

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

Não-Comutatividade em um Modelo Cosmológico com Fluido de Poeira

Juiz de Fora
2015

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

Não-Comutatividade em um Modelo Cosmológico com Fluido de Poeira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rezende Rodrigues, Luíz Guilherme.

Não-Comutatividade em um Modelo Cosmológico com Fluido de Poeira /
Luíz Guilherme Rezende Rodrigues. – 2015.
59 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2015.

1. Modelo cosmológico. 2. Não-comutatividade. 3. Aceleração do
universo. I. Oliveira Neto, Gil. Não-Comutatividade em um Modelo cosmo-
lógico com Fluido de Poeira.

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

Não-Comutatividade em um Modelo Cosmológico com Fluido de Poeira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Guilherme de Berredo Peixoto
Universidade Federal de Juiz de fora

Professora Dra. Maria de Fátima Alves da Silva
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus por proporcionar tantas vitórias em minha vida.
- Aos meus grandes amores e heróis: Meu pai Luíz Guilherme de Oliveira Rodrigues, minha mãe Evanise Rezende Rodrigues e meu tio Éverson de Souza Rezende, que foram insistentes e perseverantes em minha educação, sempre me ensinando a ter humildade, paciência e caráter.
- Aos meus queridos e amados irmãos: Pedro Augusto Rezende Rodrigues e Lívia Rezende Rodrigues por todo o carinho e apoio.
- À minha namorada que tanto amo, Nicolle Bastos Magalhães, por estar sempre presente, pelo apoio e paciência durante toda esta caminhada.
- Ao professor Dr. Gil de Oliveira Neto, pela amizade, paciência, dedicação, ensinamentos durante todo este tempo e pelo grande exemplo de profissional que é.
- Aos grandes amigos de graduação Alan Corrêa Diniz e Luiz Henrique de Carmo Castro, sem os quais não chegaria aqui.
- Aos amigos de sala, Jefferson Martins e Manoel Carlos dos Santos Júnior, pela amizade e companheirismo.
- Ao grande amigo Wesley Augusto Dias Pires, pela amizade e apoio na hora dos estudos.
- A todos os amigos que conquistei durante esta caminhada, que contribuíram direta ou indiretamente em minha vida pessoal e profissional.
- À Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, ao órgão financiador CAPES.

“Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio, e levantarei o mundo”.

Arquimedes.

RESUMO

Na presente dissertação estudamos um modelo cosmológico clássico não-comutativo com a métrica Friedmann-Robertson-Walker, cujas seções espaciais podem ter curvatura constante positiva ($k = 1$), negativa ($k = -1$) ou zero ($k = 0$). O conteúdo material é descrito por um fluido perfeito de poeira. A dinâmica do modelo não-comutativo é descrita no formalismo Hamiltoniano, com o auxílio da formulação ADM e do formalismo variacional de Schutz. O espaço de fase do modelo é dado pelas variáveis $a(t)$, $T(t)$, $P_a(t)$ e $P_T(t)$, em que $a(t)$ é o fator de escala do Universo, $T(t)$ é a coordenada associada ao fluido e $P_a(t)$, $P_T(t)$ seus respectivos momentos canonicamente conjugados. Introduzimos a não-comutatividade via parênteses de Poisson. Para estudarmos o modelo, introduzimos transformações de coordenadas que nos levaram a variáveis comutativas, mais um parâmetro não-comutativo γ . Combinando as equações de Hamilton, obtidas a partir da Hamiltoniana escrita em termos das variáveis comutativas, mais o parâmetro γ , chegamos a uma equação diferencial, de segunda ordem, para o fator de escala $a(t)$. Tal equação descreve a dinâmica do modelo não-comutativo e depende de vários parâmetros, tais como: γ , k , C e B . Obtivemos soluções analíticas para essa equação. Com as soluções encontradas, estudamos as novas propriedades introduzidas pela não-comutatividade, com o objetivo de obter resultados que auxiliem na explicação da expansão acelerada do Universo. As soluções não-comutativas apresentaram dois parâmetros adicionais γ e B , em comparação com as soluções comutativas correspondentes, além dos parâmetros comuns k e C , este último associado à energia do fluido. Tais parâmetros influenciam de maneira significativa o tipo de comportamento de cada solução. Para determinados valores dos parâmetros algumas soluções podem ser consideradas como possíveis candidatas à explicação da expansão atual do Universo. Dentre esses casos, para $k = 0$, as soluções não-comutativas apresentaram um crescimento exponencial para o infinito, enquanto as soluções comutativas correspondentes apresentaram crescimento polinomial. Para $k = -1$ ambas as soluções apresentaram o mesmo comportamento qualitativo de expansão para o infinito descrito por funções hiperbólicas. Para $k = 1$, foram obtidas soluções expansivas que apesar de não descreverem a expansão atual do Universo são importantes, pois, não estão presentes no modelo comutativo correspondente. Tais expansões ocorrem de maneira linear no tempo, mas, de maneira a oscilar entre máximos e mínimos. Buscamos na literatura outro modelo não-comutativo com a finalidade de verificar se maneiras diferentes de introduzir a não-comutatividade levam aos mesmos resultados. Tais comparações resultaram em comportamentos qualitativos bastante diferentes entre tais soluções não-comutativas, uma vez que as equações diferenciais para o fator de escala obtidas, para cada modelo, são diferentes.

Palavras-chave: Modelo cosmológico. Não-comutatividade. Aceleração do Universo.

ABSTRACT

In this dissertation we study a classical noncommutative cosmological model with a Friedmann-Robertson-Walker metric. The spatial sections may have positive ($k = 1$), negative ($k = -1$) or zero ($k = 0$) constant curvature. The matter content is described by a dust perfect fluid. The dynamics of the noncommutative model is described using the Hamilton's formalism, with the aid of the ADM and Schutz's formalisms. The phase space of the model is given by the variables $a(t)$, $T(t)$, $P_a(t)$ and $P_T(t)$, where $a(t)$ is the scale factor of the Universe, $T(t)$ is the coordinate associated to the fluid and $P_a(t)$, $P_T(t)$ are their canonically conjugated momenta. We introduce the noncommutativity through Poisson brackets. In order to study the model, we introduce coordinate transformations from the noncommutative coordinates to the commutative ones plus a noncommutative parameter γ . Combining the Hamilton's equations, obtained from the Hamiltonian written in terms of the commutative variables plus the γ parameter, we arrive at a second order differential equation for the scale factor $a(t)$. This equation describes the dynamics of the non-commutative model and depends on several parameters, such as: γ , k , C and B . We obtained analytical solutions for this equation. With the obtained solutions, we study the new properties introduced by noncommutativity, in order to get results that help explaining the accelerated expansion of the Universe. The noncommutative solutions have two additional parameters γ and B , compared to the corresponding commutative solutions, beyond the common parameters k and C , the last one associated to the fluid energy. These parameters significantly influence the behavior of each solution. For certain parameters values some solutions are considered as possible candidates to explain the current expansion of the Universe. Among these cases, for $k = 0$, the non-commutative solutions showed an exponential increase to infinity, while the corresponding commutative ones showed polynomial growth. For $k = -1$ both solutions had the same qualitative behavior of expansion to infinity described by hyperbolic functions. For $k = 1$, expansive solutions, which do not describe the current expansion of the universe, were found. They are important because they are not present in the corresponding commutative model. Such solutions expands linearly in time oscillating between maximum and minimum values. We seek in the literature another non-commutative model in order to verify if different ways of introducing the noncommutativity lead to the same results. Such comparisons result in quite different qualitative behavior of such noncommutative solutions, since the differential equations for the scale factor obtained for each model are different.

Key-words: Cosmological model. Noncommutativity. Acceleration of the Universe.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.01; C = 1$	37
Figura 2	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.001; C = 1$	37
Figura 3	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 5$	37
Figura 4	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 100$	37
Figura 5	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.001; C = 1$	38
Figura 6	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1$	38
Figura 7	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 5$	39
Figura 8	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 100$	39
Figura 9	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$	42
Figura 10	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.2; C = 1; B = -1$	42
Figura 11	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$	42
Figura 12	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 2; B = -1$	42
Figura 13	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = 5$	43
Figura 14	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = -10$	43
Figura 15	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 2; B = -1$	43
Figura 16	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 5; B = 1$	43
Figura 17	– Fator de escala para valores suficientemente grandes do parâmetro C combinado a $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 100$	44
Figura 18	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$	46

Figura 19	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = -5$	46
Figura 20	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 2; B = -1$	46
Figura 21	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 5; B = 1$	46
Figura 22	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = -10$	47
Figura 23	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = 38$	47
Figura 24	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 2, B = -1$	47
Figura 25	– Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 10, B = 1$	47
Figura 26	– Fator de escala com valores suficientemente grandes em módulo de B para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = -38$	48
Figura 27	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 2$	51
Figura 28	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1$	51
Figura 29	– Fator de escala para as diferentes frequências e para $\gamma < 0; \beta < 0$ com valores suficientemente grandes de C . Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.1 = \beta; C = 100$	53
Figura 30	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 1, B = 1$	53
Figura 31	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1, B = 1$	54
Figura 32	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1, B = -1$	55
Figura 33	– Fator de escala para os casos $\gamma < 0; \beta < 0$ com valores suficientemente grandes em módulo de B . Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.1 = \beta; C = 1, B = -38$	55
Figura 34	– Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 1, B = -5$	56

Notações e Convenções:

No decorrer do presente texto será convencionado:

A derivada temporal de uma função $g(t)$ será representada por $\dot{g}(t)$.

Dois índices repetidos, sendo um subscrito e o outro sobrescrito, denotam soma.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3.

O índice 0 representa no geral a coordenada temporal.

A métrica possui assinatura $(-, +, +, +)$.

O determinante da métrica é denotado por g .

A derivada parcial de um tensor T em relação a coordenada x^β é denotada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T = T_{,\beta}$$

A derivada covariante de um tensor T em relação a coordenada x^β é denotada por:

$$\nabla_\beta T = T_{;\beta}.$$

As constantes c e G são iguais a 1.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	INTRODUÇÃO	12
1.2	UM BREVE HISTÓRICO	12
1.3	MOTIVAÇÃO	12
1.4	ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS	13
2	RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA	15
2.1	INTRODUÇÃO	15
2.2	RELATIVIDADE GERAL	15
2.2.1	Os símbolos de Christoffel	15
2.2.2	Transporte Paralelo e Geodésicas	16
2.2.2.1	<i>Transporte paralelo</i>	<i>16</i>
2.2.2.2	<i>Geodésicas</i>	<i>17</i>
2.2.3	Tensor de Curvatura	17
2.2.4	Identidade de Bianchi	17
2.2.5	As Equações de Einstein	18
2.3	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	18
2.3.1	O Universo de Friedmann-Robertson-Walker	19
2.3.2	A geometria dos espaços com curvaturas constantes	20
2.3.2.1	<i>Caso $k = 1$</i>	<i>20</i>
2.3.2.2	<i>Caso $k = 0$</i>	<i>21</i>
2.3.2.3	<i>Caso $k = -1$</i>	<i>21</i>
3	A COSMOLOGIA COM FLUIDO PERFEITO	23
3.1	INTRODUÇÃO	23
3.2	O FORMALISMO ADM DA RELATIVIDADE GERAL	23
3.3	O FLUIDO PERFEITO DE UMA COMPONENTE, COMPOSTO POR BÁRIONS	25
3.4	O FORMALISMO DE SCHUTZ NA REPRESENTAÇÃO DE POTEN- CIAIS VELOCIDADE	27
3.5	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO	28
3.5.1	Cálculo dos momentos canonicamente conjugados	29
4	RESULTADOS OBTIDOS	31
4.1	INTRODUÇÃO	31

4.2	O MODELO COSMOLÓGICO NÃO-COMUTATIVO	31
4.3	ESTUDO DAS SOLUÇÕES	34
4.3.1	Caso $k = 0$	35
4.3.2	Caso $k = 1$	39
4.3.3	Caso $k = -1$	44
4.4	O MODELO DA LITERATURA	48
4.4.1	Caso $k = 0$	50
4.4.2	Caso $k = 1$	52
4.4.3	Caso $k = -1$	54
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação possui como objetivo principal o estudo da não - comutatividade buscando informações sobre como ela pode auxiliar na explicação da atual expansão do Universo. Os resultados obtidos deram origem ao artigo [1].

Além de um breve histórico sobre a origem da não-comutatividade, são citados alguns trabalhos referentes a tal assunto. Em seguida, é apresentada a motivação para a introdução e estudo da não-comutatividade no modelo cosmológico. A parte final é composta por um pequeno resumo sobre a estrutura e as ideias dos capítulos.

1.2 UM BREVE HISTÓRICO

Apesar de ganhar cenário apenas nas últimas décadas, a ideia da não - comutatividade teve início com Heisenberg ao estudar auto-energia do elétron nos estágios iniciais da construção da mecânica quântica [2]. Ele considerou a proposta de ser não nula a incerteza entre as coordenadas espaciais com a finalidade de remover singularidades presentes na teoria [3]. Posteriormente, W. Pauli comunicou essas ideias a Oppenheimer. Esse fato foi fundamental para a publicação do primeiro artigo sobre a não-comutatividade entre as coordenadas do espaço-tempo [4]. Tal artigo, publicado por Hartland S. Snyder (orientando de Oppenheimer) em 1947 [5], propunha uma não-comutatividade entre as variáveis do espaço-tempo com o intuito de remover divergências teóricas em teoria quântica de campos. A ideia de Snyder serviu como base para a publicação de Yang [6], que usou a não-comutatividade em escalas pequenas de comprimento com a finalidade de eliminar divergências em eletrodinâmica quântica. Após o desenvolvimento e o sucesso dos processos de renormalização [7], as teorias dos espaços-tempos não-comutativos foram deixadas de lado e ficaram adormecidas durante anos.

1.3 MOTIVAÇÃO

Motivados pela busca de uma física que descreva o início do Universo e para o melhor entendimento dos buracos negros, um dos maiores desafios da física teórica atualmente vem sendo a tentativa de unificar as teorias que governam o mundo microscópico (regido pela mecânica quântica) e o mundo macroscópico (descrito pela teoria da relatividade geral) [8]. Resultados obtidos pelas teorias de cordas (grande candidata a unificar essas teorias), com um campo magnético de fundo constante na presença de D-branas, mostraram que os espaços não-comutativos surgem de maneira natural. Estes fatores não apenas fazem tal assunto ganhar grandes proporções no cenário atual, mas também indicam que os

estudos das teorias não-comutativas podem ser importantes no auxílio da construção desta unificação [9].

Com o avanço das pesquisas nos últimos anos, existem na literatura várias obras de diversas áreas sobre tal assunto podendo ser citadas [11],[12],[13],[14],[15],[16] e [1]. Tal assunto também passou a ser aplicado em vários sistemas como o oscilador harmônico quântico, o efeito hall quântico, física de buracos negros [17], entre outros.

Para desenvolver o presente trabalho, foram utilizadas algumas destas obras que fundamentaram a construção da presente teoria não-comutativa. É importante lembrar e destacar que a principal motivação para o estudo da não-comutatividade na presente dissertação refere-se à expansão acelerada do Universo.

As propriedades do Universo em sua fase inicial podem ter sido muito diferentes das de hoje. Baseadas nas motivações já citadas, uma forma de introduzir a não-comutatividade é a hipótese de que uma destas propriedades poderia ser a satisfação de uma álgebra não-comutativa pelas coordenadas do espaço-tempo que descrevem o Universo. Assim, será suposto que algum vestígio desta não-comutatividade pode estar sendo mantida no Universo atual, através de um parâmetro que será descrito e denominado parâmetro não-comutativo. Com a teoria descrita em termos do parâmetro não-comutativo, serão comparadas as novas propriedades do modelo, originadas após a introdução da não-comutatividade, com as propriedades do modelo comutativo original. Outro objetivo da presente dissertação é verificar se as diversas maneiras de introdução da não-comutatividade, como por exemplo [14], possuem equivalências em seus resultados. Para finalizar, serão discutidos de que maneira os resultados obtidos podem auxiliar na explicação da expansão acelerada do Universo.

1.4 ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS

No primeiro capítulo, é feita uma introdução histórica sobre a não-comutatividade. São apresentadas algumas obras presentes na literatura, a motivação para o desenvolvimento do presente trabalho e, por último, um pequeno resumo das ideias fundamentais para o início do trabalho.

No segundo capítulo, é feita uma breve revisão sobre a teoria da relatividade geral apresentando seus principais elementos, características e resultados. Em seguida, é apresentada a teoria da cosmologia relativística, visando seus resultados mais importantes que serão utilizados para o desenvolvimento do presente trabalho.

No terceiro capítulo, são desenvolvidos alguns tópicos das teorias necessárias para a descrição do modelo não-comutativo. As teorias utilizadas se resumem no formalismo ADM da relatividade geral, na cosmologia com fluido perfeito e no formalismo variacional de Schutz.

No quarto capítulo, é desenvolvida a teoria para o modelo não-comutativo, assim como os resultados obtidos. Tais resultados são discutidos com base na possível explicação da expansão atual do Universo.

Para finalizar, na conclusão da presente dissertação, são destacados os principais resultados. Em seguida são discutidas as perspectivas e as possíveis contribuições do presente trabalho no estudo da cosmologia.

2 RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

2.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, será apresentada uma breve revisão sobre a teoria da relatividade geral, destacando seus principais elementos, características e resultados que serão aplicados para o desenvolvimento da cosmologia.

2.2 RELATIVIDADE GERAL

Desenvolvida por Albert Einstein em 1915 [18] a teoria da relatividade geral é uma generalização da teoria da relatividade especial na presença de referenciais não inerciais ou campos gravitacionais. Para desenvolvê-la, Einstein utilizou como base o princípio da equivalência [20], que assegura a igualdade das propriedades do movimento através da equivalência local entre sistemas de referenciais não inerciais e campos gravitacionais. Este princípio capacitou Einstein a desenvolver toda a teoria, interligando geometria à física. Isto revela o fato da teoria possuir como principal característica a elegância matemática decorrente de seu apelo geométrico. Tal apelo, caracterizou uma nova maneira de descrever o campo gravitacional, resultando na quebra de um forte paradigma existente na sociedade científica. Assim, o conceito newtoniano da gravidade como sendo decorrente da interação entre corpos massivos, passa a ser interpretado como uma manifestação da curvatura no espaço-tempo. No decorrer do capítulo, serão apresentados alguns resultados, características e elementos importantes devido à presença da geometria na teoria.

2.2.1 Os símbolos de Christoffel

Representados por $\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}$, os símbolos de Christoffel são obtidos através da derivação de um vetor qualquer escrito na forma $\vec{V} = V^{\alpha}\vec{a}_{\alpha}$, em que V^{α} são suas componentes e \vec{a}_{α} seus vetores de base. Neste processo leva-se em conta não apenas as derivadas de suas componentes, mas, também as derivadas de seus vetores base. Logo,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{a}_{\alpha} + V^{\alpha} \frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

O segundo termo depois da igualdade é muito importante, uma vez que $\partial \vec{a}_{\alpha} / \partial x^{\beta}$ é um vetor. Assim, é conveniente escrevê-lo como combinação linear dos vetores de base, introduzindo como coeficiente desta combinação o símbolo de Christoffel da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \vec{a}_{\eta}. \quad (2.1)$$

O índice α dá o vetor de base sendo diferenciado, β dá a coordenada em relação a qual o vetor de base está sendo diferenciado e η denota a componente do vetor resultante da derivação. A importância da utilização dos símbolos de Christoffel é que, através deles, fica

possível expressar derivadas no mesmo sistema de coordenadas. Além disso, os símbolos de Christoffel aparecem na definição da derivada covariante de vetores contravariantes,

$$V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\eta}\Gamma^{\alpha}_{\eta\beta} \quad (2.2)$$

e covariantes

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - V_{\eta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

Para mais detalhes pode ser consultado [20]. Para um tensor misto T^{μ}_{ν} , uma relação análoga às equações (2.2) e (2.3) pode ser encontrada:

$$T^{\mu}_{\nu;\beta} = T^{\mu}_{\nu,\beta} + T^{\theta}_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\theta\beta} - T^{\mu}_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\nu\beta}. \quad (2.4)$$

Uma importante característica dos símbolos de Christoffel que não será demonstrada aqui, podendo ser consultada em [20], é que estes não obedecem a regra de transformação de um tensor. Logo, não possuem caráter tensorial. Outra propriedade importante dos símbolos de Christoffel em relatividade geral, que será apenas mencionada, é que $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ devido à ausência de torção no espaço-tempo da relatividade geral [19].

Na ausência de torção, a relação da métrica com os símbolos de Christoffel é dada por [20]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (2.5)$$

2.2.2 Transporte Paralelo e Geodésicas

2.2.2.1 Transporte paralelo

Se um campo vetorial \vec{V} pode ser definido em todos os pontos de uma curva, e se os vetores \vec{V} situados em uma região infinitesimalmente próximos ao longo da curva são paralelos conservando seu módulo, pode-se dizer que \vec{V} foi transportado paralelamente ao longo da curva. Para escrever uma equação que represente tal processo sobre um vetor \vec{V} , basta considerar $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ como um vetor tangente a uma curva C parametrizada pelo parâmetro λ , ou seja, $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$. Então a exigência que \vec{V} seja constante ao longo de C gera,

$$\frac{dV^{\alpha}}{d\lambda} = 0.$$

Aplicando a regra da cadeia, a equação acima pode ser escrita em termos das coordenadas e do vetor tangente \vec{U} . Logo,

$$\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = V^{\alpha}_{;\beta} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = V^{\alpha}_{;\beta} U^{\beta} = 0. \quad (2.6)$$

A equação acima, representa o transporte paralelo de \vec{V} ao longo da curva C cujo vetor tangente é \vec{U} . É importante lembrar que a derivada covariante aparece devido ao fato da curva C ser definida em um espaço curvo. Em uma notação mais compacta, a equação (2.6) pode ser escrita como,

$$V^{\alpha}_{;\beta} U^{\beta} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (2.7)$$

2.2.2.2 Geodésicas

As geodésicas são linhas no espaço curvo que transportam paralelamente seus próprios vetores tangentes. São análogas às retas no espaço euclidiano e possuem como equação,

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.8)$$

A equação acima pode ser obtida através da equação do transporte paralelo (2.6) [21], ou pelo princípio da mínima ação [20]. O limite newtoniano de (2.8) é feito em [20].

2.2.3 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura, ou também denominado tensor de Riemann, pode ser obtido através do comutador entre as derivadas covariantes de um vetor V^μ [21]. Assim,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu. \quad (2.9)$$

O tensor de curvatura definido acima, fornece a curvatura intrínseca do espaço-tempo e pode ser escrito explicitamente na forma,

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}. \quad (2.10)$$

Vale mencionar a importância do ordenamento entre as derivadas, pois, a equação (2.9) informa que elas não comutam. Com o tensor de Riemann é possível obter através de contrações de índices o tensor de Ricci,

$$R_{\beta\alpha} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} \quad (2.11)$$

e o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

2.2.4 Identidade de Bianchi

Fundamental para a obtenção do tensor de Einstein, a identidade de Bianchi é definida a partir do tensor de curvatura [21] na forma,

$$R_{\alpha\beta\eta\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\eta;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\eta} = 0. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) origina o tensor de Einstein que é definido na forma contravariante,

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha} \quad (2.14)$$

e resulta na divergência nula $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$.

2.2.5 As Equações de Einstein

As equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

podem ser obtidas por meio da abordagem de Pallatini junto ao princípio da mínima ação [22]. Para realizar tal processo, é utilizada a seguinte ação de Einstein-Hilbert adicionada ao termo referente a um campo de matéria:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.16)$$

Na ação acima, é utilizada a seguinte definição para o tensor momento-energia:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.17)$$

É importante mencionar que a divergência nula do tensor de Einstein comentada na subseção 2.2.4, implica automaticamente na conservação do tensor momento-energia descrito acima [21].

As equações (2.15) sintetizam toda a teoria da relatividade geral, descrevendo como a matéria (representada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$) deforma o espaço-tempo (representado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$) e como a curvatura determina o comportamento da matéria. Einstein percebeu que suas equações previam um Universo dinâmico (esse fato será visto mais adiante no Capítulo 3), porém, acreditava que o Universo era estático. Logo, para mantê-lo estático, Einstein introduziu o termo Λ , denominado constante cosmológica. Desta forma, (2.15) é reescrita da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Para o valor nulo de Λ , a equação (2.18) na aproximação de campo fraco recai na mecânica newtoniana [21]. Com todo esse aparato teórico, a teoria de Einstein ganhou força após a comprovação observacional de alguns fenômenos, como o desvio da luz por um campo gravitacional intenso e a melhoria dos resultados na precessão do periélio de Mercúrio. Desde então a teoria da relatividade geral vem colaborando como principal ferramenta no desenvolvimento de teorias como a cosmologia moderna.

2.3 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

O desenvolvimento da teoria da relatividade geral e seu reconhecimento por parte da comunidade científica levaram ao avanço da cosmologia na busca de informações sobre a descrição do Universo. Atualmente a cosmologia está baseada sobre o princípio cosmológico. Tal princípio propõe que o Universo em grande escala tem o mesmo aspecto em todos os

pontos [19]. Assim suas propriedades não são diferentes em nenhum ponto. Em outras palavras, o Universo deve ser homogêneo (a geometria do Universo é a mesma em qualquer ponto) e isotrópico (a geometria do Universo é invariante sob rotações ou seja, possui simetria esférica ao redor de qualquer um de seus pontos).

Outro fator importante é encontrado na maneira de representar o substrato no qual ocorrem os fenômenos físicos. Tal substrato é caracterizado através do postulado de Weyl [19] que propõe um Universo equivalente a um fluido perfeito sob boa aproximação com o seguinte tensor momento-energia, na forma contravariante:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Na equação acima, U^μ é a quadri-velocidade do fluido em um sistema de referencial comóvel, ρ sua densidade e p sua pressão. Devido a homogeneidade e isotropia impostas pelo princípio cosmológico, a pressão p e a densidade ρ devem possuir apenas dependência temporal.

2.3.1 O Universo de Friedmann-Robertson-Walker

O modelo cosmológico descrito por FRW é caracterizado pela presença da curvatura constante k em sua geometria. Esse fato é uma consequência da homogeneidade imposta pelo princípio cosmológico.

O termo espacial do intervalo invariante que descreve o modelo pode ser obtido através do tensor de Riemann tridimensional definido na forma [19],

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.20)$$

A constante k pode assumir os valores $0, +1, -1$.

A isotropia imposta pelo princípio cosmológico resulta no fato do intervalo invariante tridimensional $d\sigma^2$ ser escrito em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi). \quad (2.21)$$

Na equação acima, θ e ϕ são ângulos esféricos, r é o raio da esfera e $\lambda(r)$ é uma função radial a determinar. É importante ressaltar que o papel da exponencial em (2.21) é apenas para manter a função $\lambda(r)$ positiva.

Através das equações (2.21) e (2.20) é determinada a função $\lambda(r)$. Logo (2.21) assume a forma,

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi). \quad (2.22)$$

A imposição pelo princípio cosmológico de que todos os pontos do espaço devem se contrair ou expandir igualmente é introduzida multiplicando o intervalo invariante (2.22) por uma função com dependência temporal $a(t)$ denominada fator de escala.

Finalmente, o intervalo invariante quadridimensional pode ser escrito na forma,

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)^2] \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.23)$$

O intervalo invariante definido acima é denominado elemento de linha de Friedman-Robertson-Walker. A partir daqui, todos os cálculos realizados na presente seção serão baseados em (2.23).

2.3.2 A geometria dos espaços com curvaturas constantes

As geometrias dos espaços referentes a cada valor de curvatura k são exploradas abaixo, considerando um valor constante para o tempo $t = t_0$. Com isto, $a(t_0) = a_0$. Utilizando apenas a parte espacial de (2.23) obtém-se,

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.24)$$

2.3.2.1 Caso $k = 1$

O elemento de linha espacial (2.24) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.25)$$

Devido à singularidade $r \rightarrow 1$, fica conveniente introduzir a nova variável χ na forma,

$$r = \text{sen}\chi. \quad (2.26)$$

Assim (2.25) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 (d\chi^2 + \text{sen}^2\chi [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2]). \quad (2.27)$$

Uma alternativa para entender a geometria deste espaço é introduzi-lo a um novo espaço euclidiano quadridimensional descrito pela equação,

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.28)$$

Tal introdução é feita de acordo com as seguintes transformações:

$$w = a_0 \cos \chi, \quad (2.29)$$

$$x = a_0 \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.30)$$

$$y = a_0 \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.31)$$

$$z = a_0 \sin \chi \cos \theta. \quad (2.32)$$

Por meio das transformações descritas acima obtém-se a seguinte equação [19]:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (2.33)$$

Tal equação descreve uma superfície esférica tridimensional com raio a_0 e intervalos de coordenadas $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Logo, o Universo com a curvatura $k = 1$ é descrito por uma superfície esférica e é denominado Universo fechado.

2.3.2.2 Caso $k = 0$

O elemento (2.24) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.34)$$

Ao inserir as seguintes transformações de coordenadas,

$$x = a_0 r \text{sen}\theta \cos\phi, \quad (2.35)$$

$$y = a_0 r \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad (2.36)$$

$$z = a_0 r \cos\theta, \quad (2.37)$$

obtém-se a seguinte equação:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.38)$$

Tal equação descreve o espaço euclidiano tridimensional em coordenadas cartesianas. A geometria representada pelo elemento de linha (2.34) é plana. Logo, o Universo com curvatura $k = 0$ é descrito por uma superfície plana e é denominado aberto [19].

2.3.2.3 Caso $k = -1$

O elemento de linha (2.24) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.39)$$

Introduzindo uma nova variável χ na forma,

$$r = \sinh \chi, \quad (2.40)$$

obtém-se a seguinte equação:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left(d\chi^2 + \text{senh}^2\chi [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \right). \quad (2.41)$$

Diferentemente do caso $k = 1$, no presente caso, a alternativa para entender a geometria deste espaço é introduzi-lo a um espaço plano de Minkowski quadridimensional descrito pela equação,

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.42)$$

Tal introdução é feita de acordo com as seguintes transformações,

$$w = a_0 \cosh\chi, \quad (2.43)$$

$$x = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \cos\phi, \quad (2.44)$$

$$y = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad (2.45)$$

$$z = a_0 \text{senh}\chi \cos\theta. \quad (2.46)$$

Por meio das transformações descritas acima, obtém-se como equação [19],

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2. \quad (2.47)$$

A equação acima, descreve uma superfície hiperbólica com os intervalos de coordenadas $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Logo, o Universo com curvatura $k = -1$ é descrito por uma superfície hiperbólica e é denominado Universo aberto.

É importante destacar neste momento que na presente dissertação serão considerados apenas os espaços com as topologias mais simples referentes a cada valor de k .

Apenas um comentário deve ser feito para finalizar o presente capítulo. Como já mencionado na subseção 2.2.5, através das equações de Einstein é possível obter uma equação diferencial ordinária, no tempo. Tal equação é denominada equação de Friedmann e apresenta apenas funções envolvendo o fator de escala e sua primeira derivada. A equação de Friedmann será obtida no Capítulo 3.

3 A COSMOLOGIA COM FLUIDO PERFEITO

3.1 INTRODUÇÃO

Serão apresentados no presente capítulo alguns resultados importantes introduzidos através do formalismo ADM, fluido perfeito e formalismo de Schutz. Em seguida, tais resultados serão utilizados para a descrição da versão comutativa do modelo cosmológico estudado.

3.2 O FORMALISMO ADM DA RELATIVIDADE GERAL

A formulação ADM foi desenvolvida para a quantização canônica da teoria da relatividade geral. Nessa formulação é possível descrever tal teoria no formalismo hamiltoniano. Sua ideia fundamental é separar o espaço do tempo. Para isso, o espaço-tempo é tratado como foliações de hipersuperfícies espaciais tridimensionais parametrizadas por t . Tal parâmetro, pode ser associado ao tempo coordenado [23]. Dessa forma, para cada valor constante de t , obtém-se uma hipersuperfície tridimensional descrita pela métrica h_{ij} que é identificada como variável fundamental da Relatividade Geral¹. Assim, a evolução dinâmica desta métrica resulta na métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$. A decomposição do espaço-tempo em foliações é denominada decomposição 3+1.

No presente formalismo o intervalo invariante é escrito da seguinte maneira [24]:

$$ds^2 = - \left(N^2 - N_i N^i \right) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

De acordo com o intervalo invariante acima, N é a função lapso, N_i a função *shift* e h_{ij} a métrica tridimensional da hipersuperfície.

A ação de Einstein-Hilbert (2.16) pode ser reescrita em termos das novas quantidades h_{ij} , N , N_i [24] assumindo a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^3x dt N h^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right] + \mathcal{S}_m. \quad (3.2)$$

Na ação acima, Λ é a constante cosmológica, N a função lapso, h o determinante da métrica tridimensional, ${}^{(3)}R$ o escalar de Ricci nas hipersuperfícies, \mathcal{S}_m a ação referente à matéria e K_{ij} a curvatura extrínseca das hipersuperfícies.

A curvatura extrínseca denotada por K_{ij} mede a variação de um vetor normal à hipersuperfície quando transladado de um ponto a outro. É definida da seguinte maneira [24]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2D_j N_i \right]. \quad (3.3)$$

¹ Na verdade as variáveis fundamentais da teoria são as classes de equivalência dos h_{ij} frente aos difeomorfismo nas hipersuperfícies tridimensionais.

Em que D_j é a derivada covariante com direção j na hipersuperfície.

Pode-se notar em (3.2), que o elemento $d^4x\sqrt{-g}$ presente em (2.16) é reescrito na forma $d^3xdtNh^{\frac{1}{2}}$.

A densidade de lagrangiana referente ao campo gravitacional é obtida imediatamente da ação (3.2), logo:

$$\mathcal{L}_g = Nh^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right]. \quad (3.4)$$

Considerando (3.4), $\Lambda = 0$ e sabendo que a variável dinâmica é representada pela métrica h_{ij} , pode-se determinar a forma hamiltoniana da teoria através dos seus momentos canonicamente conjugados definidos na forma geral [18]:

$$\Pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} \left[h^{ab}K - K^{ab} \right]. \quad (3.5)$$

Demonstra-se através de (3.4) que os parâmetros N e N_i não são variáveis dinâmicas, pois, seus momentos canonicamente conjugados são nulos, ou seja:

$$P_N = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad P_{N_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}_i} = 0. \quad (3.6)$$

Isso indica que esta teoria contém vínculos. Na linguagem da teoria de vínculos N e N_i são denominados multiplicadores de Lagrange, logo, podem assumir valores arbitrários.

Com o auxílio das informações acima, a ação (3.2) sem o termo referente a matéria é escrita na forma hamiltoniana da seguinte maneira [24]:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - NH_g - N_i H_g^i \right]. \quad (3.7)$$

Com H_g denominada superhamiltoniana e H_g^i supermomento. Estas quantidades assumem as seguintes formas explícitas [24]:

$$\begin{aligned} H_g &= \left[\frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \right] \Pi^{ij}\Pi^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h}, \\ &= G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$H_g^i = -2D_j\Pi_i^j. \quad (3.9)$$

Em (3.8), o termo G_{ijkl} é denominada métrica do superespaço.

De maneira imediata, a densidade de hamiltoniana \mathcal{H} é obtida da ação (3.7), logo:

$$\mathcal{H} = NH_g + N_i H_g^i. \quad (3.10)$$

É importante mencionar que as equações da relatividade geral podem ser obtidas por meio da variação da ação (3.7) em relação a h_{ij} , Π^{ij} , N e N_i e podem ser encontradas em [18]. Particularmente a variação de (3.7) em relação a N e N_i resultam respectivamente nos vínculos da superhamiltoniana $H_g = 0$ e do supermomento $H_g^i = 0$.

O vínculo $H_g = 0$ equivale à componente G_{00} das equações de Einstein para o vácuo, assim como o vínculo $H_g^i = 0$ equivale à componente G_{0i} .

Em Cosmologia, ao considerar o modelo homogêneo e isotrópico, o único vínculo existente é o da superhamiltoniana, que equivale à equação de Friedmann.

Na presença de um campo de matéria denotado por Φ^A , o momento canonicamente conjugado Π_{Φ}^A é obtido da seguinte maneira:

$$\Pi_{\Phi}^A = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\Phi}^A}. \quad (3.11)$$

A ação (3.7) é reescrita com os termos adicionais referentes à matéria [24] e assume a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \Pi_{\Phi}^A \dot{\Phi}_A - N H_{total} - N_i H_{total}^i \right]. \quad (3.12)$$

Logo, obtém-se a seguinte densidade de hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = N H_{total} + N_i H_{total}^i. \quad (3.13)$$

Em que agora,

$$H_{total} = H_g + H_m, \quad (3.14)$$

$$H_{total}^i = H_g^i + H_m^i. \quad (3.15)$$

Nas equações acima, H_m e H_m^i são, respectivamente, a superhamiltoniana e o supermomento da matéria envolvida.

3.3 O FLUIDO PERFEITO DE UMA COMPONENTE, COMPOSTO POR BÁRIONS

Na presente seção, será considerado um fluido perfeito de uma componente, composto por bárions. É conveniente escolher tal fluido, pois, apesar da massa de um grupo de bárions não se conservar, seu número total permanece constante [25].

A energia interna para uma amostra de fluido contendo Z bárions é definida da seguinte maneira:

$$U = M - mZ. \quad (3.16)$$

Em que M é a massa total, mZ a massa de repouso e m a massa do hidrogênio no estado fundamental [25].

É conveniente dividir a equação (3.16) por mZ para obter a definição em termos da energia interna específica denotada por $\bar{U} \equiv U/mZ$. Logo:

$$\bar{U} + 1 = \frac{M}{mZ} \quad \Rightarrow \quad \frac{mZ}{V} (\bar{U} + 1) = \frac{M}{V}. \quad (3.17)$$

Ao definir as grandezas $\rho_0 \equiv mZ/V$ como sendo a densidade de massa de repouso e $\rho \equiv M/V$ como sendo a densidade de bárions, (3.17) é reescrita na seguinte forma:

$$\rho = \rho_0 (\bar{U} + 1). \quad (3.18)$$

A primeira lei da Termodinâmica é escrita da seguinte maneira:

$$dq = d\bar{U} + pd \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = TdS. \quad (3.19)$$

Sendo q a energia por unidade de massa de repouso, p a pressão, T a temperatura, S a entropia e todas essas grandezas referentes à amostra de fluido [26].

Com a introdução da entalpia definida na forma,

$$\lambda = \frac{\rho + p}{\rho_0} = \bar{U} + 1 + \frac{p}{\rho_0}, \quad (3.20)$$

em que $\rho + p$ é a massa inercial por unidade de volume, fica conveniente reescrever (3.19), após a diferenciação de (3.20) da seguinte maneira:

$$dp = \rho_0 d\lambda - \rho_0 T dS. \quad (3.21)$$

Com isso, é possível obter ρ_0 e \bar{U} como funções da entalpia λ e da entropia S de tal maneira que a equação de estado do fluido seja expressa na forma $p \equiv p(\lambda, S)$. Para isto, é necessário utilizar a seguinte equação geral de estado para um fluido perfeito:

$$p = \alpha \rho. \quad (3.22)$$

Na equação acima, α é uma constante que caracteriza o tipo de fluido trabalhado. Dessa forma pode-se introduzir (3.22) em (3.19), e com a ajuda de (3.18), obter após algumas manipulações a seguinte equação:

$$(1 + \bar{U}) \left[d \left[\ln(1 + \bar{U}) - \alpha \ln \rho_0 \right] \right] = T dS. \quad (3.23)$$

A equação acima leva aos seguintes resultados,

$$T = (1 + \bar{U}), \quad (3.24)$$

$$S = \ln(1 + \bar{U}) - \alpha \ln \rho_0. \quad (3.25)$$

Com essas informações, é possível obter ρ_0 , ρ e p através de (3.25) junto a (3.23), (3.20) e (3.18). Logo:

$$\rho_0 = \left(\frac{\lambda}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad (3.26)$$

$$\rho = \left(\frac{\lambda}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha} + 1} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad (3.27)$$

$$p = \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha} + 1} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.28)$$

Para finalizar a presente seção será apenas mencionado que as leis de conservação para o número total de bárions Z e para o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ do fluido podem ser encontradas em [25].

3.4 O FORMALISMO DE SCHUTZ NA REPRESENTAÇÃO DE POTENCIAIS VELOCIDADE

O formalismo de Schutz baseia-se na descrição da quadri-velocidade de um fluido relativístico através de 6 potenciais escalares termodinâmicos denominados potenciais velocidades. Dessa forma é possível associa-lo ao formalismo variacional de Hamilton através de uma ação simples que leva em consideração os efeitos gravitacionais e da matéria envolvida. Consequentemente através da variação da ação é possível obter as equações de movimento para tais potenciais.

Segundo Schutz a quadri-velocidade é definida da seguinte maneira [27]:

$$U_\nu = \frac{1}{\lambda} (\phi_{,\nu} + \eta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}). \quad (3.29)$$

Nessa definição, S é a entropia específica e λ é a entalpia. Os potenciais η e β estão ligados à rotação assumindo valores nulos para sistemas homogêneos, como o presente modelo. Para finalizar, os potenciais ϕ e θ não possuem interpretações físicas claras [28].

Ao aplicar a condição de normalização da quadri-velocidade $U^\nu U_\nu = -1$, o potencial λ se transforma em uma função dos potenciais independentes ϕ , η , β , θ , S e da métrica com a seguinte forma:

$$\lambda^2 = -g^{\sigma\nu} (\phi_{,\sigma} + \eta\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma}) (\phi_{,\nu} + \eta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}). \quad (3.30)$$

A ação (2.16) é escrita com o termo de matéria na forma,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 16\pi p). \quad (3.31)$$

Assim, de maneira imediata, é obtida a seguinte densidade de Lagrangiana [27]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R + 16\pi p). \quad (3.32)$$

Com a variação da ação (3.31) em termos da métrica $g^{\mu\nu}$ obtêm-se as equações de Einstein, contendo como matéria um fluido perfeito. Ou seja,

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta (\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + 16\pi \frac{\delta (\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} = 0, \quad (3.33)$$

com [25],

$$\frac{\delta (\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\delta (\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} p g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta \lambda} \frac{\delta \lambda}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g}. \quad (3.35)$$

O termo $\frac{\delta p}{\delta \lambda}$ pode ser obtido da primeira lei da termodinâmica (3.21) com o auxílio de (3.20). Já o termo $\frac{\delta \lambda}{\delta g^{\mu\nu}}$ pode ser obtida de (3.30). Logo:

$$\frac{\delta p}{\delta \lambda} = \frac{\rho + p}{\lambda}, \quad \frac{\delta \lambda}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\lambda}{2} U_\mu U_\nu. \quad (3.36)$$

Diante dos resultados obtidos em (3.34)-(3.36), a variação da ação (3.33) resulta na seguinte equação de Einstein contendo como matéria um fluido perfeito:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi [p g_{\mu\nu} + (\rho + p) U_\mu U_\nu] = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

Para finalizar, será apenas mencionado novamente que a variação da ação (3.34) em relação aos potenciais independentes $(\phi, \eta, \beta, \theta, S)$ resultam nas equações de movimento para os mesmos. Tal processo é realizado em [26].

3.5 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO

Para finalizar o capítulo, é importante destacar a partir daqui a importância da descrição do modelo via formalismo hamiltoniano. Para isso torna-se necessário a aplicação dos resultados obtidos nas seções anteriores. Assim, o intervalo invariante descrito em (2.23) é reescrito na forma de (3.1). Logo:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (3.38)$$

Do intervalo acima pode-se obter a métrica. A forma simplificada de (3.38) comparada a (3.1) se deve a homogeneidade e isotropia do modelo. Essas propriedades no espaço-tempo fazem com que as funções a, N e os potenciais termodinâmicos não nulos λ, ϕ, θ, S tenham apenas dependência temporal.

Utilizando a métrica (3.38) na parte gravitacional da ação (3.2) obtém-se:

$$\mathcal{S}_g = \int dt d^3x \left[\frac{6\ddot{a}a^2}{N} - \frac{6\dot{a}\dot{N}a^2}{N^2} + \frac{6\dot{a}^2 a}{N} + 6kNa \right]. \quad (3.39)$$

O primeiro termo entre colchetes é integrado por partes originando termos de superfície. Ao desprezar esses termos (3.39) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_g = \int dt d^3x \left[-\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN \right]. \quad (3.40)$$

Com isso, obtém-se a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN. \quad (3.41)$$

Da mesma maneira, a parte referente ao campo de matéria da ação (3.31) é reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_f &= 16\pi \int dt d^3x N h^{\frac{1}{2}} p, \\ &= \xi \int dt N a^3 p.\end{aligned}\quad (3.42)$$

O termo ξ é uma constante numérica resultante da integração referente à parte espacial de (3.42).

Utilizando a equação (3.30) em que $\eta = \beta = 0$, como já mencionado, e considerando o fato de que o sistema de coordenada adotado é comóvel (sendo $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$), obtém-se:

$$\lambda = \left[-g^{00}(\dot{\phi}_{,0} + \theta S_{,0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N}. \quad (3.43)$$

Assim a ação do fluido (3.42) com o auxílio das equações (3.22), (3.27) e (3.43), assume a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_f = \xi \int dt \left[N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 \alpha \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}} e^{-\frac{S}{\alpha}} \right]. \quad (3.44)$$

Logo obtém-se a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_f = N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 \alpha \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.45)$$

3.5.1 Cálculo dos momentos canonicamente conjugados

A presente seção é dedicada apenas aos cálculos dos momentos canonicamente conjugados não nulos das variáveis dinâmicas por meio das densidades de Lagrangianas (3.41) e (3.45).

É importante mencionar que devido à homogeneidade e isotropia impostas pelo princípio cosmológico, o presente modelo é dotado de alta simetria. Assim, os cálculos dos momentos canonicamente conjugados realizados aqui são equivalentes aos descritos pelas equações (3.5) e (3.11). Logo:

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}, \quad (3.46)$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{\phi}} = N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha+1)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad (3.47)$$

$$P_S = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{S}} = \theta P_\phi. \quad (3.48)$$

Das equações acima, pode-se concluir que para a matéria, o único momento independente é P_ϕ . Com os momentos canonicamente conjugados fica fácil a escrita da hamiltoniana para o modelo. De acordo com (3.13),

$$\mathcal{H} = \sum \dot{q}_i P_i - \mathcal{L} = NH. \quad (3.49)$$

Na equação acima q_i são as coordenadas generalizadas a , θ , ϕ e P_i seus respectivos momentos canonicamente conjugados. Logo ao substituir essas grandezas já calculadas obtém-se:

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{24a} + NP_\phi^{\alpha+1} a^{-3\alpha} e^S (-\alpha)^\alpha - N6ka. \quad (3.50)$$

Ao introduzir as transformações canônicas [25],

$$T = -P_S e^{-S} P_\phi^{-(\alpha+1)}, \quad (3.51)$$

$$P_T = P_\phi^{\alpha+1} e^S, \quad (3.52)$$

$$\bar{\phi} = \phi - (\alpha + 1) \frac{P_S}{P_\phi}, \quad (3.53)$$

$$\bar{P}_\phi = P_\phi, \quad (3.54)$$

a hamiltoniana (3.50) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{H} = NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\alpha}} - N6ka. \quad (3.55)$$

Com a hamiltoniana acima obtém-se a equação Friedmann:

$$NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\alpha}} - N6ka = 0. \quad (3.56)$$

Como já mencionado, a equação de Friedmann equivale ao vínculo da superhamiltoniana.

O espaço de fase da teoria hamiltoniana obtida é descrito pelas variáveis a e T junto a seus respectivos momentos canonicamente conjugados P_a e P_T .

Com a teoria desenvolvida no presente capítulo, para finalizar, pode-se concluir que através do formalismo de Schutz, são introduzidas as variáveis relacionadas ao fluido.

4 RESULTADOS OBTIDOS

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, serão obtidas soluções as quais algumas serão utilizadas na tentativa de explicar a atual expansão acelerada do Universo. Para isso, será descrito o modelo não-comutativo acoplado ao fluido de poeira em que a não-comutatividade é introduzida através dos parênteses de Poisson. Dessa forma, serão apresentados os resultados obtidos por meio de comparações entre as soluções não-comutativas e suas correspondentes comutativas. Em seguida serão apresentadas as diferenças entre os resultados obtidos pelo presente modelo e as soluções não-comutativas obtidas por outro modelo presente na literatura.

4.2 O MODELO COSMOLÓGICO NÃO-COMUTATIVO

A principal motivação para o desenvolvimento da presente dissertação refere-se ao fenômeno da atual expansão acelerada do Universo. Como já mencionado no Capítulo 1, as propriedades do Universo em sua fase inicial podem ter sido muito diferentes das de hoje [14]. Dessa forma será considerada a proposta de que as variáveis utilizadas na descrição do início do Universo satisfaziam algum tipo de álgebra não-comutativa e que vestígios da mesma podem estar sendo mantidas no presente Universo. Como ponto de partida, é introduzida a seguinte hamiltoniana para o modelo não-comutativo que por hipótese apresenta a mesma forma funcional de (3.55), porém, descrita em termos das variáveis não-comutativas denotadas pelo subíndice nc :

$$\mathcal{H}_{nc} = -N \frac{P^2}{24a_{nc}} - N6ka_{nc} + N \frac{P_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\alpha}}. \quad (4.1)$$

Como já mencionado, o parâmetro N pode assumir valores arbitrários funcionando como um *gauge* (esse fato foi obtido da equação (3.6)). Assim, é conveniente adotar o *gauge* em que $N = a_{nc}$ (denominado *gauge* conforme). Logo (4.1) se transforma em,

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{P^2}{24} - 6ka_{nc}^2 + a_{nc}^{1-3\alpha} P_{T_{nc}}. \quad (4.2)$$

A não-comutatividade é introduzida por meio dos parênteses de Poisson que seguem as seguintes propostas:

$$\{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \gamma, \quad (4.3)$$

$$\{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\} = 1, \quad (4.4)$$

$$\{a_{nc}, T_{nc}\} = \{P_{a_{nc}}, P_{T_{nc}}\} = 0. \quad (4.5)$$

Dessa forma, γ em (4.3) fica denominado parâmetro não-comutativo. Os parênteses de Poisson (4.3)-(4.4) são satisfeitos apenas em primeira ordem de γ .

Com a finalidade de simplificar a álgebra descrita por (4.3)-(4.5), são introduzidas variáveis comutativas (cuja álgebra é descrita pelos parênteses de Poisson convencionais) na hamiltoniana (4.2) através de transformações. Dessa forma, são adotadas as seguintes transformações de variáveis:

$$a_{nc} \rightarrow a_c + \frac{\gamma}{2}T_c, \quad (4.6)$$

$$P_{a_{nc}} \rightarrow P_{a_c} + \frac{\gamma}{2}P_{T_c}, \quad (4.7)$$

$$T_{nc} \rightarrow T_c + \frac{\gamma}{2}a_c, \quad (4.8)$$

$$P_{T_{nc}} \rightarrow P_{T_c} + \frac{\gamma}{2}P_{a_c}. \quad (4.9)$$

Nas transformações acima, o subíndice c denota as variáveis comutativas. Tais transformações satisfazem (4.3)-(4.4) em primeira ordem de γ , além disso, possibilitam a representação da não-comutatividade através do parâmetro γ . Dessa forma, para o caso em que $\gamma = 0$ (caso comutativo), as variáveis não-comutativas se transformam em comutativas. Outro comentário a ser mencionado decorre do fato das transformações (4.6)-(4.9) não serem únicas (o que pode ser verificada em (4.3)-(4.5)). As transformações acima foram escolhidas para que todas as variáveis comutativas contribuam de forma simétrica.

A hamiltoniana em termos das variáveis comutativas é obtida pela substituição das transformações (4.6)-(4.9) em (4.2). Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & - \frac{1}{24} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma}{2}P_{T_c} \right)^2 - 6k \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^2 \\ & + \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{1-3\alpha} \left(P_{T_c} + \frac{\gamma}{2}P_{a_c} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Uma propriedade importante da hamiltoniana acima, que deve ser mencionada, é que para o valor nulo de γ , (4.10) retorna à hamiltoniana da teoria comutativa (3.55) no *gauge* $N = a$.

Com a hamiltoniana descrita em termos das variáveis comutativas, obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{a}_c &= \{a_c, \mathcal{H}_c\} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial P_{a_c}} \frac{\partial a_c}{\partial a_c} = -\frac{1}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma}{2}P_{T_c} \right) \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{1-3\alpha}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{a_c} &= \{P_{a_c}, \mathcal{H}_c\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial a_c} \frac{\partial P_{a_c}}{\partial P_{a_c}} = 12k \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right) \\ &- (1 - 3\alpha) \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{-3\alpha} \left(P_{T_c} + \frac{\gamma}{2}P_{a_c} \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_c &= \{T_c, \mathcal{H}_c\} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial P_{T_c}} \frac{\partial T_c}{\partial T_c} = -\frac{\gamma}{24} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma}{2}P_{T_c} \right) \\ &+ \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{1-3\alpha}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_{T_c} &= \{P_{T_c}, \mathcal{H}_c\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial T_c} \frac{\partial P_{T_c}}{\partial P_{T_c}} = 6k\gamma \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right) \\ &- (1 - 3\alpha) \frac{\gamma}{2} \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{-3\alpha} \left(P_{T_c} + \frac{\gamma}{2}P_{a_c}\right).\end{aligned}\quad (4.14)$$

As equações de movimento acima, quando combinadas, resultam em equações diferenciais de segunda ordem para o fator de escala. Dessa forma, fica possível estudar o comportamento dinâmico de tal variável. As etapas utilizadas para a obtenção das equações diferenciais estão descritas abaixo.

A combinação de (4.12) e (4.14) resulta em,

$$P_{T_c} = \frac{\gamma}{2}P_{a_c} + C. \quad (4.15)$$

O parâmetro C é uma constante de integração. Para o caso comutativo ($\gamma = 0$) da equação acima, pode-se perceber que fisicamente C representa a energia do fluido. Logo, seu valor deve ser positivo.

A substituição de (4.15) na combinação entre (4.11) e (4.13), considerando apenas os termos contendo primeira ordem de γ resulta em,

$$P_{a_c} = 6\gamma\dot{T}_c - \frac{\gamma}{2}C - 12\dot{a}_c. \quad (4.16)$$

No presente momento, fica necessário mencionar o fato de que com a hamiltoniana (4.10), as equações de movimento (4.11)-(4.14) e as variáveis obtidas (4.15)-(4.16), não foi possível escrever a equação de Friedmann contendo apenas funções envolvendo o fator de escala e sua primeira derivada. Neste caso tal equação apresentou termos envolvendo a variável T_c . Dessa forma, como será visto em seguida, é necessário escrever um sistema de equações diferenciais para ambas as variáveis para determinar a dinâmica do fator de escala.

Considerando apenas os termos contendo primeira ordem de γ , ao substituir (4.12), (4.14), (4.15) e (4.16) na derivada temporal de (4.11), obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala. Por outro lado, ao substituir (4.15) e (4.16) em (4.13) obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem para a variável T_c . As equações mencionadas acima são apresentadas abaixo na forma do seguinte sistema de equações acopladas, como já mencionado:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_c(t) &= -k \left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c(t)\right) \\ &- (1 - 3\alpha) \left[a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c\right]^{-3\alpha} \left(\frac{\gamma}{2}\dot{a}_c(t) - \frac{C}{12}\right),\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma}{2}\dot{a}_c(t) + \left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{1-3\alpha}. \quad (4.18)$$

Como já mencionado, a presente dissertação tem como objetivo principal buscar soluções através do modelo não-comutativo que sejam possíveis candidatas para explicar

a atual expansão do Universo. Dessa forma, a partir das equações acima, é introduzido o fluido que será utilizado na presente dissertação, o fluido de poeira. Tal fluido é caracterizado pela constante $\alpha = 0$ de acordo com a equação de estado de um fluido perfeito descrita em (3.22). O fluido de poeira é indicado para descrever o Universo no estágio atual em que a sua pressão é muito menor que a densidade de matéria nele contida.

Após a introdução do fluido de poeira, obtém-se respectivamente de (4.17) e (4.18), o seguinte sistema de equações diferenciais a resolver:

$$\ddot{a}_c(t) = -k \left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2} T_c(t) \right) - \left(\frac{\gamma}{2} \dot{a}_c(t) - \frac{C}{12} \right), \quad (4.19)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma}{2} \dot{a}_c(t) + \left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2} T_c(t) \right). \quad (4.20)$$

A multiplicação de (4.20) por k , somada a (4.19), resulta em,

$$\ddot{a}_c(t) + k\dot{T}_c(t) = (k-1) \frac{\gamma}{2} \dot{a}_c(t) + \frac{C}{12},$$

que integrada no tempo fica,

$$kT_c(t) = (k-1) \frac{\gamma}{2} a_c(t) + \frac{C}{12} t + B - \dot{a}_c(t). \quad (4.21)$$

O parâmetro B é uma constante de integração obtida através das condições iniciais para a equação diferencial na variável T_c . Logo, pode ser positiva ou negativa.

Como desejado, ao substituir (4.21) em (4.19), obtém-se para os valores não nulos da curvatura ($k = 1, -1$) a seguinte equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala:

$$\ddot{a}_c(t) + ka_c(t) = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{Ct}{12} + B \right] + \frac{C}{12}. \quad (4.22)$$

Para o valor nulo da curvatura ($k = 0$), basta a substituição direta de $k = 0$ em (4.19), pois, neste caso não existe acoplamento entre as variáveis a_c e T_c . Logo:

$$\ddot{a}_c(t) = \frac{C}{12} - \frac{\gamma}{2} \dot{a}_c(t). \quad (4.23)$$

Desenvolvida a teoria não-comutativa para o modelo, são apresentados na próxima seção, os resultados obtidos através do estudo detalhado da dinâmica do fator de escala através das equações diferenciais obtidas (4.22)-(4.23).

4.3 ESTUDO DAS SOLUÇÕES

Como já mencionado, o objetivo da presente seção é apresentar os resultados obtidos do estudo da dinâmica do fator de escala. As soluções de interesse são do tipo exponenciais e serão utilizadas como possíveis candidatas para explicar a expansão acelerada do Universo. Apesar das soluções encontradas serem analíticas, o estudo da dinâmica do fator de escala

foi realizado de maneira numérica e detalhada através de comparações entre as soluções não-comutativas e suas correspondentes comutativas. Para isso, foi determinada a maneira com que os parâmetros k, γ, C, B (de acordo com seus possíveis valores) interferem no comportamento de cada solução.

As soluções exploradas foram obtidas através das equações (4.22)-(4.23). As condições iniciais trabalhadas, foram da classe $a_c(0) = 0$ e $\dot{a}_c(0) = b$, sendo b uma constante. Tais condições, foram escolhidas de tal maneira para descrever o Universo iniciado na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. É importante mencionar que foi exigido o valor positivo para a constante b . Desta forma, o fator de escala apresentará inicialmente uma expansão. Foram utilizadas diversas condições iniciais pertencentes à classe já descrita e todas levaram a resultados qualitativamente idênticos. Dessa forma, foi decidido por simplicidade utilizar as seguintes condições iniciais:

$$a_c(0) = 0, \quad \dot{a}_c(0) = 1. \quad (4.24)$$

Também é importante destacar os valores atribuídos ao parâmetro não-comutativo γ . Tais valores foram pequenos, pois, ao escrever as equações do modelo não-comutativo, foram considerados apenas os termos contendo primeira ordem de γ .

4.3.1 Caso $k = 0$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura nula ($k = 0$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (4.23) junto às condições iniciais (4.24). Tal equação descreve a dinâmica do fator de escala sob a ação de duas forças, sendo a primeira constante positiva e a segunda dependente da velocidade com o fator multiplicativo envolvendo o parâmetro γ . Dessa forma, pode-se analisar (4.23) de acordo com o sinal do parâmetro não-comutativo γ .

Para o valor positivo de γ , a força dependente da velocidade atua como uma força de resistência, desacelerando o movimento. Por outro lado, se o valor de γ é negativo, tal força ajuda na aceleração do movimento.

A solução comutativa, em que $\gamma = 0$, é descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma=0}(t) = \frac{C}{24}t^2 + t. \quad (4.25)$$

O subíndice $\gamma = 0$ refere-se a valor nulo do parâmetro não-comutativo.

A integração de (4.23) junto às condições iniciais (4.24), para valores genéricos de γ (representado pelo subíndice γ), resulta na solução não-comutativa descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma}(t) = - \left(\frac{6\gamma - C}{3\gamma^2} \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{C}{6\gamma}t + \frac{6\gamma - C}{3\gamma^2}. \quad (4.26)$$

O caso comutativo (4.25) pode ser obtido tomando o limite $\gamma \rightarrow 0$ em (4.26) ou pela integração direta de (4.23) com o valor $\gamma = 0$ junto às condições iniciais (4.24).

O fator de escala (4.25) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo expande de maneira infinita em um tempo infinito na forma de um polinômio de segundo grau no tempo t . O fator de escala (4.26) também descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$, mas, pode apresentar um comportamento diferente comparado ao de (4.25). Tal diferença, decorre da presença da função exponencial em (4.26). O estudo numérico e detalhado do comportamento de tais soluções foi obtido da variação dos parâmetros presentes γ e C . Dessa forma, foram encontrados os seguintes resultados.

Para valores positivos do parâmetro não-comutativo γ , o comportamento de ambas as soluções descrevem o Universo que expande para o infinito em um tempo t infinito. A expansão do fator de escala (4.26) é dominada pelo polinômio de primeiro grau em t , uma vez que para tais valores de γ o termo exponencial decai a zero rapidamente. Por outro lado, no caso do fator de escala (4.25), pela ausência do parâmetro γ , a expansão é descrita pelo polinômio de segundo grau no tempo t como já mencionado. Ao comparar ambas as soluções, pode-se perceber que a taxa de expansão de (4.26) é mais lenta em relação a (4.25). A medida que o parâmetro não-comutativo γ diminui, tal diferença se torna menos acentuada, pois, para esses casos, o termo exponencial começa a exercer influência no comportamento da solução não-comutativa (4.26). Tais comportamentos são representados pelas Figuras 1 e 2. A medida que o valor do parâmetro C aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e a solução (4.26) continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a (4.25). Tais comportamentos são representados nas Figuras 3 e 4.

Para valores negativos do parâmetro não-comutativo γ , a expansão do fator de escala (4.26) é dominada pela função exponencial, que neste caso, tende ao infinito para um valor de tempo t infinito. Por outro lado, no fator de escala (4.25), pela ausência do parâmetro γ , a expansão permanece na forma do polinômio de segundo grau no tempo t como já mencionado. Ao comparar ambas as soluções, pode-se perceber que a taxa de expansão de (4.26) é mais rápida em relação a (4.25). A medida que o módulo do parâmetro não-comutativo γ aumenta, tal diferença se torna mais acentuada. Tais comportamentos podem ser observados nas Figuras 5 e 6. A taxa de expansão de ambas as soluções são aumentadas na medida que o valor do parâmetro C aumenta e a taxa de expansão da solução não-comutativa (4.26) continua mais rápida em relação a da solução comutativa (4.25). Tais comportamentos são representados nas Figuras 7 e 8.

Pode-se concluir que, para valores negativos do parâmetro não-comutativo γ , a teoria não-comutativa apresenta resultados mais interessantes quando comparados aos da teoria comutativa. Isto ocorre, devido à presença do parâmetro adicional γ , que pode ser

ajustado de maneira a obter soluções mais aceleradas. Dessa forma, tais soluções podem ser consideradas como possíveis candidatas a descrever o fenômeno atual de expansão do Universo.

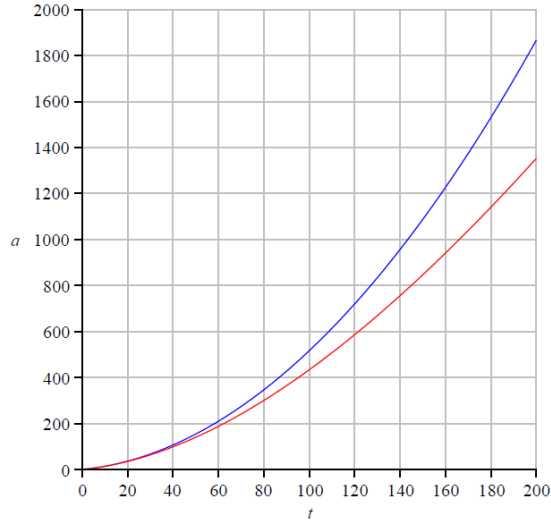


Figura 1 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.01$; $C = 1$.

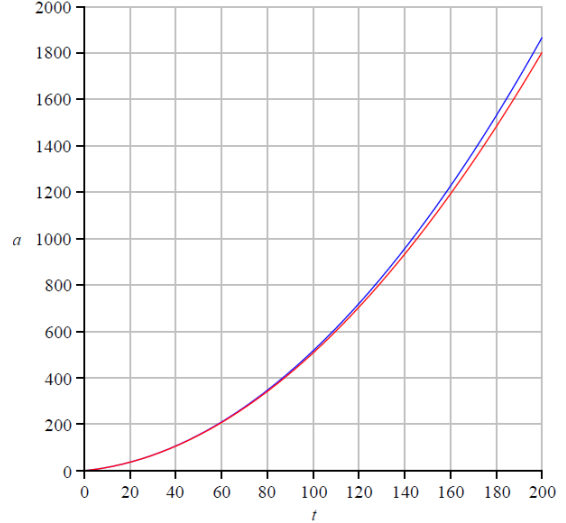


Figura 2 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.001$; $C = 1$.

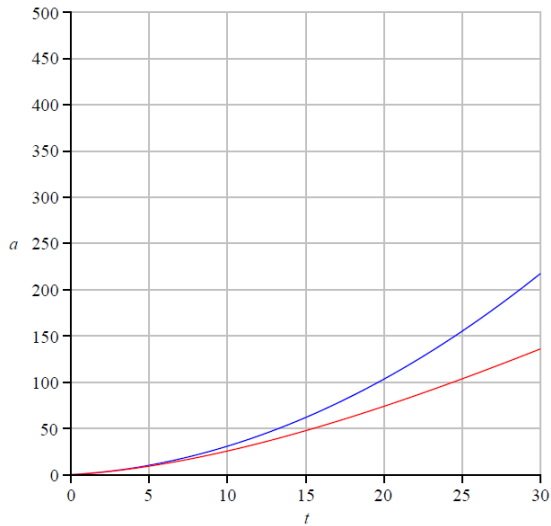


Figura 3 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1$; $C = 5$.

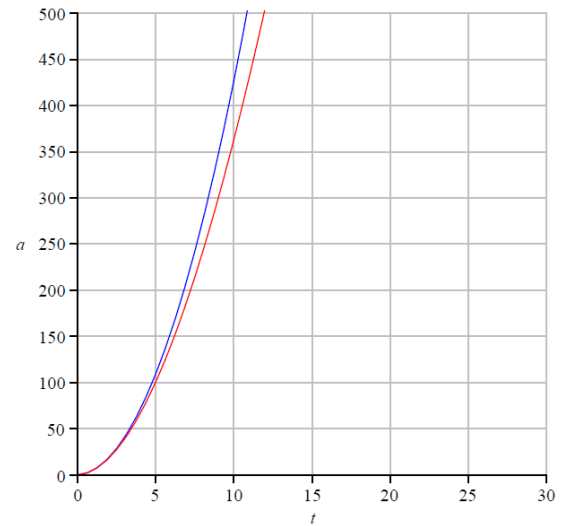


Figura 4 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1$; $C = 100$.

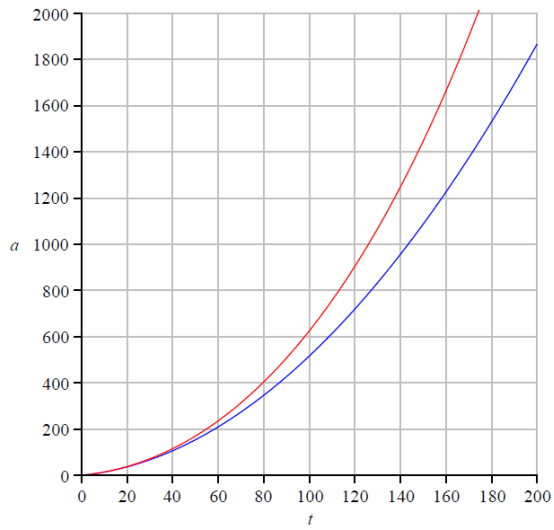


Figura 5 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.001$; $C = 1$.

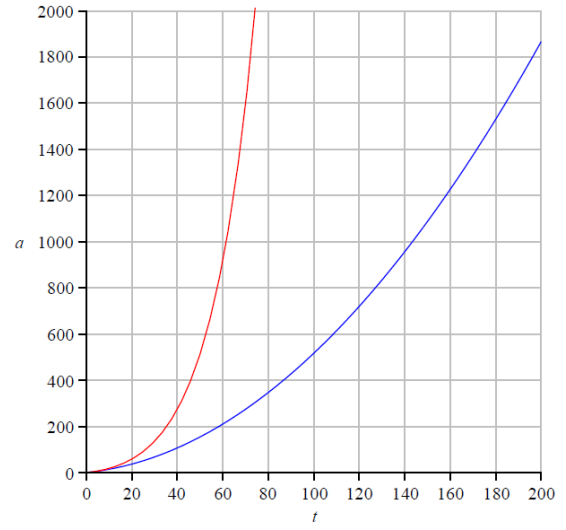


Figura 6 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1$; $C = 1$.

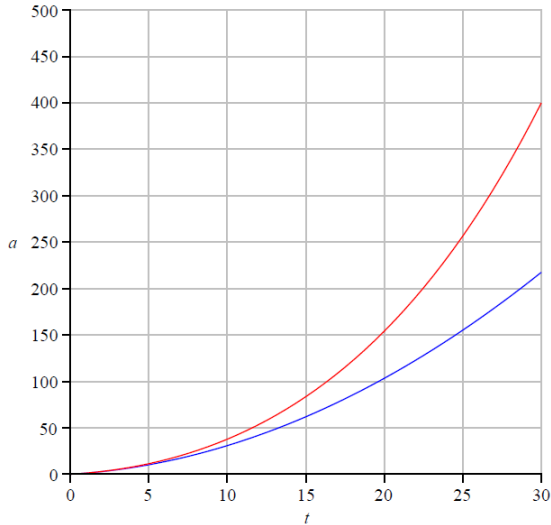


Figura 7 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1$; $C = 5$.

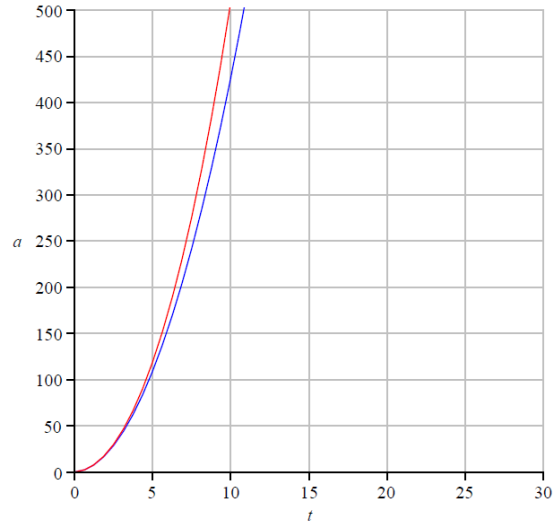


Figura 8 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1$; $C = 100$.

4.3.2 Caso $k = 1$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (4.22) junto às condições (4.24). Pode-se perceber que neste caso, (4.22) é a equação do movimento de um oscilador harmônico sob ação da seguinte força externa com dependência temporal:

$$F_{ext} = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{Ct}{12} + B \right] + \frac{C}{12}. \quad (4.27)$$

A solução não-comutativa é descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma}(t) = \left(1 + \frac{\gamma C}{24} \right) \sin(t) + \left(\frac{\gamma B}{2} - \frac{C}{12} \right) \cos(t) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{Ct}{12} + B \right) + \frac{C}{12}. \quad (4.28)$$

A solução comutativa, em que $\gamma = 0$, é descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma=0}(t) = \sin(t) - \frac{C}{12} \cos(t) + \frac{C}{12}. \quad (4.29)$$

A solução comutativa pode ser obtida ao resolver (4.22) junto às condições iniciais (4.24) para o valor nulo de γ ou substituí-lo diretamente em (4.28). Além disso, para tal valor de γ , a força (4.27) se transforma em uma força constante. Será visto mais adiante que a dependência temporal da força (4.27) levará ao resultado mais importante da presente subseção.

É importante perceber a presença do parâmetro B em (4.28). Tal parâmetro sempre aparece como um fator multiplicativo de γ . Dessa forma, uma conclusão imediata,

é que através de B fica possível intensificar o efeito causado por γ , uma vez que para o último parâmetro, estão sendo utilizados apenas pequenos valores.

O fator de escala (4.29) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande para um tamanho máximo, seguido de uma contração para a singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. O fator de escala (4.28) também descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$, mas pode apresentar um comportamento diferente comparado ao de (4.29). Tal diferença, decorre da força com dependência temporal (4.27). O estudo numérico e detalhado do comportamento de tais soluções foi obtido da variação dos parâmetros presentes γ , B e C . Dessa forma, foram encontrados os seguintes resultados.

Para as combinações dos valores de γ e B positivos, a solução não-comutativa (4.28) apresenta o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.29). As diferenças entre elas estão no tamanho máximo atingido pelo Universo e no tempo de retorno para a singularidade $a_c = 0$, que são menores para a solução não-comutativa (4.28). A medida que os valores de γ e B são aumentados, tais diferenças tornam-se ainda mais evidentes. O mesmo comportamento é apresentado quando os parâmetros γ e B são negativos. Os comportamentos descritos acima são representados nas Figuras 10 e 9. A medida que o valor do parâmetro C é aumentado, a solução não-comutativa (4.28) continua a apresentar o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.29). As diferenças entre elas estão no tamanho máximo atingido pelo Universo e no tempo de retorno para a singularidade $a_c = 0$, que continuam menores para a solução não-comutativa (4.28). Tais comportamentos são representados nas Figuras 11 e 12. Logo, pode-se concluir que quando os parâmetros γ e B possuem o mesmo sinal, surge na dinâmica do fator de escala (4.28) uma força atrativa adicional com dependência temporal, em comparação com o caso comutativo (4.29).

Para as combinações dos valores de γ positivos e B negativos ou γ negativos e B positivos, a solução não-comutativa (4.28) apresenta o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.29). As diferenças entre elas estão no tamanho máximo atingido pelo Universo e no tempo de retorno para a singularidade $a_c = 0$, que são maiores para a solução não-comutativa (4.28). A medida que os valores dos parâmetros γ e B são aumentados em módulo, tais diferenças tornam-se ainda mais evidentes. Os comportamentos descritos acima são representados nas Figuras 13 e 14. A medida que o valor do parâmetro C é aumentado, a solução não-comutativa (4.28) continua a apresentar o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.29). As diferenças entre elas estão no tamanho máximo atingido pelo Universo e no tempo de retorno para a singularidade $a_c = 0$, que continuam maiores para a solução não-comutativa (4.28). Tais comportamentos são representados nas Figuras 15 e 16. Logo, pode-se concluir que quando os parâmetros γ e B possuem sinais diferentes, surge na dinâmica do fator de

escala (4.28) uma força repulsiva adicional com dependência temporal, em comparação com o caso comutativa (4.29).

Para valores suficientemente grande de C , tais que, as condições abaixo sejam satisfeitas,

$$\frac{\gamma C}{24} \gg 1, \quad (4.30)$$

$$\frac{C}{12} \gg \frac{|\gamma B|}{2}, \quad (4.31)$$

$$\frac{Ct}{12} \gg B, \quad (4.32)$$

o fator de escala (4.28) fica independente do parâmetro B . Logo, pode ser escrito da seguinte forma:

$$a_{c,\gamma}(t) = \frac{\gamma C}{24} \sin(t) + \frac{C}{12} (1 - \cos(t)) - \frac{\gamma C}{24} t. \quad (4.33)$$

Assim, o estudo do fator de escala (4.33) se reduz a apenas dois casos determinados pelos sinais do parâmetro γ .

Para o valor positivo de γ , o comportamento do fator de escala (4.33) já foi discutido. Tal comportamento é o mesmo descrito nos casos em que γ e B possuem sinais iguais.

Para o valor negativo de γ , o fator de escala (4.33) apresenta uma expansão linear no tempo, mas, de maneira a oscilar entre os valores de máximos e mínimos. Este tipo de comportamento não é apresentado pela solução comutativa (4.29) e é representado na Figura 17. Tal comportamento está ligado diretamente a força dependente do tempo (4.27).

Logo, pode-se concluir que para a combinação entre os valores de C satisfazendo as condições (4.30)-(4.32) junto ao valor negativo de γ , surge na dinâmica do fator de escala (4.28), uma força repulsiva adicional dependente do tempo t . Tal força, possibilita a expansão da solução não-comutativa (4.28).

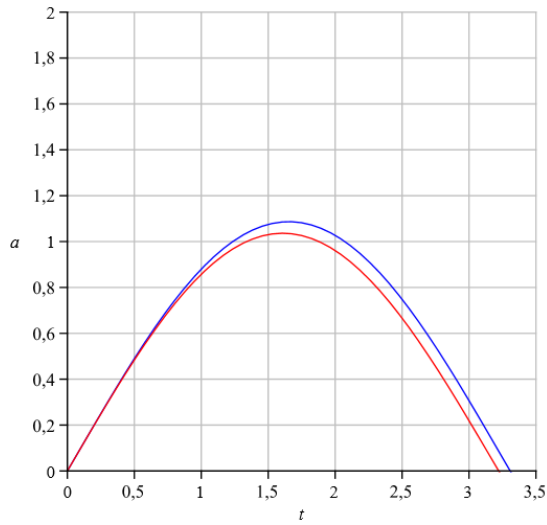


Figura 9 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$.

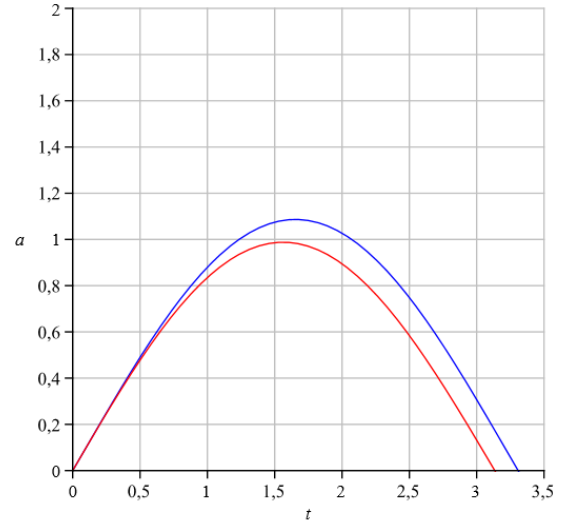


Figura 10 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.2; C = 1; B = -1$.

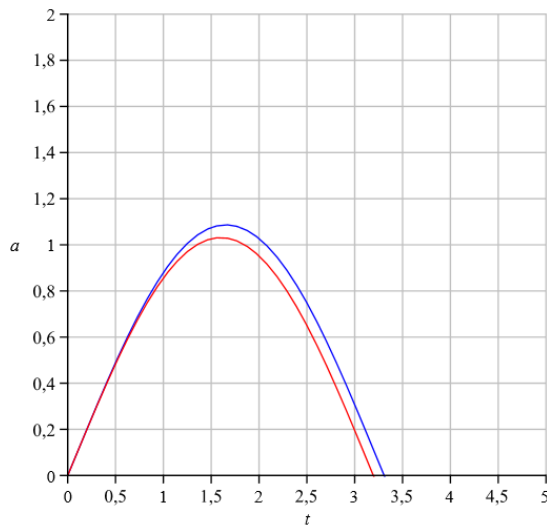


Figura 11 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$.

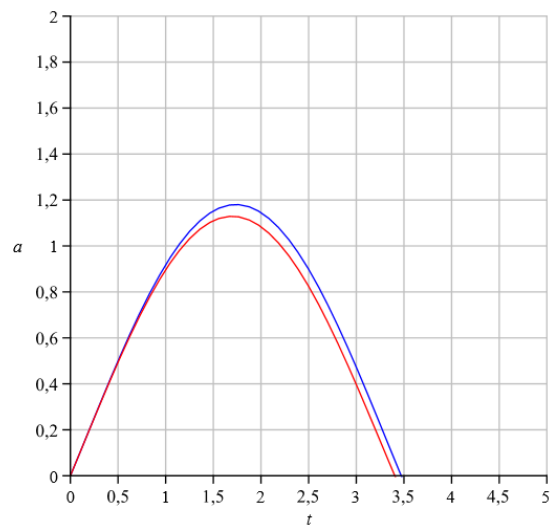


Figura 12 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 2; B = -1$.

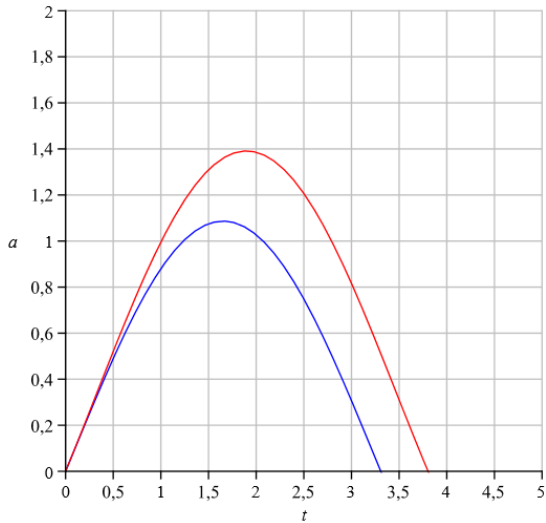


Figura 13 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = 5$.

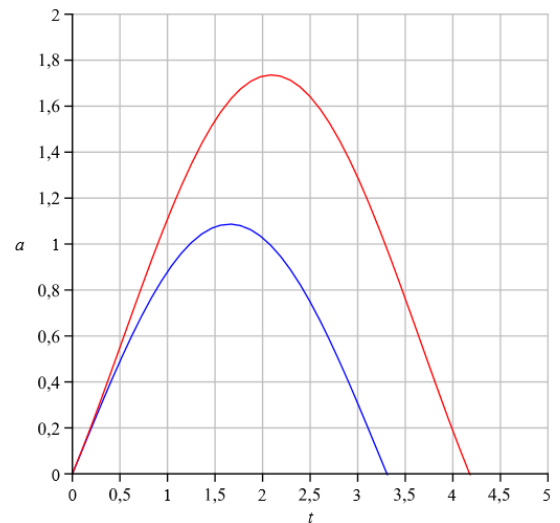


Figura 14 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = -10$.

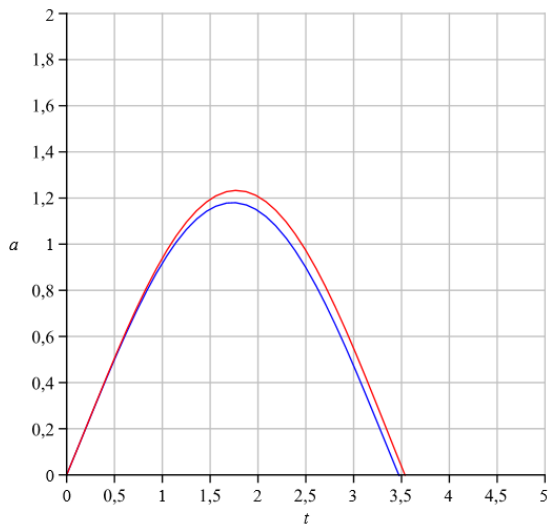


Figura 15 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 2; B = -1$.

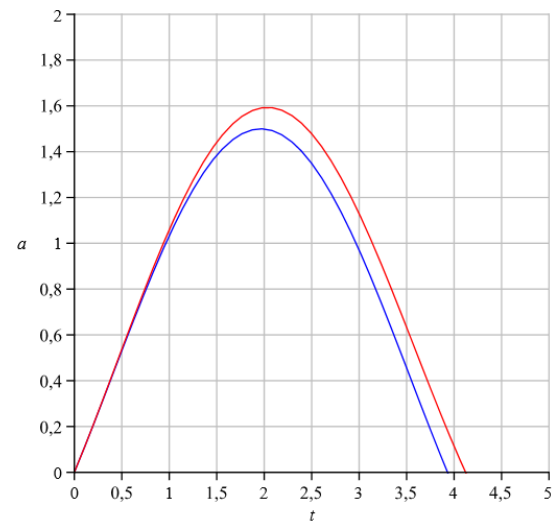


Figura 16 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 5; B = 1$.

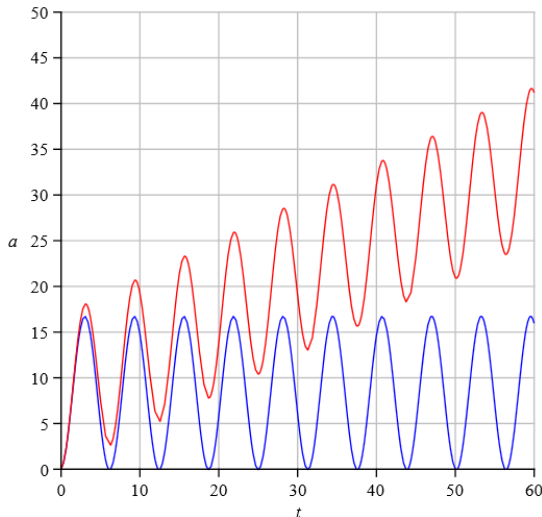


Figura 17 – Fator de escala para valores suficientemente grandes do parâmetro C combinado a $\gamma < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 100$.

4.3.3 Caso $k = -1$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (4.22) junto as condições iniciais (4.24). Logo, a solução não-comutativa é descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma}(t) = \sinh(t) \left(1 - \frac{\gamma C}{24}\right) + \cosh(t) \left(-\frac{\gamma B}{2} + \frac{C}{12}\right) + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{Ct}{12} + B\right) - \frac{C}{12}. \quad (4.34)$$

A solução comutativa, em que $\gamma = 0$, é descrita pelo seguinte fator de escala:

$$a_{c,\gamma=0}(t) = \sinh(t) + \frac{C}{12} \cosh(t) - \frac{C}{12}. \quad (4.35)$$

A solução comutativa pode ser obtida ao resolver (4.22) junto as condições (4.24) para o valor nulo de γ ou substituí-lo diretamente em (4.34).

O fator de escala (4.35) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande de maneira exponencial para um tamanho infinito em um tempo t infinito. O fator de escala (4.34) também descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$, mas, pode apresentar um comportamento diferente comparado a (4.35). Tal diferença, decorre da presença do parâmetro B . Como discutido na Subseção 4.3.2, pode-se perceber novamente, que o parâmetro B sempre aparece como um fator multiplicativo do parâmetro γ . Desta forma, pode-se perceber que através de B fica possível intensificar o efeito causado por γ ,

uma vez que para o último parâmetro, estão sendo utilizados apenas pequenos valores. O estudo numérico e detalhado do comportamento de tais soluções, foi obtido a partir da variação dos parâmetros presentes γ , B e C . Dessa forma, foram encontrados os seguintes resultados.

Para as combinações dos valores de γ e B positivos, a solução não-comutativa (4.34) apresenta o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.35). A diferença entre elas está na taxa de expansão do fator de escala, que é mais rápida para (4.35). A medida que os valores de γ e B são aumentados, tal diferença torna-se mais evidente. O mesmo comportamento é apresentado quando os parâmetros γ e B são negativos. Os comportamentos descritos acima são representados nas Figuras 18 e 19. A medida que o valor do parâmetro C é aumentado, a solução não-comutativa (4.34) continua a apresentar o mesmo tipo de comportamento em relação ao caso comutativo (4.35). A diferença entre elas está na taxa de expansão do fator de escala, que continua mais lenta para (4.34). Tais comportamentos são representados nas Figuras 20 e 21. Para valores suficientemente grandes de B , com γ e B possuindo sinais iguais, o fator de escala (4.34) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande para um tamanho máximo, seguido de uma contração para a singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. Este comportamento não é apresentado pelo caso comutativo (4.35) e só é possível devido a presença do parâmetro B . O comportamento descrito acima é representado na Figura 26. Logo, pode-se concluir que para os casos mencionados acima, surge na dinâmica do fator de escala (4.34) uma nova força de resistência que desacelera o movimento, em comparação com o caso comutativo (4.35).

Para as combinações dos valores de γ positivo e B negativo ou γ negativo e B positivos, a solução não-comutativa (4.34) apresenta o mesmo tipo de comportamento em relação a solução comutativa (4.35). A diferença entre elas está na taxa de expansão do fator de escala, que é mais rápida para (4.34). A medida que os valores em módulo dos parâmetros γ e B são aumentados, tal diferença torna-se ainda mais evidente. Os comportamentos descritos acima são representados nas Figuras 22 e 23. A medida que o valor do parâmetro C é aumentado, a solução não-comutativa (4.34) continua a apresentar o mesmo tipo de comportamento em relação ao caso comutativo (4.35). A diferença entre elas está na taxa de expansão do fator de escala, que continua mais rápida para (4.34). Tais comportamentos são representados nas Figuras 24 e 25. Logo, pode-se concluir que quando os parâmetros γ e B possuem sinais diferentes, surge na dinâmica do fator de escala (4.34) uma força que acelera o movimento, em comparação com o caso comutativo (4.35).

Como já mencionado, a solução não-comutativa (4.34), apresenta além do parâmetro C (comum com o caso comutativo (4.35)), os parâmetros adicionais γ e B . Tais parâmetros

possibilitam o ajuste da solução, tornando-a mais acelerada, menos acelerada ou até mesmo fechadas. Para os parâmetros γ e B possuindo sinais contrários a teoria não-comutativa apresenta resultados mais interessantes quando comparados a comutativa, pois, apresenta uma taxa de expansão mais rápida. Tais resultados, podem ser encarados como possíveis candidatos para descrever o fenômeno atual de expansão do Universo.

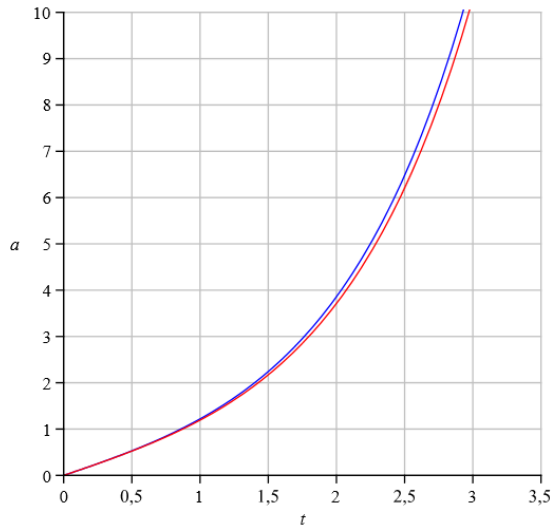


Figura 18 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = 1$.

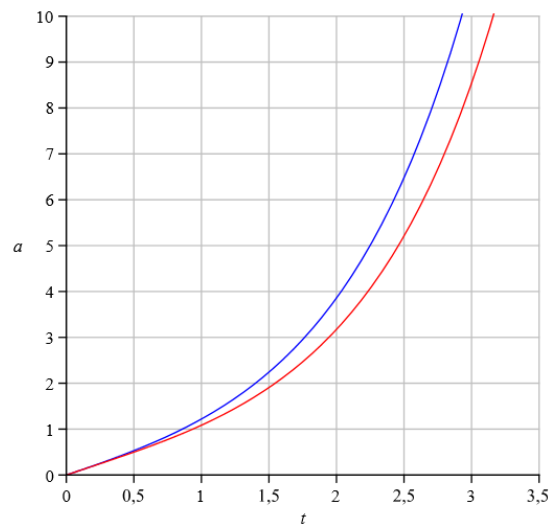


Figura 19 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = -5$.

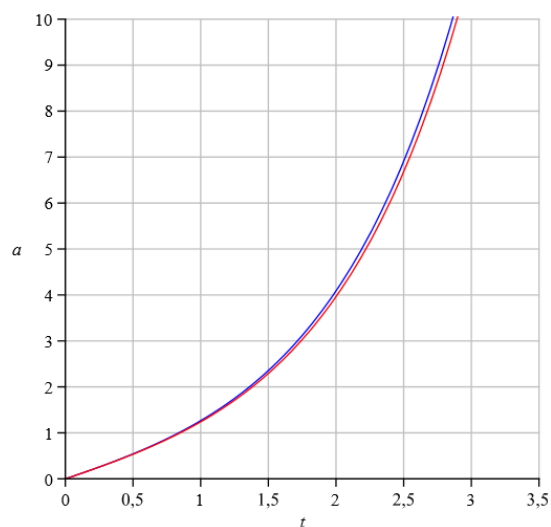


Figura 20 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 2; B = -1$.

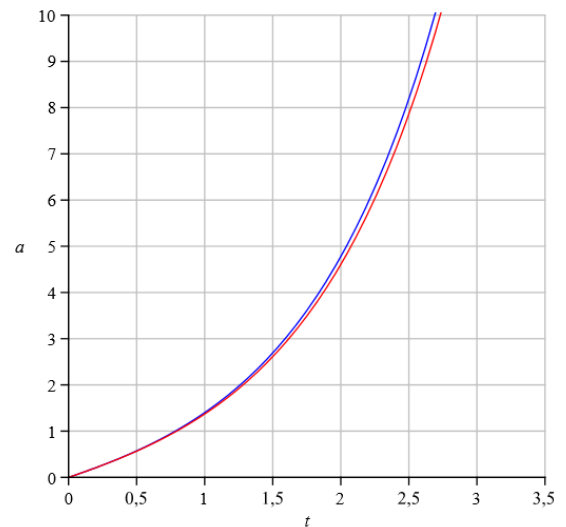


Figura 21 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 5; B = 1$.

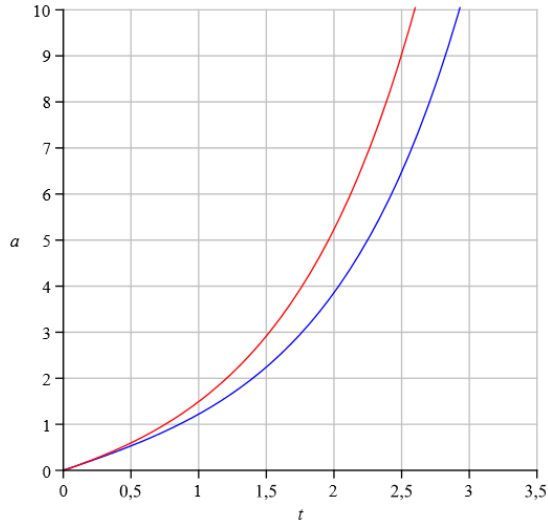


Figura 22 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 1; B = -10$.

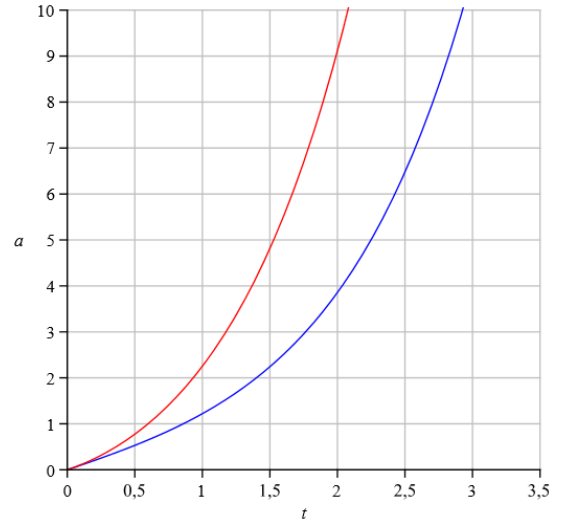


Figura 23 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = 38$.

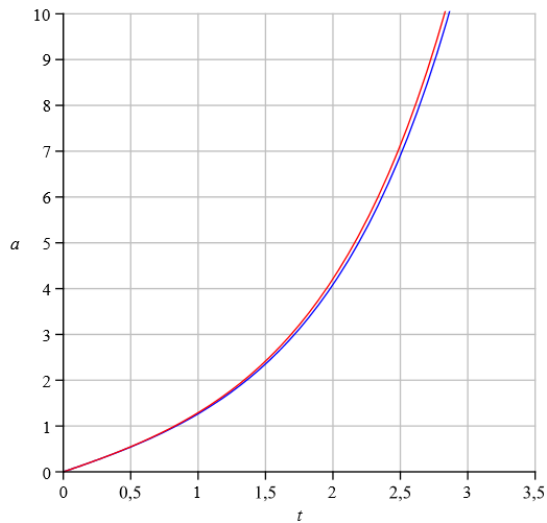


Figura 24 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma > 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = 0.1; C = 2, B = -1$.

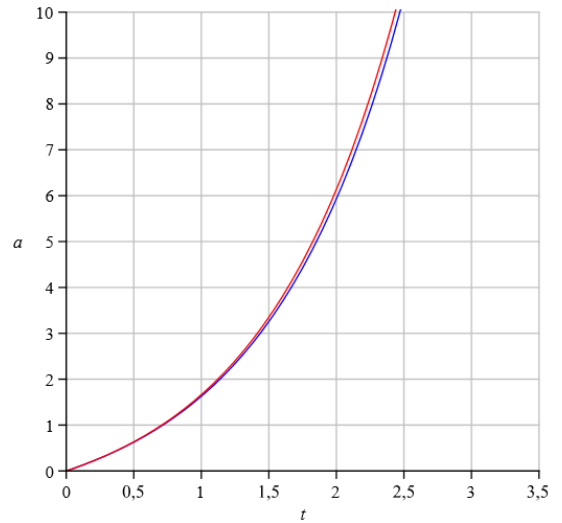


Figura 25 – Fator de escala com o aumento do parâmetro C para $\gamma < 0; B > 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 10, B = 1$.

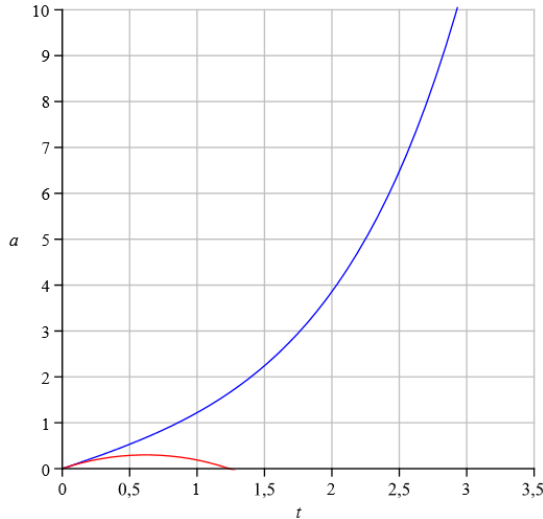


Figura 26 – Fator de escala com valores suficientemente grandes em módulo de B para $\gamma < 0; B < 0$. Caso comutativo em azul e não-comutativo em vermelho. Valores utilizados $\gamma = -0.1; C = 1; B = -38$

4.4 O MODELO DA LITERATURA

O objetivo da presente seção é comparar os resultados obtidos pelo presente modelo não-comutativo com os resultados obtidos por outro modelo não-comutativo encontrado na literatura [14]. Nesta referência, é introduzido um modelo cosmológico clássico não-comutativo acoplado a um fluido perfeito e com a presença de uma constante cosmológica Λ . Tal modelo introduz a não-comutatividade de maneira diferente comparada ao presente trabalho. Com isto, será verificado se os diferentes meios de introdução da não-comutatividade conduzem aos mesmos resultados.

Em [14], a não-comutatividade é introduzida por meio do formalismo simplético generalizado. Será visto no decorrer da presente seção, que tal procedimento é equivalente ao conjunto de transformações que serão realizadas mais adiante e que introduzem as variáveis comutativas, mais um parâmetro não-comutativo.

Será utilizada a hamiltoniana encontrada em [14], no gauge $N = a$. Além disso, será utilizado o valor nulo para a constante cosmológica ($\Lambda = 0$). Neste caso, tal hamiltoniana coincide com a do presente modelo escrita na forma (4.2). Logo, (4.2) será o ponto de partida para comparar ambos os modelos. A não-comutatividade em [14] é proposta pelos seguintes parênteses de Poisson:

$$\{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\} = 1, \quad (4.36)$$

$$\{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{a_{nc}}\} = 0, \quad (4.37)$$

$$\{a_{nc}, T_{nc}\} = \theta, \quad (4.38)$$

$$\{P_{a_{nc}}, P_{T_{nc}}\} = \beta. \quad (4.39)$$

Os parênteses de Poisson descritos acima, são comparados a (4.3)-(4.5). Os parâmetros θ e β são os parâmetros não-comutativos do modelo em [14].

Assim como na Seção (4.2), a simplificação da álgebra descrita por (4.36)-(4.39), é realizada ao introduzir variáveis comutativas através das seguintes transformações:

$$P_{a_{nc}} \rightarrow (1 - \beta\theta) P_{a_c} + \beta T_c, \quad (4.40)$$

$$a_{nc} \rightarrow a_c, \quad (4.41)$$

$$T_{nc} \rightarrow T_c, \quad (4.42)$$

$$P_{T_{nc}} \rightarrow (1 - \beta\theta) P_{T_c}. \quad (4.43)$$

As transformações acima descritas, satisfazem os parênteses de Poisson (4.36)-(4.39) em primeira ordem dos parâmetros θ e β . Neste modelo, também deve ser mencionado o fato de que tais transformações não são únicas e foram escolhidas de acordo com a preferência dos autores.

A substituição das variáveis (4.40)-(4.43) na hamiltoniana proposta (4.2), em que a matéria é representada pelo fluido de poeira ($\alpha = 0$), resulta na seguinte hamiltoniana descrita em termos das variáveis comutativas:

$$\mathcal{H} = -\frac{(P_{a_c} + \beta T_c)^2}{24} - 6ka_c^2 + a_c P_{T_c}. \quad (4.44)$$

Na hamiltoniana descrita acima, foi considerado, assim como em [14], o valor nulo para o parâmetro não-comutativo θ . Pode-se perceber, que (4.44) assume uma forma bem diferente comparada a (4.10). Para o valor nulo do parâmetro não-comutativo ($\beta = 0$), (4.44) também retorna a hamiltoniana da teoria comutativa (3.55).

Como na Seção 4.2, são obtidas as equações de movimento através da hamiltoniana (4.44). Logo, obtém-se:

$$\dot{a}_c = \{a_c, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial P_a} \frac{\partial a_c}{\partial a_c} = -\frac{1}{12} (P_{a_c} + \beta T_c), \quad (4.45)$$

$$\dot{T}_c = \{T_c, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial P_{T_c}} \frac{\partial T_c}{\partial T_c} = a_c, \quad (4.46)$$

$$\dot{P}_{a_c} = \{P_{a_c}, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial a_c} \frac{\partial P_{a_c}}{\partial P_{a_c}} = 12ka_c - P_{T_c}, \quad (4.47)$$

$$\dot{P}_{T_c} = \{P_{T_c}, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial T_c} \frac{\partial P_{T_c}}{\partial P_{T_c}} = \frac{\beta}{12} (P_{a_c} + \beta T_c). \quad (4.48)$$

As combinações das equações de movimento acima, resultam em equações diferenciais de segunda ordem. Assim, possibilitam o estudo da dinâmica do fator de escala a_c . É importante mencionar, que neste modelo descrito por [14], foi possível obter a equação de Friedmann contento apenas funções envolvendo o fator de escala a_c e sua primeira derivada.

Porém, ela não será utilizada, uma vez que para o modelo descrito na presente dissertação isso não foi possível. Os passos realizados para a obtenção das equações diferenciais descritas acima, são desenvolvidos abaixo.

A combinação entre as equações (4.45) e (4.48) leva a,

$$P_{T_c} = -\beta a_c + C, \quad (4.49)$$

sendo C uma constante de integração associada a energia do fluido, a qual deve assumir valor positivo (assim como em (4.15)).

Substituindo (4.46), (4.47) e (4.49) na derivada temporal de (4.45) obtém-se:

$$\ddot{a}_c(t) + a_c(t) \left(k + \frac{\beta}{6} \right) = \frac{C}{12}. \quad (4.50)$$

Por questões didáticas (da mesma maneira realizada em (4.22)-(4.23)) e para facilitar a comparação, é conveniente separar (4.50) para cada valor da curvatura k . Logo:

$$\ddot{a}_c(t) + a_c(t) \left(k + \frac{\beta}{6} \right) = \frac{C}{12} \quad k = 1, -1, \quad (4.51)$$

$$\ddot{a}_c(t) + a_c(t) \frac{\beta}{6} = \frac{C}{12} \quad k = 0. \quad (4.52)$$

Através das equações diferenciais acima, junto as suas soluções, foi realizado um estudo numérico e detalhado para obter as principais diferenças no comportamento das soluções obtidas pelos diferentes modelos. Tais diferenças são exploradas nas subseções seguintes. É importante mencionar que para o caso comutativo de ambos os modelos ($\gamma = 0, \beta = 0$), as equações (4.22)-(4.23) e (4.51)-(4.52) são idênticas.

4.4.1 Caso $k = 0$

Para o valor nulo da curvatura ($k = 0$), pode-se perceber que a diferença na dinâmica das equações (4.23) e (4.52) está nas forças atuantes. Em (4.23) existem a ação de duas forças, sendo a primeira constante positiva e a segunda dependente da velocidade do fator de escala. Em (4.52) existem também a ação de duas forças, porém, uma força é constante e a outra dependente do fator de escala. Devido a diferença entre as equações diferenciais descritas acima, pode-se perceber que suas soluções apresentarão comportamentos diferentes.

Como já mencionado, ambas as equações recaem no caso comutativo, em que $\gamma = 0$ para (4.23) e $\beta = 0$ para (4.52).

Como solução, seguindo as condições iniciais (4.24), obtém-se o seguinte fator de escala para (4.52):

$$a_{c,\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{6}} \sin \left(\sqrt{\frac{\beta}{6}} t \right) - \frac{C}{2\beta} \cos \left(\sqrt{\frac{\beta}{6}} t \right) + \frac{C}{2\beta}. \quad (4.53)$$

A solução acima, é comparada a (4.26) para os mesmos valores dos parâmetros γ e β . O comportamento das soluções (4.26) e (4.53) são descritos abaixo de acordo com os sinais dos parâmetros não comutativos γ e β .

Para o valor positivo de γ , como já mencionado na subseção 4.3.1, o fator de escala (4.26) descreve o Universo iniciado na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo expande para um tamanho infinito, em um tempo infinito. A expansão do fator de escala (4.26), é dominada pelo polinômio de primeiro grau em t , uma vez que para tais valores de γ , o termo exponencial decai a zero rapidamente. Já o comportamento do fator de escala (4.53) é descrito por funções periódicas. Desta forma, o fator de escala (4.53) descreve o Universo iniciado na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$, que expande para um tamanho máximo e em seguida, retorna para uma singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 27 e permanecem qualitativamente os mesmos, após a variação dos parâmetros.

Para os valores negativos dos parâmetros não-comutativos γ e β , ambas as soluções (4.26) e (4.53) apresentam o mesmo comportamento de expansão para o infinito, em um tempo t infinito. A diferença entre elas está na taxa de expansão, que é sempre mais rápida na solução (4.53). Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 28 e permanecem qualitativamente os mesmos, após a variação dos parâmetros.

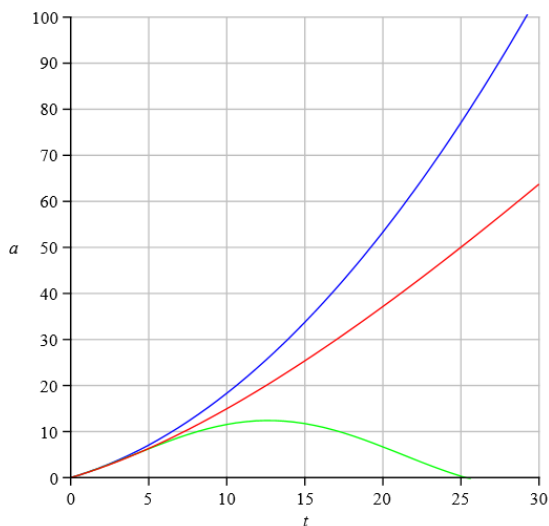


Figura 27 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 2$.

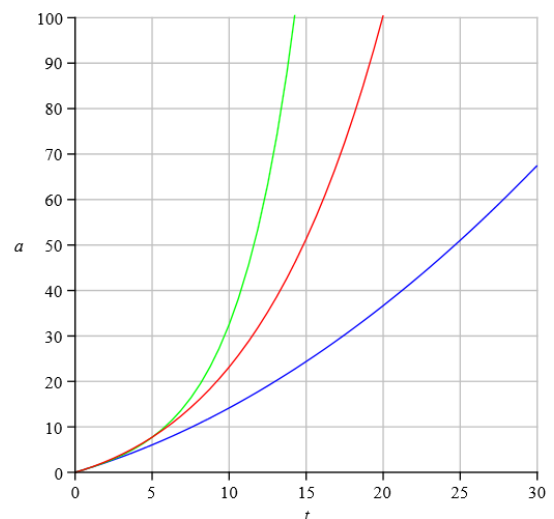


Figura 28 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1$.

4.4.2 Caso $k = 1$

Para o valor positivo da curvatura ($k = 1$), ambas as equações (4.22) e (4.51) descrevem o movimento de um oscilador harmônico. A primeira diferença entre elas está na presença do parâmetro livre B . Tal parâmetro, sempre aparece em (4.22) como um fator multiplicativo de γ . Logo, como já mencionado na Subseção 4.3.2, através de B , é possível intensificar o efeito causado por γ . O parâmetro B está ausente em (4.51). Outra diferença existente, está na força externa atuante no movimento do oscilador, em (4.22), a força atuante possui dependência temporal. Já em (4.51), a força atuante é constante no tempo. Também é importante mencionar que as frequências das oscilações de (4.22) e (4.51) são diferentes. Em (4.22), a frequência de oscilação é a mesma do caso comutativo ($\gamma = 0$) correspondente. Já em (4.51), a frequência de oscilação é diferente do caso comutativo ($\beta = 0$) correspondente. A diferença entre as frequências, é representada na Figura 29. Devido a diferença entre as equações diferenciais descritas acima, pode-se perceber que suas soluções apresentarão comportamentos diferentes.

Como já mencionado, ambas as equações recaem no caso comutativo, em que $\gamma = 0$ para (4.22) e $\beta = 0$ para (4.51).

Como solução, seguindo as condições iniciais (4.24), obtém-se o seguinte fator de escala para (4.51):

$$a_{c,\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{6}}} \sin \left(\sqrt{1 + \frac{\beta}{6}} t \right) - \frac{C}{12 + 2\beta} \cos \left(\sqrt{1 + \frac{\beta}{6}} t \right) + \frac{C}{12 + 2\beta}. \quad (4.54)$$

A solução acima, é comparada a (4.28) para os mesmo valores dos parâmetros γ e β . O comportamento das soluções (4.28) e (4.54) são descritos abaixo.

Para os mesmos sinais de γ e B , como já mencionado na subseção 4.3.2, o fator de escala (4.28) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande para um tamanho máximo, seguido de uma contração para a singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. O fator de escala (4.54), para o valor positivo de β , apresenta o mesmo tipo de comportamento descrito acima. A diferença entre as soluções (4.28) e (4.54) está no tamanho máximo atingido pelo Universo e no tempo máximo de retorno para a singularidade do *Big Crunch*, que são maiores para a solução (4.54). Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 30 e permanecem qualitativamente os mesmos, após a variação dos parâmetros.

Para os sinais diferentes de γ e B , como já mencionado na subseção 4.3.2, o fator de escala (4.28) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande para um tamanho máximo, seguido de uma contração para uma singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. O fator de escala (4.54), para o valor negativo de β , apresenta o mesmo tipo de comportamento descrito acima. A diferença entre as soluções (4.28) e (4.54) está no tamanho máximo atingido

pelo Universo e no tempo máximo de retorno para a singularidade do *Big Crunch*, que são maiores para a solução (4.28), para valores pequenos de C . Por outro lado, para valores suficientemente grandes de C , essas quantidades são maiores, em geral, para a solução (4.54). Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 31. Neste caso, o fator de escala (4.28) pode apresentar um comportamento qualitativo diferente comparado ao de (4.54). Tal comportamento é obtido para valores suficientemente grandes de C satisfazendo as condições (4.30)-(4.32), combinado ao valor negativo de γ . Logo, nestas condições, o fator de escala (4.28), como já mencionado na Subseção 4.3.2, apresenta uma expansão linear no tempo, mas, de maneira a oscilar entre os valores de máximos e mínimos. Já o fator de escala (4.54), mantém o mesmo comportamento descrito anteriormente. A diferença entre os comportamentos das soluções (4.28) e (4.54) descrita acima, está na força externa atuante no movimento dos osciladores. Como já mencionado, em (4.28) a força é dependente do tempo, já em (4.54) a força é constante no tempo. Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 29.

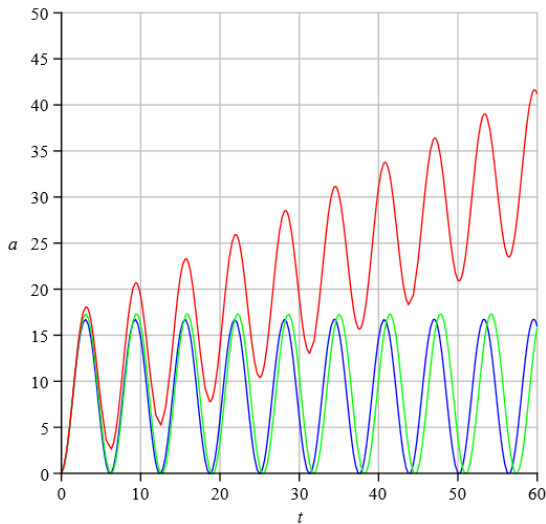


Figura 29 – Fator de escala para as diferentes frequências e para $\gamma < 0; \beta < 0$ com valores suficientemente grandes de C . Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.1 = \beta; C = 100$.

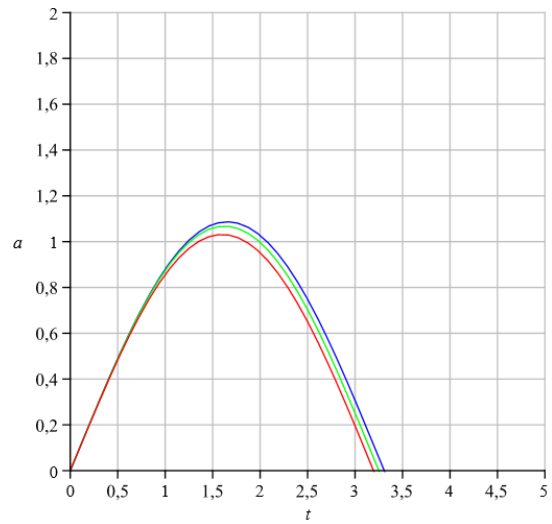


Figura 30 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B > 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 1, B = 1$.

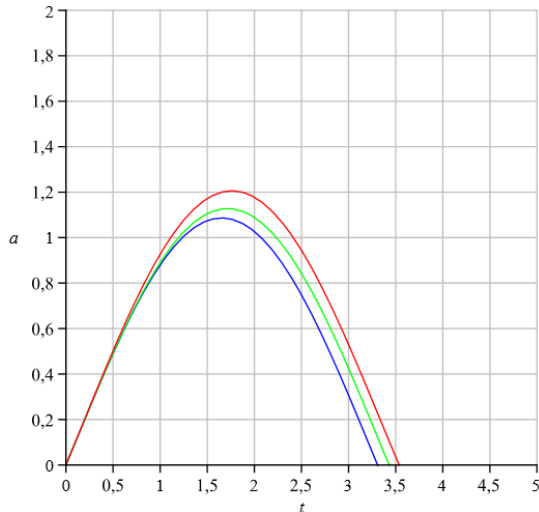


Figura 31 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B > 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1, B = 1$.

4.4.3 Caso $k = -1$

Para o valor negativo da curvatura ($k = -1$), pode-se perceber que as diferenças na dinâmica das equações (4.22) e (4.51) está nas forças atuantes. Em (4.22), existe uma força atuante que possui dependência temporal. Já em (4.51), existe uma força atuante que é constante no tempo. Outra diferença, está na presença do parâmetro livre B . Tal parâmetro, sempre aparece em (4.22) como um fator multiplicativo de γ . Logo, como já mencionado na Subseção 4.3.3, através de B , é possível intensificar o efeito causado por γ . O parâmetro B está ausente em (4.51). Devido as diferenças entre as equações diferenciais descritas acima, pode-se perceber que suas soluções apresentarão comportamentos diferentes.

Como já mencionado, ambas as equações recaem no caso comutativo, em que $\gamma = 0$ para (4.22) e $\beta = 0$ para (4.51).

Como solução, seguindo as condições iniciais (4.24), obtém-se o seguinte fator de escala para (4.51):

$$a_{c,\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{6}}} \sinh \left(\sqrt{1 - \frac{\beta}{6}} t \right) + \frac{C}{12 - 2\beta} \cosh \left(\sqrt{1 - \frac{\beta}{6}} t \right) - \frac{C}{12 - 2\beta}. \quad (4.55)$$

A solução acima, deve ser comparada a (4.34) para os mesmos valores dos parâmetros γ e β . O comportamento das soluções (4.34) e (4.55) são descritos abaixo.

Para os mesmos sinais de γ e B , como já mencionado na subseção 4.3.3, o fator de escala (4.34), descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial

$t = 0$. Tal Universo expande para um tamanho infinito, em um tempo t infinito. O fator de escala (4.55), para o valor positivo de β , apresenta o mesmo tipo de comportamento descrito acima. A diferença entre elas está na taxa de expansão, que é mais rápida para a solução (4.55). Os comportamentos descritos acima são representados na Figura 32. Neste caso, o fator de escala (4.34) pode apresentar um comportamento qualitativo diferente comparado ao de (4.55). Tal comportamento, é obtido para valores suficientemente grandes em módulo de B , combinado ao mesmo sinal de γ . Logo, nestas condições, o fator de escala (4.34) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo, expande para um tamanho máximo, seguido de uma contração para a singularidade do tipo *Big Crunch*, em um tempo t finito. Este comportamento só é possível devido a presença do parâmetro B . Já o fator de escala (4.55), devido a ausência do parâmetro B , permanece com mesmo comportamento descrito anteriormente. Os comportamentos descritos acima são representados na Figura 33.

Para os sinais diferentes entre os parâmetros γ e B , o fator de escala (4.34) descreve o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Tal Universo expande para um tamanho infinito, em um tempo infinito. O fator de escala (4.55) apresenta para o valor negativo de β , o mesmo tipo de comportamento descrito acima. A diferença entre eles está na taxa de expansão, que é mais rápida para (4.34). Os comportamentos descritos acima, são representados na Figura 34 e permanecem qualitativamente os mesmos, após a variação dos parâmetros.

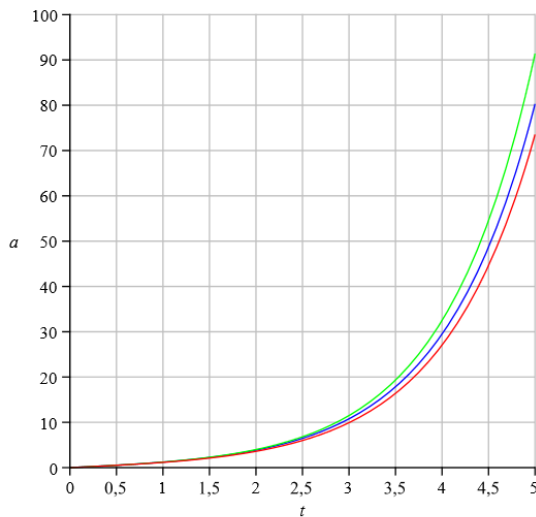


Figura 32 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; B < 0; \beta < 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.2 = \beta; C = 1, B = -1$.

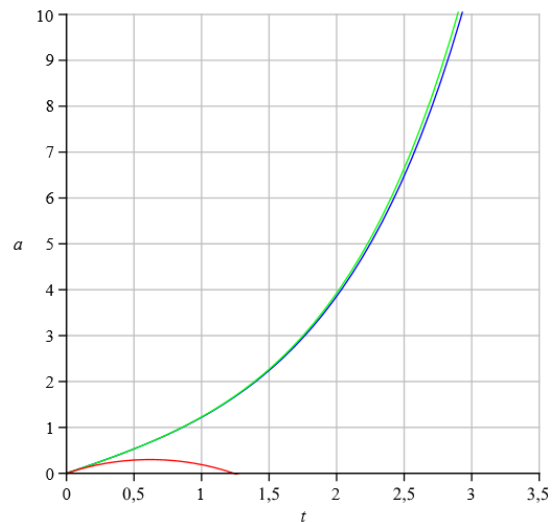


Figura 33 – Fator de escala para os casos $\gamma < 0; \beta < 0$ com valores suficientemente grandes em módulo de B . Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = -0.1 = \beta; C = 1, B = -38$.

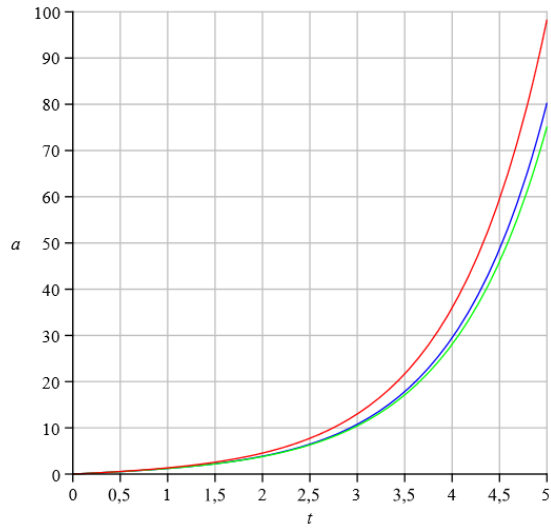


Figura 34 – Fator de escala para os casos $\gamma > 0; B < 0; \beta > 0$. Caso comutativo em azul, não-comutativo em vermelho, e da Referência [14] em verde. Valores utilizados $\gamma = 0.1 = \beta; C = 1, B = -5$.

5 CONCLUSÃO

Com o estudo realizado na presente dissertação, concluímos que a não comutatividade modifica o modelo comutativo de maneira considerável. Uma vez que estamos particularmente interessados em descrever a atual expansão do Universo, podemos mencionar que, devido exclusivamente à não-comutatividade introduzida aqui, obtivemos soluções para o fator de escala compatíveis com a expansão. Por exemplo, para ($k = 0$), o modelo não-comutativo apresentou soluções que descrevem expansões de maneira exponencial para o fator de escala. Tal fato, não pode ser obtido pelo modelo correspondente comutativo. Desta forma, utilizando o fluido perfeito de poeira para representar a matéria contida no presente Universo, no caso da curvatura espacial nula ($k = 0$), nosso modelo não-comutativo pode ser utilizado como um candidato para descrever a atual expansão do Universo. Para ($k = -1$), também obtivemos soluções que descrevem expansões de maneira exponencial para o fator de escala. Embora, neste caso as soluções comutativas correspondentes também descrevem expansões exponenciais, no modelo não-comutativo obtivemos parâmetros adicionais livres, que não estão presentes no modelo comutativo. Tais parâmetros são novas possibilidades para o ajuste da solução em relação aos dados observacionais.

Além das soluções citadas acima, para o caso ($k = 1$), foram obtidas outros tipos de soluções expansivas. Tais expansões ocorrem de maneira linear no tempo, mas, de maneira a oscilar entre máximos e mínimos. Mesmo não sendo compatíveis com a expansão do Universo, este tipo de solução, também representa um resultado importante, uma vez que ela é exclusiva do modelo não-comutativo, não podendo ser obtida pelo seu correspondente comutativo.

Outra conclusão importante que obtivemos, foi devido à comparação com outro modelo cosmológico não-comutativo [14]. A diferença entre os dois modelos é na forma de introdução da não-comutatividade. Desta comparação, é possível concluir que, as diferentes propostas para a introdução da não-comutatividade (4.3)-(4.5) e (4.36)-(4.39), resultaram em diferentes equações para o fator de escala. Tais equações, levaram a resultados com diferentes comportamentos. Logo, acreditamos que somente através de dados observacionais, pode-se verificar se a não-comutatividade é importante, e quais dentre as diferentes formas de introduzir a não-comutatividade são apropriadas para descrever a expansão atual do Universo.

REFERÊNCIAS

- [1] NEVES, C.; MONERAT, G.; CORRÊA SILVA, E. V.; OLIVEIRA-NETO, G.; REZENDE RODRIGUES, L. G.; SILVA de OLIVEIRA, M. Can noncommutativity affect the whole history of the universe? *gr-qc* 11093514, versão 2, 2015.
- [2] See WOLFGANG, P. *Scientific Correspondence*. Vol II, p.15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [3] SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, v. 378, p. 207-299, 2003.
- [4] See WOLFGANG, P. *Scientific Correspondence*. Vol III, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [5] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Physical Review*, v.71, p.38-41, 1947.
- [6] YANG, C. N. On quantized space-time. *Physical Review*, v.72, p.874, 1947.
- [7] AMORIM, R. et al. Função de Wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, p.3604, 2013.
- [8] MARCIAL, M. V. *Não-comutatividade via estruturas simpléticas com aplicações em sistemas não lineares, mecânica clássica e cosmologia*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Juiz de Fora.
- [9] SEIBERG, N., WITTEN E., String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics* v.1999, no. 9, p.032, 1999.
- [10] ABREU, E. M. et al. Lagrangian formulation for noncommutative nonlinear systems. *International Journal of Modern Physics*, v.27, n.9, 2012.
- [11] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C.; SABIDO, M. Noncommutative self-dual gravity. *Physical Review D*, v.68, 044015, 2003.
- [12] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C.; SABIDO, M. Noncommutative topological theories of gravity. *Physical Review D*, v.68, 045010, 2003.
- [13] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C. Noncommutative topological half-flat gravity. *General Relativity and Gravitation*, v.37, p. 713-722, 2005.
- [14] ABREU, E. M. C.; MARCIAL. M. V.; MENDES, A. C. R.; OLIVEIRA W.; OLIVEIRA-NETO, G. Noncommutative cosmological models coupled to a perfect fluid and a cosmological constant. *Journal of High Energy Physics*, v.05, p.144, 2012.
- [15] OBREGON, O.; QUIROS, I. Can noncommutative effects account for the present speed up of the cosmic expansion? *Physical Review D*, v.84, 044005, 2011.
- [16] GARCÍA COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C. Noncommutative quantum cosmology. *Physical Review Letters*, v.88, 161301, 2002.
- [17] BANERJEE, R.; CHAKRABORTY, B.; GHOSH, S.; MUKHERJEE, P.; SAMANTA, S. Topics in Noncommutative Geometry Inspired Physics. *Foundations of Physics*, v.39, p.1297, 2009.

- [18] WALD, R. M. *General Relativity*. 1 ed. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984.
- [19] D'YNERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- [20] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, 1972.
- [21] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [22] MISNER, C. D.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. 1 ed. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [23] ALCOFORADO, M. A. *Métodos espectrais aplicados a relatividade numérica: determinação dos dados iniciais*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Armando Dias Tavares - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2012.
- [24] HALLIWELL, J. J. em *Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*. eds. Coleman, S.; Hartle, J. B.; Piran, T.; Weinberg, S., World Scientific, 1991.
- [25] FRACALOSSI, R. *Modelos Cosmológicos Quânticos com Fluido Perfeito*. Dissertação de Mestrado, Centro de Ciências Exatas - Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.
- [26] MOURA, F. F. *Quantização do Modelo de Mini-superespaço de Friedmann-Robertson-Walker Permeado por Poeira e uma Constante Cosmológica*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, 2010.
- [27] SCHUTZ, B. F. Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle. *Physical Review*, v.2, n.12, p. 2762-2773, 1970.
- [28] AMARAL, G. M. *Universos Clássicos e Quânticos de Friedmann-Robertson-Walker.*, Tese de Doutorado, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, 2003.