UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Felipe Corrêa da Cruz Escobar

INVESTIGANDO ERROS EM MATEMÁTICA: FATORES QUE INTERFEREM NA APRENDIZAGEM DOS EDUCANDOS

Juiz de Fora (MG)

Janeiro, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Felipe Corrêa da Cruz Escobar

INVESTIGANDO ERROS EM MATEMÁTICA: FATORES QUE INTERFEREM NA APRENDIZAGEM DOS EDUCANDOS

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Janeiro, 2016

Felipe Corrêa da Cruz Escobar

“Investigando Erros em Matemática: Fatores que Interferem na Aprendizagem dos Educandos”.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

____

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr.
Orientador

____

Prof(a). Dr(a). Adriane Melo de Castro Menezes
Convidada externa UFRR

____

Prof(a). Dr(a). Chang Kuo Rodrigues
Convidada interna UFJF

Aprovado em ____/ _____/ ________

Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.

Chico Xavier

AGRADECIMENTOS

Ao meu Amigo, Educador, Professor, Orientador e Vascaíno, Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr., pela paciência e dedicação em todos os momentos de que necessitei, para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Dr.(a) Chang Kuo Rodrigues, Dr.(a) Adriane Melo de Castro Menezes, Dr. Leonardo José da Silva e Dr. Renato Marcone José de Souza, por aceitarem fazer parte desta banca e acreditarem neste trabalho.

À minha mãe e irmã, bases de todas as conquistas e da minha caminhada.

À minha namorada, Nelissa, por todo apoio e compreensão, acreditando sempre em mim.

A todo corpo docente e secretariado do Mestrado, por me socorrer e ajudar, em diversos momentos.

Aos amigos do Mestrado, Rosiney, Luis Felipe, Luciana, Rodrigo, Glauco, para citar alguns, por toda caminhada juntos.

Aos amigos Carlos Eduardo (Dudu) e Maicom, pelo apoio moral e tecnológico.

MEMORIAL

Desde 2005, quando ingressei no curso de Ciências com Habilitação Plena em Matemática, pelo Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora (CES/JF), sempre estive envolvido com o ensino, seja nas monitorias que ministrei – nas disciplinas de Cálculo I e II –, nas aulas introdutórias ao Cálculo, ou mesmo nas aulas particulares, que sempre estiveram presentes em toda minha vida acadêmica e que me acompanham até hoje.

A Educação Matemática surgiu em minha vida através da Professora Doutora em Educação Matemática Chang Kuo Rodrigues, minha orientadora na graduação, que concluiu seu doutorado em 2009, constantemente dividindo suas experiências conosco.

Em outubro de 2009, recém-formado na graduação, tive o prazer de ter contato direto com a Educação Matemática, através do II Colóquio em Educação Matemática, organizado pela UFJF (Universidade Federal de Juiz de Fora). Nele pude vislumbrar o quanto há professores espalhados por todo o Brasil preocupados com a aprendizagem de nossos estudantes. Encantado com esse movimento, nutri o grande sonho de cursar o Mestrado em Educação Matemática, mas, na época, para ingressar no Programa de Mestrado, era necessário ter dois anos de experiência em sala de aula, portanto, tive de esperar e alimentar esse sonho, ganhando experiência profissional.

No segundo semestre de 2011, cursei uma disciplina isolada, como aluno especial em Perspectivas Atuais em Avaliação, também com a Educadora Matemática Dr.ª Chang Kuo Rodrigues, aumentando a expectativa de entrar para o curso, mas uma aflição ainda me rodeava: o que queria pesquisar, em minha dissertação?

Refletindo bastante, veio-me o encantamento pelo Minicurso de meu atual orientador, o Educador Matemático Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr., com o tema *Investigando Erros Matemáticos no Ensino Fundamental*, ministrado no III Colóquio em Educação Matemática, na UFJF, em 2011, e logo me veio a certeza de que queria trabalhar com os erros cometidos por nossos alunos.

Mesmo não tendo sido aprovado na última fase, para ingressar no Programa de Mestrado, em 2012, o sonho não acabou e as observações a respeito do erro cometido pelos alunos foram aumentando; durante todo esse tempo, trabalhei em escolas públicas e particulares e as aulas particulares continuaram envolvidas, as quais tornavam possível maior observação e diálogo com os alunos, aguardando a tão esperada chance de entrar no Mestrado, o que ocorreu em 2013.

Nessa caminhada, até aqui, pude observar que muitas são as confusões e dúvidas de nossos alunos, em relação à Matemática. Não estou falando em cálculo, geometria, trigonometria, álgebra ou em qualquer outro conteúdo “mais geral” e aprofundado, que abranja uma grande área de atuação. Refiro-me a uma “Matemática básica”, ou aos pré-requisitos necessários para cada uma dessas áreas, tais como frações, números decimais, produtos notáveis, raízes, equações, para citar apenas alguns.

Em minha prática de sala de aula, seja explicando algum conteúdo, conversando com alunos, corrigindo exercícios ou avaliações, algo sempre me intrigou. O mesmo ocorria durante as aulas particulares, correspondentes à cerca de cinquenta por cento de meu tempo dedicado ao magistério. Foi nesse momento, no qual há mais proximidade com o aluno, mais tempo para o diálogo e atenção mais especial às suas dúvidas e dificuldades do que em uma sala de aula, com trinta alunos, em média, que pude comprovar que minha inquietação tinha fundamento, e então veio o pensamento que viria a ajudar a estruturar essa pesquisa: *Por que os alunos cometem tantos erros com a Matemática básica?*

Várias pesquisas tendo o “erro” como tema, a dissertação de Kistemann Jr. (2004), *O Erro e a Tarefa Avaliativa em Matemática: uma abordagem qualitativa*, a tese de Cury (1995), *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*, apontam que, para os professores, o erro de seus alunos ocorre, em grande parte, pela defasagem, ou até ausência, de pré-requisitos para a disciplina.

Com alunos de diversos anos escolares, aos quais ofereço acompanhamento particular, inclusive com estudantes do Ensino Superior – alunos do curso de Engenharia e frequentadores da monitoria de Cálculo I e II, durante minha graduação –, observei que, em sua maioria, mesmo alunos já estudantes de Matemática do nível superior, costumam cometer erros típicos de alunos do Ensino Fundamental e Médio.

O que mais me incomodava era que esses erros ocorriam de forma mecânica e automática. Não eram situações em que os alunos tentavam resolver algum problema e deparavam-se com alguma dificuldade, para chegar ao resultado esperado, eram erros de operações – como em frações, as quais os alunos resolvem mentalmente e, muitas vezes, encontram um resultado incorreto, por estarem efetuando algum método de resolução equivocado.

Para aumentar mais minha curiosidade, em grande parte, esses erros passavam de forma despercebida pelos estudantes; muitos, ao chegarem ao final da resolução de alguma atividade, não tendo conseguido obter o resultado esperado, não percebiam que o desenvolvimento da atividade estava correto (quando era esse o caso) e que o erro se encontrava justamente no desenvolvimento das operações. Ao serem indagados sobre o porquê de o resultado de alguma operação ter sido aquele, muitos tinham a certeza de que as operações que haviam sido resolvidas mentalmente, ou mesmo rascunhadas, estavam corretas e que o erro se encontrava no desenvolvimento da atividade, sendo assim, eles, em geral, pensavam que apagar toda a atividade e começar a busca (forçada) por outras operações (sem sentido) iriam conduzi-los ao resultado esperado.

Dessa forma, surgiu nossa pergunta diretriz: *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprenderem com seus erros em Matemática?*. Assim, esperamos que este trabalho contribua com a prática docente dos educadores, para que os mesmos possam refletir e, cada vez mais, procurem alternativas para auxiliar os estudantes em um aprendizado mais eficaz.

RESUMO

O objetivo deste trabalho, de cunho qualitativo, é analisar erros ocorridos com tanta frequência em certos conteúdos do Ensino Fundamental. Tendo como pergunta diretriz: *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*, expomos pontos que podem induzir nossos alunos ao erro. Fizemos uma abordagem de como os principais autores utilizados nas redes pública e particular, no município de Juiz de Fora, estão abordando tais temas. Nosso embasamento teórico-metodológico está no livro do psicólogo Daniel Kahneman, intitulado *Rápido e Devagar: duas formas de pensar*; faremos uma análise de como funciona o pensamento humano, a fim de tentar compreender o que pode passar pela cabeça de nossos alunos, durante seu aprendizado. Com questões retiradas de avaliações de professores de Matemática, faremos uma leitura de como os mesmos andam interpretando os erros ocorridos em suas avaliações. Para a real compreensão do que o aluno entende com esses conteúdos, serão aplicados alguns testes com alunos do Ensino Fundamental II na E. E. Mercedes Nery Machado, localizada na região central do município de Juiz de Fora, para averiguar sua compreensão diante de um problema e o sentido que alguns conteúdos fazem para os mesmos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Erros em Matemática. Livros Didáticos.

ABSTRACT

The objective of this work, a qualitative approach is to analyze errors that occurred so often in certain elementary school content. With the question guideline *How can we contribute to the teaching practice, to propose a reflection of this professional in the search for alternatives that help students learn from their mistakes in mathematics?* Lays out points that can influence and cause an error by our students. We made an approach as the main authors used in public and private networks in the Juiz de Fora city are addressing these issues. Our theoretical and methodological basis is the psychologist's book Daniel Kahneman, entitled, *Fast and Slow: two ways of thinking*; we will make an analysis of how the human mind, in order to try to understand what might cross the minds of our students during their learning. With aside questions assessments of mathematics teachers, they will read how they go interpreting errors committed in their assessments. For real understanding of what the student understands with such content will be applied some tests with elementary school students in EE Mercedes Nery Machado, located in the central region of Juiz de Fora city, to ascertain their understanding on a problem and the sense that some content do to the same.

Keywords: Mathematics Education. Errors in Mathematics. Textbooks.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, de cunho qualitativo (pesquisa exploratória, portanto não tem o intuito de obter números como resultados**,** mas insights – muitas vezes imprevisíveis – que possam nos indicar o caminho para a tomada de decisão correta sobre uma questão-problema), sobre erros em Matemática, analisaremos o erro nos "pré-requisitos[1]", em conteúdos usados frequentemente na vida escolar, seja no Ensino Fundamental ou Médio, tendo como objetivos convidar os professores a refletirem sobre sua postura em sala de aula, perante o erro, respondendo, assim, à nossa pergunta diretriz: *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*. Analisaremos algumas atividades que nos façam compreender o sentido que alguns conteúdos têm para os estudantes, a fim de que possamos possibilitar a sua compreensão e, com isso, diminuir suas sucessivas ocorrências de erros.

Acreditamos na importância desta pesquisa tanto para o professor, em sala de aula, quanto para a Educação Matemática, pois nela apresentamos um novo ponto a se investigar em análise de erros, que é a ilusão cognitiva (Kahneman, 2011), quando tomamos decisões automáticas e, muitas das vezes, erradas, sem termos a consciência do que estamos fazendo. Enquanto, para o professor, pode ser de grande ajuda para tentar entender a real dificuldade de seus alunos, expomos, neste trabalho, diferentes fatores que provavelmente contribuem para a grande ocorrência de certos erros.

Com a realização de uma criteriosa análise sobre como os livros didáticos abordam os conteúdos analisados, faremos um comparativo se tais exposições esclarecem ou confundem os estudantes. Para analisar os erros cometidos pelos discentes, foram montados testes para cada ano do Ensino Fundamental, todos com questões tiradas de livros didáticos; as atividades foram aplicadas na E. E. Mercedes Nery Machado, localizada em Juiz de Fora (MG), para alunos do 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental II, ao final do ano letivo de 2014.

---

1 Conteúdos utilizados com bastante frequência durante a resolução de outros conteúdos, em Matemática.

Nesta pesquisa, mostraremos, ainda, como alguns professores lidam com os erros cometidos pelos alunos; para isso, serão expostas questões retiradas de testes feitos por alguns de nossos alunos, durante esses anos de trabalho docente.

Na *Revisão a Literatura*, nosso **segundo capítulo**, temos cinco autores como foco, sendo duas dissertações (Kistemann Jr. e Miranda), um trabalho de conclusão de curso (Azevedo), um livro (Cury) e um artigo (Passos), todos eles com pontos de vistas dos quais compartilhamos.

Em nosso **terceiro capítulo**, *Erros na disciplina de Matemática*, faremos uma breve análise sobre a ocorrência dos erros e como os professores lidam com os mesmos, como agem e a importância que têm dado para essa temática e suas ações pedagógicas.

O **quarto capítulo** será o de *Abordagem feita pelos Livros Didáticos*, no qual haverá uma interpretação de cada um dos conteúdos em foco de análise neste trabalho e das diferentes formas abordadas pelos quatro livros didáticos mais utilizados no município de Juiz de Fora (MG).

Nosso **quinto capítulo** será o de *Embasamentos Teóricos*, amparado por Daniel Kahneman, em: *Rápido e Devagar: duas formas de pensar.*

O **sexto capítulo** será sobre os *Procedimentos Metodológicos – análise dos dados produzidos*, informando o que fizemos metodologicamente em nossa pesquisa, e sobre nosso Produto Educacional, além de apresentarmos as atividades aplicadas em nossa pesquisa e uma análise dos resultados encontrados.

Por último, no **sétimo capítulo**, apresentamos as *Considerações Finais* desta pesquisa, e as perspectivas futuras, dentro de nosso tema de abordagem, para convidarmos os leitores a continuar pesquisando sobre esse tema tão vasto e ainda pouco abordado.

Em nosso **Produto Educacional**, temos um artigo sobre este trabalho, sendo esse um guia para os professores trabalharem com o erro, o qual pretendemos que possa chegar aos docentes, a fim de que reflitam sobre sua postura e surjam debates e ideias sobre o tema “análise de erros”, tão importante para a sala de aula e a Educação Matemática; há, ainda, um artigo referente a esta pesquisa.

2 REVISÃO DE LITERATURA

São escassos, na literatura da educação brasileira, os estudos sobre erros e formas de abordagem de erros cometidos pelos estudantes, durante o processo de ensino-aprendizagem. (MIRANDA, 2007, p. 29) Apesar das publicações sobre erros terem aumentado bastante nos últimos anos, poucas foram as que se encaixavam ao nosso trabalho. A grande maioria trabalha com algum conteúdo específico, ou com alguma série específica. Em nossa Revisão de Literatura, analisamos duas dissertações, um trabalho de conclusão de curso, um livro e um artigo, os quais se complementaram de forma incrível, embasando nossas ideias.

> [...] questiono a falta de discussões sobre erros em cursos de formação de professores. Parece que cada erro cometido por um futuro professor de Matemática é apontado, é riscado em vermelho, e a ele se atribui alguma pontuação negativa, mas raramente há tempo para voltar ao erro e partir dele para reconstruir algum conhecimento. (CURY, 2007, p. 93)

Kistemann Jr, com o trabalho intitulado *O Erro e a Tarefa Avaliativa em Matemática: uma abordagem qualitativa*, tem fundamentações de Piaget e Perrenoud, os quais expressam várias ideias que completam as nossas. Em seu trabalho, de cunho qualitativo, Kistemann Jr. (2004) faz uma investigação na qual vinte professores da cidade de Juiz de Fora (MG) respondem sobre suas metodologias de ensino, dificuldade dos alunos, avaliações, entre outras questões que envolvem sua pesquisa. Dessa forma, Kistemann Jr. (2004) constatou que, para grande parte dos professores, os Pré-requisitos constituem o maior causador do Erro (superando Linguagem Matemática e Fragmentação de Conteúdos), sendo um obstáculo para a construção de novos conceitos matemáticos.

> O objetivo geral é conhecer como as tarefas avaliativas de Matemática, nas suas mais variadas formas, auxiliam o professor a regular a aprendizagem através dos erros cometidos e de que forma esses erros constituem-se como agentes na construção (ou não) do conhecimento matemático, na perspectiva docente. (KISTEMANN JR., 2004, p. 82)

Kistemann Jr. (2004) expõe algumas opiniões dos professores entrevistados sobre obstáculos cognitivos como pré-requisitos:

- O Pré-requisito é o grande problema para o desempenho de novos conteúdos.
- Os alunos apresentam muita dificuldade de estabelecer uma relação com o que já sabem, apresentando também a famosa “falta de base”.
- Quando ele (o aluno) percebe que os conteúdos dos anos anteriores são necessários para o entendimento do novo conteúdo que ele não assimilou.
- O aluno tem dificuldades em utilizar dentro do conteúdo, conhecimentos que deveriam ter sido pré-adquiridos. (KISTEMANN JR., 2004, p. 95-96)

Segundo Kistemann Jr. (2004, p. 8),

> Um estudo do Erro na disciplina de Matemática, através de condutas docentes investigativas pode revelar que o Erro é tão valioso instrumento de construção de conceitos quanto o acerto, pois o primeiro constitui-se como hiato que falta para colocar abaixo as praticadas *hierarquias de excelência* (PERRENOUD, 2000) pelas escolas. Denuncia, ainda, o pouco conhecimento e o despreparo dos professores em lidar com o Erro, não utilizando-o como ente rico para o norteamento de sua conduta pedagógica, assim como regulador da aprendizagem do aluno.

Com essa citação, percebemos o quanto nosso trabalho pode ir ao encontro de Kistemann Jr. (2004), pois estamos tentando mostrar a importância que os erros dos alunos têm, o que já foi investigado com docentes da disciplina de Matemática. Como constatou Kistemann Jr. (2004), o principal causador do erro (de acordo com a pesquisa feita com professores) é a falta dos pré-requisitos, ponto esse em que nossa pesquisa e atividades estão focados.

O trabalho *Erros e Obstáculos: Os conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação*, de MIRANDA, W. S. (2007), tem um foco análogo ao nosso, apesar de ser de cunho quantitativo.

Miranda (2007, p. 12) baseia-se em Pochulu (2005), que apresenta alguns conteúdos das séries finais do Ensino Fundamental II como contendo erros constantes:

1. Aplicação das regras de sinais da multiplicação, ao efetuar soma com números inteiros;
2. Somam números racionais, efetuando a adição de numeradores de um lado e denominadores por outro;
3. Dividem números racionais, aplicando o algoritmo da multiplicação;
4. Resolvem divisão onde o dividendo é um zero, pensando como 1, ou ignorando sua presença;
5. Simplificam frações, dividindo numerador e denominador por números diferentes;

6. Associam que um decimal periódico se obtém, em todos os casos, como uma fração cujo numerador é igual ao seu período truncado, expressando a parte inteira como numerador e o período como denominador;
7. Consideram que tem um número negativo elevado a certo expoente quando o sinal de menos antecede a potência;
8. Recuperam o esquema de multiplicação reiterada, como fatores negativos, quando o expoente da potência é um número negativo;
9. Assumem que toda potência de expoente nulo dá por resultado certo a base da mesma;
10. Aplicam a propriedade distributiva da radiciação em operações de soma e/ou subtração;
11. Estimam que a raiz com radicando negativo e índice ímpar tem duplo resultado, ou que não possui solução no conjunto dos reais;
12. Decodificam incorretamente os valores representados por letras, em uma reta numérica;
13. Não conseguem determinar hierarquias, nem tipos de operações que intervêm nos termos de uma equação;
14. Consideram que um fator negativo se transpõe dividido e combinando o sinal; ou que forma parte de um resto, por isso passam-no somando para o outro membro;
15. Transpõem fatores como dividendo e não como divisores;
16. Não identificam as figuras geométricas elementares quando em posição “não estudada”;
17. Supõem que a altura de um triângulo é sempre um segmento interior à figura;
18. Truncam respostas que prescindem das unidades de medida, em problemas que envolvem magnitudes.

Dentre os itens apresentados no trabalho de Miranda (2007), o 2, o 3 e o 13 até se assemelham com os conteúdos que queremos analisar, mas Miranda (2007), apesar de ter proposto testes para as turmas da 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental (atual 6º ao 9º ano), nos moldes em que aplicamos, fez uma análise sobre o operacional, enquanto nós, além do operacional, quisemos ver a interpretação dada pelos alunos, diante de certos problemas.

Miranda (2007, p. 28) descreve que “o estudo do erro não deve se limitar apenas a identificá-lo, através da comparação de respostas dadas com o padrão esperado, mas procurar as suas causas, sendo essa a nossa busca, neste trabalho”.

Miranda (2007, p. 13) tinha como foco os seguintes itens:

a) que tipos de erros vêm ocorrendo entre nossos estudantes;
b) quais os erros cometidos pelos alunos de matemática podem se constituir como obstáculo didático e
c) se há coincidência entre os tipos de erros por ele encontrados e os erros encontrados por Pochulu (2005).

Portanto, estava claro que o objetivo do autor era comparar a parte procedimental dos alunos de sua pesquisa com os erros citados por Pochulu. Ao final, o autor constata que, dos 18 erros mencionados por Pochulu, 11 ocorreram em sua pesquisa: os de número 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14 e 15.

Para detalhar melhor seu estudo, Miranda (2007) representa cada questão aplicada em seus testes através de tabelas e mostra o número de erros ocorridos em cada item e em cada série; em nosso trabalho, iremos expor os resultados analisados em gráficos de setores, interpretando que tipos de erros ocorrem em cada um dos itens analisados. Assim como Miranda (2007), analisamos turmas do 6º ao 9º anos – antiga 5ª a 8ª séries abordadas por Miranda (2007).

Azevedo (2009) apresenta-nos o trabalho *Análise de Erros Matemáticos: interpretação das respostas dos alunos* e, já em seu resumo, menciona que muitos professores encaram o erro como algo negativo e inaceitável. Para a autora (assim como é defendido em nosso trabalho), muitas vezes, o aluno não gosta de estudar Matemática, por não encontrar sentido e significado nas atividades que está realizando.

> Com a compreensão do que levou determinado estudante a cometer o erro, torna-se mais fácil elaborar atividades que visem trabalhar melhor as dificuldades dos alunos, uma vez que há mais probabilidade de detectar qual parte do conteúdo em questão não está sendo entendida pelo aluno. (AZEVEDO, 2009, p. 6)

Em consonância com nossa pesquisa, Azevedo (2009) está preocupada com a interpretação que os alunos estão tendo diante de algum exercício e, dessa forma, a autora espera conseguir atividades que facilitem o entendimento dos conteúdos por nossos alunos, acreditando que a análise de erros pode servir como recurso para os professores compreenderem melhor as respostas dos discentes, pois, ao analisar seus erros, “o professor deixa de apenas dizer o que está certo e o que está errado, para acompanhar o aluno no processo de construção de conhecimento”. (Azevedo, 2009, p. 10)

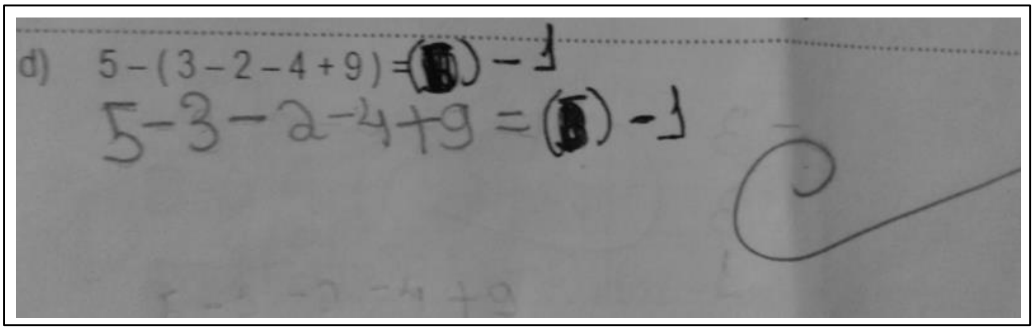


Figura 1: Questão de teste de aluno.

A imagem anterior (Figura 1) reflete claramente o que foi dito por Azevedo: somente foi analisada a resposta final, o que não comprova que o aluno está compreendendo o conteúdo, pois, tanto a resposta, quanto o desenvolvimento estão incorretos. Efetuando as contas escritas pelo aluno, “5 – 3 – 2 – 4 + 9”, podemos ver que seu resultado deveria dar “5”, diferente do “– 1” exposto no final e que foi o suficiente para o aluno ter acertado a questão. A resposta “– 1” é a resposta correta, mas, para o aluno encontrá-la, ele poderia ter efetuado dentro dos parênteses, primeiro, chegando a obter “5 – (6)”, que daria “– 1”, ou, se fosse para cancelar os parênteses, como foi pensado, o aluno deveria ter trocado o sinal de todos os elementos que estão dentro dos parênteses, ficando dessa forma: “5 – 3 + 2 + 4 – 9”, na qual também teria encontrado o “– 1” esperado pelo professor, só que, dessa vez, com o desenvolvimento correto.

> Como a matemática, muitas vezes, é considerada uma ciência exata e pronta, os professores avaliam apenas a resposta final, ao invés de considerar o processo intermediário que o aluno teve para chegar àquela resposta, a interpretação do aluno não é levada em conta, pois, devido a essa concepção da matemática, pensa-se que a resposta final deve ser única. (AZEVEDO, 2009, p. 13)

Portanto, a preocupação de Azevedo (2009) com os erros dos alunos e a forma como os professores estão lidando com eles converge com nosso trabalho, assim como o pensamento de que, para saber onde os estudantes cometem os erros, faz-se necessário encontrar atividades que tornem seu aprendizado menos difícil. No desenvolvimento de suas ideias, Azevedo (2009) baseou-se muito nos trabalhos de Helena Cury, nosso próximo foco.

Assim como em nossa pesquisa, Cury (2007, p. 13), em sua obra *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*, também questiona o fato de o acerto garantir que o aluno está sabendo e o erro, que não está;

> [...] destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas. (CURY, 2007, p. 80)

A autora menciona o que foi dito por Hadamard (1945, p. 24): “Eu faço muito mais (erros) do que meus estudantes; só que eu sempre os corrijo, de forma que nenhum traço deles permaneça no resultado final”, dessa forma, temos a noção de que nós, professores, também erramos (de fato), mas já somos capazes de corrigir nossos erros e de não deixá-los transparecer.

Cury (2007, p. 42), ao fazer uma análise sobre os pesquisadores que têm o erro como foco, cita Del Puerto e colaboradores (2006), que consideram que “uma ‘biblioteca de erros típicos’ pode ajudar o professor a planejar atividades que auxiliem os alunos em suas dificuldades”, fato que coincide com os objetivos deste trabalho, pois queremos encontrar atividades que nos ajudem a entender um pouco a visão dos alunos sobre os conteúdos que selecionamos.

O objetivo da investigação, além de analisar e classificar os erros apresentados pelos alunos participantes, é desenvolver estratégias de ensino que possam ampará-los em suas dificuldades [...] (CURY, 2007, p. 50); segue, ainda, que “[...] analisar as respostas produzidas pelos alunos, em qualquer conteúdo, é uma das formas de auxiliá-los a construir o conhecimento básico necessário para transitar pelos conteúdos específicos de suas áreas de formação” (CURY, 2007, p. 73).

Concordando com a citação de Cury, percebemos a importância que este trabalho pode ter, ratificando que nosso objetivo é mostrar aos docentes a importância que o erro pode ter no processo de aprendizagem. Conforme mencionado pela autora, uma biblioteca de erros pode ajudar o professor a encontrar atividades para auxiliar seus alunos, assim como nossas atividades avaliativas irão mostrar recorrentes erros e onde os mesmos possam ocorrer nos conteúdos que escolhemos pesquisar.

O artigo de Passos (2014), *O Estudo do Erro/Erros em Pesquisas em Educação Matemática e Áreas Afins*, apresenta

> [...] alguns dos resultados encontrados por meio de uma busca no site

> da Capes por trabalhos que tratam do erro/erros nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. Essa pesquisa foi realizada com a intenção de identificar o tratamento que tem sido dado ao erro/erros dos estudantes na elaboração do conhecimento matemático. Foram selecionados principalmente os trabalhos relacionados à Educação Matemática, Educação e Psicologia. (PASSOS, 2014, p. 1)

A autora faz uma busca nos site da Capes até junho de 2012, à procura de pesquisas que tenham como foco o(s) erro(s) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e os categoriza, de forma a ter uma biblioteca de pesquisas sobre o respectivo tema, tendo os seguintes resultados (PASSOS, 2014, p. 4):

Quadro 1: Trabalhos acadêmicos segundo tipo ou área

Tipo de trabalho / área	**nº**
Teses em Educação Matemática ou áreas afins	14
Dissertações (mestrado acadêmico) em Educação Matemática ou áreas afins	129
Dissertações (mestrado profissionalizante) em Educação Matemática ou áreas afins	24
Teses em outras áreas	73
Dissertações (mestrado acadêmico) em outras áreas	312
Dissertações (mestrado profissionalizante) em outras áreas	3
Total	555

Fonte: Capes

Para Passos (2014, p. 2), “análise dos erros não é uma fórmula mágica, mas um caminho para nortear o trabalho do professor para favorecer a aprendizagem dos alunos”, dessa forma, nossa pergunta diretriz, neste trabalho, *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*, vai ao encontro dos pensamentos de Passos (2014), reafirmando a importância que pode ter esta pesquisa.

Dessa forma, neste trabalho, os cinco autores que compuseram nossos referenciais teóricos estarão presentes não só com suas ideias e dados coletados, mas também em termos de estrutura.

Kistemann Jr (2004) nos mostra a importância que os pré-requisitos têm durante o processo de aprendizagem dos estudantes;

Miranda (2007), com sua pesquisa com alunos da 5ª a 8ª séries (atual 6º ao 9º anos), analisando a parte operacional de diversos conteúdos, algum deles escolhidos por nós, para a presente pesquisa;

Azevedo (2009) espera, através dos erros dos alunos, conseguir atividades que os ajudem a ter uma melhor compreensão sobre a Matemática. A autora relata como muitos professores tratam-na como uma disciplina de certo e errado, sendo o "importante", apenas, a resposta final;

Cury (2007) também está preocupada com a forma como os professores estão lidando com o erro e acha que uma biblioteca de erro se faz de grande importância para auxiliar os professores a elaborarem atividades que ajudem nas dúvidas dos alunos;

Passos (2014) nos mostra a importância que a análise de erros tem no processo de ensino-aprendizagem.

No capítulo seguinte, *Erros na Disciplina de Matemática*, faremos uma análise de como os professores interpretaram o erro de nossos alunos e a forma como professores fizeram a correção de seus testes, tendo apenas a resposta final como certa ou errada.

3 ERROS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, faremos uma abordagem de como os erros em Matemática podem ocorrer e como alguns professores, em geral, trabalham com eles, pois,

> ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros mostram somente o que ele não sabe? (CURY, 2007, p. 13)

Compartilhando do pensamento de Cury (2007), vamos apresentar algumas questões de testes fornecidas por nossos alunos, durante nossa atividade como professor particular, mostrando que, em muitos momentos, para os professores, apenas a resposta final diz se o aluno sabe, ou não, a questão apresentada.

Hadji (1994, p. 125) afirma que, “se quisermos ‘gerir’ o erro, para lá do desempenho registrado, é preciso tentar determinar as razões que lhe deram origem e dizer o que ele revela dos conhecimentos adquiridos ou das falhas do aluno. Não há gestão possível senão por este meio”.

Para Kistemann Jr. (2004, p. 6), “nas avaliações escolares, particularmente em Matemática, pouca atenção ou quase nenhuma tem sido dada aos erros apresentados pelos alunos*”.*

Parafraseando Kistemann Jr. (2004, p. 15), “não se propõe, neste estudo, de forma alguma, a sacralização do erro, mas o reconhecimento de seu potencial pedagógico, que carece de ser melhor explorado, explicando e dando sentido às vivências e experiências de atividades discentes*”*.

Nesse momento, nosso objetivo não é expor nenhum professor ou instituição, já que as questões mostradas não constam de nenhuma identificação sobre instituição, professor ou aluno. Nosso objetivo é que o docente leitor do nosso trabalho possa repensar sua metodologia, já que, como afirmou Cury, o acerto e o erro não necessariamente estão dizendo que o aluno sabe ou não sabe.

> O diálogo docente com os alunos sobre os erros acontecidos nas

> avaliações e nas tarefas matemáticas propiciam o crescimento individual de cada aluno, proporcionando a gênese de um sujeito que à medida que age e transforma o objeto matemático, organiza seus esquemas cognitivos e organiza o mundo do objeto. Nessa perspectiva, a observação, o acompanhamento e a análise dos erros ocorridos no processo avaliativo podem levar o professor a uma condição de mediador, no sentido de intervir no nível operatório do aluno, resultando em assimilações e acomodações mais consistentes. (KISTEMANN Jr., 2004, p. 49)

Dessa forma, nesse capítulo, queremos focar a atenção dos erros cometidos por nossos alunos, que passam despercebidos por uma grande parte docente, enquanto os mesmos poderiam ser problematizados e trabalhados, em prol de uma aprendizagem matemática significativa.

3.1 Nossa prática e como ocorrem os erros

Além de saber interpretar sobre os conteúdos estudados, acreditamos que saber efetuar a parte operacional dos conteúdos se faz de grande importância, mas apenas a parte operacional não é suficiente para se julgar a real compreensão sobre o tema estudado, pois,

> [...] especialmente no Cálculo, acredito ser a compreensão dos conceitos o objetivo mais importante. No entanto, sem a técnica, o aluno não tem ferramentas para trabalhar com os conceitos, e o desenvolvimento de habilidades de lidar com regras (para cálculo de limites, derivadas ou integrais, por exemplo) parece estar sendo prejudicada pela falta de habilidades no trabalho com propriedades operatórias básicas (CURY, 2007, p. 57).

Durante as aulas de Matemática, é frequente que ocorram muitos erros por parte da turma, mas alguns são cometidos por diversos alunos, quando certos conteúdos são trabalhados. Em nossas leituras sobre Análise de Erros, frequentemente apareciam as frações como exemplo para os sucessivos erros, mas os exemplos citados para as frações ocorriam na soma ou subtração, em quase todos os casos. Não tanto pela sua operacionalização, pois, ao se ensinar o algoritmo da soma, os alunos não encontram dificuldades, mas, no momento em que aprendem a multiplicar com frações, suas ideias começam a se entrelaçar à ideia da soma (que é o mesmo processo da subtração). Os alunos acabam generalizando o processo realizado na multiplicação, passando-o para a soma.

Enquanto, na multiplicação, a resolução ocorre multiplicando os numeradores e denominadores, o mesmo já não ocorre com a soma e a subtração, apesar de, em vários momentos, os alunos efetuarem tal processo, tendo, nesse momento, a ocorrência de um erro.

Para resolver tais operações de soma e subtração, deve-se estar com os denominadores igualados; muitos alunos decoram a “regrinha” tantas vezes repetida por seus professores, logo após tirarem o mmc (mínimo múltiplo comum), para acharem qual será o denominador em comum para as frações que estão sendo operadas – “divide-se pelo de baixo e multiplica-se pelo de cima”, em cada fração que estiver envolvida na operação. Ao fazerem tal processo mecânico (que está correto), os alunos, muitas vezes, sem terem consciência, estão encontrando uma fração equivalente (de mesmo valor) à fração inicial, só que, agora, deixando as frações com o mesmo denominador, a fim de poderem realizar a operação necessária.

Se tal processo de resolução está correto, então qual seria o problema com ele? A questão é que o aluno decora essa regra, mas não entende o real significado de se fazer esse processo, com isso, em outro momento, ao aprender outra operação, como a multiplicação, as “dicas” para o desenvolvimento começam a se misturar, uma vez que os alunos não criaram nenhum significado para o desenvolvimento dessas operações. Portanto, quando os erros, nesses desenvolvimentos, ocorrem, o aluno não consegue identificá-los, pois acabou de resolver uma operação vazia de significados, sendo que até a operação correta também seria vazia de significados para o mesmo.

Segundo Barbosa (2008, p. 21), “ideias mal concebidas inicialmente se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos”.

Em nosso dia a dia, mais especificamente, nas aulas particulares, pudemos observar que o erro também ocorre com grande frequência, principalmente em séries iniciais, sem deixar de ocorrer em séries mais avançadas, na generalização da soma para a multiplicação. Muitos alunos tentam igualar os denominadores, para resolver o processo da multiplicação, o que não seria um problema, já que, ao fazerem isso, eles encontram uma fração equivalente, entretanto, no momento de operar com as frações, eles multiplicam os numeradores e repetem denominadores, fazendo o algoritmo que seria da soma e da subtração.

Nossa inquietação, fato motivador para a pesquisa acerca desse tema, são os erros ocorridos com produtos notáveis, porque, em geral, ocorrem com alunos do

Ensino Médio, e por serem tão importantes na resolução de diversas atividades, como em Geometria Plana, Espacial e Analítica, em Álgebra, ou mesmo em Trigonometria.

Alunos do 1º ano do Ensino Médio – com Função Quadrática –, do 2º ano – estudando o conteúdo de Geometria Espacial – e do 3º ano – com Geometria Analítica – deparam-se com produtos notáveis em diversos momentos, e, mesmo assim, os erros são constantes. Ao efetuarem uma operação da forma $(x+5)^2$, o desenvolvimento é completamente vazio de significados; quando eles conseguem se lembrar da “regrinha” (novamente ela) – quadrado do primeiro (termo) mais duas vezes o primeiro (termo), vezes o segundo, mais o quadrado do segundo (termo) –, a qual, em alguns momentos, chega a ser exigida pelo professor, o resultado correto aparece $(x^2+10x+25)$, porém, caso não se lembrem, é bem comum que a resposta dada seja x^2+25, resultado que, apesar de espontâneo e automático, é a solução para $(x)^2+\ (5)^2$. Os alunos elaboram essa reposta com a convicção de que estão certos e, muitas vezes, não conseguem encontrar o erro cometido, seja ao final do problema, constatando que seu resultado não está correto, ou após alguma intervenção por parte do professor, a fim de alertá-lo sobre o fato. Para Kahneman (2011, p. 11), “muitas vezes estamos confiantes mesmo quando estamos errados, e um observador objetivo tem maior probabilidade de detectar nossos erros do que nós mesmos”. Tal erro acontece porque a definição de uma operação com produtos notáveis não está clara e nem faz sentido para o aluno, ele está “preso” apenas à operação de potência, sem conseguir interpretar o que está sendo elevado a essa potência.

Para Piaget (1975, p. 194), “numa pedagogia ativa, o erro tem um caráter nobre e deve ser reconhecido como elemento integrante da elaboração dos esquemas cognitivos”.

Fiorentini (2006, p. 4) observa que o:

> [...] erro escolar, na verdade, resulta do esforço dos alunos em participar do processo de aprendizagem, produzindo e negociando, a partir de seu mundo e de sua cultura, sentidos e significados sobre que se ensina e aprende na escola. E, nesse sentido, o erro não poderia ser visto como um mal a ser erradicado, mas como parte do processo de aprender e desenvolver-se intelectualmente.

Dessa forma, devemos entender que o erro estará sempre presente e terá grande importância durante o processo de ensino-aprendizagem e, como docentes, faz-se necessário estarmos preparados para discutir e esclarecer os diferentes caminhos (em alguns momentos, errados) que nossos alunos encontrarão.

3.2 Uma hipótese de como os professores lidam com o erro

Muitos professores encaram o erro como "falta de aprendizado" por parte dos alunos e recriminam os mesmos por estarem cometendo-o, isentando-se, assim, de qualquer conivência com o erro. Poucos professores buscam formas de diminuírem o ocorrido ou de mudarem sua metodologia de ensino, a fim de obterem melhores resultados. "Poucas vezes, um professor tem se preocupado em averiguar se o Erro cometido por seus alunos são equívocos de informação, deficiente interpretação do vocabulário dos enunciados ou mesmo falhas acontecidas em cálculos*"* (Kistemann Jr., 2004, p. 6).

> É o professor quem cria as oportunidades para a aprendizagem – seja na escolha de atividades significativas e desafiadoras para seus alunos, seja na gestão de sala de aula: nas perguntas interessantes que faz e que mobilizam os alunos ao pensamento, à indagação; na postura investigativa que assume diante da imprevisibilidade sempre presente numa sala de aula; na ousadia de sair da "zona de conforto" e arriscar-se na "zona de risco". (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 35)

Para Luckesi (2011, p. 22), a diferença entre "dar aulas" e "ensinar" é que, dando aula, espera-se que o aluno aprenda; já no ato de ensinar, deseja-se que ele aprenda, sendo assim, o professor investe na busca por esse resultado.

Em nossa cultura, geralmente, só valorizamos o sucesso. Para muitos professores, o aluno já deve chegar até ele "pronto", sem nenhuma dificuldade em conteúdos anteriores e, se possível, sem dificuldades até mesmo no que ele irá ensinar. Sendo assim, o que estaria fazendo tal aluno em sala de aula? O aluno está lá para aprender, é um ser em desenvolvimento, que terá suas dificuldades para compreender o que for novo.

> [...] admitidamente, todos nos esforçamos para evitar erros; e deveríamos ficar tristes ao cometer um engano. Todavia, evitar erros é um ideal pobre, se não ousarmos atacar problemas tão difíceis que

> o erro seja quase inevitável, então não haverá crescimento do conhecimento. De fato, é com nossas teorias mais ousadas, inclusive as que são errôneas, que aprendemos. Ninguém está isento de cometer enganos, a grande coisa é aprender com eles. (POPPER, 1996, p. 20)

Temos, ainda, segundo Cury:

> Ao apresentar regras, siglas e desenhos prontos, o professor está impedindo o aluno de fazer suas próprias conjecturas e testá-las. Logicamente, o aluno errará algumas vezes, mas é a partir desses erros que se dará a construção do conhecimento. Portanto, quando a Matemática é considerada um corpo de conhecimento que deve ser “passado” aos alunos, os erros são estigmatizados e só a correção absoluta das respostas é esperada. Por outro lado, se a Matemática é vista como um processo, uma caminhada plena de acertos e erros até atingir o conhecimento, os erros são aceitáveis como passos inevitáveis na obtenção das soluções de problemas. (CURY, 1990, p. 20)

Em nossas aulas particulares, convivemos com estudantes de diversos colégios da rede pública e particular e de diversos graus de escolaridade, desde os alunos do Ensino Fundamental (Segundo Segmento) e Médio, até alunos do Ensino Superior. Com isso, observamos como o erro do aluno chega a ser ignorado ou valorizado negativamente pelo professor. Nenhuma das duas opções citadas é de real ajuda para o aluno.

Quando o professor ignora o erro, na maioria das vezes, está deixando de intervir para que o aluno possa superar algum obstáculo epistemológico. E quando relatamos que ele valoriza o erro, não é no sentido de lhe dar importância e trabalhar para que não haja mais a ocorrência do mesmo, mas esquecendo todo o resto do desenvolvimento feito pelo aluno e centralizando seu olhar nesse erro, portanto acaba cortando (riscando) a atividade realizada com caneta vermelha (em geral), para haver um maior destaque de seu “fracasso”.

Nas palavras de Luckesi (1995 apud KISTEMANN Jr., 2004, p. 59), “na escola, examina-se e qualifica-se muitas vezes, porém, nela, se avalia muito pouco”.

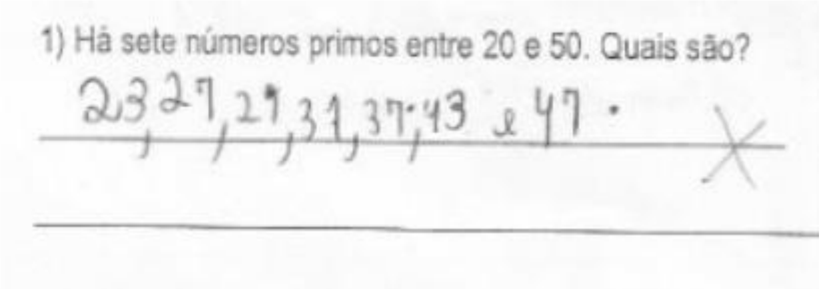


Figura 2: Questão de teste de aluno.

O erro ocorrido na atividade anterior (Figura 2), é que o aluno, ao ter de indicar os sete números primos (números com exatamente dois divisores, o 1 e o próprio número) compreendidos entre 20 e 50, errou um. O 27 não é primo, pois tem mais de dois divisores (em seu lugar, deveria estar o 41); por esse erro, o aluno perdeu toda a questão, sem terem sido considerados os outros seis números, que estavam corretos.

DE LA TORRE (1994) analisa o erro da seguinte forma:

- **Negativa:** Erro usado para punir o aluno, humilhá-lo e alertá-lo sobre futuros males (reprovação);
- **Positiva:** Erro construtivo, oportunidade para se refazer o percurso e ampliar o raciocínio, além de possibilitar a regulação das aprendizagens, tornando mais claras as inter-relações do processo educativo.

A cultura de que temos de vangloriar o acerto e desprezar o erro não ocorre apenas por parte dos professores, mas por toda a comunidade escolar, que engloba desde os demais funcionários de uma escola, até os pais e responsáveis, e quem mais fizer parte da vida dos estudantes. O acerto é tratado com alegria e parabenizado; o erro, como desgosto e motivo de punição. Em nenhum momento se discute a forma como o acerto foi alcançado (se realmente foi merecido) ou o porquê de o erro estar ocorrendo, pois o importante é o resultado final.

Analisaremos outra atividade em que há um clássico exemplo de que o foco da correção foi somente a resposta final.

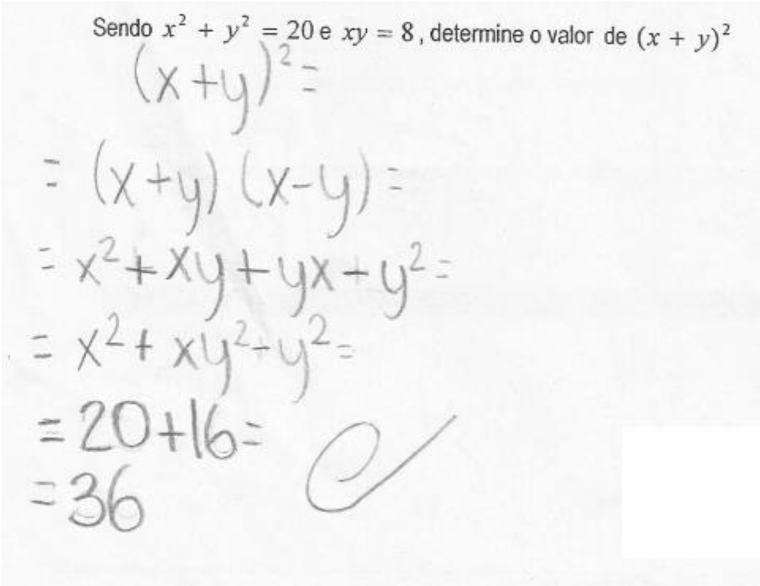


Figura 3: Questão de teste de aluno.

Diferente da análise feita pelo professor, ao considerá-la correta, a atividade (Figura 3) está completamente incoerente, porque, ao efetuar $(x + y)^2$ como está na primeira linha de desenvolvimento, o próximo passo seria (x + y) . (x + y), já que um número ao quadrado é a multiplicação dele por ele mesmo, sendo diferente de (x + y) . (x – y); mesmo assim, ao efetuar a multiplicação proposta pelo aluno, o resultado obtido deveria ser $x^2 – xy + yx – y^2$, o que levaria ao cancelamento de – xy com + yx, já que a multiplicação de xy ou yx gera o mesmo resultado, e como – xy e + yx são números opostos, sua soma resultaria em 0, sobrando, ao final dessa soma, $x^2 – y^2$. Mesmo errando em sua multiplicação, o passo adiante, para $x^2 + xy + yx + y^2$, deveria ser $x^2 + 2xy + y^2$ para que, ao final, quando substituísse o xy por 8, pudesse multiplicar por 2, a fim de, então, chegar a 16. Apesar dessas constatações, que verificaram a ocorrência de erros em todas as etapas de resolução, a resposta final foi a esperada, o suficiente para o professor considerar a atividade como correta.

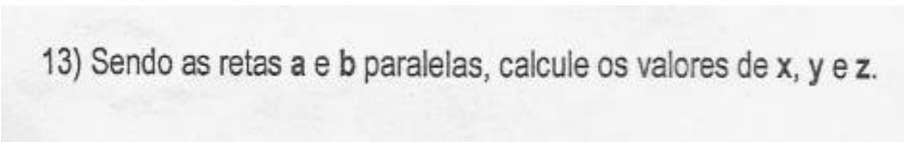

13) Sendo as retas **a** e **b** paralelas, calcule os valores de **x**, **y** e **z**.

Figura 4: Questão de teste de aluno.

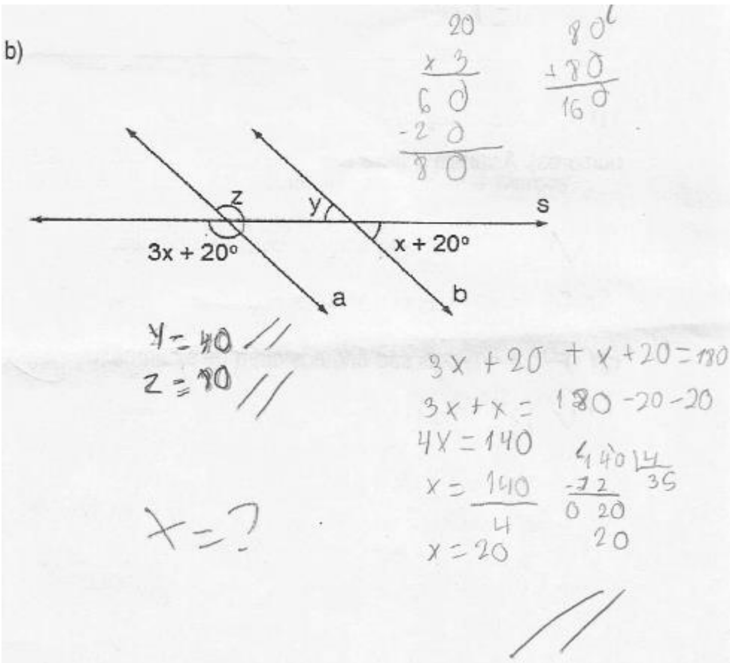


Figura 5: Questão de teste de aluno.

Assim como na atividade anterior (Figura 3), na proposta acima (figuras 4 e 5) só foi levada em conta a resposta final, mas, dessa vez, decidiu-se que a questão estava errada.

A análise feita pelo aluno foi de que a soma dos ângulos representados por 3x + 20° e x + 20° deveria ter 180° como resultado. Tal análise está correta, já que os ângulos são colaterais externos e sua soma resulta em 180º. Ao representar a equação e depois resolvê-la, o aluno se deparou com a seguinte divisão: 140 : 4. Para efetuá-la, foi ao canto da folha, fazer um rascunho; na divisão, como podemos observar, seu resultado deu 35, o que está correto, mas, ao anotar seu resultado como solução para o valor de x, o aluno anotou o número 20, que era o final da multiplicação de 5 vezes 4, para obter resto 0.

Na parte superior, para obter o valor de Z, o estudante fez todos os passos certos: substituiu o valor de x (20°), encontrado em 3x + 20°, o que resultou em 80° e assim encontrou Z, já que Z e 3x + 20° são opostos pelo vértice, portanto, são iguais. Da mesma forma que, ao substituir o valor de x (20°) em x + 20°, encontrou o valor y = 40. Porém, pelo fato de o aluno ter usado o valor errado para x, já que fez uma confusão ao anotar o seu valor encontrado na divisão, a questão foi dada como errada pelo professor, sem que nenhum passo do desenvolvimento, o qual foi todo efetuado corretamente, fosse valorizado.

Para MENGALI, NACARATO e PASSOS (2009, p. 73), “Muitas vezes, aquilo que parece ser uma resposta incorreta pode se tratar de falta de capacidade para expressar-se*”*.

Diversos são os professores que transferem a culpa do erro para os alunos. Para esses profissionais, todo o conteúdo esboçado em sala de aula deveria ser assimilado, ou melhor, decorado pelos alunos, pois, já que o docente falou ou escreveu sobre o conteúdo, os estudantes não têm mais o direito de errarem. Tais professores, em nenhum momento, responsabilizam-se pelos índices de erros, acreditando que a aprendizagem ocorra por transmissão, mas

> [...] ensinar não é transmitir conteúdo a ninguém, assim como aprender não é memorizar o perfil do conteúdo transferido no discurso vertical do professor. Ensinar e aprender têm que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno ir entrando como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor deve deflagrar. Isso não tem nada a ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade, mas ao mesmo tempo, da boniteza da docência e da discência. (FREIRE, 1996, p. 143)

Quando um aluno tem sucesso nas avaliações em sala e, em certos casos, nas avaliações externas, seus professores querem ser parabenizados e dividir as glórias do feito alcançado pelo aluno, considerando-se os responsáveis pela conquista. Mas e quando ocorre o contrário? Quando o aluno vai abaixo do resultado esperado, o professor tem a mesma postura que teve diante do sucesso? Ele se inclui e assume que o fracasso do aluno também é por sua causa? Ou será que atribui a culpa ao educando ou aos professores anteriores?

> Ao ser visto de modo construtivo pelo professor, o Erro colabora para o incremento da autoestima do aluno. Porém para que ele “acerte mais” é preciso que a ele seja dado oportunidade também de “errar mais”, sem que seja punido por isso, ou talvez, não passe constrangimento de praxe. (KISTEMANN Jr., 2004, p. 2)

Diversos dos professores que repudiam o erro evitam ouvir as dúvidas dos alunos; para eles, aula boa e bem dada é aquela em que ele é o centro das atenções, nenhum aluno tem o direito de falar e nem de manifestar alguma dúvida durante sua fala, ou pior, há aulas em que impera o medo, por parte dos alunos, de fazerem alguma pergunta e sofrerem represália do professor, ou serem alvo de risadas por parte dos colegas de classe, atos que devem ser evitados pelos docentes.

Segundo Kistemann Jr. (2004, p. 24), “o medo de errar e os constrangimentos advindos desse ato são adquiridos por alguns alunos, os quais, na ânsia de acertar, muitas vezes, acabam por não assimilar o que lhes foi proposto”.

> Para que o processo de negociação de fato ocorra, o ambiente de diálogo e confiança mútua é fundamental. O professor precisa estar predisposto a ouvir e dar ouvido ao aluno, estimulando-o a explicitar suas ideias e seus argumentos de forma que o aluno se sinta encorajado a posicionar-se, sem medo de errar, pois sabe que suas contribuições são importantes para o processo. (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 83)

Sendo assim,

> é importante que o trabalho em sala seja feito, que os alunos cheguem ao final das tarefas, que participem das lições e das atividades coletivas, cumprindo assim seu ofício de aluno. Entretanto, a regulação proferida em sala pelos professores, tem priorizado as atividades e a progressão nas tarefas e não as atividades subjacentes. Dessa forma o professor assume a postura de condutor da tarefa, substituindo o aluno, ao passo que, de fato, deveria auxiliá-lo na progressão das tarefas. Tal auxílio dá ao aluno, a impressão de dominar tarefas, mas na verdade, não aprendem na sua totalidade, por que todas as decisões importantes foram sugeridas pelo professor, todos os erros foram prevenidos ou corrigidos rapidamente, todos os obstáculos difíceis foram ultrapassados “sob vigilância”, desmerecendo a construção do saber pela atividade autônoma do aluno”. (PERRENOUD, 1996, p. 85)

Para Kistemann Jr. (2004) e Nunes (1997), a quantidade de erros cometidos na aritmética oral é menor do que na aritmética escrita, pois a criança utiliza mais os raciocínios lógico-matemáticos por meio de sua linguagem oral. Sendo assim, a participação e a fala dos alunos são de suma importância para a aprendizagem escolar, pois é nesse momento que o professor consegue saber o que estão pensando quando cometem um erro, podendo interferir e ajudá-los a esclarecer alguma dúvida, ou superar algum obstáculo epistemológico. Seguimos acreditando que a melhor forma de aprender é falando e a melhor forma de ensinar é ouvindo.

> [...] cada vez que ensinamos prematuramente a uma criança alguma coisa que poderia ter descoberto por si mesma, esta criança foi impedida de inventar e consequentemente de entender completamente. Isto obviamente não significa que o professor deve deixar de inventar situações experimentais para facilitar a invenção e

> compreensão de seus alunos. (PIAGET, 1995 apud KISTEMANN Jr., 2004, p. 20)

O professor não transfere saberes, é um mediador de conhecimentos, portanto, precisa entender que cada aluno tem sua própria vivência e história de vida. O tempo que cada um leva para construir seu conhecimento acerca de certo conteúdo varia de aluno para aluno, cabendo ao professor encontrar esse tempo e saber trabalhar com os diversos níveis de aprendizado encontrados por ele em um mesmo ambiente. De acordo com Freire (1996, p. 47), “saber que ensinar não é transferir conhecimento mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou sua construção” é fator importante para a aprendizagem do aluno.

Assistir ao professor explicar seu conteúdo e resolver problemas de listas de exercícios sem questionamentos não faz com que o aluno compreenda tais atividades, uma vez que ele não foi estimulado a fazer o mesmo, criando suas próprias compreensões, pois o professor já tem sua experiência e já cometeu seus erros para saber qual o caminho certo (ou o passo a passo) a seguir na resolução de um problema, sem cometer nenhum erro. O escritor Kahneman cita Simon (2011, p. 20): *“*A situação forneceu um indício; esse indício deu ao especialista acesso à informação armazenada em sua memória, e a informação fornece a resposta. A intuição não é nada mais, nada menos que reconhecimento*”*. Enquanto o aluno só se depara com sua dificuldade quando tenta resolver por si só sua atividade, percebe um pouco tarde a sua incompreensão do que lhe foi exposto.

Segundo Machado (1999, p. 92), “além da interação entre professor-aluno, a interação aluno-aluno, através dos trabalhos em grupo, desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas e afetivas”.

Dessa forma, as atividades realizadas em duplas ou grupos são deveras importantes, por darem aos alunos mais liberdade de diálogo, pois é mais fácil para eles perguntarem uma dúvida ao colega do que se exporem para o professor, perante a turma inteira. De acordo com Machado (1999, p. 92), “as aprendizagens só se concretizam à medida que o professor proporcione um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar suas ideias”. Mas os professores devem acompanhar tais atividades de perto, pois alguns alunos (não sua totalidade), ao serem questionados, em vez de explicarem o desenvolvimento com seu próprio linguajar para seu(s) colega(s), preferem mostrar-lhes suas atividades já prontas, enquanto o aluno que não entendeu a atividade prefere copiar o desenvolvimento, em lugar de debater sua dúvida, atitude que o ajudaria a construir seus próprios conceitos.

Em 2012, trabalhamos uma mesma metodologia de ensino com alunos do 7º e 9º anos do Ensino Fundamental. Baseamo-nos no sistema de Assimilação Solidária de Baldino[2], no qual os alunos devem trabalhar em conjunto, aprendendo juntos, e a dúvida de um deve ser a dúvida do grupo, ou seja, os alunos devem estudar em grupo, tirando suas dúvidas com seus colegas, verificando um a atividade do outro e, para fazerem alguma pergunta ao professor, é necessário que nenhum integrante do grupo saiba responder tal dúvida.

De acordo com Baldino, tal metodologia só funciona se for regida por um Contrato Didático. O Contrato Didático é uma forma de assegurar que nenhum dos integrantes irá reclamar de como as aulas estão sendo regidas e tal Contrato é feito em discussão com toda a turma. Para ser mudada alguma cláusula, é necessário que toda a turma esteja de acordo, garantindo, assim, que ninguém tenha nenhuma brecha ou forma de burlar o “regulamento” (claro que, para tal sistema funcionar, o professor precisa estar preparado e atualizado com relação ao que foi estabelecido, afinal, foi uma decisão do grupo).

Pelo fato de Baldino trabalhar com alunos do Ensino Superior, consideramos que as formas regidas em seu contrato são rígidas demais para serem aplicadas aos alunos do Ensino Fundamental, até porque alunos mais velhos já tendem a ter um maior comprometimento com os estudos e são responsabilizados por seus próprios descompromissos com o mesmo.

Adaptando as ideias de Baldino, criamos as normas do “nosso contrato”, que foram as seguintes: ao final do bimestre, distribuímos os alunos em grupos, os quais tinham um líder escolhido por nós, de acordo com seu conhecimento do conteúdo estudado no bimestre e sua desenvoltura ao falar com os colegas, para que o mesmo fosse capaz de interagir e tivesse desenvoltura para “liderar” seu grupo. Cada líder escolheria uma pessoa para sua equipe (em quase todos os casos, ocorreu o que já

---

2 Roberto Ribeiro Baldino, professor doutor da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, no Curso de Engenharia em Sistemas Digitais. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Cálculo, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino de cálculo, assimilação solidária, pesquisa-ação, Lacan e análise não standard.

era esperado: foi escolhido algum amigo), decisão que objetivava fazer com que esse líder não se sentisse sozinho no grupo. Poucos foram os que realmente pensaram nos alunos que estivessem bem, naquele momento, nos conteúdos trabalhados, para que pudessem lhes ajudar nas atividades em grupo, mas, ainda assim, em alguns casos, esse raciocínio ocorreu.

A partir dessa primeira escolha, nós mesmos distribuímos o restante da turma pelos grupos (fizemos isso por dois motivos: o primeiro era para separar os grupos de amizade que poderiam atrapalhar a dinâmica, por dispersão, e o segundo e principal motivo era para que não houvesse exclusão e nem preconceitos com alguns alunos que estivessem com mais dificuldades no conteúdo).

Ao final de duas semanas (as últimas do bimestre), os alunos fizeram uma prova substitutiva, eliminando alguma em que tivessem ido mal no bimestre. Os líderes não poderiam fazer essa avaliação, pois todos eles já possuíam excelentes notas, e os mesmos ganhariam pontos extras, de acordo com o desenvolvimento de todo o grupo. Parece que fizemos uma exclusão seletiva com esse procedimento, mas o mesmo foi feito a fim de incentivá-los a estudar com o seu grupo, estimulando-os a querer ver a equipe indo bem, pois sua pontuação extra dependia do destaque de todos os componentes do grupo.

Tal trabalho, nas turmas de 9º ano, deu excelentes resultados; os grupos interagiram de uma maneira impressionante, não era apenas o "líder" que estava empenhado em ajudar o grupo (à medida que outro integrante passava a dominar o conteúdo abordado, ele mesmo ajudava o restante do grupo e passava a tirar dúvidas com o "líder", em vez de ficar em dependência de ter de ser ajudado sempre nas tarefas). Muitas vezes, o próprio "líder" completava seu domínio perante o conteúdo, em debates com o grupo.

Porém, nas turmas de 7º ano, a proposta não foi correspondida, pareceu-nos que os alunos não entenderam que o objetivo da atividade era tentar fazer todos compreenderem o conteúdo, expondo-o em outra linguagem, talvez mais direta e informal. Para nossa surpresa, quase todos os membros dos grupos estavam interessados em copiar as atividades do "líder", achando que o principal objetivo era estar com os deveres em dia, em vez de estarem compreendendo-os.

Vimos, portanto, que a aprendizagem em grupo deve ser acompanhada com bastante atenção pelo professor, o qual precisa estar atento se o objetivo está sendo alcançado ou se os alunos não entenderam a ideia da atividade e só querem conversar, burlá-la, achando que, assim, terão alguma vantagem.

Segundo Mengali, Nacarato e Passos (2009, p. 88), "se, desde os primeiros anos do ensino fundamental, o aluno for colocado em situações em que tenha de justificar, levantar hipótese, argumentar, convencer o outro, convencer-se, ele produzirá significados para a matemática escolar".

Dessa forma, as discussões dos assuntos, seja com um colega ou com o professor, fará o aluno refletir e argumentar sobre seus pensamentos, criando seus próprios significados.

Para Bertoni (2000, p. 98), "a superação do erro tem uma participação significativa do professor, pois é ele quem encontrará novas formas que proporcionem ao aluno atuar sobre suas ações e erros".

Mengali, Nacarato e Passos (2009, p. 74) também acreditam que "propiciar um ambiente de comunicação e de interação na sala de aula é acreditar que os alunos aprendam uns com os outros quando se comunicam". Essa é a grande justificativa para a importância dos trabalhos em grupo: eles estimulam a aprendizagem e tornam o ambiente escolar mais agradável.

Portanto, cabe ao professor escolher as atividades que serão trabalhadas em sala, para que elas produzam interesse e estimulem os alunos a resolvê-las e debatê-las, quando assim for necessário, sem temerem nenhuma represália por parte do professor ou demonstrarem vergonha de serem alvos de deboche dos colegas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 42) do Ensino Fundamental – Matemática, "é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para a aquisição dos conceitos matemáticos oferecidos no ambiente escolar".

Apresentamos, neste capítulo, como um erro pode dizer muito sobre a aprendizagem de um aluno e como nós, professores, devemos ter atenção com nossas correções (apesar da quantidade de avaliações que temos para corrigir), pois muitos desses erros estão cheios de conhecimento que poderíamos avaliar positivamente. Propusemos, também, que os docentes deem mais espaço ao modo como os alunos operam e incentivem a troca de informações entre aluno-aluno e aluno-professor, pois, nessas conversas, conseguimos entender um pouco do pensamento de nossos estudantes e dialogar, para que os mesmos encontrem a solução para seu problema, sem que seja dita e sequenciada, para o aluno decorá-la.

No capítulo seguinte, *Abordagem feita pelos Livros Didáticos*, faremos uma análise de como os livros didáticos expõem os conteúdos com o qual escolhemos trabalhar, estabelecendo uma comparação entre as abordagens dos mesmos e sugerindo qual deles aborda melhor cada tema.

4 ABORDAGEM FEITA PELOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, analisaremos quatro dos livros didáticos mais adotados nas escolas de Juiz de Fora (MG), fazendo uma comparação de como cada um deles trabalha com os conteúdos que escolhemos para analisar, se as exposições feitas por eles trazem benefícios ou confundem os estudantes, a fim de que os professores tenham uma ideia geral do que irão encontrar, caso prefiram utilizar outro (sem ser o já abordado em sala), para apresentarem algum conteúdo.

Não queremos julgar a forma como os autores apresentam seus conteúdos, pois sabemos do grande critério a que são submetidos para atenderem às exigências curriculares e serem adotados. Queremos auxiliar o professor, para que o mesmo saiba o que encontrar em cada livro, caso queira recorrer a outro autor, sem ser o que já é trabalhado em sua sala de aula.

Sabemos da importância dos livros didáticos em sala de aula e que os mesmos são de grande ajuda, e até base para muitos professores, durante suas aulas. Neste capítulo, mostraremos como os mesmos andam apresentando os conteúdos que escolhemos investigar:

- 6º Ano – Frações.
- 7º Ano – Equações.
- 8º Ano – Produtos notáveis.
- 9º Ano – Aplicação do método de resolução de uma equação do 2º grau.

Para Bertoni (2000, p. 98), “a superação do erro tem uma participação significativa do professor, pois é ele quem encontrará novas formas que proporcionem ao aluno atuar sobre suas ações e erros”.

Os livros didáticos em questão são: 1º - CASTRUCCI, B. e GIOVANNI Jr., J.R., 2º - DANTE, L.R., 3º - DOLCE, O., IEZZI, G. e MACHADO, A. e 4º - IMENES, L. M. e LELLIS, M.

David e Moreira (2005, p. 29) citam Poincaré (apud TALL, 1992, p. 496), a respeito do que observaremos nas obras selecionadas: “o que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista é uma que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles. Mas em educação não é isso; é uma que pode ser entendida pelos alunos”.

De acordo com David e Moreira (2005, p. 31):

> A definição cria um sério problema para o aprendizado da Matemática. Ela representa, talvez mais do que qualquer outra coisa, o conflito entre a estrutura da Matemática, como a concebem os matemáticos profissionais, e os processos cognitivos de aquisição dos conceitos. (apud VINNER, 1991, p. 65)

Muitos professores defendem a nomenclatura usada em Matemática, ao se ensinar aos alunos. Em nossa graduação, muitos valorizavam a linguagem tradicional; um exemplo bem simples: ao se resolver uma equação como *“x – 5 = 10”*, o processo correto de resolução é que devemos somar 5 a ambos os membros, obtendo, assim, *“x – 5 + 5 = 10 + 5”*, portanto, resultaria em *“x = 15”*. Ao se ensinar equações, através de operações inversas, o aluno consegue visualizar que, se de um número subtraímos 5 e o resultado é 10, então, se somarmos 5 ao 10, encontraremos que número era esse. Nesse momento, o aluno cria sua concepção do famoso “troca de lado, então troca de sinal”. Achamos interessante, a partir do ponto em que os alunos criaram sua própria definição, e correta, por sinal, o que leva a um maior entendimento; o professor pode começar a falar do modo do grupo, mas sem atrapalhar as etapas e já começar o conteúdo falando nessa linguagem, pois passaria ao processo mecânico de os alunos entenderem a resolução de equações como regras a serem seguidas, passo a passo. Eles devem entender o desenvolvimento de operações inversas, conscientes de que estão voltando ao caminho das operações efetuadas.

Um livro didático que representa tal desenvolvimento é o de Imenes e Lellis, os quais ensinam equação por operações inversas e vão aumentando o seu grau de dificuldade gradativamente, sem simplesmente apresentarem exemplos e mandarem os alunos reproduzirem o exemplo mostrado, como ocorre em grande parte dos livros didáticos mais adotados em Juiz de Fora.

Segundo Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 25), “Os livros escolares estão repletos de fatos que os estudantes têm de memorizar, e a maior parte dos testes avalia sua capacidade de recordar os fatos”.

> Não é por fazer muitas contas que os alunos aprendem a identificar quais são as operações que fazem sentido numa situação nova. Não é por fazer muitos exercícios repetitivos que os alunos adquirem a capacidade de resolver problemas. Não é por memorizar nomes de figuras e sólidos geométricos ou enunciados de propriedades e teoremas que os alunos aprendem a raciocinar e argumentar logicamente. (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 89)

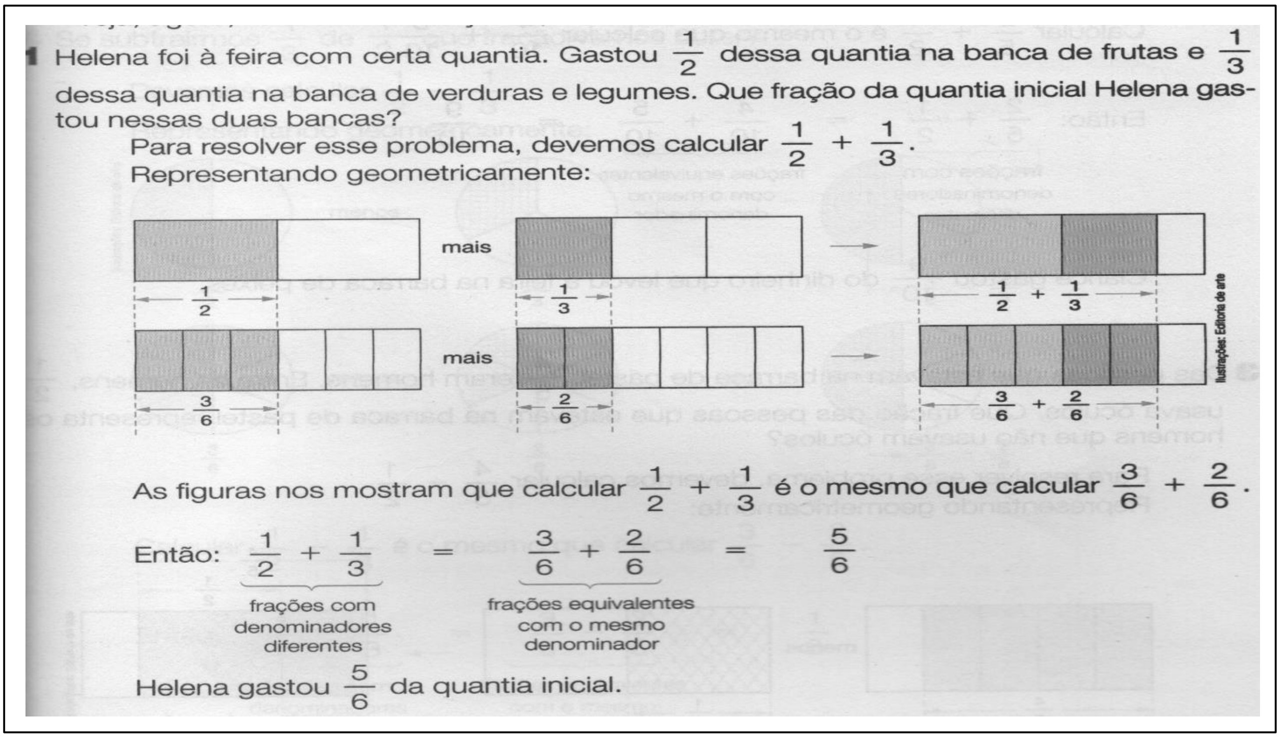
Do exposto, entendemos que não é o excesso de atividades desenvolvidas que fará com que o aluno construa seu conhecimento, tampouco o desenvolvimento por repetição, em que o aluno use um exemplo exposto e o reproduza por diversas vezes, acreditando que isso o fará compreender alguma coisa; tal processo pode até fazê-lo decorar a mecânica de resolução, mas, como já foi discutido, em algum momento, o aluno começará a confundir os diversos métodos que tiveram de ser decorados.

4.1 6º ano – Operações com frações

Escolhemos, para o 6º ano, o conteúdo sobre operações com frações, pois, além de estar bastante presente no ensino da Matemática, nele ocorrem diversos erros por alunos de todos os graus de ensino. Dessa forma vamos expor como cada um dos autores apresentam o conteúdo abordado, para que os professores saibam o que encontrar em cada um dos livros, caso queiram adotá-los, buscar neles inspiração para exercícios ou completar sua abordagem em sala de aula.

Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 186) introduzem soma e subtração de frações com mesmo denominador, utilizando retângulos divididos em uma mesma quantidade de partes e as somam ou subtraem, de acordo com a operação a ser realizada.

Para ensinar a somar ou subtrair, quando os denominadores das frações forem diferentes (Figura 6), os autores utilizam cinco exemplos: dois para a soma, dois para a subtração e um envolvendo as duas operações. Para os quatro primeiros, os autores, de forma objetiva e clara, utilizaram figuras que correspondessem às frações a serem operadas e, em seguida, mostraram as mesmas figuras representando frações equivalentes (de mesmo valor) às primeiras, só que, dessa vez, tendo o mesmo denominador, sendo assim, os alunos já sabiam como operar.



1 Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Representando geometricamente:

As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Então: $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$

Helena gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

Figura 6: Soma de frações.

Os autores só não comentam como achar esse denominador comum nas duas frações. No item da página 183 do livro, denominado “Reduzindo duas ou mais frações ao mesmo denominador”, os autores também fazem o uso das figuras, assim como na soma e subtração de frações, mas, em nenhum momento, a referência sobre como achar esses denominadores é feita (a ideia de mmc entre denominadores, em nenhum momento, é comentada). Para transformar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ em frações equivalentes, com o mesmo denominador, foi desenhada a figura referente a cada fração (a primeira dividindo um retângulo em duas partes e colorindo uma e a outra, dividindo em cinco e colorindo uma) e, em seguida, novas figuras, que representassem $\frac{5}{10}$ e $\frac{2}{10}$ (retângulos divididos em dez partes, e coloridas cinco na primeira e duas na segunda), que são equivalentes às primeiras, mas agora tendo o mesmo denominador, assim como foi requerido. Finalizando, os autores indicam que, multiplicando numerador e denominador de $\frac{1}{2}$ por 5, encontram-se $\frac{5}{10}$, e multiplicando, da mesma forma, a fração $\frac{1}{5}$ por 2, resulta em $\frac{2}{10}$.

Mas de onde saíram o 5 e o 2 utilizados na multiplicação? O que pode indicar, para os alunos, é que são os números pertencentes aos denominadores de cada fração original, porém um segundo exemplo é demonstrado de modo análogo ao primeiro, mas, dessa vez, com as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$. Novamente foram utilizadas as figuras e, no final, mostrado que, multiplicando numerador e denominador de $\frac{3}{4}$ por 3 e $\frac{5}{6}$ por 2, resultam em $\frac{9}{12}$ e $\frac{10}{12}$, respectivamente, portanto, a dúvida de onde vieram esses números multiplicadores não foi sanada. Os autores ainda concluem o item com os seguintes comentários (p. 184):

> - Dadas duas ou mais frações com denominadores diferentes, podemos obter frações equivalentes às frações iniciais e com o mesmo denominador.
> - Para tornar o cálculo mais simples, esse denominador deve ser o menor múltiplo comum dos denominadores das frações dadas.

É dada a dica para o numerador, mas os números que usam para a multiplicação continuam sem sentido.

Na multiplicação, os autores dividiram o conteúdo em duas partes: uma para a multiplicação de um número natural por um fracionário e outro para a multiplicação de números fracionários.

No primeiro tópico, Castrucci, e Giovanni Jr. (2009, p. 197) apresentam um problema de uma aluna que tem uma fita medindo $\frac{2}{5}$ de metro e ela precisa de 3 pedaços com esses tamanhos. Sua resolução será através da multiplicação de 3 por $\frac{2}{5}$, feita pela soma $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$, que resulta em $\frac{6}{5}$. Essa resolução é feita da forma relatada acima e geometricamente, indicando a soma de quadradinhos, para, em seguida, concluir que, ao efetuar a operação, devemos multiplicar o número natural pelo numerador da fração e conservar o denominador.

Quanto à multiplicação de números fracionários, novamente os autores foram muito bem, ao utilizarem dois problemas em que ocorresse a operacionalização. O primeiro problema exposto relata que uma empresa é composta por $\frac{1}{3}$ de mulheres e, destas, $\frac{1}{2}$ são casadas, portanto, qual é a parte fracionada das mulheres casadas?

Dessa forma, eles dividem uma figura em 3 partes, escolhendo uma para, então, pegar sua metade, gerando $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, resultando em $\frac{1}{6}$.

O segundo exemplo é efetuado de forma análoga ao primeiro, através da decomposição de uma figura para, em seguida, concluir que a multiplicação entre frações pode ser efetuada através da multiplicação de seus numeradores e dos seus denominadores.

Por fim, no processo da divisão, assim como no da multiplicação, os autores utilizam problemas que envolvam tal operação; para esses fins, foram expostos três exemplos, o primeiro afirma que quatro pães foram comprados para um lanche e que cada pessoa comeria $\frac{2}{5}$ desses pães, logo, quantas pessoas poderiam comer?

Para o desenvolvimento, os autores mostram o que seria a principal ideia de divisão, vendo quantas vezes o $\frac{2}{5}$ cabe dentro de 4 inteiros, através de retângulos, para expor essa ideia; chegamos à conclusão de que caberão 10 vezes. Portanto, 4 : $\frac{2}{5}$ = 10, o que resulta no mesmo de 4 x $\frac{5}{2}$, exposto pelos autores.

Quanto à fração dividida por inteiro, o problema se refere a $\frac{3}{5}$ de uma pizza, que seria dividida para duas pessoas, portanto, deseja-se saber quanto caberia para cada um. Utilizando um círculo, para esboçar a pizza, os autores representam os $\frac{3}{5}$ dela. Cada pedaço da pizza foi dividido em duas partes (número total de pessoas que comeriam a pizza), resultando em um total de dez partes. Como há três partes da pizza, divididas em duas partes, temos, agora, um total de seis partes, sendo que cada um comeu três, ou seja, $\frac{3}{10}$ para cada um, resultado da divisão de $\frac{3}{5}$ por 2 ou $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{2}$.

O último exemplo é expresso da mesma forma que o primeiro (mas sem nenhum problema, somente a operação): ao se efetuar $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{6}$, foi visto quantas vezes o $\frac{1}{6}$ cabe dentro de $\frac{2}{3}$, feito através de figuras que representam as frações correspondentes. Já que o $\frac{1}{6}$ cabe 4 vezes dentro do $\frac{2}{3}$, temos que $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{6}$ = 4, mesmo resultado de $\frac{2}{3}$ x $\frac{6}{1}$. Nesse ponto, os autores chegam à conclusão de que, para efetuar divisões que envolvam frações, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda.

Dante (2012), em seu item *Operações com frações*, págs. 184 e 185, ao explicar soma e subtração de frações, divide-as em duas partes: a primeira para explicar como se opera, quando se tem o mesmo denominador, e a segunda, quando seus denominadores são diferentes.

Para operar com o mesmo denominador, o autor utiliza dois problemas, um que envolve a soma e outro, a subtração:

> 1) Um ônibus de viagem percorreu $\frac{3}{10}$ de uma distância de manhã e $\frac{4}{10}$ à tarde. Nos dois períodos, ele percorreu que fração dessa distância? Observe o diagrama e complete o que falta.
> 2) Dois ônibus de viagem (**A** e **B**) percorrem $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7}$ de uma distância, respectivamente. Qual deles fez o percurso maior? Quanto a mais do que o outro? Complete o que falta.

No 1° exemplo, a resolução do problema apresentado pelo autor deveria ser feita através da soma de $\frac{3}{10}$ com $\frac{4}{10}$. Para o desenvolvimento, Dante (2012) utiliza uma reta dividida em 10 partes e, nela, colore três partes de verde e quatro partes de laranja, para mostrar que, juntando as partes coloridas, resultariam em 7 partes, de um total de 10, sendo assim, $\frac{6}{10}$ seria o resultado da soma das frações. No enunciado, diz "*complete o que falta"* porque, embaixo da reta esboçada no desenvolvimento, para ser analisada, encontra-se $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} =$ _____, para o estudante preencher o resultado obtido na soma.

Nos tópicos anteriores aos de "Operações com frações", os alunos já estudaram comparações de frações e, no primeiro exemplo citado, ao esboçarem a reta com as frações $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{10}$, podemos rever como comparar as frações com mesmo denominador, processo esse que os auxilia a responder à primeira pergunta do segundo exemplo – "Qual deles fez o maior percurso?". Para o desenvolvimento do segundo exemplo, o autor trabalha com duas retas, divididas em sete partes; na primeira, coloriu três pedaços em azul e, na segunda, cinco pedaços em roxo, com isso, responder quem percorreu a maior distância se torna uma tarefa simples. No processo de encontrarmos o quanto um percorreu a mais que o outro, devemos subtrair as frações, fator que, assim como no primeiro exemplo, já estava montado pelo autor, e cabia ao estudante completar o resultado, que poderia ser analisado pelas retas que, dos cinco pedaços, tiramos três (a diferença de distância seria de 2, em um total 7, logo $\frac{2}{7}$).

Nas duas atividades, o esboço da resolução já estava iniciado, mas em nenhuma delas o porquê de o resultado ser aquele estava definido. Para o aluno, o pensamento de que $\frac{3}{10}$ + $\frac{4}{10}$ = $\frac{7}{20}$ pode ocorrer e, em nenhum momento, a ideia de que essa resolução está incorreta é desfeita. Afinal, se a ideia de $\frac{3}{10}$ é que, de 10 partes, colorimos 3, em $\frac{4}{10}$ é que, de 10, colorimos 4, por que não pensarmos que a soma seria 7, em um total de 20? Essa ideia poderia ter uma observação nos livros, para mostrar por que seu resultado estaria errado, pois o denominador nos indica em quantos pedaços estamos dividindo o inteiro, portanto, se pegamos três pedaços de um inteiro que foi dividido em dez e juntamos com quatro pedaços de um inteiro que foi dividido em dez, temos sete pedaços de um inteiro que foi dividido em dez partes, pois o denominador dez está nos indicando que o inteiro está em dez partes.

Quanto aos outros dois exemplos para explicar como se opera em soma e subtração de frações com denominadores diferentes, a falta de significados para os alunos pode ser ainda maior, já que, para suas resoluções, as retas divididas em pedaços foram deixadas de lado e foi usado apenas o algoritmo da soma e subtração, sem ter uma explicação de por que devemos seguir esse procedimento (a dúvida de somar numeradores e denominadores permanece e, ao entrarmos no processo de multiplicação de frações, em que já se torna possível a multiplicação de numeradores e denominadores, a confusão, para grande parte dos estudantes, aumenta). Seguindo para os exemplos:

> 1) Pela manhã, uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos?
> 2) Uma balsa já percorreu $\frac{3}{4}$ de uma distância. Quanto ela ainda precisa percorrer para completar $\frac{5}{6}$ dessa distância?

No primeiro exemplo, logo após a pergunta, novamente a soma já estava montada, para que o aluno pudesse completar seu resultado: “$\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{4}$ = ?”.

Após a soma, vem uma frase explicando como se deve proceder, diante dessa soma: “Para fazer essa adição, precisamos reduzir as frações ao mesmo denominador. Faremos isso de duas maneiras: “Qual o sentido para isso? Por que devemos igualar os denominadores? Novamente, por que a soma não seria $\frac{3}{7}$? O aluno foi guiado ao processo de desenvolvimento, mas o motivo pelo qual o outro está errado não foi revelado, o estudante não criou nenhum conceito de por que devemos igualar seus denominadores, simplesmente lhe disseram que esse é o caminho, portanto, ele o segue.

Para Kaplan (2014), o aprendizado ocorre da melhor forma quando há uma busca pelo conhecimento, em vez de ser narrado pelo professor: “*Diga-me, e eu esqueço. Pergunte-me, e eu descubro.*”

As duas maneiras de resolução explicitadas por Dante são: a primeira é procurar frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, até encontrarmos a fração que contenha o mesmo denominador.

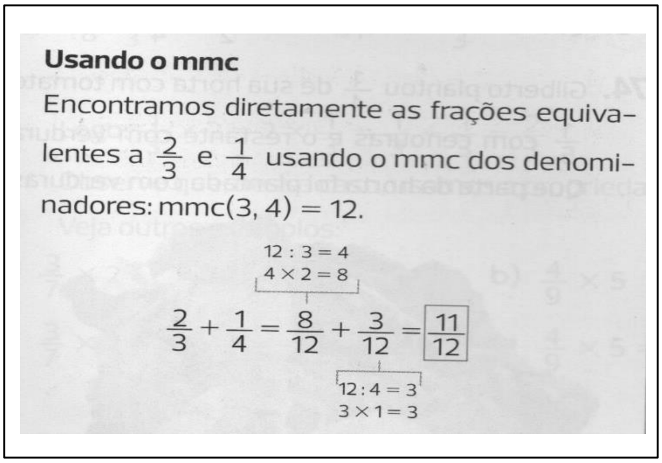
$$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \boxed{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \dots$$

$$\frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \boxed{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \dots$$

Assim:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{8}{12}+\frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

A segunda maneira (e mais usual) é encontrar o mmc (3,4) = 12 e achar direto as frações equivalentes; novamente, o porquê de se ter dito que a soma deveria ser dessa forma (igualando os denominadores) não é explicado.



Usando o mmc

Encontramos diretamente as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ usando o mmc dos denominadores: mmc(3, 4) = 12.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\overbrace{\frac{8}{12}}^{\substack{12:3=4\\ 4\times 2=8}}+\underbrace{\frac{3}{12}}_{\substack{12:4=3\\ 3\times 1=3}}=\boxed{\frac{11}{12}}$$

Figura 7: Soma de frações.

Para a multiplicação de número natural vezes fração, fração vezes natural e fração vezes fração, foram utilizados problemas e sua resolução contou com imagens, gerando uma boa visualização de como operar na multiplicação e entender por que devemos multiplicar os numeradores e os denominadores.

Com um número natural vezes uma fração, temos a ideia de que devemos somar a fração à quantidade de vezes que se dá o número natural. Fração vezes natural fazemos da mesma forma que número natural vezes fração, já que multiplicação é uma operação comutativa, isto é, podemos inverter a ordem dos algarismos na operação em que o resultado se mantém o mesmo. Com fração vezes fração, o desenho se torna mais importante, a fim de se entender por que podemos multiplicar numeradores e denominadores, já que, na soma, não era possível.

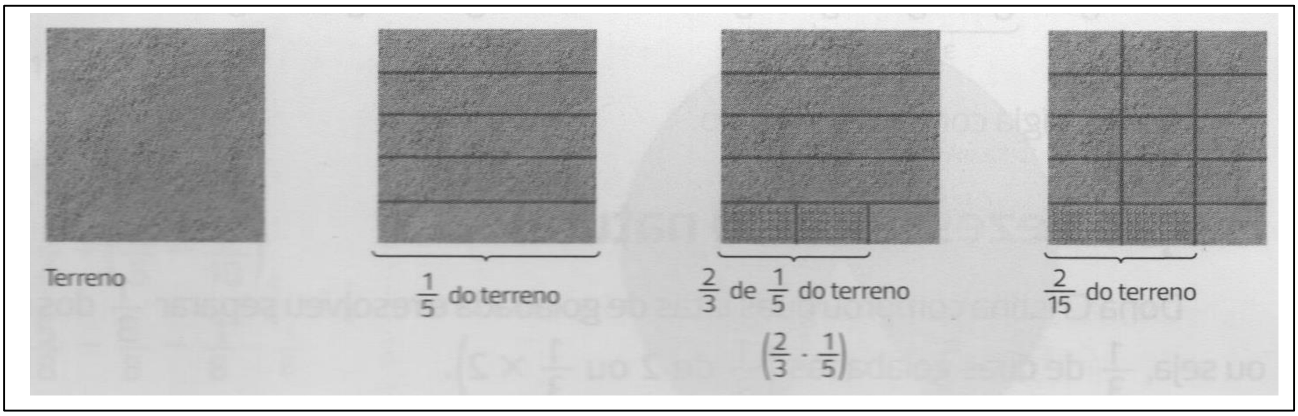


Figura 8: Multiplicação de frações.

O problema da imagem (Figura 8) consiste em um terreno que teria $\frac{1}{5}$ de seu total para o plantio de flores e $\frac{2}{3}$ dessa parte seriam reservados para se plantar somente rosas, portanto, qual seria a parte reservada para as rosas, em relação ao total?

Dante (2012) demonstra que, ao pegar $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ (sendo o mesmo que $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$) do terreno reservado para flores, resulta em $\frac{2}{15}$, o que se poderia ser obtido multiplicando os numeradores das frações (2 . 1) e os denominadores (3 . 5).

Na divisão, novamente todos os exemplos são vistos com desenhos, necessários para uma boa interpretação. Em fração dividida por um número natural (Figura 9), o exemplo adotado foi metade de uma pizza, dividida em três partes, portanto, $\frac{1}{2}$: 3, que representa $\frac{1}{6}$ do total.

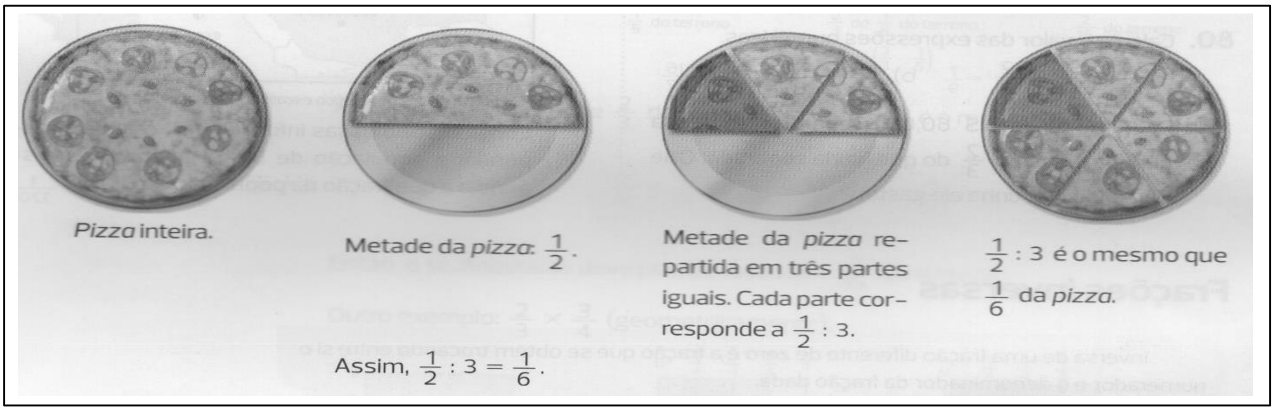
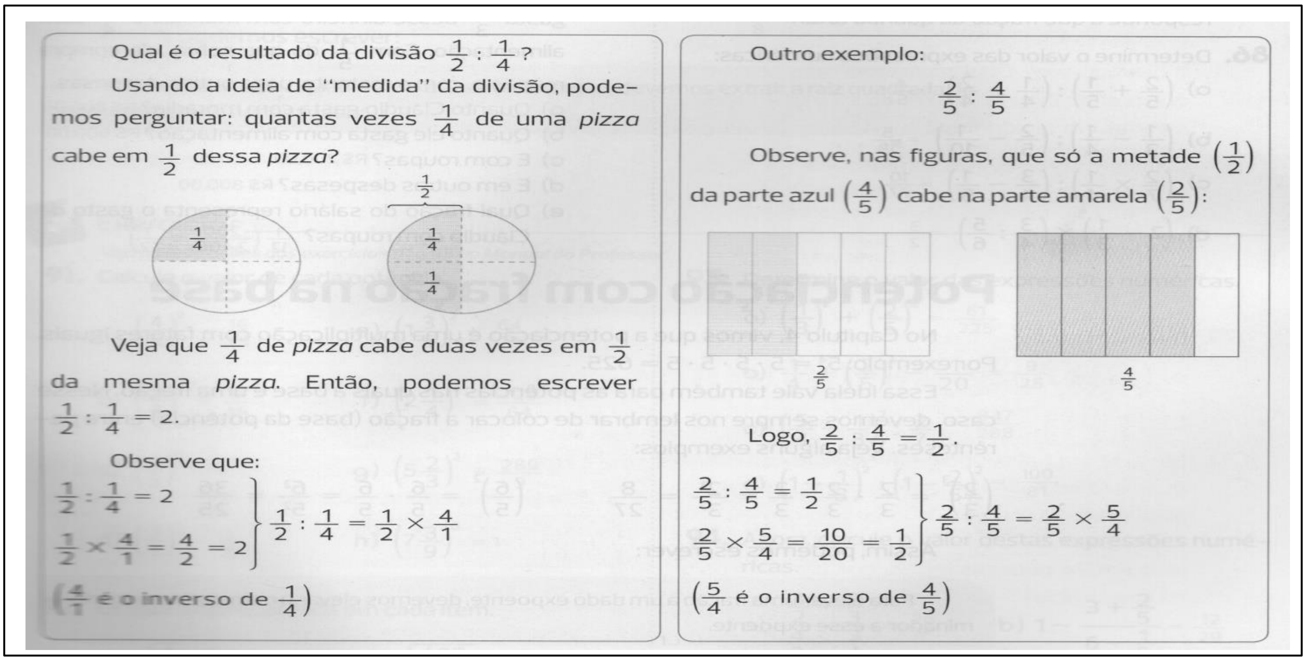


Figura 9: Divisão envolvendo fração.

Em número natural dividido por fração é usada a ideia principal de divisão e são vistas quantas vezes a fração cabe dentro do natural. Por fim, com fração dividida por fração, são mostrados, de forma objetiva e clara, dois exemplos, com o dividendo maior que o divisor e com o dividendo menor. Com a mesma ideia do exemplo anterior, vendo quantas vezes o divisor cabe dentro do dividendo e com o auxílio dos desenhos, ficou mais fácil entender seu resultado.


Qual é o resultado da divisão $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$?

Usando a ideia de "medida" da divisão, podemos perguntar: quantas vezes $\frac{1}{4}$ de uma *pizza* cabe em $\frac{1}{2}$ dessa *pizza*?

Veja que $\frac{1}{4}$ de *pizza* cabe duas vezes em $\frac{1}{2}$ da mesma *pizza*. Então, podemos escrever $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$.

Observe que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2 \\ \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2 \end{array}\right\} \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1}$$

($\frac{4}{1}$ é o inverso de $\frac{1}{4}$)

Outro exemplo:

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$$

Observe, nas figuras, que só a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da parte azul $\left(\frac{4}{5}\right)$ cabe na parte amarela $\left(\frac{2}{5}\right)$:

Logo, $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4}$$

($\frac{5}{4}$ é o inverso de $\frac{4}{5}$)

Figura 10: Divisão de frações.

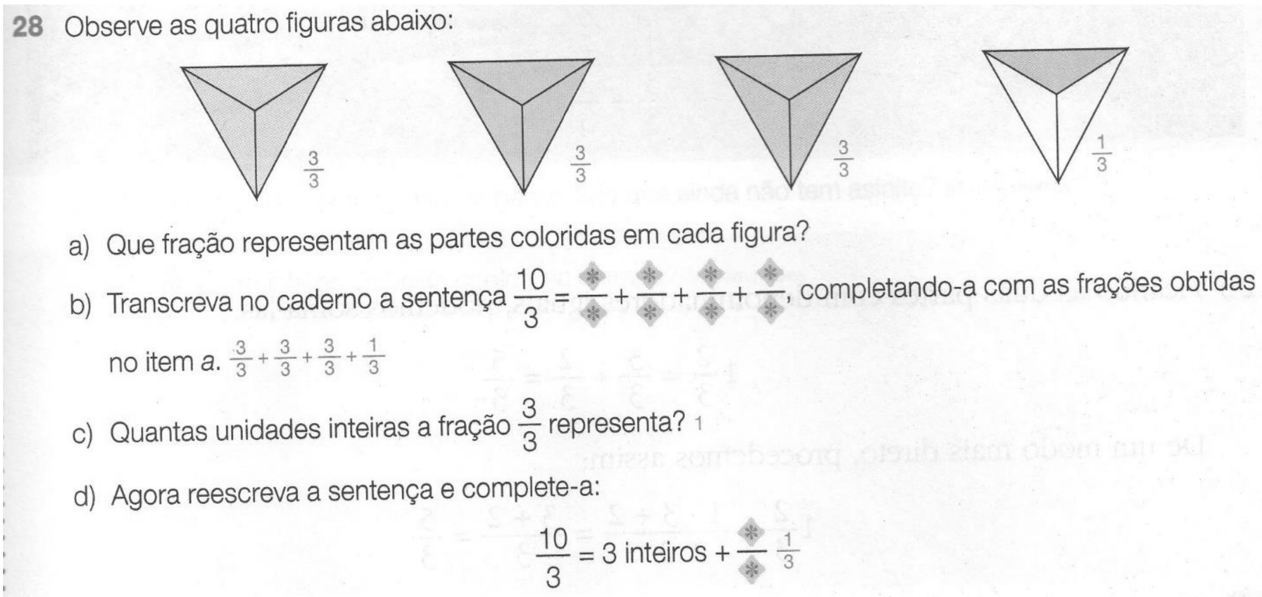
Ao fim de cada um dos exemplos, foi mostrado que o mesmo resultado encontrado na divisão poderia ser obtido se multiplicássemos o primeiro termo pelo inverso do segundo. Dessa vez, explica-se, primeiro, a forma de divisão para, depois, ser mostrada de outra forma mais simples e que cabe para todas as divisões que envolvam frações, sendo feita uma observação para as duas operações (divisão e multiplicação pelo inverso). Outra forma de resolução, e que tem a mesma ideia de multiplicar o primeiro termo pelo inverso do segundo, é multiplicando cruzado as frações, só que, dessa forma, o aluno, muitas vezes, esquece quando é que pode ser usada, sendo assim, em certos momentos, tenta usá-la também para a multiplicação, quando o próprio se confunde e não sabe qual resultado deveria ser numerador e qual seria denominador: $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ é igual a $\frac{10}{21}$ ou $\frac{21}{10}$?

Após o fim de cada operação nova, Dante apresenta um conjunto de exercícios, nos quais apenas um deles requer o desenvolvimento direto das operações aprendidas. No restante, todos envolvem algum problema em que o aluno precisa interpretar o exercício, a fim de alcançar seu resultado, uma boa forma de estimular não só a parte operacional, mas também a interpretativa.

Dolce, Iezzi e Machado (2009) dão a ideia de soma de fração antes mesmo de iniciar um tópico com essa finalidade, ação que faz com que o estudante vá construindo seu próprio conhecimento, sem que ninguém o tenha dito.

Durante uma atividade, entre outras, de analisar se a fração é própria, imprópria ou imprópria aparente, na pág. 163 do livro, existem três círculos, com cada um dividido em quatro partes e todas as partes coloridas. O primeiro item dessa atividade queria saber qual fração as partes coloridas representavam. Como o inteiro estava dividido em quatro partes e, ao todo, havia doze partes coloridas (quatro partes de cada um dos três círculos), a fração correspondente à figura é $\frac{12}{4}$.

A próxima atividade se assemelha à anterior. Novamente a primeira parte é encontrar a fração correspondente às figuras dadas, mas a segunda parte introduz soma de frações.



28 Observe as quatro figuras abaixo:

$\frac{3}{3}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$

a) Que fração representam as partes coloridas em cada figura?

b) Transcreva no caderno a sentença $\frac{10}{3} = \frac{◆}{◆} + \frac{◆}{◆} + \frac{◆}{◆} + \frac{◆}{◆}$, completando-a com as frações obtidas no item *a*. $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$

c) Quantas unidades inteiras a fração $\frac{3}{3}$ representa? 1

d) Agora reescreva a sentença e complete-a:

$$\frac{10}{3} = 3 \text{ inteiros} + \frac{◆}{◆} \quad \frac{1}{3}$$

Figura 11: Exercício envolvendo fração.

Tal atividade introduz a soma de fração com o conhecimento que o aluno já possuía. Por ele saber representar a fração de cada figura e dar sua representação total, está efetuando uma soma de frações, sem que tivessem denominado assim.

Ao introduzirem frações equivalentes, os autores apresentam dois exemplos ilustrativos, para esclarecerem que frações equivalentes representam a mesma quantidade, porém, a demonstração que os autores dão em “Como reconhecer frações equivalentes?”, p. 168, é que, para verificar se duas frações são equivalentes, devemos multiplicar cruzado as frações e ver se seus resultados são iguais. “Regrinha” essa que ajuda os alunos a encontrarem uma fração equivalente, mas sem nenhum significado, portanto, quando tiverem de efetuar a soma e a subtração de frações ou tiverem de simplificar alguma, trocando as frações por uma equivalente, essa substituição será vazia de significado.

Tal método é deixado de lado até mesmo pelos autores, pois, no item “Redução de frações ao mesmo denominador”, p. 173, a ideia de se multiplicar cruzado foi deixada de lado e passou-se a analisar quantas vezes um denominador foi multiplicado, para se obter o outro denominador, portanto, fez-se a mesma multiplicação com o numerador, para encontrar o próximo numerador.

Nos itens “Simplificação de frações” e “Como obter uma fração na forma irredutível”, p. 170 e 171, o método da multiplicação cruzada não tem mais serventia, portanto, concluímos que a ideia de multiplicação cruzada só terá uma real utilidade para dizermos se duas frações são equivalentes, algo que poderia ser resolvido já com a simplificação de frações, eliminando mais uma regrinha sem nenhum significado para os estudantes.

Nos mesmos dois últimos itens comentados, a forma de simplificação é demonstrada sem nenhuma figura, a fim de ilustrar que, com esse método, estamos obtendo o mesmo resultado (fração equivalente) e tal conclusão só é feita ao final de três exercícios para os alunos – a conclusão aparece em destaque em um quadro colorido, dizendo: *Duas frações que têm a mesma forma irredutível são equivalentes* (novamente a regrinha não será mais usada).

Em soma e subtração de fração, assim como Dante, os autores Dolce, Iezzi e Machado (2009, p. 180) também utilizam figuras, para mostrar a soma e a subtração de frações com mesmo denominador e, ao chegarem às mesmas operações, mas com denominadores diferentes, os autores começam a explicação com: *O primeiro passo é reduzir as frações ao mesmo denominador*. Da mesma forma como agiu Dante, em seu livro, os autores tiram o mmc entre os denominadores, acham frações equivalentes e somam as novas frações, sem que tenham nenhuma imagem desse desenvolvimento, (porque devemos tirar o mmc, simplesmente é dito que esse é o processo). Portanto, como, em um momento em que o aluno não lembre o passo a passo (regrinha) para o desenvolvimento, ele pode interpretar a questão e, por si só, achar o desenvolvimento?

A multiplicação de frações está semelhante à de Dante, com um número natural multiplicando uma fração sendo demonstrado através da soma de frações e tendo um desenho com fração multiplicado por fração, novamente utilizando desenhos, para concluir a multiplicação de numeradores e denominadores, mas Dante (2012, p. 187) ainda mostra fração multiplicada por um número natural, o que não é esboçado pelos autores, então, fica a cargo do professor mostrar que a operação de multiplicação é comutativa, isto é, fração multiplicada por um número natural leva ao mesmo resultado de um número natural vezes fração.

A divisão de frações de Dolce, Iezzi e Machado (2009, p.188 a 191) está um pouco confusa. Em alguns momentos, nós mesmos tivemos que parar e ler com calma o que os autores pretendem dizer (em outros, a divisão já vem diretamente com o resultado). Quando trabalhamos com esses autores na escola, os alunos tiveram bastante dificuldade para interpretar o que queriam expressar, com seus desenvolvimentos.

Os autores começam a divisão com um problema sobre a divisão de leite, primeiro propondo dividir 40 litros de leite para 10 famílias, obtendo, assim, 4 litros para cada; em seguida, 40 litros de leite devem ser colocados em jarras de 2 litros, portanto, 40:2 resulta em 20 jarras. As jarras de 2 litros foram substituídas por jarras de 1 litro, logo, em 40 : 1 precisaríamos de 40 jarras. Finalmente, temos canecas em que cabe $\frac{1}{2}$ litro de leite e queremos saber quantas canecas serão necessárias para distribuirmos todo o leite. Essa é a explicação dos autores: "*com cada litro de leite podemos encher duas canecas; então, com 40 litros podemos encher 40 x 2 = 80 canecas*". O que resulta em $40 : \frac{1}{2} = 80$.

No próximo exemplo, o objetivo é encher, com os mesmos 40 litros de leite, copos com capacidade para $\frac{1}{4}$ de litro. Analogamente, a maneira pensada para as canecas foi utilizada para os copos: "*com cada litro de leite podemos encher 4 copos; então, com os 40 litros podemos encher 40 x 4 = 160 copos*". Novamente, $40 : \frac{1}{4} = 160$.

Por último, nessa parte inicial adotada pelos autores para divisão de frações, propõe-se encher garrafas com $\frac{4}{5}$ de litro. Segundo os autores, "*para encher 5 garrafas são necessários 4 litros de leite, porque 5 . $\frac{4}{5}$ = 4. Dessa forma, dividindo os 40 litros em partes, cada uma de 4 litros, obtemos 10 partes. Cada parte enche 5 garrafas. Então, como 10 . 5 = 50, serão necessárias 50 garrafas*". Concluindo, $40 : \frac{4}{5} = 50$.

Nesse último desenvolvimento, foi preciso parar e reler com atenção as orientações, para entender toda a volta que foi dada, até alcançar o resultado. Nesse momento, pensamos no que David e Moreira (2005, p. 29), que citam Poincaré (apud TALL, 1992, p. 496), disseram sobre uma boa definição, que é a que os alunos conseguem entender. Será que os alunos entenderam essa definição de divisão de um número natural por fração (sem que assim tivesse sido mencionado)?

A ideia adotada por Dante (2012) seria de melhor entendimento, nesse item, vendo quantas vezes precisaríamos somar o $\frac{4}{5}$ para obtermos os 40 litros de leite; precisaríamos, portanto, de cinquenta $\frac{4}{5}$ para termos $\frac{200}{5}$, que é o mesmo que 40 inteiros, já que a ideia dos autores, como também pensa Dante (2012), é mostrar que a divisão envolvendo frações pode ser obtida através de uma multiplicação. Após o último exemplo, vem um resumo de todas essas operações efetuadas (Figura 12):

- $40 : 10 = 4 = \frac{40}{10} = 40 \cdot \frac{1}{10}$; então, $40 : 10 = 40 \cdot \frac{1}{10}$
- $40 : 2 = 20 = \frac{40}{2} = 40 \cdot \frac{1}{2}$; então, $40 : 2 = 40 \cdot \frac{1}{2}$
- $40 : 1 = 40 = 40 \cdot 1$; então, $40 : 1 = 40 \cdot 1$
- $40 : \frac{1}{2} = 80 = 40 \cdot 2$; então, $40 : \frac{1}{2} = 40 \cdot 2$
- $40 : \frac{1}{4} = 160 = 40 \cdot 4$; então, $40 : \frac{1}{4} = 40 \cdot 4$
- $40 : \frac{4}{5} = 50 = 10 \cdot 5 = (40 : 4) \cdot 5 = 40 \cdot \frac{5}{4}$; então, $40 : \frac{4}{5} = 40 \cdot \frac{5}{4}$

Figura 12: Divisão envolvendo frações.

Para dividir fração por natural, os autores apresentam a ideia de que $\frac{1}{2}$ litro de leite vai ser repartido igualmente em quatro copos, então quanto ficará em cada copo?

Diretamente eles apresentam que $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ e concluem: $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2} . \frac{1}{8}$, sem que se tenha feito uso de imagens ou esclarecido por que se fazer tal operação, já que a conclusão anterior tinha sido feita do quociente de um número natural por uma fração e não o inverso (nem mesmo houve uma generalização para, nesse momento, dar a operação como evidente).

O próximo problema (Figura 13), envolvendo a divisão de $\frac{75}{2}$ litros de leite para 4 baldes, torna-se ainda mais complexo:

$$\frac{75}{2} : 4 = 75 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} : 4}_{\frac{1}{8}} = 75 \cdot \frac{1}{8} = \frac{75}{8}$$

Então:

$$\frac{75}{2} : 4 = \frac{75}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{75}{8} \text{ ou } 9\frac{3}{8}$$

Figura 13: Divisão envolvendo fração.

No último exemplo, para envolver divisão de fração por fração, temos a seguinte narração: “Se $\frac{75}{2}$ litros de leite vão ser repartidos igualmente em garrafas, quantas serão necessárias?”

Agora precisamos dividir $\frac{75}{2}$ por $\frac{4}{5}$.

Podemos repetir o raciocínio: para encher 5 garrafas são necessários 4 litros de leite. Dessa forma, dividindo $\frac{75}{2}$ litros de leite em partes de 4 litros, cada parte enche 5 garrafas. Como $\frac{75}{2} : 4 = \frac{75}{8}$, obtemos $\frac{75}{8}$ de partes (ou seja, $9\frac{3}{8}$ de partes) e, como $\frac{75}{8} \cdot 5 = \frac{375}{8}$, serão necessárias $\frac{375}{8}$ garrafas (ou seja, $46\frac{7}{8}$ garrafas).

$$\frac{75}{2} : \frac{4}{5} = \left(\frac{75}{2} : 4\right) \cdot 5 = \frac{75}{8} \cdot 5 = \frac{375}{8}$$

$$\frac{75}{2} : \frac{4}{5} = \frac{75}{2} \cdot \frac{5}{4}$$

Figura 14: Divisão envolvendo frações.

As divisões feitas pelos autores foram exaustivas e complexas, todos os problemas envolvidos foram com divisão de leite, o que ficou muito repetitivo e confuso. As explicações foram longas e de difícil entendimento para os alunos e não estavam separadas, como fez Dante, ao centralizar as divisões em: número natural dividido por fração, fração por número natural e fração por fração. Assim, diante de uma divisão em que não se recorde o desenvolvimento, o estudante ficará ainda mais perdido em saber onde achar o tipo de divisão que ele quer, já que os autores não classificaram cada uma das três divisões possíveis envolvendo fração; o aluno pode tentar entender fração dividindo por fração dentro de natural, já que não tem uma categoria com o título “fração dividido por fração”, para que ele possa analisar diretamente seu desenvolvimento.

O último exemplo ainda tem como resultado $\frac{375}{8}$, ou $46\frac{7}{8}$ garrafas, o que, em um exemplo prático, seria um absurdo, pois ele não pegaria uma parte da 47ª garrafa, então o estudante precisaria de quarenta e sete garrafas para a quantidade de leite apresentada, tendo que arredondar o resultado para cima, para responder à pergunta de quantas garrafas seriam necessárias para fazer a divisão total do leite.

Por último, Imenes e Lellis (2010, p. 267) apresentam soma de frações com o mesmo denominador, através da imagem de tubos de ensaio divididos na mesma escala e, em seguida, o conteúdo de um é despejado no outro, gerando o seu total.

Já com frações de denominadores diferentes, a ideia do tubo de ensaio continua e dá uma pequena mostra de que, se juntarmos as duas partes, não teremos a medida precisa, então foi lembrado que poderíamos trocar as frações originais por outras equivalentes, desde que ambas tivessem o mesmo denominador.

Para achar a fração equivalente, foi utilizada uma das ideias empregadas por Dante (2012), de irmos procurando as frações equivalentes às duas, até encontrarmos aquelas que possuíssem o denominador em comum.

Ex: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ e $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$

Portanto, para somarmos $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, podemos trocar por $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$, respectivamente, a fim de termos os mesmos denominadores. De modo semelhante pode ser feita a subtração, que também possui um breve comentário e na qual se utilizam as mesmas frações do exemplo da soma: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

“Multiplicação envolvendo frações”, de Imenes e Lellis (2010), só foi adotado no livro de 7º ano, enquanto os outros três casos analisados trabalhavam com essa operação no 6º ano. A ideia inicial foi dada em “Fração multiplicando um número”, p. 91, e adotada da mesma forma como quando se trabalha porcentagem, assim sendo, seguem os exemplos dados:

- $\frac{1}{3}$. 6 = $\frac{1}{3}$ de 6 = 2
- $\frac{3}{4}$. 20 = $\frac{3}{4}$ de 20 = (20 : 4) . 3 = 5 . 3 = 15

Diante disso, os autores esboçam uma forma diferente de fazer esse último cálculo:

- $\frac{3}{4} . 20 = \frac{3\ .\ 20}{4} = \frac{60}{4}$ = 60 : 4 = 15

Para fração vezes fração, os autores Imenes e Lellis (2010, p. 92) utilizam os números $\frac{1}{3} . \frac{1}{2}$ e dão uma boa explicação de como operam: “*Pense assim: dividindo* $\frac{1}{2}$ *de um total em 3 partes iguais, cada parte será* $\frac{1}{2}$ *do total, como representado no diagrama ao lado*”. O exemplo era acompanhado de um retângulo dividido em 6 partes, entre as quais uma estava colorida.

Em nossa opinião, faltam exemplos e exercícios trabalhando a ideia de multiplicação. Multiplicar numeradores e denominadores não foi mencionado em nenhum momento, ficando para o aluno tirar tais conclusões, ao resolver alguns exercícios. A generalização da multiplicação para a soma e subtração de frações pode se apresentar, ao trabalhar com esses autores, pois as operações de soma e subtração de frações foram vistas no 6º ano, enquanto a multiplicação, no 7º, e a divisão somente será trabalhada no 8º, juntamente com as outras três operações, já que muitos conceitos poderão ser perdidos nesse caminho. Por isso a ideia de fração deve vir sendo trabalhada durante todos os anos: no 7º, a maioria dos autores trabalha com números inteiros, sendo assim, as quatro operações envolvendo frações podem ser trabalhadas no 7º novamente, só que, dessa vez, podendo obter um resultado negativo, o que não ocorria no 6º ano.

Na divisão envolvendo fração por número natural, ocorrida no 8º ano, Imenes e Lellis (2010, p. 42) trabalham com a forma geométrica, usando a fração referente e dividindo-a, de acordo com o número natural envolvido na operação. Com número natural dividido por fração, assim como os outros autores, analisa-se quantas vezes a fração “cabe” dentro do número natural.

Em “Divisão entre frações”, Imenes e Lellis (2010, p. 43) iniciam a discussão informando que resolvê-las das outras duas formas apresentadas seria difícil, mas que há “uma regrinha” útil para todos os problemas envolvendo divisão de frações. Ainda assim, os autores informam que apenas “saber usar” a regra é pouco e que em Matemática é importante sabermos de onde vêm essas dicas. Portanto, uma apresentação de como se poderia resolver a divisão é apresentada, sendo essa diferente da usada nos outros três livros. Os autores mostram que, em uma divisão, ao multiplicarmos divisor e dividendo por um mesmo número, o resultado da divisão não se altera.

$$\begin{array}{ccccc} 54 & \div & 6 & = & 9 \\ \downarrow{\scriptstyle \times 10} & & \downarrow{\scriptstyle \times 10} & & \\ 540 & \div & 60 & = & 9 \end{array}$$

Figura 15: Divisão equivalente.

Dessa forma, ao efetuar $\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$, temos o seguinte desenvolvimento apresentado:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right) = \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}\right) : 1 = \frac{15}{28}$$

Figura 16: Divisão de frações.

Após algumas explicações, os autores completam que o restante dos comentários (os quais se referem à “regrinha” citada antes da demonstração anterior, mas que não foi citada pelos autores) ficará a cargo do professor.

Interessante tal demonstração e, melhor ainda, a postura do livro, de não indicar todos os fatos, preferindo comunicar ao aluno que o professor terminará as explicações, conduzindo o discente à compreensão de que nem todas as informações estarão no livro, para que não fique “dando voltas”, buscando algo que não encontrará, e orientando-o a recorrer ao seu professor, o qual poderá orientá-lo.

4.2 7º ano – Equações do primeiro grau

O conteúdo escolhido para o 7º ano foi Equações do primeiro grau, por estar presente em muitos problemas na Matemática. Em nossas atividades avaliativas, além de analisarmos a parte procedimental, veremos como a ilusão cognitiva pode influenciar na interpretação de problemas.

Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 118) começam a explicar o princípio de equivalência através de uma balança de dois pratos. Muitos autores trabalham dessa forma, que é muito interessante, afinal, o equilíbrio da balança representa a igualdade da equação e podemos mostrar que, ao efetuar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em ambos os lados da balança, não deixará de haver uma igualdade (o que ocorre com as equações).

Para os exemplos, os autores fazem uso de cinco balanças com o mesmo equilíbrio, mas usando pesos variados (uma delas, com um peso de três e um de cinco, de um lado, e, do outro, um de oito; em outra, pesos de três, cinco e dois, de um lado, e oito e dois, do outro). Assim é mostrada a adição, em ambos os lados, atestando que o equilíbrio é mantido. Depois, os pesos são retirados, dobrados e divididos, para termos as propriedades de uma equação.

Mas, em nenhum momento, as letras são introduzidas nos exemplos, nem mesmo com objetos que façam a balança estar em equilíbrio, ainda que o peso do objeto fosse desconhecido e tivéssemos de achar o seu valor (da mesma forma, nenhum capítulo anterior ao presente fizera os alunos terem um primeiro contato com as letras inseridas em problemas). Ao começarem os exercícios, a partir do segundo, todas as letras aparecem em alguma equação para trabalhar, seja descobrindo alguma propriedade aplicada, substituindo o valor da letra por um número real; mas, em todo caso, é algo extremamente novo para o aluno e sem nenhuma introdução prévia.

O primeiro exemplo para explicar como monta uma equação a partir de um problema é de muita dificuldade, alunos com mais experiência em equações provavelmente já teriam dificuldade em resolver essa questão. Alunos se deparando com esse tipo de atividade pela primeira vez, provavelmente, não terão nenhum ou quase nenhum entendimento.

Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 121) elaboraram o exemplo 1:

Passeando com seus netos, Helena percorreu $\frac{2}{5}$ *do comprimento total de uma avenida. Se andasse mais 40 metros, teria percorrido a metade da extensão total da avenida. Por meio de qual sentença matemática poderíamos obter, em metros, a extensão total dessa avenida?*

No primeiro exemplo de uma equação, o aluno já se depara com fração, letras nos dois membros da igualdade, fração junto com letra e, dificilmente, um aluno entenderá o que o professor está explicando, tendo esse exemplo pela frente. É possível que a ideia mostrada seja que equações são importantes para ajudar a solucionar problemas, mas poderia ser um exemplo em que o aluno enxergasse a praticidade da equação e não que lhe deixasse confuso logo no primeiro encontro.

Na página 124, os autores já começam a trabalhar mais suavemente com questões que poderiam preceder esse exemplo comentado. A partir da equação “x + 2 = 6”, os alunos deveriam substituir números naturais de 0 a 5, para achar sua solução; em outros casos, somente a equação é dada, ficando a cargo dos alunos encontrar sua solução (por tentativa, pois os mesmos ainda não aprenderam a operar com equação).

A introdução sobre o desenvolvimento de equações ocorre na página 128, quando os autores mostram equações equivalentes, algo dificilmente comentado em livros didáticos e que pode trazer mais confusão para os alunos. Os autores aumentaram as equações originais, a fim de mostrar que elas continuam a ter o mesmo resultado final, e, em seguida, mostraram frações equivalentes menores, de modo que os alunos fossem resolvendo a equação original, até chegarem a uma que fosse a resposta final.

Nos dois primeiros exemplos, a balança esteve presente e teria maior ajuda se os autores não quisessem mostrar a equivalência. No primeiro caso, tínhamos a igualdade “x + 3 = 8” representada na balança; na sequência, foi mostrada, também com balança, a igualdade “x + 4 = 9”, a fim de identificar que ambas teriam o mesmo resultado com “x = 5”. Tal demonstração pode frustrar o entendimento do aluno, levando o mesmo a achar que ela é necessária para o desenvolvimento e a buscar um entendimento para sua presença.

No segundo exemplo, é feito o mesmo procedimento, com uma balança que representa a equação “2x = 12”; os autores indicam uma opção equivalente, “4x = 24”, para, em seguida, voltar à equação original (sem nenhum comentário de por que fizeram isso), a fim de resolvê-la.

O grau de dificuldade dos exemplos não segue um padrão, pois, no terceiro exemplo, temos a equação “3x + 10 = 4x”, um caso em que, no final, encontramos “– x = – 10”, cujos termos devem ser multiplicados por “– 1”, para encontrar-se “x = 10”. O quarto exemplo engloba fração, dos dois lados da igualdade, “$\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$”, o que já é mais complicado para os alunos que os exemplos anteriores, pois, até então, eles não fizeram nenhuma atividade a respeito, para a dificuldade ir sendo aumentada gradativamente. No quinto e último exemplo, temos a equação “5x + 1 = 21”, através da qual podemos notar a falta de critério com a dificuldade; esse exemplo poderia perfeitamente entrar no lugar do terceiro exemplo, pois sua resolução é similar à do exemplo três, mas, no final, o sinal da incógnita será positivo.

Na página 134, temos um tópico chamado “Resolvendo equações do 1º grau com uma incógnita”. Depois de serem apresentadas cinco maneiras de resoluções de equações, é que os autores iniciarão uma parte para essas resoluções? Bem, pelo menos agora a dificuldade vai aumentando de modo gradativo, apesar de todos os exemplos serem bastante diretos no enunciado, querendo apenas que se resolva a equação e, durante os exercícios, há vários interpretativos. Embora o livro apresente o item “Usando equações na resolução de problemas”, na página 144, esses problemas já poderiam vir ao longo dos exercícios do capítulo e aumentando a dificuldade aos poucos, afinal, os autores indicaram equação através de um problema, portanto, eles poderiam estar em todo o decorrer do capítulo.

Dante (2012, p. 118), ao trabalhar com letras no lugar de números, reserva alguns itens de seu capítulo para expor expressões que contenham letras, mantendo problemas simples que envolvam perímetro, dinheiro, quantidade, entre outros, apenas para familiarizar o aluno com a montagem de expressões e, em alguns casos, equações.

Para resolvê-las, primeiro o autor propõe, de maneira muito interessante, algumas que sejam solucionadas mentalmente, para o estudante ir se habituando à ideia de realizar a operação inversa. Assim, se temos um número que, somado a 6, resulta em 11 (x + 6 = 11), basta fazermos 11 – 6, que acharemos qual é esse número, e assim Dante segue com várias atividades distintas, que forçam a interpretação do aluno.

O autor explica como resolver uma equação em quatro partes. A primeira apresenta equações mais simples, do tipo “3n + 10 = 91”, com a qual continua trabalhando a ideia de operações inversas, através de questionamentos, como: “Qual é o número cujo triplo somado com 10 resulta em 91?”. Pelo caminho inverso, pegamos o 91, subtraímos o 10, que lhe foi somado, e, por fim, dividimos o resultado por 3. Dessa forma, e anotando passo a passo, resolvemos a equação.

Na segunda parte, o autor utiliza a ideia empregada também por Castrucci e Giovanni Jr. (2009), fazendo uso da balança de dois pratos, para mostrar o equilíbrio, mas, dessa vez, os pratos contêm alguns pesos representados por “x”, para que possam ser encontrados seus valores. O grau de dificuldade, nesses exemplos, é que há pesos com “x” nos dois pratos da balança, então é necessário ter cuidado com o que será cancelado, dos dois pratos.

O terceiro caso são as equações que contêm frações, tendo que multiplicar os dois membros da equação pelo menor múltiplo, entre os denominadores apresentados, a fim de não conter mais nenhuma fração a partir desse passo e seguir o que já havia sido ensinado.

Em último caso, há apenas o acréscimo de parênteses, que já havia sido trabalhado, durante as expressões.

Ao fim de cada um desses casos, há um grupo de exercícios, para os alunos colocarem em prática o que aprenderam. São exercícios diretos, apenas para se resolverem as equações dadas e, em parte, problemas parecidos com os que haviam sido trabalhados quando era apenas para se montar as expressões ou equações, mas, dessa vez, deveriam ser resolvidos.

Apesar de bem explicado e de ter sido exposto com cautela, ainda sentimos falta de alguns comentários mais detalhados a respeito do conteúdo equações, indicando melhor a ideia de distributiva, por que devemos “separar letras de números”, a diferença entre 2 + x e 2x, por exemplo, entre outros.

Dolce, Iezzi e Machado (2009, p. 162) também iniciam álgebra com vários exercícios que ajudarão, futuramente, a parte de equações: de reduzir os termos semelhantes, substituir o valor da incógnita em expressões e equações, envolvendo geometria com perímetros, áreas e volumes, introdução à propriedade distributiva, entre outros; dessa forma, o aluno já está se familiarizando com as propriedades que serão necessárias para o desenvolvimento de equações.

O capítulo de equações tem início na página 172, com um pequeno exemplo para se montar uma equação e, com ela, explicar o que seria uma incógnita e os membros da equação. Em seguida, encontram-se alguns exercícios com problemas, para se montar a equação. Nesse instante, a atividade é apenas a montagem das equações, pois os estudantes ainda não haviam se deparado com a mesma, para efetuar seu desenvolvimento. Os problemas são interessantes, já que o grau de dificuldade não está alto, porém, no decorrer do capítulo, não são retomados, a fim de resolverem suas equações e encontrarem o que seria a resposta para aquelas perguntas.

Dando sequência, os autores explicam o que é raiz de uma equação e iniciam a resolução de equação resolvendo o processo inverso e apenas uma operação inversa já é capaz de resolver a equação, sendo alguns exemplos: “x – 132 = 44”, “$x + \frac{3}{5} = \frac{7}{2}$”, “$\frac{x}{45}$ = 8” e “7.x = 4,9”. Após, há sete exercícios, dois que envolvem geometria (ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice), três em que deve ser montada a equação da forma “Quanto devemos subtrair de 13,5, para obtermos 6,25?” (não há um problema com contexto) e os dois últimos são mais diretos e pedindo para se resolver a equação.

Poderiam haver, nesse grupo de atividades, alguns problemas envolvidos ou, ainda, exemplos mais diferenciados, para que ocorresse maior diversificação das equações, pois, mesmo os exercícios que tiveram de ser montados, não apresentavam diferença para sua resolução.

Temos, na página 178, mais dois exemplos, que são “3x – 1 = 14” e “4x + 7 = x – 8”. Os dois, ou, pelos menos, um deles, já poderiam estar na primeira explicação, para haver exemplos mais variados, o que não é o objetivo dos autores, vendo que, após os exemplos, são apresentados nove exercícios, todos eles nos mesmos moldes dos sete anteriores, sendo que, dessa vez, cinco contêm o enunciado de “Resolva as equações” ou “Determine a raiz”.

Dessa mesma forma prosseguem mais dois grupos de exemplos, com exercícios nos mesmos moldes que os anteriores. No primeiro grupo, equações com parênteses, e no segundo, com frações. Os problemas ficam por conta do próximo capítulo, “Resolução de problemas” (DOLCE, IEZZI e MACHADO, 2009, p. 184), no qual podem ser encontrados cinquenta e quatro problemas que poderiam ter sido divididos ao longo do capítulo de equações, já que grande parte dos alunos passa por dificuldades na hora de interpretar e montar as equações; para resolvê-las, portanto, reduzi-las e trabalhá-las aos poucos é melhor, ambientando-os com tais atividades.

Imenes e Lellis (2010, p. 213) iniciam um capítulo intitulado “Usando letras na matemática”, no qual, de forma parecida com Dolce, Iezzi e Machado (2009), os estudantes começam a montar equações e expressões a partir de problemas. Os autores também trabalham com a junção de termos semelhantes, mas, dessa vez, a ideia da propriedade distributiva está mais clara, pois é trabalhada, inicialmente, utilizando apenas números, indicando que 34 x 9 é o mesmo que 34 x (10 – 1), sendo assim, aplicando a distributiva, obtém-se 340 – 34 = 306, mesmo resultado que encontraríamos fazendo 34 x 9. Com isso, ao introduzir letras nesses parênteses, a ideia de que essa multiplicação é possível e verdadeira pode começar a fazer sentido para o aluno.

Já em Equação, Imenes e Lellis (2010, p. 229) trabalham com a ideia de processo inverso da mesma forma que Dante (2012), pelo exemplo “*Pensei em um número, multipliquei-o por 7. Somei 15 ao resultado. Deu 71*”, assim os alunos, sozinhos, resolvem o problema, através do 71, subtraem 15, que foi somado, dividindo o resultado por 7; tal desenvolvimento também é exposto pelos autores, que, logo em seguida, introduzem a equação “7.n + 15 = 71” e mostram o processo inverso, para se achar o valor da incógnita n.

Ao longo do capítulo, os autores mesclam, de forma bastante interessante, alguns exemplos e aumentam o grau de dificuldade, assim como fizeram os outros autores, mas os exercícios que acompanham tais exemplos, apenas um com algumas letras, para se fazer o desenvolvimento algébrico, e o restante com problemas bastante diversificados, forçam a compreensão dos alunos aos poucos e, depois, eles precisam solucioná-los, entrando em cena, novamente, a parte mecânica de desenvolvimento.

> Acreditamos que um método muito mais criativo e inteligível para os alunos é o de relacionar equações com uma balança de dois pratos, ela ensina a ideia correta da preservação do equilíbrio representado pelo sinal de igual. Essa atividade também pode explorar outras interpretações, por exemplo, o fato de que a subtração é a operação inversa da adição. (AZEVEDO, 2009, p. 62)

Em certo momento, os autores também recorrem à balança, para explicarem o desenvolvimento de algumas equações, e a mesma ideia será usada para resolver certos problemas apresentados pelos autores.

4.3 8º ano – Produtos notáveis

Produtos notáveis foi o primeiro conteúdo pensado para esta pesquisa, o qual é abordado no 8º ano. Diversos são os momentos em que eles aparecem no meio de alguma atividade e os erros são muito presentes, estando o estudante no Ensino Fundamental, Médio ou Superior.

Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 77-79) explicam multiplicação de monômio por polinômio e de polinômio por polinômio, utilizando figuras geométricas. Através da soma das áreas parciais, encontra-se a área total.

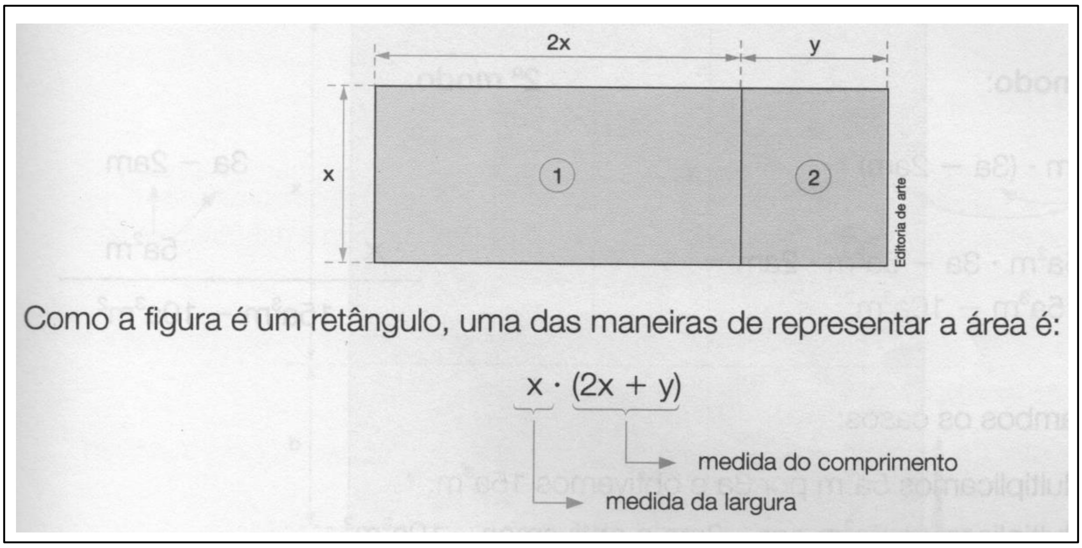


Figura 17: Operação de distributiva.

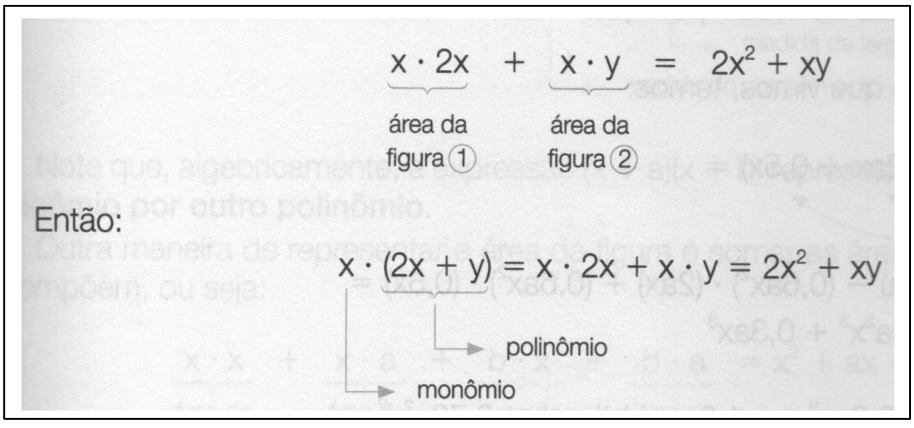


Figura 18: Operação de distributiva.

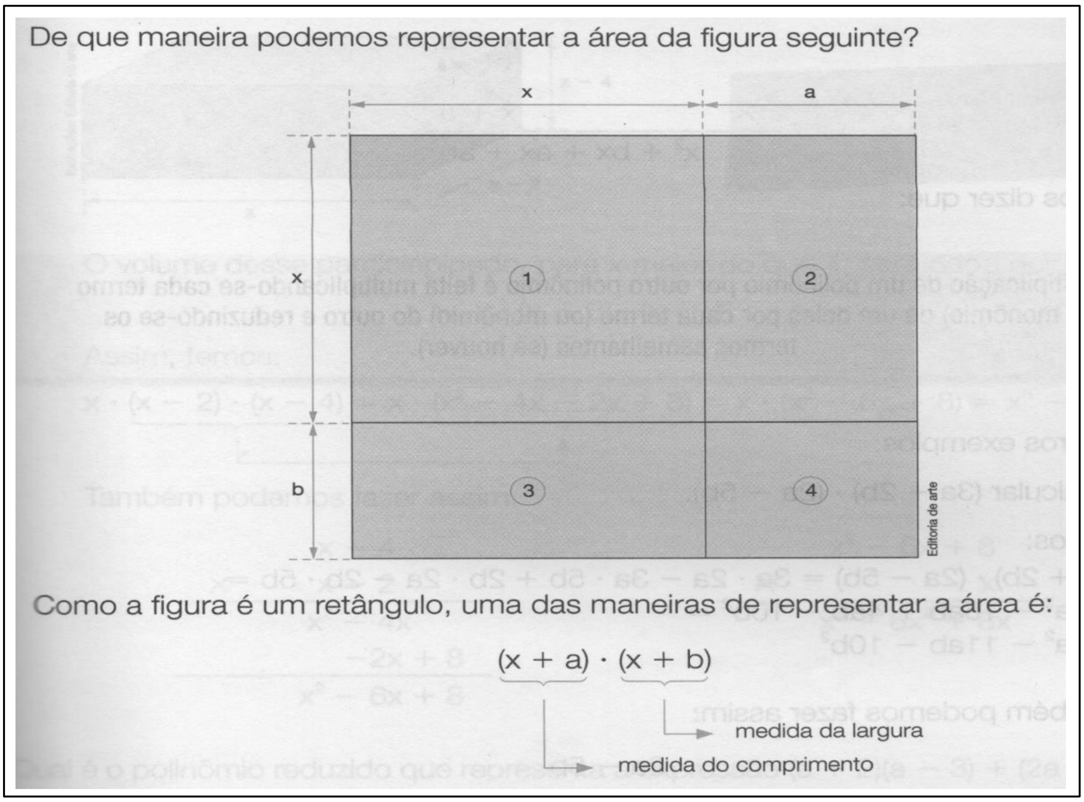


Figura 19: Soma das áreas.

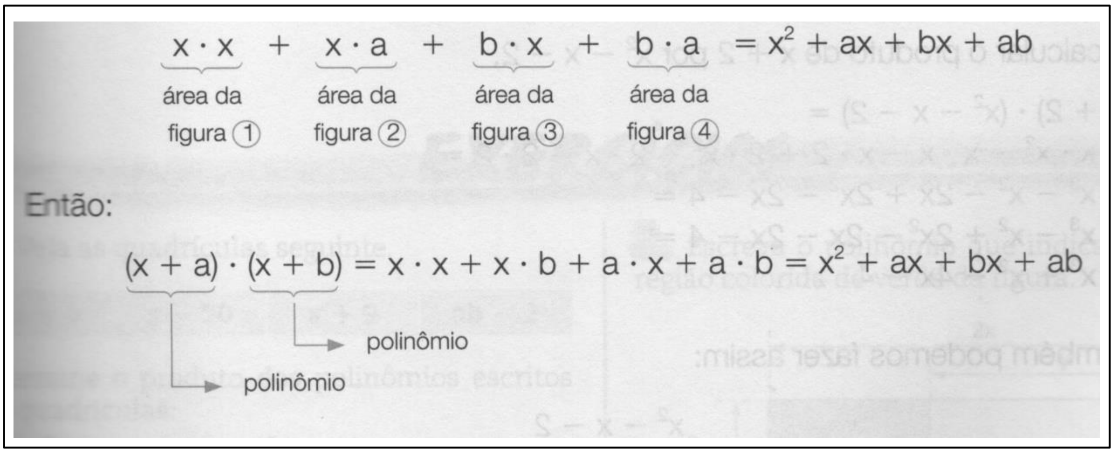


Figura 20: Soma das áreas.

Os autores, a partir dessas duas áreas (Figuras 17, 18, 19 e 20), generalizam a operação de multiplicação de polinômios, informando que basta multiplicar todos os termos de um dos polinômios por todos os termos do outro.

Ao introduzirem o capítulo de produtos notáveis na página 91, os autores já indicam que alguns produtos aparecem com muita frequência, por isso foram denominados *produtos notáveis*. Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 91) mencionam que os produtos que serão analisados a seguir são:

- $(x + y) . (x + y)$ ou $(x + y)^2 \rightarrow$ quadrado da soma de dois termos
- $(x – y) . (x – y)$ ou $(x – y)^2 \rightarrow$ quadrado da diferença de dois termos
- $(x + y) . (x – y) \rightarrow$ produto da soma pela diferença de dois termos

No momento de explicar cada operação em separado, os autores utilizam o processo da multiplicação de cada termo de um polinômio pelos termos do outro para, em seguida, utilizar figuras e fazer demonstrações geométricas.

Seria mais interessante se, primeiro, os produtos notáveis fossem expostos com as figuras geométricas e, depois, de forma algébrica, todavia, pelo fato de já terem sido demonstrados anteriormente é que Castrucci e Giovanni Jr. (2009) não devem ter se importado em demonstrá-los depois; nesse momento, tratam do produto pela diferença e do produto da soma pela diferença de dois termos.

A demonstração dessas propriedades, agora, é com o intuito de mostrar a “regra” usada em produtos notáveis:

- Quadrado da soma de dois termos: quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

- Quadrado da diferença de dois termos: quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

- Produto da soma pela diferença de dois termos: quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Após cada conclusão sobre a “regrinha” (pois não é necessário decorá-la para conseguir desenvolver a atividade), os autores apresentam uma série de produtos notáveis dos mais variados a serem desenvolvidos.

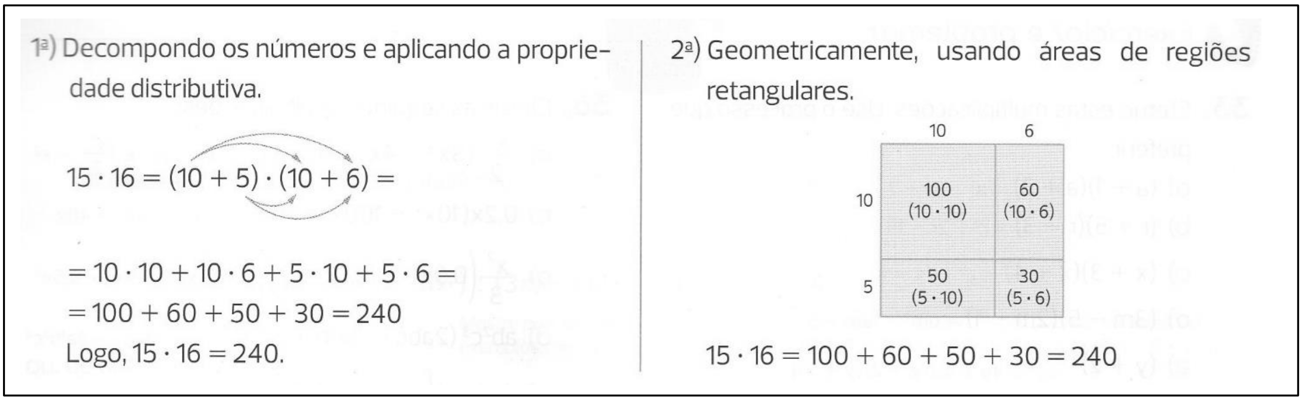
Em nosso entender, tal “regra” poderia ter esperado um pouco para ter sua conclusão, pois, como foi exposta pelos próprios autores, a multiplicação entre polinômios é possível sem precisar da mesma, portanto, seria bom deixar os alunos se ambientarem um pouco com a ideia de que o quadrado de um polinômio pode ser resolvido através da multiplicação entre eles, pois, um aluno mais desatento, ou que apenas comece a se lembrar da regra, pode atropelar seus passos e fazer apenas o quadrado do primeiro mais o quadrado do segundo, conforme é comum acontecer. Sendo assim, seria bom os alunos estarem acostumados a resolver sem a regra e, depois, deixar a seu critério decidirem por qual caminho preferem seguir, sem que lhes seja imposta uma direção – os próprios autores, em seguida, apresentam o cubo da soma e o cubo da diferença, esta sendo efetuada pela multiplicação de um polinômio pelo seu quadrado:

$$(x + 3)^3 = (x + 3) \;.\; (x + 3)^2 = (x + 3) \;.\; (x^2 + 6x + 9) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3x^2 + 18x + 27$$

Reduzindo os termos semelhantes, encontramos $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; como para se efetuar o cubo de um polinômio foi feito um desmembramento, o quadrado poderia ter sido desenvolvido da mesma forma.

Dante (2012) segue, praticamente, da mesma forma que Castrucci e Giovanni Jr. (2009), utilizando figuras geométricas e demonstrando multiplicação de monômio por polinômio, polinômio por polinômio e, ainda, entre os dois, binômio por binômio, na página 131.

Ao expor binômio por binômio, Dante (2012) ainda utiliza operações envolvendo apenas números para definir a multiplicação entre os termos de forma algébrica, 15.16= (10 + 5) . (10 + 6) = 10.10 + 10.6 + 5.10 + 5.6 = 100 + 60 + 50 + 30 = 240; realmente, 15.16 resulta em 240, mas, dessa forma, o autor pode concluir que a multiplicação entre os termos é uma operação verdadeira (o autor ainda expõe com polinômios).



1ª) Decompondo os números e aplicando a propriedade distributiva.

$15 \cdot 16 = (10 + 5) \cdot (10 + 6) =$

$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 =$

$= 100 + 60 + 50 + 30 = 240$

Logo, $15 \cdot 16 = 240$.

2ª) Geometricamente, usando áreas de regiões retangulares.

$15 \cdot 16 = 100 + 60 + 50 + 30 = 240$

Figura 21: Propriedade distributiva e soma das áreas.

Ao iniciar produtos notáveis, Dante (2012, p. 136) representa da mesma forma que Castrucci e Giovanni Jr. (2009), em todos os três casos (quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença): multiplicação entre os termos, desenvolvimento geométrico, conclusão da regra e exercícios, ao final de cada conclusão. Os exercícios estão mais organizados, porém, em alguns deles, pede-se a aplicação da regra, portanto, o aluno começa a ficar preso a essa resolução, esquecendo-se de que pode utilizar a multiplicação entre os termos, para seu desenvolvimento.

Em seguida, o autor também apresenta o cubo da soma e o cubo da diferença, uma forma diferente de Castrucci e Giovanni Jr. (2009), pois, nela, Dante (2012) expõe o desenvolvimento algébrico e geométrico para a soma e algébrico para a diferença, seguido da regra do cubo da soma e da diferença, regra de pouca aplicação e de que até mesmo nós, professores, dificilmente nos lembramos, então, raramente algum aluno se lembrará dela, sendo melhor trabalhar da forma feita por Castrucci e Giovanni Jr. (2009), dividindo-a na multiplicação de dois ou até três polinômios.

Dolce, Iezzi e Machado (2009) trabalham de forma diferente dos outros autores, apesar de a multiplicação de polinômios ter sido exposta da mesma forma (demonstração geométrica e algébrica); no capítulo 16, sobre produtos notáveis (p. 186), apenas o quadrado da soma é demonstrado, mas, dessa vez, a resolução geométrica vem antes da algébrica.

No quadrado da diferença, apenas a resolução algébrica é apresentada, a parte geométrica fica a cargo de os alunos comprovarem, durante um exercício, o que será de grande dificuldade para eles, enquanto a multiplicação da soma pela diferença se restringe apenas à definição algébrica.

Apesar de os exercícios, ao final de cada item, estarem mais diversificados e de os autores não introduzirem o cubo da soma e o da diferença, a exposição ficou muito a desejar. A regra também apareceu ao final de cada item, o que, novamente, poderia ser comentado mais à frente, deixando os alunos trabalharem um pouco com as multiplicações para, depois, terem a opção de escolherem o que seria melhor para sua resolução (usar a regra ou fazer a multiplicação dos polinômios).

Imenes e Lellis (2011, p. 202), de forma semelhante a Dante (2012), ao indicarem a multiplicação entre polinômios, representam de forma geométrica, algébrica e utilizam números para explicar a propriedade distributiva (o que já havia ocorrido no 7º ano), mas a multiplicação entre os termos não contou com a mesma explicação (utilizando apenas números, para mostrar sua veracidade), o que poderia ter ocorrido.

De forma parecida à de Dolce, Iezzi e Machado (2009), Imenes e Lellis (2011) fizeram a demonstração algébrica e geométrica apenas para o quadrado da soma, enquanto o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença ficaram apenas com a demonstração algébrica, generalizando o que havia sido feito no quadrado da soma.

Diferente dos outros autores aqui analisados, Imenes e Lellis (2011) não fizeram menção à regra, ao fim das demonstrações; tal conclusão ficou por conta de os alunos comprovarem, ao fim de um grupo de exercícios de cada um dos três casos. Dessa forma, os alunos, efetuando tais exercícios, deparam-se com um padrão que se repetia entre eles (indagado nas atividades) e são questionados pelos autores sobre essas atividades. Segue o exemplo de uma delas:

42. Vamos examinar o quadrado da soma de dois termos.

a) Copie a tabela no caderno, efetue os cálculos e complete-a.

Cálculo	Resultado
$(a + b)^2$	
$(x + y)^2$	
$(x + 3)^2$	
$(x + 4)^2$	

b) Preenchendo o quadro, você deve ter notado que os resultados obtidos têm sempre um mesmo padrão. Dos padrões do quadro a seguir, qual é o que corresponde ao resultado de $(\blacksquare + \blacktriangle)^2$?

$\blacksquare^2 + \blacktriangle^2$
$\blacksquare + 2 \cdot \blacksquare \cdot \blacktriangle + \blacktriangle$
$\blacksquare^2 + \blacksquare \cdot \blacktriangle + \blacktriangle^2$
$\blacksquare^2 + 2 \cdot \blacksquare \cdot \blacktriangle + \blacktriangle^2$
$\blacksquare^2 - 2 \cdot \blacksquare \cdot \blacktriangle + \blacktriangle^2$

c) Com suas palavras, descreva o padrão escolhido. Comece assim: *Elevando ao quadrado uma soma de dois termos , vamos obter...*

Figura 22: Exercício sobre o quadrado da soma.

Da forma acima, os alunos encontram a “regrinha”, mas estão livres para efetuarem a resolução de outra forma, pois os mesmos chegaram até a regra resolvendo os exercícios, sem fazer uso da mesma.

4.4 9º ano – Resolução de equações do 2º grau

Para o 9º ano, Resoluções de equações do 2º grau foi o tema escolhido, por ser uma das equações mais usadas em Matemática. Parte dos alunos sabe resolvê-las, mas a compreensão do que está sendo feito, muitas vezes, passa despercebido.

Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 94) começam equações do 2º grau (da forma $ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e a ≠ 0) no capítulo 19. Nele, os autores apresentam o que é uma equação do 2º grau, explicam como reconhecer uma e como escrever sua forma reduzida.

Para sua resolução, apresentam, primeiramente, as formas incompletas, com: $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$. Para a resolução da primeira forma, Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 100) apresentam o seguinte desenvolvimento para "$x^2 - 9x = 0$", no conjunto dos reais:

$$x^2 - 9x = 0$$

$x(x - 9) = 0 \longrightarrow$ colocamos x em evidência

Pela propriedade dos números reais, temos:

$x = 0 \longrightarrow$ uma raiz da equação

ou

$$x - 9 = 0$$

$x = 9 \longrightarrow$ outra raiz da equação

No caso apresentado, percebemos a ausência de "c", o valor que estaria sem a incógnita. Na outra forma apresentada, o valor de "b" não se encontra e sua resolução é praticamente da mesma forma que o de uma equação do 1º grau, a diferença se encontra no detalhe final, quando temos "x^2". Para isso, os autores fizeram uso do exemplo "$x^2 - 49 = 0$":

$$x^2 - 49 = 0$$

$x^2 = 49 \longrightarrow$ pelo princípio aditivo

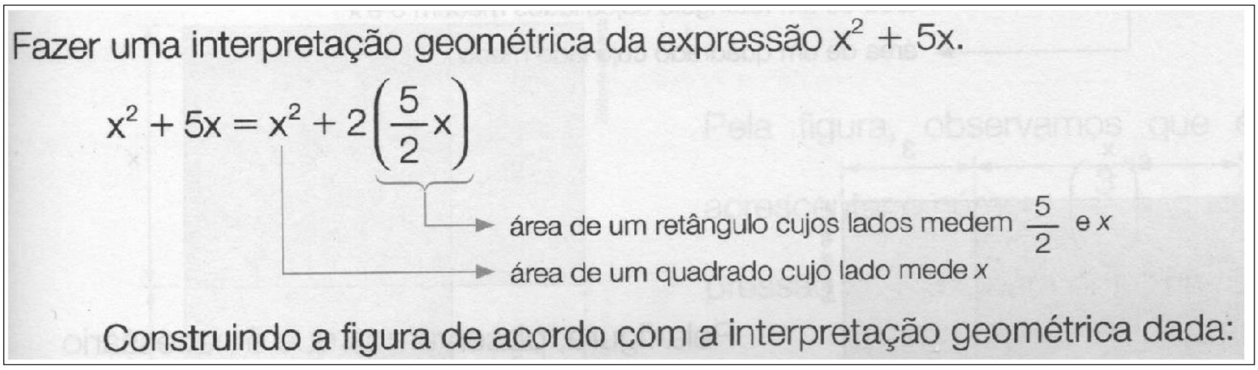
Aplicando a propriedade dos números reais já citada, temos:

$$x = +\sqrt{49} \text{ ou } x = -\sqrt{49}$$

$$x = +7 \text{ ou } x = -7$$

Esses foram dois exemplos de um total de dez apresentados, quatro para a primeira forma e seis para a segunda, sendo que todas terminam com o mesmo desenvolvimento, o qual se diferencia pelo início, organizado juntando os termos semelhantes, ou resolvendo os produtos notáveis.

Para resolver uma equação do 2º grau completa, os autores iniciam com a ideia de resolver completando quadrados, ideia bastante apropriada e muito usada pelos alunos no 3º ano do Ensino Médio, em Geometria Analítica, quando, para resolver exercícios de circunferência (achar centro e raio), muitas vezes será necessário que se completem quadrados. Apesar de estar detalhado e de explicar geometricamente, os dois exemplos ficam muito confusos e não dão uma ideia aos estudantes do “porquê” de se estar fazendo tal processo ou de “onde” se quer chegar. Assim, segue um dos exemplos da página 107:

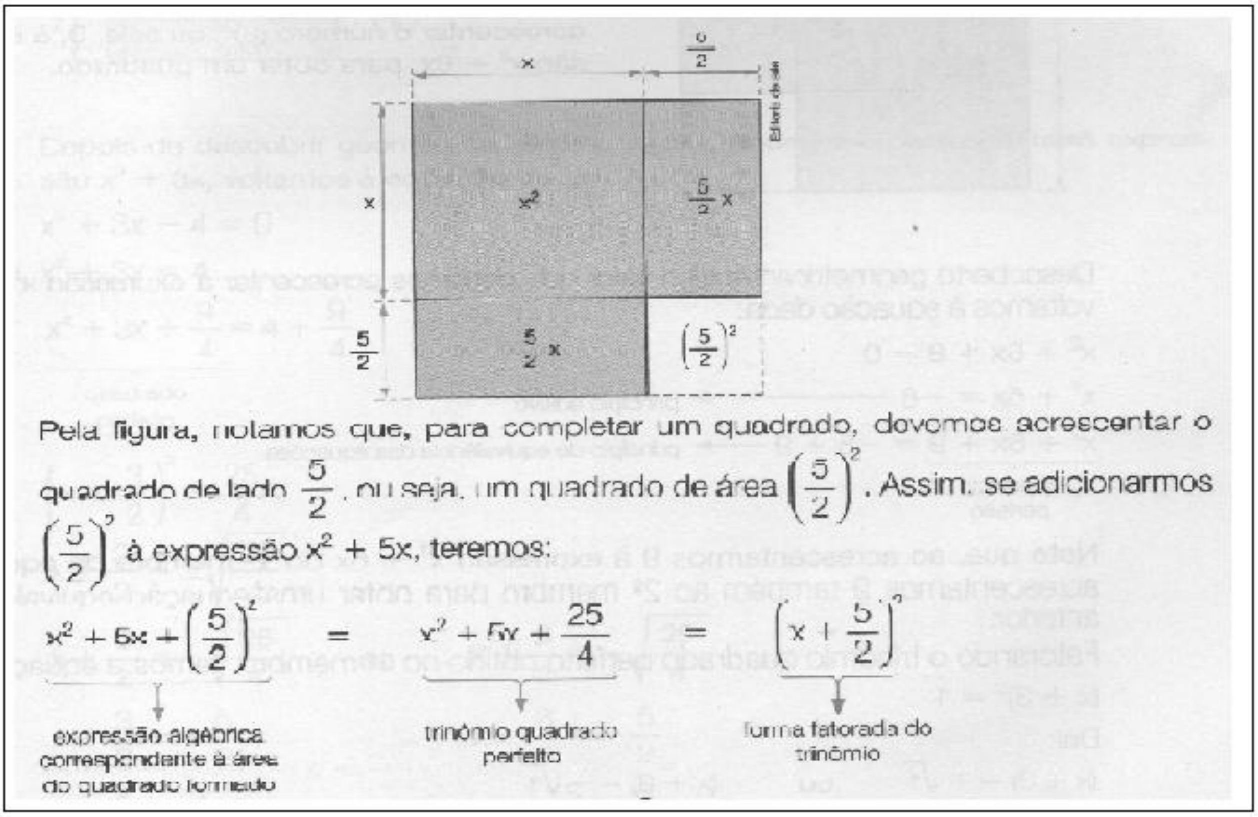


Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 5x$.

$$x^2 + 5x = \underbrace{x^2}_{\text{área de um quadrado cujo lado mede } x} + \underbrace{2\left(\frac{5}{2}x\right)}_{\text{área de um retângulo cujos lados medem } \frac{5}{2} \text{ e } x}$$

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:

Figura 23: Completando quadrados.



Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado $\frac{5}{2}$, ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Assim, se adicionarmos $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ à expressão $x^2 + 5x$, teremos:

$$\underbrace{x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\text{expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado}} = \underbrace{x^2 + 5x + \frac{25}{4}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}_{\text{forma fatorada do trinômio}}$$

Figura 24: Completando quadrados.

Os exemplos (Figuras 23 e 24) não mostram sua finalidade, isso fica a cargo do próximo item apresentado pelos autores, o que já poderia ter sido incluído. Nesse momento, é apresentada a resolução da equação, através do preenchimento de quadrados, fazendo sentido a matéria abordada anteriormente.

A famosa fórmula de *Bháskara* (apenas no Brasil esse nome é empregado à fórmula) é apresentada em seguida, uma fórmula que, mesmo sendo importante para a resolução de diversos problemas em Matemática, o professor deve ter cuidado e paciência ao ensiná-la, pois é um momento delicado na aceitação por grande parte dos alunos – não importa a forma como o professor a trabalhe, será contestado.

Professores que mostram o porquê de se usar “$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$”, em que “$\Delta = b^2 - 4ac$”, provavelmente perderão a atenção da maioria dos alunos, durante seu desenvolvimento, porque a resolução gasta certo espaço no quadro e tempo e, ao chegar à conclusão da fórmula, é comum os seguintes comentários: “*Por que você já não passou isso direto?”*, “*Então não preciso entender o resto?*” ou “*Nada daquilo será usado?”*. Isso não quer dizer que ela não deva ser comentada, pois alguns professores simplesmente jogam a fórmula no quadro e mostram que ela passará a ser usada, processo bastante perigoso para os estudantes, pois muitos já têm a visão de que Matemática é algo inventado, que alguém disse que é de algum jeito e que, portanto, devemos reproduzi-la; com o professor agindo de forma impositiva (mandando os alunos reproduzirem a fórmula), nada fará sentido para eles.

Após ser feita a apresentação da fórmula por Castrucci e Giovanni Jr. (2009, p. 115), os autores já mencionam a importância do discriminante, representado por Δ (uma letra grega chamada delta, que representa o discriminante da equação), o que acontece se ele for maior, menor ou igual a zero, e segue com exemplos de resolução de equação com diversos graus de exigência, com frações e produtos notáveis.

Tais exemplos e comentários sobre o discriminante poderiam esperar um pouco, os alunos poderiam aplicar a fórmula nas equações, para se ambientarem um pouco com a mesma. Os exercícios que seguem as equações, todos os quatorze, são diretamente sobre aplicações de fórmulas, mas poderiam conter um pouco de contextualização, retratando problemas que envolvessem a aplicação da fórmula, para já mostrar sua importância na resolução de problemas.

Alguns itens para frente referem-se a problemas que envolvem equações, geometria com equação do 2º grau e análise das raízes. Os dois primeiros já poderiam ser trabalhados na primeira parte dos exercícios, ou estarem dentro de um dos vários exemplos de resolução expostos. A definição sobre o Δ (discriminante) poderia vir apenas nesse terceiro item, sobre análise das raízes, sem que precisasse ser comentado logo após a explicação da origem da fórmula, para não confundir mais ainda o aluno, durante o aprendizado da mesma. Em nenhum momento foi trabalhada a substituição das raízes encontradas na equação, a fim de verificar que são os valores os quais, ao ocuparem o lugar das incógnitas, tornam a equação verdadeira, cumprindo a igualdade.

Dante (2012, p. 30) inicia o capítulo “Equações e sistemas de equações do 2º grau” com o exemplo: “*Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?*”. A montagem da equação é indicada: “$x^2 – x = 870$” e, em seguida, o autor apresenta exercícios para identificar o grau de uma equação, a fim de reconhecer as equações de 2º grau.

Com alguns exercícios para substituir valores dados nas equações, Dante explica que a raiz de uma equação é o número que, ao ser substituído na incógnita, torna a sentença verdadeira. Para a resolução da equação, Dante (2012) também inicia com a forma incompleta e, para a primeira parte da resolução de uma equação completa, o autor também começa com as equações que formam um quadrado perfeito, passando para a resolução de completar quadrados, sendo cada método vindo acompanhado de quatro exercícios, em média.

O autor (DANTE, 2012, p. 44) já apresenta a fórmula para resolver qualquer equação do 2º grau (fórmula de *Bháskara*), seguida de vários exercícios apenas operacionais, os quais, apesar de ser importante o aluno compreendê-los e dominar sua resolução, poderiam ser complementados por algum exercício com contexto, até mesmo o que iniciou o capítulo poderia ser retomado, pois, nesse momento, o aluno já seria capaz de resolver a equação introdutória.

> [...] aulas dinâmicas, desafiadoras e problematizadas atraem muito mais a atenção e despertam o interesse do aluno para os conteúdos que devem ser ensinados. Com isso, devemos ter o cuidado de não planejar atividades mecânicas e repetitivas, pois elas estagnam o raciocínio dos alunos. Enfim, as atividades precisam ser problematizadas. (AZEVEDO, 2009, p. 10)

Até o final do capítulo, na página 65, Dante (2012) ainda passa pela importância do Δ (discriminante), o que ocorre quando ele for maior, menor ou igual a zero, por resolução mental de algumas equações através da soma e produto das raízes, por equações biquadradas, sistemas, entre outros, e as atividades contextualizadas passam bem distantes, até mesmo na parte de sistemas, em que problemas podem ser explorados.

Dolce, Iezzi e Machado (2009, p. 56) demonstram a resolução de uma equação do 2º grau através da soma e produto entre as raízes e, assim como Castrucci e Giovanni Jr. (2009), não fazem a verificação das raízes substituídas na equação. Na página 60, os autores dão início ao capítulo de equação do 2º grau, definindo-a. Na próxima página, é apresentado como achar a raiz sem fórmula, mencionando que raiz da equação é quando substituímos a incógnita por um número, transformando a sentença em verdadeira – essa ideia já poderia ter sido trabalhada, quando foi apresentado como encontrar as raízes através de soma e produto.

Os primeiros exemplos de como se resolver uma equação do 2º grau, apresentados por Dolce, Iezzi e Machado (2009), são da mesma forma que os apresentados por Castrucci e Giovanni Jr. (2009): algumas equações em que o valor de “c” é “0”, outras em que o “b” que é “0); ao final de cada forma, alguns exercícios são apresentados.

A próxima definição é, novamente, o desenvolvimento através da soma e produto, mas, dessa vez, a verificação das raízes é feita. Após uma breve exposição de como resolver uma equação completando quadrados (seguida por apenas três exercícios), de forma organizada e clara de sua importância, a fórmula de *Bháskara* é exposta, seguida de vários exercícios bem selecionados e variados, misturando resoluções diretas a problemas e geometria. Dessa vez, os comentários sobre a importância do Δ (discriminante) ficam mais à frente, quando os alunos já têm certa afinidade com a resolução de uma equação do 2º grau.

Imenes e Lellis (2011) começam a resolução de equações do 2º grau sem que seja necessário defini-las, porque os autores analisam expressões de produto zero, da forma “$(x + 2) . (x – 5) = 0$”, uma equação de 2º grau (se multiplicarmos os termos) que pode ser resolvida facilmente, sem nenhuma fórmula, já que, se a multiplicação de dois números é igual a zero, um deles tem que ser zero, portanto, se $x + 2 = 0$, então $x = – 2$, e se $x – 5 = 0$, temos que $x = 5$, logo, as raízes são “– 2” e “5”. Dessa forma, os autores expandem para equações que sejam um trinômio do quadrado perfeito, tendo em vista que podem ser fatoradas: $x^2 + 6x + 9 = 0$ é o mesmo que $(x + 3)^2 = 0$, e como $(x + 3)^2$ é o mesmo que $(x + 3) . (x + 3)$, podemos trocar a equação inicial por $(x + 3) . (x + 3) = 0$, retornando ao exemplo iniciado pelos autores, cuja raiz agora é “– 3”.

No capítulo que introduz equação do 2º grau, Imenes e Lellis (2011, p. 118) comentam que, apesar de alguns tipos de equações os alunos já saberem resolver (as que “b” ou “c” sejam “0” e as que são trinômios do quadrado perfeito), existe uma fórmula em que é possível resolver todos os tipos de equação do 2º grau, contudo sua demonstração será feita mais à frente. Nesse instante, os autores apresentam a fórmula e dois exemplos de aplicações diretas. Após vários exercícios com tais aplicações, problemas e sistema de equações, a fórmula é detalhada. Foi bom esperar para demonstrá-la, pois, nesse momento, os alunos estão bem familiarizados com o desenvolvimento e saberão onde se quer chegar desenvolvendo todos os passos, para sua demonstração.

Durante o capítulo, os autores apresentam exercícios bastante variados, incluindo problemas em que saber resolver uma equação do 2º grau se faz bastante necessário para suas resoluções, tornando, assim, as atividades desafiadoras e interessantes, sem ficar no processo de fazer por repetição.

Para o conteúdo do 6° ano abordado, acreditamos que Castrucci e Giovanni Jr. (2009), juntamente com Dante (2012), apresentam as melhores definições, sendo a abordagem dos primeiros ainda mais completa, o que não isenta os professores de terem de fazer alguns comentários, a fim de esclarecer e complementar algumas ideias expostas pelos autores.

Apesar de ter feito uma boa introdução sobre operações com frações, o livro de Dolce, Iezzi e Machado (2009) está vazio de desenhos e explicações em seu conteúdo e a parte de divisões de frações está confusa e demorada, fazendo com que o aluno se perca, durante sua leitura.

A abordagem feita por Imenes e Lellis (2011), para divisões de frações, é muito interessante e diferente do que estamos acostumados a encontrar em livros didáticos. Mas os autores, em nosso ponto de vista, não deveriam trabalhar tal operação somente no 8º ano, pois acreditamos que um conteúdo tão fundamental e, de certo modo, “confuso”, como fração, deva vir sendo trabalhado ano após ano e sempre acompanhado de comentários dos professores.

Para nós, os livros de Dante (2012) e o de Imenes e Lellis (2011) foram os que melhor abordaram o conteúdo de equações do 7º ano, sendo o de Imenes e Lellis (2011) mais detalhado e harmonizado, explicando, com mais clareza, algumas propriedades necessárias no desenvolvimento de várias equações, além de conter exercícios muito bem escolhidos para compor o conteúdo. Nesse momento, achamos a abordagem de Castrucci e Giovanni Jr. difícil de se entender, sendo a introdução das letras, na disciplina, bastante confusa. Quanto ao livro de Dolce, Iezzi e Machado (2009), apresenta exercícios bastante diretos e sem contexto.

Em produtos notáveis, nos quatro livros analisados se faz muito importante a participação do professor, para seu entendimento. Acreditamos que é importante a exposição geométrica, algébrica e utilizando apenas números das propriedades, pois, ao utilizarmos somente algarismos, mostramos a veracidade de se realizar os produtos, podendo, assim, substituir os números por letras e se realizar o mesmo processo, como foi utilizado por Dante (2012) e Imenes e Lellis (2011). Ainda acreditamos que a “regrinha” pode ser esperada para ser mencionada, aguardando os alunos estarem atentos ao fato de que, para efetuarem os produtos notáveis, o mesmo pode ser feito pela multiplicação entre seus termos e a regra acaba não se fazendo necessária, conforme feito por Imenes e Lellis (2011).

Para a resolução de equações do 2º grau, achamos interessante a abordagem feita por Imenes e Lellis (2011), que aguardaram um pouco para apresentarem a fórmula de *Bháskara*, mas foram trabalhando com a mesma, após resolverem algumas equações nas quais a fórmula não era necessária. Dolce, Iezzi e Machado (2009), juntamente com Imenes e Lellis (2011), foram os que apresentaram os melhores exercícios para abordarem o tema de forma mais contextualizada.

Os livros didáticos, em alguns momentos, podem confundir a explicação de algum conteúdo, conforme feito por Dolce, Iezzi e Machado (2009), ao acharem as raízes de uma equação do 2º grau através de soma e produto e não a substituírem na equação, para provar sua veracidade, sendo que, algumas páginas à frente, os autores começam a fazer tal verificação dessa forma; os professores não devem seguir fielmente as explicações dos livros, devem ter a autonomia para intervir e completar algum conteúdo, sempre que acharem que o mesmo seja importante e que facilite o entendimento do estudante.

Apesar de, em nossa análise, achamos o livro de Imenes e Lellis (2011) mais interessante na quase totalidade dos conteúdos analisados, reconhecemos, também, que o mesmo não é um livro de fácil entendimento para o aluno, pois compreender e interpretar um problema é tão importante quanto saber utilizar as operações e propriedades, o que, em certos conteúdos, os autores deixam um pouco a desejar, por haver poucos exercícios em que o aluno deva apenas aplicar o desenvolvimento operatório, diferente da parte interpretativa, na qual os exercícios são variados e bem escolhidos, para complementar os conteúdos.

Em nossos *Embasamentos Teóricos*, próximo capítulo, temos a pesquisa do psicólogo Daniel Kahneman, o qual investigou como nosso pensamento funciona durante a tomada de decisão, orientação para esse estudo e para nossa forma de trabalhar, no dia a dia, tendo o “erro” como foco.

5 EMBASAMENTOS TEÓRICOS

Até o momento, analisamos como alguns professores lidaram com o erro e o modo como algumas avaliações foram corrigidas. Nossa Revisão de Literatura nos fez entender o quanto essa pesquisa pode ajudar a responder nossa pergunta diretriz: *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca por alternativas que auxiliem os alunos a aprenderem com seus erros em Matemática?*; sendo assim, o capítulo sobre Análise dos Livros Didáticos nos ajuda a pensar no conteúdo que estamos ensinando, a fim de ter novas propostas de atividades para diminuir a ocorrência do erro nesses conteúdos.

De acordo com Luckesi (apud KISTEMANN Jr., 2004, p. 38), "o Erro pode deixar de ser o sintoma do fracasso e passa a ser o sinal que norteará o professor na busca de elementos que propiciem ao aluno a regulação gradativa desses erros e de sua aprendizagem".

Para Bertoni (2000), o mais importante é o professor adotar uma atitude reflexiva diante do erro do aluno, procurando não apenas compreender o erro no interior de um contexto, mas, também, entender o sujeito que erra.

Compartilhando do pensamento de Bertoni (2000), no qual espelhamo-nos para tentar entender o erro, recorreremos, como já mencionado, ao trabalho de Kahneman, *RÁPIDO e DEVAGAR – duas formas de pensar*, o qual corrobora com nosso ponto de vista sobre o processo da aprendizagem. Kahneman é um renomado psicólogo, que fez alguns trabalhos ao lado de seu grande amigo, Amos Tversky, e ganhou o prêmio Nobel de Economia, em 2002, por suas obras sobre tomadas de decisão (Amos não compartilhou de tal prêmio, pois faleceu antes do ocorrido). Sobre seu trabalho, Kahneman (2011, p. 13) relata: "nosso objetivo era identificar e analisar a resposta intuitiva, a primeira que viesse à mente de um e de outro, aquela que nós sentíamos tentados a dar mesmo quando sabíamos estar errada".

Nessa obra, Kahneman explica como funciona o pensamento de uma pessoa, ao tomar alguma decisão, e que muitas escolhas são feitas pelo que ele chamou de Sistema 1, responsável pelas decisões automáticas, aquelas primeiras imagens que vêm à nossa cabeça – a primeira opinião a ser formada, sem nenhum embasamento, que simplesmente ocorre, e, em alguns momentos, não nos dá a resposta correta. Segundo Kahneman (2011, p. 10), "A maioria das impressões e pensamentos surge em sua experiência consciente sem que você saiba como foram parar lá". O Sistema 2, relatado pelo autor como nosso sistema "preguiçoso", por ser o que menos nós usamos, é o momento em que paramos para analisar alguma situação e, diante de tal, pensamos todos os prós e contras que uma decisão acarretará; podemos dizer que é um sistema cauteloso, receoso, o qual nos faz refletir e analisar, para tomarmos a melhor decisão, ou procurarmos a resposta para algum problema.

Dois exemplos simples, a fim de entendermos um pouco como funcionam esses dois Sistemas, são os seguintes:

1 – Qual é o maior vaso de plantas ilustrado a seguir (Figura 25)?

Figura 25: Vasos de planta.

Tal atividade não gerou nenhum esforço em nosso cérebro, ao deduzirmos espontaneamente qual, entre os três vasos acima, é o maior. Com uma simples olhada para a figura, já identificamos que o maior deles é o que se encontra no centro. Para tal avaliação ser feita, recorremos ao nosso Sistema 1, como mencionado, de resposta rápida e espontânea; sem precisarmos de esforço, a resposta nos veio imediatamente, no momento em que olhamos a figura, e a resposta fornecida está correta.

2 – Quantas caixas aparecem na imagem (Figura 26)?

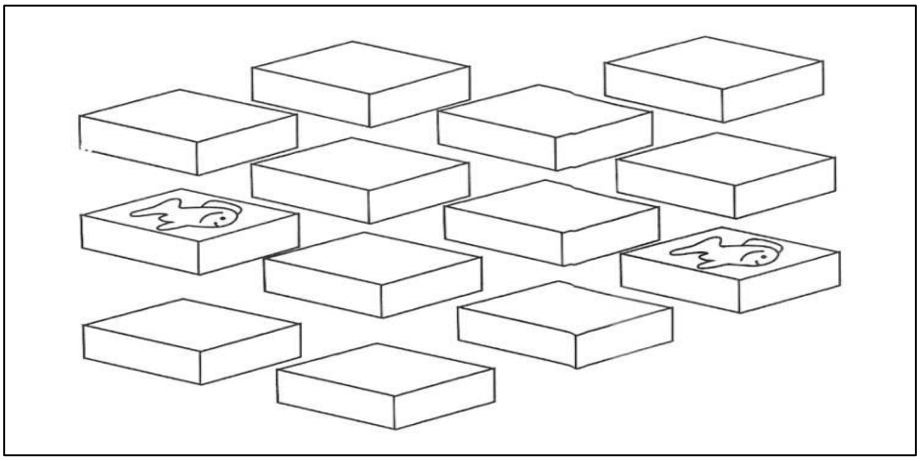


Figura 26: Caixas espalhadas.

Tal exemplo, apesar de ser relativamente simples, já requer que tenhamos alguma concentração, a resposta não é intuitiva, como na primeira atividade. Para respondê-la, precisamos gastar alguns segundos de análise.

Segundo o autor, uma das principais funções de nosso Sistema 2 é tentar controlar os pensamentos ocorridos pelo Sistema 1.

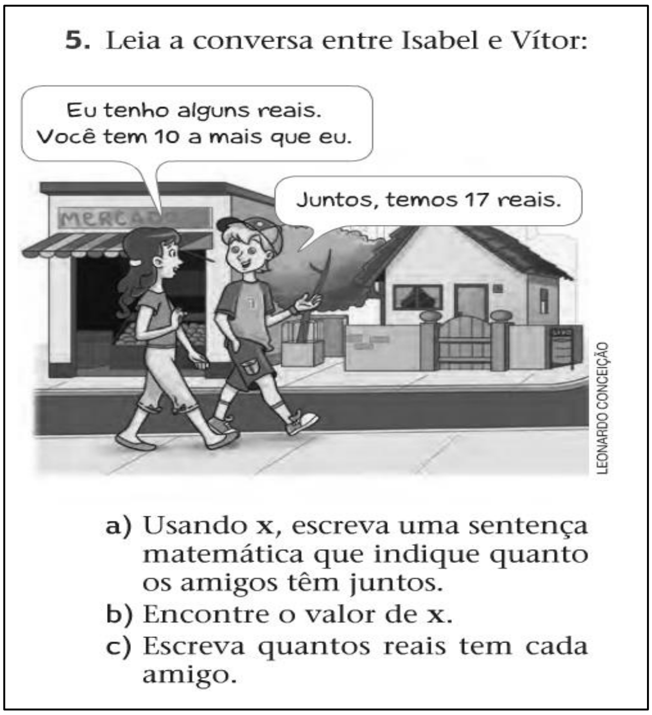
Um exemplo de como ocorrem esses pensamentos foi tirado de uma breve atividade introdutória ao assunto, do próprio livro de Kahneman (2011, p. 59):

Um bastão e uma bola custam 1,10 dólar. O bastão custa um dólar a mais que a bola. Quanto custa a bola?

A primeira resposta que nos vem à cabeça é a de que a bola custa 10 centavos, assim como queria Kahneman, quando relata que essa resposta é intuitiva, atraente e errada. Entretanto, ao mesmo tempo em que tal resposta nos vem à cabeça, checamos sua veracidade, constatando logo seu erro, pois, se a bola fosse 10 centavos de dólar, o bastão deveria custar 1 dólar, fugindo, assim, de uma das restrições de que o bastão deveria custar 1 dólar a mais do que a bola. Portanto, a resposta correta é a de que o bastão deve custar \$1,05 e a bola, \$0,05.

Esse primeiro pensamento ocorrido foi produzido pelo Sistema 1, já o Sistema 2 nos fez analisar sua veracidade e chegar à conclusão correta; essa análise ocorreu por sermos professores, gostarmos de Matemática e querermos verificar se a resposta intuitiva tinha procedência; porém, e quando esse tipo de pensamento automático ocorre por parte de nossos alunos, será que eles verificam sua veracidade? Provavelmente, não. Pois, se sua intuição (Sistema 1) lhes diz uma resposta sobre algum problema, é porque ela reconheceu alguma semelhança com algum outro problema já vivenciado e a confiança no acerto faz com que, em nenhum momento, parem e constatem equívoco em alguma decisão tomada, pois a resposta foi natural e segura para eles, já que reconheceram, nesse problema, outro que teve essa forma de resolução.

Uma atividade semelhante a essa pode ser encontrada no livro de 7º ano de Imenes e Lellis (2012):


5. Leia a conversa entre Isabel e Vítor:

a) Usando **x**, escreva uma sentença matemática que indique quanto os amigos têm juntos.
b) Encontre o valor de **x**.
c) Escreva quantos reais tem cada amigo.

Figura 27: IMENES E LELLIS 7º ano (2012, p. 231).

Tal questão nos chamou tanto a atenção, que passou a fazer parte de nossos exercícios avaliativos; de imediato, não notamos sua semelhança com a atividade proposta por Kahneman, mas intrigou-nos a quantidade de erros produzidos por ela, assim como na atividade do livro *Rápido e Devagar*, pois a resposta da maioria dos alunos, em sala de aula, era de que Vítor possuía 10 reais e Isabel, 7 (não verificaram o fato de que Vítor deveria ter 10 reais a mais do que sua amiga). Tal resposta foi impulsionada por nosso Sistema 1, como foi relatado.

Caso nossos exemplos ainda não tenham sido convincentes na comprovação de que nosso Sistema 1 é realmente poderoso, ofereceremos mais um caso (Figura 28) com que muitas pessoas já se depararam, por isso sabem qual é a resposta correta, mas sua intuição ainda lhes diz o contrário.

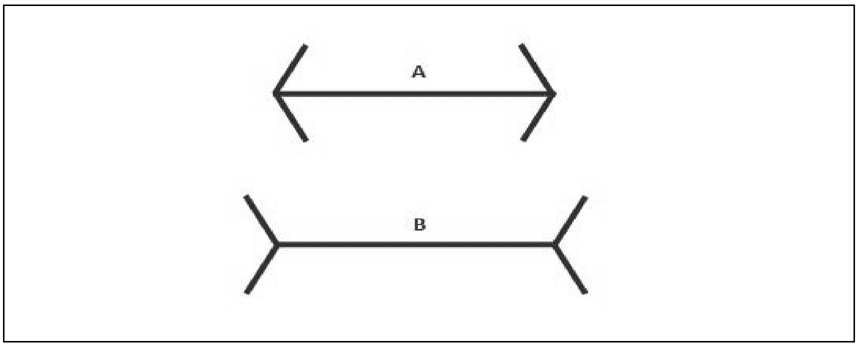


Figura 28: Modelo de Müller- Lyer.

O que tem demais nessas linhas horizontais de diferentes tamanhos, com setas em suas extremidades (Figura 28)? Conhecidas como *Ilusão de Müller- Lyer e suas linhas*, uma régua pode comprovar que têm exatamente o mesmo tamanho, entretanto, mesmo já sabendo do resultado, nossa mente se nega a aceitar o fato; continuamos tendo o impulso de nosso Sistema 1, de tentar nos convencer de que a linha B é maior que a linha A.

Ilusões cognitivas podem ser mais renitentes do que ilusões visuais. O que você descobriu sobre a ilusão de Müller-Lyer não mudou o modo como vê as linhas, mas mudou seu comportamento. (KAHNEMAN, 2011, p. 271)

Segundo Kahneman (2011, p. 37), nem todas as ilusões são visuais. Há ilusões de pensamento, que chamamos de *ilusões cognitivas*.

> A pergunta que se faz com mais frequência sobre as ilusões cognitivas é se elas podem ser dominadas. A mensagem desses exemplos não é encorajadora. Como o Sistema 1 opera automaticamente e não pode ser desligado a seu bel-prazer, erros do pensamento intuitivo muitas vezes são difíceis de prevenir. Os vieses nem sempre podem ser evitados, pois o Sistema 2 talvez não ofereça pista alguma sobre o erro. Mesmo quando dicas para prováveis erros estão disponíveis, estes só podem ser prevenidos por meio do monitoramento acentuado e da atividade diligente do Sistema 2. (KAHNEMAN, 2011, p. 38)

Kahneman (2011, p. 39) completa que o melhor que podemos fazer é um acordo: aprender a reconhecer situações em que os enganos são prováveis e se esforçar mais para evitar enganos significativos, quando há muita coisa em jogo. “A premissa [...] é de que é mais fácil reconhecer os enganos das outras pessoas do que os nossos”.

Portanto, neste trabalho, buscamos encontrar maneiras de os pré-requisitos em Matemática apresentarem algum sentido para o aluno, fazendo, assim, com que a ocorrência dos erros influenciados por nosso Sistema 1 possa diminuir. Entendendo seu desenvolvimento, pois tais conteúdos agora farão sentido para os educandos, controlarão o ímpeto de seu Sistema 1 de lhes mandar a primeira resposta que pareça familiarizada com o problema exposto.

De acordo com Kahneman (2011, p. 10), “a maioria das impressões e pensamentos surge em sua experiência consciente sem que você saiba como foram parar lá”.

> O arranjo funciona muito bem na maior parte do tempo porque o Sistema 1 geralmente é muito bom no que faz: seus modelos de situações familiares são precisos, suas previsões de curto prazo são em geral igualmente precisas e suas reações iniciais a desafios são rápidas e normalmente apropriadas. O Sistema 1 tem vieses, porém, erros sistemáticos que ele tende a cometer em circunstâncias específicas. Como veremos, ele às vezes responde a perguntas mais fáceis do que essa que foi feita, e exibe pouco entendimento de lógica e estatísticas. Uma limitação adicional do Sistema 1 é que ele não pode ser desligado. (KAHNEMAN, 2011, p. 34 e 35)

Vejamos mais alguns exemplos selecionados do livro de Kahneman (2011), a fim de destacar o quanto nossas ilusões cognitivas podem ser fortes e tendenciosas e o quanto o livro é interessante e nos faz refletir um pouco sobre nossas ações (tomadas de decisão).

- “Em um experimento que se tornou um clássico instantâneo, o psicólogo John Bargh e seus colaboradores pediram a alunos da Universidade de Nova York – a maioria entre 18 e 22 anos – para montar frases de 4 palavras partindo de uma série de 5 palavras (por exemplo, '*acha ele isso amarelo instantaneamente*'). Para um grupo de alunos, metade das frases embaralhadas continham palavras associadas com pessoas idosas, como *Flórida, esquecido, careca, grisalho ou ruga*.* Quando haviam completado a tarefa, os jovens participantes eram encaminhados para outro experimento numa sala no fim do corredor. Essa curta caminhada era o objetivo do experimento. Os pesquisadores mediam discretamente o tempo que levava para as pessoas irem de um lado a outro do corredor. Como Bargh previra, os jovens que haviam sido incumbidos de formar uma frase com palavras de temática idosa percorriam o trajeto de um modo significativamente mais lento do que os outros". (p. 70) *Flórida é um popular destino de aposentados nos Estados Unidos.

- "Lembretes de dinheiro levam a efeitos perturbadores. Participantes de um experimento foram apresentados a uma lista de cinco palavras a partir da qual tinham de construir uma frase de quatro palavras com dinheiro como tema ("*alto um salário mesa pagar*" virou "*pagar um alto salário*"). Outros *primings* eram bem mais sutis, incluindo a presença de algum irrelevante objeto ligado a dinheiro no fundo, como uma pilha de dinheiro de Banco Imobiliário sobre a mesa, ou um computador com um descanso de tela de nota de dólar flutuando na água.

  Pessoas estimuladas pela palavra dinheiro tornam-se mais independentes do que seriam em um gatilho associativo. Elas perseveram quase o dobro do tempo em tentar resolver um problema muito difícil antes de pedir ajuda ao pesquisador, uma nítida demonstração de autoconfiança aumentada. Também mais egoístas: elas se mostraram bem menos dispostas a perder tempo ajudando outro aluno que fingia estar confuso sobre uma tarefa experimental. Quando um pesquisador desajeitado derrubou um punhado de lápis no chão, os participantes com dinheiro (inconscientemente) pegaram menos lápis. Em outro experimento na série, foi explicado aos participantes que eles deveriam empreender uma breve conversa para conhecer alguma outra pessoa e pediu-se a eles que pusessem duas cadeiras frente a frente enquanto o pesquisador saía para buscar a tal pessoa. Os participantes estimulados pelo dinheiro optaram por ficar bem mais longe do que os demais não primados (118 contra 80 centímetros). Universitários estimulados pelo dinheiro também mostraram uma preferência maior por ficarem sozinhos." (p. 73)

Mas a visão não é o único domínio das ilusões; a memória também é suscetível a elas, assim como o pensamento, de um modo mais geral. (Kahneman, 2011, p. 79)

- O poder de âncoras aleatórias foi demonstrado de algumas maneiras preocupantes. Juízes alemães com uma média de mais de 15 anos de experiência em tribunal primeiro liam a descrição de uma mulher que fora detida por furto em lojas, depois lançavam dois dados que haviam sido adulterados de modo a dar sempre 3 ou 9. Assim que os dados paravam de se mover, perguntavam-se aos juízes se iriam sentenciar a mulher a uma pena de prisão maior ou menor, em meses, do que o número apresentado no dado. Finalmente, os juízes eram instruídos a especificar a exata sentença de prisão que dariam à mulher. Em média, os que haviam rolado um 9 diziam que iriam sentenciá-la a 8 meses; os que obtinham um 3 diziam que iriam sentenciá-la a cinco meses; o efeito de ancoragem foi de 50%. (p. 160)

- Efeitos de ancoragem explicam por que, por exemplo, o racionamento arbitrário é uma manobra de marketing eficaz. Anos atrás, clientes de supermercado em Sioux City, Iowa, se depararam com uma promoção de vendas para a sopa Campbell's cerca de 10% abaixo do preço normal. Em alguns dias, o cartaz anunciava LIMITE DE 12 POR PESSOA. Em outros, dizia SEM LIMITES POR PESSOA. Os clientes compraram uma média de 7 latas quando o limite vigorava, o dobro do que compraram quando o limite era retirado. Ancoragem não é a única explicação. O racionamento implica também que os produtos estão sumindo das prateleiras, e que os clientes devem sentir alguma urgência em estocar. Mas sabemos também que a menção de 12 latas como compra possível resultaria em ancoragem mesmo que o número fosse produzido por uma roleta. (p. 161)

Diante do exposto, fica claro que a ocorrência dos erros perante uma Avaliação que influencia diretamente no emocional, no humor de nossos alunos, existirá com maior frequência do que se eles estiverem mais relaxados, durante uma atividade que lhes proporcione satisfação.

Disponibilizar atividades que possam motivar os discentes é tarefa dos professores, para ajudarem-nos em sua aprendizagem. Segundo Kahneman (2011, p. 91), "Conforto cognitivo e sorrisos ocorrem juntos, mas será que de fato as sensações boas levam a intuições de coerência? Sim, levam."

Em nossa experiência temos percebido que, em geral, as formas mais usuais de se verificar o aprendizado são testes, provas e listas de exercícios, mas o ato de avaliar é muito mais amplo do que isso. Nesses tipos de avaliações, não está sendo levado em conta o real esforço do aluno em entender algum conteúdo, ou mesmo se ele está com alguma dificuldade epistemológica. Nem todos os alunos têm afinidade com a área de exatas, muitos encontram na Matemática sua grande dificuldade. O mesmo já não ocorre em outros conteúdos, da mesma forma como nos deparamos com alunos com muita facilidade em exatas e extrema dificuldade para a compreensão de outras áreas. Para isso, ao avaliarmos, devemos ter a clareza de que cada aluno a quem tentamos ensinar tem sua matéria preferida, a qual o mesmo julga ser mais fácil e, por mais que se esforce, a compreensão desses conteúdos (no nosso caso, a Matemática) é de extrema dificuldade.

Enquanto em testes e provas muitos alunos apenas decoram ou tentam entender o conteúdo para uma aplicação imediata, visando a uma boa nota, para o desenvolvimento de listas de exercício a tarefa de tentar aprender alguma coisa pode ser ainda pior, pois, em testes e provas, o erro é punido com a perda de pontos, enquanto nesse tipo de avaliação (listas de exercícios), o aluno tem a oportunidade de corrigir seus erros e garantir uma boa nota. Como fazer isso? Copiando o trabalho de seus colegas (todo o trabalho, ou as tarefas que não conseguiu realizar ou estão com as respostas incorretas). Isso dá uma falsa impressão de que esses alunos estão sabendo o conteúdo abordado, pois suas notas estão boas, diante do padrão estabelecido, no entanto, suas dificuldades são muitas e não serão sanadas, pois, para toda a sociedade, uma boa nota é somente o que importa e tudo o que indica se um aluno está sabendo, ou não, a matéria.

De acordo com Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 22), “Em momentos diferentes da história, os estudiosos demonstraram preocupação com o fato de que os ambientes educacionais formais eram mais bem-sucedidos em selecionar talentos do que em desenvolvê-los”; nesse ponto, sim, os testes avaliativos se destacavam, pois eles apenas classificavam os alunos pelo que sabiam, em vez de ajudá-los a desenvolver seus conhecimentos.

Diversas vezes, já ouvimos alunos dizerem “não precisa estudar isso, pois não irá cair na prova”, o que passa a impressão de que o ato de estudar é apenas para conseguir a nota, aprender nem sequer passa por suas cabeças.

Ao fazermos as correções de testes e provas, devemos tomar muito cuidado com nossos critérios, para não sermos tendenciosos:

> Eu pegava um caderno de questões de cada vez e lia todas as respostas daquele aluno em imediata sucessão, dando notas para cada questão à medida que prosseguia. Depois eu calculava o total e passava ao aluno seguinte. Acabei por perceber que minhas avaliações das questões em cada prova eram surpreendentemente homogêneas. Comecei a desconfiar que meu sistema de notas exibia efeito halo, e que cada primeira pergunta avaliada por mim tinha um efeito desproporcional na nota geral. O mecanismo era simples: se eu tivesse dado uma nota alta para a primeira questão, eu proporcionava ao aluno o benefício da dúvida sempre que me deparava com uma afirmação vaga ou ambígua posteriormente. Isso parecia razoável. Certamente um aluno que se saíra tão bem na primeira questão não cometeria um erro tolo na segunda. A falta de coerência me deixou inseguro e frustrado. (KAHNEMAN, 2011, p. 108)

Durante nossas correções, temos nossos impulsos; se um aluno começa errando as primeiras questões, temos a tendência de valorizar mais as últimas e se o mesmo começa acertando, temos um rigor maior pelo que está por vir. Portanto, o ideal é ir corrigindo por questão (ou página), para termos o mesmo critério em cada questão, para todos os alunos.

No capítulo seguinte, *Procedimentos Metodológicos – análise dos dados produzidos*, faremos um relato de como ocorreu a pesquisa e apresentaremos algumas atividades nas quais nosso Sistema 1, o sistema com respostas automáticas e imediatas, mas, muitas vezes, erradas, pode sobrepor nosso Sistema 2, o qual nos faz analisar os dados com organização e clareza, para encontrar a resposta adequada e correta.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS – ANÁLISE DOS DADOS PRODUZIDOS

Neste estudo, de cunho qualitativo, fomos a campo, com atividades relacionadas a certos conteúdos considerados pré-requisitos na Matemática, foco de nossa pesquisa. Mas não objetivamos somente o desenvolvimento do algoritmo, também tentamos entender a compreensão do aluno sobre esses conteúdos, a fim de, futuramente, desenvolvermos atividades em sala de aula que possam diminuir as frequências de erros nessas resoluções, contribuindo ainda mais com nossa pergunta diretriz – *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca por alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*. Observamos se, nesses conteúdos, o aluno consegue ter um pensamento conceitual e não apenas procedimental, utilizando-o apenas como uma ferramenta de resolução.

Segundo Mengali, Nacarato e Passos (2009, p. 32),

> O mundo está cada vez mais matematizado, e o grande desafio que se coloca à escola e aos professores é construir um currículo de matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização matemática.

O público-alvo que colaborou com essa pesquisa foram alunos do Ensino Fundamental da Escola Estadual Mercedes Nery Machado, onde lecionamos para turmas de 6º e 7º Anos. Elaboramos atividades de diferentes formas, de um mesmo conteúdo matemático de cada série do Ensino Fundamental. Algumas foram apresentadas para alunos das séries seguintes, a fim de termos uma compreensão do quanto esses conteúdos fazem sentido para os estudantes, tendo passado algum tempo, desde que os mesmos lhes foram apresentados. Portanto, o conteúdo do 6º ano será aplicado (em parte) ao aluno do 7º ano, o conteúdo do 7º, ao aluno do 8º, e assim sucessivamente.

A análise dos erros não é uma fórmula mágica, mas um caminho para nortear o trabalho do professor e favorecer a aprendizagem dos alunos. Em uma perspectiva de avaliação, como oportunidade de aprendizagem, diferentes instrumentos avaliativos são utilizados para diagnosticar a relação do aluno com os saberes escolares e suas eventuais dificuldades, de modo que ele possa compreender “os seus erros e, em função disso, tornar-se capaz de os ultrapassar” (HADJI, 1994, p. 123).

A análise dos dados coletados tem como finalidade chamar atenção para os conteúdos selecionados e alertar os professores a darem mais ênfase para os mesmos, não importando a série em que os alunos se encontrem. As atividades foram aplicadas a, aproximadamente, duzentos e cinquenta participantes, da E. E. Mercedes Nery Machado, em Juiz de Fora, ao final do ano letivo de 2014, pois, dessa forma, conseguimos abordar uma aprendizagem recente de todo o conteúdo, para estabelecermos as comparações desejadas. Todos os alunos fizeram as atividades no mesmo horário, tendo em torno de uma hora para a realização das mesmas. Contamos com a colaboração de todo corpo docente e da direção da escola para a aplicação dessas atividades envolvendo toda a escola e desenvolvidas ao mesmo tempo.

Os conteúdos escolhidos, por apresentarem erros de diversos alunos, ano após ano, foram:

- 6º Ano – Frações.
- 7º Ano – Equações.
- 8º Ano – Produtos notáveis.
- 9º Ano – Aplicação do método de resolução de uma equação do 2º grau.

> O que se observa, muitas vezes, é a falta de autonomia do aluno diante de uma situação-problema: ele se limita a esperar que a professora diga qual é a operação que deve ser feita ou, então, atira-se a fazer uma série de algoritmos totalmente desvinculados do contexto. (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 89)

Objetivamos investigar em que medida os alunos revelaram autonomia e coerência diante das atividades apresentadas ou iriam limitar-se a abandoná-las, ignorando-as por completo.

Quando classificamos um item como certo, não quisemos dizer que o aluno o acertou por completo, mas, sim, que seu desenvolvimento, ou algoritmo aplicado, estavam corretos, podendo ter acontecido (em raros casos) algum erro de operações ou de sinais, no entanto, o caminho correto para o seu desenvolvimento esteve presente.

O objetivo dessas atividades era destacar em que conteúdos pode ocorrer uma grande quantidade de erros, para, futuramente, podermos desenvolver atividades que aproximem os alunos desses conteúdos.

6.1 Atividades do 6° ano

Todas as questões das atividades do 6º ano foram sobre frações, para analisarmos o conhecimento dos alunos no respectivo tema, interpretando não só a parte operacional, mas também a compreensão que eles têm diante um problema em que pode ocorrer a ilusão cognitiva.

ATIVIDADES AVALIATIVAS - 6º ANO

Nome: Turma:

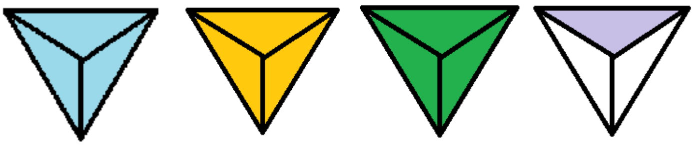
1) Efetue as seguintes operações com frações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{3} - \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{10} : \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{6}$

---

2) Observe as quatro figuras abaixo:



a) A que fração correspondem as partes coloridas em cada figura?

b) Complete a sentença $\frac{10}{3} = - + - + - + -$ com as frações obtidas no item *a*.

c) Quantas unidades inteiras a fração $\frac{3}{3}$ representa?

d) Agora reescreva a sentença e complete-a:

$$\frac{10}{3} = 3 \text{ inteiros} + -$$

---

3) Alexandre ganhou R$ 185,00 do avô. Ele guardou $\frac{4}{5}$ desse dinheiro na poupança e decidiu completar um álbum de figurinhas com o restante. Com a primeira compra, Alexandre conseguiu preencher $\frac{3}{8}$ do álbum. Na segunda compra, preencheu mais $\frac{5}{12}$ do álbum.

a) Quanto Alexandre guardou na poupança?

b) Quanto sobrou para ele colecionar figurinhas?

c) Com as duas compras de figurinhas, que fração do álbum Alexandre preencheu?

d) Se no álbum de Alexandre cabem 240 figurinhas, quantas figurinhas ficaram faltando para ele preencher o álbum?

---

4) Num colégio do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ dos alunos torcem pelo Flamengo e, dos restantes, $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco. O colégio tem 1 275 alunos.

a) Que fração dos alunos torce pelo Vasco?

b) Quantos torcem pelo Flamengo? E pelo Vasco?

c) Quantos são torcedores do Fluminense?

---

5) Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com verduras. Que parte da horta foi plantada com verduras?

---

6) Houve alguma atividade em que encontrou maior dúvida? Qual, ou quais, e por quê?

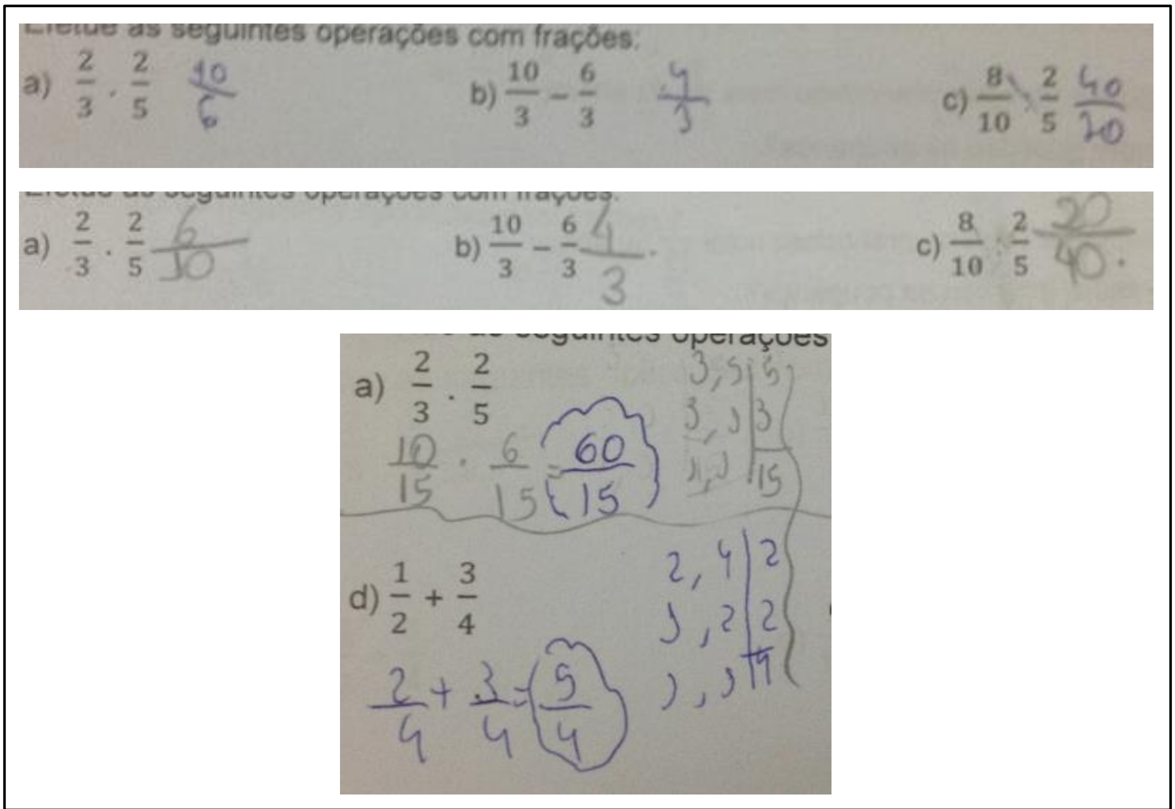
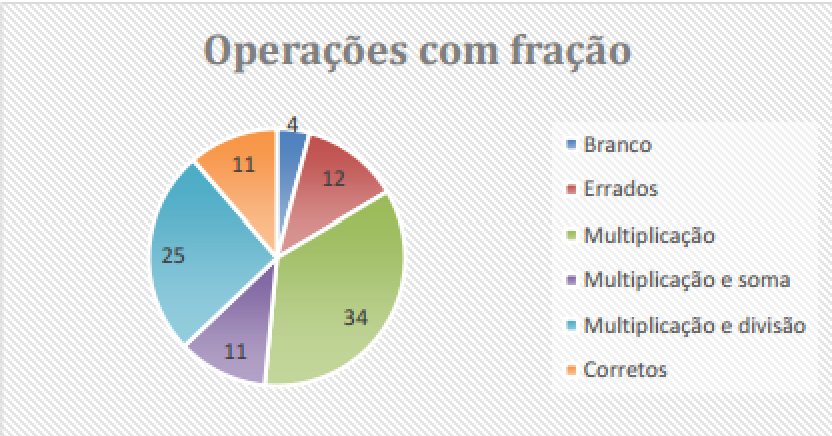


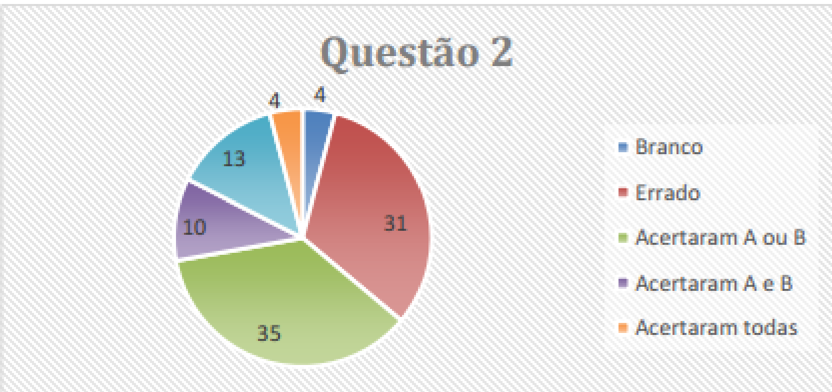
Figura 29: Resposta dos alunos.

Na primeira questão, na qual deveriam ser resolvidas as quatro operações envolvendo frações, dos noventa e sete alunos que fizeram a atividade, quatro deixaram-na em branco; vinte e cinco acertaram as opções de multiplicação e divisão; onze, multiplicação e soma; trinta e quatro, apenas multiplicação; e onze acertaram as quatro operações, sendo que, desse grupo final, apenas quatro acertaram a letra E, que envolvia soma e multiplicação, pois só esses se lembraram de operar a multiplicação antes da soma, enquanto, dos onze que acertaram soma e multiplicação, apenas um aluno conseguiu resolver corretamente esse item.



Análise dos testes dos alunos 1

Na segunda atividade, na qual um item iria completar os demais, tivemos quatro respostas em branco, trinta e uma erradas, trinta e cinco respostas corretas na letra A ou B (sendo que a ideia de uma servia para a outra) e vinte e sete que acertaram A e B (destes, treze acertaram C, com quatro acertando, também, a D).



Análise dos testes dos alunos 2

Como podemos observar, mais da metade da turma conseguiu acertar os itens

A e B, sendo que os mesmos fornecem a ideia de soma, o que foi pouco acertado na primeira questão.

Quanto às questões de 3 a 5, que continham problemas envolvendo frações, dezenove alunos deixaram-nas em branco, trinta e quatro erraram todas e, na letra A, da questão 4, marcaram que o time do Vasco possuía $\frac{2}{3}$ da torcida; vinte e três erraram-nas, sendo que dois tentaram a operação de soma, na questão 5 (o que estaria correto), mas erraram seu algoritmo, novamente somando numeradores e denominadores, e, dos vinte e um alunos que conseguiram acertar a questão de número 3, cinco também disseram que a torcida do Vasco correspondia a $\frac{2}{3}$ dos torcedores. Dois alunos conseguiram acertar a questão 5.

Dessa forma, podemos observar quanta dificuldade há para se interpretar um problema, e, em alguns casos, principalmente na questão 4 (sobre futebol), a ilusão cognitiva se fez muito presente; o Sistema 1 (apressado e intuitivo) falou mais alto, sem que o Sistema 2 (cauteloso) tivesse aparecido, pois os alunos ficaram presos apenas à informação de que $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco, ignorando a informação de que, “do restante”, $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco. O número de erros e dificuldades em interpretação superou em muito a parte prática, o que nos aponta que fazer operações mecânicas e repetitivas não estimula o pensamento e a aprendizagem dos educandos.

Na questão 6, a qual desejava saber a opinião do aluno sobre as dificuldades e dúvidas, as maiores respostas foram “falta de tempo para terminar”, “não sabiam a matéria, porque não sabiam que teria prova”, ou disseram alguma questão em especial, sendo que, no geral, havia outras questões erradas, ou até mesmo em branco (principalmente na parte de problemas), sem que tenham sido citadas nas dúvidas.

6.2 Atividades do 7° ano

Além das atividades sobre equações, para as questões do 7º ano, temos ainda três exercícios que estavam nas atividades do 6º ano, o primeiro envolvendo as operações e dois problemas onde os alunos tiveram problemas com ilusões cognitivas.

ATIVIDADES AVALIATIVAS - 7º ANO

Nome: Turma:

1) Efetue as seguintes operações com frações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{3} - \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{10} : \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{6}$

---

2) Num colégio do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ dos alunos torcem pelo Flamengo e, dos restantes, $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco. O colégio tem 1 275 alunos.

a) Que fração dos alunos torce pelo Vasco?

b) Quantos torcem pelo Flamengo? E pelo Vasco?

c) Quantos são torcedores do Fluminense?

---

3) Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com verduras. Que parte da horta foi plantada com verduras?

---

4) Resolva as seguintes equações:

a) $2x + 5 = 27$ b) $4x - 8 = 2x + 6$

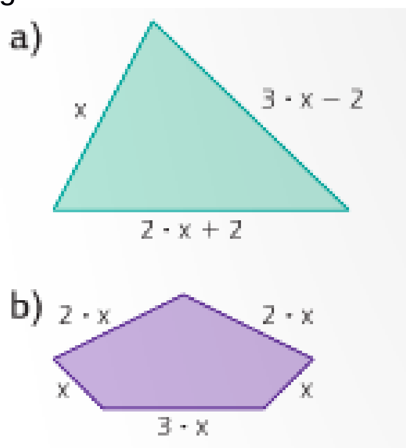
c) $5(x - 2) + 12 = 42$ d) $5x - 3 = 2x - 9$

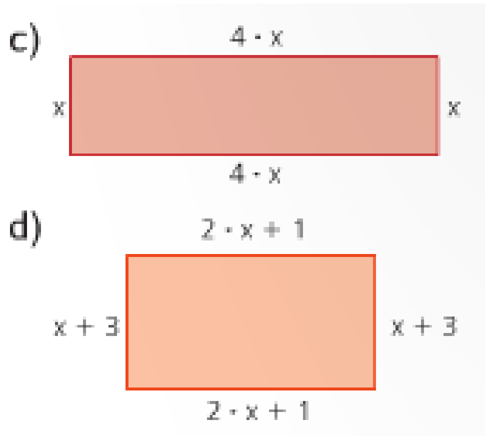
---

5) Pedro e Júlia têm, juntos, 17 reais. Pedro tem 10 reais a mais do que Júlia. Quantos reais tem Júlia?

---

6) Sabendo que perímetro é a soma de todos os lados, calcule o perímetro de cada figura.





---

7) Reduza os termos semelhantes:

2(x – 5) + 3x – 18 + 8

8) O que você está encontrando, quando resolve uma equação?

9) Houve alguma atividade em que encontrou maior dificuldade? Qual, ou quais, e por quê?

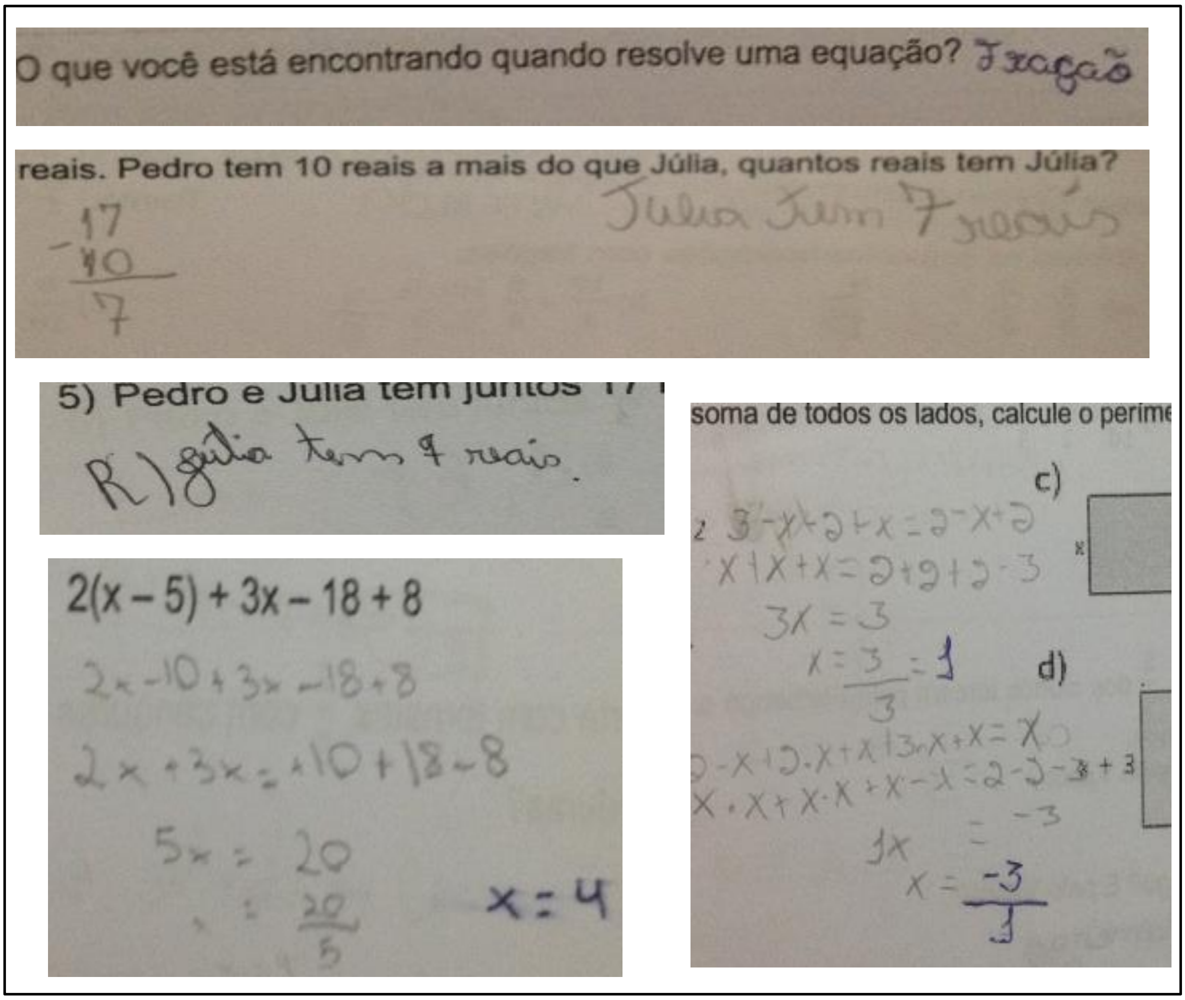
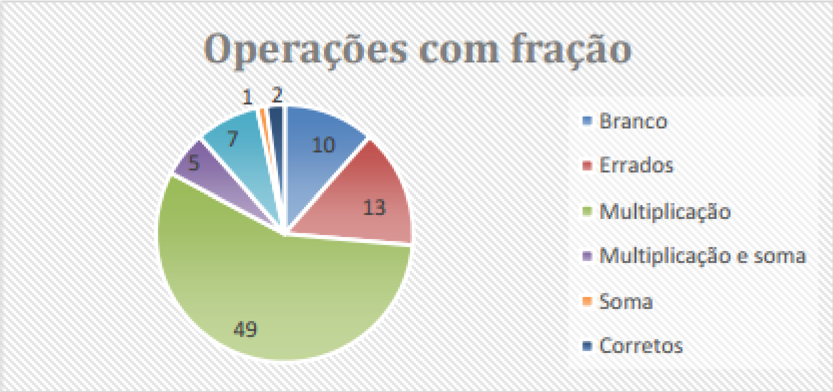


Figura 30: Resposta dos alunos.

As mesmas operações com frações, presentes nas atividades de 6º ano, também fizeram parte das questões do 7° ano.

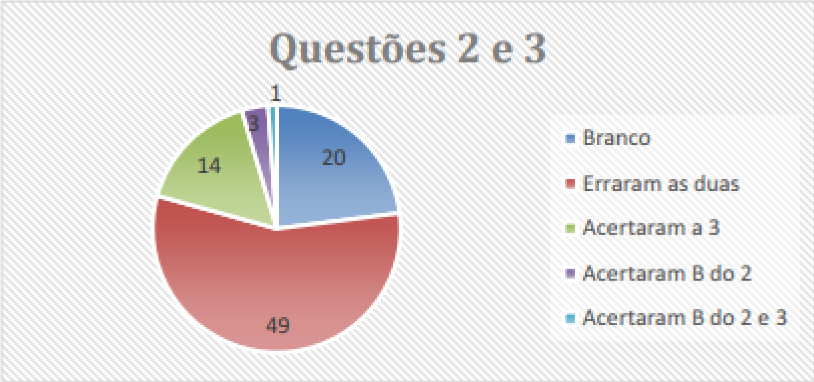
Dos oitenta e sete alunos que participaram das atividades, dez deixaram-nas em branco, dezessete erraram todas (sendo que, na soma, três somaram os numeradores e os denominadores, encontrando, assim, $\frac{4}{6}$ como resposta da letra D do número 1); quarenta e nove acertaram somente a multiplicação (com quarenta encontrando os mesmos $\frac{4}{6}$ para a D do número 1); cinco acertaram multiplicação e soma; sete, multiplicação e divisão (dois também encontraram $\frac{4}{6}$); um, somente a soma; e dois alunos acertaram todas as operações, incluindo a letra E, que misturava duas operações.



Análise dos testes dos alunos 3

Erros análogos aos alunos do 6° ano se repetiram com os do 7°, nas questões de números 2 e 3 com problemas envolvendo equações (que estavam nas atividades do 6° ano). Vinte alunos deixaram-nas em branco; quarenta e nove erraram as duas, sendo que doze, dos quarenta e nove, tentaram somar as frações na questão 3 (errando o processo da soma), mas só dois completaram o inteiro, para dar a resposta, sendo que os mesmos já haviam errado na soma; sete dos que erraram as duas multiplicaram as frações na questão 3; quatorze acertaram a 3; quatro acertaram a B do número 2, com um deles acertando, ainda, o número 3.

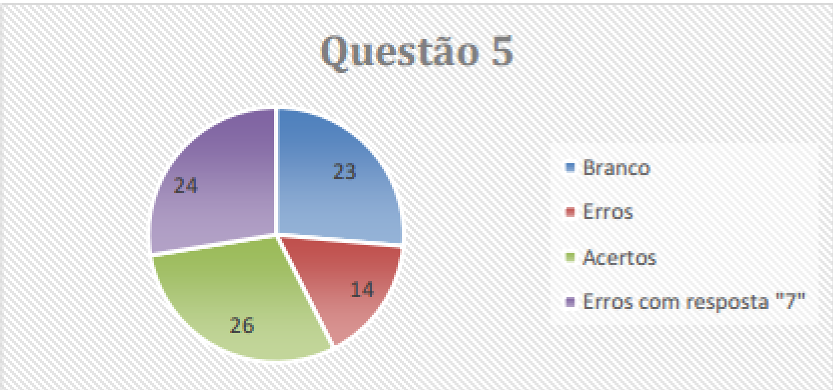
Dos sessenta e sete alunos que responderam às questões, trinta e três marcaram $\frac{2}{3}$ para a fração correspondente ao Vasco. Assim como ocorreu com o 6° ano, o Sistema 1, mais uma vez, fez-se presente. A questão 3 confirmou o grande problema em interpretação de problemas, na qual os alunos tentaram somar ou multiplicar a quantidade de tomate com cenoura, achando que seu resultado seria a quantidade de verdura.



Análise dos testes dos alunos 4

Na parte de equações, conforme comentado inicialmente, foi levado em conta se o aluno acertou, ou não, a estruturação e a organização, sendo que, em alguns casos, houve erros de soma e de divisão, sem que tenham sido classificados como erros, já que o aluno demonstrou conhecimento em resolver a equação.

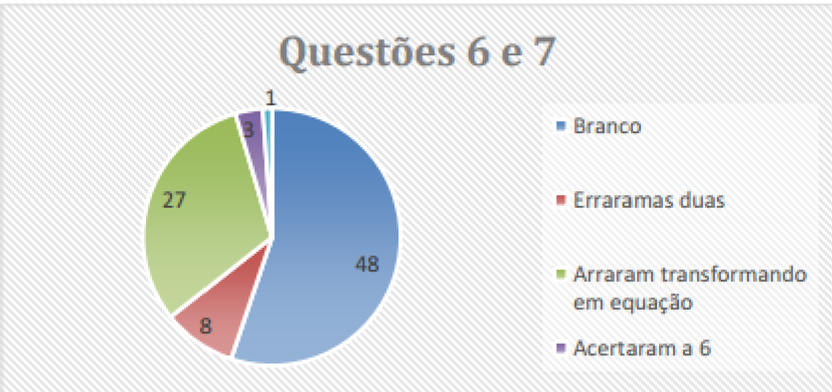
Análise dos testes dos alunos 5



Análise dos testes dos alunos 6

Como podemos observar, a interpretação para resolver problema não ocorre apenas com as frações, em equação o problema continua, sendo que diferente das frações – o índice de acertos para as operações diretas é maior do que nas operações com frações. Como podemos observar na questão 5, o Sistema 1, mais uma vez, sobrepôs-se ao Sistema 2 em alguns casos; mesmo sendo uma questão que poderia ser efetuada de forma interpretativa (sem a necessidade de montar uma equação), o número de erros por ilusão cognitiva foi quase o mesmo que o número de acertos, vinte e quatro a vinte e seis, respectivamente.

Em expressões, apesar de, em muitos livros didáticos, elas virem a ser estudadas antes das equações, parece que os alunos esquecem-nas por completo, já que quarenta e oito deixaram as questões 6 e 7 em branco; trinta e cinco erraram as duas, sendo que, destes, dez não fizeram a 6 (embora o enunciado explicasse a questão); vinte e sete transformaram as expressões em equações, encontrando, assim, um resultado (inexistente) para as letras; e apenas quatro alunos acertaram a questão 6, com um deles acertando, ainda, a 7.



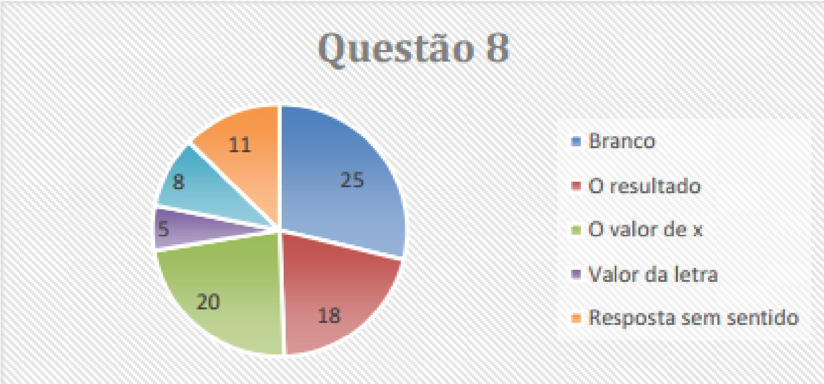
Análise dos testes dos alunos 7

A questão 8, que era para os alunos dizerem o que estavam encontrando, quando resolviam uma equação, obteve os seguintes resultados:

- Vinte e cinco deixaram-na em branco (ou escreveram que não sabiam);
- Dezoito deram como resposta “o resultado”;
- Vinte, “o valor de x”;
- Cinco, “o valor da letra”;
- Oito, “valor da incógnita;
- Onze respostas foram sem sentido: “fração”, “o número da divisão”, “3”,

“sinais diferentes”, “contas irredutíveis”, entre outros.

Uma resposta bastante interessante foi: “Quando resolvo uma equação, tenho o objetivo de encontrar um número representado por letras”.



Análise dos testes dos alunos 8

Diferente dos alunos do 6° ano, os do 7° não colocaram a culpa no tempo, na última questão (de número 9), e nem argumentaram que não tiveram tempo para estudar, entendendo que o objetivo da atividade era diagnosticar, e não avaliar. Quase todos enumeraram as que tiveram dúvidas, deixando, ainda, questões em branco, sem que tivessem entrado na lista de dúvidas; alguns disseram que não sabiam a matéria, que tinham dificuldades em frações ou equações, ou que não entenderam algum enunciado, principalmente nas questões de números 2 e 6.

Assim como o 6º ano, o 7º também teve grande dificuldade em interpretar os problemas, tanto os que envolviam frações quanto os de equações; a ilusão cognitiva ainda se fez presente na letra “A” da questão 2 e na questão 5, na qual a resposta espontânea de que Júlia possuía 7 reais era, como disse Kahneman, em seu exemplo, atraente e errada.

A quantidade expressiva de erros ocorridos em expressões algébricas foi o fato de os alunos as transformarem em equações, tentando encontrar um valor para as incógnitas. Existe, ainda, a grande dificuldade em se fazer a leitura dos enunciados (talvez pelo excesso de exercícios automáticos e repetitivos), pois o enunciado da questão 6, intencionalmente, explica o que deve ser feito para desenvolvê-la, mas, mesmo assim, o número de erros e ausência de resposta foi enorme.

6.3 Atividades do 8° ano

Produtos notáveis foi o tema escolhido para o 8º ano, por ocorrerem erros com alunos de qualquer grau de ensino, nesse conteúdo. As mesmas três questões do 6º ano, que estavam presentes nas atividades do 7º ano, permaneceram para as atividades do 8º ano. Queremos ver se, conforme os alunos vão ficando mais velhos e adquirindo maior maturidade para discernir os problemas, os erros dos anos anteriores são superados.

ATIVIDADES AVALIATIVAS - 8º ANO

Nome: Turma:

1) Efetue as seguintes operações com frações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{3} - \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{10} : \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{6}$

---

2) Num colégio do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ dos alunos torcem pelo Flamengo e, dos restantes, $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco. O colégio tem 1 275 alunos.

a) Que fração dos alunos torce pelo Vasco?

b) Quantos torcem pelo Flamengo? E pelo Vasco?

c) Quantos são torcedores do Fluminense?

---

3) Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com verduras. Que parte da horta foi plantada com verduras?

---

4) Resolva as seguintes equações:

a) $2x + 5 = 27$ b) $4x - 8 = 2x + 6$

c) $5(x - 2) + 12 = 42$ d) $5x - 3 = 2x - 9$

---

5) Resolva os produtos notáveis a seguir:

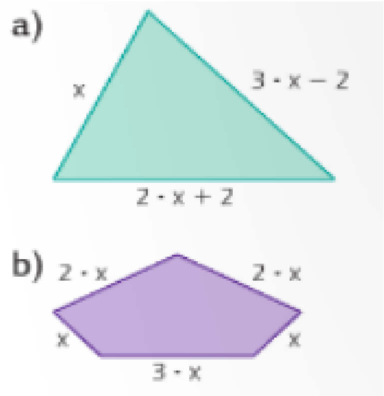
a) $(x + 3)^2$ b) $(x - 5)^2$

c) $(3x - 6)^2$ d) $(x + 3)(x + 5)$

---

6) Pedro e Júlia têm, juntos, 17 reais. Pedro tem 10 reais a mais do que Júlia. Quantos reais tem Júlia?

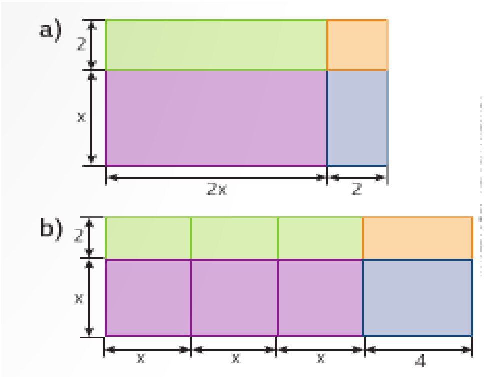
7) Sabendo que perímetro é a soma de todos os lados, calcule o perímetro de cada figura.



8) Reduza os termos semelhantes:

$$2(x - 5) + 3x - 18 + 8$$

9) Calcule a área de cada pedacinho que forma a figura:



10) Indique a área do que se pede:

Um quadrado de lado x + 5

Um retângulo de lados 2 + x e 2x + 2

11) Teve alguma atividade que encontrou maior dificuldade? Qual ou quais e porquê?

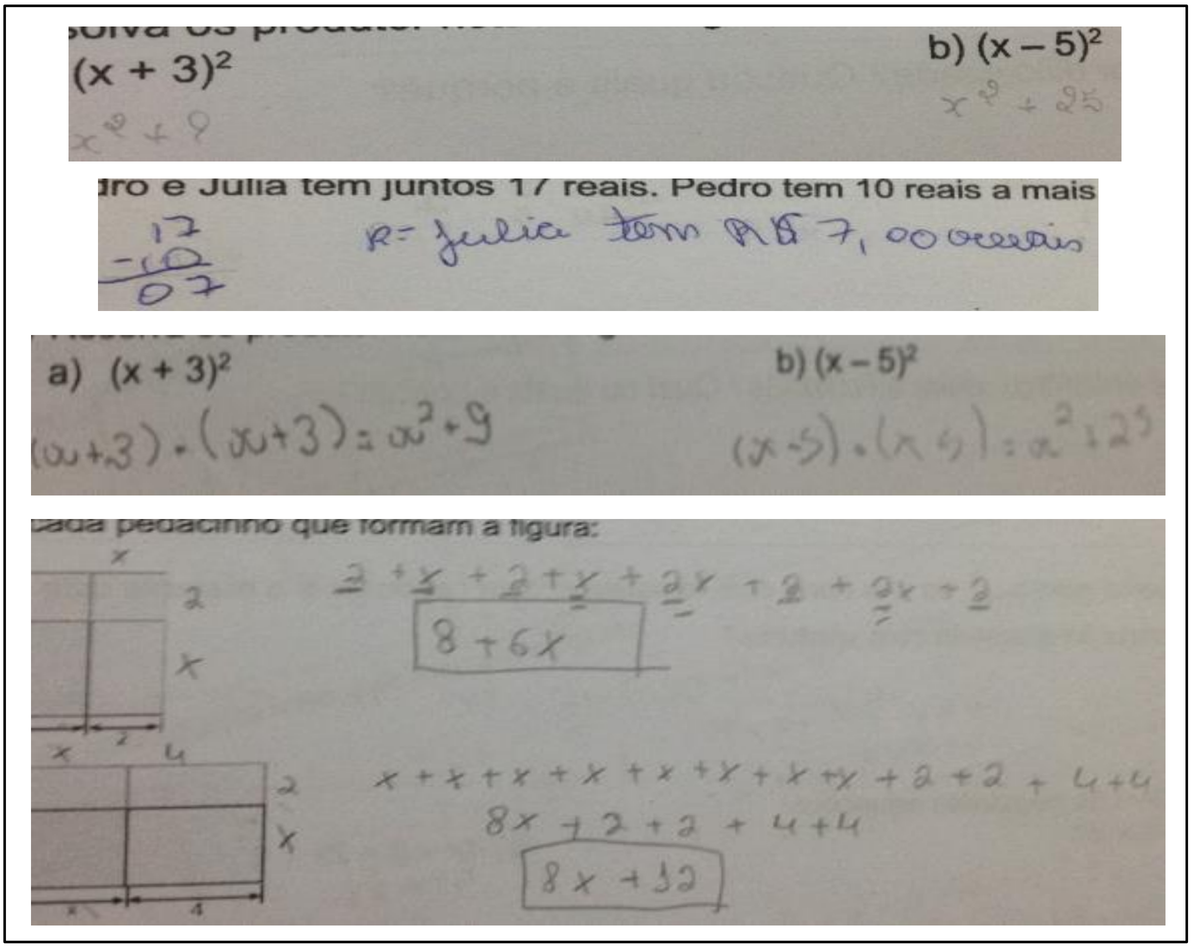
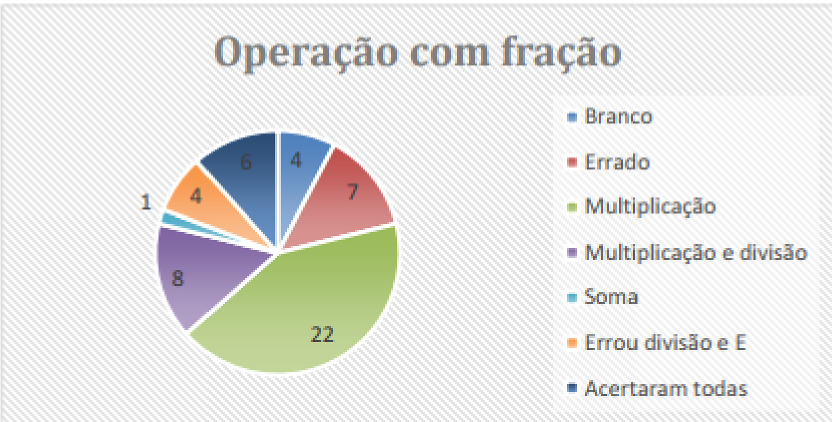


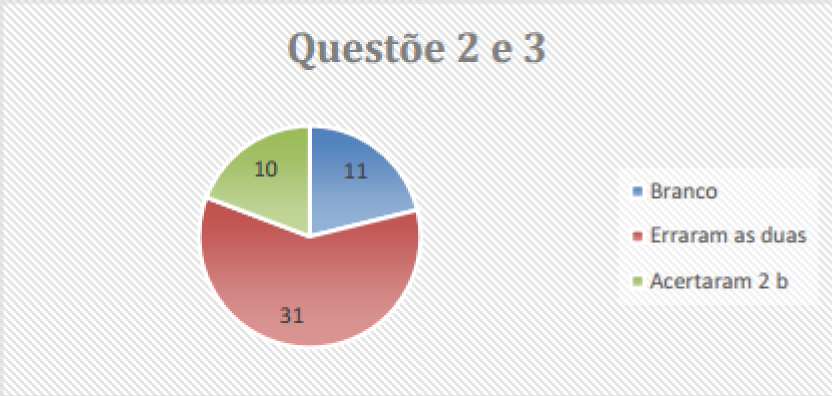
Figura 31: Resposta dos alunos

Com as operações com frações, temos o seguinte gráfico dos cinquenta e dois alunos:



Análise dos testes dos alunos 9

Com os problemas, ocorreu o mesmo das séries anteriores:

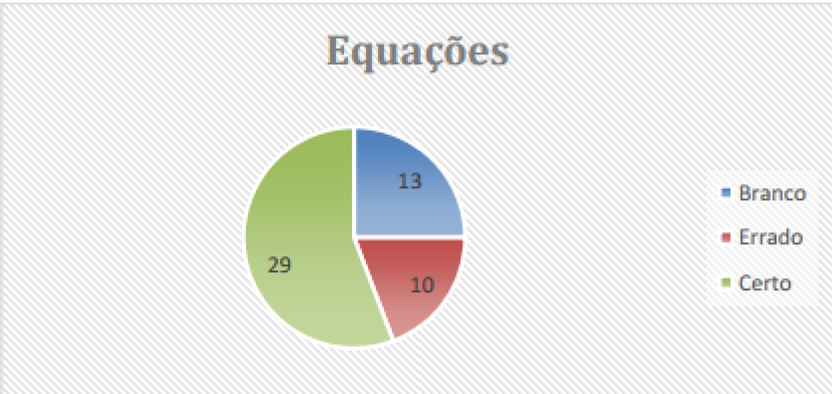


Análise dos testes dos alunos 10

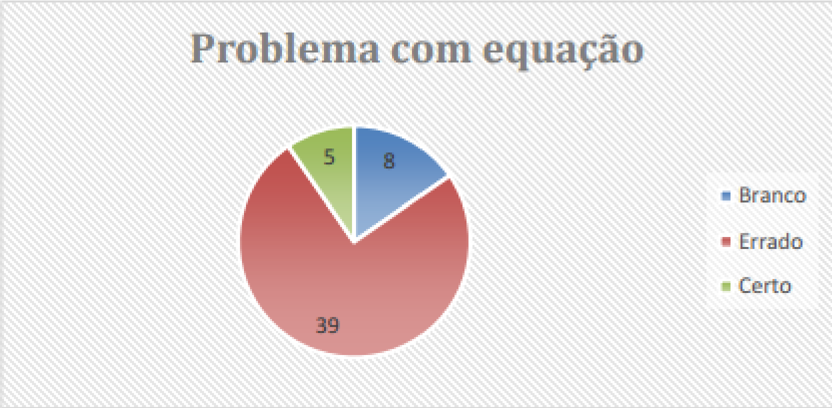
Dos cinquenta e dois alunos, dezenove tentaram efetuar a soma das frações na questão 3. Todos erraram o processo e apenas dois deles tentaram completar o inteiro, para achar a fração que correspondesse às verduras – apesar de terem errado a soma, os mesmos demonstraram compreensão da atividade.

Novamente, o Sistema 1 foi predominante na questão 2, sobre os times de futebol, pois foi o recurso de vinte e dois alunos, que disseram (novamente) ser o Vasco a preferência de $\frac{2}{3}$ dos torcedores.

Em equação, temos a volta do problema de interpretação; enquanto os alunos do 8° se saíram muito melhores que os do 7°, na parte de resolução, na interpretação houve ainda mais confusão.



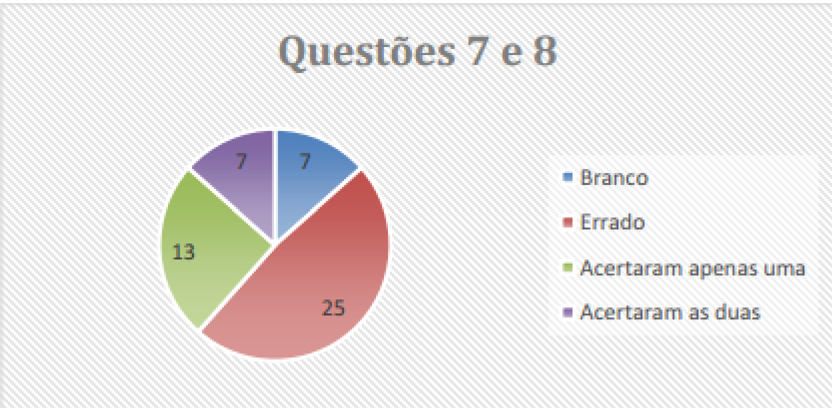
Análise dos testes dos alunos 11



Análise dos testes dos alunos 12

Nesse caso, dos trinta e nove alunos que erraram a questão 6 (um problema que envolvia equação), trinta e quatro acreditaram que Júlia possuía 7 reais, a resposta pronta e imediata que nos vem à cabeça (Sistema 1), como relatado por Kahneman, mas, consequentemente, errada.

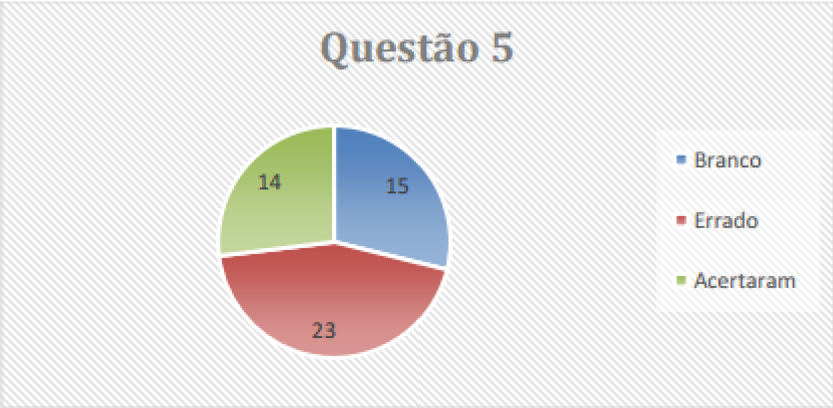
O 8º ano é uma série na qual as expressões são bastante estudadas e, como essas atividades foram aplicadas ao final do ano letivo, as questões 7 e 8, que continham tal conteúdo, não deveriam trazer problemas para os estudantes, correto? Não foi o que ocorreu, pois os mesmos conseguiram se sair melhores nas equações do que em expressões, ainda que o enunciado da questão 7, que pedia o perímetro, explicasse sua definição.



Análise dos testes dos alunos 13

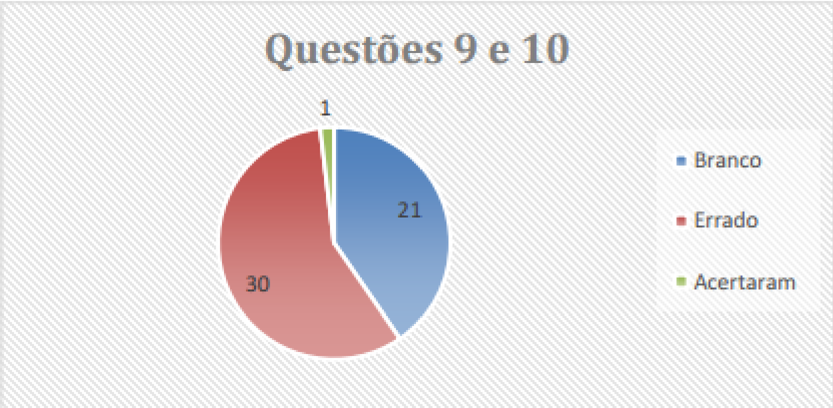
O equívoco entre expressão e equação ainda é forte por parte dos alunos, uma vez que, dos vinte e cinco que erraram as duas questões, onze transformaram as atividades em equações, tentando encontrar um valor para as letras.

Resolver uma multiplicação entre polinômios ou, no nosso caso, um produto notável, multiplicação importante em Matemática para os anos mais avançados, gerou diversas dificuldades para os alunos do 8°, quando a matéria é lecionada, obtendo, assim, os seguintes resultados:



Análise dos testes dos alunos 14

Com as questões 9 e 10, envolvendo o cálculo de áreas com polinômios, tivemos vinte e uma questões em branco, trinta erradas e apenas um aluno tendo acertado. Dos trinta alunos que erraram, onze calcularam o perímetro em alguma, ou ambas as questões, e doze desenharam o quadrado e o retângulo na questão 10, o que facilitaria a visualização, para o seu desenvolvimento.



Análise dos testes dos alunos 15

Muitos alunos, ao responderem sobre as dificuldades, enumeraram as questões que não fizeram ou em que tiveram dificuldades, ou responderam que as dificuldades existiam por já haver muito tempo que estudaram o conteúdo.

- “Todas, porque são coisas que aprendemos a tempos e esquecemos, pois você não vai exercitado ai acaba ficando esquecido”;

- “As de fração pois aprendi a muito tempo e no 8° ano não usei hora nenhuma fração por isso não lembro. Área também (questão 9)”;

- “Sim, todas devido já ter passado por algumas atividades no ano anterior não me lembro”;

- “Sim. As que estão em branco, porque não estou lembrando como se faz as contas. Me desculpe”;

- “Sim, porque tem muito tempo que eu aprendi e agora não lembro mais”.

6.4 Atividades do 9° ano

Com o 9º ano mantivemos as mesmas questões dos anos anteriores e acrescentamos desenvolvimentos de equações do 2º grau, visando a entender se o aluno sabe o que está fazendo, ao resolver uma equação do 2º grau.

ATIVIDADES AVALIATIVAS - 9º ANO

Nome: Turma:

1) Efetue as seguintes operações com frações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{3} - \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{10} : \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{6}$

---

2) Num colégio do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ dos alunos torcem pelo Flamengo e, dos restantes, $\frac{2}{3}$ torcem pelo Vasco. O colégio tem 1 275 alunos.

a) Que fração dos alunos torce pelo Vasco?

b) Quantos torcem pelo Flamengo? E pelo Vasco?

c) Quantos são torcedores do Fluminense?

---

3) Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com verduras. Que parte da horta foi plantada com verduras?

4) Resolva as seguintes equações:

a) $2x + 5 = 27$

b) $4x - 8 = 2x + 6$

c) $5(x - 2) + 12 = 42$

d) $5x - 3 = 2x - 9$

5) Resolva os produtos notáveis a seguir:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x - 5)^2$

c) $(3x - 6)^2$

d) $(x + 3)\,(x + 5)$

6) Pedro e Júlia têm, juntos, 17 reais. Pedro tem 10 reais a mais do que Júlia. Quantos reais tem Júlia?

7) Sabendo que perímetro é a soma de todos os lados, calcule o perímetro de cada figura.

8) Reduza os termos semelhantes:

$$2(x - 5) + 3x - 18 + 8$$

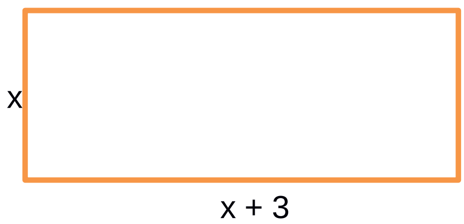
9) Calcule a área de cada pedacinho que forma a figura:

10) Indique a área do que se pede:

a) Um quadrado de lado $x + 5$

b) Um retângulo de lados $2 + x$ e $2x + 2$

11) Encontre as medidas dos lados do retângulo:



12) Resolva as seguintes equações do 2º grau:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 10x + 16 = 0$

c) $(x + 3)\,(x + 5) = 3$

13) O que você está encontrando, quando resolve uma equação do 2º grau?

14) Houve alguma atividade em que encontrou maior dificuldade? Qual, ou quais, e por quê?

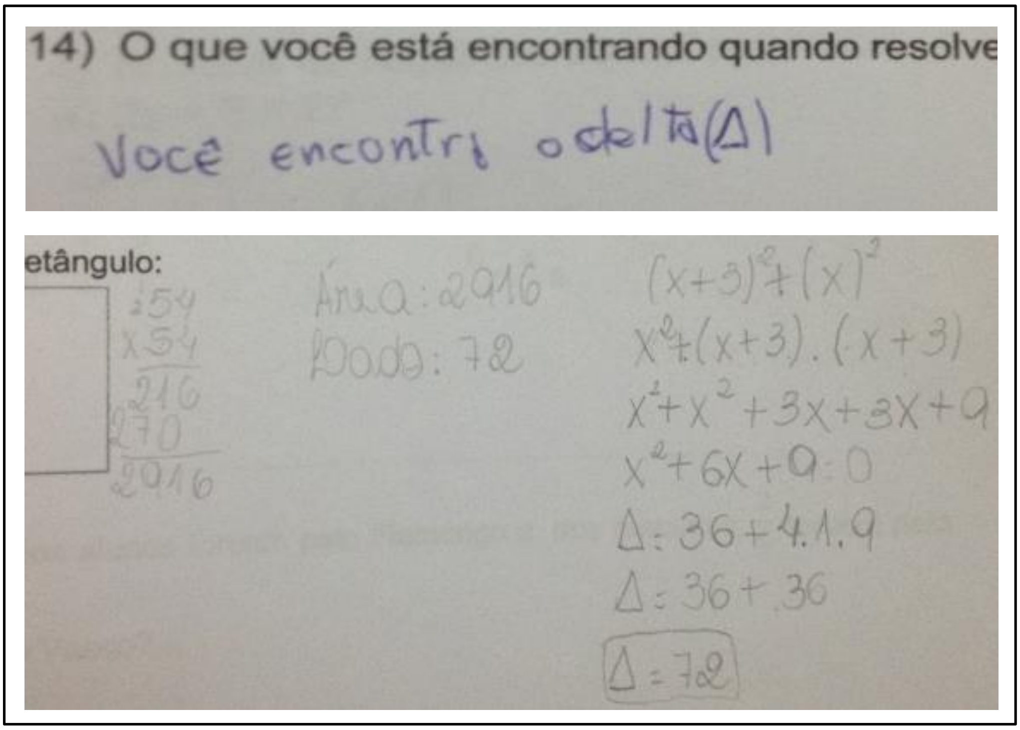
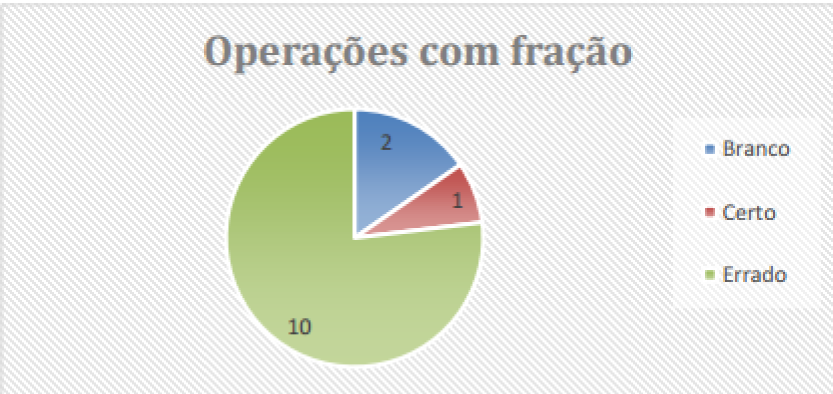


Figura 32: Resposta dos alunos: equação do 2º grau.

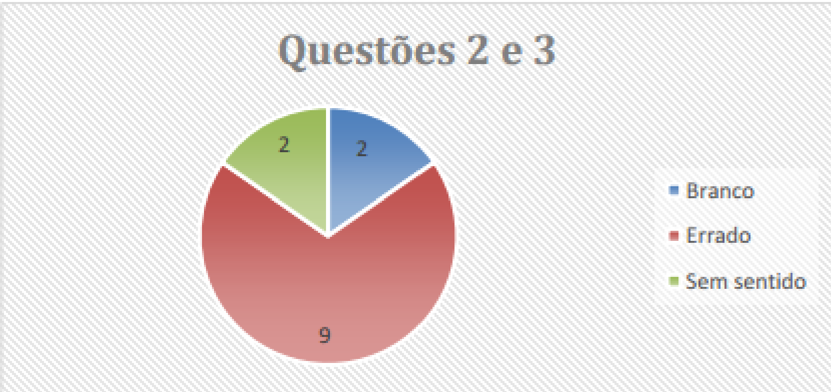
A turma de 9º ano continha somente treze alunos presentes no dia da avaliação, mas, ainda assim, mostrou-nos muitos pontos interessantes, que devem ser analisados. Na parte de operações envolvendo frações, encontramos os seguintes fatos:



Análise dos testes dos alunos 16

Em multiplicação de frações, ainda encontramos multiplicações cruzadas (forma de efetuar a divisão), só que ainda inverteram as posições entre numerador e denominador.

Na parte de problemas com fração, ninguém conseguiu compreender o enunciado, sendo que foi quase unanimidade a operação de multiplicação realizada na questão 3, que deveria ser feita através de uma soma ou, até mesmo, uma subtração, e a resposta para a letra A da questão número 2 foi $\frac{2}{3}$, novamente demonstrando ilusão cognitiva (Sistema 1) pela turma, mesmo tendo uma maturidade cognitiva mais avançada.



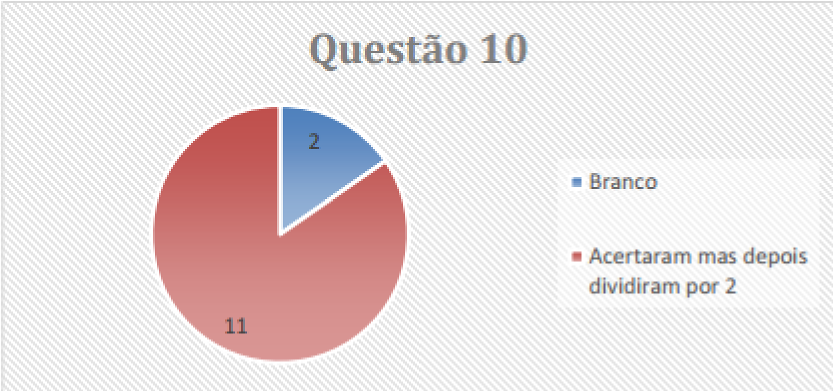
Análise dos testes dos alunos 17

Em resoluções de equação do 1° grau, a turma inteira soube desenvolver as atividades, mas, no momento de efetuar um problema, conforme ocorrido com as frações, ninguém conseguiu encontrar o resultado esperado, gerando dez questões erradas e três com respostas sem sentido, e, assim como na questão de futebol em fração, os alunos foram induzidos a uma resposta mecânica, que se encontrava no enunciado, e a paciência de usar o Sistema 2, para verificar a veracidade da resposta, não esteve presente.

Em expressões algébricas, nove alunos transformaram-nas em equação e acabaram achando um valor para a incógnita; houve duas respostas em branco e duas erradas.

O conteúdo de Produtos Notáveis foi muito bem desenvolvido por toda a turma, mas três alunos, após desenvolverem as expressões, assim como nas atividades anteriores, igualaram as expressões a 0, a fim de obterem algum valor para a incógnita.

Enquanto em área, com a figura desenhada, todos os alunos tiveram facilidade, quando foi pedido para calculá-la, dando apenas as expressões, nenhum aluno esboçou as figuras e todos dividiram as expressões por algum número inteiro, ainda confundindo-as com a ideia de equação (ao dividirmos todos os elementos de uma equação, o valor da raiz se mantém o mesmo).



Análise dos testes dos alunos 18

Em resolução de equações do 2° grau, novamente a parte procedimental foi compreendida e desenvolvida pelos estudantes; já quando foi dada uma área e pedido para se calcular o seu lado, na questão 11, somente um aluno conseguiu finalizá-la, sendo que o restante da turma encontrou apenas o valor do delta, tendo ignorado o valor da área que foi dado (54) e igualando a equação a 0.

Quando se perguntou o que eles encontravam, ao efetuar uma equação do 2° grau, dois alunos disseram que encontravam as raízes, e os outros onze responderam que era o delta. Finalizando, todos atribuíram suas maiores dificuldades a não saber a matéria, ou não se lembrar do conteúdo, mas nenhum especificou alguma questão ou dificuldade encontrada.

Vimos, com essas atividades do 6º ao 9º ano, o quanto esses conteúdos estão acompanhados de muita dificuldade e, consequentemente, erros por parte de nossos alunos, e que, mesmo os alunos das séries mais avançadas, como os do 8º e 9º anos, carregam as mesmas dificuldades que os alunos do 6º e 7º anos.

Conforme relatado por Kahneman (2011) – o que pudemos comprovar –, estamos sujeitos às ilusões cognitivas fornecidas por nosso Sistema 1 e devemos ter cuidado com as respostas espontâneas e imediatas sugeridas por ele. Como nos informou Kahneman (2011), esse sistema não pode ser desligado e o melhor que podemos fazer é aprender a reconhecer os momentos em que as ilusões podem ocorrer.

Vimos como os alunos estão, em certos momentos, presos ao processual, e operando de forma direta (Sistema 1) com os números apresentados nos enunciados dos problemas, sem uma real interpretação e reflexão do que esses números estão representando. Até atividades operacionais os alunos fizeram automaticamente (Sistema 1) e, como pudemos comprovar, erraram os algoritmos de resolução.

No próximo e último capítulo, *Considerações Finais*, apresentamos as reflexões finais deste trabalho, o que ainda pode ser feito e indicamos o livro didático que acreditamos ter as abordagens mais adequadas dos conteúdos matemáticos discutidos em nossas análises.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos alunos veem a Matemática como uma disciplina difícil, com desafios além de suas capacidades, alcançada apenas por “iluminados”. Reconhecemos que o raciocínio, em qualquer área do conhecimento, envolve atenção e motivação. Por isso, para responder à nossa pergunta diretriz, *Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca por alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*, escolhemos estudar os erros cometidos pelos estudantes, investigando se há um motivo para tais ocorrências e de que forma a correção dos docentes influi no rendimento dos estudantes, nessa disciplina.

Acreditamos ter alcançado o objetivo de abrir um campo de discussão e reflexão para os professores, podendo levar os mesmos a pensarem sobre os erros dos alunos, em busca de estratégias que diminuam a ocorrência desses equívocos, além de fazer uma autocrítica sobre sua postura, como docente.

Uma direção para este trabalho foi a análise da forma como determinados conteúdos são abordados em alguns livros didáticos mais adotados na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais. Foram analisadas quatro obras: Castrucci e Giovanni Jr. (2009), Dante (2012), Dolce, Iezzi e Machado (2009) e Imenes e Lellis (2011), do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental II. Essa outra vertente foi seguida, em nossa pesquisa, por entendermos que conteúdos mal esclarecidos, ou ensinados por uma via mais complicada (às vezes até equivocada), também podem levar o discente ao erro.

Nos livros didáticos do 6º ano, analisamos o conteúdo de fração e, de acordo com nosso ponto de vista, a obra que o abordou de modo mais claro para o aluno foi a de Castrucci e Giovanni Jr (2009), devido às suas boas apresentações e exercícios variados.

No 7º ano, a obra que abordou o conteúdo sobre equação de forma mais satisfatória foi a de Imenes e Lellis (2011), por trazer diferentes formas de apresentação, além de estar clara sua exposição e seu grau de dificuldade aumentar aos poucos; o conteúdo vem acompanhado de excelentes exercícios e problemas.

Já no 8º ano, Imenes e Lellis (2011) atingiram melhor a transmissão de produtos notáveis, porque, além de demonstrarem-nos utilizando apenas números, os autores não citam a regra, para seu desenvolvimento, ficando para o aluno chegar à sua conclusão, através de um exercício.

Por fim, ao analisarmos as obras de 9º ano, especificamente o conteúdo de resolução de equações do 2º grau, novamente preferimos o livro de Imenes e Lellis (2011), por ter mais cuidado ao inserir o conteúdo, trabalhando de forma simples e sem a pressão de “jogar” a fórmula direta para o aluno, além de os exercícios serem bastante diversificados.

A metodologia seguida neste estudo foi de cunho qualitativa e aplicamos testes a alunos da Escola Estadual Mercedes Nery Machado – localizada em Juiz de Fora (MG) –, ao final de 2014, a fim de analisarmos os diferentes erros ocorridos nos conteúdos por nós selecionados.

Após todas as observações, constatamos que a correção de alguns docentes segue a direção de que o certo e o errado encontram-se apenas na resposta final, dessa forma, o desenvolvimento do aluno passa despercebido por sua correção.

Em muitos casos, o aluno erra por alguma falta de atenção em seu desenvolvimento, um detalhe, mas tem vista como errada toda a sua questão.

Foi apresentado o quanto estamos condicionados a dar respostas intuitivas e que sofremos de ilusões cognitivas, as quais não poderão ser sanadas; o que podemos fazer é aprender quando elas estarão presentes, a fim de saber qual procedimento tomar, para não cairmos na tentação de dar outra resposta, que reconheceremos, mais tarde, estar errada.

A exposição das ilusões cognitivas abre uma nova janela para pesquisas em análises de erros, uma vertente pouco ou ainda não explorada em cima desse tema. Dessa forma, vemos mais um ponto positivo neste trabalho e o quanto ele pode ser importante para a Educação Matemática.

Ao lerem esta pesquisa, muitos professores podem se identificar com o que ocorre em suas próprias salas de aula, com isso, crescerá o número de pesquisas e discussões acerca desse tema, um benefício para professores e alunos, já que ferramentas serão encontradas para uma melhor compreensão e melhor desempenho de nossos estudantes, diminuindo a quantidade de erros cometidos por eles.

Com este trabalho, apresentamos uma diferente metodologia, sem cogitar que ela seja superior a alguma outra, ou que seja a solução da aprendizagem plena.

A análise de Erros não é a única forma de se trabalhar em sala de aula, mas nos ajuda, como educadores, a conhecer mais de perto a realidade de cada aluno.

Esperamos que mais e mais pesquisas sobre esse tema possam surgir, para que tenhamos outras análises e conclusões, ou, quem sabe, continuemos nossos estudos, a fim de alcançarmos conclusões mais precisas.

Para futuras pesquisas em torno deste trabalho, fazemos as seguintes recomendações:

─ Um banco de questões esclarecedoras a ser trabalhado em torno dos temas abordados nesta pesquisa, ou mesmo outras, que venham acompanhadas de erros frequentes, para continuar a procura por atividades que auxiliem os professores a conseguirem reduzir o número de erros de nossos estudantes.

─ Uma investigação dos mesmos erros aqui apresentados, mas em outros níveis de ensino, como Ensino Médio, Superior, EJA (Educação Jovens e Adultos), para citar alguns, vendo se os mesmos erros ocorridos no Ensino Fundamental II também ocorrem nesses níveis.

─ Apresentação de outros erros cometidos com frequência por nossos estudantes, aumentando a discussão e a busca por melhores abordagens nos conteúdos em que ocorrem esses erros.

─ Um levantamento sobre outras possíveis causas dos erros, além dos mostrados aqui, neste trabalho, abrindo ainda mais o campo de discussão, em busca de facilitar a compreensão dos alunos.

─ Agrupamento dos principais trabalhos que tenham o erro como foco, a fim de nortear e dar alternativas a professores que pretendam trabalhar com o tema, em sua metodologia.

─ Investigação da linha pedagógica dos cursos de formação de professores, verificando se o erro é foco de estudo dos futuros docentes ou se ele é tratado de maneira negativa.

─ Pesquisar e desenvolver atividades que exploram as ilusões visuais e cognitivas, ramo esse pouco ou não abordado ainda em Análise de Erros.

REFERÊNCIAS

ANGELO, C. L. *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:* 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. 280 p.

AZEVEDO, D. S. *Análise de Erros Matemáticos:* Interpretação das respostas dos alunos. 2009. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009.

BARBOSA, G. S. *O Teorema Fundamental da Aritmética:* jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental. 2008. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).* Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BERTONI, N. *O erro como estratégia didática*. Campinas: Papirus, 2000.

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. N.; COCKING, R. R. *Como as pessoas aprendem:* cérebro, mente, experiência e escola. São Paulo: SENAC São Paulo, 2007. 381 p.

CURY, Helena Noronha. Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral: análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática. Relatório de pesquisa, 1990.

_____. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 112 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

DANTE. L. R. *Projeto Teláris:* Matemática. São Paulo: Ática, 2012.

DE LA TORRE, S. et allii. *Errores Y Currículo – Tratamiento Didáctico De Los Errores Em La Ensenãnza.* Barcelona: Ppu, 1994.

FIORENTINI, D. *Erros e acertos no ensino-aprendizagem da matemática*: problematizando uma tradição cutural. In: Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo. *Anais*...Universidade de Passo Fundo, 2006.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia:* Saberes Necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI Jr., J. R. CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática.* São Paulo: FTD, 2009. (Coleção A conquista da matemática).

HADJI, C. *A avaliação, regras do jogo:* das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto, 1994.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 6° ed. São Paulo: Atual, 2009.

IMENES, L. M. LELLIS, M. *Matemática:* Imenes & Lellis. 2° ed. São Paulo: Moderna, 2012.

KAHNEMAN, D. *Rápido e Devagar*: duas formas de pensar. Rio de Janeiro: Objetiva, 2011. 610 p.

KISTEMANN Jr. M. A.*O Erro e a Tarefa Avaliativa em Matemática:* uma Abordagem Qualitativa. 2004. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2004.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem:* componente do ato pedagógico. São Paulo: Cortez, 2011. 448 p.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática*. Tese de Livre Docência. São Paulo: Fac. de Educação – Usp, 1999.

MIRANDA, W. S. *Erros e Obstáculos:* Os conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação. 2007. 122f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – Universidade Federal do Pará, Belém. 2007.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. 2° ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

NACARATO, B. L. S.; MENGALI, A. M.; PASSOS, C. L. B. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:* tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: autêntica, 2009. 159 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PASSOS, A. Q. *O estudo do erro/erros em pesquisas em Educação Matemática e áreas afins*. In: EPREM – ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2014. Campo Mourão. *Anais*...Universidade Estadual de Londrina, 2014.

PERRENOUD, Filhippe. *Avaliação de Excelência à Regulação das Aprendizagens entre duas Duas Lógicas.* Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

PIAGET, J. *Lógica e Conhecimento*. Porto: Liv. Civilização Ed. 1975.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* 2° ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 160 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

POPPER, K. *Conhecimento Objetivo:* uma abordagem evolucionária. Belo Horizonte: Itatiaia, 1975.

,