\, K_{(1)}^{\mu} \;-\; \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)\mu\nu}\, K_{(2)}^{\mu\nu} \;-m^2}\Big)\, e^{iK\cdot(x-x')}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{10}}\int d^{9}K \int d\,K^0 \frac{1}{(K^0)^2 \,-\vec{K}_{(1)}\cdot\vec{K}_{(1)} \;-\; \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)\mu\nu}\, K_{(2)}^{\mu\nu} - m^2}\, e^{iK\cdot(x-x')}.
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega(\vec{K}_{(1)}, K_{(2)})\\
&= \sqrt{\vec{K}_{(1)}\cdot\vec{K}_{(1)} \;+\; \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)\mu\nu}\, K_{(2)}^{\mu\nu} + m^2}
\end{aligned} \tag{6.52}$$

como sendo a "frequência"no espaço $(x+\theta)$, temos que

$$G(x-x',\theta-\theta') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{10}}\int d^{9}K \int d\,K^0 \frac{1}{(K^0)^2 \,-\, \omega^2}\, e^{iK\cdot(x-x')} \tag{6.53}$$

A equação (6.52) pode ser vista como a relação de dispersão no espaço $D=4+6$. Além disso, podemos construir uma solução análoga para $\phi_J^*(x,\theta)$. Podemos ver da equação acima que há dois pólos $K^0 = \pm\,\omega$ nessa estrutura. Em geral, os pólos da função de Green podem ser interpretados como as massas das partículas estáveis descritas pela teoria. Podemos ver da equação (6.52) que as ondas planas no espaço $(x+\theta)$ estabelecem a interação entre as correntes nesse espaço e têm energia dada por $\omega(\vec{K}_{(1)}, K_{(2)})$, uma vez que

$$\omega^2 = \vec{K}_{(1)}^2 + \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)}^2 \; + m^2 = K_{(1,2)}^2 + m^2 \;,$$

onde

$$K_{(1,2)}^2 \;=\; \vec{K}_{(1)}^2 + \frac{\lambda^2}{2} K_{(2)}^2\;.$$

Portanto, as ondas planas que mediam a interação descrevem a propagação das partículas em um espaço-tempo $x+\theta$ com uma massa igual a m.

Por completeza, notamos que substituindo (6.48) e (6.53) em (6.40), chegaremos na ação efetiva

$$S_{eff} \;=\; - \int d^4x\, d^6\theta\, d^4x'\, d^6\theta'\, J^*(X) \int \frac{d^9K}{(2\pi)^{10}} \int dK^0 \frac{1}{(K^0)^2 \,-\, \omega^2 \,+\, i\varepsilon}\, e^{iK\cdot(X-X')}\, J(X')\;, \tag{6.54}$$

que poderia ser obtida, em um formalismo funcional, após integrarmos os campos.

Conclusão e Perspectivas Futuras

Nesta dissertação fizemos um esforço no sentido de explicar de maneira pedagógica e auto-suficiente uma forma desenvolvida recentemente de considerar a física teórica no nível da escala de Planck, isto é, a versão da não-comutatividade desenvolvida por Doplicher, Fredenhagen, Roberts e Amorim. Uma esperança de que as bases fundamentais das nossas considerações sejam comprovadas experimentalmente está depositada nos resultados provenientes do LHC.

Primeiramente expomos ao leitor uma primeira menção à possível existência de um espaço não-comutativo graças à ideia de Heisenberg, levada a sério por Oppenheimer e construída por Snyder. O objetivo principal era a eliminação das divergências na Teoria Quântica de Campos. Entretanto, C. N. Yang mostrou logo em seguida que os problemas de renormalizabilidade continuavam.

Depois de um longo esquecimento, a teoria de Snyder foi recuperada graças à teoria de cordas, onde a existência de um campo magnético de fundo forçava a existência de uma álgebra não-comutativa para as cordas. Por outro lado, independente desses resultados da teoria de cordas, na década de oitenta, A. Connes construiu uma geometria não-comutativa e a aplicou à Física.

Neste trabalho aqui exposto, nossas atenções se voltaram para a construção algébrica de Snyder, onde o parâmetro da não-comutatividade, considerado constante, é introduzido *Ad Hoc* no comutador (contrariamente ao valor nulo numa teoria comutativa) das coordenadas espaciais da teoria. Mas, ao mesmo tempo, isso quebra de forma explícita a invariância de Lorentz.

Na teoria original, Snyder consegue recuperar a invariância de Lorentz construindo as coordenadas espaciais como sendo proporcionais a um vetor. Logicamente o comutador entre as mesmas seria igual a um tensor, o que recupera a invariância de Lorentz. Mas como dissemos, as divergências continuavam.

Mesmo com a existência das divergências, graças à teoria de cordas, houve uma corrida para entender esse “novo mundo” não-comutativo onde as coordenadas espaciais não comutam entre si e a solução do problema da invariância de Lorentz foi resolvido promovendo-se o parâmetro não-comutativo à condição de coordenada do sistema, ou seja, uma coordenada tensorial do sistema. Este parâmetro agora faz parte do espaço de fase da teoria. Este é o trabalho de Doplicher, Fredenhagem e Roberts, o chamado espaço DFR.

Entretanto, ficamos com a pergunta: se o parâmetro é uma coordenada no espaço de fase, por que não possui, como toda coordenada, um momento canônico conjugado? Amorim respondeu positivamente a esta pergunta e construiu uma mecânica quântica neste novo espaço não-comutativo com dez dimensões, onde quatro são pertinentes ao espaço-tempo e as outras seis são relativas às coordenadas (ex-parâmetros) não-comutativas. Acreditamos então, que na escala de Planck, a Física pode ser explicada neste espaço chamado de DRFA na literatura.

Neste trabalho tentamos fazer uma exposição completa de todo o formalismo envolvendo o espaço DFRA e para isso nos baseamos em um artigo de revisão publicado em [35].

Foram expostos aqui resultados consistentes no espaço DFRA relativos, além dos ditos acima, à formulação de uma mecânica quântica relativística onde mostramos a equação de Klein-Gordon e Dirac. Escrevemos todas as simetrias pertinentes a essas teorias e, logicamente, mostramos a inclusão de férmions e bósons (espinores e campos escalares). Além disso mostramos como tratar sistemas vinculados usando a nomenclatura de Dirac de vínculos e finalmente expomos as bases de uma teoria quântica de campos em DFRA.

Um resultado que pode ser considerado como original nesta dissertação é a forma do operador $\pi_{\mu\nu}$, que é não trivial uma vez que tem que obedecer condições de dimensionalidade e aos comutadores da álgebra DFRA.

Como perspectivas futuras temos várias questões e assuntos que podem ser desenvolvidos. Vamos listar alguns:

1 - desenvolver toda a formulação de uma teoria quântica de campos do espaço DFRA;

2 - no capítulo 6, poderemos desenvolver o cálculo das funções de Green que apenas deixamos indicado;

3 - a partir do desenvolvimento de uma equação de Dirac, como seria a formulação no DFRA de partículas fermiônicas em sistemas complexos, como por exemplo, o grafeno?

4 - qual seria a forma de um tensor métrico em DFRA? A partir dele, qual seria a forma das Eqs. de Einstein no espaço DFRA?

5 - nos modelos de métrica torcida, como Randall-Sundrum, como esta quinta dimensão do espaço-tempo seria explorada em DFRA?

6 - a partir daí, como seria um modelo de "braneworld"em DFRA?

7 - como seriam descritos modelos supersimétricos em mecânica quântica e teoria quântica de campos com esta álgebra?

8 - se acrescentássemos ao comutador das coordenadas em DFRA um termo compatível com uma álgebra de Lie, quais seriam as consequências físicas e matemáticas?

9 - como ficaria a segunda lei de Newton em DFRA? O espaço seria de nove dimensões pois teríamos que trabalhar no espaço Euclidiano.

10 - como seriam os modelos de força entrópica que exploram a lei da gravitação de Newton? A correção entrópica teria uma modificação devida à álgebra DFRA?

11 - e finalmente, como seria a formulação de um bóson quiral em DFRA?

Como vemos, existe todo um universo de questões, a nível da escala de Planck, que precisam ser exploradas.

Apêndice A: Demonstrações do Capítulo 1

A-1 Demonstração da equação (1.71)

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - ie[A'_\mu, A'_\nu]_* \\
&= \partial_\mu (U * A_\nu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\nu U * U^{-1}) - \partial_\nu (U * A_\mu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu U * U^{-1}) - \\
&\quad -ie[U * A_\mu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu U * U^{-1}, U * A_\nu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\nu U * U^{-1}]_* \\
&= \partial_\mu (U * A_\nu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\nu U * U^{-1}) - \partial_\nu (U * A_\mu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu U * U^{-1}) - \\
&\quad -ie(U * A_\mu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu U * U^{-1}) * (U * A_\nu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\nu U * U^{-1}) + \\
&\quad +ie(U * A_\nu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\nu U * U^{-1}) * (U * A_\mu * U^{-1} - \frac{i}{e}\partial_\mu U * U^{-1}) \\
&= \partial_\mu (U * A_\nu * U^{-1}) - \frac{i}{e}\partial_\mu(\partial_\nu U * U^{-1}) - \partial_\nu (U * A_\mu * U^{-1}) + \frac{i}{e}\partial_\nu(\partial_\mu U * U^{-1}) - \\
&\quad -ie((U * A_\mu * U^{-1}) * (U * A_\nu * U^{-1}) - \frac{i}{e}(U * A_\mu * U^{-1}) * (\partial_\nu U * U^{-1}) - \\
&\quad -\frac{i}{e}(\partial_\mu U * U^{-1}) * (U * A_\nu * U^{-1}) + (\frac{i}{e})^2(\partial_\mu U * U^{-1}) * (\partial_\nu U * U^{-1}) - \\
&\quad -(U * A_\nu * U^{-1}) * (U * A_\mu * U^{-1}) + \frac{i}{e}(U * A_\nu * U^{-1}) * (\partial_\mu U * U^{-1}) + \\
&\quad +\frac{i}{e}(\partial_\nu U * U^{-1}) * (U * A_\mu * U^{-1}) - (\frac{i}{e})^2(\partial_\nu U * U^{-1}) * (\partial_\mu U * U^{-1})) \\
&= \partial_\mu U * A_\nu * U^{-1} + U * \partial_\mu A_\nu * U^{-1} + U * A_\nu * \partial_\mu U^{-1} - \\
&\quad -\frac{i}{e}(\partial_\mu \partial_\nu U * U^{-1} + \partial_\nu U * \partial_\mu U^{-1}) - (\partial_\nu U * A_\mu * U^{-1} + U * \partial_\nu A_\mu * U^{-1} + \\
&\quad +U * A_\mu * \partial_\nu U^{-1}) + \frac{i}{e}(\partial_\nu \partial_\mu U * U^{-1} + \partial_\mu U * \partial_\nu U^{-1}) - \\
&\quad -ie((U * A_\mu * U^{-1}) * (U * A_\nu * U^{-1}) - (U * A_\nu * U^{-1}) * (U * A_\mu * U^{-1})) \\
&= U * \partial_\mu A_\nu * U^{-1} - U * \partial_\nu A_\mu * U^{-1} - ie((U * A_\mu * A_\nu * U^{-1}) - \\
&\quad -(U * A_\nu * A_\mu * U^{-1}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= U * (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie(A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu)) * U^{-1} \\
&= U * (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*) * U^{-1} \\
&= U * F_{\mu\nu} * U^{-1}.
\end{aligned}
$$

A-2 Demonstração da equação (1.76)

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie(A^\mu * A^\nu - A^\nu * A^\mu)) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ieA^\mu * A^\nu + ieA^\nu * A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * (\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu - ie\delta(A^\mu * A^\nu) + ie\delta(A^\nu * A^\mu)) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * (\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu - ie(\delta A^\mu * A^\nu + A^\mu * \delta A^\nu) + \\
&\quad + ie(\delta A^\nu * A^\mu + A^\nu * \delta A^\mu)) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * (\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu - ie\delta A^\mu * A^\nu - ieA^\mu * \delta A^\nu + \\
&\quad + ie\delta A^\nu * A^\mu + ieA^\nu * \delta A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * (\partial^\mu \delta A^\nu + \partial^\mu \delta A^\nu - ie\delta A^\mu * A^\nu - ieA^\mu * \delta A^\nu - \\
&\quad - ie\delta A^\mu * A^\nu - ieA^\mu * \delta A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu} * (2\partial^\mu \delta A^\nu - 2ie\delta A^\mu * A^\nu - 2ieA^\mu * \delta A^\nu) \\
&= -\int d^4x F_{\mu\nu} * (\partial^\mu \delta A^\nu - ie\delta A^\mu * A^\nu - ieA^\mu * \delta A^\nu) \\
&= -\int d^4x F_{\mu\nu} * \partial^\mu \delta A^\nu + ie\int d^4x F_{\mu\nu} * \delta A^\mu * A^\nu + ie\int d^4x F_{\mu\nu} * A^\mu * \delta A^\nu.
\end{aligned}
$$

A-3 Demonstração da equação (1.84)

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu} &= \partial^\mu\partial^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*) \\
&= \partial^\mu(\partial^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\nu\partial_\nu A_\mu - ie\partial^\nu(A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu)) \\
&= \partial^\mu(\partial^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\nu\partial_\nu A_\mu - ie\partial^\nu(A_\mu * A_\nu) + ie\partial^\nu(A_\nu * A_\mu)) \\
&= \partial^\mu(\partial^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\nu\partial_\nu A_\mu - ie\partial^\nu A_\mu * A_\nu - \\
&\quad -ieA_\mu * \partial^\nu A_\nu + ie\partial^\nu A_\nu * A_\mu + ieA_\nu * \partial^\nu A_\mu) \\
&= \partial^\mu\partial^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu\partial^\nu\partial_\nu A_\mu - ie\partial^\mu(\partial^\nu A_\mu * A_\nu) - ie\partial^\mu(A_\mu * \partial^\nu A_\nu) + \\
&\quad +ie\partial^\mu(\partial^\nu A_\nu * A_\mu) + ie\partial^\mu(A_\nu * \partial^\nu A_\mu) \\
&= \partial^\mu\partial^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu\partial^\nu\partial_\nu A_\mu - ie\partial^\mu\partial^\nu A_\mu * A_\nu - ie\partial^\nu A_\mu * \partial^\mu A_\nu - \\
&\quad -ie\partial^\mu A_\mu * \partial^\nu A_\nu - ieA_\mu * \partial^\mu\partial^\nu A_\nu + ie\partial^\mu\partial^\nu A_\nu * A_\mu + ie\partial^\nu A_\nu * \partial^\mu A_\mu + \\
&\quad +ie\partial^\mu A_\nu * \partial^\nu A_\mu + ieA_\nu * \partial^\mu\partial^\nu A_\mu \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

A-4 Demonstração da equação (1.95)

$$
\begin{aligned}
[F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}]_* &= [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie[A^\mu, A^\nu]_*, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*]_* \\
&= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie[A^\mu, A^\nu]_*) * (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*) - \\
&\quad -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]_*) * (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie[A^\mu, A^\nu]_*) \\
&= \partial^\mu A^\nu * \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu * \partial_\nu A_\mu - ie\partial^\mu A^\nu * [A_\mu, A_\nu]_* - \partial^\nu A^\mu * \partial_\mu A_\nu + \\
&\quad +\partial^\nu A^\mu * \partial_\nu A_\mu + ie\partial^\nu A^\mu * [A_\mu, A_\nu]_* - ie[A^\mu, A^\nu]_* * \partial_\mu A_\nu + \\
&\quad +ie[A^\mu, A^\nu]_* * \partial_\nu A_\mu + (ie)^2[A^\mu, A^\nu]_* * [A_\mu, A_\nu]_* - \partial_\mu A_\nu * \partial^\mu A^\nu + \\
&\quad +\partial_\mu A_\nu * \partial^\nu A^\mu + ie\partial_\mu A_\nu * [A^\mu, A^\nu]_* + \partial_\nu A_\mu * \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu * \partial^\nu A^\mu - \\
&\quad -ie\partial_\nu A_\mu * [A^\mu, A^\nu]_* + ie[A_\mu, A_\nu]_* * \partial^\mu A^\nu - ie[A_\mu, A_\nu]_* * \partial^\nu A^\mu - \\
&\quad -(ie)^2[A_\mu, A_\nu]_* * [A^\mu, A^\nu]_* \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Apêndice B: Demonstrações do Capítulo 2

B-1 Demonstração da equação (2.42)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{l}^{ij}, \mathbf{l}^{kl}] &= [\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k] \\
&= (\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i)(\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k) - (\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k)(\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i) \\
&= \mathbf{x}^i\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^i\mathbf{p}^j\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k - \mathbf{x}^k\mathbf{p}^l\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^k\mathbf{p}^l\mathbf{x}^j\mathbf{p}^i + \\
&\quad + \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k\mathbf{x}^j\mathbf{p}^i \\
&= [\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j, \mathbf{x}^k\mathbf{p}^l] + [\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l, \mathbf{x}^j\mathbf{p}^i] + [\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i\mathbf{p}^j] + [\mathbf{x}^j\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k] \\
&= [\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j, \mathbf{x}^k]\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k[\mathbf{x}^i\mathbf{p}^j, \mathbf{p}^l] + [\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l, \mathbf{x}^j]\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^j[\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l, \mathbf{p}^i] + [\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i]\mathbf{p}^j + \\
&\quad + \mathbf{x}^i[\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^j] + [\mathbf{x}^j\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^l]\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l[\mathbf{x}^j\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^k] \\
&= ([\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k]\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^i[\mathbf{p}^j, \mathbf{x}^k])\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k([\mathbf{x}^i, \mathbf{p}^l]\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^i[\mathbf{p}^j, \mathbf{p}^l]) + \\
&\quad + ([\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^j]\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k[\mathbf{p}^l, \mathbf{x}^j])\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^j([\mathbf{x}^k, \mathbf{p}^i]\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k[\mathbf{p}^l, \mathbf{p}^i]) + \\
&\quad + ([\mathbf{x}^l, \mathbf{x}^i]\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l[\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i])\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^i([\mathbf{x}^l, \mathbf{p}^j]\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l[\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^j]) + \\
&\quad + ([\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^l]\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^j[\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^l])\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l([\mathbf{x}^j, \mathbf{p}^k]\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^j[\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^k]).
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (2.8) e a equação (2.11), temos que

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{l}^{ij},\mathbf{l}^{kl}] &= i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^i(-i\delta^{kj})\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k(i\delta^{il})\mathbf{p}^j + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^k(-i\delta^{jl})\mathbf{p}^i + \mathbf{x}^j(i\delta^{ki})\mathbf{p}^l + \\
&\quad + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^l(-i\delta^{ik})\mathbf{p}^j + \mathbf{x}^i(i\delta^{lj})\mathbf{p}^k + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^j(-i\delta^{li})\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l(i\delta^{jk})\mathbf{p}^i \\
&= i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l - i\delta^{kj}\mathbf{x}^i\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i - i\delta^{jl}\mathbf{x}^k\mathbf{p}^i + i\delta^{ki}\mathbf{x}^j\mathbf{p}^l + \\
&\quad + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l\mathbf{p}^j + i\delta^{lj}\mathbf{x}^i\mathbf{p}^k + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k - i\delta^{li}\mathbf{x}^j\mathbf{p}^k + i\delta^{jk}\mathbf{x}^l\mathbf{p}^i \\
&= i\delta^{jk}\mathbf{x}^l\mathbf{p}^i - i\delta^{jk}\mathbf{x}^i\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k\mathbf{p}^j - i\delta^{il}\mathbf{x}^j\mathbf{p}^k - i\delta^{jl}\mathbf{x}^k\mathbf{p}^i + i\delta^{jl}\mathbf{x}^i\mathbf{p}^k - \\
&\quad - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l\mathbf{p}^j + i\delta^{ik}\mathbf{x}^j\mathbf{p}^l + i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k \\
&= i\delta^{jk}(\mathbf{x}^l\mathbf{p}^i - \mathbf{x}^i\mathbf{p}^l) + i\delta^{il}(\mathbf{x}^k\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^k) - i\delta^{jl}(\mathbf{x}^k\mathbf{p}^i - \mathbf{x}^i\mathbf{p}^k) - \\
&\quad - i\delta^{ik}(\mathbf{x}^l\mathbf{p}^j - \mathbf{x}^j\mathbf{p}^l) + i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k \\
&= i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} + i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k \\
&= i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} + i\theta^{ik}\mathbf{p}^j\mathbf{p}^l + i\theta^{kj}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + i\theta^{li}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^i\mathbf{p}^k \\
&= i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} + i\theta^{ik}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^j + i(-\theta^{jk})\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i + i(-\theta^{il})\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + \\
&\quad + i\theta^{jl}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^i \\
&= i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} + i\theta^{ik}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^j - i\theta^{jk}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i - i\theta^{il}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^i \\
&= i\delta^{il}\mathbf{l}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{l}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{l}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{l}^{li} - i\theta^{il}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^j + i\theta^{jl}\mathbf{p}^k\mathbf{p}^i + i\theta^{ik}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^j - i\theta^{jk}\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i
\end{aligned}
$$

B-2 Demonstração da equação (2.44)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}^{ij},\mathbf{L}^{kl}] &= [\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k]\\
&= (\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i)(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)-(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)(\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i)\\
&= \mathbf{X}^i\mathbf{p}^j\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j+\\
&\quad+\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i\\
&= [\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l,\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i]+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j]+[\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k]\\
&= [\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j,\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j,\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l,\mathbf{X}^j]\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^j[\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l,\mathbf{p}^i]+\\
&\quad+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\mathbf{X}^i]\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^i[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\mathbf{p}^j]+[\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^l]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i,\mathbf{p}^k]\\
&= ([\mathbf{X}^i,\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^i[\mathbf{p}^j,\mathbf{X}^k])\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k([\mathbf{X}^i,\mathbf{p}^l]\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^i[\mathbf{p}^j,\mathbf{p}^l])+\\
&\quad+([\mathbf{X}^k,\mathbf{X}^j]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\mathbf{p}^l,\mathbf{X}^j])\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^j([\mathbf{X}^k,\mathbf{p}^i]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\mathbf{p}^l,\mathbf{p}^i])+\\
&\quad+([\mathbf{X}^l,\mathbf{X}^i]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\mathbf{X}^i])\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^i([\mathbf{X}^l,\mathbf{p}^j]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\mathbf{p}^j])+\\
&\quad+([\mathbf{X}^j,\mathbf{X}^l]\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^j[\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^l])\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l([\mathbf{X}^j,\mathbf{p}^k]\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^j[\mathbf{p}^i,\mathbf{p}^k]).
\end{aligned}$$

Usando as equações (2.11), (2.29) e (2.26), resulta em

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}^{ij},\mathbf{L}^{kl}] &= \mathbf{X}^i(-i\delta^{kj})\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k(i\delta^{il})\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^k(-i\delta^{jl})\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^j(i\delta^{ki})\mathbf{p}^l+\\
&\quad+\mathbf{X}^l(-i\delta^{ik})\mathbf{p}^j+\mathbf{X}^i(i\delta^{lj})\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^j(-i\delta^{li})\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l(i\delta^{jk})\mathbf{p}^i\\
&= -i\delta^{kj}\mathbf{X}^i\mathbf{p}^l+i\delta^{il}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^j-i\delta^{jl}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^i+i\delta^{ki}\mathbf{X}^j\mathbf{p}^l-\\
&\quad-i\delta^{ik}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^j+i\delta^{lj}\mathbf{X}^i\mathbf{p}^k-i\delta^{li}\mathbf{X}^j\mathbf{p}^k+i\delta^{jk}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^i\\
&= i\delta^{il}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^j-i\delta^{il}\mathbf{X}^j\mathbf{p}^k-i\delta^{jl}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^i+i\delta^{jl}\mathbf{X}^i\mathbf{p}^k-\\
&\quad-i\delta^{ik}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^j+i\delta^{ik}\mathbf{X}^j\mathbf{p}^l+i\delta^{jk}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^i-i\delta^{jk}\mathbf{X}^i\mathbf{p}^l\\
&= i\delta^{il}(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^k)-i\delta^{jl}(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^i-\mathbf{X}^i\mathbf{p}^k)-\\
&\quad-i\delta^{ik}(\mathbf{X}^l\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^l)+i\delta^{jk}(\mathbf{X}^l\mathbf{p}^i-\mathbf{X}^i\mathbf{p}^l)\\
&= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj}-i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki}-i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj}+i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li}.
\end{aligned}$$

B-3 Demonstração da equação (2.46)

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= [\mathbf{L}^{ij}-\theta^{im}\pi_m{}^j+\theta^{jm}\pi_m{}^i,\mathbf{L}^{kl}-\theta^{kn}\pi_n{}^l+\theta^{ln}\pi_n{}^k] \\
&= (\mathbf{L}^{ij}-\theta^{im}\pi_m{}^j+\theta^{jm}\pi_m{}^i)(\mathbf{L}^{kl}-\theta^{kn}\pi_n{}^l+\theta^{ln}\pi_n{}^k)- \\
&\quad -(\mathbf{L}^{kl}-\theta^{kn}\pi_n{}^l+\theta^{ln}\pi_n{}^k)(\mathbf{L}^{ij}-\theta^{im}\pi_m{}^j+\theta^{jm}\pi_m{}^i) \\
&= \mathbf{L}^{ij}\mathbf{L}^{kl}-\mathbf{L}^{kl}\mathbf{L}^{ij}-\mathbf{L}^{ij}\theta^{kn}\pi_n{}^l+\mathbf{L}^{ij}\theta^{ln}\pi_n{}^k-\theta^{im}\pi_m{}^j\mathbf{L}^{kl}+\theta^{im}\pi_m{}^j\theta^{kn}\pi_n{}^l- \\
&\quad -\theta^{im}\pi_m{}^j\theta^{ln}\pi_n{}^k+\theta^{jm}\pi_m{}^i\mathbf{L}^{kl}-\theta^{jm}\pi_m{}^i\theta^{kn}\pi_n{}^l+\theta^{jm}\pi_m{}^i\theta^{ln}\pi_n{}^k+ \\
&\quad +\mathbf{L}^{kl}\theta^{im}\pi_m{}^j-\mathbf{L}^{kl}\theta^{jm}\pi_m{}^i+\theta^{kn}\pi_n{}^l\mathbf{L}^{ij}-\theta^{kn}\pi_n{}^l\theta^{im}\pi_m{}^j+ \\
&\quad +\theta^{kn}\pi_n{}^l\theta^{jm}\pi_m{}^i-\theta^{ln}\pi_n{}^k\mathbf{L}^{ij}+\theta^{ln}\pi_n{}^k\theta^{im}\pi_m{}^j-\theta^{ln}\pi_n{}^k\theta^{jm}\pi_m{}^i.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.43), obtemos

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= [\mathbf{L}^{ij},\mathbf{L}^{kl}]-(\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i)\theta^{kn}\pi_n{}^l+(\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i)\theta^{ln}\pi_n{}^k- \\
&\quad -\theta^{im}\pi_m{}^j(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)+[\theta^{im}\pi_m{}^j,\theta^{kn}\pi_n{}^l]+[\theta^{ln}\pi_n{}^k,\theta^{im}\pi_m{}^j]+ \\
&\quad +\theta^{jm}\pi_m{}^i(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)+[\theta^{kn}\pi_n{}^l,\theta^{jm}\pi_m{}^i]+[\theta^{jm}\pi_m{}^i,\theta^{ln}\pi_n{}^k]+ \\
&\quad +(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)\theta^{im}\pi_m{}^j-(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k)\theta^{jm}\pi_m{}^i+ \\
&\quad +\theta^{kn}\pi_n{}^l(\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i)-\theta^{ln}\pi_n{}^k(\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.44), resulta em

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj}-i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki}-i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj}+i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li}-\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j\theta^{kn}\pi_n{}^l+\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i\theta^{kn}\pi_n{}^l+ \\
&\quad +\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j\theta^{ln}\pi_n{}^k-\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i\theta^{ln}\pi_n{}^k-\theta^{im}\pi_m{}^j\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l+\theta^{im}\pi_m{}^j\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k+ \\
&\quad +[\theta^{im}\pi_m{}^j,\theta^{kn}]\pi_n{}^l+\theta^{kn}[\theta^{im}\pi_m{}^j,\pi_n{}^l]+[\theta^{ln}\pi_n{}^k,\theta^{im}]\pi_m{}^j+ \\
&\quad +\theta^{im}[\theta^{ln}\pi_n{}^k,\pi_m{}^j]+\theta^{jm}\pi_m{}^i\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\theta^{jm}\pi_m{}^i\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k+[\theta^{kn}\pi_n{}^l,\theta^{jm}]\pi_m{}^i+ \\
&\quad +\theta^{jm}[\theta^{kn}\pi_n{}^l,\pi_m{}^i]+[\theta^{jm}\pi_m{}^i,\theta^{ln}]\pi_n{}^k+\theta^{ln}[\theta^{jm}\pi_m{}^i,\pi_n{}^k]+ \\
&\quad +\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\theta^{im}\pi_m{}^j-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\theta^{im}\pi_m{}^j-\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\theta^{jm}\pi_m{}^i+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\theta^{jm}\pi_m{}^i+ \\
&\quad +\theta^{kn}\pi_n{}^l\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j-\theta^{kn}\pi_n{}^l\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i-\theta^{ln}\pi_n{}^k\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j+\theta^{ln}\pi_n{}^k\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} + [\theta^{kn}\pi_n{}^l, \mathbf{X}^i\mathbf{p}^j] + [\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i, \theta^{kn}\pi_n{}^l] + \\
&+ [\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j, \theta^{ln}\pi_n{}^k] + [\theta^{ln}\pi_n{}^k, \mathbf{X}^j\mathbf{p}^i] + [\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l, \theta^{im}\pi_m{}^j] + [\theta^{im}\pi_m{}^j, \mathbf{X}^l\mathbf{p}^k] + \\
&+ [\theta^{jm}\pi_m{}^i, \mathbf{X}^k\mathbf{p}^l] + [\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k, \theta^{jm}\pi_m{}^i] + ([\theta^{im}, \theta^{kn}]\pi_m{}^j + \theta^{im}[\pi_m{}^j, \theta^{kn}])\pi_n{}^l + \\
&+ \theta^{kn}([\theta^{im}, \pi_n{}^l]\pi_m{}^j + \theta^{im}[\pi_m{}^j, \pi_n{}^l]) + ([\theta^{ln}, \theta^{im}]\pi_n{}^k + \theta^{ln}[\pi_n{}^k, \theta^{im}])\pi_m{}^j + \\
&+ \theta^{im}([\theta^{ln}, \pi_m{}^j]\pi_n{}^k + \theta^{ln}[\pi_n{}^k, \pi_m{}^j]) + ([\theta^{kn}, \theta^{jm}]\pi_n{}^l + \theta^{kn}[\pi_n{}^l, \theta^{jm}])\pi_m{}^i + \\
&+ \theta^{jm}([\theta^{kn}, \pi_m{}^i]\pi_n{}^l + \theta^{kn}[\pi_n{}^l, \pi_m{}^i]) + ([\theta^{jm}, \theta^{ln}]\pi_m{}^i + \theta^{jm}[\pi_m{}^i, \theta^{ln}])\pi_n{}^k + \\
&+ \theta^{ln}([\theta^{jm}, \pi_n{}^k]\pi_m{}^i + \theta^{jm}[\pi_m{}^i, \pi_n{}^k]).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.13), a primeira equação de (2.8), resulta em

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} + [\theta^{kn}\pi_n{}^l, \mathbf{X}^i]\mathbf{p}^j + \mathbf{X}^i[\theta^{kn}\pi_n{}^l, \mathbf{p}^j] + \\
&+ [\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i, \theta^{kn}]\pi_n{}^l + \theta^{kn}[\mathbf{X}^j\mathbf{p}^i, \pi_n{}^l] + [\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j, \theta^{ln}]\pi_n{}^k + \theta^{ln}[\mathbf{X}^i\mathbf{p}^j, \pi_n{}^k] + \\
&+ [\theta^{ln}\pi_n{}^k, \mathbf{X}^j]\mathbf{p}^i + \mathbf{X}^j[\theta^{ln}\pi_n{}^k, \mathbf{p}^i] + [\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l, \theta^{im}]\pi_m{}^j + \theta^{im}[\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l, \pi_m{}^j] + \\
&+ [\theta^{im}\pi_m{}^j, \mathbf{X}^l]\mathbf{p}^k + \mathbf{X}^l[\theta^{im}\pi_m{}^j, \mathbf{p}^k] + [\theta^{jm}\pi_m{}^i, \mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l + \mathbf{X}^k[\theta^{jm}\pi_m{}^i, \mathbf{p}^l] + \\
&+ [\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k, \theta^{jm}]\pi_m{}^i + \theta^{jm}[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k, \pi_m{}^i] + \theta^{im}(-i\delta_m^{knj})\pi_n{}^l + \theta^{kn}(i\delta_n^{iml})\pi_m{}^j + \\
&+ \theta^{ln}(-i\delta_n^{imk})\pi_m{}^j + \theta^{im}(i\delta_m^{lnj})\pi_n{}^k + \theta^{kn}(-i\delta_n^{jml})\pi_m{}^i + \theta^{jm}(i\delta_m^{kni})\pi_n{}^l + \\
&+ \theta^{jm}(-i\delta_m^{lni})\pi_n{}^k + \theta^{ln}(i\delta_n^{jmk})\pi_m{}^i \\
&= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} + ([\theta^{kn}, \mathbf{X}^i]\pi_n{}^l + \theta^{kn}[\pi_n{}^l, \mathbf{X}^i])\mathbf{p}^j + \\
&+ \mathbf{X}^i([\theta^{kn}, \mathbf{p}^j]\pi_n{}^l + \theta^{kn}[\pi_n{}^l, \mathbf{p}^j]) + ([\mathbf{X}^j, \theta^{kn}]\mathbf{p}^i + \mathbf{X}^j[\mathbf{p}^i, \theta^{kn}])\pi_n{}^l + \\
&+ \theta^{kn}([\mathbf{X}^j, \pi_n{}^l]\mathbf{p}^i + \mathbf{X}^j[\mathbf{p}^i, \pi_n{}^l]) + ([\mathbf{X}^i, \theta^{ln}]\mathbf{p}^j + \mathbf{X}^i[\mathbf{p}^j, \theta^{ln}])\pi_n{}^k + \\
&+ \theta^{ln}([\mathbf{X}^i, \pi_n{}^k]\mathbf{p}^j + \mathbf{X}^i[\mathbf{p}^j, \pi_n{}^k]) + ([\theta^{ln}, \mathbf{X}^j]\pi_n{}^k + \theta^{ln}[\pi_n{}^k, \mathbf{X}^j])\mathbf{p}^i + \\
&+ \mathbf{X}^j([\theta^{ln}, \mathbf{p}^i]\pi_n{}^k + \theta^{ln}[\pi_n{}^k, \mathbf{p}^i]) + ([\mathbf{X}^k, \theta^{im}]\mathbf{p}^l + \mathbf{X}^k[\mathbf{p}^l, \theta^{im}])\pi_m{}^j + \\
&+ \theta^{im}([\mathbf{X}^k, \pi_m{}^j]\mathbf{p}^l + \mathbf{X}^k[\mathbf{p}^l, \pi_m{}^j]) + ([\theta^{im}, \mathbf{X}^l]\pi_m{}^j + \theta^{im}[\pi_m{}^j, \mathbf{X}^l])\mathbf{p}^k + \\
&+ \mathbf{X}^l([\theta^{im}, \mathbf{p}^k]\pi_m{}^j + \theta^{im}[\pi_m{}^i, \mathbf{p}^k]) + ([\theta^{jm}, \mathbf{X}^k]\pi_m{}^i + \theta^{jm}[\pi_m{}^i, \mathbf{X}^k])\mathbf{p}^l + \\
&+ \mathbf{X}^k([\theta^{jm}, \mathbf{p}^l]\pi_m{}^i + \theta^{jm}[\pi_m{}^i, \mathbf{p}^l]) + ([\mathbf{X}^l, \theta^{jm}]\mathbf{p}^k + \mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k, \theta^{jm}])\pi_m{}^i + \\
&+ \theta^{jm}([\mathbf{X}^l, \pi_m{}^i]\mathbf{p}^k + \mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k, \pi_m{}^i]) - i\theta^{im}\delta_m^{knj}\pi_n{}^l + i\theta^{kn}\delta_n^{iml}\pi_m{}^j - \\
&- i\theta^{ln}\delta_n^{imk}\pi_m{}^j + i\theta^{im}\delta_m^{lnj}\pi_n{}^k - i\theta^{kn}\delta_n^{jml}\pi_m{}^i + i\theta^{jm}\delta_m^{kni}\pi_n{}^l - \\
&- i\theta^{jm}\delta_m^{lni}\pi_n{}^k + i\theta^{ln}\delta_n^{jmk}\pi_m{}^i.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.17), além do fato que $\mathbf{X}^\mu$ comuta com θ^{kl} e π_{kl}, obtemos

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} - i\theta^{im}\delta^{knj}_{m}\pi_n{}^{l} + i\theta^{kn}\delta^{iml}_{n}\pi_m{}^{j} - \\
&\quad - i\theta^{ln}\delta^{imk}_{n}\pi_m{}^{j} + i\theta^{im}\delta^{lnj}_{m}\pi_n{}^{k} - i\theta^{kn}\delta^{jml}_{n}\pi_m{}^{i} + \\
&\quad + i\theta^{jm}\delta^{kni}_{m}\pi_n{}^{l} - i\theta^{jm}\delta^{lni}_{m}\pi_n{}^{k} + i\theta^{ln}\delta^{jmk}_{n}\pi_m{}^{i}.
\end{aligned}
$$

Considerando que, $\delta^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$, temos que

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{J}^{ij},\mathbf{J}^{kl}] &= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} - i\theta^{im}(\delta^{k}_{m}\delta^{nj} - \delta^{kj}\delta^{n}_{m})\pi_n{}^{l} + \\
&\quad + i\theta^{kn}(\delta^{i}_{n}\delta^{ml} - \delta^{il}\delta^{m}_{n})\pi_m{}^{j} - i\theta^{ln}(\delta^{i}_{n}\delta^{mk} - \delta^{ik}\delta^{m}_{n})\pi_m{}^{j} + \\
&\quad + i\theta^{im}(\delta^{l}_{m}\delta^{nj} - \delta^{lj}\delta^{n}_{m})\pi_n{}^{k} - i\theta^{kn}(\delta^{j}_{n}\delta^{ml} - \delta^{jl}\delta^{m}_{n})\pi_m{}^{i} + \\
&\quad + i\theta^{jm}(\delta^{k}_{m}\delta^{ni} - \delta^{ki}\delta^{n}_{m})\pi_n{}^{l} - i\theta^{jm}(\delta^{l}_{m}\delta^{ni} - \delta^{li}\delta^{n}_{m})\pi_n{}^{k} + \\
&\quad + i\theta^{ln}(\delta^{j}_{n}\delta^{mk} - \delta^{jk}\delta^{m}_{n})\pi_m{}^{i} \\
&= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} - i\theta^{im}\delta^{k}_{m}\delta^{nj}\pi_n{}^{l} + i\theta^{im}\delta^{kj}\delta^{n}_{m}\pi_n{}^{l} + \\
&\quad + i\theta^{kn}\delta^{i}_{n}\delta^{ml}\pi_m{}^{j} - i\theta^{kn}\delta^{il}\delta^{m}_{n}\pi_m{}^{j} - i\theta^{ln}\delta^{i}_{n}\delta^{mk}\pi_m{}^{j} + i\theta^{ln}\delta^{ik}\delta^{m}_{n}\pi_m{}^{j} + \\
&\quad + i\theta^{im}\delta^{l}_{m}\delta^{nj}\pi_n{}^{k} - i\theta^{im}\delta^{lj}\delta^{n}_{m}\pi_n{}^{k} - i\theta^{kn}\delta^{j}_{n}\delta^{ml}\pi_m{}^{i} + i\theta^{kn}\delta^{jl}\delta^{m}_{n}\pi_m{}^{i} + \\
&\quad + i\theta^{jm}\delta^{k}_{m}\delta^{ni}\pi_n{}^{l} - i\theta^{jm}\delta^{ki}\delta^{n}_{m}\pi_n{}^{l} - i\theta^{jm}\delta^{l}_{m}\delta^{ni}\pi_n{}^{k} + i\theta^{jm}\delta^{li}\delta^{n}_{m}\pi_n{}^{k} + \\
&\quad + i\theta^{ln}\delta^{j}_{n}\delta^{mk}\pi_m{}^{i} - i\theta^{ln}\delta^{jk}\delta^{m}_{n}\pi_m{}^{i} \\
&= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} - i\delta^{nj}\theta^{ik}\pi_n{}^{l} + i\delta^{kj}\theta^{in}\pi_n{}^{l} + \\
&\quad + i\delta^{ml}\theta^{ki}\pi_m{}^{j} - i\delta^{il}\theta^{km}\pi_m{}^{j} - i\delta^{mk}\theta^{li}\pi_m{}^{j} + i\delta^{ik}\theta^{lm}\pi_m{}^{j} + \\
&\quad + i\delta^{nj}\theta^{il}\pi_n{}^{k} - i\delta^{lj}\theta^{in}\pi_n{}^{k} - i\delta^{ml}\theta^{kj}\pi_m{}^{i} + i\delta^{jl}\theta^{km}\pi_m{}^{i} + \\
&\quad + i\delta^{ni}\theta^{jk}\pi_n{}^{l} - i\delta^{ki}\theta^{jn}\pi_n{}^{l} - i\delta^{ni}\theta^{jl}\pi_n{}^{k} + i\delta^{li}\theta^{jn}\pi_n{}^{k} + \\
&\quad + i\delta^{mk}\theta^{lj}\pi_m{}^{i} - i\delta^{jk}\theta^{lm}\pi_m{}^{i} \\
&= i\delta^{il}\mathbf{L}^{kj} - i\delta^{il}\theta^{km}\pi_m{}^{j} + i\delta^{il}\theta^{jn}\pi_n{}^{k} - i\delta^{jl}\mathbf{L}^{ki} - i\delta^{jl}\theta^{in}\pi_n{}^{k} + i\delta^{jl}\theta^{km}\pi_m{}^{i} - \\
&\quad - i\delta^{ik}\mathbf{L}^{lj} + i\delta^{ik}\theta^{lm}\pi_m{}^{j} - i\delta^{ik}\theta^{jn}\pi_n{}^{l} + i\delta^{jk}\mathbf{L}^{li} + i\delta^{kj}\theta^{in}\pi_n{}^{l} - i\delta^{jk}\theta^{lm}\pi_m{}^{i} - \\
&\quad - i\delta^{nj}\theta^{ik}\pi_n{}^{l} + i\delta^{nj}\theta^{il}\pi_n{}^{k} + i\delta^{ml}\theta^{ki}\pi_i{}^{j} - i\delta^{ml}\theta^{kj}\pi_m{}^{i} - i\delta^{mk}\theta^{li}\pi_m{}^{j} + \\
&\quad + i\delta^{mk}\theta^{lj}\pi_m{}^{i} + i\delta^{ni}\theta^{jk}\pi_n{}^{l} - i\delta^{ni}\theta^{jl}\pi_n{}^{k} \\
&= i\delta^{il}(\mathbf{L}^{kj} - \theta^{km}\pi_m{}^{j} + \theta^{jn}\pi_n{}^{k}) - i\delta^{jl}(\mathbf{L}^{ki} - \theta^{km}\pi_m{}^{i} + \theta^{in}\pi_n{}^{k}) - \\
&\quad - i\delta^{ik}(\mathbf{L}^{lj} - \theta^{lm}\pi_m{}^{j} + \theta^{jn}\pi_n{}^{l}) + i\delta^{jk}(\mathbf{L}^{li} - \theta^{lm}\pi_m{}^{i} + \theta^{in}\pi_n{}^{l}) + \\
&\quad + i\delta^{nj}(\theta^{il}\pi_n{}^{k} - \theta^{ik}\pi_n{}^{l}) + i\delta^{ml}(\theta^{ki}\pi_m{}^{j} - \theta^{kj}\pi_m{}^{i}) + i\delta^{mk}(\theta^{lj}\pi_m{}^{i} - \theta^{li}\pi_m{}^{j}) + \\
&\quad + i\delta^{ni}(\theta^{jk}\pi_n{}^{l} - \theta^{jl}\pi_n{}^{k}) \\
&= i\delta^{il}\mathbf{J}^{kj} - i\delta^{jl}\mathbf{J}^{ki} - i\delta^{ik}\mathbf{J}^{lj} + i\delta^{jk}\mathbf{J}^{li}.
\end{aligned}
$$

B-4 Demonstração da equação (2.47)

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{X}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{X}^i,\mathbf{J}^{kl}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{X}^i,\mathbf{L}^{kl}-\theta^{km}{\pi_m}^l+\theta^{lm}{\pi_m}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{X}^i,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}{\pi_m}^l+\theta^{lm}{\pi_m}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{X}^i(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}{\pi_m}^l+\theta^{lm}{\pi_m}^k)- \\
&\quad -(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}{\pi_m}^l+\theta^{lm}{\pi_m}^k)\mathbf{X}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{X}^i\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^i\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\mathbf{X}^i\theta^{km}{\pi_m}^l+\mathbf{X}^i\theta^{lm}{\pi_m}^k- \\
&\quad -\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\mathbf{X}^i+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\mathbf{X}^i+\theta^{km}{\pi_m}^l\mathbf{X}^i-\theta^{lm}{\pi_m}^k\mathbf{X}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{X}^i,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\mathbf{X}^i]+[\theta^{km}{\pi_m}^l,\mathbf{X}^i]+[\mathbf{X}^i,\theta^{lm}{\pi_m}^k]) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{X}^i,\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\mathbf{X}^i,\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l,\mathbf{X}^i]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\mathbf{X}^i]+ \\
&\quad +[\theta^{km},\mathbf{X}^i]{\pi_m}^l+\theta^{km}[{\pi_m}^l,\mathbf{X}^i]+[\mathbf{X}^i,\theta^{lm}]{\pi_m}^k+\theta^{lm}[\mathbf{X}^i,{\pi_m}^k]).
\end{aligned}
$$

Usando as equações (2.27), (2.28), (2.29) e (2.26), resulta em

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{X}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\mathbf{X}^k\delta^{il}-i\mathbf{X}^l\delta^{ik}) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\mathbf{X}^k\delta^{il}+\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\mathbf{X}^l\delta^{ik} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\mathbf{X}^k\delta^{il}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\mathbf{X}^k\delta^{il}.
\end{aligned}
$$

Como ϵ_{kl} é antissimétrico, ou seja, $\epsilon_{kl}=-\epsilon_{lk}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{X}^i &= -\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\mathbf{X}^k\delta^{il}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\mathbf{X}^k\delta^{il} \\
&= \frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{X}^k+\frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{X}^k \\
&= \delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{X}^k \\
&= \epsilon^{\ i}_{\ k}\mathbf{X}^k \\
&= \epsilon^{ik}\mathbf{X}_k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ \delta\mathbf{p}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{p}^i,\mathbf{J}^{kl}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{p}^i,\mathbf{L}^{kl}-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{p}^i(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)- \\
&\quad -(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)\mathbf{p}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{p}^i\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{p}^i\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\mathbf{p}^i\theta^{km}\pi_m{}^l+\mathbf{p}^i\theta^{lm}\pi_m{}^k- \\
&\quad -\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\mathbf{p}^i+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\mathbf{p}^i+\theta^{km}\pi_m{}^l\mathbf{p}^i-\theta^{lm}\pi_m{}^k\mathbf{p}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\mathbf{p}^i]+[\theta^{km}\pi_m{}^l,\mathbf{p}^i]+[\mathbf{p}^i,\theta^{lm}\pi_m{}^k]) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{p}^i,\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\mathbf{p}^i,\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l,\mathbf{p}^i]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\mathbf{p}^i]+ \\
&\quad +[\theta^{km},\mathbf{p}^i]\pi_m{}^l+\theta^{km}[\pi_m{}^l,\mathbf{p}^i]+[\mathbf{p}^i,\theta^{lm}]\pi_m{}^k+\theta^{lm}[\mathbf{p}^i,\pi_m{}^k]).
\end{aligned}
$$

Usando a segunda equação de (2.11) e as equações (2.17) e (2.29), resulta em

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(-i\delta^{ki}\mathbf{p}^l+i\delta^{li}\mathbf{p}^k) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{ki}\mathbf{p}^l-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\mathbf{p}^k \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{li}\mathbf{p}^k-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\mathbf{p}^k \\
&= \frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{p}^k-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\mathbf{p}^k \\
&= \frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{p}^k-\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\delta^{li}\mathbf{p}^k \\
&= \frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{p}^k+\frac{1}{2}\delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{p}^k \\
&= \delta^{il}\epsilon_{lk}\mathbf{p}^k \\
&= \epsilon^{\ i}{}_{k}\mathbf{p}^k \\
&= \epsilon^{ik}\mathbf{p}_k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ \delta\theta^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\theta^{ij},\mathbf{J}^{kl}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\theta^{ij},\mathbf{L}^{kl}-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\theta^{ij},\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\theta^{ij}(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)- \\
&\quad -(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)\theta^{ij}) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\theta^{ij}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\theta^{ij}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{ij}\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{ij}\theta^{lm}\pi_m{}^k- \\
&\quad -\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\theta^{ij}+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\theta^{ij}+\theta^{km}\pi_m{}^l\theta^{ij}-\theta^{lm}\pi_m{}^k\theta^{ij}) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\theta^{ij},\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\theta^{ij}]+[\theta^{km}\pi_m{}^l,\theta^{ij}]+[\theta^{ij},\theta^{lm}\pi_m{}^k]) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\theta^{ij},\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\theta^{ij},\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l,\theta^{ij}]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\theta^{ij}]+ \\
&\quad +[\theta^{km},\theta^{ij}]\pi_m{}^l+\theta^{km}[\pi_m{}^l,\theta^{ij}]+[\theta^{ij},\theta^{lm}]\pi_m{}^k+\theta^{lm}[\theta^{ij},\pi_m{}^k]).
\end{aligned}
$$

Usando a primeira equação de (2.17), a segunda equação de (2.8) e as equações (2.13) e (2.28), resulta em

$$\delta\theta^{ij}=\frac{i}{2}\epsilon_{kl}(-i\theta^{km}\delta^{ijl}_m+i\theta^{lm}\delta^{ijk}_m).$$

Como $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}=\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta-\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha$, temos que

$$\delta^{\mu\nu\beta}_\alpha=\delta^\mu_\alpha\delta^{\nu\beta}-\delta^{\mu\beta}\delta^\nu_\alpha.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\delta\theta^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(-i\theta^{km}(\delta^i_m\delta^{jl}-\delta^{il}\delta^j_m)+i\theta^{lm}(\delta^i_m\delta^jk-\delta^{ik}\delta^j_m)) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(-i\theta^{km}\delta^i_m\delta^{jl}+i\theta^{km}\delta^{il}\delta^j_m+i\theta^{lm}\delta^i_m\delta^{jk}-i\theta^{lm}\delta^{ik}\delta^j_m) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(-i\theta^{ki}\delta^{jl}+i\theta^{kj}\delta^{il}+i\theta^{li}\delta^{jk}-i\theta^{lj}\delta^{ik}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{jl}\theta^{ki}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{il}\theta^{kj}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{jk}\theta^{li}+\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{ik}\theta^{lj} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{jk}\theta^{li}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{jk}\theta^{li}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{il}\theta^{kj}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{il}\theta^{kj} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{jk}\theta^{li}-\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\delta^{jk}\theta^{li}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{il}\theta^{kj}-\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\delta^{il}\theta^{kj} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{jk}\theta^{li}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{jk}\theta^{li}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{il}\theta^{kj}+\frac{1}{2}\epsilon_{lk}\delta^{il}\theta^{kj} \\
&= \epsilon_{lk}\delta^{jk}\theta^{li}+\epsilon_{lk}\delta^{il}\theta^{kj} \\
&= \epsilon^j{}_l\theta^{li}+\epsilon^i{}_k\theta^{kj} \\
&= \epsilon^j{}_k\theta^{ki}+\epsilon^i{}_k\theta^{kj} \\
&= \epsilon^{ik}\theta_k{}^j+\epsilon^{jk}\theta^i{}_k.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
iv).\ \delta\pi^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\pi^{ij},\mathbf{J}^{kl}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\pi^{ij},\mathbf{L}^{kl}-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\pi^{ij},\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\pi^{ij}(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)- \\
&\quad -(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\theta^{km}\pi_m{}^l+\theta^{lm}\pi_m{}^k)\pi^{ij}) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\pi^{ij}\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l-\pi^{ij}\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k-\pi^{ij}\theta^{km}\pi_m{}^l+\pi^{ij}\theta^{lm}\pi_m{}^k- \\
&\quad -\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\pi^{ij}+\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\pi^{ij}+\theta^{km}\pi_m{}^l\pi^{ij}-\theta^{lm}\pi_m{}^k\pi^{ij}) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\pi^{ij},\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k,\pi^{ij}]+[\theta^{km}\pi_m{}^l,\pi^{ij}]+[\pi^{ij},\theta^{lm}\pi_m{}^k]) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\pi^{ij},\mathbf{X}^k]\mathbf{p}^l+\mathbf{X}^k[\pi^{ij},\mathbf{p}^l]+[\mathbf{X}^l,\pi^{ij}]\mathbf{p}^k+\mathbf{X}^l[\mathbf{p}^k,\pi^{ij}]+ \\
&\quad +[\theta^{km},\pi^{ij}]\pi_m{}^l+\theta^{km}[\pi_m{}^l,\pi^{ij}]+[\pi^{ij},\theta^{lm}]\pi_m{}^k+\theta^{lm}[\pi^{ij},\pi_m{}^k]).
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\pi_{\alpha\beta}$ comuta com $\pi_{\rho\gamma}$, e além disso, usando a segunda equação de (2.17), a segunda equação de (2.8) e a equação (2.27), resulta em

$$\delta\pi^{ij}=\frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\delta^{km;ij}\pi_m{}^l-i\delta^{lm;ij}\pi_m{}^k).$$

Como $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}=\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta-\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha$, vem que

$$\delta^{\mu\nu;\alpha\beta}=\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}-\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\delta\pi^{ij} &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i(\delta^{ki}\delta^{mj}-\delta^{kj}\delta^{mi})\pi_m{}^l-i(\delta^{li}\delta^{mj}-\delta^{lj}\delta^{mi}))\pi_m{}^k \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\delta^{ki}\delta^{mj}\pi_m{}^l-i\delta^{kj}\delta^{mi}\pi_m{}^l-i\delta^{li}\delta^{mj}\pi_m{}^k+i\delta^{lj}\delta^{mi}\pi_m{}^k) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\delta^{ki}\pi^{jl}-i\delta^{kj}\pi^{il}-i\delta^{li}\pi^{jk}+i\delta^{lj}\pi^{ik}) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{ki}\pi^{jl}+\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{kj}\pi^{il}+\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\pi^{jk}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{lj}\pi^{ik} \\
&= -\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\delta^{ki}\pi^{jl}+\frac{1}{2}(-\epsilon_{lk})\delta^{kj}\pi^{il}+\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\pi^{jk}-\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{lj}\pi^{ik} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{li}\pi^j{}_l-\frac{1}{2}\epsilon^{lj}\pi^i{}_l+\frac{1}{2}\epsilon^{ki}\pi^j{}_k-\frac{1}{2}\epsilon^{kj}\pi^i_k \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ki}\pi^j{}_k-\frac{1}{2}\epsilon^{kj}\pi^i{}_k+\frac{1}{2}\epsilon^{ki}\pi^j{}_k-\frac{1}{2}\epsilon^{kj}\pi^i{}_k
\end{aligned}$$

Como $\pi^j{}_k$ é antissimétrico, ou seja, $\pi^j{}_k=-\pi_k{}^j$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta\pi^{ij} &= -\frac{1}{2}(-\epsilon_{ik})(-\pi_k{}^j)-\frac{1}{2}(-\epsilon^{jk})\pi^i{}_k+\frac{1}{2}(-\epsilon^{ik})(-\pi_k{}^j)-\frac{1}{2}(-\epsilon^{jk})\pi^i{}_k \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ik}\pi_k{}^j+\frac{1}{2}\epsilon^{jk}\pi^i{}_k+\frac{1}{2}\epsilon^{ik}\pi_k{}^j+\frac{1}{2}\epsilon^{jk}\pi^i{}_k \\
&= \epsilon^{ik}\pi_k{}^j+\epsilon^{jk}\pi^i{}_k.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v).\ \delta\mathbf{x}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{x}^i, \mathbf{J}^{kl}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{x}^i, \mathbf{L}^{kl} - \theta^{km}\pi_m{}^l + \theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}[\mathbf{x}^i, \mathbf{X}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{X}^l\mathbf{p}^k - \theta^{km}\pi_m{}^l + \theta^{lm}\pi_m{}^k] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{x}^i(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{X}^l\mathbf{p}^k - \theta^{km}\pi_m{}^l + \theta^{lm}\pi_m{}^k) - \\
&\quad -(\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{X}^l\mathbf{p}^k - \theta^{km}\pi_m{}^l + \theta^{lm}\pi_m{}^k)\mathbf{x}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{x}^i\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^i\mathbf{X}^l\mathbf{p}^k - \mathbf{x}^i\theta^{km}\pi_m{}^l + \mathbf{x}^i\theta^{lm}\pi_m{}^k - \\
&\quad -\mathbf{X}^k\mathbf{p}^l\mathbf{x}^i + \mathbf{X}^l\mathbf{p}^k\mathbf{x}^i + \theta^{km}\pi_m{}^l\mathbf{x}^i - \theta^{lm}\pi_m{}^k\mathbf{x}^i).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.25), resulta em

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{x}^i(\mathbf{x}^k + \frac{1}{2}\theta^{kn}\mathbf{p}_n)\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^i(\mathbf{x}^l + \frac{1}{2}\theta^{lo}\mathbf{p}_o)\mathbf{p}^k - \mathbf{x}^i\theta^{km}\pi_m{}^l + \mathbf{x}^i\theta^{lm}\pi_m{}^k - \\
&\quad -(\mathbf{x}^k + \frac{1}{2}\theta^{kn}\mathbf{p}_n)\mathbf{p}^l\mathbf{x}^i + (\mathbf{x}^l + \frac{1}{2}\theta^{lo}\mathbf{p}_o)\mathbf{p}^k\mathbf{x}^i + \theta^{km}\pi_m{}^l\mathbf{x}^i - \theta^{lm}\pi_m{}^k\mathbf{x}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\mathbf{x}^i\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l + \frac{1}{2}\mathbf{x}^i\theta^{kn}\mathbf{p}_n\mathbf{p}^l - \mathbf{x}^i\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k - \frac{1}{2}\mathbf{x}^i\theta^{lo}\mathbf{p}_o\mathbf{p}^k - \mathbf{x}^i\theta^{km}\pi_m{}^l + \mathbf{x}^i\theta^{lm}\pi_m{}^k - \\
&\quad -\mathbf{x}^k\mathbf{p}^l\mathbf{x}^i - \frac{1}{2}\theta^{kn}\mathbf{p}_n\mathbf{p}^l\mathbf{x}^i + \mathbf{x}^l\mathbf{p}^k\mathbf{x}^i + \frac{1}{2}\theta^{lo}\mathbf{p}_o\mathbf{p}^k\mathbf{x}^i + \theta^{km}\pi_m{}^l\mathbf{x}^i - \theta^{lm}\pi_m{}^k\mathbf{x}^i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k\mathbf{p}^l] + [\mathbf{x}^l\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i] + \frac{1}{2}[\mathbf{x}^i, \theta^{kn}\mathbf{p}_n\mathbf{p}^l] + \frac{1}{2}[\theta^{lo}\mathbf{p}_o\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i] + \\
&\quad +[\theta^{km}\pi_m{}^l, \mathbf{x}^i] + [\mathbf{x}^i, \theta^{lm}\pi_m{}^k]) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}([\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k]\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k[\mathbf{x}^i, \mathbf{p}^l] + [\mathbf{x}^l, \mathbf{x}^i]\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l[\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i] + \\
&\quad +\frac{1}{2}([\mathbf{x}^i, \theta^{kn}\mathbf{p}_n]\mathbf{p}^l + \theta^{kn}\mathbf{p}_n[\mathbf{x}^i, \mathbf{p}^l]) + \frac{1}{2}([\theta^{lo}\mathbf{p}_o, \mathbf{x}^i]\mathbf{p}^k + \theta^{lo}\mathbf{p}_o[\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^i]) + \\
&\quad +[\theta^{km}, \mathbf{x}^i]\pi_m{}^l + \theta^{km}[\pi_m{}^l, \mathbf{x}^i] + [\mathbf{x}^i, \theta^{lm}]\pi_m{}^k + \theta^{lm}[\mathbf{x}^i, \pi_m{}^k]).
\end{aligned}
$$

Usando a primeira equação de (2.11), a primeira equação de (2.8), a equação (2.12) e a equação (2.21)

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\theta^{ik}\mathbf{p}^l + \mathbf{x}^k i\delta^{il} + i\theta^{li}\mathbf{p}^k + \mathbf{x}^l(-i\delta^{ik}) + \frac{1}{2}((([\mathbf{x}^i, \theta^{kn}]\mathbf{p}_n + \theta^{kn}[\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_n])\mathbf{p}^l + \\
&\quad +\theta^{kn}\mathbf{p}_n i\delta^{il}) + \frac{1}{2}((([\theta^{lo}, \mathbf{x}^i]\mathbf{p}_o + \theta^{lo}[\mathbf{p}^o, \mathbf{x}^i])\mathbf{p}^k + \theta^{lo}\mathbf{p}_o(-\delta^{ik})) + \theta^{km}\frac{i}{2}\delta^{il}{}_{mq}\mathbf{p}^q + \\
&\quad +\theta^{lm}(-\frac{i}{2}\delta^{ik}{}_{mr}\mathbf{p}^r)).
\end{aligned}
$$

Considerando o fato que, $\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$,e além disso, usando a equação (2.12) e a primeira equação de (2.8), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^i &= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\theta^{ik}\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k + i\theta^{li}\mathbf{p}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l + \frac{1}{2}i\delta^i_n\theta^{kn}\mathbf{p}^l + \frac{1}{2}i\delta^{il}\theta^{kn}\mathbf{p}_n - \frac{1}{2}i\delta^i_o\theta^{lo}\mathbf{p}^k - \\
&\quad -\frac{i}{2}\delta^{ik}\theta^{lo}\mathbf{p}_o + \frac{i}{2}\theta^{km}\mathbf{p}^q(\delta^i_m\delta^l_q - \delta^i_q\delta^l_m) - \frac{i}{2}\theta^{lm}\mathbf{p}^r(\delta^i_m\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_m)) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\theta^{ik}\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k + i\theta^{li}\mathbf{p}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l + \frac{i}{2}\theta^k{}_i\mathbf{p}^l + \frac{i}{2}\delta^{il}\theta^{kn}\mathbf{p}_n - \frac{i}{2}\theta^l{}_i\mathbf{p}^k - \frac{i}{2}\delta^{ik}\theta^{lo}\mathbf{p}_o + \\
&\quad +\frac{i}{2}\theta^{km}\delta^i_m\delta^l_q\mathbf{p}^q - \frac{i}{2}\delta^i_q\mathbf{p}^q\theta^{km}\delta^l_m - \frac{i}{2}\theta^{lm}\delta^i_m\delta^k_r\mathbf{p}^r + \frac{i}{2}\theta^{lm}\delta^k_m\delta^i_r\mathbf{p}^r) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\theta^{ik}\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k + i\theta^{li}\mathbf{p}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l + \frac{i}{2}\theta^k{}_i\mathbf{p}^l + \frac{i}{2}\delta^{il}\theta^{kn}\mathbf{p}_n - \frac{i}{2}\theta^l{}_i\mathbf{p}^k - \frac{i}{2}\delta^{ik}\theta^{lo}\mathbf{p}_o + \\
&\quad +\frac{i}{2}\theta^k{}_i\mathbf{p}^l - \frac{i}{2}\mathbf{p}_i\theta^k{}_l - \frac{i}{2}\theta^l{}_i\mathbf{p}_k + \frac{i}{2}\theta^l{}_k\mathbf{p}_i) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(\theta^{ik}\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k + i(-\theta^{il})\mathbf{p}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\theta^{ik}\mathbf{p}^l + i\delta^{il}\mathbf{x}^k - i\theta^{il}\mathbf{p}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{kl}(i\delta^{il}\mathbf{x}^k - i\delta^{ik}\mathbf{x}^l) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{il}\mathbf{x}^k + \frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{ik}\mathbf{x}^l \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{kl}\delta^{li}\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\delta^{ik}\epsilon_{kl}\mathbf{x}_l \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon^{ki}\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{il}\mathbf{x}_l \\
&= -\frac{1}{2}(-\epsilon^{ik})\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{il}\mathbf{x}_l \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ik}\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{il}\mathbf{x}_l \\
&= \epsilon^{ik}\mathbf{x}_k.
\end{aligned}
$$

Apêndice C: Cálculo dos Parênteses de Dirac do Capítulo 3

C-1 Demonstração da equação (3.18)

$$\begin{aligned}
i).\ \{x^i, p_j\}_D &= \{x^i, p_j\} - \{x^i, Z^k - \frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\}(-\delta_k^m)\{K_m - p_m, p_j\} - \\
&\quad -\{x^i, K_k - p_k\}\delta_m^k\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\} \\
&= \delta_j^i + (\{x^i, Z^k\} - \{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\})\delta_k^m(\{K_m, p_j\} + \{-p_m, p_j\}) - \\
&\quad -(\{x^i, K_k\} + \{x^i, -p_k\})\delta_m^k(\{Z^m, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, Z^k\} = \{K_m, p_j\} = \{p_m, p_j\} = 0, \{x^i, p_k\} = \delta_k^i$, temos que

$$\{x^i, p_j\}_D = \delta_j^i + \delta_k^i\delta_m^k(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, p_j\}p_q).$$

Substituindo a equação (3.3), $\{p_q, p_j\} = 0, \{\theta^{mq}, p_j\} = 0$,

$$\{x^i, p_j\}_D = \delta_j^i.$$

$$\begin{aligned}
ii).\ \{x^i, x^j\}_D &= \{x^i, x^j\} - \{x^i, Z^k - \frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\}(-\delta_k^m)\{K_m - p_m, x^j\} - \\
&\quad -\{x^i, K_k - p_k\}\delta_m^k\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\} \\
&= (\{x^i, Z^k\} + \{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\})\delta_k^m(\{K_m, x^j\} + \{-p_m, x^j\}) - \\
&\quad -(\{x^i, K_k\} + \{x^i, -p_k\})\delta_m^k(\{Z^m, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, Z^k\} = \{K_m, x^j\} = \{x^i, K_k\} = \{Z^m, x^j\} = 0$, $\{x^i, p_k\} = \delta_k^i, \{p_m, x^j\} = -\delta_m^j$,

$$\begin{aligned}
\{x^i, x^j\}_D &= \{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\}\delta_k^m\delta_m^j - \delta_k^i\delta_m^k\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\} \\
&= (\{x^i, p_l\}(-\frac{1}{2}\theta^{kl}) + p_l\{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{kl}\})\delta_k^m\delta_m^j + \\
&\quad +\delta_k^i(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, x^j\}p_q)\delta_m^k.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, p_l\} = \delta^i_l, \{p_q, x^j\} = -\delta^j_q, \{x^i, \theta^{kl}\} = \{\theta^{mq}, x^j\} = 0$,

$$\begin{aligned}
\{x^i, x^j\}_D &= -\frac{1}{2}\theta^{kl}\delta^i_l\delta^m_k\delta^j_m + \frac{1}{2}\delta^i_k\theta^{mq}\delta^j_q\delta^k_m \\
&= -\frac{1}{2}\theta^{kl}\delta^i_l\delta^m_k\delta^j_m + \frac{1}{2}\delta^i_k\delta^j_q\theta^{mq}\delta^k_m \\
&= -\frac{1}{2}\theta^{kl}\delta^i_l\delta^j_k + \frac{1}{2}\theta^{mq}\delta^i_k\delta^j_q\delta^k_m \\
&= -\frac{1}{2}\theta^{ki}\delta^j_k + \frac{1}{2}\theta^{mq}\delta^j_q\delta^i_m \\
&= -\frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij} \\
&= \theta^{ij}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii).\ \{p_i, p_j\}_D &= \{p_i, p_j\} - \{p_i, Z^k - \frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\}(-\delta^m_k)\{K_m - p_m, p_j\} - \\
&\quad -\{p_i, K_k - p_k\}\delta^k_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_i, p_j\} = 0$,

$$\begin{aligned}
\{p_i, p_j\}_D &= (\{p_i, Z^k\} + \{p_i, -\frac{1}{2}\theta^{kl}p_l\})\delta^m_k(\{K_m, p_j\} + \{-p_m, p_j\}) - \\
&\quad -(\{p_i, K_k\} + \{p_i, -p_k\})\delta^k_m(\{Z^m, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_i, Z^k\} = \{K_m, p_j\} = \{p_i, K_k\} = \{p_m, p_j\} = 0$,

$$\{p_i, p_j\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}
iv).\ \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D &= \{\theta^{ij}, \pi_{kl}\} - \{\theta^{ij}, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, \pi_{kl}\} - \\
&\quad -\{\theta^{ij}, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\theta^{ij}, \pi_{kl}\} = \delta^{ij}{}_{kl}$,

$$\begin{aligned}
\{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D &= \delta^{ij}{}_{kl} + (\{\theta^{ij}, Z^n\} + \{\theta^{ij}, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, \pi_{kl}\} + \{-p_m, \pi_{kl}\}) - \\
&\quad -(\{\theta^{ij}, K_n\} + \{\theta^{ij}, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\theta^{ij}, Z^n\} = \{K_m, \pi_{kl}\} = \{p_m, \pi_{kl}\} = \{\theta^{ij}, K_n\} = \{\theta^{ij}, p_n\} = \{Z^m, \pi_{kl}\} = 0$,

$$\{\theta^{ij}, \pi_{kl}\}_D = \delta^{ij}{}_{kl}.$$

$$\begin{aligned}
v).\ \{\theta^{ij}, \theta^{kl}\}_D &= \{\theta^{ij}, \theta^{kl}\} - \{\theta^{ij}, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, \theta^{kl}\} - \\
&\quad -\{\theta^{ij}, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\theta^{ij},\theta^{kl}\}=0$,

$$\begin{aligned}\{\theta^{ij},\theta^{kl}\}_D &= (\{\theta^{ij},Z^n\}+\{\theta^{ij},-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\theta^{kl}\}+\{-p_m,\theta^{kl}\})-\\ &\quad -(\{\theta^{ij},K_n\}+\{\theta^{ij},-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\theta^{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\theta^{ij},Z^n\}=\{K_m,\theta^{kl}\}=\{p_m,\theta^{kl}\}=\{\theta^{ij},K_n\}=\{\theta^{ij},p_n\}=0$,

$$\{\theta^{ij},\theta^{kl}\}_D=0.$$

$$\begin{aligned}vi).\ \{\pi_{ij},\pi_{kl}\}_D &= \{\pi_{ij},\pi_{kl}\}-\{\pi_{ij},Z^n-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m-p_m,\pi_{kl}\}-\\ &\quad -\{\pi_{ij},K_n-p_n\}\delta^n_m\{Z^m-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\}.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\pi_{ij},\pi_{kl}\}=0$,

$$\begin{aligned}\{\pi_{ij},\pi_{kl}\}_D &= (\{\pi_{ij},Z^n\}+\{\pi_{ij},-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\pi_{kl}\}+\{-p_m,\pi_{kl}\})-\\ &\quad -(\{\pi_{ij},K_n\}+\{\pi_{ij},-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\pi_{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\pi_{ij},Z^n\}=\{K_m,\pi_{kl}\}=\{p_m,\pi_{kl}\}=0$,

$$\{\pi_{ij},\pi_{kl}\}_D=0.$$

$$\begin{aligned}vii).\ \{x^i,\theta^{kl}\}_D &= \{x^i,\theta^{kl}\}-\{x^i,Z^n-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m-p_m,\theta^{kl}\}-\\ &\quad -\{x^i,K_n-p_n\}\delta^n_m\{Z^m-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\}.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i,\theta^{kl}\}=0$,

$$\begin{aligned}\{x^i,\theta^{kl}\}_D &= (\{x^i,Z^n\}+\{x^i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\theta^{kl}\}+\{-p_m,\theta^{kl}\})-\\ &\quad -(\{x^i,K_n\}+\{x^i,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\theta^{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i,p_j\}=\delta^i_j$,

$$\begin{aligned}\{x^i,\theta^{kl}\}_D &= \delta^i_n\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\}\\ &= \delta^i_m(\theta^{kl}\{-\frac{1}{2}\theta^{mq},p_q\}+\{\theta^{kl},p_q\}(-\frac{1}{2}\theta^{mq})).\end{aligned}$$

E finalmente com a equação (3.3), $\{\theta^{mq},p_q\}=0$,

$$\{x^i,\theta^{kl}\}_D=0.$$

$$
\begin{aligned}
viii).\ \{x^i,\pi_{kl}\}_D &= \{x^i,\pi_{kl}\}-\{x^i,Z^n-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m-p_m,\pi_{kl}\}- \\
&-\{x^i,K_n-p_n\}\delta^n_m\{Z^m-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\}.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i,\pi_{kl}\}=0$,

$$
\begin{aligned}
\{x^i,\pi_{kl}\}_D &= (\{x^i,Z^n\}+\{x^i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\pi_{kl}\}+\{-p_m,\pi_{kl}\})- \\
&-(\{x^i,K_n\}+\{x^i,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\pi_{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\}).
\end{aligned}
$$

Com a equação (3.3), $\{x^i,Z^n\}=\{K_m,\pi_{kl}\}=\{p_m,\pi_{kl}\}=\{x^i,K_n\}=0$ e $\{x^i,p_n\}=\delta^i_n$,

$$
\begin{aligned}
\{x^i,\pi_{kl}\}_D &= \delta^i_n\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\} \\
&= \delta^i_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q,\pi_{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq},\pi_{kl}\}p_q),
\end{aligned}
$$

e com a equação (3.3), $\{\theta^{ij},\pi_{kl}\}=\delta^{ij}{}_{kl}$ e $\{p_q,\pi_{kl}\}=0$,

$$
\begin{aligned}
\{x^i,\pi_{kl}\}_D &= -\frac{1}{2}\delta^i_m\delta^{mq}{}_{kl}p_q \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{iq}{}_{kl}p_q.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ix).\ \{p_i,\theta^{kl}\}_D &= \{p_i,\theta^{kl}\}-\{p_i,Z^n-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m-p_m,\theta^{kl}\}- \\
&-\{p_i,K_n-p_n\}\delta^n_m\{Z^m-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\} \\
&= (\{p_i,Z^n\}+\{p_i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\theta^{kl}\}+\{-p_m,\theta^{kl}\})- \\
&-(\{p_i,K_n\}+\{p_i,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\theta^{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\theta^{kl}\}).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{K_m,\theta^{kl}\}=\{p_m,\theta^{kl}\}=\{p_i,K_n\}=\{p_i,p_n\}=\{Z^m,\theta^{kl}\}=0$,

$$
\{p_i,\theta^{kl}\}_D=0.
$$

$$
\begin{aligned}
x).\ \{p_i,\pi_{kl}\}_D &= \{p_i,\pi_{kl}\}-\{p_i,Z^n-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m-p_m,\pi_{kl}\}- \\
&-\{p_i,K_n-p_n\}\delta^n_m\{Z^m-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\} \\
&= (\{p_i,Z^n\}+\{p_i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,\pi_{kl}\}+\{-p_m,\pi_{kl}\})- \\
&-(\{p_i,K_n\}+\{p_i,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\pi_{kl}\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\pi_{kl}\}).
\end{aligned}
$$

Com a equação (3.3), $\{p_i,Z^n\}=\{K_m,\pi_{kl}\}=\{p_m,\pi_{kl}\}=\{p_i,K_n\}=\{p_i,p_n\}=\{Z^m,\pi_{kl}\}=0$,

$$
\{p_i,\pi_{kl}\}_D=0.
$$

C-2 Demonstração da equação (3.19)

$$\begin{aligned} i).\ \{Z^i, K_j\}_D &= \{Z^i, K_j\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, K_j\} - \\ &\quad -\{Z^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\}. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, K_j\} = \delta^i_j$,

$$\begin{aligned} \{Z^i, K_j\}_D &= \delta^i_j + (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, K_j\} + \{-p_m, K_j\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\}). \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{K_m, K_j\} = \{p_m, K_j\} = \{Z^i, p_n\} = 0$ e $\{Z^i, K_n\} = \delta^i_n$,

$$\begin{aligned} \{Z^i, K_j\}_D &= \delta^i_j - \delta^i_n\delta^n_m\delta^m_j \\ &= \delta^i_j - \delta^i_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii).\ \{Z^i, Z^j\}_D &= \{Z^i, Z^j\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, Z_j\} - \\ &\quad -\{Z^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, Z^j\}. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^j\} = 0$,

$$\begin{aligned} \{Z^i, Z^j\}_D &= (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, Z_j\} + \{-p_m, Z_j\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z_m, Z_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, Z^j\}). \end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{p_m, Z_j\} = \{Z^i, p_m\} = 0$ e $\{Z^i, K_j\} = \delta^i_j$,

$$\begin{aligned} \{Z^i, Z^j\}_D &= \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}\delta^m_n(-\delta_{jm}) - \delta^i_n\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, Z^j\} \\ &= (-\frac{1}{2}\theta^{no}\{p_o, Z^i\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{no}, Z^i\}p_o)\delta^m_n(-\delta_{jm}) - \\ &\quad -\delta^i_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, Z^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, Z^j\}p_q). \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_o, Z^i\} = \{\theta^{no}, Z^i\} = 0$,

$$\{Z^i, Z^j\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned} iii).\ \{K_i, K_j\}_D &= \{K_i, K_j\} - \{K_i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, K_j\} - \\ &\quad -\{K_i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\}. \end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{K_i, K_j\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{K_i, K_j\}_D &= (\{K_i, Z^n\} + \{K_i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, K_j\} + \{-p_m, K_j\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_n, K_j\} = \{p_m, K_j\} = \{Z^i, p_n\} = 0$ *e* $\{Z^i, K_j\} = \delta_j^i$,

$$\begin{aligned}\{K_i, K_j\}_D &= -\delta_n^i\delta_m^n\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\} \\ &= -\delta_m^i(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, K_j\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, K_j\} = \{\theta^{mq}, K_j\} = 0$,

$$\{K_i, K_j\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}iv).\ \{Z^i, x^j\}_D &= \{Z^i, x^j\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, x^j\} - \\ &\quad -\{Z^i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{Z^i, x^j\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, x^j\}_D &= (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, x^j\} + \{-p_m, x^j\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{x^j, K_m\} = \{Z^i, p_n\} = \{Z^m, x^j\} = 0$ *e* $\{Z^i, K_j\} = \delta_j^i$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, x^j\}_D &= \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}\delta_n^m\delta_m^j - \delta_n^i\delta_m^n\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\} \\ &= (\{Z^i, p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no}) + p_o\{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}\})\delta_m^j - \delta_m^i(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, x^j\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, p_o\} = \{Z^i, \theta^{no}\} = \{\theta^{mq}, x^j\} = 0$ *e* $\{x^j, p_q\} = \delta_q^j$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, x^j\}_D &= \delta_m^i\frac{1}{2}\theta^{mq}(-\delta_q^j) \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{ij}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v).\ \{K_i, x^j\}_D &= \{K_i, x^j\} - \{K_i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, x^j\} - \\ &\quad -\{K_i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_i, x^j\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{K_i, x^j\}_D &= (\{K_i, Z^n\} + \{K_i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, x^j\} + \{-p_m, x^j\}) - \\ &-(\{K_i, K_n\} + \{K_i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}).\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{Z^n, K_i\} = \delta^n_i, \{K_m, x^j\} = \{K_i, K_n\} = \{K_i, p_n\} = \{Z^m, x^j\} = 0$ *e* $\{x^j, p_m\} = \delta^j_m$,

$$\begin{aligned}\{K_i, x^j\}_D &= (-\delta^n_i + \{K_i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n\delta^j_m \\ &= (-\delta^n_i + (K_i\{-\frac{1}{2}\theta^{no}, p_o\} + \{K_i, p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no})))\delta^j_n.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{\theta^{no}, p_o\} = \{K_i, p_o\} = 0$,

$$\{K_i, x^j\}_D = -\delta^j_i.$$

$$\begin{aligned}vi).\ \{Z^i, p_j\}_D &= \{Z^i, p_j\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, p_j\} - \\ &-\{Z^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, p_j\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, p_j\}_D &= (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, p_j\} + \{-p_m, p_j\}) - \\ &-(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{K_m, p_j\} = \{p_m, p_j\} = \{Z^i, p_n\} = 0$ *e* $\{Z^i, K_n\} = \delta^i_n$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, p_j\}_D &= -\delta^i_n\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\} \\ &= -\delta^i_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, p_j\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, p_j\} = \{\theta^{mq}, p_j\} = 0$,

$$\{Z^i, p_j\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}vii).\ \{K_i, p_j\}_D &= \{K_i, p_j\} - \{K_i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, p_j\} - \\ &-\{K_i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{K_i, p_j\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{K_i, p_j\}_D &= (\{K_i, Z^n\} + \{K_i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, p_j\} + \{-p_m, p_j\}) - \\ &\quad -(\{K_i, K_n\} + \{K_i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}).\end{aligned}$$

Vamos usar a equação (3.3), $\{K_m, p_j\} = \{p_m, p_j\} = \{K_i, K_n\} = \{K_i, p_n\} = \{Z^m, p_j\} = 0$ e $\{Z^i, K_j\} = \delta_j^i$, para ter

$$\{K_i, p_j\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}viii).\ \{Z^i, \theta^{kl}\}_D &= \{Z^i, \theta^{kl}\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, \theta^{kl}\} - \\ &\quad -\{Z^i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{Z^i, \theta^{kl}\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, \theta^{kl}\}_D &= (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, \theta^{kl}\} + \{-p_m, \theta^{kl}\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, \theta^{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{K_m, \theta^{kl}\} = \{p_m, \theta^{kl}\} = \{Z^i, p_n\} = \{Z^m, \theta^{kl}\} = 0$ e $\{Z^i, K_n\} = \delta_n^i$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, \theta^{kl}\}_D &= -\delta_n^i\delta_m^n\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\} \\ &= -\delta_m^i(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, \theta^{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, \theta^{kl}\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, \theta^{kl}\} = \{\theta^{mq}, \theta^{kl}\} = 0$,

$$\{Z^i, \theta^{kl}\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}ix).\ \{Z^i, \pi_{kl}\}_D &= \{Z^i, \pi_{kl}\} - \{Z^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, \pi_{kl}\} - \\ &\quad -\{Z^i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{Z^i, \pi_{kl}\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, \pi_{kl}\}_D &= (\{Z^i, Z^n\} + \{Z^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, \pi_{kl}\} + \{-p_m, \pi_{kl}\}) - \\ &\quad -(\{Z^i, K_n\} + \{Z^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}).\end{aligned}$$

Vamos usar a equação (3.3), $\{Z^i, Z^n\} = \{K_m, \pi_{kl}\} = \{p_m, \pi_{kl}\} = \{Z^i, p_n\} = \{Z^m, \pi_{kl}\} = 0$ e $\{Z^i, K_n\} = \delta_n^i$, e podemos escrever que,

$$\begin{aligned}\{Z^i, \pi_{kl}\}_D &= -\delta_n^i\delta_m^n\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\} \\ &= -\delta_m^i(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, \pi_{kl}\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, \pi_{kl}\} = 0, \{\theta^{mq}, \pi_{kl}\} = \delta^{mq}_{\ \ kl}$,

$$\begin{aligned}\{Z^i, \pi_{kl}\}_D &= \frac{1}{2}\delta^i_m \delta^{mq}_{\ \ kl} p_q \\ &= \frac{1}{2}\delta^{iq}_{\ \ kl} p_q.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x).\ \{K^i, \theta^{kl}\}_D &= \{K^i, \theta^{kl}\} - \{K^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, \theta^{kl}\} - \\ &\quad -\{K^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}.\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K^i, \theta^{kl}\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{K^i, \theta^{kl}\}_D &= (\{K^i, Z^n\} + \{K^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, \theta^{kl}\} + \{-p_m, \theta^{kl}\}) - \\ &\quad -(\{K^i, K_n\} + \{K^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, \theta^{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}).\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{K_m, \theta^{kl}\} = \{K_i, K_n\} = \{K_i, p_n\} = \{Z^m, \theta^{kl}\} = 0$ *e* $\{Z^i, K_j\} = \delta^i_j$, temos que

$$\{K^i, \theta^{kl}\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned} xi).\ \{K_i, \pi_{kl}\}_D &= \{K_i, \pi_{kl}\} - \{K_i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, \pi_{kl}\} - \\ &\quad -\{K_i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{K_i, \pi_{kl}\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{K_i, \pi_{kl}\}_D &= (\{K_i, Z^n\} + \{K_i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, \pi_{kl}\} + \{-p_m, \pi_{kl}\}) - \\ &\quad -(\{K_i, K_n\} + \{K_i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}).\end{aligned}$$

E finalmente com a equação (3.3), $\{K_m, \pi_{kl}\} = \{p_m, \pi_{kl}\} = \{K_i, K_n\} = \{K_i, p_n\} = \{Z^m, \pi_{kl}\} = 0$,

$$\{K_i, \pi_{kl}\}_D = 0.$$

C-3 Demonstração da equação (3.22)

$$\begin{aligned} i).\ \{X^i, X^j\}_D &= \{X^i, X^j\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, X^j\} - \\ &\quad -\{X^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, X^j\} \\ &= \{X^i, X^j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, X^j\} + \{-p_m, X^j\}) - \\ &\quad -(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, X^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, X^j\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.21),

$$\begin{aligned}
\{X^i,X^j\}_D &= \{X^i,X^j\}+(\{x^i+\frac{1}{2}\theta^{iq}p_q,Z^n\}+\{x^i+\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n.\\
&.(\{K_m,x^j+\frac{1}{2}\theta^{js}p_s\}+\{-p_m,x^j+\frac{1}{2}\theta^{jt}p_t\})-\\
&-(\{x^i+\frac{1}{2}\theta^{iu}p_u,K_n\}+\{x^i+\frac{1}{2}\theta^{iv}p_v,-p_n\})\delta^n_m.\\
&.(\{Z^m,x^j+\frac{1}{2}\theta^{jx}p_x\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,x^j+\frac{1}{2}\theta^{jw}p_w\})\\
&= \{X^i,X^j\}+(\{x^i,Z^n\}+\{\frac{1}{2}\theta^{iq}p_q,Z^n\}+\{x^i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}+\\
&+\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m,x^j\}+\{K_m,\frac{1}{2}\theta^{js}p_s\}+\{-p_m,x^j\}+\\
&+\{-p_m,\frac{1}{2}\theta^{jt}p_t\})-(\{x^i,K_n\}+\{\frac{1}{2}\theta^{iu}p_u,K_n\}+\{x^i,-p_n\}+\\
&+\{\frac{1}{2}\theta^{iv}p_v,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,x^j\}+\{Z^m,\frac{1}{2}\theta^{jx}p_x\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,x^j\}+\\
&+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\frac{1}{2}\theta^{jw}p_w\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i,Z^n\}=\{K_m,x^j\}=\{x^i,K_n\}=\{Z^m,x^j\}=0$ e
$\{x^i,p_n\}=\delta^i_n$,

$$\begin{aligned}
\{X^i,X^j\}_D &= \{X^i,X^j\}+(\{\frac{1}{2}\theta^{iq}p_q,Z^n\}+\{x^i,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}+\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r,-\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n.\\
&.(\{K_m,\frac{1}{2}\theta^{js}p_s\}+\{-p_m,\frac{1}{2}\theta^{jt}p_t\}+\delta^j_m)-(\{\frac{1}{2}\theta^{iu}p_u,K_n\}-\delta^i_n+\\
&+\{\frac{1}{2}\theta^{iv}p_v,-p_n\})\delta^n_m(\{Z^m,\frac{1}{2}\theta^{jx}p_x\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,x^j\}+\\
&+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\frac{1}{2}\theta^{jw}p_w\})\\
&= \{X^i,X^j\}+(\frac{1}{2}\theta^{iq}\{p_q,Z^n\}+\{\frac{1}{2}\theta^{iq},Z^n\}p_q+\{x^i,p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no})+\\
&+p_o\{x^i,-\frac{1}{2}\theta^{no}\}+\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r,p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no})+p_o\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r,-\frac{1}{2}\theta^{no}\})\delta^m_n.\\
&.(\{K_m,p_s\}\frac{1}{2}\theta^{js}+p_s\{k_m,\frac{1}{2}\theta^{js}\}+\{-p_m,p_t\}\frac{1}{2}\theta^{jt}+p_t\{-p_m,\frac{1}{2}\theta^{jt}\}+\delta^j_m)-\\
&-(\frac{1}{2}\theta^{iu}\{p_u,K_n\}+\{\frac{1}{2}\theta^{iu},K_n\}p_u-\delta^i_n+\frac{1}{2}\theta^{iv}\{p_v,-p_n\}+\{\frac{1}{2}\theta^{iv},-p_n\}p_v)\delta^n_m.\\
&.(\{Z^m,p_x\}\frac{1}{2}\theta^{jx}+p_x\{Z^m,\frac{1}{2}\theta^{jx}\}-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q,x^j\}+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq},x^j\}p_q+\\
&+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,p_w\}\frac{1}{2}\theta^{jw}+p_w\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q,\frac{1}{2}\theta^{jw}\}).
\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{p_q,Z^n\}=\{\theta^{iq},Z^n\}=\{x^i,\theta^{no}\}=\{K_m,p_s\}=\{K_m,\theta^{js}\}=$

$= \{p_m, p_t\} = \{p_m, \theta^{jt}\} = \{p_u, K_n\} = 0,$

$$\begin{aligned}
\{X^i, X^j\}_D &= \{X^i, X^j\} + (-\frac{1}{2}\theta^{no}\delta^i_o - \frac{1}{2}\theta^{no}\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r, p_o\} + p_o\{\frac{1}{2}\theta^{ir}p_r, -\frac{1}{2}\theta^{no}\})\delta^m_n\delta^j_m + \\
&+\delta^i_n\delta^n_m(\frac{1}{2}\theta^{mq}\delta^j_q + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_w\}\frac{1}{2}\theta^{jw} + p_w\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \frac{1}{2}\theta^{jw}\}) \\
&= \{X^i, X^j\} + (-\frac{1}{2}\theta^{no}\delta^i_o - \frac{1}{2}\theta^{no}(\frac{1}{2}\theta^{ir}\{p_r, p_o\} + \{\frac{1}{2}\theta^{ir}, p_o\}p_q) + \\
&+p_o(\frac{1}{2}\theta^{ir}\{p_r, -\frac{1}{2}\theta^{no}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{ir}, -\frac{1}{2}\theta^{no}\}p_r))\delta^j_n + \delta^i_m(\frac{1}{2}\theta^{mq}\delta^j_q + \\
&+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, p_w\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, p_w\}p_q)\frac{1}{2}\theta^{jw} + p_w(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, \frac{1}{2}\theta^{jw}\} + \\
&+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, \frac{1}{2}\theta^{jw}\}p_q)).
\end{aligned}$$

E com a equação (3.3), $\{p_r, p_o\} = \{\theta^{ir}, p_o\} = \{\theta^{ir}, \theta^{no}\} = 0$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, X^j\}_D &= \{X^i, X^j\} - \frac{1}{2}\theta^{ni}\delta^j_n + \frac{1}{2}\theta^{mj}\delta^i_m \\
&= \{X^i, X^j\} - \frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij}. \qquad \text{(C-1)}
\end{aligned}$$

Agora iremos calcular o parêntese de Poisson $\{X^i, X^j\}$. Logo,

$$\{X^i, X^j\} = \frac{\partial X^i}{\partial x_n}\frac{\partial X^j}{\partial p_n} - \frac{\partial X^i}{\partial p_n}\frac{\partial X^j}{\partial x_n}.$$

Usando a equação (3.21),

$$\begin{aligned}
\{X^i, X^j\} &= \frac{\partial}{\partial x_n}(x^i + \frac{1}{2}\theta^{io}p_o)\frac{\partial}{\partial p_n}(x^j + \frac{1}{2}\theta^{jm}p_m) - \frac{\partial}{\partial p_n}(x^i + \frac{1}{2}\theta^{io}p_o)\frac{\partial}{\partial x_n}(x^j + \frac{1}{2}\theta^{jm}p_m) \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x_n}\frac{1}{2}\theta^{jm}\frac{\partial p_m}{\partial p_n} - \frac{1}{2}\theta^{io}\frac{\partial p_o}{\partial p_n}\frac{\partial x^j}{\partial x_n} \\
&= \delta^i_n\frac{1}{2}\theta^{jm}\delta_{mn} - \frac{1}{2}\theta^{io}\delta_{on}\delta^j_n \\
&= \frac{1}{2}\theta^{jn}\delta^i_n - \frac{1}{2}\theta^{in}\delta^j_n \\
&= \frac{1}{2}\theta^{ji} - \frac{1}{2}\theta^{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (C-1) fica

$$\begin{aligned}
\{X^i, X^j\}_D &= \frac{1}{2}\theta^{ji} - \frac{1}{2}\theta^{ij} - \frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii).\ \{X^i, p_j\}_D &= \{X^i, p_j\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, p_j\} - \\
&-\{X^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\} \\
&= \{X^i, p_j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, p_j\} + \{-p_m, p_j\}) - \\
&-(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}).
\end{aligned}$$

Usando as equações (3.21) e (3.3), $\{K_m, p_j\} = \{p_m, p_j\} = \{Z^m, p_j\} = 0$,

$$
\begin{aligned}
\{X^i, p_j\}_D &= \{X^i, p_j\} - (\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{iq}p_q, K_n\} + \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{iq}p_q, -p_n\})\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\} \\
&= \{X^i, p_j\} - (\{x^i, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{iq}p_q, K_n\} + \{x^i, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{iq}p_q, -p_n\})\delta^n_m(\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, p_j\}.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, K_n\} = 0$ e $\{x^i, p_n\} = \delta^i_n$,

$$
\begin{aligned}
\{X^i, p_j\}_D &= \{X^i, p_j\} - (\frac{1}{2}\theta^{iq}\{p_q, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{iq}, K_n\}p_q - \delta^i_n + \frac{1}{2}\theta^{iq}\{p_q, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{iq}, -p_n\}p_q)\delta^n_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, p_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, p_j\}p_q).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, K_n\} = \{\theta^{iq}, K_n\} = \{p_q, p_n\} = \{\theta^{iq}, p_n\} = 0$, obtemos

$$
\{X^i, p_j\}_D = \{X^i, p_j\}. \qquad \text{(C-2)}
$$

Agora iremos calcular o parêntese de Poisson $\{X^i, p_j\}$. Logo,

$$
\{X^i, p_j\} = \frac{\partial X^i}{\partial x_n}\frac{\partial p_j}{\partial p_n} - \frac{\partial X^i}{\partial p_n}\frac{\partial p_j}{\partial x_n}.
$$

Usando a equação (3.21), temos que

$$
\begin{aligned}
\{X^i, p_j\} &= \frac{\partial}{\partial x_n}(x^i + \frac{1}{2}\theta^{iq}p_q)\delta_{jn} \\
&= (\frac{\partial x^i}{\partial x_n} + \frac{1}{2}\theta^{iq}\frac{\partial p_q}{\partial x_n})\delta_{jn} \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x_n}\delta_{jn} \\
&= \delta^i_n\delta_{jn} \\
&= \delta^i_j.
\end{aligned}
$$

Portanto, a equação (C-2) fica

$$
\{X^i, p_j\}_D = \delta^i_j.
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ \{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, x^j\} - \\
&\quad -\{X^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\} \\
&= \{X^i, x^j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, x^j\} + \{-p_m, x^j\}) - \\
&\quad -(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}).
\end{aligned}
$$

Com as equações (3.21) e (3.3), $\{K_m, x^j\} = \{Z^m, x^j\} = 0$ e
$\{p_m, x^j\} = -\delta^j_m$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} + (\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^n\} + \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n\delta^j_m - \\
&\quad -(\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}) \\
&= \{X^i, x^j\} + (\{x^i, Z^n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^n\} + \{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^j_n - (\{x^i, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta^n_m\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, x^j\}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, Z^n\} = \{x^i, K_n\} = 0$ *e* $\{x^i, p_n\} = \delta^i_n$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} + (\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, Z^n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, Z^n\}p_s + \{x^i, p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no}) + \\
&\quad +p_o\{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no}) + p_o\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}\})\delta^j_n - \\
&\quad -(\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, K_n\}p_s - \delta^i_n + \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{is}, -p_n\}p_s)\delta^n_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, x^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, x^j\}p_q).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_s, Z^n\} = \{\theta^{is}, Z^n\} = \{x^i, \theta^{no}\} = \{p_s, K_n\} = \{\theta^{is}, K_n\} =$
$= \{p_s, p_n\} = \{\theta^{is}, p_n\} = 0$ *e* $\{x^j, p_q\} = \delta^j_q$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} + (-\frac{1}{2}\theta^{no}\delta^i_o - (\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, p_o\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, p_o\}p_s)\frac{1}{2}\theta^{no} + \\
&\quad +p_o(\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, -\frac{1}{2}\theta^{no}\}p_s))\delta^j_n - \\
&\quad -(-\delta^i_n\delta^n_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}(-\delta^j_q))).
\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{p_s, p_o\} = \{\theta^{is}, p_o\} = \{\theta^{is}, \theta^{no}\} = 0$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} - \frac{1}{2}\theta^{ni}\delta^j_n + \frac{1}{2}\delta^i_m\theta^{mj} \\
&= \{X^i, x^j\} - \frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij}. \qquad \text{(C-3)}
\end{aligned}$$

Agora iremos calcular o parêntese de Poisson $\{X^i, x^j\}$. Logo,

$$\{X^i, x^j\} = \frac{\partial X^i}{\partial x_n}\frac{\partial x^j}{\partial p_n} - \frac{\partial X^i}{\partial p_n}\frac{\partial x^j}{\partial x_n}.$$

Usando a equação (3.21), temos que

$$\begin{aligned}\{X^i, x^j\} &= -\frac{\partial}{\partial p_n}(x^i + \frac{1}{2}\theta^{iq}p_q)\delta^j_n \\ &= (-\frac{\partial x^i}{\partial p_n} - \frac{1}{2}\theta^{iq}\frac{\partial p_q}{\partial p_n})\delta^j_n \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{iq}\delta_{qn}\delta^j_n \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{in}\delta^j_n \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, a equação (C-3) fica

$$\begin{aligned}\{X^i, x^j\}_D &= \{X^i, x^j\} - \frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij} \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{ij} - \frac{1}{2}\theta^{ji} + \frac{1}{2}\theta^{ij} \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{ji} \\ &= \frac{1}{2}\theta^{ij}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}iv).\ \{X^i, \theta^{kl}\}_D &= \{X^i, \theta^{kl}\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, \theta^{kl}\} - \\ &\quad -\{X^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\} \\ &= \{X^i, \theta^{kl}\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, \theta^{kl}\} + \{-p_m, \theta^{kl}\}) - \\ &\quad -(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, \theta^{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \theta^{kl}\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_m, \theta^{kl}\} = \{p_m, \theta^{kl}\} = \{Z^m, \theta^{kl}\} = 0$,

$$\{X^i, \theta^{kl}\}_D = \{X^i, \theta^{kl}\} - (\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^m_n(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, \theta^{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, \theta^{kl}\}p_q).$$

Com a equação (3.3), $\{p_q, \theta^{kl}\} = \{\theta^{mq}, \theta^{kl}\} = 0$, obtemos

$$\{X^i, \theta^{kl}\}_D = \{X^i, \theta^{kl}\}.$$

Usando a equação (3.21),

$$\begin{aligned}\{X^i, \theta^{kl}\}_D &= \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{it}p_t, \theta^{kl}\} \\ &= \{x^i, \theta^{kl}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{it}p_t, \theta^{kl}\}.\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{x^i, \theta^{kl}\} = 0$,

$$\{X^i, \theta^{kl}\}_D = \frac{1}{2}\theta^{it}\{p_t, \theta^{kl}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{it}, \theta^{kl}\}p_t.$$

Novamente com a equação (3.3), $\{p_t, \theta^{kl}\} = \{\theta^{it}, \theta^{kl}\} = 0$, obtemos

$$\{X^i, \theta^{kl}\}_D = 0.$$

$$\begin{aligned}
v). \ \{X^i, \pi_{kl}\}_D &= \{X^i, \pi_{kl}\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, \pi_{kl}\} - \\
&\quad -\{X^i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\} \\
&= \{X^i, \pi_{kl}\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, \pi_{kl}\} + \{-p_m, \pi_{kl}\}) - \\
&\quad -(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, \pi_{kl}\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_m, \pi_{kl}\} = \{p_m, \pi_{kl}\} = \{Z^m, \pi_{kl}\} = 0$,

$$\{X^i, \pi_{kl}\}_D = \{X^i, \pi_{kl}\} - (\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta_m^n(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, \pi_{kl}\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, \pi_{kl}\}p_q).$$

E com a equação (3.3), $\{p_q, \pi_{kl}\} = 0$ *e* $\{\theta^{mq}, \pi_{kl}\} = \delta^{mq}_{\ \ kl}$ e a equação (3.21),

$$\begin{aligned}
\{X^i, \pi_{kl}\}_D &= \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, \pi_{kl}\} - (\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta_m^n(-\frac{1}{2}\delta^{mq}_{\ \ kl}p_q) \\
&= \{x^i, \pi_{kl}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, \pi_{kl}\} - (\{x^i, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta_m^n(-\frac{1}{2}\delta^{mq}_{\ \ kl}p_q).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, \pi_{kl}\} = \{x^i, K_n\} = 0, \{x^i, p_n\} = \delta_n^i$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, \pi_{kl}\}_D &= \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, \pi_{kl}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, \pi_{kl}\}p_s - (\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, K_n\}p_s - \delta_n^i + \\
&\quad +\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, -p_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, -p_n\}p_s)\delta_m^n(-\frac{1}{2}\delta^{mq}_{\ \ kl}p_q).
\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{p_s, \pi_{kl}\} = \{p_s, K_n\} = \{\theta^{is}, K_n\} = \{p_s, p_n\} = \{\theta^{is}, p_n\} = 0, \{\theta^{is}, \pi_{kl}\} = \delta^{is}_{\ \ kl}$,

$$\begin{aligned}
\{X^i, \pi_{kl}\}_D &= \frac{1}{2}\delta^{is}_{\ \ kl}p_s - \frac{1}{2}\delta_n^i\delta_m^n\delta^{mq}_{\ \ kl}p_q \\
&= \frac{1}{2}\delta^{is}_{\ \ kl}p_s - \frac{1}{2}\delta_m^i\delta^{mq}_{\ \ kl}p_q \\
&= \frac{1}{2}\delta^{is}_{\ \ kl}p_s - \frac{1}{2}\delta^{iq}_{\ \ kl}p_q \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vi). \ \{X^i, Z^j\}_D &= \{X^i, Z^j\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta_n^m)\{K_m - p_m, Z^j\} - \\
&\quad -\{X^i, K_n - p_n\}\delta_m^n\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, Z^j\} \\
&= \{X^i, Z^j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta_n^m(\{K_m, Z^j\} + \{-p_m, Z^j\}) - \\
&\quad -(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta_m^n(\{Z^m, Z^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, Z^j\}).
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_m, Z^j\} = \{Z^m, Z^j\} = 0,\ \{Z^i, K_j\} = \delta^i_j$,

$$\begin{aligned}\{X^i, Z^j\}_D &= \{X^i, Z^j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, p_o\}(-\frac{1}{2}\theta^{no}) + p_o\{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}\})\delta^m_n(-\delta^j_m) - \\ &-(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(-\frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, Z^j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, Z^j\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, Z^j\} = 0$ e a equação (3.21),

$$\begin{aligned}\{X^i, Z^j\}_D &= \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^j\} + (\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^n\} - \frac{1}{2}\theta^{no}\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, p_o\} + \\ &+p_o\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}\})(-\delta^j_n) \\ &= \{x^i, Z^j\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^j\} + (\{x^i, Z^n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, Z^n\} - \frac{1}{2}\theta^{no}(\{x^i, p_o\} + \\ &+\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, p_o\}) + p_o(\{x^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}\}))(-\delta^j_n).\end{aligned}$$

Com a equação (3.3), $\{x^i, Z^j\} = \{x^i, \theta^{no}\} = 0,\ \{x^i, p_o\} = \delta^i_o$,

$$\begin{aligned}\{X^i, Z^j\}_D &= \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, Z^j\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, Z^j\}p_s + (\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, Z^n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, Z^n\}p_s) - \\ &-\frac{1}{2}\theta^{no}(\delta^i_o + \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, p_o\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, p_o\}p_s) + p_o(\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, -\frac{1}{2}\theta^{no}\} + \\ &+\{\frac{1}{2}\theta^{is}, -\frac{1}{2}\theta^{no}\}p_s)(-\delta^j_n).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_s, Z^j\} = \{\theta^{is}, Z^j\} = \{p_s, p_o\} = \{\theta^{is}, p_o\} = \{\theta^{is}, \theta^{no}\} = 0$,

$$\begin{aligned}\{X^i, Z^j\}_D &= \frac{1}{2}\theta^{no}\delta^i_o\delta^j_n \\ &= \frac{1}{2}\theta^{ni}\delta^j_n \\ &= \frac{1}{2}\theta^{ji} \\ &= -\frac{1}{2}\theta^{ij}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}vii).\ \{X^i, K_j\}_D &= \{X^i, K_j\} - \{X^i, Z^n - \frac{1}{2}\theta^{no}p_o\}(-\delta^m_n)\{K_m - p_m, K_j\} - \\ &-\{X^i, K_n - p_n\}\delta^n_m\{Z^m - \frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\} \\ &= \{X^i, K_j\} + (\{X^i, Z^n\} + \{X^i, -\frac{1}{2}\theta^{no}p_o\})\delta^m_n(\{K_m, K_j\} + \{-p_m, K_j\}) - \\ &-(\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\{Z^m, K_j\} + \{-\frac{1}{2}\theta^{mq}p_q, K_j\}).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{K_m, K_j\} = \{p_m, K_j\} = 0,\ \{Z^m, K_j\} = \delta^m_j$,

$$\begin{aligned}\{X^i, K_j\}_D &= \{X^i, K_j\} - (\{X^i, K_n\} + \{X^i, -p_n\})\delta^n_m(\delta^m_j - \frac{1}{2}\theta^{mq}\{p_q, K_j\} + \\ &+\{-\frac{1}{2}\theta^{mq}, K_j\}p_q).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), $\{p_q, K_j\} = \{\theta^{mq}, K_j\} = 0$ e (3.21),

$$
\begin{aligned}
\{X^i, K_j\}_D &= \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_j\} - (\{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i + \frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta^n_j \\
&= \{x^i, K_j\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_j\} - (\{x^i, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, K_n\} + \{x^i, -p_n\} + \\
&\quad +\{\frac{1}{2}\theta^{is}p_s, -p_n\})\delta^n_j.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{x^i, K_j\} = 0$, $\{x^i, p_n\} = \delta^i_n$,

$$
\begin{aligned}
\{X^i, K_j\}_D &= \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, K_j\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, K_j\}p_s - (\frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, K_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, K_n\}p_s - \\
&\quad -\delta^i_n + \frac{1}{2}\theta^{is}\{p_s, -p_n\} + \{\frac{1}{2}\theta^{is}, -p_n\}p_s)\delta^n_j.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (3.3), $\{p_s, K_j\} = \{\theta^{is}, K_j\} = \{p_s, p_n\} = \{\theta^{is}, p_n\} = 0$,

$$
\{X^i, K_j\}_D = \delta^i_j.
$$

Apêndice D: Demonstrações do Capítulo 4

D-1 Demonstração da equação (4.2)

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta \mathbf{X}^{\mu} &= i[\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{L}^{\rho\sigma}] \\
&= i[\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma} - \mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho})] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^{\mu}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma} - \mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}) - (\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma} - \mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho})\mathbf{X}^{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma} - \mathbf{X}^{\mu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho} - \mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\mathbf{X}^{\mu} + \mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\mathbf{X}^{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}] + [\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}, \mathbf{X}^{\mu}]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{X}^{\rho}]\mathbf{p}^{\sigma} + \mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}^{\sigma}] + [\mathbf{X}^{\sigma}, \mathbf{X}^{\mu}]\mathbf{p}^{\rho} + \mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho}, \mathbf{X}^{\mu}]).
\end{aligned}
$$

Usando a equação (2.26) e a equação (2.29)

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{X}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(i\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\mu\sigma} - i\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\mu\rho}) \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\mu\rho} \\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\rho}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\omega^{\rho\mu}\mathbf{X}_{\rho} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}\mathbf{X}_{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}(-\omega^{\mu\rho})\mathbf{X}_{\rho} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}\mathbf{X}_{\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\omega^{\mu\rho}\mathbf{X}_{\rho} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}\mathbf{X}_{\sigma} \\
&= \omega^{\mu\nu}\mathbf{X}_{\nu} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
ii).\ \delta\mathbf{p}_\mu &= i[\mathbf{p}_\mu, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{L}^{\rho\sigma}] \\
&= i[\mathbf{p}_\mu, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho)] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{p}_\mu(\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho) - (\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho)\mathbf{p}_\mu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{p}_\mu\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{p}_\mu\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho - \mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma\mathbf{p}_\mu + \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho\mathbf{p}_\mu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{p}_\mu, \mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma] + [\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho, \mathbf{p}_\mu]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{p}_\mu, \mathbf{X}^\rho]\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\rho[\mathbf{p}_\mu, \mathbf{p}^\sigma] + [\mathbf{X}^\sigma, \mathbf{p}_\mu]\mathbf{p}^\rho + \mathbf{X}^\sigma[\mathbf{p}^\rho, \mathbf{p}_\mu]).
\end{aligned}$$

Com a segunda equação em (2.11) e a equação (2.29),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}_\mu &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(-i\eta^\rho_\mu\mathbf{p}^\sigma + i\eta^\sigma_\mu\mathbf{p}^\rho) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^\rho_\mu\mathbf{p}^\sigma - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^\sigma_\mu\mathbf{p}^\rho \\
&= \frac{1}{2}\omega_\mu{}^\sigma\mathbf{p}_\sigma - \frac{1}{2}\omega^\rho{}_\mu\mathbf{p}_\rho.
\end{aligned}$$

Como $\omega^\rho{}_\mu$ é antissimétrico, ou seja, $\omega^\rho{}_\mu = -\omega_\mu{}^\rho$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}_\mu &= \frac{1}{2}\omega_\mu{}^\sigma\mathbf{p}_\sigma - \frac{1}{2}(-\omega_\mu{}^\rho)\mathbf{p}_\rho \\
&= \frac{1}{2}\omega_\mu{}^\sigma\mathbf{p}_\sigma + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^\rho\mathbf{p}_\rho \\
&= \omega_\mu{}^\nu\mathbf{p}_\nu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii).\ \delta\mathbf{L}^{\mu\nu} &= i[\mathbf{L}^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{L}^{\rho\sigma}] \\
&= i[\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho)] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}((\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu)(\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho) - (\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho)(\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu)) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma - \mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho - \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho - \mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu + \\
&\quad +\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu + \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu, \mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma] + [\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu, \mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho] + [\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho, \mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu] + [\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma, \mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu, \mathbf{X}^\rho]\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\rho[\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\nu, \mathbf{p}^\sigma] + [\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu, \mathbf{X}^\sigma]\mathbf{p}^\rho + \mathbf{X}^\sigma[\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\rho] + \\
&\quad +[\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho, \mathbf{X}^\mu]\mathbf{p}^\nu + \mathbf{X}^\mu[\mathbf{X}^\sigma\mathbf{p}^\rho, \mathbf{p}^\nu] + [\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma, \mathbf{X}^\nu]\mathbf{p}^\mu + \mathbf{X}^\nu[\mathbf{X}^\rho\mathbf{p}^\sigma, \mathbf{p}^\mu]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(([\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\rho]\mathbf{p}^\nu + \mathbf{X}^\mu[\mathbf{p}^\nu, \mathbf{X}^\rho])\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\rho([\mathbf{X}^\mu, \mathbf{p}^\sigma]\mathbf{p}^\nu + \mathbf{X}^\mu[\mathbf{p}^\nu, \mathbf{p}^\sigma]) + \\
&\quad +([\mathbf{X}^\nu, \mathbf{X}^\sigma]\mathbf{p}^\mu + \mathbf{X}^\nu[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{X}^\sigma])\mathbf{p}^\rho + \mathbf{X}^\sigma([\mathbf{X}^\nu, \mathbf{p}^\rho]\mathbf{p}^\mu + \mathbf{X}^\nu[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\rho]) + \\
&\quad +([\mathbf{X}^\sigma, \mathbf{X}^\mu]\mathbf{p}^\rho + \mathbf{X}^\sigma[\mathbf{p}^\rho, \mathbf{X}^\mu])\mathbf{p}^\nu + \mathbf{X}^\mu([\mathbf{X}^\sigma, \mathbf{p}^\nu]\mathbf{p}^\rho + \mathbf{X}^\sigma[\mathbf{p}^\rho, \mathbf{p}^\nu]) + \\
&\quad +([\mathbf{X}^\rho, \mathbf{X}^\nu]\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\rho[\mathbf{p}^\sigma, \mathbf{X}^\nu])\mathbf{p}^\mu + \mathbf{X}^\nu([\mathbf{X}^\rho, \mathbf{p}^\mu]\mathbf{p}^\sigma + \mathbf{X}^\rho[\mathbf{p}^\sigma, \mathbf{p}^\mu])).
\end{aligned}$$

Usando a segunda equação de (2.11),(2.29) e (2.26),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{L}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}(-i\eta^{\rho\nu})\mathbf{p}^{\sigma}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{p}^{\nu}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}(-i\eta^{\sigma\mu})\mathbf{p}^{\rho}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}i\eta^{\nu\rho}\mathbf{p}^{\mu}+\\
&\quad+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}(-i\eta^{\mu\rho})\mathbf{p}^{\nu}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}i\eta^{\sigma\nu}\mathbf{p}^{\rho}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}(-i\eta^{\nu\sigma})\mathbf{p}^{\mu}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}i\eta^{\rho\mu}\mathbf{p}^{\sigma}\\
&= \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\eta^{\rho\nu}\mathbf{p}^{\sigma}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\mu\sigma}\mathbf{p}^{\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\eta^{\sigma\mu}\mathbf{p}^{\rho}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\nu\rho}\mathbf{p}^{\mu}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\mu\rho}\mathbf{p}^{\nu}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\eta^{\sigma\nu}\mathbf{p}^{\rho}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{p}^{\mu}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\eta^{\rho\mu}\mathbf{p}^{\sigma}\\
&= \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\eta^{\rho\nu}\mathbf{p}^{\sigma}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\rho\nu}\mathbf{p}^{\mu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\eta^{\sigma\mu}\mathbf{p}^{\rho}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\sigma\mu}\mathbf{p}^{\nu}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\eta^{\mu\rho}\mathbf{p}^{\nu}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\eta^{\mu\rho}\mathbf{p}^{\sigma}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{p}^{\mu}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\\
&= \frac{1}{2}\omega^{\nu}{}_{\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\sigma}-\frac{1}{2}\omega^{\nu}{}_{\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\mu}+\frac{1}{2}\omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\rho}-\frac{1}{2}\omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\nu}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\omega^{\mu}{}_{\sigma}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\nu}-\frac{1}{2}\omega^{\mu}{}_{\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\sigma}+\frac{1}{2}\omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\mu}-\frac{1}{2}\omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\rho}\\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{L}^{\rho\nu}+\omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{L}^{\mu\rho}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv).\ \delta\mathbf{x}^{\mu} &= i[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{L}^{\rho\sigma}]\\
&= i[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho})]\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{x}^{\mu}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho})-(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho})\mathbf{x}^{\mu})\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathbf{x}^{\mu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{x}^{\mu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\mathbf{x}^{\mu}+\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\mathbf{x}^{\mu})\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{x}^{\mu}])\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{X}^{\rho}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma},\mathbf{x}^{\mu}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{x}^{\mu}]).
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (2.8) e (2.25),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{x}^{\rho}+\frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}i\eta^{\mu\sigma}+[\mathbf{x}^{\sigma}+\frac{1}{2}\theta^{\sigma\alpha}\mathbf{p}_{\alpha},\mathbf{x}^{\mu}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}(-i\eta^{\mu\rho})\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}((\mathbf{x}^{\mu}(\mathbf{x}^{\rho}+\frac{1}{2}\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_{\gamma})-(\mathbf{x}^{\rho}+\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\mathbf{p}_{\gamma})\mathbf{x}^{\mu})\mathbf{p}^{\sigma}+i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}+((\mathbf{x}^{\sigma}+\frac{1}{2}\theta^{\sigma\alpha}\mathbf{p}_{\alpha})\mathbf{x}^{\mu}-\\
&\quad-\mathbf{x}^{\mu}(\mathbf{x}^{\sigma}+\frac{1}{2}\theta^{\sigma\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}))\mathbf{p}^{\rho}-i\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma})\\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{x}^{\rho}]+\frac{1}{2}[\mathbf{x}^{\mu},\theta^{\rho\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}])\mathbf{p}^{\sigma}+i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}+([\mathbf{x}^{\sigma},\mathbf{x}^{\mu}]+\frac{1}{2}[\theta^{\sigma\alpha}\mathbf{p}_{\alpha},\mathbf{x}^{\mu}])\mathbf{p}^{\rho}-\\
&\quad-i\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}).
\end{aligned}$$

Com as primeiras equações de (2.8) e (2.11),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}((i\theta^{\mu\rho}+\frac{1}{2}([\mathbf{x}^{\mu},\theta^{\rho\gamma}]\mathbf{p}_{\gamma}+\theta^{\rho\gamma}[\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{p}_{\gamma}]))\mathbf{p}^{\sigma}+i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}+\\
&\quad+(i\theta^{\sigma\mu}+\frac{1}{2}([\theta^{\sigma\alpha},\mathbf{x}^{\mu}]\mathbf{p}_{\alpha}+\theta^{\sigma\alpha}[\mathbf{p}_{\alpha},\mathbf{x}^{\mu}]))\mathbf{p}^{\rho}-\\
&\quad-i\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}).
\end{aligned}$$

Com a primeira equação de (2.8) e a equação (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x}^{\mu} &= -\frac{1}{2}\theta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{p}^{\sigma}+\frac{i}{4}\theta^{\rho\gamma}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{p}^{\sigma}i\eta^{\mu}_{\gamma}-\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\rho}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\sigma}-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\theta^{\sigma\mu}\mathbf{p}^{\rho}+\frac{i}{4}\omega_{\rho\sigma}\theta^{\sigma\alpha}(-i\eta^{\mu}_{\alpha})\mathbf{p}^{\rho}+\\ &\quad +\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}.\end{aligned}$$

Usando a equação (2.25),

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x}^{\mu} &= -\frac{1}{2}\theta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{p}^{\sigma}-\frac{1}{4}\theta^{\mu}{}_{\rho}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{p}^{\sigma}-\frac{1}{2}\omega^{\rho\mu}(\mathbf{x}_{\rho}+\frac{1}{2}\theta_{\rho\nu}\mathbf{p}^{\nu})-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\theta^{\sigma\mu}\mathbf{p}^{\rho}+\\ &\quad +\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\theta^{\mu}{}_{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}+\frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}(\mathbf{x}_{\sigma}+\frac{1}{2}\theta_{\sigma\eta}\mathbf{p}^{\eta})\\ &= \omega^{\mu}_{\ \nu}(\mathbf{x}^{\nu}+\frac{1}{2}\theta^{\rho\nu}\mathbf{p}_{\nu})-\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}\mathbf{p}^{\rho}.\end{aligned}$$

D-2 Demonstração da equação (4.6)

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}^{\mu\nu},\mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}-\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu},\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}]\\
&= (\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}-\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu})(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho})-\\
&\quad -(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho})(\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}-\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu})\\
&= \mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}+\\
&\quad +\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}+\\
&\quad +\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}+\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}+\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}-\\
&\quad -\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}-\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}+\\
&\quad +\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}-\\
&\quad -\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}-\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}-\\
&\quad -\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}-\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}-\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}+\\
&\quad +\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}+\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\\
&= [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}]+[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma},\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}]+[\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}]+\\
&\quad +[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}]+[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}]+[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}]+[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho},\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}]+\\
&\quad +[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}]+[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu},\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho}]+[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu},\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}]+[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma},\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}]+\\
&\quad +[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu},\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}]+[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma},\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}]+[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu},\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}].\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{M}^{\mu\nu},\mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{X}^{\rho}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{X}^{\mu}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{p}^{\nu}]+\\
&+[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}^{\ \sigma},\mathbf{X}^{\mu}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}^{\ \sigma},\mathbf{p}^{\nu}]+[\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\theta^{\sigma\beta}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu},\pi_{\beta}^{\ \rho}]+\\
&+[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\mathbf{X}^{\nu}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\mathbf{p}^{\mu}]+[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\mathbf{X}^{\sigma}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\mathbf{p}^{\rho}]+\\
&+[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\theta^{\rho\beta}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu},\pi_{\beta}^{\ \sigma}]+[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}^{\ \rho},\mathbf{X}^{\nu}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}^{\ \rho},\mathbf{p}^{\mu}]+\\
&+[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\theta^{\mu\alpha}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\sigma},\pi_{\alpha}^{\ \nu}]+[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \nu},X^{\sigma}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \nu},\mathbf{p}^{\rho}]+\\
&+[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \nu},\theta^{\rho\beta}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\theta^{\mu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \nu},\pi_{\beta}^{\ \sigma}]+[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}^{\ \rho},\theta^{\mu\alpha}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\theta^{\sigma\beta}\pi_{\beta}^{\ \rho},\pi_{\alpha}^{\ \nu}]+\\
&+[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \mu},\mathbf{X}^{\rho}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \mu},\mathbf{p}^{\sigma}]+[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\theta^{\nu\alpha}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\rho},\pi_{\alpha}^{\ \mu}]+\\
&+[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}^{\ \sigma},\theta^{\nu\alpha}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\theta^{\rho\beta}\pi_{\beta}^{\ \sigma},\pi_{\alpha}^{\ \mu}]+[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \mu},\theta^{\sigma\beta}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\theta^{\nu\alpha}\pi_{\alpha}^{\ \mu},\pi_{\beta}^{\ \rho}]\\
&= ([\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{X}^{\rho}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{X}^{\rho}])\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}([\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{p}^{\sigma}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu},\mathbf{p}^{\sigma}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\sigma},\mathbf{X}^{\mu}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{X}^{\mu}])\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}([\mathbf{X}^{\sigma},\mathbf{p}^{\nu}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho},\mathbf{p}^{\nu}])+\\
&+([\theta^{\rho\beta},\mathbf{X}^{\mu}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\pi_{\beta}^{\ \sigma},\mathbf{X}^{\mu}])\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}([\theta^{\rho\beta},\mathbf{p}^{\nu}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\pi_{\beta}^{\ \sigma},\mathbf{p}^{\nu}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\mu},\theta^{\sigma\beta}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu},\theta^{\sigma\beta}])\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}([\mathbf{X}^{\mu},\pi_{\beta}^{\ \rho}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu},\pi_{\beta}^{\ \rho}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\rho},\mathbf{X}^{\nu}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{p}^{\sigma},\mathbf{X}^{\nu}])\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}([\mathbf{X}^{\rho},\mathbf{p}^{\mu}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{p}^{\sigma},\mathbf{p}^{\mu}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\nu},\mathbf{X}^{\sigma}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu},\mathbf{X}^{\sigma}])\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}([\mathbf{X}^{\nu},\mathbf{p}^{\rho}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu},\mathbf{p}^{\rho}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\nu},\theta^{\rho\beta}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu},\theta^{\rho\beta}])\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}([\mathbf{X}^{\nu},\pi_{\beta}^{\ \sigma}]\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu},\pi_{\beta}^{\ \sigma}])+\\
&+([\theta^{\sigma\beta},\mathbf{X}^{\nu}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\pi_{\beta}^{\ \rho},\mathbf{X}^{\nu}])\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}([\theta^{\sigma\beta},\mathbf{p}^{\mu}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\pi_{\beta}^{\ \rho},\mathbf{p}^{\mu}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\rho},\theta^{\mu\alpha}]\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{p}^{\nu},\theta^{\mu\alpha}])\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}([\mathbf{X}^{\rho},\pi_{\alpha}^{\ \nu}]\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}[\mathbf{p}^{\sigma},\pi_{\alpha}^{\ \nu}])+\\
&+([\theta^{\mu\alpha},\mathbf{X}^{\sigma}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \nu},\mathbf{X}^{\sigma}])\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}([\theta^{\mu\alpha},\mathbf{p}^{\rho}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \nu},\mathbf{p}^{\rho}])+\\
&+([\theta^{\mu\alpha},\theta^{\rho\beta}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \nu},\theta^{\rho\beta}])\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}([\theta^{\mu\alpha},\pi_{\beta}^{\ \sigma}]\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \nu},\pi_{\beta}^{\ \sigma}])+\\
&+([\theta^{\sigma\beta},\theta^{\mu\alpha}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\pi_{\beta}^{\ \rho},\theta^{\mu\alpha}])\pi_{\alpha}^{\ \nu}+\theta^{\mu\alpha}([\theta^{\sigma\beta},\pi_{\alpha}^{\ \nu}]\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}[\pi_{\beta}^{\ \rho},\pi_{\alpha}^{\ \nu}])+\\
&+([\theta^{\nu\alpha},\mathbf{X}^{\rho}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \mu},\mathbf{X}^{\rho}])\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}([\theta^{\nu\alpha},\mathbf{p}^{\sigma}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \mu},\mathbf{p}^{\sigma}])+\\
&+([\mathbf{X}^{\sigma},\theta^{\nu\alpha}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho},\theta^{\nu\alpha}])\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}([\mathbf{X}^{\sigma},\pi_{\alpha}^{\ \mu}]\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}[\mathbf{p}^{\rho},\pi_{\alpha}^{\ \mu}])+\\
&+([\theta^{\rho\beta},\theta^{\nu\alpha}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\pi_{\beta}^{\ \sigma},\theta^{\nu\alpha}])\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}([\theta^{\rho\beta},\pi_{\alpha}^{\ \mu}]\pi_{\beta}^{\ \sigma}+\theta^{\rho\beta}[\pi_{\beta}^{\ \sigma},\pi_{\alpha}^{\ \mu}])+\\
&+([\theta^{\nu\alpha},\theta^{\sigma\beta}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \mu},\theta^{\sigma\beta}])\pi_{\beta}^{\ \rho}+\theta^{\sigma\beta}([\theta^{\nu\alpha},\pi_{\beta}^{\ \rho}]\pi_{\alpha}^{\ \mu}+\theta^{\nu\alpha}[\pi_{\alpha}^{\ \mu},\pi_{\beta}^{\ \rho}]).
\end{aligned}
$$

Usando as equações (2.11), (2.13), (2.17), (2.27), (2.28), (2.29), (2.26) e usando o fato que

π_{kl} comuta com π_{ij}, obtemos

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{M}^{\mu\nu},\mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= \mathbf{X}^{\mu}(-i\eta^{\rho\nu})\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\rho}i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\sigma}(-i\eta^{\mu\rho})\mathbf{p}^{\nu}+\mathbf{X}^{\mu}i\eta^{\sigma\nu}\mathbf{p}^{\rho}+\\
&+\mathbf{X}^{\rho}(-i\eta^{\nu\sigma})\mathbf{p}^{\mu}+\mathbf{X}^{\nu}i\eta^{\rho\mu}\mathbf{p}^{\sigma}+\mathbf{X}^{\nu}(-i\eta^{\sigma\mu})\mathbf{p}^{\rho}+\mathbf{X}^{\sigma}i\eta^{\nu\rho}\mathbf{p}^{\mu}+\\
&+\theta^{\mu\alpha}(-i\eta_{\alpha}^{\rho\beta\nu})\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\theta^{\rho\beta}i\eta_{\beta}^{\mu\alpha\sigma}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\theta^{\sigma\beta}(-i\eta_{\beta}^{\mu\alpha\rho})\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\\
&+\theta^{\mu\alpha}i\eta_{\alpha}^{\sigma\beta\nu}\pi_{\beta}{}^{\rho}+\theta^{\rho\beta}(-i\eta_{\beta}^{\nu\alpha\sigma})\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\theta^{\nu\alpha}i\eta_{\alpha}^{\rho\beta\mu}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\\
&+\theta^{\nu\alpha}(-i\eta_{\alpha}^{\sigma\beta\mu})\pi_{\beta}{}^{\rho}+\theta^{\sigma\beta}i\eta_{\beta}^{\nu\alpha\rho}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\\
&= i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\nu}+i\eta^{\mu\sigma}(-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\rho})+i\eta^{\nu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\mu}+i\eta^{\nu\rho}(-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\sigma})-\\
&-i\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\nu}-i\eta^{\mu\rho}(-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\sigma})-i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\mu}-i\eta^{\nu\sigma}(-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\rho})-\\
&-i\theta^{\mu\alpha}(\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\nu}-\eta^{\rho\nu}\eta_{\alpha}^{\beta})\pi_{\beta}{}^{\sigma}+i\theta^{\rho\beta}(\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\sigma}-\eta^{\mu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha})\pi_{\alpha}{}^{\nu}-\\
&-i\theta^{\sigma\beta}(\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\rho}-\eta^{\mu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha})\pi_{\alpha}{}^{\nu}+i\theta^{\mu\alpha}(\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\nu}-\eta^{\sigma\nu}\eta_{\alpha}^{\beta})\pi_{\beta}{}^{\rho}-\\
&-i\theta^{\rho\beta}(\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\sigma}-\eta^{\nu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha})\pi_{\alpha}{}^{\mu}+i\theta^{\nu\alpha}(\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\mu}-\eta^{\rho\mu}\eta_{\alpha}^{\beta})\pi_{\beta}{}^{\sigma}-\\
&-i\theta^{\nu\alpha}(\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\mu}-\eta^{\sigma\mu}\eta_{\alpha}^{\beta})\pi_{\beta}{}^{\rho}+i\theta^{\sigma\beta}(\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\rho}-\eta^{\nu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha})\pi_{\alpha}{}^{\mu}\\
&= i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\nu}+i\eta^{\mu\sigma}(-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\rho})+i\eta^{\nu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\mu}+i\eta^{\nu\rho}(-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\sigma})-\\
&-i\eta^{\mu\rho}\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\nu}-i\eta^{\mu\rho}(-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\sigma})-i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\mu}-i\eta^{\nu\sigma}(-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\rho})-\\
&-i\theta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\nu}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\rho\nu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+i\theta^{\rho\beta}\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\sigma}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-\\
&-i\theta^{\rho\beta}\eta^{\mu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-i\theta^{\sigma\beta}\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\rho}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\mu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\\
&+i\theta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\nu}\pi_{\beta}{}^{\rho}-i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\sigma\nu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-i\theta^{\rho\beta}\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\sigma}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\\
&+i\theta^{\rho\beta}\eta^{\nu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+i\theta^{\nu\alpha}\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\mu}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\mu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-\\
&-i\theta^{\nu\alpha}\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\mu}\pi_{\beta}{}^{\rho}+i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\sigma\mu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}+i\theta^{\sigma\beta}\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\rho}\pi_{\alpha}{}^{\mu}-i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\nu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}\\
&= i\eta^{\mu\sigma}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\nu}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\rho})+i\eta^{\nu\rho}(\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\mu}-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\sigma})-\\
&-i\eta^{\mu\rho}(\mathbf{X}^{\sigma}\mathbf{p}^{\nu}-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\sigma})-i\eta^{\nu\sigma}(\mathbf{X}^{\rho}\mathbf{p}^{\mu}-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\rho})-\\
&-i\theta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\nu}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+i\theta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\nu}\pi_{\beta}{}^{\rho}+\\
&+i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\rho\nu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\nu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\\
&+i\theta^{\rho\beta}\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\sigma}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-i\theta^{\rho\beta}\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\sigma}\pi_{\alpha}{}^{\mu}+\\
&+i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\mu\rho}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}-i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\mu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\sigma}+\\
&+i\theta^{\nu\alpha}\eta_{\alpha}^{\rho}\eta^{\beta\mu}\pi_{\beta}{}^{\sigma}-i\theta^{\nu\alpha}\eta_{\alpha}^{\sigma}\eta^{\beta\mu}\pi_{\beta}{}^{\rho}+\\
&+i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\sigma\mu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-i\theta^{\rho\beta}\eta^{\mu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+\\
&+i\theta^{\rho\beta}\eta^{\nu\sigma}\eta_{\beta}^{\alpha}\pi_{\alpha}{}^{\mu}-i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\sigma\nu}\eta_{\alpha}^{\beta}\pi_{\beta}{}^{\rho}-\\
&-i\theta^{\sigma\beta}\eta_{\beta}^{\mu}\eta^{\alpha\rho}\pi_{\alpha}{}^{\nu}+i\theta^{\sigma\beta}\eta_{\beta}^{\nu}\eta^{\alpha\rho}\pi_{\alpha}{}^{\mu}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= i\eta^{\mu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\rho) + i\eta^{\nu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\sigma) - \\
&\quad -i\eta^{\mu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\sigma) - i\eta^{\nu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\rho) + \\
&\quad +i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\rho}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\sigma - i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\nu\rho}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\mu + \\
&\quad +i\theta^{\sigma\beta}\eta^{\mu\rho}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\nu - i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\rho}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\sigma + \\
&\quad +i\theta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\sigma}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\rho - i\theta^{\rho\beta}\eta^{\mu\sigma}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\nu + \\
&\quad +i\theta^{\rho\beta}\eta^{\nu\sigma}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\mu - i\theta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\sigma}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\rho \\
&= i\eta^{\mu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\rho - \theta^{\rho\beta}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\nu + \theta^{\nu\alpha}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\rho) + \\
&\quad +i\eta^{\nu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\sigma - \theta^{\sigma\beta}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\mu + \theta^{\mu\alpha}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\sigma) - \\
&\quad -i\eta^{\mu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\sigma - \theta^{\nu\alpha}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\sigma + \theta^{\sigma\beta}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\nu) - \\
&\quad -i\eta^{\nu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\rho - \theta^{\mu\alpha}\eta^\beta_\alpha \pi_\beta{}^\rho + \theta^{\rho\beta}\eta^\alpha_\beta \pi_\alpha{}^\mu) \\
&= i\eta^{\mu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\rho - \theta^{\rho\alpha}\pi_\alpha{}^\nu + \theta^{\nu\alpha}\pi_\alpha{}^\rho) + \\
&\quad +i\eta^{\nu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\sigma - \theta^{\sigma\alpha}\pi_\alpha{}^\mu + \theta^{\mu\alpha}\pi_\alpha{}^\sigma) - \\
&\quad -i\eta^{\mu\rho}(\mathbf{X}^\sigma \mathbf{p}^\nu - \mathbf{X}^\nu \mathbf{p}^\sigma - \theta^{\nu\alpha}\pi_\alpha{}^\sigma + \theta^{\sigma\alpha}\pi_\alpha{}^\nu) - \\
&\quad -i\eta^{\nu\sigma}(\mathbf{X}^\rho \mathbf{p}^\mu - \mathbf{X}^\mu \mathbf{p}^\rho - \theta^{\mu\alpha}\pi_\alpha{}^\rho + \theta^{\rho\alpha}\pi_\alpha{}^\mu) \\
&= i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} - i\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} + i\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu}.
\end{aligned}
$$

D-3 Demonstração da equação (4.7)

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{x}^\mu &= i[\mathbf{x}^\mu, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^\mu(\mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha) - \\
&\quad -(\mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha)\mathbf{x}^\mu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^\mu \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta - \mathbf{x}^\mu \mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha - \mathbf{x}^\mu \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \mathbf{x}^\mu \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha - \\
&\quad -\mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta \mathbf{x}^\mu + \mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha \mathbf{x}^\mu + \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta \mathbf{x}^\mu - \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha \mathbf{x}^\mu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{x}^\mu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x}^\mu] + [\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta, \mathbf{x}^\mu] + [\mathbf{x}^\mu, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{x}^\mu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta, \mathbf{x}^\mu]\mathbf{p}^\alpha + \mathbf{X}^\beta[\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x}^\mu] + \\
&\quad +[\theta^{\alpha\sigma}, \mathbf{x}^\mu]\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\alpha\sigma}[\pi_\sigma{}^\beta, \mathbf{x}^\mu] + [\mathbf{x}^\mu, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[\mathbf{x}^\mu, \pi_\sigma{}^\alpha]).
\end{aligned}
$$

Usando a primeira equação de (2.8), a equação (2.12), a equação (2.21) e a equação (2.25), temos que

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}]\mathbf{p}^{\beta}+i\eta^{\mu\beta}(\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\eta}\mathbf{p}_{\eta})+[\mathbf{x}^{\beta}+\frac{1}{2}\theta^{\beta\rho}\mathbf{p}_{\rho},\mathbf{x}^{\mu}]\mathbf{p}^{\alpha}- \\
&\quad -i\eta^{\mu\alpha}(\mathbf{x}^{\beta}+\frac{1}{2}\theta^{\beta\epsilon}\mathbf{p}_{\epsilon})+\frac{i}{2}\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}_{\ \ \sigma\chi}\mathbf{p}^{\chi}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}_{\ \ \sigma\xi}\mathbf{p}^{\xi}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}((\mathbf{x}^{\mu}(\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\gamma}\mathbf{p}_{\gamma})-(\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\gamma}\mathbf{p}_{\gamma})\mathbf{x}^{\mu})\mathbf{p}^{\beta}+i\eta^{\mu\beta}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{i}{2}\eta^{\mu\beta}\theta^{\alpha\eta}\mathbf{p}_{\eta}+ \\
&\quad +((\mathbf{x}^{\beta}+\frac{1}{2}\theta^{\beta\rho}\mathbf{p}_{\rho})\mathbf{x}^{\mu}-\mathbf{x}^{\mu}(\mathbf{x}^{\beta}+\frac{1}{2}\theta^{\beta\rho}\mathbf{p}_{\rho}))\mathbf{p}^{\alpha}-i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{x}^{\beta}-\frac{i}{2}\eta^{\mu\alpha}\theta^{\beta\epsilon}\mathbf{p}_{\epsilon}+ \\
&\quad +\frac{i}{2}\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}_{\ \ \sigma\chi}\mathbf{p}^{\chi}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}_{\ \ \sigma\xi}\mathbf{p}^{\xi}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(([\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{x}^{\alpha}]+\frac{1}{2}[\mathbf{x}^{\mu},\theta^{\alpha\gamma}\mathbf{p}_{\gamma}])\mathbf{p}^{\beta}+i\eta^{\mu\beta}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{i}{2}\eta^{\mu\beta}\theta^{\alpha\eta}\mathbf{p}_{\eta}+ \\
&\quad +([\mathbf{x}^{\beta},\mathbf{x}^{\mu}]+\frac{1}{2}[\theta^{\beta\rho}\mathbf{p}_{\rho},\mathbf{x}^{\mu}])\mathbf{p}^{\alpha}-i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{x}^{\beta}-\frac{i}{2}\eta^{\mu\alpha}\theta^{\beta\epsilon}\mathbf{p}_{\epsilon}+ \\
&\quad +\frac{i}{2}\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}_{\ \ \sigma\chi}\mathbf{p}^{\chi}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}_{\ \ \sigma\xi}\mathbf{p}^{\xi}).
\end{aligned}$$

Com a equação (2.11),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}((i\theta^{\mu\alpha}+\frac{1}{2}([\mathbf{x}^{\mu},\theta^{\alpha\gamma}]\mathbf{p}_{\gamma}+\theta^{\alpha\gamma}[\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{p}_{\gamma}]))\mathbf{p}^{\beta}+i\eta^{\mu\beta}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{i}{2}\eta^{\mu\beta}\theta^{\alpha\eta}\mathbf{p}_{\eta}+ \\
&\quad +(i\theta^{\beta\mu}+\frac{1}{2}([\theta^{\beta\rho},\mathbf{x}^{\mu}]\mathbf{p}_{\rho}+\theta^{\beta\rho}[\mathbf{p}_{\rho},\mathbf{x}^{\mu}]))\mathbf{p}^{\alpha}-i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{x}^{\beta}-\frac{i}{2}\eta^{\mu\alpha}\theta^{\beta\epsilon}\mathbf{p}_{\epsilon}+ \\
&\quad +\frac{i}{2}\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}_{\ \ \sigma\chi}\mathbf{p}^{\chi}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}_{\ \ \sigma\xi}\mathbf{p}^{\xi}).
\end{aligned}$$

Com a primeira equação de (2.8) e a equação (2.12),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}((i\theta^{\mu\alpha}+\frac{i}{2}\theta^{\alpha\gamma}\eta^{\mu}_{\gamma})\mathbf{p}^{\beta}+i\eta^{\mu\beta}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{i}{2}\eta^{\mu\beta}\theta^{\alpha\eta}\mathbf{p}_{\eta}+(i\theta^{\beta\mu}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\rho}\eta^{\mu}_{\rho})\mathbf{p}^{\alpha}- \\
&\quad -i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{x}^{\beta}-\frac{i}{2}\eta^{\mu\alpha}\theta^{\beta\epsilon}\mathbf{p}_{\epsilon}+\frac{i}{2}\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}_{\ \ \sigma\chi}\mathbf{p}^{\chi}-\frac{i}{2}\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}_{\ \ \sigma\xi}\mathbf{p}^{\xi}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i\eta^{\mu\beta}\mathbf{x}^{\alpha}-i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{x}^{\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\beta} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\omega_{\beta\alpha}\mathbf{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\beta} \\
&= \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\beta} \\
&= \omega^{\mu}_{\ \beta}\mathbf{x}^{\beta} \\
&= \omega^{\mu}_{\ \nu}\mathbf{x}^{\nu}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ \delta\mathbf{X}^{\mu} &= i[\mathbf{X}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{X}^{\mu}(\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha})- \\
&\quad -(\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha})\mathbf{X}^{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\mathbf{X}^{\mu}\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\mathbf{X}^{\mu}\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}- \\
&\quad -\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}\mathbf{X}^{\mu}+\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}\mathbf{X}^{\mu}+\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}\mathbf{X}^{\mu}-\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}\mathbf{X}^{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}]+[\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha},\mathbf{X}^{\mu}]+[\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta},\mathbf{X}^{\mu}]+[\mathbf{X}^{\mu},\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}]\mathbf{p}^{\beta}+\mathbf{X}^{\alpha}[\mathbf{X}^{\mu},\mathbf{p}^{\beta}]+[\mathbf{X}^{\beta},\mathbf{X}^{\mu}]\mathbf{p}^{\alpha}+\mathbf{X}^{\beta}[\mathbf{p}^{\alpha},\mathbf{X}^{\mu}]+ \\
&\quad +[\theta^{\alpha\sigma},\mathbf{X}^{\mu}]\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\alpha\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\beta},\mathbf{X}^{\mu}]+[\mathbf{X}^{\mu},\theta^{\beta\sigma}]\pi_{\sigma}{}^{\alpha}+\theta^{\beta\sigma}[\mathbf{X}^{\mu},\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]).
\end{aligned}
$$

Com as equações (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{X}^{\mu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i\eta^{\mu\beta}\mathbf{X}^{\alpha}-i\eta^{\mu\alpha}\mathbf{X}^{\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\mu\beta}\mathbf{X}^{\alpha}+\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\beta} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\omega_{\beta\alpha}\mathbf{X}^{\alpha}+\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\beta} \\
&= \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\beta} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\beta}\mathbf{X}^{\beta} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ \delta\mathbf{p}_{\mu} &= i[\mathbf{p}_{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{p}_{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_{\mu}(\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha})- \\
&\quad -(\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha})\mathbf{p}_{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_{\mu}\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}-\mathbf{p}_{\mu}\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}-\mathbf{p}_{\mu}\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\mathbf{p}_{\mu}\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}- \\
&\quad -\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}\mathbf{p}_{\mu}+\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha}\mathbf{p}_{\mu}+\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta}\mathbf{p}_{\mu}-\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}\mathbf{p}_{\mu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{p}_{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta}]+[\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha},\mathbf{p}_{\mu}]+[\theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta},\mathbf{p}_{\mu}]+[\mathbf{p}_{\mu},\theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{p}_{\mu},\mathbf{X}^{\alpha}]\mathbf{p}^{\beta}+\mathbf{X}^{\alpha}[\mathbf{p}_{\mu},\mathbf{p}^{\beta}]+[\mathbf{X}^{\beta},\mathbf{p}_{\mu}]\mathbf{p}^{\alpha}+\mathbf{X}^{\beta}[\mathbf{p}^{\alpha},\mathbf{p}_{\mu}]+ \\
&\quad +[\theta^{\alpha\sigma},\mathbf{p}_{\mu}]\pi_{\sigma}{}^{\beta}+\theta^{\alpha\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\beta},\mathbf{p}_{\mu}]+[\mathbf{p}_{\mu},\theta^{\beta\sigma}]\pi_{\sigma}{}^{\alpha}+\theta^{\beta\sigma}[\mathbf{p}_{\mu},\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]).
\end{aligned}
$$

Usando a segunda equação de (2.11), a equação (2.17) e a equação (2.29),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}_\mu &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(-i\eta^\alpha_\mu\mathbf{p}^\beta + i\eta^\beta_\mu\mathbf{p}^\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\eta^\alpha_\mu\omega_{\alpha\beta}\mathbf{p}^\beta - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^\beta_\mu\mathbf{p}^\alpha \\
&= \frac{1}{2}\eta^\alpha_\mu\omega_{\alpha\beta}\mathbf{p}^\beta + \frac{1}{2}\eta^\beta_\mu\omega_{\beta\alpha}\mathbf{p}^\alpha \\
&= \eta^\alpha_\mu\omega_{\alpha\beta}\mathbf{p}^\beta \\
&= \omega_\mu{}^\beta\mathbf{p}_\beta \\
&= \omega_\mu{}^\nu\mathbf{p}_\nu .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv).\ \delta\theta^{\mu\nu} &= i[\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\theta^{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\theta^{\mu\nu}(\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha) - \\
&\quad -(\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha)\theta^{\mu\nu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\theta^{\mu\nu}\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \theta^{\mu\nu}\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\mu\nu}\theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha - \\
&\quad -\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta\theta^{\mu\nu} + \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha\theta^{\mu\nu} + \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta\theta^{\mu\nu} - \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha\theta^{\mu\nu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\theta^{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha, \theta^{\mu\nu}] + [\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta, \theta^{\mu\nu}] + [\theta^{\mu\nu}, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\theta^{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\theta^{\mu\nu}, \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta, \theta^{\mu\nu}]\mathbf{p}^\alpha + \mathbf{X}^\beta[\mathbf{p}^\alpha, \theta^{\mu\nu}] + \\
&\quad +[\theta^{\alpha\sigma}, \theta^{\mu\nu}]\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\alpha\sigma}[\pi_\sigma{}^\beta, \theta^{\mu\nu}] + [\theta^{\mu\nu}, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[\theta^{\mu\nu}, \pi_\sigma{}^\alpha]).
\end{aligned}$$

Com a segunda equação de (2.8), (2.13), (2.17), (2.20) e (2.28),

$$\delta\theta^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(-i\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\nu\beta}_\sigma + i\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\nu\alpha}_\sigma).$$

Considerando que, $\eta_m^{knj} = \eta_m^k \eta^{nj} - \eta^{kj}\eta_m^n$,

$$\begin{aligned}
\delta\theta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(-i\theta^{\alpha\sigma}(\eta_\sigma^\mu \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta_\sigma^\nu) + i\theta^{\beta\sigma}(\eta_\sigma^\mu \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\eta_\sigma^\nu)) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(-i\theta^{\alpha\sigma}\eta_\sigma^\mu \eta^{\nu\beta} + i\theta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\beta}\eta_\sigma^\nu + i\theta^{\beta\sigma}\eta_\sigma^\mu \eta^{\nu\alpha} - i\theta^{\beta\sigma}\eta^{\mu\alpha}\eta_\sigma^\nu) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(-i\theta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} + i\theta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} + i\theta^{\beta\mu}\eta^{\nu\alpha} - i\theta^{\beta\nu}\eta^{\mu\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\mu}\eta^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\nu}\eta^{\mu\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\alpha}\theta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\alpha}\theta^{\beta\mu}\eta^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\nu}\eta^{\mu\alpha} \\
&= \eta^{\mu\beta}\omega_{\beta\alpha}\theta^{\alpha\nu} + \eta^{\nu\alpha}\omega_{\beta\alpha}\theta^{\beta\mu} \\
&= \eta^{\mu\beta}\omega_{\beta\alpha}\theta^{\alpha\nu} + \eta^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\beta} \\
&= \omega^\mu{}_\alpha\theta^{\alpha\nu} + \omega^\nu{}_\beta\theta^{\mu\beta} \\
&= \omega^\mu{}_\rho\theta^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho\theta^{\mu\rho}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v).\ \delta\pi_{\mu\nu} &= i[\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\pi_{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\pi_{\mu\nu}(\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha) - \\
&\quad -(\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha)\pi_{\mu\nu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\pi_{\mu\nu}\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta - \pi_{\mu\nu}\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha - \pi_{\mu\nu}\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta + \pi_{\mu\nu}\theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha - \\
&\quad -\mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta\pi_{\mu\nu} + \mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha\pi_{\mu\nu} + \theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta\pi_{\mu\nu} - \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha\pi_{\mu\nu}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\pi_{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha\mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\alpha, \pi_{\mu\nu}] + [\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta, \pi_{\mu\nu}] + [\pi_{\mu\nu}, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha]) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\pi_{\mu\nu}, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\pi_{\mu\nu}, \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\beta, \pi_{\mu\nu}]\mathbf{p}^\alpha + \mathbf{X}^\beta[\mathbf{p}^\alpha, \pi_{\mu\nu}] + \\
&\quad +[\theta^{\alpha\sigma}, \pi_{\mu\nu}]\pi_\sigma{}^\beta + \theta^{\alpha\sigma}[\pi_\sigma{}^\beta, \pi_{\mu\nu}] + [\pi_{\mu\nu}, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[\pi_{\mu\nu}, \pi_\sigma{}^\alpha]).
\end{aligned}$$

Usando a segunda equação de (2.8), a segunda equação de (2.17) e a equação (2.27),

$$\delta\pi_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i\eta^{\alpha\sigma}_{\mu\nu}\pi_\sigma{}^\beta - i\eta^{\beta\sigma}_{\mu\nu}\pi_\sigma{}^\alpha).$$

Considerando que, $\eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \eta^{\mu}_{\alpha}\eta^{\nu}_{\beta} - \eta^{\mu}_{\beta}\eta^{\nu}_{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i(\eta^{\alpha}_{\mu}\eta^{\sigma}_{\nu} - \eta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\sigma}_{\mu})\pi_{\sigma}{}^{\beta} - i(\eta^{\beta}_{\mu}\eta^{\sigma}_{\nu} - \eta^{\beta}_{\nu}\eta^{\sigma}_{\mu})\pi_{\sigma}{}^{\alpha}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i\eta^{\alpha}_{\mu}\eta^{\sigma}_{\nu}\pi_{\sigma}{}^{\beta} - i\eta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\sigma}_{\mu}\pi_{\sigma}{}^{\beta} - i\eta^{\beta}_{\mu}\eta^{\sigma}_{\nu}\pi_{\sigma}{}^{\alpha} + i\eta^{\beta}_{\nu}\eta^{\sigma}_{\mu}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}) \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(i\eta^{\alpha}_{\mu}\pi_{\nu}{}^{\beta} - i\eta^{\alpha}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\beta} - i\eta^{\beta}_{\mu}\pi_{\nu}{}^{\alpha} + i\eta^{\beta}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\alpha}) \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\mu}\pi_{\nu}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\beta}_{\mu}\pi_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\beta}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\mu}\pi^{\beta}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\alpha}\eta^{\beta}_{\mu}\pi^{\alpha}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\alpha}\eta^{\beta}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\alpha} \\
&= \omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\mu}\pi^{\beta}{}_{\nu} + \omega_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}_{\nu}\pi_{\mu}{}^{\beta} \\
&= \omega_{\mu}{}^{\beta}\pi_{\beta\nu} + \omega_{\nu}{}^{\beta}\pi_{\mu\beta} \\
&= \omega_{\mu}{}^{\rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_{\nu}{}^{\rho}\pi_{\mu\rho}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vi).\ \delta\mathbf{M}^{\mu\nu} &= i[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathbf{M}^{\rho\sigma}] \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}].
\end{aligned}$$

Com a equação (4.6),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{M}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(i\eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} - i\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} + i\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}\eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\sigma\mu} \\
&= \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \omega_{\rho\sigma}\eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\rho\mu}.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ é antissimétrico, ou seja, $\mathbf{M}^{\mu\nu} = -\mathbf{M}^{\nu\mu}$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{M}^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\mathbf{M}^{\mu\rho} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathbf{M}^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\mathbf{M}^{\mu\rho}.
\end{aligned}$$

D-4 Demonstração da equação (4.8)

$$
\begin{aligned}
i).\ \delta\mathbf{X}^{\mu} &= i[\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i[\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + i([\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Usando a segunda equação de (4.7),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{X}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu} + i([\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu} + i([\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{X}^{\mu}, \pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Com as equações (2.29) e (2.27),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{X}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu} - ia^{\alpha}(i\delta^{\mu}_{\alpha}) \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{X}^{\nu} + a^{\mu}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ \delta\mathbf{p}_{\mu} &= i[\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i[\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + i([\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Com a terceira equação de (4.7),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}_{\mu} &= \omega_{\mu}{}^{\nu}\mathbf{p}_{\nu} + i([\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= \omega_{\mu}{}^{\nu}\mathbf{p}_{\nu} + i([\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\mathbf{p}_{\mu}, \mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{p}_{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{p}_{\mu}, \pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Com a segunda equação de (2.11) e a segunda equação de (2.17),

$$
\delta\mathbf{p}_{\mu} = \omega_{\mu}{}^{\nu}\mathbf{p}_{\nu}.
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ \delta\theta^{\mu\nu} &= i[\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\theta^{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i[\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + i([\theta^{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Usando a quarta equação de (4.7), temos que

$$
\begin{aligned}
\delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + i([\theta^{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + i([\theta^{\mu\nu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\theta^{\mu\nu}, \mathbf{p}_{\alpha}] + [\theta^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \\
&\quad + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\theta^{\mu\nu}, \pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Com a segunda equação de (2.8) e (2.17), resulta em

$$\delta\theta^{\mu\nu} = \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + \frac{i}{2}b_{\alpha\beta}i\delta^{\mu\nu;\alpha\beta}.$$

Considerando que, $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$,

$$\delta^{\mu\nu;\alpha\beta} = \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}) \\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}.
\end{aligned}$$

Como $b_{\mu\nu}$ é antissimétrico, ou seja, $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$,

$$\begin{aligned}
\delta\theta^{\mu\nu} &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + \frac{1}{2}b_{\beta\alpha}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + \delta^{\nu\beta}b_{\beta\alpha}\delta^{\alpha\mu} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\rho}\theta^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho}\theta^{\mu\rho} + b^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv).\ \delta\pi_{\mu\nu} &= i[\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\pi_{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i[\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + i([\pi_{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}$$

Usando a quinta equação de (4.7),

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{\mu\nu} &= \omega_{\mu}{}^{\rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_{\nu}{}^{\rho}\pi_{\mu\rho} + i([\pi_{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= \omega_{\mu}{}^{\rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_{\nu}{}^{\rho}\pi_{\mu\rho} + i([\pi_{\mu\nu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\pi_{\mu\nu}, \mathbf{p}_{\alpha}] + [\pi_{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \\
&\quad + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\pi_{\mu\nu}, \pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}$$

Com a equação (2.17) e o fato que $\pi_{\mu\nu}$ comuta com $\pi_{\alpha\beta}$,

$$\delta\pi_{\mu\nu} = \omega_{\mu}{}^{\rho}\pi_{\rho\nu} + \omega_{\nu}{}^{\rho}\pi_{\mu\rho}.$$

$$\begin{aligned}
v).\ \delta\mathbf{M_1}^{\mu\nu} &= i[\mathbf{M_1}^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\mathbf{M_1}^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{M_1}^{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{M_1}^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu} - \mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu} - \mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad + [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu} - \mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad + [-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] + [-\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]\mathbf{p}^{\nu} + \mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [-\mathbf{X}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]\mathbf{p}^{\mu} - \\
&\quad - \mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]\mathbf{p}^{\nu} + \mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad + [-\mathbf{X}^{\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]\mathbf{p}^{\mu} - \mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]\mathbf{p}^{\nu} + \\
&\quad + \mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] + [-\mathbf{X}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]\mathbf{p}^{\mu} - \mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i(([\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}])\mathbf{p}^{\nu} + \mathbf{X}^{\mu}([\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{p}^{\nu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}]) + ([-\mathbf{X}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[-\mathbf{X}^{\nu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}])\mathbf{p}^{\mu} - \\
&\quad - \mathbf{X}^{\nu}([\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{p}^{\mu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}]) + ([\mathbf{X}^{\mu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{p}_{\alpha}])\mathbf{p}^{\nu} + \\
&\quad + \mathbf{X}^{\mu}([\mathbf{p}^{\nu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\mathbf{p}^{\nu}, \mathbf{p}_{\alpha}]) + ([-\mathbf{X}^{\nu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[-\mathbf{X}^{\nu}, \mathbf{p}_{\alpha}])\mathbf{p}^{\mu} - \\
&\quad - \mathbf{X}^{\nu}([\mathbf{p}_{\mu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\mathbf{p}_{\mu}, \mathbf{p}_{\alpha}]) + ([\mathbf{X}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{X}^{\mu}, \pi^{\alpha\beta}])\mathbf{p}^{\nu} + \\
&\quad + \mathbf{X}^{\mu}([\mathbf{p}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{p}^{\nu}, \pi^{\alpha\beta}]) + ([-\mathbf{X}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[-\mathbf{X}^{\nu}, \pi^{\alpha\beta}])\mathbf{p}^{\mu} - \\
&\quad - \mathbf{X}^{\nu}([\mathbf{p}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{p}^{\mu}, \pi^{\alpha\beta}])).
\end{aligned}$$

Com a segunda equação de (2.11), a segunda equação de (2.17), (2.21), (2.29) e (4.5),

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{M_1}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\mathbf{X}^{\mu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta} + \theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]\mathbf{p}^{\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\mu}[\mathbf{p}^{\nu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \\
&\quad - \theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta} + \theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}] + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[-\mathbf{X}^{\nu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta} + \theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}]\mathbf{p}^{\mu} - \\
&\quad - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\nu}[\mathbf{p}^{\mu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\beta} + \theta^{\beta\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\alpha}] - ia^{\alpha}i\delta^{\mu}_{\alpha}\mathbf{p}^{\nu} - ia^{\alpha}(-i\delta^{\nu}_{\alpha})\mathbf{p}^{\mu} + \\
&\quad + \frac{i}{2}b_{\alpha\beta}(-\frac{i}{2}\delta^{\mu\rho;\alpha\beta}\mathbf{p}_{\rho})\mathbf{p}^{\nu} + \frac{i}{2}b_{\alpha\beta}\frac{i}{2}\delta^{\nu\epsilon;\alpha\beta}\mathbf{p}_{\epsilon}\mathbf{p}^{\mu}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{M_1}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\mu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{X}^\mu, -\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta] + [\mathbf{X}^\mu, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha])\mathbf{p}^\nu + \\
&\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\mu([\mathbf{p}^\nu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{p}^\nu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{p}^\nu, -\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta] + [\mathbf{p}^\nu, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha]) + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([-\mathbf{X}^\nu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [-\mathbf{X}^\nu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [-\mathbf{X}^\nu, -\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta] + [-\mathbf{X}^\nu, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha])\mathbf{p}^\mu - \\
&-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\nu([\mathbf{p}^\mu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{p}^\mu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{p}^\mu, -\theta^{\alpha\sigma}\pi_\sigma{}^\beta] + [\mathbf{p}^\mu, \theta^{\beta\sigma}\pi_\sigma{}^\alpha]) + a^\mu \mathbf{p}^\nu + \\
&+a^\nu \mathbf{p}^\mu + \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\rho;\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho \mathbf{p}^\nu - \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\epsilon;\alpha\beta}\mathbf{p}_\epsilon \mathbf{p}^\mu \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{X}^\mu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{X}^\mu, -\theta^{\alpha\sigma}]\pi_\sigma{}^\beta - \\
&-\theta^{\alpha\sigma}[\mathbf{X}^\mu, \pi_\sigma{}^\beta] + [\mathbf{X}^\mu, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[\mathbf{X}^\mu, \pi_\sigma{}^\alpha])\mathbf{p}^\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\mu([\mathbf{p}^\nu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \\
&+\mathbf{X}^\alpha[\mathbf{p}^\nu, \mathbf{p}^\beta] + [\mathbf{p}^\nu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\mathbf{p}^\nu, \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{p}^\nu, -\theta^{\alpha\sigma}]\pi_\sigma{}^\beta - \theta^{\alpha\sigma}[\mathbf{p}^\nu, \pi_\sigma{}^\beta] + \\
&+[\mathbf{p}^\nu, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[\mathbf{p}^\nu, \pi_\sigma{}^\alpha]) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([-\mathbf{X}^\nu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[-\mathbf{X}^\nu, \mathbf{p}^\beta] + \\
&+[-\mathbf{X}^\nu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[-\mathbf{X}^\nu, \mathbf{p}^\alpha] + [-\mathbf{X}^\nu, -\theta^{\alpha\sigma}]\pi_\sigma{}^\beta - \theta^{\alpha\sigma}[-\mathbf{X}^\nu, \pi_\sigma{}^\beta] + \\
&+[-\mathbf{X}^\nu, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \theta^{\beta\sigma}[-\mathbf{X}^\nu, \pi_\sigma{}^\alpha])\mathbf{p}^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\nu([\mathbf{p}^\mu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\beta] + \\
&+[\mathbf{p}^\mu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\alpha] + [\mathbf{p}^\mu, -\theta^{\alpha\sigma}]\pi_\sigma{}^\beta - \theta^{\alpha\sigma}[\mathbf{p}^\mu, \pi_\sigma{}^\beta] + [\mathbf{p}^\mu, \theta^{\beta\sigma}]\pi_\sigma{}^\alpha + \\
&+\theta^{\beta\sigma}[\mathbf{p}^\mu, \pi_\sigma{}^\alpha]) + a^\mu \mathbf{p}^\nu + a^\nu \mathbf{p}^\mu + \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\rho;\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho \mathbf{p}^\nu - \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\epsilon;\alpha\beta}\mathbf{p}_\epsilon \mathbf{p}^\mu.
\end{aligned}
$$

Usando a segunda equação de (2.11), (2.17), as equações (2.27), (2.28), (2.29) e (2.26),

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{M_1}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\alpha i\delta^{\mu\beta}\mathbf{p}^\nu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\beta i\delta^{\mu\alpha}\mathbf{p}^\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\mu(-i\delta^{\alpha\nu})\mathbf{p}^\beta + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\mu i\delta^{\beta\nu}\mathbf{p}^\alpha + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\alpha(-i\delta^{\nu\beta})\mathbf{p}^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\beta(-i\delta^{\nu\alpha})\mathbf{p}^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\nu(-i\delta^{\alpha\mu})\mathbf{p}^\beta - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\nu i\delta^{\beta\mu}\mathbf{p}^\alpha + \\
&+a^\mu \mathbf{p}^\nu + a^\nu \mathbf{p}^\mu + \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\rho;\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho \mathbf{p}^\nu - \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\epsilon;\alpha\beta}\mathbf{p}_\epsilon \mathbf{p}^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{X}^\alpha\omega_{\alpha\beta}\delta^{\mu\beta}\mathbf{p}^\nu + \frac{1}{2}\delta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\nu + \frac{1}{2}\delta^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\beta - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\delta^{\beta\nu}\mathbf{X}^\mu\mathbf{p}^\alpha + \\
&+\frac{1}{2}\mathbf{X}^\alpha\omega_{\alpha\beta}\delta^{\beta\nu}\mathbf{p}^\mu - \frac{1}{2}\delta^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\beta\mathbf{p}^\mu - \frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\beta + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\delta^{\beta\mu}\mathbf{X}^\nu\mathbf{p}^\alpha + \\
&+a^\mu \mathbf{p}^\nu + a^\nu \mathbf{p}^\mu + \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\rho;\alpha\beta}\mathbf{p}_\rho \mathbf{p}^\nu - \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\epsilon;\alpha\beta}\mathbf{p}_\epsilon \mathbf{p}^\mu \\
&= \omega^\mu{}_\rho \mathbf{M_1}^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho \mathbf{M_1}^{\mu\rho} + a^\mu \mathbf{p}^\nu - a^\nu \mathbf{p}^\mu.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
vi).\ \delta\mathbf{M_2}^{\mu\nu} &= i[\mathbf{M}_2^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta} - a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] \\
&= i([\mathbf{M}_2^{\mu\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\mathbf{M}_2^{\mu\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [\mathbf{M}_2^{\mu\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad +[-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu} + \theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad +[\theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [-\theta^{\mu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] + [\theta^{\nu\sigma}\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i([-\theta^{\mu\sigma}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \theta^{\mu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [\theta^{\nu\sigma}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \\
&\quad +\theta^{\nu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}] + [-\theta^{\mu\sigma}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \theta^{\mu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + \\
&\quad +[\theta^{\nu\sigma}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \theta^{\nu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, -a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}] + [-\theta^{\mu\sigma}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \\
&\quad -\theta^{\mu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] + [\theta^{\nu\sigma}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \theta^{\nu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]) \\
&= i(([-\theta^{\mu\sigma}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}])\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \theta^{\mu\sigma}([\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \\
&\quad +\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}]) + ([\theta^{\nu\sigma}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}])\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \\
&\quad +\theta^{\nu\sigma}([\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}]\mathbf{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \mathbf{M}^{\alpha\beta}]) + ([-\theta^{\mu\sigma}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{p}_{\alpha}])\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \\
&\quad -\theta^{\mu\sigma}([\pi_{\sigma}^{\nu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \mathbf{p}_{\alpha}]) + ([\theta^{\nu\sigma}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{p}_{\alpha}])\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \\
&\quad +\theta^{\nu\sigma}([\pi_{\sigma}{}^{\mu}, -a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha} - a^{\alpha}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \mathbf{p}_{\alpha}]) + ([-\theta^{\mu\sigma}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[-\theta^{\mu\sigma}, \pi^{\alpha\beta}])\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \\
&\quad -\theta^{\mu\sigma}([\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \pi^{\alpha\beta}]) + ([\theta^{\nu\sigma}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\theta^{\nu\sigma}, \pi^{\alpha\beta}])\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \\
&\quad +\theta^{\nu\sigma}([\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \pi^{\alpha\beta}])).
\end{aligned}
$$

Considerando o fato que $\pi_{\mu\nu}$ comuta com $\pi_{\rho\sigma}$, usando a segunda equação de (2.11) e as equações (2.17) e (4.5),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{M_2}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\rho}\pi_{\rho}{}^{\beta} + \theta^{\beta\rho}\pi_{\rho}{}^{\alpha}]\pi_{\sigma}{}^{\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\nu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \\
&\quad -\mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\rho}\pi_{\rho}{}^{\beta} + \theta^{\beta\rho}\pi_{\rho}{}^{\alpha}] + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\rho}\pi_{\rho}{}^{\beta} + \\
&\quad +\theta^{\beta\rho}\pi_{\rho}{}^{\alpha}]\pi_{\sigma}{}^{\mu} + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}[\pi_{\sigma}{}^{\mu}, \mathbf{X}^{\alpha}\mathbf{p}^{\beta} - \mathbf{X}^{\beta}\mathbf{p}^{\alpha} - \theta^{\alpha\rho}\pi_{\rho}{}^{\beta} + \theta^{\beta\rho}\pi_{\rho}{}^{\alpha}] + \\
&\quad +\frac{i}{2}b_{\alpha\beta}(-i\delta^{\mu\sigma;\alpha\beta})\pi_{\sigma}{}^{\nu} + \frac{i}{2}b_{\alpha\beta}(i\delta^{\nu\sigma;\alpha\beta})\pi_{\sigma}{}^{\mu}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{M_2}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [-\theta^{\mu\sigma}, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [-\theta^{\mu\sigma}, -\theta^{\alpha\rho}\pi_\rho{}^\beta] + [-\theta^{\mu\sigma}, \theta^{\beta\rho}\pi_\rho{}^\alpha])\pi_\sigma{}^\nu - \\
&-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}([\pi_\sigma{}^\nu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\nu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\pi_\sigma{}^\nu, -\theta^{\alpha\rho}\pi_\rho{}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\nu, \theta^{\beta\rho}\pi_\rho{}^\alpha]) + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\theta^{\nu\sigma}, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\theta^{\nu\sigma}, -\theta^{\alpha\rho}\pi_\rho{}^\beta] + [\theta^{\nu\sigma}, \theta^{\beta\rho}\pi_\rho{}^\alpha])\pi_\sigma{}^\mu + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}([\pi_\sigma{}^\mu, \mathbf{X}^\alpha \mathbf{p}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\mu, -\mathbf{X}^\beta \mathbf{p}^\alpha] + [\pi_\sigma{}^\mu, -\theta^{\alpha\rho}\pi_\rho{}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\mu, \theta^{\beta\rho}\pi_\rho{}^\alpha]) + \\
&+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\nu - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\mu \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{p}^\beta] + [-\theta^{\mu\sigma}, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[-\theta^{\mu\sigma}, \mathbf{p}^\alpha] + \\
&+[-\theta^{\mu\sigma}, -\theta^{\alpha\rho}]\pi_\rho{}^\beta - \theta^{\alpha\rho}[-\theta^{\mu\sigma}, \pi_\rho{}^\beta] + [-\theta^{\mu\sigma}, \theta^{\beta\rho}]\pi_\rho{}^\alpha + \theta^{\beta\rho}[-\theta^{\mu\sigma}, \pi_\rho{}^\alpha])\pi_\sigma{}^\nu - \\
&-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}([\pi_\sigma{}^\nu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\pi_\sigma{}^\nu, \mathbf{p}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\nu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\pi_\sigma{}^\nu, \mathbf{p}^\alpha] + \\
&+[\pi_\sigma{}^\nu, -\theta^{\alpha\rho}]\pi_\rho{}^\beta - \theta^{\alpha\rho}[\pi_\sigma{}^\nu, \pi_\rho{}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\nu, \theta^{\beta\rho}]\pi_\rho{}^\alpha + \theta^{\beta\rho}[\pi_\sigma{}^\nu, \pi_\rho{}^\alpha]) + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}([\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{p}^\beta] + [\theta^{\nu\sigma}, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\theta^{\nu\sigma}, \mathbf{p}^\alpha] + \\
&+[\theta^{\nu\sigma}, -\theta^{\alpha\rho}]\pi_\rho{}^\beta - \theta^{\alpha\rho}[\theta^{\nu\sigma}, \pi_\rho{}^\beta] + [\theta^{\nu\sigma}, \theta^{\beta\rho}]\pi_\rho{}^\alpha + \theta^{\beta\rho}[\theta^{\nu\sigma}, \pi_\rho{}^\alpha])\pi_\sigma{}^\mu + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}([\pi_\sigma{}^\mu, \mathbf{X}^\alpha]\mathbf{p}^\beta + \mathbf{X}^\alpha[\pi_\sigma{}^\mu, \mathbf{p}^{\ \beta}] + [\pi_\sigma{}^\mu, -\mathbf{X}^\beta]\mathbf{p}^\alpha - \mathbf{X}^\beta[\pi_\sigma{}^\mu, \mathbf{p}^\alpha] + \\
&+[\pi_\sigma{}^\mu, -\theta^{\alpha\rho}]\pi_\rho{}^\beta - \theta^{\alpha\sigma}[\pi_\sigma{}^\mu, \pi_\sigma{}^\beta] + [\pi_\sigma{}^\mu, \theta^{\beta\rho}]\pi_\rho{}^\alpha + \theta^{\beta\rho}[\pi_\sigma{}^\mu, \pi_\rho{}^\alpha]) + \\
&+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\nu - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\mu.
\end{aligned}
$$

Usando a segunda equação de (2.8) e as equações (2.13), (2.17), (2.27), (2.28),

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{M_2}^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}(-i\delta_\rho^{\mu\sigma\beta})\pi_\sigma{}^\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}(-i\delta_\rho^{\mu\sigma\alpha})\pi_\sigma{}^\nu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}(i\delta_\sigma^{\alpha\rho\nu})\pi_\rho{}^\beta - \\
&-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}(-i\delta_\sigma^{\beta\rho\nu})\pi_\rho{}^\alpha - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}i\delta_\rho^{\nu\sigma\beta}\pi_\sigma{}^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}i\delta_\rho^{\nu\sigma\alpha}\pi_\sigma{}^\mu + \\
&+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}i\delta_\sigma^{\alpha\rho\mu}\pi_\rho{}^\beta + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}(-i\delta_\sigma^{\beta\rho\mu})\pi_\rho{}^\alpha + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\nu - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta_\rho^{\mu\sigma\beta}\pi_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta_\rho^{\mu\sigma\alpha}\pi_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta_\sigma^{\alpha\rho\nu}\pi_\rho{}^\beta - \\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta_\sigma^{\beta\rho\nu}\pi_\rho{}^\alpha + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta_\rho^{\nu\sigma\beta}\pi_\sigma{}^\mu - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta_\rho^{\nu\sigma\alpha}\pi_\sigma{}^\mu - \\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta_\sigma^{\alpha\rho\mu}\pi_\rho{}^\beta + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta_\sigma^{\beta\rho\mu}\pi_\rho{}^\alpha + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\nu - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\sigma;\alpha\beta}\pi_\sigma{}^\mu.
\end{aligned}
$$

Considerando que, $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha$,

$$\delta_\alpha^{\mu\nu\beta} = \delta_\alpha^\mu\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta_\alpha^\nu$$

$$\delta^{\mu\nu;\alpha\beta} = \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{M_2}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}(\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\sigma\beta}-\delta^{\mu\beta}\delta^{\sigma}_{\rho})\pi_{\sigma}^{\ \nu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}(\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\sigma\alpha}-\delta^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\rho})\pi_{\sigma}^{\ \nu}+\\
&+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}(\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\rho\nu}-\delta^{\alpha\nu}\delta^{\rho}_{\sigma})\pi_{\rho}^{\ \beta}-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}(\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\rho\nu}-\delta^{\beta\nu}\delta^{\rho}_{\sigma})\pi_{\rho}^{\ \alpha}+\\
&+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}(\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\sigma\beta}-\delta^{\nu\beta}\delta^{\sigma}_{\rho})\pi_{\sigma}^{\ \mu}-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}(\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\sigma\alpha}-\delta^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\rho})\pi_{\sigma}^{\ \mu}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}(\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\rho\mu}-\delta^{\alpha\mu}\delta^{\rho}_{\sigma})\pi_{\rho}^{\ \beta}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}(\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\rho\mu}-\delta^{\beta\mu}\delta^{\rho}_{\sigma})\pi_{\rho}^{\ \alpha}+\\
&+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\sigma\beta}-\delta^{\mu\beta}\delta^{\sigma\alpha})\pi_{\sigma}^{\ \nu}-\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}(\delta^{\nu\alpha}\delta^{\sigma\beta}-\delta^{\nu\beta}\delta^{\sigma\alpha})\pi_{\sigma}^{\ \mu}\\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\sigma\beta}\pi_{\sigma}^{\ \nu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta^{\mu\beta}\delta^{\sigma}_{\rho}\pi_{\sigma}^{\ \nu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\sigma\alpha}\pi_{\sigma}^{\ \nu}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\rho}\pi_{\sigma}^{\ \nu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\rho\nu}\pi_{\rho}^{\ \beta}-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta^{\alpha\nu}\delta^{\rho}_{\sigma}\pi_{\rho}^{\ \beta}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\rho\nu}\pi_{\rho}^{\ \alpha}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\mu\sigma}\delta^{\beta\nu}\delta^{\rho}_{\sigma}\pi_{\rho}^{\ \alpha}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\sigma\beta}\pi_{\sigma}^{\ \mu}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\rho}\delta^{\nu\beta}\delta^{\sigma}_{\rho}\pi_{\sigma}^{\ \mu}-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\sigma\alpha}\pi_{\sigma}^{\ \mu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\beta\rho}\delta^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\rho}\pi_{\sigma}^{\ \mu}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\rho\mu}\pi_{\rho}^{\ \beta}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\rho}_{\sigma}\pi_{\rho}^{\ \beta}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\rho\mu}\pi_{\rho}^{\ \alpha}-\\
&-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\theta^{\nu\sigma}\delta^{\beta\mu}\delta^{\rho}_{\sigma}\pi_{\rho}^{\ \alpha}+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\sigma\beta}\pi_{\sigma}^{\ \nu}-\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\beta}\delta^{\sigma\alpha}\pi_{\sigma}^{\ \nu}-\\
&-\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\alpha}\delta^{\sigma\beta}\pi_{\sigma}^{\ \mu}+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\delta^{\nu\beta}\delta^{\sigma\alpha}\pi_{\sigma}^{\ \mu}\\
&= \omega^{\mu}_{\ \rho}\mathbf{M}_2^{\rho\nu}+\omega^{\nu}_{\ \rho}\mathbf{M}_2^{\mu\rho}+b^{\mu\rho}\pi_{\rho}^{\ \nu}+b^{\nu\rho}\pi^{\mu}_{\ \rho}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
vii).\ \delta\mathbf{x}^{\mu} &= i[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}-a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]\\
&= i([\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]+[\mathbf{x}^{\mu},-a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]+[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}])\\
&= i[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]+i([\mathbf{x}^{\mu},-a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]+[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Com a primeira equação de (4.7),

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \omega^{\mu}_{\ \nu}\mathbf{x}^{\nu}+i([\mathbf{x}^{\mu},-a^{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}]+[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}])\\
&= \omega^{\mu}_{\ \nu}\mathbf{x}^{\nu}+i([\mathbf{x}^{\mu},-a^{\alpha}]\mathbf{p}_{\alpha}-a^{\alpha}[\mathbf{x}^{\mu},\mathbf{p}_{\alpha}]+[\mathbf{x}^{\mu},\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}]\pi^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}[\mathbf{x}^{\mu},\pi^{\alpha\beta}]).
\end{aligned}
$$

Usando a primeira equação de (2.8) e a equação (2.21), resulta em

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}^{\mu} &= \omega^{\mu}_{\ \nu}\mathbf{x}^{\nu}-ia^{\alpha}i\delta^{\mu}_{\alpha}+\frac{i}{2}b_{\alpha\beta}(-\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu;\alpha\beta}\mathbf{p}_{\nu})\\
&= \omega^{\mu}_{\ \nu}\mathbf{x}^{\nu}+a^{\mu}+\frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\nu;\alpha\beta}\mathbf{p}_{\nu}.
\end{aligned}
$$

Considerando que, $\delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}=\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}-\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}$,

$$
\delta^{\mu\nu;\alpha\beta}=\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}-\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}.
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{x}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha})\mathbf{p}_{\nu} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu\alpha}b_{\alpha\beta}\delta^{\beta\nu}\mathbf{p}_{\nu} - \frac{1}{4}b_{\alpha\beta}\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}\mathbf{p}_{\nu}.
\end{aligned}$$

Como $b_{\alpha\beta}$ é antissimétrico, ou seja, $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{x}^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu\alpha}b_{\alpha\beta}\delta^{\beta\nu}\mathbf{p}_{\nu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu\beta}b_{\beta\alpha}\delta^{\alpha\nu}\mathbf{p}_{\nu} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu\alpha}b_{\alpha\beta}\delta^{\beta\nu}\mathbf{p}_{\nu} \\
&= \omega^{\mu}{}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} + a^{\mu} + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\mathbf{p}_{\nu}.
\end{aligned}$$

Apêndice E: Demonstrações do Capítulo 6

E-1 Demonstração da equação (6.9)

$$\delta_2\delta_1\mathbf{A} - \delta_1\delta_2\mathbf{A} = \delta_3\mathbf{A}.$$

Fazendo $\mathbf{A} = \mathbf{x}^\mu$,

$$\delta_2(\delta_1\mathbf{x}^\mu) - \delta_1(\delta_2\mathbf{x}^\mu) = \delta_3\mathbf{x}^\mu.$$

Substituindo a equação (6.2), resulta em

$$\begin{aligned}
\delta_2(\omega_1{}^\mu{}_\alpha\mathbf{x}^\alpha + a_1^\mu + \frac{1}{2}b_1^{\mu\alpha}\mathbf{p}_\alpha) - \delta_1(\omega_2{}^\mu{}_\alpha\mathbf{x}^\alpha + a_2^\mu + \frac{1}{2}b_2^{\mu\alpha}\mathbf{p}_\alpha) &= \omega_3{}^\mu{}_\alpha\mathbf{x}^\alpha + a_3^\mu + \frac{1}{2}b_3^{\mu\alpha}\mathbf{p}_\alpha \\
\omega_1{}^\mu{}_\alpha\delta_2\mathbf{x}^\alpha + \delta_2 a_1^\mu + \frac{1}{2}b_1^{\mu\alpha}\delta_2\mathbf{p}_\alpha - \omega_2{}^\mu{}_\alpha\delta_1\mathbf{x}^\alpha - \delta_1 a_2^\mu - \frac{1}{2}b_2^{\mu\alpha}\delta_1\mathbf{p}_\alpha &= \omega_3{}^\mu{}_\alpha\mathbf{x}^\alpha + a_3^\mu + \frac{1}{2}b_3^{\mu\alpha}\mathbf{p}_\alpha.
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (6.2) e (6.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_3{}^\mu{}_\nu\mathbf{x}^\nu + a_3^\mu + \frac{1}{2}b_3^{\mu\nu}\mathbf{p}_\nu &= \omega_1{}^\mu{}_\alpha(\omega_2{}^\alpha{}_\nu\mathbf{x}^\nu + a_2^\alpha + \frac{1}{2}b_2^{\alpha\nu}\mathbf{p}_\nu) + \frac{1}{2}b_1^{\mu\alpha}(\omega_2{}^\nu{}_\alpha\mathbf{p}_\nu) - \\
&\quad -\omega_2{}^\mu{}_\alpha(\omega_1{}^\alpha{}_\nu\mathbf{x}^\nu + a_1^\alpha + \frac{1}{2}b_1^{\alpha\nu}\mathbf{p}_\nu) - \frac{1}{2}b_2^{\mu\alpha}\omega_1{}^\nu{}_\alpha\mathbf{p}_\nu.
\end{aligned}$$

Analisando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
\omega_1{}^\mu{}_\alpha\omega_2{}^\alpha{}_\nu - \omega_2{}^\mu{}_\alpha\omega^\alpha{}_\nu &= \omega_3{}^\mu{}_\nu \\
\omega_1{}^\mu{}_\alpha a_2^\alpha - \omega_2{}^\mu{}_\alpha a_1^\alpha &= a_3^\mu \\
\frac{1}{2}\omega_1{}^\mu{}_\alpha b_2^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}b_1^{\mu\alpha}\omega_2{}^\nu{}_\alpha - \frac{1}{2}\omega_2{}^\mu{}_\alpha b_1^{\alpha\nu} - \frac{1}{2}b_2^{\mu\alpha}\omega_1{}^\nu{}_\alpha &= \frac{1}{2}b_3^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{E-1}$$

Como $\omega^\mu{}_\nu$ e $b^{\mu\nu}$ são antissimétricos, ou seja, $\omega^\mu{}_\nu = -\omega^\nu{}_\mu$ e $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$, a terceira equação de (E-1) fica

$$\begin{aligned}
\omega_1{}^\mu{}_\alpha b_2^{\alpha\nu} - \omega_2{}^\mu{}_\alpha b_1^{\alpha\nu} - (-\omega_1{}^\nu{}_\alpha)(-b_2^{\alpha\mu}) + (-\omega_2{}^\nu{}_\alpha)(-b_1^{\alpha\mu}) &= b_3^{\mu\nu} \\
\omega_1{}^\mu{}_\alpha b_2^{\alpha\nu} - \omega_2{}^\mu{}_\alpha b_1^{\alpha\nu} - \omega_1{}^\nu{}_\alpha b_2^{\alpha\mu} + \omega_2{}^\nu{}_\alpha b_1^{\alpha\mu} &= b_3^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Trocando-se α por ρ, obtemos

$$\omega_1{}^{\mu}{}_{\rho} b_2^{\rho\nu} - \omega_2{}^{\mu}{}_{\rho} b_1^{\rho\nu} - \omega_1{}^{\nu}{}_{\rho} b_2^{\rho\mu} + \omega_2{}^{\nu}{}_{\rho} b_1^{\rho\mu} = b_3^{\mu\nu}.$$

E-2 Demonstração da equação (6.27)

$$\begin{aligned}
i).\ [P_i, \phi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')), \phi(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'))\phi(x,\theta) - \\
&\quad -\phi(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\phi(x,\theta) + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\phi(x,\theta)) - \\
&\quad -\int d^3x'd^6\theta'(\phi(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \phi(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\phi(x,\theta) + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\phi(x,\theta) - \\
&\quad -\phi(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') - \phi(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta'), \phi(x,\theta)] + [\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'), \phi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta'), \phi(x,\theta)]\partial_i\phi(x',\theta') + \pi(x',\theta')[\partial_i\phi(x',\theta'), \phi(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*(x',\theta'), \phi(x,\theta)]\partial_i\phi^*(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')[\partial_i\phi^*(x',\theta'), \phi(x,\theta)]).
\end{aligned}$$

Usando a equação (6.25), temos que

$$\begin{aligned}
[P_i, \phi(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta')\partial_i\phi(x',\theta')) \\
&= -i\partial_i\phi(x,\theta).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ [P_i,\phi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')),\phi^*(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'))\phi^*(x,\theta)- \\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\phi^*(x,\theta)+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\phi^*(x,\theta))- \\
&\quad -\int d^3x'd^6\theta'(\phi^*(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\phi^*(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\phi^*(x,\theta)+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\phi^*(x,\theta)- \\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')-\phi^*(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]+[\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]\partial_i\phi(x',\theta')+\pi(x',\theta')[\partial_i\phi(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]+ \\
&\quad +[\pi^*(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]\partial_i\phi^*(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')[\partial_i\phi^*(x',\theta'),\phi^*(x,\theta)]).
\end{aligned}
$$

Com a equação (6.25), temos que

$$
\begin{aligned}
[P_i,\phi^*(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= -i\partial_i\phi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ [P_i,\pi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')),\pi(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'))\pi(x,\theta)- \\
&\quad -\pi(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\pi(x,\theta)+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\pi(x,\theta))- \\
&\quad -\int d^3x'd^6\theta'(\pi(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')+\pi(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\pi(x,\theta)+\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\pi(x,\theta)- \\
&\quad -\pi(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')-\pi(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta'),\pi(x,\theta)]+[\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'),\pi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi(x',\theta'),\pi(x,\theta)]\partial_i\phi(x',\theta')+\pi(x',\theta')[\partial_i\phi(x',\theta'),\pi(x,\theta)]+ \\
&\quad +[\pi^*(x',\theta'),\pi(x,\theta)]\partial_i\phi^*(x',\theta')+\pi^*(x',\theta')[\partial_i\phi^*(x',\theta'),\pi(x,\theta)]) \\
&= -i\partial_i\pi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iv).\ [P_i, \pi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')), \pi^*(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'))\pi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\int d^3x' d^6\theta' (\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\pi^*(x,\theta) + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\pi^*(x,\theta)) - \\
&\quad - \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') + \pi^*(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta')\pi^*(x,\theta) + \pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')\pi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta') - \pi^*(x,\theta)\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta')) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi(x',\theta')\partial_i\phi(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)] + [\pi^*(x',\theta')\partial_i\phi^*(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)]\partial_i\phi(x',\theta') + \pi(x',\theta')[\partial_i\phi(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)]\partial_i\phi^*(x',\theta') + \pi^*(x',\theta')[\partial_i\phi^*(x',\theta'), \pi^*(x,\theta)]) \\
&= -i\partial_i\pi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

E-3 Demonstração da equação (6.30)

$$
\begin{aligned}
i).\ [P_0, \phi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi), \phi(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi)\phi(x,\theta) - \\
&\quad -\phi(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi\phi(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\phi(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\phi(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\phi(x,\theta)) - \int d^3x'd^6\theta'(\phi(x,\theta)\pi^*\pi + \phi(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi + \\
&\quad +\phi(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + \phi(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi\phi(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\phi(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\phi(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\phi(x,\theta)) - \phi(x,\theta)\pi^*\pi - \phi(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi - \\
&\quad -\phi(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi - \phi(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi^*\pi, \phi(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*\partial^i\phi, \phi(x,\theta)] + \\
&\quad +\frac{\lambda^2}{4}[\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi, \phi(x,\theta)] + m^2[\phi^*\phi, \phi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi^*, \phi(x,\theta)]\pi + \pi^*[\pi, \phi(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*, \phi(x,\theta)]\partial^i\phi + \\
&\quad +\partial^i\phi^*[\partial^i\phi, \phi(x,\theta)] + \frac{\lambda^2}{4}([\partial^{\mu\nu}\phi^*, \phi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \partial^{\mu\nu}\phi^*[\partial_{\mu\nu}\phi, \phi(x,\theta)]) + \\
&\quad +m^2([\phi^*, \phi(x,\theta)]\phi + \phi^*[\phi, \phi(x,\theta)])).
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (6.25), temos que

$$
\begin{aligned}
[P_0, \phi(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'\pi^*(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta')) \\
&= -i\pi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

Substituindo a segunda equação de (6.24),

$$
\begin{aligned}
[P_0, \phi(x,\theta)] &= -i\dot{\phi}(x,\theta) \\
&= -i\partial_0\phi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ [P_0, \phi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi), \phi^*(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi)\phi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi\phi^*(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\phi^*(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\phi^*(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\phi^*(x,\theta)) - \int d^3x'd^6\theta'(\phi^*(x,\theta)\pi^*\pi + \phi^*(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi + \\
&\quad +\phi^*(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + \phi^*(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi^*\pi\phi^*(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\phi^*(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\phi^*(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\phi^*(x,\theta)) - \phi^*(x,\theta)\pi^*\pi - \phi^*(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi - \\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi - \phi^*(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi^*\pi, \phi^*(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*\partial^i\phi, \phi^*(x,\theta)] + \\
&\quad +\frac{\lambda^2}{4}[\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi, \phi^*(x,\theta)] + m^2[\phi^*\phi, \phi^*(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi^*, \phi^*(x,\theta)]\pi + \pi^*[\pi, \phi^*(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*, \phi^*(x,\theta)]\partial^i\phi + \\
&\quad +\partial^i\phi^*[\partial^i\phi, \phi^*(x,\theta)] + \frac{\lambda^2}{4}([\partial^{\mu\nu}\phi^*, \phi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \partial^{\mu\nu}\phi^*[\partial_{\mu\nu}\phi, \phi^*(x,\theta)]) + \\
&\quad +m^2([\phi^*, \phi^*(x,\theta)]\phi + \phi^*[\phi, \phi^*(x,\theta)])).
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (6.25),

$$
\begin{aligned}
[P_0, \phi^*(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta')\pi \\
&= -i\partial_0\phi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

Substituindo a segunda equação de (6.24),

$$
\begin{aligned}
[P_0, \phi(x,\theta)] &= -i\dot{\phi}^*(x,\theta) \\
&= -i\partial_0\phi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ [P_0, \pi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi), \pi(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi)\pi(x,\theta) - \\
&\quad -\pi(x,\theta)\int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi\pi(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\pi(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\pi(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\pi(x,\theta)) - \int d^3x' d^6\theta' (\pi(x,\theta)\pi^*\pi + \pi(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi + \\
&\quad +\pi(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + \pi(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi\pi(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\pi(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\pi(x,\theta) + \\
&\quad +m^2\phi^*\phi\pi(x,\theta)) - \pi(x,\theta)\pi^*\pi - \pi(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi - \\
&\quad -\pi(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi - \pi(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi^*\pi, \pi(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*\partial^i\phi, \pi(x,\theta)] + \\
&\quad +\frac{\lambda^2}{4}[\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi, \pi(x,\theta)] + m^2[\phi^*\phi, \pi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi^*, \pi(x,\theta)]\pi + \pi^*[\pi, \pi(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*, \pi(x,\theta)]\partial^i\phi + \\
&\quad +\partial^i\phi^*[\partial^i\phi, \pi(x,\theta)] + \frac{\lambda^2}{4}([\partial^{\mu\nu}\phi^*, \pi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \partial^{\mu\nu}\phi^*[\partial_{\mu\nu}\phi, \pi(x,\theta)]) + \\
&\quad +m^2([\phi^*, \pi(x,\theta)]\phi + \phi^*[\phi, \pi(x,\theta)])) \\
&= -i\partial_0\pi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iv).\ [P_0, \pi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi), \pi^*(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi)\pi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi + \partial^i\phi^*\partial^i\phi + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi\pi^*(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\pi^*(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\pi^*(x,\theta) + \\
&\quad + m^2\phi^*\phi\pi^*(x,\theta)) - \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*(x,\theta)\pi^*\pi + \pi^*(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi + \\
&\quad + \pi^*(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi + \pi^*(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi^*\pi\pi^*(x,\theta) + \partial^i\phi^*\partial^i\phi\pi^*(x,\theta) + \frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi\pi^*(x,\theta) + \\
&\quad + m^2\phi^*\phi\pi^*(x,\theta)) - \pi^*(x,\theta)\pi^*\pi - \pi^*(x,\theta)\partial^i\phi^*\partial^i\phi - \\
&\quad - \pi^*(x,\theta)\frac{\lambda^2}{4}\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi - \pi^*(x,\theta)m^2\phi^*\phi) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi^*\pi, \pi^*(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*\partial^i\phi, \pi^*(x,\theta)] + \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{4}([\partial^{\mu\nu}\phi^*\partial_{\mu\nu}\phi, \pi^*(x,\theta)] + m^2[\phi^*\phi, \pi^*(x,\theta)])) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi^*, \pi^*(x,\theta)]\pi + \pi^*[\pi, \pi^*(x,\theta)] + [\partial^i\phi^*, \pi^*(x,\theta)]\partial^i\phi + \\
&\quad + \partial^i\phi^*[\partial^i\phi, \pi^*(x,\theta)] + \frac{\lambda^2}{4}([\partial^{\mu\nu}\phi^*, \pi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \partial^{\mu\nu}\phi^*[\partial_{\mu\nu}\phi, \pi^*(x,\theta)]) + \\
&\quad + m^2([\phi^*, \pi^*(x,\theta)]\phi + \phi^*[\phi, \pi^*(x,\theta)])) \\
&= -i\partial_0\pi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

E-4 Demonstração da equação (6.32)

$$
\begin{aligned}
i).\ [P_{\mu\nu}, \phi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*), \phi(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*)\phi(x,\theta) - \\
&\quad -\phi(x,\theta) \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi\phi(x,\theta) + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*\phi(x,\theta) - \\
&\quad -\phi(x,\theta)\pi \partial_{\mu\nu}\phi - \phi(x,\theta)\pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi \partial_{\mu\nu}\phi, \phi(x,\theta)] + [\pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*, \phi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi, \phi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \pi[\partial_{\mu\nu}\phi, \phi(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*, \phi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi^* + \pi^*[\partial_{\mu\nu}\phi^*, \phi(x,\theta)]).
\end{aligned}
$$

Substituindo a primeira equação de (6.25),

$$
\begin{aligned}
[P_{\mu\nu}, \phi(x,\theta)] &= \int d^3x' d^6\theta' (-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta'))\partial_{\mu\nu}\phi \\
&= -i\partial_{\mu\nu}\phi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ [P_{\mu\nu}, \phi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*), \phi^*(x,\theta)\right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*)\phi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\phi^*(x,\theta) \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \partial_{\mu\nu}\phi\phi^*(x,\theta) + \pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*\phi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\pi \partial_{\mu\nu}\phi - \phi^*(x,\theta)\pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi \partial_{\mu\nu}\phi, \phi^*(x,\theta)] + [\pi^* \partial_{\mu\nu}\phi^*, \phi^*(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi, \phi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi + \pi[\partial_{\mu\nu}\phi, \phi^*(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*, \phi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi^* + \pi^*[\partial_{\mu\nu}\phi^*, \phi^*(x,\theta)]).
\end{aligned}
$$

Substituindo a segunda equação de (6.25),

$$
\begin{aligned}
[P_{\mu\nu}, \phi^*(x,\theta)] &= \int d^3x' d^6\theta' (-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta'))\partial_{\mu\nu}\phi^* \\
&= -i\partial_{\mu\nu}\phi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ [P_{\mu\nu},\pi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*),\pi(x,\theta)\right]\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\pi(x,\theta)-\\
&\quad -\pi(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi\pi(x,\theta)+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*\pi(x,\theta)-\\
&\quad -\pi(x,\theta)\pi\partial_{\mu\nu}\phi-\pi(x,\theta)\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi\partial_{\mu\nu}\phi,\pi(x,\theta)]+[\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*,\pi(x,\theta)])\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi,\pi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi+\pi[\partial_{\mu\nu}\phi,\pi(x,\theta)]+\\
&\quad +[\pi^*,\pi(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi^*+\pi^*[\partial_{\mu\nu}\phi^*,\pi(x,\theta)])\\
&= -i\partial_{\mu\nu}\pi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iv).\ [P_{\mu\nu},\pi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*),\pi^*(x,\theta)\right]\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\pi^*(x,\theta)-\\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\partial_{\mu\nu}\phi\pi^*(x,\theta)+\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*\pi^*(x,\theta)-\\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\pi\partial_{\mu\nu}\phi-\pi^*(x,\theta)\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi\partial_{\mu\nu}\phi,\pi^*(x,\theta)]+[\pi^*\partial_{\mu\nu}\phi^*,\pi^*(x,\theta)])\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi,\pi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi+\pi[\partial_{\mu\nu}\phi,\pi^*(x,\theta)]+\\
&\quad +[\pi^*,\pi^*(x,\theta)]\partial_{\mu\nu}\phi^*+\pi^*[\partial_{\mu\nu}\phi^*,\pi^*(x,\theta)])\\
&= -i\partial_{\mu\nu}\pi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

E-5 Demonstração da equação (6.37)

$$
\begin{aligned}
i).\ [M_{ij},\phi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*),\phi(x,\theta)\right]\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\phi(x,\theta)-\\
&\quad -\phi(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi\phi(x,\theta)+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*\phi(x,\theta)-\\
&\quad -\phi(x,\theta)\pi\Delta_{ji}\phi-\phi(x,\theta)\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi\Delta_{ji}\phi,\phi(x,\theta)]+[\pi^*\Delta_{ji}\phi^*,\phi(x,\theta)])\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi,\phi(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi+\pi[\Delta_{ji}\phi,\phi(x,\theta)]+\\
&\quad +[\pi^*,\phi(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi^*+\pi^*[\Delta_{ji}\phi^*,\phi(x,\theta)]).
\end{aligned}
$$

Substituindo a primeira equação de (6.25), temos que

$$
\begin{aligned}
[M_{ij},\phi(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta'))\Delta_{ji}\phi\\
&= -i\Delta_{ji}\phi(x,\theta)\\
&= i\Delta_{ij}\phi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii).\ [M_{ij},\phi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*),\phi^*(x,\theta)\right]\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\phi^*(x,\theta)-\\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'(\pi\Delta_{ji}\phi\phi^*(x,\theta)+\pi^*\Delta_{ji}\phi^*\phi^*(x,\theta)-\\
&\quad -\phi^*(x,\theta)\pi\Delta_{ji}\phi-\phi^*(x,\theta)\pi^*\Delta_{ji}\phi^*)\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi\Delta_{ji}\phi,\phi^*(x,\theta)]+[\pi^*\Delta_{ji}\phi^*,\phi^*(x,\theta)])\\
&= \int d^3x'd^6\theta'([\pi,\phi^*(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi+\pi[\Delta_{ji}\phi,\phi^*(x,\theta)]+\\
&\quad +[\pi^*,\phi^*(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi^*+\pi^*[\Delta_{ji}\phi^*,\phi^*(x,\theta)]).
\end{aligned}
$$

Substituindo a segunda equação de (6.25), temos que

$$
\begin{aligned}
[M_{ij},\phi^*(x,\theta)] &= \int d^3x'd^6\theta'(-i\delta^3(x-x')\delta^6(\theta-\theta'))\Delta_{ji}\phi^*\\
&= -i\Delta_{ji}\phi^*(x,\theta)\\
&= i\Delta_{ij}\phi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii).\ [M_{ij}, \pi(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*), \pi(x,\theta) \right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*)\pi(x,\theta) - \\
&\quad -\pi(x,\theta) \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi \pi(x,\theta) + \pi^* \Delta_{ji}\phi^* \pi(x,\theta) - \\
&\quad -\pi(x,\theta)\pi \Delta_{ji}\phi - \pi(x,\theta)\pi^* \Delta_{ji}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi \Delta_{ji}\phi, \pi(x,\theta)] + [\pi^* \Delta_{ji}\phi^*, \pi(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi, \pi(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi + \pi[\Delta_{ji}\phi, \pi(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*, \pi(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi^* + \pi^*[\Delta_{ji}\phi^*, \pi(x,\theta)]) \\
&= i\Delta_{ij}\pi(x,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iv).\ [M_{ij}, \pi^*(x,\theta)] &= \left[\int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*), \pi^*(x,\theta) \right] \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*)\pi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\pi^*(x,\theta) \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi + \pi^* \Delta_{ji}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' (\pi \Delta_{ji}\phi \pi^*(x,\theta) + \pi^* \Delta_{ji}\phi^* \pi^*(x,\theta) - \\
&\quad -\pi^*(x,\theta)\pi \Delta_{ji}\phi - \pi^*(x,\theta)\pi^* \Delta_{ji}\phi^*) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi \Delta_{ji}\phi, \pi^*(x,\theta)] + [\pi^* \Delta_{ji}\phi^*, \pi^*(x,\theta)]) \\
&= \int d^3x' d^6\theta' ([\pi, \pi^*(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi + \pi[\Delta_{ji}\phi, \pi^*(x,\theta)] + \\
&\quad +[\pi^*, \pi^*(x,\theta)]\Delta_{ji}\phi^* + \pi^*[\Delta_{ji}\phi^*, \pi^*(x,\theta)]) \\
&= i\Delta_{ij}\pi^*(x,\theta).
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38-41 (1947).

[2] J. Polchinski, *String Theory* (University Press, Cambridge, 1998).
R. Szabo, *An Introduction to String Theory and D-Brane Dynamics* (Imperial College Press, London, 2004).
M. Green, J. H. Schwarz e E. Witten,*Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).

[3] N. Seiberg e E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999).

[4] M. R. Douglas e C. Hull, *D-Branes and the Noncommutative Torus*, JHEP **9802**, 008 (1998).

[5] R. J. Szabo, Phys. Rep. **378**, 207 (2003).

[6] C. N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874874 (1947).

[7] J. J. Jaeckel, V. V. Khoze e A. Ringwald, JHEP **0602**, 028 (2006).

[8] C. E. Carlson, C. D. Carone e N. Zobin, Phys. Rev. D **66**, 075001 (2002).

[9] M. Haghighat e M. M. Ettefaghi, Phys. Rev. D **70**, 034017 (2004).

[10] C. D. Carone e H. J. Kwee, Phys. Rev. D **73**, 096005 (2006).

[11] M. M. Ettefaghi e M. Haghighat, Phys. Rev. D **75**, 125002 (2007).

[12] H. Kase, K. Morita, Y. Okumura e E. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **109**, 663 (2003).
K. Morita, E. umezawa e Y. Okumura, Prog. Theor. Phys. **110**, 989 (2003).

[13] S. Saxell, Phys. Lett. B **666**, 486 (2008).

[14] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**,39 (1994); Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).

[15] C. Duval e P. A. Horvathy, Phys. Lett. B **479**, 284 (2000).

[16] J. Gamboa, M. Loewe e J. C. Rojas, Phys. Rev. D **64**, 067901 (2001).

[17] V. P. Nair e A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **505**, 267 (2001).

[18] R. Banerjee, Mod. Phys. Lett. A **17**, 631 (2002).

[19] S. Belluci e A. Nersessian, Phys. Lett. B **542**, 295 (2002).

[20] P. -M. Ho e H. -C. Kao, Phys. Rev. Lett. **88**, 151602 (2002).

[21] A. A. Deriglasov, Phys. Lett. B **555**, 83 (2003); JHEP 03 (2003) 021.

[22] A. Smailagic e E. Spallucci, J. Phys. A **36**, L467 (2003);**36**, L517 (2003).

[23] L. Jonke e S. Meljanac, Eur. Phys. J. C **29**, 433 (2003).

[24] A. Kokado, T. Okamura e T. Saito, Phys. Rev. D **69**, 125007 (2004).

[25] A. Kijanka e P. Kosinski, Phys. Rev. D **70**, 127702 (2004).

[26] I. Dadic, L. Jonke e S. Meljanac, Acta Phys. Slov. **55**, 149 (2005).

[27] S. Bellucci e A. Yeranyan, Phys. Lett. B **609**, 418 (2005).

[28] X. Calmet, Phys. Rev. D **71**, 085012 (2005).
X. Calmet e M. Selvaggi, Phys. Rev. D **74**, 037901 (2006).

[29] F. G. Scholtz, B. Chakraborty, J. Govaerts e S. Vaidya, J. Phys. A **40**, 14581 (2007).

[30] M. Rosenbaum, J. D. Vergara e L.R. Juarez, Phys. Lett. A **367**, 1 (2007).

[31] A. Iorio e T. Sykora, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2369 (2002).
A. Iorio, Phys. Rev. D **77**, 048701 (2008).

[32] R. Amorim, Phys. Rev. Lett. **101**, 081602 (2008).

[33] R. Banerjee, B. Chakraborty e K. Kumar, Phys. Rev. D **70**, 125004 (2004).

[34] A. Kempf, G. Mangano e R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).

[35] E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes, W. Oliveira e A. O. Zangirolami; The Noncommutative Doplicher-Fredenhagen-Roberts-Amorim Space; SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications); v. 6, p. 1-37, 2010.

[36] A. Connes, C*-algèbres et géométrie différentielle, C. R. Acad. Sci. Paris **290**, 599 (1980).

[37] A. Connes, Spectral sequence and homology of currents for operator algebras, Tagungsbericht 42/81, Mathematisches Forschungszentrum Oberwolfach, 1981.

[38] A. Connes, Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris **296**, 953 (1983).

[39] A. Connes, Noncommutative differential geometry, Publ. Math. IHES **39**, 257 (1985).

[40] Wilson Oliveira, Notas de Aula de Teorias de (Campo) Não-Comutativas, Departamento de Física, UFJF.

[41] João Barcelos-Neto, Notas de Aula de Não-Comutatividade, Instituto de Física, UFRJ.

[42] Wilson Oliveira, Notas de Aula de Física Matemática 3, Departamento de Física, UFJF.

[43] Juan M. Romero, J. A. Santiago e J. David Vergara, arXiv:hep-th/0211165v2.

[44] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1980.

[45] Valery Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields, Princeton University Press, 2002.

[46] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari e A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).

[47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, *Quantum Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1997).

[48] P.M.Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics Vol. 169 (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, 1992).

[49] M. Chaichian, K. Nishijima e A. Tureanu, Phys. Lett. B **633**, 129 (2006); um operador similar pode ser encontrado em J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, F. Ruiz Ruiz e P. Vitale, Phys. Rev. D **74**, 025014 (2006).

[50] Nas referências [32] e [53] é possível encontrar uma quantidade enorme de referências sobre MQNC.

[51] R. Amorim, Jour. Math. Phys. **50**, 052103 (2009).

[52] R. Amorim, Jour. Math. Phys. **50**, 022303 (2009).

[53] R. Amorim, Phys. Rev. D **78**, 105003 (2008).

[54] R. Amorim e E.M.C. Abreu, Phys. Rev. D **80**, 105010 (2009).