Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Carlos Valério

Introdução à Geometria Hiperbólica

Juiz de Fora

2017

José Carlos Valério

Introdução à Geometria Hiperbólica

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Nelson Dantas Louza Junior

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Valério, José Carlos.
Introdução à Geometria Hiperbólica / José Carlos Valério. – 2017.
52 f. : il.

Orientador: Nelson Dantas Louza Junior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

1. Geometria. 2. Geometria Neutra. 3. Geometria Hiperbólica. I. Louza Junior, Nelson Dantas, orient. II. Título.

José Carlos Valério

Introdução à Geometria Hiperbólica

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 04 de Maio de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Ronei Sandro Vieira
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais CEFET - MG

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade a mim concedida.

A toda minha família, em especial aos meus pais Sebastião Valério da Costa e Luiza Stela Cardoso, que mesmo estando distantes sempre me incentivaram a conquistar os meus objetivos.

A minha querida esposa e eterna companheira, Juliana Oliveira Gomes Valério, que muitas vezes se sacrificou em prol dos meus estudos, pelo seu incentivo diário, pelas orientações e correções da escrita.

A todos os professores do curso pela paciência, acolhimento e dedicação. Em especial ao meu orientador professor Nelson Dantas Louza Júnior, sempre atencioso e solícito em suas correções.

Aos professores que compuseram a banca, pela disponibilidade, leitura atenciosa e sugestões para o enriquecimento da dissertação.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido.

A todos os colegas de curso pelos incentivos e companheirismo.

E a todos os meus amigos que direta ou indiretamente me incentivaram, nos momentos difíceis, a continuar os estudos. Um especial agradecimento a Hiroshi Ouchi e Silvia Cortês, o meu muito obrigado!

"Nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra - apenas é mais conveniente"

Henri Poincaré

RESUMO

Na presente dissertação será introduzido o desenvolvimento histórico da Geometria Hiperbólica. Será apresentado o quinto postulado de Euclides, de acordo com o ponto de vista dos Axiomas de Hilbert, correlacionando-os com os resultados da Geometria Neutra. Serão apresentados e provados alguns resultados da Geometria Hiperbólica, no que diz respeito às propriedades das retas paralelas, dos triângulos generalizados e seus critérios de congruência. Por fim, serão discutidas as propriedades que são válidas tanto para a Geometria Euclidiana quanto Hiperbólica, enfatizando que a principal diferença entre elas é o postulado das paralelas.

Palavras-chave: Geometria. Geometria Neutra. Geometria Hiperbólica.

ABSTRACT

In the present dissertation we will introduce the historical development of the hyperbolic geometry. We will present Euclid's fifth postulate from the Hilbert's axioms point of view and we will correlate them with results of the Neutral Geometry. We will present and prove some results of the Hyperbolic Geometry, regarding the properties of the parallel lines, and the generalized triangles and their congruence criteria. At last, we will discuss the proprieties which are valid in both Euclidean and Hyperbolic Geometry, and we will emphasize that the main difference between them is the parallel postulate.

Keywords: Geometry. Neutral Geometry. Hyperbolic Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\notin$	Não Pertence
$\mathbb{R}$	Reais
$\equiv$	Congruência
$<$	Menor
$>$	Maior
$\triangle$	Triângulo
$\angle$	Ângulo
$\neq$	Diferente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é um ramo da matemática ligado ao cotidiano das pessoas, como por exemplo, as construções, o cálculo de áreas e etc. A mais estudada e difundida é a geometria Euclidiana, dividida em plana (ligada às figuras geométricas básicas) e espacial (referente ao estudo de volumes). Ela é trabalhada ao longo de todo o currículo escolar, ou seja, do ensino fundamental ao médio. Porém, pela falta do conhecimento geométrico adequado alguns professores optam por não abordá-la em sua totalidades durante o ano letivo.

A geometria euclidiana tem como fundamentação teórica os Cinco Postulados de Euclides, reunidos por ele em treze livros, conhecidos como os Elementos de Euclides. Os axiomas propostos foram aceitos naturalmente como verdades absolutas, e sem a necessidade de serem demonstrados. Tais fundamentos foram suficientes para o entendimento das ciências até o século XIX.

No entanto, sozinha, a geometria euclidiana não contempla todos os campos do saber geométrico. Com a evolução do conhecimento matemático, surgiram vários questionamentos especificamente direcionados ao quinto postulado, conhecido como o postulado das paralelas: "por um ponto fora de uma reta, existe apenas uma reta paralela à reta dada". Vários estudiosos acreditavam que este princípio poderia ser interpretado como sendo uma proposição, e que seria possível a sua demonstração a partir dos quatro primeiros. Como consequência, várias reconsiderações conceituais foram propostas ao longo do século XIX e do século XX, consolidando a existência de uma nova geometria, ou seja, as geometrias não euclidianas, as quais são divididas em Geometria Elíptica e Hiperbólica.

As geometrias elíptica e hiperbólica surgiram, portanto, ao se negar o quinto postulado de Euclides. Após esta negação nos deparamos com duas possibilidades, ou seja, primeiramente "a inexistência de uma reta paralela que passa por um ponto fora à reta dada", em segundo lugar "a existência de pelo menos duas retas paralelas que passam por um ponto fora, à reta dada". No primeiro caso, estamos nos referindo à geometria elíptica, e no segundo, à geometria hiperbólica.

O presente trabalho se insere no contexto do ensino e aprendizagem das Geometrias não Euclidianas, especificamente no que diz respeito à geometria hiperbólica. O interesse pelo tema surgiu durante o curso de mestrado, na disciplina de Matemática e Atualidades, na qual alguns colegas apresentaram trabalhos sobre a geometria do globo terrestre. Ao final da aula, no momento das discussões, o professor compartilhou com todos a seguinte frase: "é onde a soma os ângulos de um triângulo difere de 180º", despertando-me o interesse a um estudo mais aprofundado dos precursores do conhecimento geométrico. Este trabalho possui os seguintes objetivos: mostrar a existência e as principais propriedades das paralelas na geometria hiperbólica, também fazer um estudo dos triângulos generalizados, mostrando as suas principais propriedades e os casos de congruência e, finalmente fazer uma comparação entre as geometrias Euclidiana e Hiperbólica usando os resultados da geometria neutra.

No segundo capítulo, abordamos um pouco da história da geometria Euclidiana em relação aos postulados propostos por Euclides no século $(IIIa.C)$. Após a citação de todos, é dada ênfase à inconsistência do quinto postulado, destacando os principais precursores que tentaram encontrar uma prova para o mesmo e também os estudiosos que o negaram e descobriram as geometrias não euclidianas. E, ao final, citamos o novo sistema axiomático proposto por Hilbert em 1899, para a Geometria Euclidiana, que sanava todas as omissões cometidas por Euclides.

Em seguida, no terceiro capítulo, falamos da Geometria Neutra, a qual é fundamentada ao considerarmos os resultados que não dependem do postulado das paralelas. Foram realizadas algumas descrições que não foram listadas como sendo Termo Indefinido nos axiomas de Hilbert, dentre eles, segmento, lado de um ponto, lado de uma reta, ângulo e triângulo. Demonstramos também os critérios LAL e ALA de congruência de triângulos, e o teorema dos ângulos externos de um triângulo, que foram utilizados nas demonstrações da geometria hiperbólica.

Dando continuidade, no quarto capítulo, trabalhamos com a Geometria Hiperbólica propriamente dita. Fizemos uma pequena introdução enfatizando a importância do capítulo, citando primeiramente o conceito de hipérbole, com o objetivo de justificar o surgimento de pelo menos duas paralelas que passam por um ponto. Em seguida, demonstramos os seguintes resultados relativos à Geometria Hiperbólica e as propriedades das paralelas:

PROPOSIÇÃO I. Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n"

PROPOSIÇÃO II. Sejam n uma reta e P um ponto fora de n. Então as retas paralelas a n passando por P formam ângulos agudos iguais com a perpendicular à n que passa por P

TEOREMA III. Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido á reta dada

TEOREMA IV. Se uma reta m é paralela a uma reta n, então, a reta n é paralela à reta m

TEOREMA V. Se as retas r e s são paralelas à reta t na mesma direção, então as retas r, s e t são paralelas entre si na mesma direção

Na sequência, no quinto capítulo, trabalhamos com os Triângulos Generalizados, que são os triângulos formados por dois pontos ordinários e um ponto ideal, dois pontos ideais e um ponto ordinal, e três pontos ideais. Demonstramos os seguintes resultados relativos às propriedades dos Triângulos Generalizados, e os casos de congruências dos Triângulos Generalizados:

$TEOREMA\ VI$. Se uma reta penetra um triângulo generalizado por um de seus vértices, então ela corta o lado oposto a este vértice

$TEOREMA\ VII$. O ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente

$TEOREMA\ VIII$. Se o lado $XY \equiv AB$ e o ângulo $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, então o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$

$TEOREMA\ IX$. Se o ângulo $\angle XYZ \equiv \angle ABC$, e o ângulo $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, então, o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$

$TEOREMA\ X$. Se o lado $XY \equiv AB$, o ângulo $\angle XYZ \equiv \angle YXZ$, e o ângulo $\angle ABC \equiv \angle BAC$, então, o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

Finalizando o trabalho, no sexto capítulo, foi realizada uma comparação entre as geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Como considerações finais, apresentamos as possibilidades em relação às propriedades da geometria, dividindo-as em dois grupos: as três propriedades que são verdadeiras para ambas as geometrias, e as demais, que não o são. Neste caso, podemos encontrar propriedades válidas para uma ou para outra, e ainda aquelas propriedades que apresentam explicações distintas. Na conclusão, após breve contextualização, destacamos como principal diferença entre elas o postulado das paralelas.

2 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

O estudo da Geometria, que iniciou-se na antiguidade, por volta do século XX a.C., através das civilizações Egípicia e Babilônica, estava ligado a algumas práticas do cotidiano, como por exemplo o movimento dos astros, o plantio e o cálculo de áreas.

As primeiras tentativas para o desenvolvimento de uma geometria de forma dedutiva ocorreram por volta de 600 a.C., a partir dos estudos de Tales de Mileto. Novos esforços neste sentido foram registrados somente no século V a.C. Apesar deste desenvolvimento, a Geometria desenvolvida de forma dedutiva só foi conseguida a partir de 300 a.C., com Euclides.

A Geometria é uma ciência lógica e dedutiva formulada por postulados e axiomas. Foi baseado nesse princípio que Euclides a organizou nos *Elementos* em sua época. Ele desenvolveu o seu trabalho baseando-se em cinco postulados, os quais foram definidos em dois grupos. O primeiro constituido pelas hipóteses aceitáveis por todas as ciências, e por isso que foram chamadas de noções comuns, que segundo Andrade [1], são elas:

(a) Coisas iguais a uma mesma coisa, também são iguais.

(b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

(c) Se iguais são subtraídos de iguais os restos são iguais.

(d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

(e) O todo é maior do que qualquer uma das partes.

O segundo grupo foi formado por um conjunto dos postulados, considerados como sendo as hipóteses da Geometria, que segundo Andrade [1], são:

(1) Pode-se traçar uma reta ligando qualquer dois pontos.

(2) Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta.

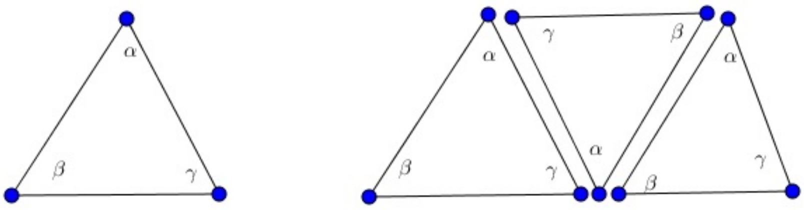
(3) Pode-se traçar um círculo a partir de qualquer centro e qualquer raio.

(4) Todos os ângulos retos são iguais.

(5) Se uma reta, ao cortar duas outras, forma ângulos internos no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Euclides teve crédito somente no quinto postulado, os demais, segundo Andrade [1], se deve a Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), membro da academia de Platão, que trouxe da filosofia para a matemática a teoria de afirmações de Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.). Os quatro primeiros postulados já estavam justificados pelos predecessores de Euclides (BARBOSA [3]). Já o quinto postulado, que era totalmente diferente dos demais, pois não é evidente, nem é uma lei natural por si mesmo, não pôde ser justificado e, na elaboração do Livro I(da coleção Elementos) ele evitou utilizá-lo para demonstrar as primeiras 28 proposições. "Na 29ª proposição iniciou-se os preparativos para demonstrar a 32ª proposição: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º"(ANDRADE[1], p.7). Este fato pode ser validado empiricamente de forma heurística, colando triângulos feitos a partir de cartolina, conforme figura 1:

Figura 1 – Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo



Fonte: Construção do próprio autor

Já a 31ª proposição, a qual garante que "por um ponto fora de uma reta passa uma reta que não a intercepta"(ANDRADE [1], p.7), não foi possível de ser deduzida a partir dos quatro primeiros postulados. Disto resultou-se que ela é a única possuindo essa propriedade. A partir daí surgiu a necessidade de uma revisão para os postulados de Euclides.

2.1 O QUINTO POSTULADO E A NOVA GEOMETRIA

O Quinto postulado foi uma decisão intelectual imposta para validar uma teoria. Ficou também conhecido como postulado das paralelas, ou Postulado de Playfair, recebendo esse nome em homenagem ao escocês John Playfair(1748 - 1819), por ter sido o responsável pela tradução para o inglês dos elementos, provando que o postulado poderia ser reescrito sem alterar a sua essência. "Em um ponto fora de uma reta incide uma única reta que não a intercepta". (ANDRADE [1], p.7). Esta é de fato a definição mais conhecida para o quinto postulado, que pode ser facilmente deduzida em partes. Porém, não é possivel mostrar a unicidade dela usando apenas os quatro primeiros postulados. "O quinto postulado não é uma lei natural nem é evidente por si mesmo, é uma decisão intelecual imposta para validar uma teoria adaptando-a a um fato constatado empricamente"(ANDRADE [1], p.8).

Os matemáticos foram desafiados por mais de vinte séculos a demonstrar o quinto postulado, e dentre os resultados obtidos, podemos destacar que a hipótese mais importante foi a do Jesuita italiano e professor da Universidade de Pávia, Giovanni Girolano Saccheri (1667 - 1733), o qual usando os quatro primeiros postulados tentou mostrar que existe um retângulo (substituto do quinto postulado). Ou seja, ele construiu um retângulo em que um lados estava contido na reta dada, digamos uma reta r qualquer, e o lado paralelo a esse continha o ponto fora da reta (r), e os outros dois lados perpendiculares a esses. Sua demonstração consistia em reduzir ao absurdo, em que presumia a não existência de retângulos, e com isso não conseguiu o sucesso desejado. Em seus estudos, sem cometer erros lógicos, conseguiu explicar vários resultados da Geometria Hiperbólica sem encontrar contradições, porém não acreditou que existisse uma geometria não euclidiana, desabafando entristecidamente que seus resultados "eram repugnantes à natureza de uma reta"(ANDRADE [1], p.9), perdendo a oportunidade de ser considerado o criador da Geometria Hiperbólica.

Sem conhecer a obra de Saccheri e sem tentar procurar contradições, Johan H. Lambert (1728 - 1777) deu início ao estudo da Geometria Hiperbólica com resultados surpreendentes. Dentre eles, destacamos: "a área Δ de um triângulo é dada por $\Delta = K(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$, onde α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo em radianos e $K > 0$ é uma constante"(ANDRADE [1], p.9). Com esse resultado, ele conseguiu provar uma das propriedades mais estraordinárias da Geometria não Euclidiana: "A soma dos ângulos do triângulo decresce quando a área cresce"(ANDRADE [1], p.10).

Lambert foi uma matemático maravilhoso, porém por ser conteporâneo de Jean le Rond d'Alembert(1717 - 1783) e de Leonard Euler (1707 - 1783) teve seu brilhantismo mascarado. Mas é de sua autoria a demonstração que π é irracional.

Já o matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1771 - 1855), através de seus estudos, convenceu-se que o Teorema das paralelas era independente dos quatro primeiros. Apesar dos seus resultados terem ido além dos obtidos por Lambert e Saccheri, ele não os publicou. Era cauteloso em divulgar seus trabalhos, pois temia que fossem encontradas falhas e também pelo fato que, em sua época, a filosofia de Kant era considerada como um dogma pela Igreja. Era um período em que as sombras da inquisição assustavam os detentores de conhecimento, que poderiam ser considerados contrário à doutrina, e na essência da interpretação do universo daqueles dias, estava a Geometria Euclidiana. Dentre os trabalhos publicados por Gauss, destacamos uma exposição da teoria elementar das paralelas, que foi interrompido quando recebeu uma cópia do famoso Apêndice de Jânos Bolyai escrito no Livro Tentamem de autoria de seu pai, Wolfgang Bolyai.

Segundo Souza [8], Gauss era amigo de Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), outro matemático apaixonado pelo teorema das paralelas, tendo criado várias pseudoprovas que acabaram sendo rejeitadas por Gauss. O filho de Farkas Bolyai, o engenheiro Jânos Bolyai (1802-1860), contrariando os conselhos do pai, também se interessou pela prova do quinto postulado e, em 1823, escreveu para o patriarca: "tinha descoberto coisas tão maravilhosas que me supreenderam... do nada eu criei um mundo novo e estranho."(ANDRADE [1], p. 11). Em resposta, seu pai lhe escreveu por carta com a seguinte mensagem: "Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso pode lhe tomar todo o seu tempo e privá-lo da saúde, paz de espírito e felicidade na vida".(ANDRADE [1], p.11).

Jânos Bolyai desobedeceu seu pai e negando o quinto postulado, conseguiu provar os teoremas da geometria neutra ou absoluta, que são resultados comum das geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Em 1832 publicou um apêndice no livro Tentamem do autor Farkas Bolyai e, em sua redação, ele expôs uma modificação para o quinto postulado por meio da seguinte ideia "em um ponto fora de uma reta incidem infinitas retas que não a intersetam"(ANDRADE [1], p.12). Publicação esta que lhe custou um profundo descontentamento, pois antes da divulgação, seu pai Farkas Bolyai, enviou uma cópia do apêndice para Gauss, que se sentindo rivalizado e aborrecido com tal feito, escreveu em resposta à preeminência.

> Se eu começasse com a afirmação de que não ouso louvar tal trabalho, você, é claro que sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que tem ocupado minha mente por trinta, a trinta e cinco anos (ANDRADE [1], p.12).

Gauss afirmava ainda que pretendia descrever sobre o tema, e devido ao fato de que poucas pessoas conseguiriam entendê-lo, logo não pretendia publicá-lo em vida.

O russo Nicolai Lobachevsky (1793 - 1856), considerado o maior matemático russo do seu tempo, confiou primeiramente que existia uma prova para o quinto postulado e publicou em 1826 uma demonstração para o mesmo. Mas em 1829, sobre outra concepção, publicou um artigo onde admitiu como quinto postulado: "em um ponto fora de uma reta incidem duas retas que não a intersetam."(ANDRADE [1], p.13). Laçando com a sua descoberta a Geometria Imaginária, que mais tarde a chamou de Geometria de Lobachevsky, e a desenvolvendo escreveu três livros em vários idiomas, os quais causaram grande impacto.

A revisão da ideia surgiu com o alemão Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866). Em 1854, propôs uma mudança do conceito de espaço no estudo da geometria, em uma conferência "sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria"(ANDRADE [1], p.16). Segundo esta proposta de mudança, a geometria deveria voltar às origens (métrica), ou seja, estudar as diversidades de dimensão n (espaços) e que os espaços deveriam ser estudados através de uma métrica adotada, e que as propriedades dos espaços estariam sujeitas à forma que as medições seriam feitas.

Como podemos observar, a descoberta da Geometria Não-Euclidiana ocorreu quase simultaneamente pelos matemáticos Gauss, Jânos Bolyai e Lobachevsky. Em 1871 recebeu o nome de Geometria Hiperbólica pelo matemático Felix Chistian Klein (1849 - 1925), sendo também conhecida como Geometria de Lobachevsky, em homenagem a sua dedicação e por ter sido o primeiro a publicar suas descobertas.

Por mais de três décadas, vários matemáticos continuaram os estudos sobre essa nova geometria, mas foi o italiano Eugênio Beltrami (1835 - 1900) que, em 1868, redescobriu o trabalho de Saccheri e criou o primeiro modelo do plano Hiperbólico, o qual apresentava uma consistência do sistema axiomático hiperbólico e a independência do quinto postulado. Três anos depois, em 1871, Felix Klein completou o estudo de Beltrami e colocou o modelo na linguagem da Geometria projetiva.

Com uma trajetória científica brilhante, apesar de não ter tido muitas aptidões para cálculos mais elaborados, assim como Gauss, o francês Henri Poincaré (1854 - 1912) foi revelado como gênio na idade adulta ao criar um modelo espetacular com uma simplicidade e elegância incríveis. É com esse elogioso paralelo que Carl Boyer [5] o apresenta como um dos matemáticos mais criativos da história:

> Quando Gauss morreu em 1855 pensava-se em geral que nunca mais existiria um universalista em Matemática - alguém que estivesse igualmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados. Se alguém a partir daí provou que essa ideia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a Matemática como seu domínio.(BOYER [5], p.441).

Poincaré desenvolveu entre 1882 e 1887 um modelo aritmético simples e criativo para a Geometria Hiperbólica, em que é possível verificar todos os seus postulados. Ele desenvolveu seu modelo, conforme descrito por Andrade ([1], p.19), utilizando como base o pensamento euclidiano, e por esta razão os postulados da Geometria Hiperbólica poderiam ser verificados com o uso da Geometria Euclidiana:

a) O termo indefinido *plano* significa conjunto aritmético

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$$

b) O termo indefinido *ponto* significa elemento do conjunto D^2.

c) O termo indefinido *reta* significa um conjunto obtido por interseção de D^2 com uma reta que incide na origem, ou com um círculo de $\mathbb{R}^2$ ortogonal ao bordo de D^2.

Sabemos que a consistência na Geometria Euclidiana se fundamenta na tradição e que, por mais de dois séculos, os estudiosos não descobriram nenhuma incoerência. Entretanto, de acordo com o que foi apresentado por Andrade ([1], p.19), Poincaré, ao apresentar este modelo com base na Geometria Euclidiana, pretendeu mostrar que se alguma incoerência fosse encontrada, ela seria devido à esta antiga geometria, e não ao seu novo modelo. Podemos dizer que, de um lado, as obras de Bolyai e Lobachevsky nos trouxeram a consistência da Matemática, enquanto o modelo de Poincaré nos trouxe a consistência da Geometria Hiperbólica.

2.1.1 Os Axiomas de Hilbert

Apesar de ter sido considerada uma obra brilhante para sua época, podemos encontrar lacunas no sistema imposto por Euclides nos Elementos. O matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943) divulgou, em 1899, um novo sistema axiomático para a Geometria Euclidiana que sanava todas as omissões cometidas por Euclides. Ele criou grupos, possibilitando a axiomatização de todas as Geometrias, incluindo a Hiperbólica. Com exceção do quinto postulado, ele tornou o sistema axiomático da Geometria Euclidiana semelhante ao da Geometria Hiperbólica.

Inicialmente, Hilbert propôs uma fundamentação para a então recém-criada Geometria Hiperbólica plana, delimitando os termos indefinidos, que são: Ponto, Reta, Plano, Pertence, Está entre, e Congruência. Posteriormente, organizou os cinco grupos axiomáticos, que são: Incidência, Ordem, Congruência, Continuidade, e das Paralelas, cada um com um número definido de axiomas. De acordo com Andrade [1] e Souza [8], temos:

(i) Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e estão sobre o mesmo plano.

(ii) Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então, os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta AC tal que C está entre A e B.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. Axioma de Pasch. Sejam A,B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l interseta o segmento AB, ela também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

(iii) Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos em uma reta l e A' é um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto B' em um

dado lado da reta l' tal que os segmento AB e $A'B'$ são congruentes.

2. Se um segmento $A'B'$ e um outro segmento $A''B''$ são congruentes a um mesmo segmento AB então os segmentos $A'B'$ e $A''B''$ são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta l, sejam AB e BC dois segmentos da mesma que, exceto por B não tem pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos que, exceto por B' não têm pontos em comum. Neste caso, se AB é congruente a $A'B'$ e BC é congruente a $B'C'$, então, AC é congruente a $A'C'$.

4. Se $\angle ABC$ é um ângulo e se $B'C'$ é um raio, ou seja, um lado do ângulo, então existe exatamente um raio $A'B'$ em cada lado de $B'C'$ tal que $\angle A'B'C'$ é congruente a $\angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, AB é congruente a $A'B'$, AC é congruente a $A'C'$ e $\angle BAC$ é congruente a $\angle B'A'C'$, então $\angle ABC$ é congruente a $\angle A'B'C'$ e $\angle ACB$ é congruente a $\angle A'C'B'$.

(iv) Axiomas da Continuidade

1. Axioma de Arquimedes. Se AB e CD são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de CD construídas continuamente de A ao longo do raio AB passará além do ponto B.

2. Axioma da Completude da Reta (ou Axioma de Cantor). Se A_nB_n, $n \in N$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencente a todos os segmentos da coleção.

(v) Axioma das Palarelas

1. Em um ponto não pertencente a uma reta incidem duas retas que não a interceptam.

A partir da construção dos grupos de axiomas propostos por Hilbert, citados acima, foi realizada uma revisão dos postulados de Euclides e, como consequência, a criação de uma nova Geometria. Os quatro primeiros grupos puderam ser demonstrados e comprovados, enquanto o quinto postulado, tal como apresentado originalmente por Euclides, precisou ser reestudado e amplamente modificado para ser analisado (ANDRADE [1]; BARBOSA [3]; SOUZA [8]). Por esta razão, pretende-se no próximos capítulos apresentar algumas das construções que surgiram a partir dos questionamentos ao Quinto Postulado Euclidiano.

3 GEOMETRIA NEUTRA

Considerando o conjunto de axiomas proposto por Hilbert e assumindo que o conjunto dos números reais é um corpo completo ordenado, podemos dizer que a Geometria Euclidiana só difere da Hiperbólica pelo Postulado das Paralelas, e dos resultados que dele procedem. Ao considerarmos os resultados que não dependem do postulado das paralelas, obtemos uma Geometria que é chamada de Geometria Neutra. As propriedades da Geometria Neutra são válidas tanto para o plano Euclidiano quanto para o plano Hiperbólico.

Descreveremos neste capítulo alguns axiomas e teoremas da Geometria Neutra, baseando-se em conteúdos de Andrade [1], Ávila [2], Barbosa [3] [4], Lima [6] e Perez [7], com o objetivo de fazer uma comparação entre as Geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Evitaremos uma introdução exaustiva da Geometria Neutra, destacaremos apenas os resultados principais que serão utilizados nas demonstrações do próximo capítulo.

3.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

No sistema Axiomático proposto por Hilbert existem alguns termos que não foram listados como *Termos Indefinidos*, como por exemplo, no conjunto de axiomas de Congruência, encontramos os termos *em um dado lado de uma reta*, e *ângulo*, já no Axioma de Ordem surge o termo *segmento*, e etc. Daí surge a necessidade da definição desses e outros termos, utilizando os quatro primeiros axiomas propostos por Hilbert, que são:

(i) Axiomas de Incidência

(ii) Axiomas de Ordem

(iii) Axiomas de Congruência

(iv) Axiomas de Continuidade

Observem que não citamos o axioma das paralelas, pois, conforme listado acima, a Geometria Neutra não depende dele. As *retas* serão nomeadas por letras minúsculas, como por exemplo: r, s, t, etc. E *os pontos e os vértices dos triângulos* por letras maiúsculas, A, B, ..., X, Y, ..., etc. Faremos agora a descrição dos principais termos que não foram listados como sendo um *Termo Indefinido* nos axiomas de Hilbert.

Segmento

Sejam os pontos A e B. O segmento AB é o conjunto constituído pelos pontos entre A e B. Os pontos A e B são chamados de extremidade do segmento. É indiferente chamarmos o segmento, por AB ou BA. Chamaremos de reta suporte do segmento AB à reta definida pelos pontos A e B, ou simplificadamente por reta AB

Lado de um Ponto

Seja r uma reta qualquer e seja X um ponto de r. Sejam também os pontos Y e Z pertencentes à reta r, conforme figura 2.

Figura 2 – Lado de um ponto

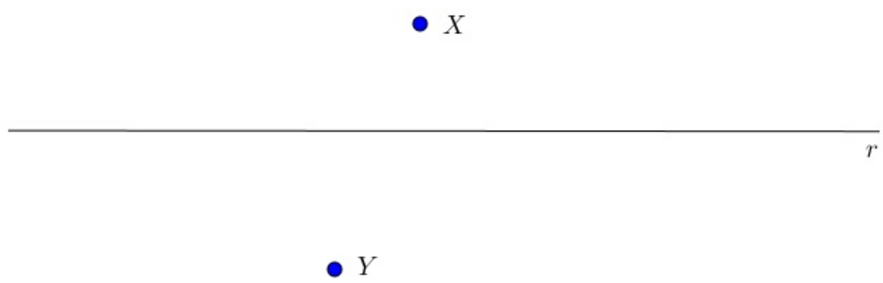
Fonte: Construção do próprio autor

Os pontos Y e Z estarão localizados no mesmo lado de X sobre a reta r, quando $Y = Z$ ou $Y \neq Z$ e o segmento YZ da reta r não contém X. Quando Y e Z não estão no mesmo lado de X, definimos que eles estão em lados opostos de X.

Lado de uma Reta

Seja r uma reta dada. Sejam X e Y dois pontos quaisquer, pertencentes ou não a r. Definimos dois lados de uma reta r como sendo o conjunto constituído pelos pontos X e Y, quando X e Y não estão situados sobre a reta r conforme figura 3.

Figura 3 – Lado de uma reta



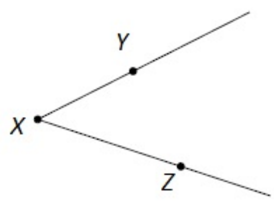
Fonte: Construção do próprio autor

Descrevemos que dois pontos X, $Y \notin r$ quando estão no mesmo lado da reta r, ou quando $X = Y$, ou $X \neq Y$ e o segmento XY não contém ponto da reta r. Se o segmento XY intercepta a reta r, dizemos que X e Y estão em lados opostos de r. Com o auxílio do Axioma de Pasch citado no item 4 dos Axiomas de Ordem (Axiomas de Hilbert), verifica-se que a reta r divide um plano qualquer em três subconjuntos não vazios, que são eles: a reta r, e os seus dois lados.

Ângulo

Seja X um ponto qualquer. Sejam as semirretas XY e XZ. Um ângulo com vértice em X é a união das semirretas XY e XZ não pertencentes a uma mesma reta. As semirretas XY e XZ são chamadas de lados do ângulo, conforme figura 4. Usaremos a notação $\angle YXZ$ ou a notação $\angle ZXY$ para representar um ângulo com o vértice em X. O interior de um ângulo é a interseção do semiplano formado pela reta suporte do lado XY e o ponto Z com o semiplano formado pela reta suporte do lado XZ e o ponto Y.

Figura 4 – Ângulo

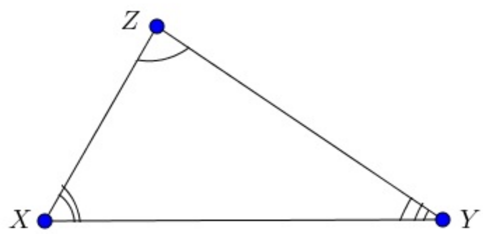


Fonte: Construção do próprio autor

Triângulo

Sejam os pontos X, Y e Z não colineares. Conforme a figura 5, o triângulo $\triangle XYZ$, com vértices nos pontos X, Y e Z é o conjunto constituído pelos segmentos XY, XZ e YZ que serão chamados de lados do triângulo $\triangle XYZ$. Os ângulos do triângulo $\triangle XYZ$ são: $\angle XYZ$, $\angle YXZ$, $\angle XZY$. O interior do triângulo é a interseção dos interiores dos seus ângulos.

Figura 5 – Triângulo

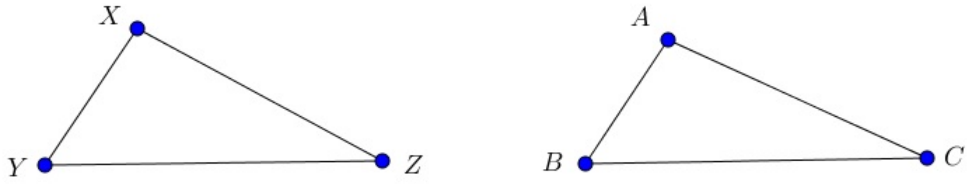


Fonte: Construção do próprio autor

3.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Sejam os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$. Eles são congruentes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices e lados, tais que, os ângulos e os lados que se correspondem sejam congruentes. Ângulos correspondentes são os ângulos cujos vértices são correspondentes, e os lados são correspondentes se as suas extremidades são vértices correspondentes. Ou seja, se o triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ são congruentes, então, valem as correspondências dos lados XY e AB, XZ e AC, YZ e BC e dos ângulos $\angle XYZ$ e $\angle ABC$, $\angle YXZ$ e $\angle BAC$, $\angle YZX$ e $\angle BCA$, conforme a figura 6.

Figura 6 – Triângulos Congruentes



Fonte: Construção do próprio autor

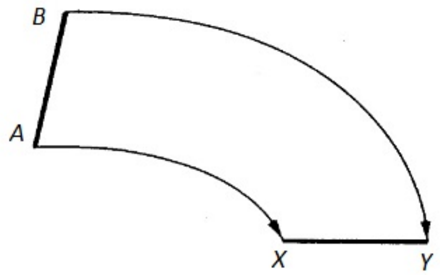
Se o triângulo $\triangle XYZ$ é congruente com o triângulo $\triangle ABC$, então significa que a congruência leva os vértices X em A, Y em B e Z em C e simplificadamente podemos representar a congruência entre eles pela simbologia $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$. Assim como, se o lado XY é congruente com o lado AB, representaremos que $XY \equiv AB$, e assim representaremos os demais lados $XZ \equiv AC$ e $YZ \equiv BC$.

Antes de descrevermos sobre os casos de congruência de triângulos, faz-se necessário discorrer um pouco sobre segmentos e figuras congruentes.

3.2.1 Segmentos Congruentes

Sejam os segmentos AB e XY. Os segmentos AB e XY são congruentes quando se coincidem por superposição, mediante o movimento rígido de um deles, como por exemplo a figura 7.

Figura 7 – Segmentos congruentes

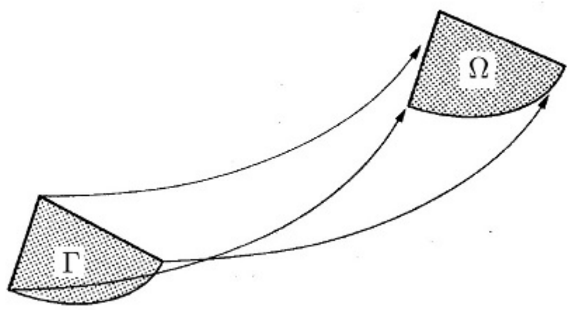


Fonte: Construção do próprio autor

3.2.2 Figuras Congruentes

Sejam as figuras Γ e Ω. As figuras Γ e Ω são congruentes quando podem ser levadas a coincidir por superposição, mediante um movimento rígido de uma delas, conforme a figura 8.

Figura 8 – Figuras Congruentes



Fonte: Construção do próprio autor

3.2.3 Os Critérios de Congruência LAL e ALA

Mostraremos nessa seção apenas os casos de congruência que foram utilizados nas demonstrações das propriedades dos triângulos Generalizados. O primeiro critério de congruência que iremos demonstrar é LAL, que significa: "se dois triângulo possuem dois lados e o ângulo formado por esses lados congruentes, então eles são congruentes".

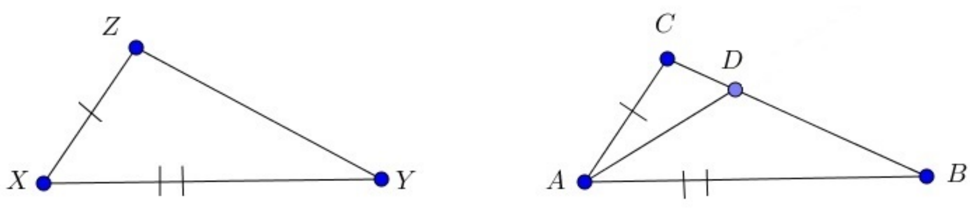
$TEOREMA$: Se para os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ valem as congruências $XY \equiv AB$, $\angle YXZ \equiv \angle BAC$ e $XZ \equiv AC$, então os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ são congruentes.

Prova

Sejam os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$, tais que, $XY \equiv AB$, $\angle YXZ \equiv \angle BAC$ e $XZ \equiv AC$. Obtemos pelo 5º axioma de congruência de Hilbert, $\angle XYZ \equiv \angle ABC$ e $\angle XZY \equiv \angle ACB$. Daí resta-nos mostrar que $YZ \equiv BC$.

Suponhamos por absurdo que o lado YZ não é congruente com o lado BC. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $YZ < BC$. Para isso, seja D um ponto do lado BC do triângulo $\triangle ABC$ tal que o lado YZ do triângulo $\triangle XYZ$ seja congruente com o segmento BD do triângulo $\triangle ABC$. Trace o segmento de reta AD conforme a figura 9. Considere o triângulo $\triangle ABD$.

Figura 9 – Triângulos Congruentes LAL



Fonte: Construção do próprio autor

Comparando os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABD$, temos $XY \equiv AB$ por hipótese, $\angle XYZ \equiv \angle ABD$ e $YZ \equiv BD$ por construção. Pelo 5º axioma de congruência de Hilbert, temos que $\angle YXZ \equiv \angle BAD$ e por hipótese, $\angle YXZ \equiv \angle BAC$. Isso contraria o quarto axioma de congruência de Hilbert. Portanto, $YZ \equiv BC$ e $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

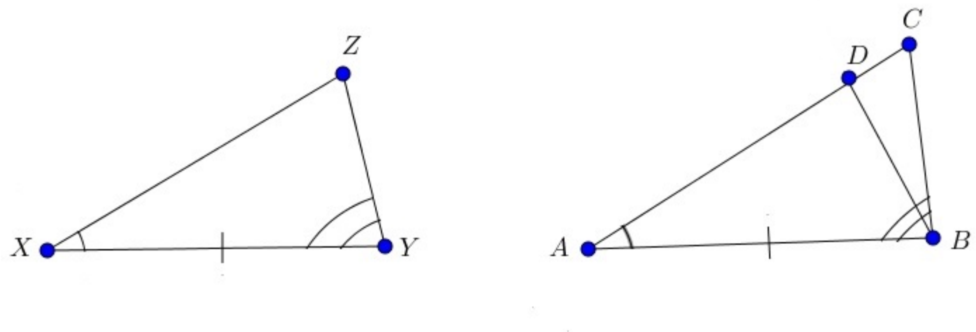
Veremos agora o próximo critério de congruência ALA, diz que, se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado formado por eles congruentes, então, os triângulos são congruentes.

$TEOREMA$: Se para os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ valem as Congruências $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, $XY \equiv AB$ e $\angle XYZ \equiv \angle ABC$, então os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ são congruentes.

Prova

Sejam os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ tais que $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, $XY \equiv AB$ e $\angle XYZ \equiv \angle ABC$. Como $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, $XY \equiv AB$ e $\angle XYZ \equiv \angle ABC$ temos que é suficiente mostrarmos que $XZ \equiv AC$ ou que $YZ \equiv BC$. Pois, ao provarmos para um dos dois lados, o resultado segue da demonstração do caso LAL já citado acima.

Figura 10 – Triângulos Congruentes ALA



Fonte: Construção do próprio autor

Mostraremos que $XZ \equiv AC$. Para isso, suponha por absurdo que o lado XZ não é congruente com o lado AC. Para facilitar o entendimento, vamos supor, sem perda de generalidade, que $XZ < AC$. Daí, seja D um ponto do lado AC, de modo que o lado XZ do triângulo $\triangle XYZ$ seja congruente com o segmento AD. Trace segmento de reta BD e seja o triângulo $\triangle ABD$, conforme a figura 10.

Comparando os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABD$, verificaremos que eles são congruentes pelo critério de congruência LAL, já de demonstrado acima, ou seja, $XZ \equiv AD$, $\angle YXZ \equiv \angle BAD$ e $XY \equiv AB$. Isso contradiz o 4º axioma de congruência de Hilbert. Logo, $XZ \equiv AC$, e $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$. Daí segue o resultado.

Nosso próximo assunto será a demonstração do Teorema do Ângulo Externo, mas antes de enunciá-lo, apresentaremos o *Teorema dos Ângulos Alternos Internos* e o *axioma de Pasch Generalizado* que serão utilizados na referida demonstração.

Teorema dos ângulos alternos internos

Sejam as retas r, s e t. Se as retas r e s são interceptadas pela reta t, de modo que os ângulos alternos internos são congruentes, então as retas r e s não se interceptam.

Axioma de Pasch generalizado

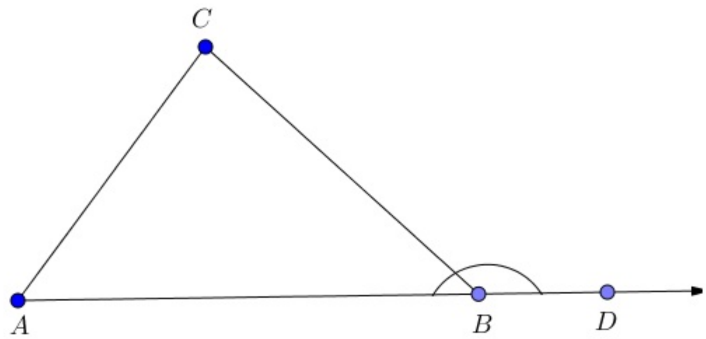
Se X é um ponto no interior do ângulo VUW, então a semirreta UX intercepta o segmento VW num ponto T (ANDRADE [1], com adaptações).

3.3 TEOREMA ÂNGULO EXTERNO

$Definição:$

Seja um triângulo $\triangle ABC$. Os ângulos $\angle ABC$, $\angle ACB$ e $\angle BAC$ são seus ângulos internos. Os seus respectivos suplementos são chamados de ângulos externos adjacentes. Por exemplo, na figura 11, o ângulo $\angle CBD$ é o ângulo externo adjacente ao ângulo $\angle ABC$.

Figura 11 – Ângulo Externo de um Triângulo



Fonte: Construção do próprio autor

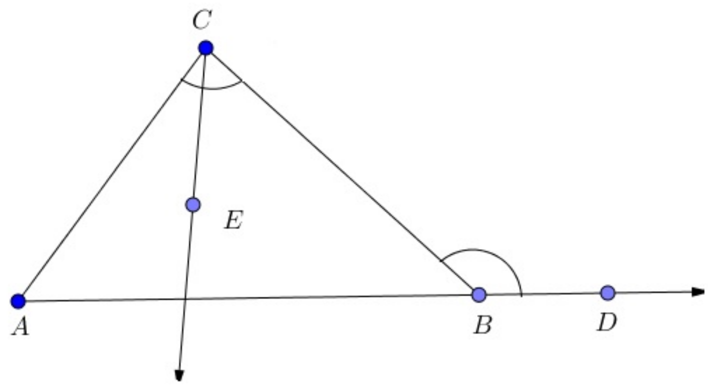
$TEOREMA$: Um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova

Seja o triângulo ABC. Conforme a figura 12, seja D um ponto da semirreta que contém o lado AB, tal que, o ponto D não pertença ao segmento AB. Considere o ângulo externo $\angle CBD$ do $\triangle ABC$. Devemos mostrar que o ângulo externo $\angle CBD$ é maior que os ângulos internos não-adjacentes $\angle ACB$ e $\angle BAC$. Demonstraremos que o ângulo $\angle CBD > \angle ACB$.

Nossa demonstração será dividida em dois casos:

Figura 12 – Teorema do Ângulo Externo de um Triângulo



Fonte: Construção do próprio autor

Caso (i)**:** Suponhamos por absurdo que $\angle CBD \equiv \angle ACB$. Pelo Teorema dos ângulos alternos internos, citado acima, a semirreta contendo o segmento AB não intercepta o segmento AC, o que é um absurdo.

Caso (ii)**:** Suponhamos por absurdo que $\angle CBD < \angle ACB$. Para isso, seja E um ponto interior ao ângulo $\angle ACB$, tal que, traçando a semirreta contendo os pontos C e E, obtemos que $\angle ECB \equiv \angle CBD$. Usando mais uma vez o Teorema dos ângulos alternos internos, obtemos que a semirreta contendo os pontos C e E não intercepta o segmento AB, o que é um absurdo, pois contraria o axioma de Pasch generalizado. De forma inteiramente análoga prova-se para $\angle CBD > \angle BAC$.

4 A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

4.1 INTRODUÇÃO

Existem atualmente várias geometrias e, quando mencionamos a palavra geometria, a ideia que imediatamente nos vem em mente é a geometria euclidiana, por ser a primeira que se aprende nos anos iniciais da educação básica e por ser a mais intuitiva. A geometria euclidiana distingue-se das demais por adotar como um de seus postulados:

"Por um ponto fora de uma reta, existe apenas uma reta paralela à reta dada".

Ao negarmos este postulado, nos deparamos com duas possibilidades:

(i) A inexistência de uma reta paralela à reta dada;

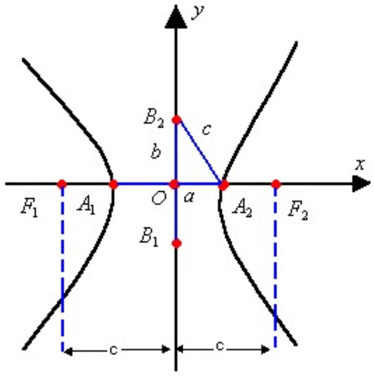
(ii) A existência de pelo menos duas retas paralelas à reta dada.

Ao assumirmos a primeira possibilidade teremos a Geometria Esférica. Assumindo a segunda, a Geometria Hiperbólica. Outro ponto interessante que podemos destacar é que, enquanto na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos é 180º, na geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo varia entre 180º e 540º e na geometria Hiperbólica a soma dos ângulos pode variar entre 0º e 180º.

Neste capítulo iremos trabalhar somente com a geometria Hiperbólica. Nosso objetivo é demonstrar alguns teoremas relativos ao quinto postulado e as principais propriedades das paralelas, usando como referência as noções básicas da geometria euclidiana. Mas, anteriormente à apresentação de alguns resultados da geometria Hiperbólica, vamos rever alguns conceitos de Hipérbole e descrever os axiomas de Pasch e Dedeking.

4.1.1 **Conceitos de Hipérbole**

Figura 13 – Hipérbole

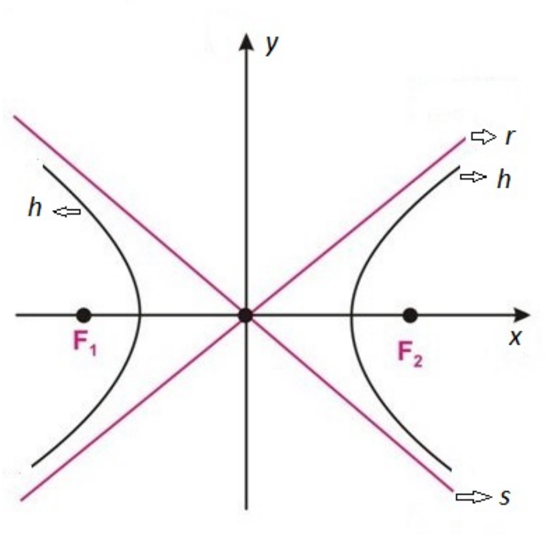


Fonte: Construção do próprio autor

Sejam F_1 e F_2 dois pontos do plano e seja $2c$ a distância entre eles, seja também os pontos A_1 e A_2 dois pontos da hipérbole, tais que a distância entre els é $2a$. A hipérbole é o conjunto dos pontos do plano cuja diferença (em módulo) das distâncias à F_1 e F_2 é a constante $2a$, para $(0 < 2a < 2c)$. Ou seja, uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias a dois pontos distintos fixos desse plano, é constante e menor que essa distância, conforme figura 13.

Agora, sejam r e s as assíntotas da hipérbole h, conforme figura 14. Observe que ao contrário das paralelas na Geometria Euclidiana Plana, que mantém sempre a mesma distância entre si, os ramos da hipérbole se aproximam das assíntotas, sem tocá-las. Este é o conceito que define pelo menos duas paralelas na geometria Hiperbólica, em uma superfície curva. Essa é uma abordagem de paralelismo da geometria Hiperbólica que foge ao senso comum e à nossa intuição.

Figura 14 – Hipérbole



Fonte: Construção do próprio autor

4.1.2 **Axiomas**

Nas demonstrações dos teoremas e das propriedades das paralelas da geometria Hiperbólica, usaremos os axiomas de Pasch e Dedekind, conforme enunciados a seguir:

Axioma I: *Pasch*

Sejam X,Y e Z três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja r uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Se r intercepta o segmento XY, então, ela também intercepta o segmento XZ ou o segmento YZ.

Axioma II: Dedekind

Um par ordenado (A,B) de subconjuntos dos números reais é um corte no conjunto dos números reais, se as seguintes condições são verificadas:

(1) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$

(2) $A \cup B = \mathbb{R}$

(3) $a \in A$ e $b \in B \Rightarrow a < b$;

(4) A não tem elemento máximo. O conjunto A é o conjunto minorante e o conjunto B é o conjunto majorante do corte, respectivamente.

A definição acima poderá ser estendida para uma reta.

4.2 O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Como vimos no capítulo anterior, o quinto postulado de Euclides, que equivale à afirmação *por um ponto fora de uma reta pode ser traçada apenas uma reta paralela à reta dada* foi substituído pelo postulado correspondente na Geometria Hiperbólica:

"Por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada"(BARBOSA [3], P.47).

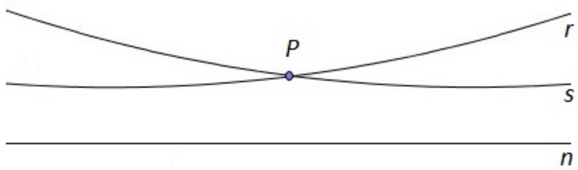
Para simplificar os enunciados das próximas demonstrações e fazer as distinções entre as duas retas paralelas, que passam por um ponto P, não pertencente a uma reta dada, iremos distinguir as duas retas paralelas em relação à direção do paralelismo, ou seja, à esquerda e à direita de um ponto.

$Definição$

Dada uma reta n e um ponto P fora de n, existe pelo menos uma reta que passa por P paralela à esquerda de P e pelo menos uma paralela à direita de P.

Considere as retas r e s passando por P e paralelas a n, conforme a figura 15. A reta r poderá ser definida como sendo a paralela à esquerda, e s paralela à direita. Logo, dada uma reta n e um ponto P qualquer não pertencente a n, temos pelo menos uma reta paralela à esquerda de P e pelo menos uma reta paralela à direita P.

Figura 15 – Duas Paralelas



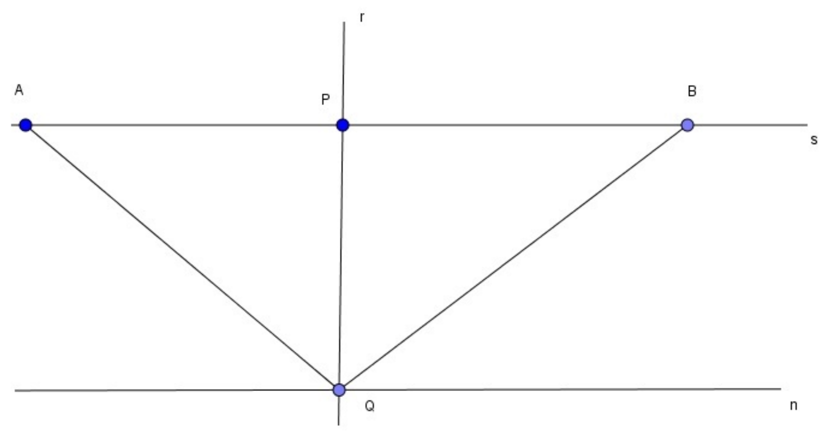
Fonte: Construção do próprio autor

PROPOSIÇÃO I: Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n.

Prova

Considere a figura 16.

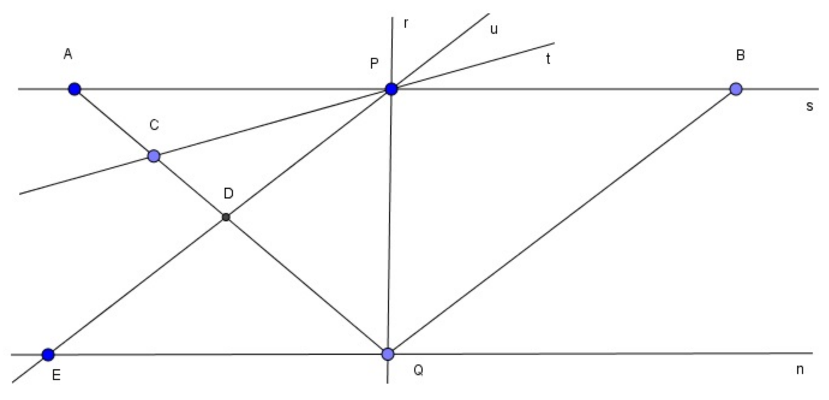
Figura 16 – Retas



Fonte: Construção do próprio autor

Seja n uma reta dada e P um ponto fora dela. Trace uma reta r perpendicular a n passando por P. Seja Q o ponto de interseção de r com n. Seja s uma reta perpendicular a r que passa por P. Sejam os pontos A e B pertencentes a s tais que P pertença ao segmento AB. Trace os segmentos AQ e BQ e considere o triângulo $\triangle ABQ$. Queremos provar que todas as retas que passam por P, exceto a reta s, cortam AB e um dos segmentos AQ ou BQ.

Figura 17 – Retas Paralelas 1

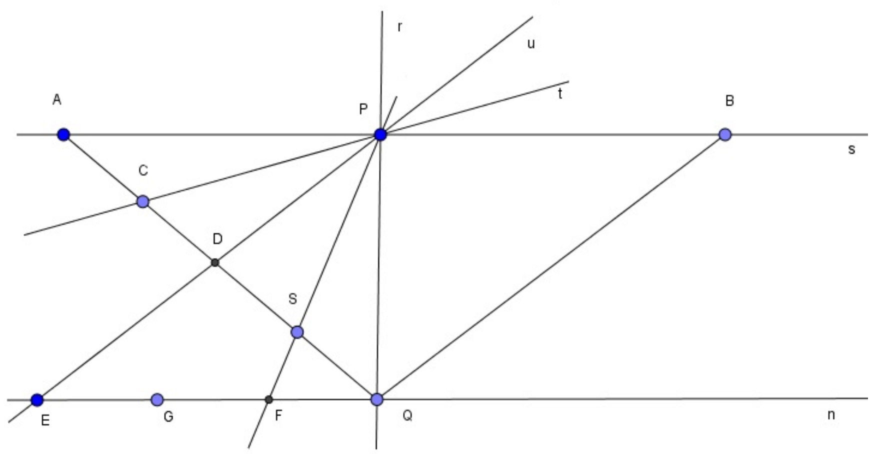


Fonte: Construção do próprio autor

Conforme figura 17, consideremos duas retas t e u que passam por P e interceptam o segmento AQ em dois pontos distintos, e sejam C e D respectivamente esses pontos. Considere os conjuntos I e J como subconjuntos possíveis em AQ tais que $I = \{\ K \in$AQ/ a reta definida por P e K corta a reta n $\}$ e $J = \{\ K \in$AQ/ a reta definida por P e K não corta a reta n$\}$. Observe que o ponto A pertence ao conjunto J e que o ponto Q pertence ao conjunto I, e que $I \cap J$ é vazio.

Seja E o ponto de interseção da reta u com a reta n, definindo assim o triângulo $\triangle PQE$. Como o segmento QD está contido no triângulo $\triangle PQE$, então todas as retas definidas por P e por um ponto qualquer de QD interceptam a reta n no segmento QE, pois QD está contido em I. De forma análoga, se o ponto C pertence ao conjunto J, então, AC está contido em J e todas as retas definidas por P e por um ponto qualquer do segmento AC, não interceptam a reta n. Logo, o segmento $AC \subset J$.

Figura 18 – Retas Paralelas 2



Fonte: Construção do próprio autor

Agora, conforme a figura 18, e pelo *Axioma II*(princípio do Corte de Dedekind), existe exatamente um ponto S que separa os conjuntos I e J. A questão que temos que analisar é se este ponto de separação pertence ao conjunto I ou ao conjunto J. Suponha que S pertença ao conjunto I, ou seja, ao conjunto dos pontos que as retas passando por P interceptam n em um ponto F. Tome um ponto G pertencente à semirreta que contém o segmento QF, mas fora do segmento QF. A reta definida pelos pontos P e G possui um ponto de interseção com AQ que fica fora do segmento QS, o que é um absurdo. Logo S pertence a J.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento QB, obtendo outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem as retas que separam todas as retas que passm pelo ponto P em dois grupos, ou seja, as que não interceptam e as que interceptam n. Além disso, estas duas retas não interseptam n. Como estas duas retas não interseptam n as chamaremos de retas paralelas à reta n que passam por P.

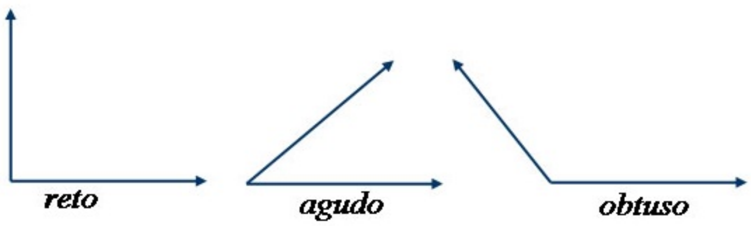
Antes de citarmos a próxima proposição, falaremos um pouco de ângulo agudo, reto e obtuso, coforme a figura 19. Um ângulo é a abertura formada entre duas semirretas de mesma origem cuja unidade de representação é o grau (°), e podemos classificar um ângulo da seguinte forma:

Ângulo Reto: possui medida igual a 90º (noventa graus);

Ângulo Agudo: possui medida menor que 90º;

Ângulo Obtuso: possui medida maior que 90º".

Figura 19 – Ângulo Agudo Reto e Obtuso

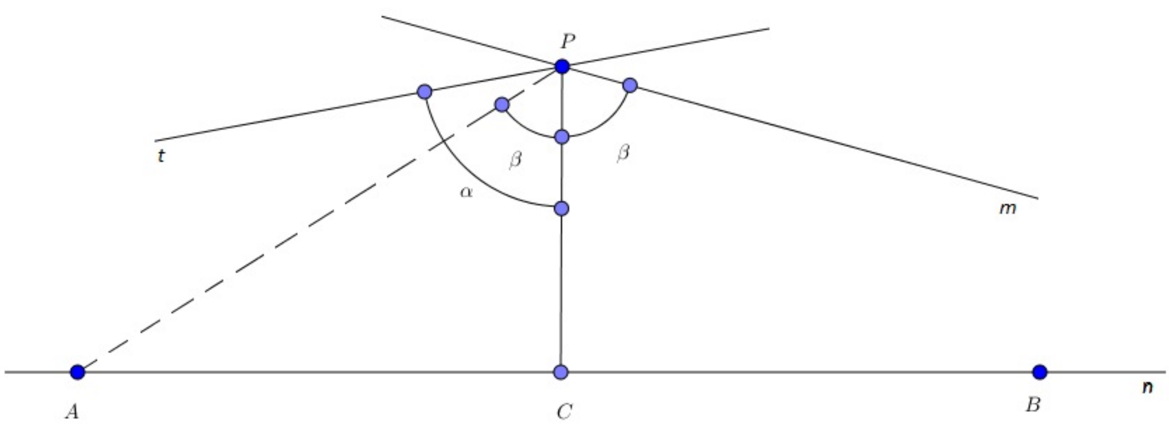


Fonte: Construção do próprio autor

PROPOSIÇÃO II: Sejam n uma reta e P um ponto fora de n. Então as retas paralelas a n passando por P formam ângulos agudos iguais com a perpendicular à n que passa por P.

Prova

Figura 20 – Ângulos formados pelas Paralelas



Fonte: Construção do próprio autor

Seja P um ponto não pertencente a n e seja C um ponto de n tal que o segmento

PC é perpendicular à reta n. Conforme figura 20, consideremos duas retas m e t, paralelas a n que formam os ângulos β e α respectivamente com o segmento PC. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta m é paralela à direita e a reta t é paralela à esquerda e que $\beta < \alpha$. Trace uma reta à esquerda, passando por P, que forma um ângulo β com o segmento PC. Como $\beta < \alpha$, logo, pelo resultado da *Proposição I*, a reta dada corta a reta n em um ponto qualquer, que o denotaremos por A.

Definindo um ponto B pertencente à reta n, tal que o ponto C seja o ponto médio do segmento AB. Podemos concluir que os triângulos $\triangle PCA$ e $\triangle PCB$ são congruentes pelo caso de Congruência LAL, pois PC é comum aos dois triângulos, o ângulo $\angle PCA$ e $\angle PCB$ são retos por construção. Os segmentos CA e CB são do mesmo tamanho, e consequentemente $\angle CPB = \beta$, o que é um absurdo. O que prova o resultado.

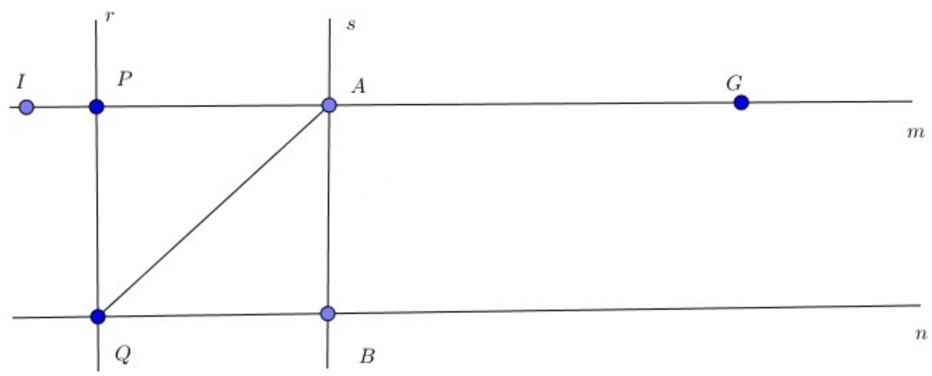
4.3 PROPRIEDADES ELEMENTARES DAS PARALELAS

Mostraremos nessa seção que algumas propriedades das retas paralelas da Geometria Euclidiana também são válidas na Geometria Hiperbólica.

TEOREMA III: Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido(à direita ou à esquerda) a uma reta dada, então, ela é em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.

Prova

Figura 21 – Retas paralelas em um deter. sentido

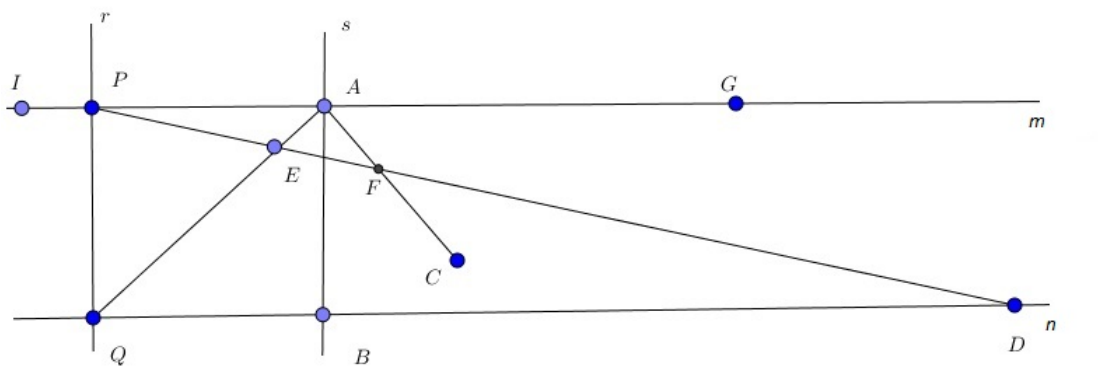


Fonte: Construção do próprio autor

Sejam uma reta n, um ponto P fora dela, e uma reta m passando por P. Considere os pontos I e G em m, tais que, P está entre I e G. Conforme figura 21, traçando uma reta r perpendicular a n passando por P, obtemos um ponto Q da interseção de r com n. Seja A um ponto qualquer de m. Sem perda de generalidade, consideremos inicialmente que o ponto A está a direita de P e entre I e G. Traçando uma reta s passando por A e perpendicular à reta n, obtemos um ponto B da interseção de s com n. Tracemos também o segmento AQ. Devemos mostrar que m é uma das retas paralelas a n passando por A e que é paralela à direita do ponto P.

Suponha que o ponto A está à direita do ponto P. Seja C um ponto pertencente ao plano definido pelos pontos B, A e G, tal que o segmento AC divide o ângulo $\angle BAG$ em dois. Suponha que toda reta que passa por A e entra no ângulo $\angle GAB$ intercepta a reta n. Caso isso não ocorra, a reta é paralela à reta n. Seja F um ponto pertencente ao segmento AC. Conforme definido, a reta m é paralela à direita no ponto P. Suponha que a reta definida pelo ponto P e pelo ponto F, intercepta a reta n em um ponto qualquer. Seja D o ponto da interseção da reta definida pelos pontos P e F com a reta n, conforme figura 22.

Figura 22 – Retas paralelas à direita



Fonte: Construção do próprio autor

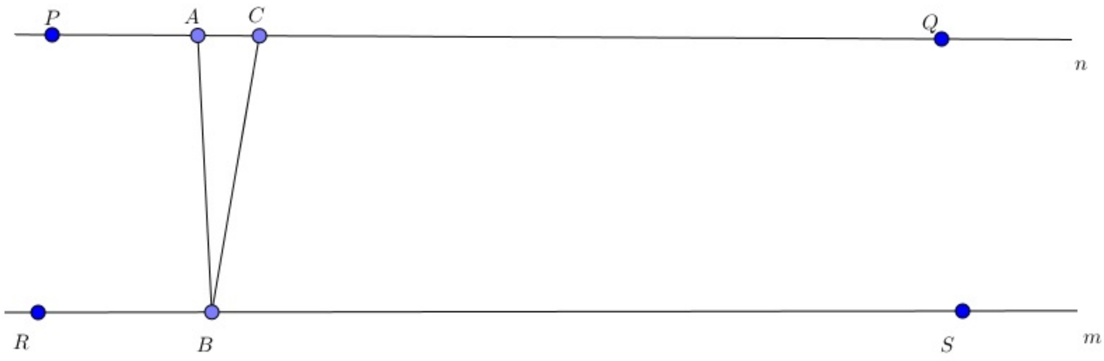
Pelo *Axioma I* (Pasch), a reta definida pelos pontos P e F corta o segmento AQ no ponto E. Do mesmo modo, usando o *Axioma I* (Pasch), concluímos que se prolongado, o segmento definido pelos pontos A e F, o mesmo corta o lado QD do triângulo $\triangle QED$. Provando assim que a reta m é paralela à direita no ponto A. Se o ponto A está à esquerda do ponto P, a prova será necessariamente a mesma.

TEOREMA IV: Se uma reta m é paralela a uma reta n, então, a reta n é paralela à reta m

Prova

Sejam a reta m definida pelo ponto R e pelo ponto S, e a reta n definida pelo ponto P e pelo ponto Q. Seja A um ponto da reta n. Suponha que n seja uma reta paralela a reta m passando por A em uma determinada direção, digamos a da direita. Trace uma reta passando por A que seja perpendicular à reta m, e seja B o ponto de interseção dessa reta com m. Trace uma reta passando por B e perpendicular a n, e seja C o ponto de interseção dessa reta com a reta n. O ponto C ficará à direita do ponto A (lado do paralelismo), do contrário, o triângulo $\triangle ABC$ teria dois ângulos não agudos, o que contraria o teorema do ângulo externo. Tudo isso conforme a figura 23.

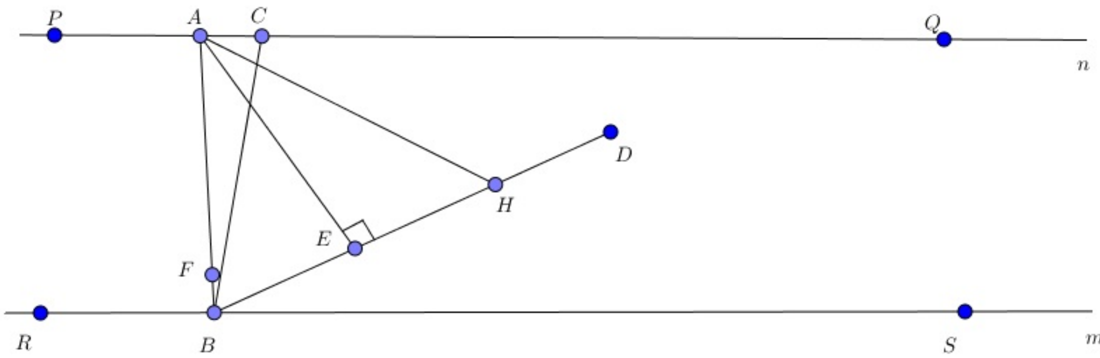
Figura 23 – Segunda paralela



Fonte: Construção do próprio autor

Queremos provar que a reta m é paralela à reta n passando pelo ponto B. Para isto, conforme o resultado do *Teorema III* demonstrado acima, temos que provar que toda reta que passa por B e divide o ângulo $\angle CBS$, intercepta a reta n.

Figura 24 – Segunda paralela com a Primeira

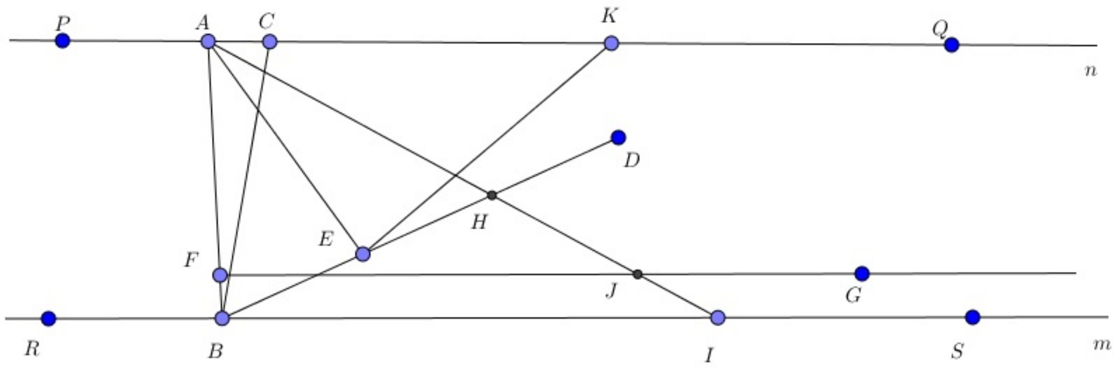


Fonte: Construção do próprio autor

Conforme a figura 24, seja D um ponto pertencente ao plano CBS, tal que a semirreta que contém o segmento BD divide o ângulo $\angle CBS$ em dois. Seja o ponto E pertencente ao segmento BD tal que, traçando o segmento AE, o mesmo seja perpendicular à semirreta BD. Seja F um ponto pertencente ao segmento AB, de modo que o segmento AF seja igual ao segmento AE. Seja H um ponto do segmento BD tal que traçando a semirreta que contém o segmento AH, obtemos o ângulo $\angle FAH$ igual ao ângulo $\angle EAQ$.

Agora, conforme a figura 25, seja I, o ponto onde a semirreta que contém o segmento AH corta m. Seja G, um ponto entre as retas m e n tal que, traçando a reta que contém o segmento FG, esta seja perpendicular ao segmento AB. Se a semirreta que contém o

Figura 25 – Segunda paralela com a Primeira(esquema final)



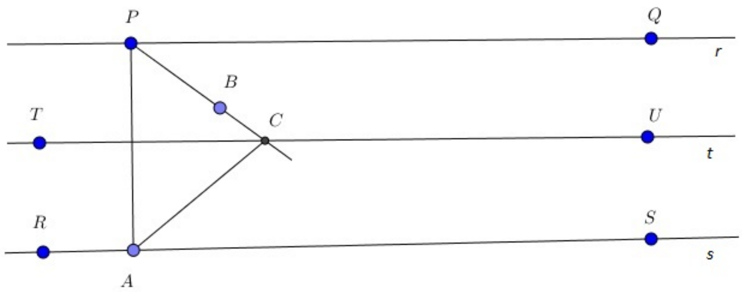
Fonte: Construção do próprio autor

segmento FG corta o lado AB do triângulo $\triangle ABI$ e não corta o lado BI, então, deve cortar o lado AI em um ponto qualquer. Seja J este ponto. Seja K um ponto na semirreta que contém o segmento AQ, de modo que a medida do segmento AK seja igual à medida do segmento AJ. Trace o segmento EK. Observe que os triângulos $\triangle AFJ$ e $\triangle AEK$ são congruentes, pelo caso de LAL, ou seja: o segmento AF é congruente com o segmento AE, o ângulo $\angle FAJ$ é congruente com o ângulo $\angle EAK$ e o segmento AJ é congruente com o segmento AK. Com essa congruência, temos que o ângulo $\angle AFJ = \angle AEK = 90^o$. Daí, os pontos B, E, D e K são colineares. Portanto, a semirreta que contém o segmento BD corta a reta n e segue do Teorema III o resultado desejado.

TEOREMA V: Se as retas r e s são paralelas à reta t na mesma direção, então as retas r, s e t são paralelas entre si na mesma direção.

Prova

Figura 26 – Duas retas paralelas a uma terceira



Fonte: Construção do próprio autor

Sejam as retas r definida pelo ponto P e pelo ponto Q, s definida pelo ponto R e pelo ponto S e a reta t definida pelo ponto T e pelo ponto U. A reta r é paralela à reta t

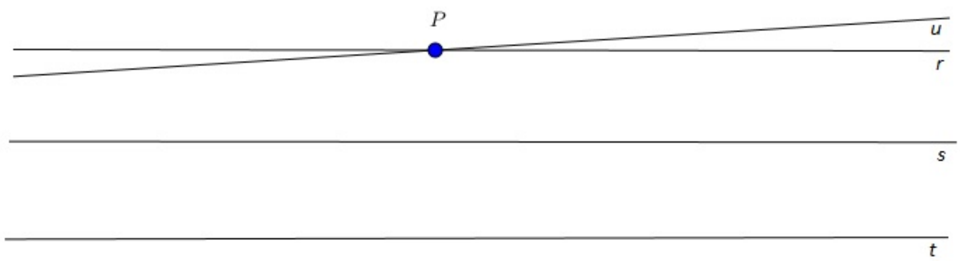
e a reta s é paralela à reta t. Em ambos os casos as retas são paralelas na mesma direção. A demonstração será dividida em dois casos:

$CASO\ I$**:** A reta t está entre as retas r e s.

Conforme a figura 26, seja A um ponto da reta s, tal que, traçando o segmento PA, este seja perpendicular à reta s. Seja B um ponto interior ao ângulo $\angle APQ$. Trace a semirreta que contém o segmento PB. Como as retas r e t são paralelas por definição, logo, de acordo com o $Teorema\ III$, a reta que contém o segmento PB corta a reta t em um ponto qualquer. Seja C esse ponto. Trace o segmento AC. Usando o $Teorema\ IV$, concluímos que a reta t é paralela à reta s. Logo toda reta que entrar no ângulo $\angle ACU$ deve intersectar a reta s. O que prova que a reta r é paralela à reta s. Logo as retas r, s e t são paralelas entre si na mesma direção.

$CASO\ II$**:** As retas r e s estão do mesmo lado da reta t.

Figura 27 – Três retas paralelas



Fonte: Construção do próprio autor

Sejam as retas r, s e t, tal que, a reta r é paralela à reta t e a reta s é paralela à reta t, de modo que em ambos os casos as retas são paralelas em uma mesma direção. Sem perda de generalidade definiremos a direção do paralelismo como sendo a da direita. Seja P um ponto qualquer da reta r. Seja u uma reta que passa por P e paralela à direita à reta s, ou seja, na mesma direção do paralelismo da reta r com a reta t. Pelo caso anterior, obtemos que a reta u é paralela à reta t. E como o paralelismo das retas r e u é na mesma direção, resulta que a reta r coincide com a reta u, já que é única a paralela em determinada direção que passa pelo ponto P. Com esse resultado conclui-se que a reta r é paralela à reta s.

5 TRIÂNGULOS GENERALIZADOS

Faremos inicialmente uma breve definição de pontos ideais, e triângulos generalizados. Posteriormente, falaremos de suas propriedades e faremos as demonstrações.

Pontos Ideais

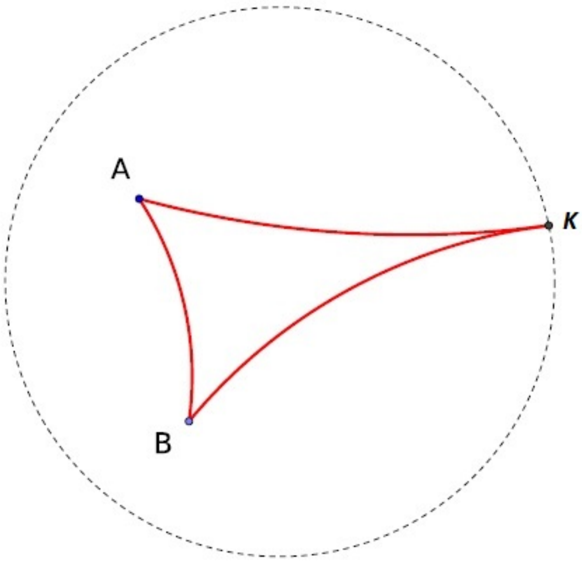
Seja Ω um plano Euclidiano e K um ponto. Chamamos K de ponto ideal se para todo ponto $P \in \Omega$, o segmento $PK = \infty$ e K está em qualquer reta que incide no plano Ω.

Triângulos Generalizados

São triângulos formados por dois vértices ordinários e um vértice ideal; ou um vértice ordinário e dois vértices ideais; ou ainda três vértices ideais.

Podemos usar para os triângulos generalizados a mesma representação dos triângulos euclidianos, ou seja, com base no uso de letras sinalizando seus vértices. A figura 28 apresenta de forma gráfica o triângulo generalizado $\triangle ABK$, com base no modelo de Poincaré, formado pelos vértices ordinários A e B e pelo vértice ideal K.

Figura 28 – Triângulos Generalizados



Fonte: Construção do próprio autor

É relevante destacar que, ainda na figura 28, os lados AK e BK são paralelos. Para a geometria euclidiana, dada duas retas paralelas não há pontos ordinários em comum, enquanto que, para a geometria hiperbólica, é possível haver pontos ideais em comum para duas retas paralelas. Neste caso, o ponto ideal K é comum aos lados AK e BK. Isso será importante na definição dos teoremas envolvendo congruência de triângulos hiperbólicos generalizados.

Assim como os triângulos ordinários, os triângulos generalizados dividem o plano em duas regiões, interior e exterior ao triângulo. A primeira é formada por todos os segmentos de retas ligando dois de seus lados e a segunda é o complemento desta.

5.1 PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS GENERALIZADOS

Nas propriedades a seguir iremos abordar o caso em que os triângulos generalizados são formados por dois pontos ordinários e um ponto ideal. O ponto ideal, também chamado de vértice ideal, será representado pela letra maiúscula K e os vértices ordinários serão representados pelas letras maiúculas X e Y.

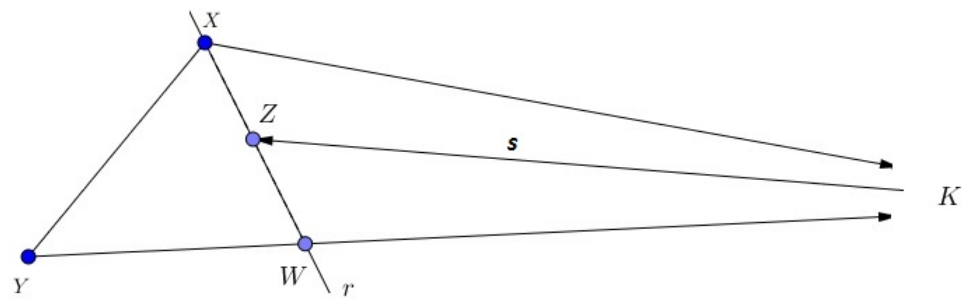
Denotaremos o triângulo generalizado $\triangle XYK$ formado pelos vértices ordinários X e Y e pelo vértice ideal K.

$TEOREMA\ VI$: Se uma reta penetra um triângulo generalizado por um de seus vértices, então, ela corta o lado oposto a este vértice.

Prova

Conforme a figura 29 e como as lados XK e YK são paralelos. Logo, toda reta que penetrar o $\triangle XYK$ pelo vértice X ou pelo vértice Y irá interceptar o lado oposto, ou seja, os lados YK ou XK respectivamente, conforme demonstração do $Teorema\ III$

Figura 29 – Reta penetrando no Triângulo Generalizado



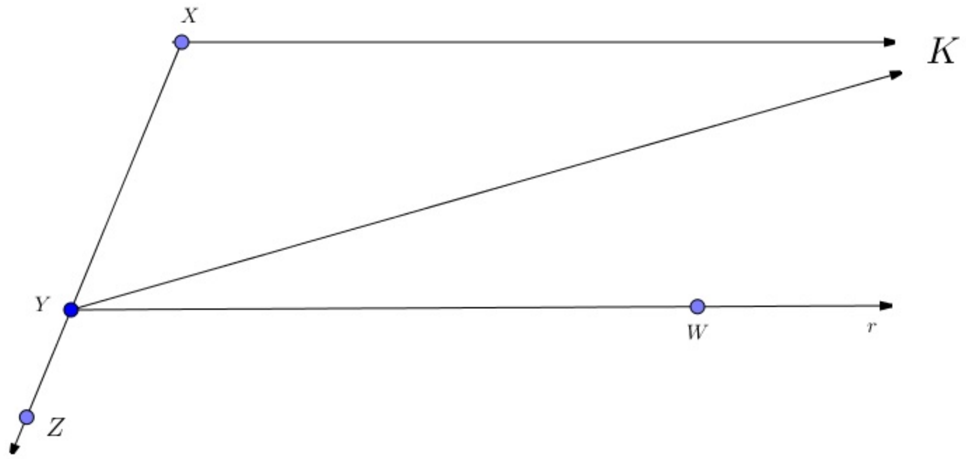
Fonte: Construção do próprio autor

Considere, agora, o caso em que a reta penetra o $\triangle XYK$ pelo vértice ideal K. Para isso, seja Z um ponto qualquer pertencente ao interior do triângulo $\triangle XYK$. Seja r a reta definida pelo ponto X e pelo ponto Z. Pelo paralelismo dos lados XK e YK, a reta r intercepta o lado YK em um ponto qualquer, fato este justificado no $Teorema\ III$. Seja W o ponto de interseção da reta r com o lado YK. Seja s a reta definida pelo vértice ideal K e pelo ponto Z. Pelo Axioma de Pasch, a reta s deverá interceptar o lado XY ou o lado YW do triângulo $\triangle XYW$. A reta s não poderá interceptar o lado YW, pois, nesse caso, ela coincidirá com a semirreta que contém o lado YK. Logo a semirreta s intercepta o lado XY. O que prova o resultado.

TEOREMA VII (TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO): O ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

Prova

Figura 30 – Ângulo Interno e Externo



Fonte: Construção do próprio autor

Seja $\triangle XYK$ um triângulo generalizado definido pelos vértices ordinários X e Y e pelo vértice ideal K. Sejam os ângulos $\angle XYK$ e $\angle YXK$ seus ângulos internos e os respectivos suplementos seus ângulos externos.

Conforme figura 30, seja Z um ponto no prolongamento do lado XY. como $\angle XYK$ é um dos ângulos internos do triângulo generalizado $\triangle XYK$ então, o ângulo $\angle ZYK$ é externo adjacente ao ângulo $\angle XYK$. Queremos provar que o ângulo externo $\angle ZYK$ é maior que o ângulo interno não adjacente $\angle YXK$. Para isso, seja W um ponto qualquer, tal que, traçando uma reta r, definida pelo ponto Y e pelo ponto W, obtem-se o ângulo $\angle ZYW$ igual ao ângulo interno $\angle YXK$ do triângulo $\triangle XYK$.

O ponto W definido acima poderá assumir as seguintes posições em relação ao triângulo $\triangle XYK$:

(i) interior ao triângulo

(ii) exterior ao triângulo

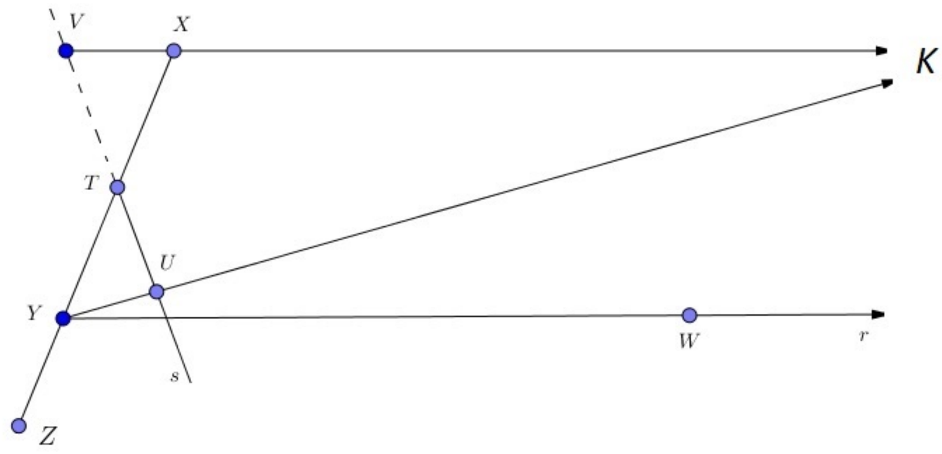
(iii) sobre o lado YK

Análise

(i) Pelos quatro primeiros postulados de Euclides, o ponto W não poderá ser interior ao triângulo $\triangle XYK$, pois a reta r não intercepta o lado XK do triângulo $\triangle XYK$.

(ii) Se o ponto W for exterior ao triângulo $\triangle XYK$, não há o que provar, pois o ângulo $\angle ZYK$ é maior que o ângulo interno $\angle YXK$, por construção.

Figura 31 – Ângulo Externo no Triângulo Generalizado

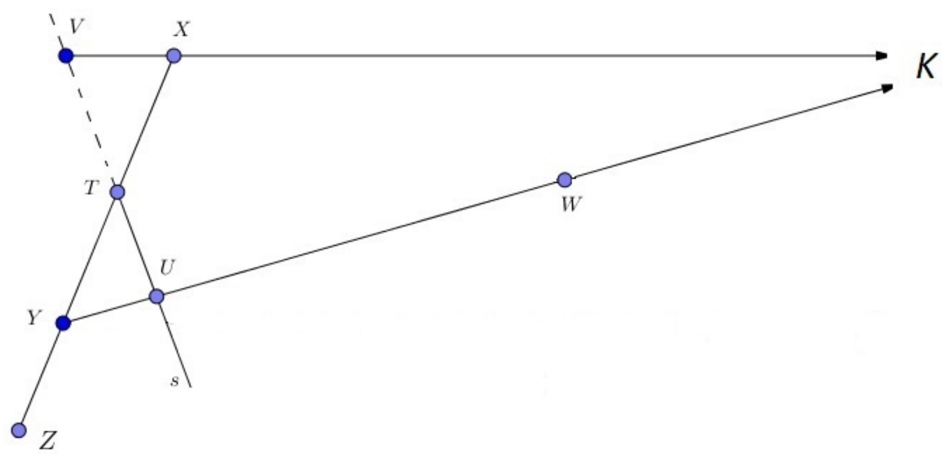


Fonte: Construção do próprio autor

(iii) Para o terceiro e último caso, resta-nos provar que o ponto W não esteja sobre o lado YK do triângulo $\triangle XYK$.

Para isso, vamos supor que o ponto W esteja sobre o lado YK. Daí, conforme a figura 32, seja T o ponto médio do lado XY. Trace a reta s, passando pelo ponto T, perpendicular ao lado YK . Seja U o ponto de interseção da reta s com o lado YK. Seja V um ponto da reta definida pelo ponto X e pelo ponto K, tal que o segmento VX seja igual ao segmento YU e que os pontos U e V estejam em lados opostos à reta definida pelo ponto X e pelo ponto Y. Tudo isso conforme a figura 31.

Figura 32 – Ângulo Externo no T. Generalizado



Fonte: Construção do próprio autor

Os triângulos ordinários $\triangle TXV$ e $\triangle TYU$ são congruentes pelo caso de congruência LAL, pois, o lado XT é congruente ao lado YT por construção. O ângulo $\angle TXV$ é congruente ao ângulo $\angle TYU$, pelo fato da reta definida pelo ponto V e pelo ponto K ser paralela à reta definida pelo ponto Y e pelo ponto K. Por último o segmento XV é congruente ao segmento YU, por construção. Segue daí que os pontos V, T e U são colineares e o segmento UV é perpendicular a lado VK e ao lado UK, o que contradiz a $Proposi$ção II das retas paralelas. Logo, o ponto W não poderá estar sobre o lado YK. Portanto, como o ponto W não poderá estar no interior do triângulo e nem sobre o lado YK, segue que o ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

5.1.1 **Congruência de Triângulos Generalizados**

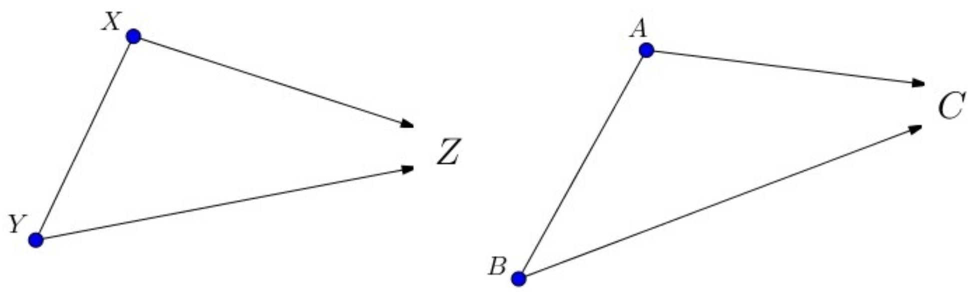
Assim como ocorre para os Triângulos Ordinários da geometria Neutra, apresentados anteriormente no capítulo 3, os Triângulos Generalizados também satisfazem alguns casos de Congruência.

$Defini$ção

Dois triângulos generalizados são congruentes se os seus vértices ordinários correspondentes são congruentes e se os lados finitos que se correspondem são congruentes.

Sejam $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ dois triângulos generalizados formados por dois vértices ordinários e um vértice ideal cada. Para as demonstrações dos Teoremas $VIII$, IX e X, o triângulo $\triangle XYZ$ será definido pelos vértices ordinários X e Y e pelo vértice ideal Z enquanto o triângulo $\triangle ABC$ será definido pelos vértices ordinários A e B e o vértice ideal C, conforme figura 33.

Figura 33 – Congruência de T. Generalizados



Fonte: Construção do próprio autor

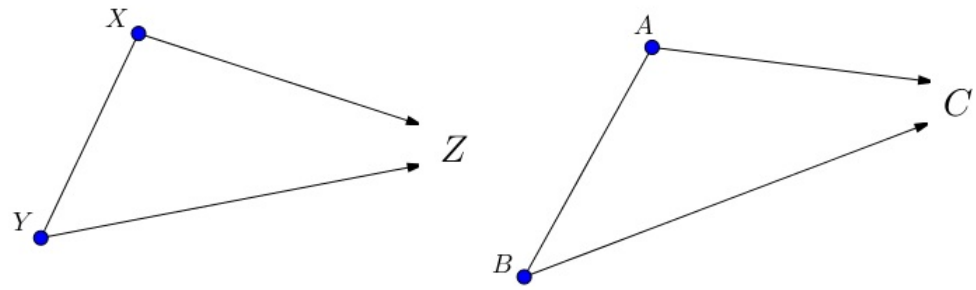
Como ocorre com os triângulos ordinários, se o triângulo Generalizado $\triangle XYZ$, é congruente com o triângulo Generalizado $\triangle ABC$, podemos denotar por $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

$TEOREMA\ VIII$: Sejam $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ dois triângulos generalizados, tais que, $XY \equiv AB$ e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, então $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

Prova

Sejam $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ dois triângulos generalizados, tais que, $XY \equiv AB$, e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, conforme a figura 34.

Figura 34 – Congruência de Triângulos Generalizados

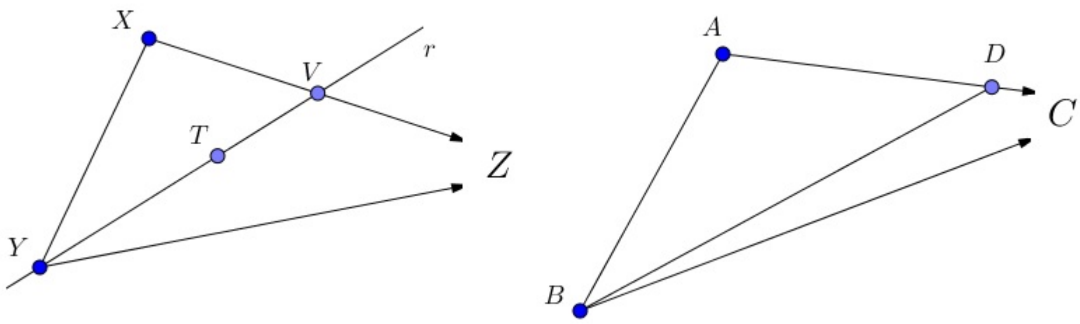


Fonte: Construção do próprio autor

Como $XY \equiv AB$, e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, logo, devemos mostrar que $\angle XYZ \equiv \angle ABC$. Para isso, vamos supor sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle XYZ$ é maior que o ângulo $\angle ABC$. Daí, conforme a figura 35, seja T um ponto interior ao triângulo $\triangle XYZ$, tal que traçando uma reta que passa pelo ponto Y e pelo ponto T, obtêm-se o ângulo $\angle XYT$ congruente com o ângulo $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$. Chamaremos de r a reta definida pelo ponto Y e pelo ponto T.

Pelo *Teorema VI*, a reta r intercepta o lado XZ em um ponto qualquer do triângulo $\triangle XYZ$. Seja V o ponto de interseção da reta r com o lado XZ do triângulo $\triangle XYZ$. Considere o triângulo $\triangle XYV$.

Figura 35 – Caso 1 de Congruência de Triângulos Generalizados



Fonte: Construção do próprio autor

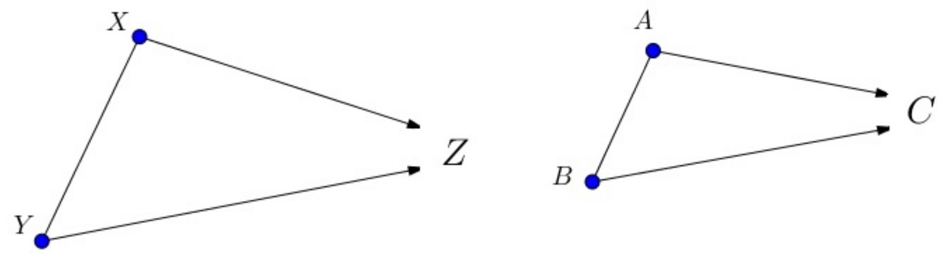
Agora, usando ainda a figura 35, seja D um ponto pertencente ao lado AC do triângulo generalizado $\triangle ABC$, tais que, o segmento AD seja congruente com o segmento XV do triângulo $\triangle XYV$. Trace o segmento BD, obtendo-se assim o triângulo $\triangle ABD$. Como $XY \equiv AB$, $\angle YXV \equiv \angle BAD$ e $XV \equiv AD$, daí resulta que $\triangle XYV \equiv \triangle ABD$, pelo caso de congruência LAL dos triângulos da Geometria Euclidiana.

Com esse resultado, obtemos que o ângulo $\angle ABD \equiv \angle XYV \equiv \angle ABC$, ou seja, são congruentes entre si. O que é um absurdo. Daí segue o resultado.

TEOREMA IX: Sejam $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ dois triângulos generalizados, tais que, $\angle XYZ \equiv \angle ABC$ e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$. Então, $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

Prova

Figura 36 – Caso 2 de Congruência de Triângulos Generalizados

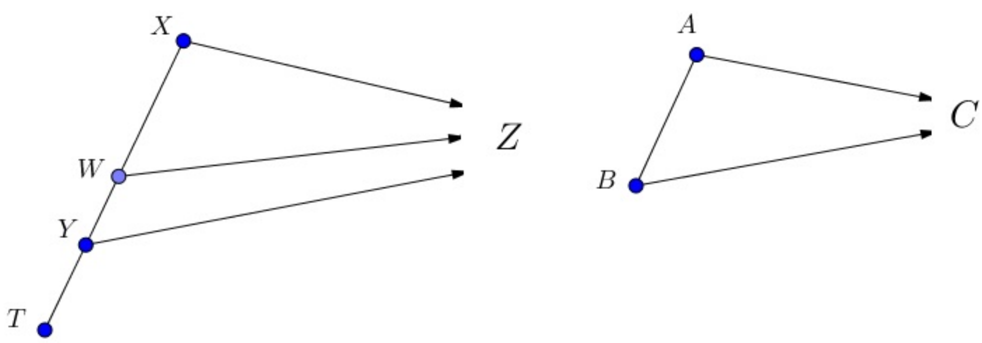


Fonte: Construção do próprio autor

Considere os triângulos generalizados $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$, tais que, o $\angle XYZ \equiv \angle ABC$ e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, conforme a figura 36

Como $\angle XYZ \equiv \angle ABC$, e $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, logo, resta-nos mostrar que $XY \equiv AB$.

Figura 37 – Caso 2 de Congruência de Triângulos



Fonte: Construção do próprio autor

Inicialmente, suponha por absurdo que o lado XY não é congruente com o lado AB. Em seguida vamos supor sem perda de generalidade que o lado XY é maior que o lado AB. Seja W um ponto qualquer do lado XY, tal que, o segmento XW do triângulo $\triangle XYZ$, seja congruente com o lado AB do triângulo $\triangle ABC$ conforme a figura 37. Trace a semirreta que contém o segmento WZ. Pelo *Teorema VIII*, obtemos que $\triangle XWZ \equiv \triangle ABC$, pois $XW \equiv AB$ e $\equiv \angle WXZ \equiv \angle BAC$. Com esse resultado, concluímos que o ângulo $\angle XWZ$

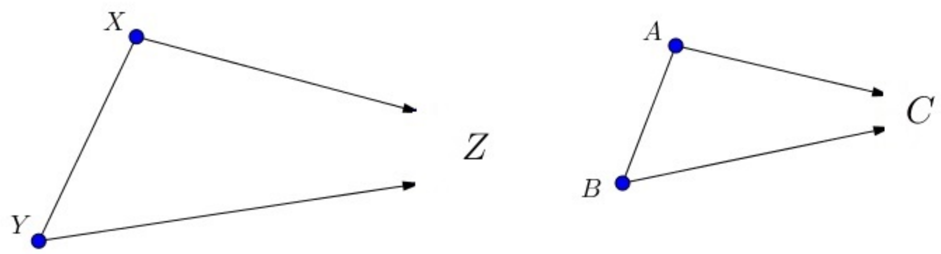
do triângulo $\triangle XWZ$ é congruente com o ângulo $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$. E como $\angle ABC \equiv \angle XYZ$, por definição, resulta que $XWZ \equiv \angle XYZ$.

Considere o Triângulo Generalizado $\triangle WYZ$. Prolongue o lado WY do triângulo $\triangle WYZ$. Seja T um ponto qualquer desse prolongamento, tal que o ângulo $\angle TYZ$ seja o ângulo externo adjacente do ângulo interno $\angle WYZ$ do triângulo $\triangle WYZ$. O ângulo externo $\angle TYZ$ do triângulo $\triangle WYZ$ é igual ao ângulo interno não adjacente $\angle YWZ$ do triângulo $\triangle WYZ$. O que contraria o *Teorema VII*, que prova que o ângulo externo do triângulo generalizado é sempre maior que o ângulo interno não adjacente. Esse resultado prova que $XY \equiv AB$. Logo, os triângulos generalizados $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ são congruentes.

TEOREMA X: Sejam $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ dois triângulos generalizados, tais que, $XY \equiv AB$, $\angle XYZ \equiv \angle YXZ$ e $\angle ABC \equiv \angle BAC$. Então $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

Considere os triângulos generalizados, $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$, tais que, $XY \equiv AB$, $\angle XYZ \equiv \angle YXZ$ e $\angle ABC \equiv \angle BAC$, conforme a figura 38.

Figura 38 – Caso 3 de Congruência de Triângulos Generalizados



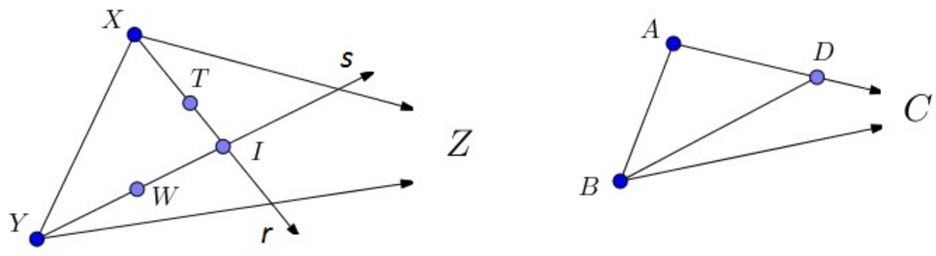
Fonte: Construção do próprio autor

Como $XY \equiv AB$, $\angle XYZ \equiv \angle YXZ$ e $\angle ABC \equiv \angle BAC$, logo é suficiente provar que o ângulo $\angle XYZ$ do triângulo $\triangle XYZ$ é congruente com o ângulo $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$, ou, resumidamente, que $\angle YXZ \equiv \angle BAC$. Focaremos em mostrar que $\angle XYZ \equiv \angle ABC$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle XYZ$ do triângulo $\triangle XYZ$ é maior que o ângulo $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$. Conforme a figura 39, sejam W e T dois pontos interiores ao triângulo $\triangle XYZ$, tais que, construindo os ângulos $\angle XYW$ e $\angle YXT$, estes sejam congruentes entre si e congruentes com o ângulo $\angle ABC$ ou $\angle BAC$ do triângulo $\triangle ABC$, já que $\angle ABC \equiv \angle BAC$.

Pelo *Teorema VI*, obtemos que a semirreta definida pelo ponto X e pelo ponto T intercepta o lado YZ do triângulo $\triangle XYZ$ e a semirreta definida pelo ponto Y e pelo ponto W intercepta o lado XZ do triângulo $\triangle XYZ$. Chamaremos de r a semirreta definida pelo ponto X e pelo ponto T e de s, a semirreta definida pelo ponto Y e pelo ponto W. Pelo *Axioma I* (*Pasch*), a semirreta r intercepta a semirreta s em um ponto qualquer no

Figura 39 – Caso 3 de Congruência de Triângulos



Fonte: Construção do próprio autor

interior ao triângulo $\triangle XYZ$. Seja I o ponto de interseção da semirreta r com a semirreta s. Considere o triângulo $\triangle XYI$.

Por outro lado seja D um ponto pertencente ao lado AC do triângulo $\triangle ABC$, tal que, o segmento AD do triângulo $\triangle ABC$ seja congruente com o lado XI do triângulo $\triangle XYI$. Com essas construções, segue que $\triangle XYI \equiv \triangle ABD$ pelo caso de congruência LAL da Geometria Euclidiana. Ou seja, o lado XI do triângulo $\triangle XYI$ é congruente com o lado AD do triângulo $\triangle ABD$, o ângulo $\angle YXI$ do triangulo $\triangle XYI$ é congruente com o ângulo $\angle BAD$ do triângulo $\triangle ABD$ e o lado XY do triângulo $\triangle XYI$ é congruente ao lado AB do triângulo $\triangle ABD$. O que resulta que o ângulo $\angle XYI$ do triângulo $\triangle XYI$ é congruente com o ângulo $\angle ABD$ do triângulo $\triangle ABD$. Daí, temos que, para os triângulos $\triangle XYI$, $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$, o ângulo $\angle ABD$ é congruente com o ângulo $\angle ABC$. Deste modo temos que o ponto D deve pertencer ao lado BC do triângulo $\triangle ABC$, o que é um absurdo. Logo, os triângulos generalizados $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ são congruentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração a consistência do modelo axiomático proposto por Hilbert, algumas comparações entre os conceitos e as propriedades podem ser realizadas, de maneira objetiva, com o intuito de descrever quais propriedades são válidas tanto na geometria euclidiana quanto na geometria hiperbólica. Da mesma forma, é possível também mostrar aquelas que poderão ser aplicadas apenas para uma das geometrias. Isto porque, tendo em vista o número de questionamentos realizados ao longo dos anos sobre o quinto postulado de Euclides, podem-se encontrar vários teoremas que não são válidos em ambas as geometrias.

Neste sentido, dividiremos as descrições em dois casos, ou seja, inicialmente para as propriedades que foram demonstradas, no presente trabalho, como válidas para ambas as geometrias e posteriormente as propriedades tidas como verdadeiras para somente uma delas.

Caso 1: As propriedades citadas são válidas para a geometria euclidiana e para a hiperbólica.

(*Propriedade* 1). A congruência de triângulos.

Na geometria euclidiana temos os casos de congruência: LAL, ALA, LLL e LAA_0, conhecidos do nosso cotidiano. Já na geometria Hiperbólica temos os critérios que foram demonstrados nos teoremas $VIII$, IX e X, que são:

$TEOREMA\ VIII$. Se o lado $XY \equiv AB$ e o ângulo $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, então o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

$TEOREMA\ IX$. Se o ângulo $\angle XYZ \equiv \angle ABC$, e o ângulo $\angle YXZ \equiv \angle BAC$, então, o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

$TEOREMA\ X$: Se o lado $XY \equiv AB$, o ângulo $\angle XYZ \equiv \angle YXZ$, e o ângulo $\angle ABC \equiv \angle BAC$, então, o triângulo $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$.

(*Propriedade* 2). O teorema do ângulo externo.

“O ângulo externo de um triângulo é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente”. Faz-se importante ressaltar que, na geometria hiperbólica, consideramos apenas os ângulos externos dos vértices ordinários.

(*Propriedade* 3). O teorema.

“Se uma reta penetra um triângulo por um de seus vértices, então ela corta o lado oposto a este vértice”.

Embora seja um teorema verdadeiro para ambas as geometrias, limitamos em demonstrá-lo apenas para a hiperbólica, pois para a euclidiana, sua prova é imediata pelo axioma de Pasch generalizado: “Se X é um ponto no interior do ângulo VUW, então a semirreta UX interseta o segmento VW num ponto T”.

Caso 2: As propriedades citadas são válidas apenas para uma das geometrias.

(*Propriedade* 4).

“Não é possível demonstrar na geometria neutra que todo ponto interior ao ângulo pertence a um segmento com extremo nos lados do ângulo”. Embora esta seja uma proposição verdadeira na geometria euclidiana, o mesmo não ocorre na geometria hiperbólica. Mas é válida a proposição: “todo ponto do interior de um ângulo está num segmento com extremos nos lados do ângulo”, e poderá ser interpretada como sendo um substituto do quinto postulado de Euclides (ANDRADE [1]).

(*Propriedade* 5).

Dada uma reta r e um ponto P fora de r, temos duas possibilidades. Por um lado, para a geometria euclidiana “existe exatamente uma reta s que passa por P e não intercepta r”; por outro lado, para a geometria hiperbólica “existem pelo menos duas retas, s e t, que passam por P e não interceptam r”.

6.2 CONCLUSÃO

Apresentamos nesse trabalho o desenvolvimento histórico da geometria hiperbólica, de Euclides à Poincaré, fazendo uma breve exposição dos principais matemáticos que contribuíram para encontrar uma resposta lógica para a seguinte pergunta: “seria o quinto postulado de Euclides um teorema?”. Dos autores, destacamos Gaus, Bolyai e Lobachevsky, os quais desenvolveram, quase que ao mesmo tempo, uma resposta a tal questão, criando uma nova geometria, chamada de geometria não euclidiana.

Esse processo de tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides, ou encontrar uma contradição para o mesmo, nos serviu de exemplo de como a base da teoria da matemática foi lentamente construída, ao longo dos séculos, através de afirmações que eram possíveis ou não de serem provadas. Do contrário, a fundamentação da matemática não seria concreta, e toda a sua teoria poderia ser inconsistente.

Nas considerações finais da presente dissertação verificamos as três propriedades observadas nas duas geometrias citadas. Contudo, com relação às diferenças, podemos destacar que a principal é o postulado das paralelas. Para a geometria euclidiana “dada uma reta e um ponto fora dela, existe apenas uma reta paralela passando pelo ponto”, enquanto na hiperbólica “existe pelos menos duas retas passando pelo ponto”.

O presente trabalho reforça a ideia de que a geometria euclidiana não é uma verdade absoluta na Matemática, e que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto a euclidiana, sendo possível de ser aplicada no nosso cotidiano. Espera-se, como contribuição deste trabalho para o meio acadêmico, que ele sirva de suporte nos estudos e na preparação das aulas de professores de matemática e física, tornando-os mais conscientes da importância das Geometrias não Euclidianas na formação dos discentes, e encorajando-os a encontrar um meio de aplicá-la no cotidiano de sala de aula, contribuindo, assim, para o enriquecendo do ensino da matemática e de outras ciências.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRADE, Plácido. **Introdução à geometria hiperbólica**: o modelo de Poincaré. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[2] ÁVILA, Geraldo. Euclides, Geometria e Fundamentos. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, v. 45, n. 1, p.1-9, 2001. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/45/1.htm>. Acesso em: 20 jan. 2017.

[3] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.

[4] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[5] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.

[6] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[7] PEREZ, Carlos Martinez. **Fundamentos de Geometria Hiperbólica**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós Graduação em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes>. Acesso em: 09 fev. 2017.

[8] SOUZA, Carlos Bino. **Geometria Hiperbólica:** Consistência do Modelo do Disco de Poincaré. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pos Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2014. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes>. Acesso em: 20 out. 2016.