Um Estudo Sobre a Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro

Marcílio Dias Henriques

Juiz de Fora (MG)
Setembro, 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Marcílio Dias Henriques

Um Estudo Sobre a Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (Minas Gerais)
Setembro, 2011

Henriques, Marcílio Dias.
Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro / Marcílio Dias Henriques. – 2011.
218 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)– Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria plana. 3. Ensino fundamental. I. Título.

CDU 51:37.02

MARCÍLIO DIAS HENRIQUES

"UM ESTUDO SOBRE A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA ÀREA E PERÍMETRO"

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
Orientador

Profª. Drª. Janete Bolite Frant
UNIBAN

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni
UFJF

Aprovado em 10 / 09 / 2011.

Dedico este trabalho aos meus pais, Itamar e Lucília, que me ensinaram, pela vivência prática diuturna, o valor da conduta moral de vida, e sempre renunciaram ao seu próprio conforto por amor a todos nós, seus filhos.

Os *frutos sazonados* desta pesquisa são dedicados à Mageri, minha esposa e amiga, que compartilhou comigo esta e outras jornadas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e à Espiritualidade Superior pela oportunidade renovada do estudo, do trabalho e da convivência nesta escola singular chamada Planeta Terra.

Aos meus pais, Itamar e Lucília, por toda uma vida de exemplos dignos e de esforços amoráveis e incansáveis na educação (no sentido mais amplo) de seus filhos, e também por incentivarem e apoiarem a minha caminhada profissional.

Aos meus irmãos, Rodrigo, Luciano e Roberta, cujas presenças alegres e ternas em minha vida são insubstituíveis.

Aos queridos tios, Alceu e Regina, e primos Bruno e Fernanda, pelo apoio.

Ao Roberto, primo e amigo leal, pelo exemplo conduta cristã na academia.

Aos meus sobrinhos Larissa e Allan, que me fazem ter mais coragem de ser bom e me impulsionam a ser, a cada dia, uma pessoa melhor.

À D. Cely e aos queridos Fabrício, André e família, pelo apoio e carinho.

À D. Isabel Salomão de Campos, por ser o exemplo sublime vida plenamente cristã que desejo seguir, por me orientar nos momentos de dificuldades maiores e por me sustentar o equilíbrio espiritual com seu sublime amor.

Aos amigos da Comunidade Espírita “A Casa do Caminho”, pela convivência que me ajuda a manter as minhas emoções e os meus ideais sempre subordinados aos princípios que esposamos e procuramos vivenciar.

Ao professor Amarildo, orientador e amigo, pela dedicação, pelo apoio e pela disponibilidade de anos a fio, que produziram em mim profundos respeito e gratidão.

Aos professores do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF, especialmente à professora Regina Kopke, por seu entusiasmo e sua dedicação.

Ao professor Romulo Campos Lins, por aceitar fazer parte das bancas de qualificação e defesa deste trabalho, cuja honra é para mim inestimável, e por me proporcionar, através do Modelo dos Campos Semânticos, um *caminhar* seguro, tanto no campo de pesquisa quanto na prática docente.

Aos professores Adlai Ralph Detoni e Janete Bolite Frant, por aceitarem fazer parte da banca de defesa, brindando-me com valiosas e gentis contribuições.

Aos queridos colegas de turma, Lorena, Élida, Alessandro, Bessa, Ricardo, José Mário, Carlos Renato, Willian, Wagner, pelo alegre e precioso convívio.

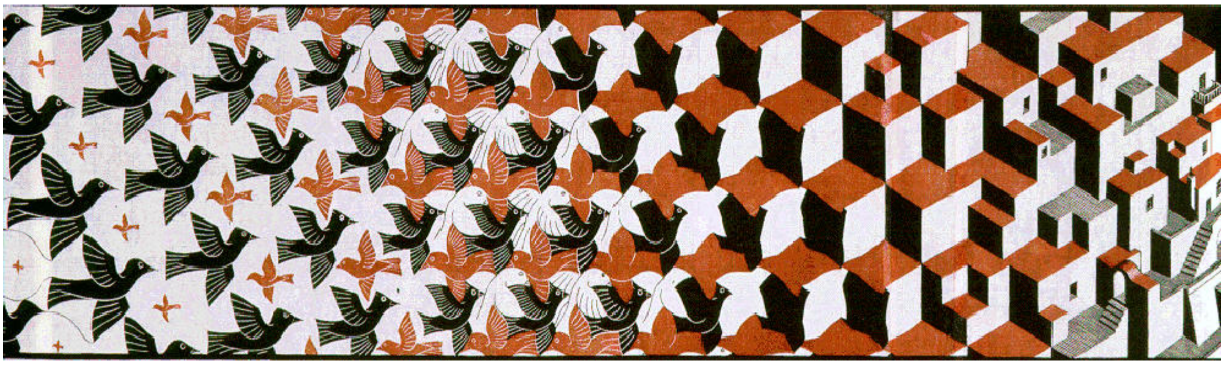
Aos colegas do NIDEEM, pelo apoio e pela amizade.

Aos meus alunos, cuja confiança e carinho me incitam a prosseguir.

Aos alunos que participaram da pesquisa, pela imensa contribuição.

Aos professores e diretores do Colégio de Aplicação João XXIII (UFJF) e do Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora, pelo apoio e incentivo.

À minha esposa e colega de curso, Mageri, por sua dedicação e seu amor.



Matamorphosis II. Gravura de Maurits Escher, 1940.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos nossa investigação que teve como objetivo levantar possíveis dificuldades de aprendizagem das noções de área e perímetro de figuras geométricas planas. Para atender a esta finalidade, dedicamo-nos à elaboração de um conjunto de tarefas que nos possibilitasse identificar a produção de significados de estudantes do Ensino Fundamental para perímetro e área. Utilizando uma abordagem qualitativa de pesquisa, o nosso estudo teve como base teórica o Modelo dos Campos Semânticos, que nos serviu também de instrumento de análise da produção de significados dos sujeitos de pesquisa, quando estes resolviam as tarefas propostas. Estas foram elaboradas atendendo a características específicas, com embasamento teórico, e foram aplicadas a uma dupla de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola publica da cidade de Juiz de Fora, no estado brasileiro de Minas Gerais. A investigação também teve como propósito confeccionar um produto educacional que consiste uma série de tarefas, a serem utilizadas por professores que lecionam para classes do quarto ciclo do Ensino Fundamental, e em orientações didáticas que possam auxiliar o trabalho docente de aplicar tais tarefas, em sala de aula. Este estudo nos propiciou, ainda, avaliar a importância da perspectiva da produção de significados, para o educador matemático, tanto na pesquisa quanto na prática docente, envolvendo temas geométricos.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Produção de Significados para Geometria. Área e Perímetro. Ensino Fundamental. Produto Educacional.

ABSTRACT

This work aims at presenting our investigation which had as its objectives the diagnosis of possible learning difficulties related to the notions of area and perimeter of plane geometric figures. In order to achieve this aim, we decided to develop a set of tasks that allowed us to identify the production of meanings to perimeter and area by primary school students. Making use of a qualitative approach to research, our study had as its theoretical basis the Model of Semantic Fields, which has also been used as an analysis tool for the research subjects' meaning production, when they solved the proposed tasks. These were developed following specific characteristics, with theoretical basis, and were applied to a pair of students of the nineth year of primary school in a state school in Juiz de Fora, Minas Gerais state, Brazil. The investigation also aimed at creating an educational product that consists of a set of tasks to be used by teachers of the fourth cicle of elementary school (grades 7- 8) and in didactic orientations that can help teachers to develop these tasks in their classes. This work has also allowed us to evaluate the importance of the perspective of the meaning production to the mathematics educator, both in the research as well as in the educational practice, involving geometric themes.

Keywords: Mathematics Education. Meaning Production to Geometry. Area and Perimeter. Elementary School. Educational Product.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A motivação para esta pesquisa teve gênese em minha própria prática de sala de aula – com as angústias naturais de um professor que ainda não aprendeu a compreender os processos de aprendizagem das Geometrias – e também nas perspectivas oferecidas pelo Modelo dos Campos Semânticos (criado por Romulo Lins) para a compreensão de tais processos. Grande influência este trabalho sofreu, ainda, de algumas das minhas lembranças da época de estudante da educação básica, que revelaram os muitos estímulos que eu havia recebido na escola e fora dela, para desenvolver *modos de operar* geometricamente. Tais estímulos foram essenciais para o meu sucesso com a geometria escolar e com as disciplinas cursadas na graduação, na especialização e no mestrado, além de me valerem em outros campos de atuação profissional, como a cinegrafia e a edição de vídeo.

No ano de 1996, tive um primeiro contato com Modelo dos Campos Semânticos, durante o curso de Especialização em Educação Geométrica[1], e desde então ele tem sido referencial teórico-epistemológico seguro para meus trabalhos de pesquisa, no interior do NIDEEM[2]. A escolha deste referencial justifica-se pela afinidade e pela coerência entre as noções por meio dele defendidas e as minhas concepções de educação e de processos cognitivos a ela subjacentes.

Ao lecionar para turmas do ensino fundamental e do ensino médio, por mais de seis anos, não foram raros os momentos em que me encontrei desprovido de recursos para oferecer aos meus alunos, em termos de situações exemplares de aprendizagem de noções geométricas. Embora buscando aportes outros, que não me foram oferecidos na graduação, *caminhei* vacilantemente sem saber distinguir deficiências minhas das possíveis dificuldades dos alunos, como alguém que tateia na escuridão. Este fato propiciou-me encontrar sentido nas palavras de Georges Glaeser (1982), pronunciadas em sua conferência na Jornada Nacional da Associação de Professores do Ensino Público da França, ocorrida no ano de 1981, e relacionadas à situação do professor diante sua carência de meios para saber como se dá a aprendizagem da matemática e como atuar efetivamente para promovê-la:

> Caminhamos em plena neblina! Não dispomos de meios eficientes para saber de antemão o que será fácil ou difícil para o aluno. O professor se vira, utilizando o seu bom senso pedagógico [...]. Mas, na realidade, ignoramos quase todos os mecanismos que provocam a compreensão ou a incompreensão de um certo assunto. (GLAESER, 1982, p. 83)

---

[1] Pós-graduação *Latu Senso* cursada no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), de 1996 a 1997.
[2] Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da UFJF.

Por outro lado, a minha[3] formação escolar – rica em experiências com desenho geométrico, desenho técnico e desenho artístico, tão numerosas quanto os estímulos que recebi de familiares à pintura e às artes gráficas – fez-me pensar que esta multiplicidade de *caminhos* (possíveis) deva ser favorável e, talvez, imprescindível para uma educação geométrica que entendemos desejável. Não pretendemos, neste estudo, lançar mão do senso comum e, assim, decidir qual terá sido a causa do sucesso ou do fracasso, na aprendizagem da geometria escolar ou, mais especificamente, das noções de perímetro e área de figuras geométricas planas. E não o faremos. Toda nossa análise e toda nossa proposta se assentam em bases epistemológicas consistentes e em pressupostos teóricos coerentes com a educação matemática que praticamos. Por exemplo, a posição que assumimos, ao considerarmos que a multiplicidade de experiências acima mencionada é favorável à aprendizagem de noções geométricas, encontra consonância na perspectiva oferecida pelo Modelo dos Campos Semânticos (MCS)[4], pois este nos permite afirmar que estudantes podem compartilhar modos de produção de significados, a partir de suas interações e de intervenções de seus professores.

Com o objetivo central de investigar um caminho para levantar possíveis dificuldades de aprendizagem das noções de área e de perímetro, lançamo-nos à elaboração de um conjunto de tarefas que nos possibilitasse identificar a produção de significados de estudantes do Ensino Fundamental para tais noções. Após a sua elaboração e o pré-teste, estas tarefas foram aplicadas a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Juiz de Fora, do estado brasileiro de Minas Gerais.

Utilizando uma abordagem qualitativa de pesquisa, o nosso estudo teve como base teórica o MCS, que nos serviu também de instrumento de análise da produção de significados dos sujeitos de pesquisa, quando estes resolviam as tarefas propostas. Na pesquisa de campo que empreendemos, a coleta de dados foi feita através de videografia (filmagem com captação de áudio direto), das anotações em nosso caderno de campo e, ainda, dos protocolos (fichas de registros escritos) dos sujeitos de pesquisa.

O presente trabalho divide-se em seis capítulos.

[3] Utilizamos o singular, em certos momentos, para distinguir o *mestrando* do *orientador*.
[4] No capítulo 3, apresentaremos o Modelo dos Campos Semânticos e discutiremos os nossos pressupostos teóricos.

No primeiro capítulo, discutiremos brevemente algumas questões pertinentes ao tema *Medidas*, relacionado aos currículos de Geometria da escola básica e ao nosso interesse em pesquisar sobre as dificuldades apresentadas por estudantes na distinção e na associação entre área e perímetro de figuras geométricas planas.

No capítulo 2, faremos uma revisão da literatura, a partir da qual discutiremos algumas perspectivas e abordagens, trazidas por diversas pesquisas do cenário internacional, relacionadas à aprendizagem das noções que envolvem área e perímetro de figuras geométricas planas, sobretudo aquelas ligadas a *medidas* destas grandezas. Na última seção deste capítulo, apresentaremos a perspectiva que adotamos para investigar caminhos à identificação e à dissolução das dificuldades de aprendizagem de perímetro e área, levantando também algumas diferenças entre a nossa pesquisa e as demais investigações discutidas neste capítulo, no que concerne à abordagem e aos posicionamentos que adotamos.

Os nossos pressupostos teóricos, baseados no MCS e orientadores de todo o nosso estudo, serão apresentados no capítulo 3, no qual ainda exibiremos o nosso problema de pesquisa, intimamente ligado o objetivo central desta investigação.

No quarto capítulo, delinearemos toda a nossa metodologia de pesquisa, apresentaremos os principais elementos constituintes de nossa investigação e descreveremos a preparação de nossa saída e campo, a elaboração do conjunto de tarefas (e suas características) e o método de análise da produção de significados dos alunos frente às tarefas que elaboramos. Também dedicaremos um espaço importante neste capítulo para as noções-categorias do MCS, que sustentam tal método de análise.

Destinamos o Capítulo 5 à análise dos registros do trabalho de campo, depois de buscarmos, na primeira seção desse capítulo, identificar alguns significados produzidos por matemáticos para área e perímetro de figuras planas, em algumas publicações adotadas por docentes de instituições de ensino superior no Brasil. Em outra seção, apresentaremos uma de nossas investigações anteriores, ligadas ao tema da presente pesquisa.

Finalmente, no capítulo 6, teceremos nossas considerações finais.

Elucidamos, ainda, que esta pesquisa é parte integrante de um projeto maior em desenvolvimento no interior do NIDEEM e que tem o propósito de investigar as possibilidades de reestruturação do currículo de Matemática do Ensino Fundamental, pelo *prisma* da produção de significados.

CAPÍTULO 1

MEDIDAS E GEOMETRIA ESCOLAR

Neste capítulo, de modo breve, discutiremos algumas questões relacionadas ao tema *Medidas*, que integra os currículos de Geometria da escolar básica. Tal discussão está intimamente ligada à gênese de nosso interesse em pesquisar sobre as dificuldades apresentadas por estudantes na distinção e na associação entre área e perímetro de figuras geométricas euclidianas planas.

Quando dissemos que o tema Medidas está relacionado à Geometria, estamos entrando no controvertido campo do *design* curricular, e nele inserindo a nossa parcela de questionamentos. *Que relações existem entre Medida e Geometria? Há "apenas" uma estreita ligação entre elas? De que modo esta ligação e aquelas possíveis relações influenciam a aprendizagem de medidas, especialmente as medidas de comprimento e de área?* Vamos, agora, delinear um caminho para tentar responder a estas questões. E este caminho passa necessariamente pela questão curricular.

Embora a nossa concepção de currículo envolva também outros aspectos igualmente importantes, como objetivos, metodologias e produção de significados (sobre isto trataremos no Capítulo 3), fixaremos nosso foco apenas nos conteúdos curriculares, como ponto de partida desta discussão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 51) afirmam que "o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas [...]". Esta distinção de campos de aprendizagem – *noções geométricas* e *medidas* – figura explicitamente naquele documento (BRASIL, 1998, p. 71), quando são apontados os quatro blocos de conteúdos nos quais se deve dividir a Matemática Escolar: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Formas, Tratamento de Informações. O bloco Espaço e formas é o que constitui o arcabouço da Geometria Escolar, sugerido nos PCN. Uma divisão similar a esta é encontrada em outro importante documento, intitulado Princípios e Normas para a Matemática Escolar, do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007, p. 31), descreve os conteúdos matemáticos em cinco grandes categorias: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e, finalmente, Análise de Dados e Probabilidade.

Um dos assuntos que quase sempre se leva em consideração, nas pesquisas sobre a geometria escolar, é o currículo. Entretanto, parece não haver concordância entre os pesquisadores, acerca daquilo que possa ser considerado elemento curricular de Geometria. Muito pelo contrário, o que se observa a esse respeito é que existe ampla divergência quanto aos detalhes e quanto à natureza da Geometria que deveria ser ensinada, desde a escola primária até a universidade. (USISKIN, 1994)

No esforço de fundamentar uma opção ou intenção curricular, alguns pesquisadores lançaram mão de categorizações das “geometrias” escolares. Por exemplo, Houdement e Kuzniak (2003) propuseram que a geometria elementar parece ser dividida em três paradigmas[5] diferentes, caracterizando três diferentes formas de geometria: Geometria Natural, Geometria Axiomática Natural e Geometria Axiomática Formalista. O referencial teórico desenvolvido por estes pesquisadores especifica a natureza dos objetos geométricos, a utilização de diferentes técnicas e modos de validação concebidos em cada um destes paradigmas, sendo os dois primeiros os que mais se relacionam a escola básica, por englobarem, respectivamente, objetos materiais (incluindo suas representações gráficas) e objetos ideais, como aqueles da Geometria Euclidiana. (HOUDEMENT, 2007)

Segundo os estudos da *International Commission on Mathematical Instruction* (1994), houve, no passado, e ainda há, na atualidade, fortes desacordos sobre objetivos, conteúdos e métodos para o ensino de geometria, em diferentes níveis. Esta constatação é corroborada por trabalhos mais recentes, como os de Jones (2000; 2010), de Alsina (2010) e de Hoyles, Foxman e Küchemann (2002).

Allendoerfer (1969, apud Usiskin, 1994, p. 28) já havia notado esse dilema fundamental, subjacente ao problema do currículo, quando asseverou que “em geometria não há concordância nem mesmo quanto ao seu objeto”. Esta mesma falta de consenso impulsionou um estudo encomendado pela UNESCO sobre a geometria escolar, desenvolvido por Morris (1986) e amplamente divulgado na Europa, na década de 1990.

Uma parcela considerável do desenvolvimento da geometria, ocorrido durante o século XX, foi inspirada na obra de Felix Klein (1849-1925), que propôs que a geometria deve ser vista como *o estudo das propriedades de um espaço que são invariantes sob um determinado grupo de transformações*. Com esta definição, tornou-se possível classificar as diversas geometrias relacionadas em "famílias", variando desde a topologia, como a mais geral, passando pelas geometrias projetiva e afim, até a geometria euclidiana, que tem maior número de propriedades

[5] A noção de paradigma utilizada por esses autores é a de Kuhn (1998).

invariantes, quando comparada às demais geometrias. Esta forma de ver a geometria e seus desenvolvimentos posteriores estimulou a demarcação de muitas geometrias mais. (JONES, 2000) Neste ponto, vemos o desenvolvimento da geometria na perspectiva dos matemáticos, e não em outra perspectiva[6].

Este desenvolvimento contemporâneo da matemática (campo científico), predominantemente geométrico, teve implicações também na reestruturação dos currículos adotados em nossos dias e nas pesquisas de grupos internacionais sobre currículos da geometria escolar, bem como em documentos governamentais norteadores da prática educacional de professores de Matemática. (KALEFF e NASCIMENTO, 2004)

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) nos oferecem um bom exemplo da influência de tal desenvolvimento sobre as orientações curriculares, ao apresentar a Matemática a ser ensinada nas escolas, da seguinte maneira:

> Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 25)

A existência e a aceitação desta “pluralidade dos modelos geométricos” parecem influenciar as perspectivas de ensino e de aprendizagem da geometria, em diversos países, de tal sorte a estimular uma constante reestruturação curricular, pela revalorização da geometria no âmbito da escola básica. Esta hipótese é corroborada por um documento de orientação curricular do Ministério da Educação de Portugal, no qual Abrantes, Serrazinha e Oliveira (1999) afirmaram:

> O lugar da geometria nos currículos tem sido alvo de grande controvérsia, um pouco por todo o mundo. Nos últimos anos, observa-se uma tendência geral no sentido da revalorização da geometria nos programas de Matemática. No entanto, quer os conteúdos a incluir, quer as metodologias a utilizar, continuam a ser questionados. (ABRANTES, SERRAZINHA e OLIVEIRA, 1999, p. 57)

---

[6] Esta diferenciação, que entendemos ser necessária, está calcada na distinção entre a matemática do matemático e a matemática escolar, concebida por Lins (2004).

Na introdução do capítulo VI de sua obra, intitulado *Outras Geometrias*, Veloso (2000) chama a atenção para a necessidade de se fazer uma pausa, no percurso de aprendizagem dos ensinos fundamental e médio, para reflexão acerca das concepções sobre a geometria; e justifica a sua preocupação:

> Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com “outros pontos”, “outras rectas”, “outros triângulos”, “outras distâncias”. Numa palavra, devem tomar contato com *outras geometrias*. Por isso intitulamos assim este capítulo. Nele apresentaremos algumas dessas outras geometrias que ao longo dos últimos dois séculos – por vezes até anteriormente, de maneira não explícita – foram tomando o seu lugar ao lado da geometria euclidiana. [...] Aqui, como nos outros capítulos do livro, não estamos a propor que *todos* os alunos, no futuro, experimentem trabalhar em *todos* esses tópicos. Mas que alguma vez, na sua vida escolar, tenham saído dos limites hoje estreitos da geometria euclidiana, por pouco tempo que seja. (VELOSO, 2000, p. 311)

Consideramos esta perspectiva de Veloso bastante coerente com a *ótica* que o nosso referencial teórico[7] nos oferece, isto é, a ótica da legitimação, na escola, dos diferentes modos de produção de significados para os temas estudados (como, por exemplo, os geométricos). Supomos que isto possa interferir diretamente no modo como os alunos aprendem geometria.

Um importante estudo comparativo de currículos, desenvolvido por Hoyles e colaboradores (2002), encontrou uma considerável variação nas abordagens atuais para a geometria escolar, em diferentes países.

A diversidade de abordagens e tratamentos teórico-metodológicos de tais currículos parece estar relacionada à concepção da natureza da geometria. Costa (2000), discutindo os fundamentos curriculares de geometria escolar, afirma:

> Sob a égide de “geometria”, podemos apontar tanto para matemáticas aplicadas como para matemáticas teóricas e podemos utilizar tanto a intuição como a axiomática. Contudo é esta grande versatilidade, tão fascinante para os matemáticos, que parece desorientar os estudantes na aprendizagem da geometria, bem como as tentativas para ensinar, por parte dos professores. (COSTA, 2000, p. 159)

Por um lado, vemos que não existe uma concordância no que se deva ensinar e aprender na escola, quando o tema é a Geometria. Mas, por outro, a possibilidade de eleger este ou aquele assunto a ser tratado em determinada aula ou em certo programa de Geometria soa-nos como algo no mínimo interessante e legítimo, pois

[7] Sobre este referencial e seus pressupostos, trataremos no capítulo 3 desta dissertação.

dá ao professor a liberdade para desenvolver tarefas que criem para os alunos uma *demanda de conhecimento*[8] de temas geométricos.

Esta liberdade, que entendemos desejável, talvez seja a razão mesma da falta de consenso sobre o currículo de geometria da escola básica. Além disso, como asseveraram Mammana e Villani (1998), “[...] é imprópria a alegação de que é possível elaborar um currículo de geometria que tenha validade universal”.

Entretanto, documentos oficiais de muitos países e instituições parecem ter como um de seus objetivos a uniformização do trabalho dos professores de matemática, ao menos no que tange a escolha dos conteúdos a serem ensinados e aprendidos.

Um exemplo disto são os PCN de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental. Neste volume dos *Parâmetros* (BRASIL, 1998, p. 49), ressalta-se o estudo das *Grandezas e Medidas* como instrumento que permite se estabeleçam interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, do Tratamento de Informações e de outros campos de estudo. Além do fato de ficarem explícitas, em tal documento, a divisão e a escolha dos blocos de conteúdos sugeridos para o trabalho em sala de aula, mais nos interessa tratar, neste momento, da descrição da categoria “Grandezas e Medidas”. Observemos o que orientam os PCN (Ibidem) a este respeito:

> Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica, etc.). [...] Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física. (BRASIL, 1998, p. 52)

Sob a denominação de *Medidas*, são comumente tratadas as mensurações de grandezas diversas que podem ser ensinadas e aprendidas na escola, como o tempo de percurso de um móvel, a massa de um corpo, a temperatura de um *quantum* de determinada massa, o comprimento de uma figura plana ou a área da superfície de um objeto tridimensional. Como exemplo deste tratamento curricular, temos os PCN (Brasil, 1998) e os Princípios e Normas (NCTM, 2007).

---

[8] Para o termo *demanda* atribuímos, aqui, o sentido de *situação problemática* de Majmutov (1983), que se aproxima da noção de *zona de desenvolvimento proximal* de Vygotsky (1978); para a noção de *conhecimento*, adotamos o sentido proposto por Lins (1993).

Owens e Outhred (2006), discutindo a complexidade da aprendizagem de *medidas geométricas*, concluíram:

> Para comprimento, área e volume, a organização espacial das unidades, em uma, duas ou três dimensões, respectivamente, é fundamental para a compreensão da medição da quantidade. Em contrapartida, a estrutura espacial não é importante para [a compreensão da medição de quantidade de] massa, temperatura e tempo, exceto em termos de leitura de uma escala. (OWENS e OUTHRED, 2006, p. 100, tradução nossa)

O trabalho de Abrantes e colaboradores (1999) reforça a perspectiva da conexão da aprendizagem do tema *Medidas* com aprendizagem de outros temas escolares, sobretudo dos temas geométricos.

> A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na medida, estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas) [...] (ABRANTES, SERRAZINHA e OLIVEIRA, 1999, p. 64)

Segundo Battista (2007), a noção de *medidas* desempenha um papel essencial na construção da intrincada teia de concepções, raciocínios e aplicações geométricos. Uma parcela considerável das pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem de *medidas* está focada na compreensão que os estudantes desenvolvem acerca de grandezas como a amplitude angular, comprimento, área e volume (ver, por exemplo, LEHRER, 2003; BATTISTA, 2007; CLEMENTS e BRIGTH, 2003). Entretanto, entendemos que, em tais pesquisas, é insuficiente a discussão feita sobre a natureza dos elementos geométricos, cujas medidas e suas formas de aprendizagem pelos alunos são investigadas. Estamos nos referindo, mais uma vez, à diversidade das geometrias e, portanto, das *naturezas geométricas*, euclidianas ou não. Isto por entendermos que devemos, em sala de aula, ampliar as possibilidades de produção de significados (portanto, de distintos *campos semânticos*) para os elementos geométricos que são constituídos pelos estudantes em determinadas atividades[9].

Já existem propostas de introdução de temas de geometrias não-euclidianas no ensino fundamental (por exemplo, MARTOS, 2002), como também estudos das dificuldades em implementar, na prática, tais propostas (LOVIS e FRANCO, 2011).

---

[9] Sobre os termos *produção de significados*, *campo semântico* e *atividade*, ver capítulo 3 desta dissertação.

Mas o que tem se mostrado comum às pesquisas, às orientações curriculares oficiais e aos livros didáticos, para este nível de ensino, é o trabalho com a Geometria Euclidiana. Por esta razão, não *inovaremos*, mas envolveremos, em nossa investigação, apenas as noções de elementos da Geometria Euclidiana, e não aqueles de outras geometrias. Faz-se mister destacar que, não obstante elegermos tais elementos, assumimos, como nosso pressuposto de trabalho, que objetivos (curriculares e político-pedagógicos) orientam conteúdos e métodos. Tal afirmação equivale a dizer que não colocamos o foco de nossas atenções nos conteúdos curriculares, mas sim nos objetivos que norteiam a nossa prática de professores da educação básica, sempre embasada em nossos pressupostos teóricos.

Além de influenciar o modo como operamos ao *ensinar* e como vemos o *aprender* dos alunos, em nossas salas de aula, a existência de clareza de objetivos e pressupostos nos propicia a possibilidade de criarmos um currículo dinâmico, adaptável às necessidades discentes e pedagógicas, sem nos engessarmos a um programa inflexível, centrado em conteúdos, ou a cronogramas pré-estabelecidos por outrem, quando não impostos por um sistema ou uma instituição de ensino.

E mesmo quando se tem a clareza acerca de *que conteúdo se deve ensinar*, advêm outras questões, não menos relevantes, quais sejam: *como os alunos aprendem certo conteúdo* e, ainda, *quais estratégias seriam facilitadoras deste aprendizado*. Não obstante a possibilidade de obtermos respostas para tais questionamentos, continuaríamos desprovidos de um suporte suficiente para que pudéssemos *ler* os processos de produção de significados e, então, intervir na dinâmica de tal processo; porquanto concordamos com Lins (2002), quando analisa a questão dos conteúdos de ensino e afirma:

> O que nós e este pequeno mas crescente número de pesquisadores procura, é caracterizar o que seja "Matemática" quando nos referimos à atividade profissional do professor de "Matemática". Não é apenas o conteúdo da Matemática "do matemático", mas não é também – cada vez entendemos melhor – a Matemática "do matemático" mais uma compreensão do que seu ensino possa envolver – seja em termos de estágios de desenvolvimento intelectual, seja em termos de estratégias de ensino. Mais do que uma taxonomia – não importa quão ampla ela seja – precisamos de categorias básicas que nos permitam ver esta Matemática da sala de aula acontecendo enquanto ela acontece, isto porque, como já apontaram diversos pesquisadores, os fenômenos da educação são complexos demais para serem cristalizados . (LINS, 2002, p. 23)

Quanto à relação entre Geometria e Medidas, aceitamos o fato de haver uma interdependência entre estes elementos curriculares, no que diz respeito à sua aprendizagem no ensino fundamental, fato que foi estudado por alguns dos pesquisadores que citamos acima, como, por exemplo, Owens e Outhred (2006). Desta foram, acreditamos que o desenvolvimento das noções que envolvem estes dois temas curriculares depende de estímulos dados na idade escolar, através da educação formal, baseada em pressupostos teóricos e em observações práticas, que por sua vez geram pesquisas e novas propostas de intervenção.

Consideramos ser legítimo, portanto, assumir que o tema *Medidas*[10] integra o currículo da *Geometria* da escola básica, pelo fato de existir intrínseca relação entre estes temas, como vimos anteriormente. E assim procederemos neste trabalho, por não encontrarmos necessidade de uma dicotomia ou tratamento de cada um destes temas em separado, como encontramos em documentos e livros didáticos, fato sobre o qual já aludimos. A partir deste nosso posicionamento – trabalhar com medidas geométricas é, também, trabalhar com geometria – vamos buscar explicitar e entender as dificuldades de aprendizagem de medidas de área e de perímetro de figuras euclidianas planas, dificuldades que temos reincidentemente observado ao lecionar para turmas do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e para classes do ensino médio de duas escolas públicas da cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais. E se buscamos identificar e entender tais "problemas" de aprendizagem, nada mais nos moveu (e move) nesta direção senão o desejo criar caminhos de intervenção didática, minimizando ou mesmo eliminando sua incidência, no momento em que surjam e sejam percebidos.

Para tratar de tais dificuldades de aprendizagem e das possíveis saídas para diminuir a sua ocorrência, empenhamos toda a discussão desenvolvida nos próximos capítulos.

[10] Deste ponto em diante, sempre que usamos o termo *medidas*, estamos nos referindo a *medidas geométricas* em uma, duas ou três dimensões, ou seja, de um comprimento, uma área ou um volume, respectivamente. Esta discussão fez-se necessária por efeito da distinção, já citada acima, entre os campos da Geometria e das Medidas, que aparece tanto nos documentos oficiais de orientação curricular, quanto na quase totalidade dos livros didáticos brasileiros de Matemática do ensino fundamental.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Como podemos avaliar a partir do que foi discutido no capítulo anterior, há uma complexidade subjacente ao processo de aprendizagem de medidas geométricas, que torna necessária uma busca por conhecermos *de perto* os elementos característicos de tal processo, não somente relativos aos seus condicionantes pedagógicos, mas especialmente no que respeita os aspectos cognitivos que o constituem. Iniciamos, então, essa busca.

Ao elaborar uma revisão da literatura acerca da compreensão do tema *medidas de comprimentos e áreas* por crianças recém-ingressas na escola, Clements e Stefhan (2004) estudaram em profundidade o desenvolvimento desta compreensão, e puderam afiançar:

> As crianças pequenas encontram e discutem quantidades, com naturalidade [...]. Elas primeiramente aprendem a usar as palavras que representam quantidade ou magnitude de uma determinada grandeza. Em seguida, elas comparam dois objetos diretamente e reconhecem a igualdade ou a desigualdade [...]. Neste momento, elas estão prontas para aprender a medir, ligando o número à quantidade: **Medida** é definida como a atribuição de um número a quantidades contínuas. (CLEMENTS e STEFHAN, 2004, p. 301, tradução e grifo nossos)

Segundo Jones e Mooney (2003), o trabalho com medidas na escola básica, embora muitas vezes seja iniciado através de atividades em contextos espaciais, frequentemente é abandonado com muita rapidez, e é provavelmente vivido pelas crianças como *mais uma forma de fazer cálculos*. Para evitar esta situação, as primeiras experiências (escolares) dos alunos com a geometria deveriam enfatizar o estudo informal das formas físicas e suas propriedades, com o objetivo principal de desenvolver a *intuição geométrica* e o *conhecimento dos estudantes* sobre o seu ambiente espacial. (JONES e MOONEY, 2003)

Para nos referirmos mais especificamente aos temas *área* e *perímetro*, destacamos o trabalho de Alsina i Pasttels (2009). Nele são sugeridas tarefas manipulativas no *Geoplano*, através das quais estudantes de 6 a 9 anos de idade poderiam desenvolver habilidades que vão desde a percepção de propriedades de figuras geométricas planas (como polígonos), até a distinção entre a medida do perímetro e a medida da superfície destas mesmas figuras.

Tanto em sugestões práticas (como esta, de Alsina i Pasttels) quanto em estudos como o Jones e Mooney (2003), há um grande número de aspectos teóricos e epistemológicos a serem considerados, na análise do processo de aprendizagem de tópicos de geometria escolar, possivelmente também ligados ao seu ensino e às concepções docentes sobre ambos os processos e sobre a própria natureza da geometria que se pretende ensinar.

Faremos, agora, uma revisão da literatura, a partir da qual discutiremos alguns destes aspectos, relacionados à nossa questão norteadora, que será descrita abaixo e que está intimamente ligada à aprendizagem das noções que envolvem área e perímetro de figuras geométricas planas, sobretudo aquelas relacionadas a *medidas* destas grandezas. Na base dessa discussão está o nosso esforço em compreender as razões de alguns *obstáculos* e *limites epistemológicos*[11] discentes que têm se mostrado muito frequentes em nossas aulas de Geometria, ao lecionar para turmas da educação básica.

2.1 – Aprendizagem de Área e Perímetro: Algumas Dificuldades

Uma das dificuldades dos estudantes, que com muita frequência tenho observado em nossas salas de aula do ensino fundamental e do ensino médio, é a confusão entre as ideias de área e de perímetro, quando eles resolvem problemas usuais de geometria euclidiana plana. E parece que não estou sozinho nesta constatação. Trabalhos como os de Lindquist e Kouba (1989), Nunes (1995), Chiummo (1998), Chappell e Thompson (1999), Malloy (1999), Leung (2001), Melo (2003), French (2004), Baldini (2004), D'Amore e Fandiño Pinilla (2006), Owens e Outhred (2006), Hernández (2008) e Silva (2009) apontam tal dificuldade[12] e procuram identificar suas características e sua gênese.

Ao descrever, a seguir, alguns destes (e outros) trabalhos, relacionados ao estudo de dificuldades dos estudantes na aprendizagem de perímetro e de área de figuras planas, buscamos identificar características que nos favorecessem na elaboração das tarefas aplicadas em nossa pesquisa de campo, da unidade de

[11] Os termos obstáculo epistemológico e limite epistemológico expressam dificuldades inerentes ao processo de produção de significados, segundo o sentido proposto por Lins (1993) e que assumimos neste trabalho, deste ponto em diante. Sobre isto, trataremos no Capítulo 3.

[12] Mesmo considerando que a *confusão entre área e perímetro* possa ter contexto e significado próprios em cada investigação, aceitamos ser razoável tomarmos um sentido geral para tal termo, de modo a abarcar a associação que se verifica quando os alunos, embora distinguindo os *sinais (palavras)*, ligam um ao outro signo linguístico, acreditando tratar-se de um mesmo objeto geométrico, ou tratar-se de objetos geométricos com análogas características. A partir desta concepção, trataremos das prováveis diferenças entre as concepções dos pesquisadores para o temo *confusão*, quando for necessário.

análise destas tarefas e do enfoque que daremos à execução desta análise, ligado aos objetivos de nossa dissertação.

Antes de propor uma aplicação do Modelo de van Hiele para o trabalho com perímetro e área nos anos finais do ensino fundamental, Malloy (1999) afiançou que, embora uma considerável parcela dos alunos deste nível educacional possa resolver problemas de deduzir e aplicar fórmulas de *área* e de *perímetro* de algumas figuras geométricas (como retângulos, quadrados e triângulos), eles não têm conseguido conceituar plenamente os significados de ambos os termos, e acabam por fazer confusão entre tais fórmulas, encontrando a área de uma figura quando se pede o seu perímetro, e vice-versa.

Segundo Leung (2001), muitos educadores frequentemente afirmam que os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem destes temas, as quais poderiam ser atribuídas às concepções errôneas[13], à confusão entre área e perímetro ou a um total desconhecimento destes temas geométricos. Talvez como consequência destas dificuldades, o entendimento de que os conceitos de área e de perímetro são úteis na vida cotidiana torna-se difícil de ser alcançado pelos alunos (HERNANDEZ, 2008).

Baltar (1996), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer *medidas* de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir as medidas de área e de perímetro. Em tal pesquisa, foi evidenciado o fato de que os aspectos da aprendizagem de diferentes elementos de medida (de comprimento, de área, etc.) são específicos e diversos entre si; assim, a ideia de área de uma figura plana não é sempre reconhecida como uma característica de tal figura.

Santos (2008), em sua pesquisa de mestrado, cuja metodologia se baseou em uma análise qualitativa sob a ótica da Didática da Matemática francesa, concluiu que a não resolução de certas tarefas – propostas aos estudantes por autores de certos livros didáticos e que envolvem as noções de área e perímetro – indica dificuldades que podem estar associadas à forma como se dá a passagem entre os *níveis de conhecimento*, às mudanças de *registros de representação semiótica* e às *mudanças de quadros* envolvidas nas tarefas.

---

[13] O termo “concepções errôneas” é uma tradução nossa para a palavra *misconceptions*, do texto original em inglês.

Embora não tenhamos interesse em trabalhar com estas noções da Didática francesa, consideramos pertinente levantar a questão da influência das abordagens dos temas geométricos trazidas pelos livros didáticos. Por exemplo, tanto Douady e Perrin-Glorian (1989) quanto Kordaki (2003) destacam que os alunos enfrentam dificuldades relacionadas à introdução prematura da abordagem quantitativa de área, privilegiando o uso das fórmulas para se calcular a área de figuras planas e negligenciando uma abordagem qualitativa, que enfatize o conceito de conservação.

Por outro lado, Teles (2009), em sua pesquisa, concluiu que houve avanços na incorporação de elementos das pesquisas em Educação Matemática, quais sejam: o tratamento de área como grandeza, a referência à dissociação entre área e perímetro e um trabalho *significativo*[14] com fórmulas. Não obstante, afirmou que há necessidade de novas investigações que apóiem a inserção de *equidecomposições* e *invariância de área*, nas abordagens feitas nos livros didáticos brasileiros da atualidade, envolvendo os temas *área* e *perímetro*.

Se voltarmos nosso olhar para as avaliações em larga escala, divisaremos, por exemplo, a Prova Brasil. Esta avaliação, que se insere no Plano de Desenvolvimento da Educação do Ministério de Educação e integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (BRASIL, 2008), foi aplicada a mais de nove milhões de estudantes brasileiros do 5º e do 9º anos do ensino fundamental, em cada uma de suas duas edições[15], ocorridas nos anos de 2005 e 2007. Da totalidade dos alunos avaliados, 67% erraram uma questão simples que envolvia o cálculo do perímetro de um polígono desenhado em uma malha quadriculada, o que demonstrou que os estudantes "confundiram perímetro com área" (Ibidem, p. 127). Vale ressaltar que a elaboração de questões de avaliações em larga escala, como esta, tem critérios muitíssimos rígidos e objetivos, a ponto de cada item (questão) estar relacionado a um único descritor (tema disciplinar) da matriz de referência, por exemplo, o descritor (da matriz de Matemática) "resolver questões que envolvem o cálculo do perímetro de uma figura plana poligonal" (BRASIL, 2008). Entendemos que estas avaliações, embora nos dêem pistas do quadro geral de certo grupo de alunos, envolvendo certo tema, não nos permitem conhecer quais sejam as

[14] Não é raro observarmos pesquisas, como esta de Teles (2009), utilizarem o termo "significativo", sem o cuidado de estabelecer com que sentido ele á empregado. Desta forma, não podemos concordar ou discordar das afirmações que o contêm.

[15] Dados disponíveis no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, com acesso em 08.Maio.2011: *http://www.inep.gov.br/basica-censo*

dificuldades discentes, tampouco avaliar suas possíveis causas. Para se lograr tal intento, necessário se faz identificar os significados produzidos[16] pelos alunos para os temas contidos nos itens das avaliações.

Um sistema internacional de avaliação em larga escala, que também avalia estudantes do 5º e do 9º anos da escolaridade básica, o TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study)*, em sua versão 2007 aplicada na Suécia, foi analisado pela Agência Nacional de Educação daquele país, em parceria com a Universidade de Gotemburgo. Não obstante o fato de classificarem a Suécia entre os quinze de melhor pontuação no *ranking*[17] da avaliação de conhecimentos matemáticos, os resultados mostraram que os conceitos de perímetro e área são frequentemente confundidos pelos alunos suecos. E revelaram ainda que muitos alunos não estão familiarizados com o caráter aditivo do conceito de área e por isso não são capazes de calcular áreas de figuras compostas. No mesmo documento, afirma-se que o desconhecimento do caráter aditivo da área acomete os estudantes, provavelmente, devido à falta de experiências conceituais, que por sua vez resulta de uma abordagem de ensino predominante processuais, ou seja, de aplicação de fórmulas destituídas de compreensão. (SKOLVERKET, 2008)

Segundo French (2004), a dificuldade de dissociar área e perímetro pode surgir de uma simples confusão de palavras ou mesmo originar-se de conceitos profundamente errôneos, os quais fazem os estudantes pensarem que perímetro e área estão ligados de um modo tão elementar, que o aumento de uma dessas grandezas conduz necessariamente ao aumento da outra. Não concordamos com a perspectiva de avaliar *pelo erro* ou *pela falta*; mas isto será discutido no próximo capítulo.

Yeo (2008) levantou um interessante quadro de pesquisas acerca da confusão entre as ideias de área e perímetro de figuras planas, na análise do qual destacou a necessidade de se focar na aprendizagem através do desenvolvimento de um conhecimento conceitual e relacional destes temas; e ressaltou, ainda, o fato de os próprios professores confundirem os conceitos de perímetro e área. O pesquisador concluiu que os resultados de sua investigação retratam a complexa interação entre os dois conceitos e os desafios associados ao seu ensino e às

[16] Sobre o processo de produção de significados a suas consequências na prática discente, ver capítulo 3.
[17] Em 2007, 48 países dos 5 continentes participaram do processo de avaliação do TIMSS. Ver o site, acessado em 08.Maio.2011: http://nces.ed.gov/timss/results07_math07.asp

relações entre estes conceitos, como a dificuldade dos professores em aceitar as ideias dos alunos, quando estas não coincidem com as suas próprias ideias; e afirma que nisto reside a importância do papel do *conhecimento de conteúdo pedagógico* do professor, em suas aulas de geometria e medidas para alunos da escola básica. (YEO, 2008)

D'Amore e Fandiño Pinilla (2006) sustentam que dificuldades estabelecidas na escola básica, acerca de questões ligadas a área e perímetro, persistem para muitos estudantes, até mesmo entre aqueles que já estão na universidade. Após a análise de tarefas aplicadas e entrevistas realizadas com professores e estudantes, os pesquisadores concluíram que estes últimos revelam obstáculos[18] na construção de um conhecimento das relações entre *perímetro* e *área* que não são apenas epistemológicos – como estabeleceram muitos dos trabalhos neste campo de pesquisas – mas apresentam também uma natureza didática.

Bellemain (2003) cita algumas pesquisas, levadas a termo na França, que constatam dificuldades de aprendizagem relativas às grandezas geométricas e suas medidas, e realiza uma pesquisa semelhante no estado de Pernambuco, observando as mesmas dificuldades sendo apresentadas por alunos brasileiros, sobretudo aquelas ligadas à não-dissociação entre perímetro e áreas, e também ao uso incorreto de fórmulas e de unidades de medida.

Os *Princípios e Normas* (NCTM, 2007, p. 51), apoiando-se nas pesquisas de Lindquist e Kouba (1989), apontam dificuldades que muitos alunos do ensino fundamental apresentam na compreensão das idéias de perímetro e de área, fato que tais pesquisadores entendem ser decorrente da utilização, pelos alunos, de fórmulas como $P = 2c + 2\ell$ ou $A = c \times \ell$, sem que estes tenham compreendido de que modo estas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida utilizada.

Um artigo de Outhred e Mitchelmore (1992, apud D'AMORE e FANDIÑO PINILLA, 2006) é dedicado ao estudo das dificuldades específicas de conceitualização de área e perímetro, observadas em parte dos alunos da escola básica, sujeitos da sua pesquisa. Estes pesquisadores mostraram que é apenas uma ilusão a atividade de ensinar tomada como garantia de que, se uma criança

[18] De modo diverso do que praticamos no presente trabalho, aqueles autores assumem, para o termo *obstáculo*, a caracterização dada por Brousseau (1983).

calcula a área de um retângulo, ela está automaticamente aprendendo a medir ou calcular a área de qualquer outra figura geométrica.

Em uma de nossas investigações anteriores (HENRIQUES e SILVA, 2009), pudemos verificar que muitos estudantes dos anos finais do ensino médio utilizam sempre o mesmo procedimento de cálculo ou a mesma fórmula para calcular a área de *qualquer* figura geométrica plana, poligonal ou não poligonal. Isto nos fez questionar sobre o que de fato aprenderam em toda sua vida escolar, acerca deste tema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 111) asseveram que a mudança da dimensão de grandezas gera dificuldades na aprendizagem de área de figuras planas, notadamente quando se trabalha com produto de medidas, como no caso de problemas envolvendo o cálculo da área (grandeza bidimensional) de um retângulo, a partir de medidas lineares (unidimensionais).

Entendemos ser bastante razoável considerar as possibilidades de existência e de identificação das dificuldades que citamos acima, o que é corroborado pela seguinte afirmação de Bellemain (2003):

> A consideração pelos professores de que não há dificuldades conceituais de aprendizagem significativas com respeito aos conceitos de área e perímetro é preocupante, pois se os professores não percebem as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem desses conteúdos, terão pouca chance de intervir para sua superação. (BELLEMAIN, 2003, p. 17)

Na seção seguinte, passaremos a discutir as perspectivas levantadas por algumas pesquisas para a aprendizagem de área e perímetro, envolvendo tais dificuldades.

2.2 – Aprendizagem de Área e Perímetro: Algumas Perspectivas

Como podemos observar, através deste quadro de referência das pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem das noções de área e perímetro de figuras poligonais, sobretudo as relacionadas à dissociação entre medidas de área e de perímetro, o tema é de extraordinária complexidade.

O NCTM (2007, p. 124) sugere algumas atividades para que os professores trabalhem habilidades de alunos da pré-escola até o 2º ano do ensino fundamental, relacionados à medição de comprimentos e de áreas de figuras planas, sem recorrerem ao rigor, mas sim à estimativa, dirigindo a atenção dos estudantes para as grandezas, para o processo de medição e para o valor das unidades de referência.

Já segundo Chappell e Thompson (1999), os estudantes precisam de tarefas nas quais possam analisar o perímetro e a área ao mesmo tempo para distinguirem claramente os dois objetos. Estes pesquisadores afirmam, ainda, que os alunos precisam construir representações visuais de figuras com determinadas áreas e perímetros, criar problemas relacionados com estas palavras e justificar as propriedades figurais observadas.

Estudos conduzidos por Pirola (2009), Viana (2005), Outhred e Michelmore (2000) mostram a necessidade de que os conceitos de área e perímetro sejam trabalhados de forma a articular os *conhecimentos declarativos* dos alunos e os seus *conhecimentos de procedimentos*, visando a uma aprendizagem significativa. Em contraposição a estas pesquisas, a posição que assumimos não tende ao pragmatismo, nem à visão de *campos conceituais*[19] e nem ainda a uma articulação entre estas concepções. Concebemos que o ensino e a aprendizagem das noções de área e perímetro (como de um outro tema qualquer, matemático ou não) devem ser calcados na produção de significados, como modo de ler os processos cognitivos e de intervir nestes processos, dentro dos quais o sujeito do conhecimento constitui novos objetos, como, por exemplo, área e perímetro, sem que tal constituição (ato de conhecer) tenha sua legitimidade colocada em cheque, isto é, sem concepções prévias nem juízo de valor. A perspectiva da produção de significados favorece a criação de um espaço comunicativo, dentro do qual a possibilidade de negociação de significados deve existir[20].

Bellemain e Lima (2000), ao pesquisarem a aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental, ressaltam que:

> [...] a construção das relações pertinentes entre área e comprimento é um processo complexo e de longa duração. Como mostra Rogalski (1982), nas relações entre essas duas grandezas geométricas intervém um processo duplo de diferenciação e de coordenação. Deve-se, ao mesmo tempo, diferenciar propriedades simultaneamente presentes numa figura (o comprimento do contorno e a área da superfície, ou a área de um sólido e seu volume) e coordenar essas mesmas propriedades na apropriação das fórmulas [...] (BELLEMAIN e LIMA, 2000, p. 6)

[19] Ver Vergnaud (2008).
[20] Sobre produção e negociação de significados, trataremos no capítulo 3.

Chamorro (1997), em concordância com os trabalhos de Guy Brousseau, analisou distintos aspectos que determinam os ambientes de aprendizagem relacionados a medidas em geral; no mesmo estudo, mostrou a grande complexidade de tal tema, especialmente no que concerne à sua aprendizagem. Entre os diversos exemplos que o autor apresentou, aparece com destaque a dificuldade de identificar as relações entre perímetro e área. Sobre isto, afirmou Chamorro (Ibidem):

> Em se tratando de superfície, por causa da medida produzida, convergem múltiplos obstáculos conceituais. Entre estes, está a relação que as unidades de superfície mantêm com as unidades de comprimento, sendo que a primeira subsidia a segunda, como produto da medida. Tais relações podem ser compreendidas começando pelas relações espaciais, as quais, por sua vez, deveriam ser coordenadas com as relações multiplicativas. A coordenação entre a linearidade de cada uma das dimensões e a linearidade das superfícies deve poder ser garantida através de um modelo geométrico que ajude a visualização de tais relações. (CHAMORRO, 1997, p. 45, tradução nossa)

Para construir a noção geométrica de *área*, é preciso estabelecer relações entre as fórmulas de área e de perímetro e os invariantes geométricos das figuras. E é necessário, também, desenvolver um trabalho geométrico sobre o tratamento destas figuras em casos não prototípicos ou não padronizados, isto é, um tratamento diverso do que encontramos na maioria dos livros didáticos de Matemática. (TELES, 2009; BALTAR, 1996)

Em um documento de divulgação da matriz de referência e dos resultados da *Prova Brasil* (BRASIL, 2008), aparecem sugestões de como os professores podem trabalhar com a habilidade (dos alunos) de calcular a área de figuras planas poligonais:

> Durante o trabalho com a habilidade em questão, tanto o perímetro quanto a área podem ser encadeados, possibilitando, assim, destacar-se a diferença entre os dois conceitos. As mesmas atividades utilizadas para conceituação de perímetro podem ser aqui abordadas. Entretanto, cabe ao professor tomar figuras geométricas bastante ilustrativas e que permitam a contagem de unidades de áreas. Essa é uma tarefa que atrai o aluno para o trabalho, pois um quadro que apresente regularidades e atratividade visual coaduna com o cálculo preciso, enquanto aqueles quadros ou formas geométricas não regulares remetem à idéia de estimativa. Dessa forma, o professor pode selecionar contextos apropriados como obras de arte com características regulares ou irregulares; diferentes tipos de paredes em azulejos; pisos e modelos arquitetônicos com formatos em planos. (BRASIL, 2008, p. 129)

Aceitamos a ideia do trabalho com unidades de área como algo um tanto natural para os estudantes e, portanto, mais favorável à aprendizagem da noção de área de polígonos. Entretanto, a proposição de tarefas que envolvam a noção multiplicativa de área parece ser bastante importante para o desenvolvimento da própria noção de estimativa, no cálculo da área de figuras planas poligonais (ABRANTES, SERRAZINHA e OLIVEIRA, 1999).

Naidoo e Naidoo (2008) propõem a seguinte tarefa[21] (Figura 1) para um grupo experimental de alunos, que deveriam construir de malhas quadriculadas no *Microsoft Word* e manipular dois retângulos (um deles com lados 4 e 3 centímetros, o outro, 6 e 2 centímetros), para calcular área e perímetro. E os pesquisadores documentaram que, ao fazer a tarefa proposta, os alunos descobriram a relação entre área e perímetro.

Observe estes retângulos. Desenhe as malhas quadriculadas e compare suas áreas e seus perímetros.

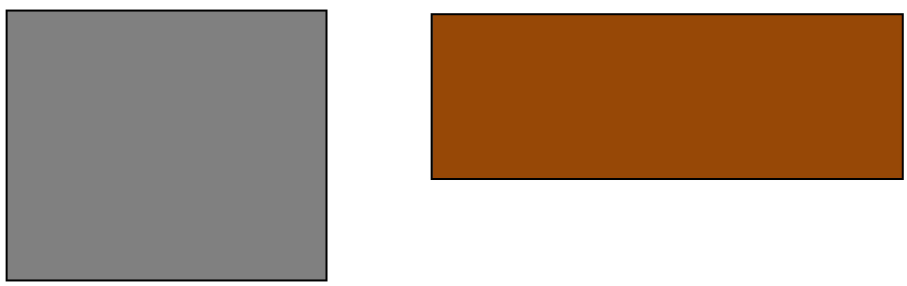


Figura 1 – *Uma das tarefas da pesquisa de Naidoo e Naidoo*

Muito embora a pesquisa de Naidoo e Naidoo (2008) tenha fornecido pistas interessantes para buscarmos entender os processos cognitivos que levaram os estudantes a “descobrir” tais relações, não encontramos nela uma discussão explícita desses processos.

Chiummo (1998), fundamentada na linha francesa da Didática da Matemática, desenvolveu um estudo histórico, epistemológico e da transposição didática dos conceitos de área de figuras planas, a partir do qual elaborou uma sequência didática como sugestão de trabalho com este tema em sala de aula. Destacamos uma das doze atividades que compõem tal sequência didática, no capítulo que intitulou *Orientações Técnicas dos Professores* (Chiummo, 1998):

[21] O texto da tarefa da Figura 1 é de nossa tradução.

> **ATIVIDADE 6**
>
> 1) Vamos construir juntos o jogo chinês chamado Trangram. 2) Vamos fornecer um quadrado de 16 cm de lado, para obtermos 7 peças, que são os componentes do jogo. 3) A seguir você poderá usar a sua criatividade e montar qualquer figura geométrica que quiser. 4) Depois de obter as 7 peças do jogo, o professor calculará a área e o perímetro de cada figura. Para o cálculo da área, o professor poderá utilizar a contagem de quadradinhos ou a fórmula. Para o cálculo do perímetro, o professor poderá utilizar uma régua, quando se tratar da diagonal do quadradinho.
>
> Calculando a área de cada figura separadamente e somando-as, o professor mostrará para o aluno que qualquer figura que ele vier a montar, usando a sua criatividade, verifica-se o mesmo valor para área e valor diferenciado para perímetro. [...]
>
> **OBJETIVOS DE ATIVIDADE 6**
>
> [...] Os professores poderão levar os alunos a perceber que não importa que tipo de figura os alunos venham a montar, eles irão obter sempre a mesma área com perímetros diferentes. Poderão ainda explorar a equivalência de peças, ou seja, qual a relação entre as áreas e os perímetros de figuras iguais.
>
> **ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 6**
>
> Poderá haver alguma demora na construção do Tangram para os professores de 1ª a 4ª série por falta do conhecimento do vocabulário matemático, como por exemplo, ponto médio, diagonal e vértices. Esses conceitos intervêm na construção do Tangram, porque fazemos uso deles para efetuar a dobradura do papel. Poderá ainda haver dificuldade na identificação dos polígonos que se originam do recorte do Tangram [...]. Quando se pedir o cálculo da área das figuras, os professores poderão vir a contar quadradinhos e não usar a fórmula de área, por ser mais fácil e mais rápido. [...] Quanto ao cálculo do perímetro, os professores da 1ª a 4ª série tenderão a usar a régua para todas as figuras, já os professores de 5ª a 8ª tenderão a contar as bordas, sem fazer uso da fórmula do perímetro. (CHIUMMO, 1998, p. 92, grifos da autora)

O esforço de Chiummo nessa sua pesquisa é de certo modo semelhante ao nosso: eleger tarefas (*atividades*, para ela) que permitam a intervenção do professor na aprendizagem dos alunos, sobre área, perímetro e suas relações. Por esta razão, destacamos a Atividade 6 (acima) para que a analisemos criticamente, de modo que, advertidos da possibilidade, evitemos incorrer em alguns equívocos encontrados em suas considerações e em seus encaminhamentos metodológicos.

Nosso primeiro objeto de crítica é a falta de preocupação com a questão epistemológica. Termos como *atividade*, *criatividade* e *conhecimento* são utilizados sem a preocupação em apresentar o sentido em que cada um deles é empregado. Outro ponto é a falta de clareza das expressões. Por exemplo, o trecho “por falta do conhecimento do vocabulário matemático” deixa dúvida quanto ao complemento nominal. De quem é o referido conhecimento? Do professor ou do aluno? Entendemos que um texto acadêmico, elaborado com a intenção de orientar tecnicamente professores em sua prática profissional, não poderia gerar tais dúvidas. Mas estas críticas não são as mais importantes. Vejamos o seguinte trecho dos *Objetivos da Atividade 6*: "Poderão ainda explorar a equivalência de peças, ou seja, qual a relação entre as áreas e os perímetros de figuras iguais". Segundo podemos entender, lendo esta construção, não haverá o que dizer sobre *áreas e perímetros de figuras iguais*; importa-nos a todos, professores e alunos, discutir os casos que envolvam pares ou grupos de figuras diferentes. Talvez pudéssemos indagar antes: iguais em ralação a quê? Forma? Número de lados? Ângulos? Ou tudo isto? Se a resposta for "tudo isto", persistimos com o questionamento: para que discutir áreas de figuras *iguais*? Bem, poderíamos ficar por aqui. Mas um ponto de crítica é central para nós, nesta dissertação: Chiummo (1998, p. 92) faz uma análise *a priori* da Atividade 6, antecipando as dificuldades e os encaminhamentos didáticos que surgirão ao aplica-la aos alunos do dois blocos de ciclos do Ensino Fundamental. Este *modus operandi* metodológico contraria todo o nosso posicionamento e também a nossa fundamentação teórica, pois não concebemos conhecimento *a priori*, tampouco métodos para prever e evitar a ocorrência de dificuldades. Quando a pesquisadora sugere que os professores (e alunos, por conseguinte) utilizem a contagem de quadradinhos e não a fórmula de área, por ser "mais fácil e rápida", ela está assim indicando uma única maneira de operar cognitivamente e eliminando a possibilidade de outras formas ocorrerem ou, ao menos, serem aceitas como legítimas. Além disso, a autora não cita nenhuma fundamentação para embasar tal assertiva, na orientação da atividade.

Em sua dissertação de mestrado, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brosseau e na metodologia da Engenharia Didática de Artigue, Baldini (2004) mostrou uma utilização do *software Cabri Géometrè II* contribuindo significativamente para a construção dos conceitos de área e perímetro. Na sequência didática que a pesquisadora elaborou e aplicou aos estudantes (sujeitos da pesquisa), há 30 *atividades*, entre as quais 5 relacionam os conceitos de área e perímetro. Como exemplo, vejamos apenas duas destas *atividades*:

> **Atividade 24:** Verificar se existe alguma relação entre área e perímetro de uma mesma figura. **Objetivos:** Calcular e relacionar área e perímetro de uma mesma figura; compreender que não existe nenhuma relação de proporcionalidade entre área e perímetro de uma mesma figura; ou seja, que área e perímetro não variam num mesmo sentido. [...] **Atividade 26:** Cálculo de área a partir do perímetro e cálculo do perímetro a partir da área. **Objetivos:** Calcular área de um quadrado conhecendo o seu perímetro; calcular o perímetro de um quadrado conhecendo sua área. (BALDINI, 2004, p. 125, grifos da autora)

Assumimos a posição de considerar que “atividades” como estas – que trabalham simultaneamente as noções de área e de perímetro – são mais favoráveis à sua aprendizagem, que outras tarefas que envolvem apenas um destes temas. Este posicionamento se funda na perspectiva defendida por Lins (1993), segundo a qual a prática tradicionalmente adotada, quanto ao ensino de matemática, esconde os saltos entre diferentes campos semânticos e confiam numa passagem “suave” entre noções distintas, relacionadas a um mesmo elemento. Por exemplo, quando são estudados a área e o perímetro de um triângulo. Não é raro encontramos, em livros didáticos avalizados pelo Ministério da Educação brasileiro, através de publicações do Programa Nacional do Livro Didático[22], estes temas sendo tratados em capítulos distintos e, em algumas obras, distantes um do outro, na ordenação de seus capítulos. Desta forma, as noções de área e de perímetro são *trabalhadas* separadamente e em momentos distintos de um ano letivo, por professores que seguem as sugestões dos autores de determinados livros didáticos, talvez assim não oferecendo a muitos alunos a oportunidade de comparar tais noções, associadas a figuras geométricas poligonais, e de perceber as relações existentes entre elas.

Ao tratar da aprendizagem destas relações, Silva (2009) utiliza o modelo de equilibração de Piaget para analisar como se desenvolve o funcionamento do pensamento dos participantes de sua pesquisa, ao resolverem tarefas envolvendo quadriláteros apresentados em um geoplano. Naquela pesquisa, o autor chegou à conclusão que, embora muitos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental tenham relativo sucesso na resolução de problemas que envolvem o cálculo da *área* e do *perímetro* de figuras como o quadrado e o retângulo, estes mesmos estudantes, com muita frequência, não são capazes de elaborar uma explicação para a relação existente entre tais grandezas. E procurando compreender a gênese deste fato, sem se ater sobremaneira a ela em sua pesquisa, Silva (Ibidem, p. 81) levanta a seguinte hipótese: “os professores optam por práticas pedagógicas que se fundamentam em algoritmos, sem se preocuparem com os processos de pensamento que estão envolvidos na construção do pensamento geométrico”.

Neste aspecto, isto é, no que concerne à necessidade de compreender os processos cognitivos, concordamos com o Silva (2009) e sustentamos que

[22] Ver Brasil (2010).

carecemos de uma compreensão flexível e prática do que seja aprender Matemática. Mas ousamos discordar daquele autor, quanto à categorização que ele faz dos modelos explicativos dos sujeitos de pesquisa. Pois fazer tal categorização implica considerar a existência de um conhecimento *a priori* dos sujeitos e, ainda, postular que o desenvolvimento cognitivo precede a aprendizagem, ou seja, que para se aprender algo, é preciso atingir certo nível de desenvolvimento, o das estruturas mentais correspondentes a determinado conteúdo; em última instância, fazer tal categorização significa analisar e avaliar os estudantes pela *falta*. Não aceitamos tal postura, pois ela envolve um perigoso juízo de valor da capacidade cognitiva dos estudantes, muito comum às teorias piagetianas. Ao discutir o processo comunicativo e criticar os pressupostos da postura educacional sustentada pelo projeto piagetiano, Lins (1999) afirma que:

> [...] não admitir o *não dizer* como alternativa tanto a uma proposição quanto à sua negação, é praticar a política da caracterização do outro pela falta: se você não diz o (que eu já sei que é) correto, é porque *ainda* não é capaz de entender (seja porque falta conteúdo, seja porque falta desenvolvimento intelectual). (LINS, 1999, p. 84)

Nossa perspectiva teórica refuta a *leitura do outro pela falta*, fundamentando-se na hipótese de Vygotsky (1993) que afirma que a *aprendizagem*, que se dá sempre pela apropriação das formas social e culturalmente produzidas, leva ao *desenvolvimento* das estruturas mentais de quem aprende. Em outras palavras, ao apropriar-se de uma forma social e culturalmente produzida (por exemplo, o Teorema de Pitágoras), o aluno se desenvolve cognitivamente, ou seja, produz um novo conhecimento[23]. Estendendo o exemplo que demos: o aluno (fictício) utiliza o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor desconhecido de um lado de certo triângulo retângulo; então ele afirma que, a partir dos valores dados de dois de seus lados, pode-se aplicar a fórmula que relaciona seus três lados e encontrar o valor do terceiro lado, e justifica sua afirmação, dizendo: “já fiz a medição dos lados de muitos triângulos retângulos e a fórmula funcionou para todos eles”. A partir dessas ações do aluno, dizemos que ele produziu significado para o Teorema de Pitágoras.

Como mediadores das interações (sociais, culturais) que geram o desenvolvimento cognitivo ou intelectual, apresentam-se os signos; com efeito, todas as funções mentais superiores são mediadas por signos (Luria, 1991;

[23] Sobre a concepção de *conhecimento* que assumimos, do nosso referencial teórico-epistemológico, discutiremos no próximo capítulo.

Vygotsky, 1993). Com base nestas noções, Nunes (1995) explicita as duas alternativas mais usuais para se representar o conceito de área de figuras planas. A primeira alternativa envolve medir o comprimento e a largura de certa figura (um retângulo, por exemplo) e utilizar tais medidas para calcular a área desta figura, através de uma fórmula, que neste caso corresponde ao produto das medidas. A segunda alternativa envolve começar por unidades de área (por exemplo, centímetros quadrados), que se forem arrumadas em linhas e coluna, sobre a figura a ser medida (novamente, consideremos o retângulo), a área desta figura é calculada pela multiplicação do número de unidades numa linha vezes o número de linhas. Estas duas alternativas – explica a pesquisadora – diferem basicamente em relação ao número variáveis envolvidas em cada concepção de produto de medidas: três variáveis na primeira e duas na segunda concepção. Vejamos a metodologia que Nunes (1995) utiliza em sua pesquisa:

> Pedimos a pares de crianças inglesas, dos 8 aos 10 anos, para resolverem alguns problemas de áreas. Os pares de alunos foram distribuídos aleatoriamente por uma de duas condições. Na primeira condição, foram-lhes dadas réguas como instrumento de medida. Na segunda condição, foram-lhes dados tijolos de 1 cm^2, mas não lhes demos tijolos suficientes para cobrir completamente as figuras, para que a solução de simplesmente cobrir a figura e contar o número de tijolos não fosse possível. (NUNES, 1995, p. 17)

E observemos os resultados desta pesquisa (NUNES, Ibidem):

> O desempenho dos alunos, nestes problemas, diferiu em função do sistema de signos que tinham disponível na situação experimental: réguas ou unidades de área. As diferenças foram observadas quer quanto ao número de respostas correctas, quer quanto ao tipo de concepção utilizada na resolução do problema. As crianças que tinham a sua disposição unidades de área tiveram um desempenho significativamente superior ao das que tinham réguas. Os alunos que tinham régua como instrumento de medida costumavam, mais frequentemente, adicionar as medidas do que multiplicá-las. Eles calculavam ora o perímetro, ora o semi-perímetro. [...] Os alunos que tinham unidades de área como instrumentos de medida frequentemente descobriam uma fórmula para resolverem o problema, número de tijolos numa linha vezes o número de linhas, e usavam-na com sucesso para ultrapassar o facto de faltarem tijolos. (NUNES, 1995, p. 18)

É importante destacar que há, nestas conclusões de Nunes, indícios de uma abordagem com bases eminentemente piagetianas, na revelação da concepção de conhecimento *a priori*, quando a autora se refere às “respostas corretas” dos sujeitos de pesquisa. De fato, Nunes (1995), em sua abordagem, entende serem compatíveis as teorias de Vygotsky e de Piaget. Mas nós consideramos que isto é impraticável, pois os pressupostos de um são diversos dos pressupostos do outro. Por exemplo, no que concerne ao desenvolvimento cognitivo humano, enquanto Piaget se refere a *estágios*[24] e a mecanismos de passagem entre estágios, Vygotsky fala de *processos* cognitivos que, uma vez postos em marcha, são a causa de sua própria mudança (LINS, 1999).

Embora este ponto de discordância nossa com a abordagem de Nunes (1995), sua pesquisa nos ajuda a pensar acerca da confusão discente entre *área* e *perímetro*, além de nos informar da importância da mediação de instrumentos ou ferramentas na aprendizagem destes temas. E esta informação influenciou-nos no processo de elaboração das tarefas aplicadas em nossa pesquisa de campo.

Em uma pesquisa mais recente, Owens e Outhred (2006) investigaram a *compreensão* de jovens alunos acerca da quantificação de uma superfície plana, e chegaram às seguintes conclusões: *i)* os alunos parecem considerar duas quantidades, o número de quadrados (unidades de área) ao longo do comprimento e o número destes quadrados ao longo da largura de um retângulo, sem reconhecerem estas quantias como o número de quadrados numa linha e o número de linhas; *ii)* poucos alunos utilizam a multiplicação para enumerar os elementos em uma malha quadriculada; *iii)* a metade dos alunos conta elemento a elemento, e 38% deles utilizam a adição, repetidamente; *iv)* o conhecimento discente de estruturas em malha (matriz retangular) proporciona bases para uma alternativa de trabalho com unidades de área necessárias para se cobrir um retângulo; *v)* desenhar uma matriz de unidades quadradas, usando dois conjuntos de linhas paralelas, revelou-se algo mais difícil do que o esperado, para os alunos, o que sugere que a estrutura de tesselação (malha), embora não seja óbvia para eles, precisa ser aprendida.

Mas a maneira de se operacionalizar esta aprendizagem parece estar imbricada a alguns fatores ligados ao comportamento cognitivo dos estudantes.

Segundo Pavanello (2004), a compreensão do conceito de área depende de dois processos: *i)* o processo tradicionalmente utilizado no ensino deste conceito consiste em fixar uma unidade de área e verificar "quantas vezes a unidade cabe na

---

[24] A noção piagetiana de estágios de desenvolvimento cognitivo nos permite entender como a teoria de Piaget favorece uma *leitura pela falta*. Exemplificando isto, Lins (1999, p. 78) escreveu o que parece ser a fala de um professor fictício do ensino tradicional, em concordância com os pressupostos piagetianos: "eu, que já me desenvolvi (já aprendi), e que sei que você é igual a mim, posso ver o que falta em seu desenvolvimento, ver o que você ainda não é".

figura”; assim, cada superfície é associada a um número, e a comparação das superfícies se reduz à comparação desses números, que são as medidas de suas áreas; *ii)* o processo que permite comparar superfícies, tendo como fundamento a igualdade de figuras por sobreposição; por este processo, duas superfícies planas têm mesma área se suas formas “coincidem”, e essa verificação é feita por *sobreposição* ou *decomposição/composição* da figura, sem a utilização do conceito de medida de área. E concluiu a pesquisadora: o primeiro processo permite verificar que, ao adotar diferentes unidades de superfície, obtêm-se diferentes valores numéricos para sua área, enquanto o segundo pode levar a compreensão de que superfícies diferentes podem ter a mesma área. (PAVANELLO, 2004)

Clements e Stefhan (2004) investigaram quais atividades contribuem para que os alunos aprendam a noção de área, e concluíram: em primeiro lugar os alunos devem experimentar cobrir várias superfícies planas com uma unidade de medidas, percebendo que as regiões devem ser cobertas sem sobreposição das unidades entre si e sem lacunas entre elas; em segundo lugar, devem aprender a estrutura de malhas (matrizes), o que demonstrou ser um processo que demanda muito tempo, mas com resultados muito significativos; terceiro, os alunos devem aprender que o comprimento dos lados de um retângulo pode ser determinado pelo número de unidades em cada linha e o número de linhas na matriz; em quarto lugar – e isso geralmente é apropriado apenas nas séries intermediárias e mais avançadas – as crianças podem aprender a multiplicar as duas dimensões como um *atalho* para a determinação do número total de quadrados. (CLEMENTS e STEFHAN, 2004)

Nestas duas últimas pesquisas citadas – de Pavanello e de Clements e Stefhan –, destacamos dois modos de proceder do professor, em sala de aula, que parecem-nos suficientes para criar um campo favorável ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, acerca das noções de área de figuras planas. O primeiro desses *modos didáticos* é a comparação de formas planas, envolvendo também decomposição e composição de figuras. Toda criança experimenta *de per si* montar, empilhar, enfileirar e sobrepor objetos físicos de formatos diversos ou semelhantes, o que Piaget e Inhenlder (1993) mostraram estar relacionado ao seu desenvolvimento sensório-motor, o que entendemos ser real, embora não aceitemos as definição dos estágios por faixas etárias, dada por tais pesquisadores. O segundo *modo didático* é a associação das unidades de área às superfície a serem medidas, o que permite a estruturação das malhas de unidades, que também aceitamos como um processo cognitivo de moroso desenvolvimento e de difícil intervenção docente.

Alguns pesquisadores sugerem que o ensino de medidas de área de figuras planas não deveria começar com a utilização de réguas. Por exemplo, Nunes, Light e Mason (1993) mostraram que as crianças de sua pesquisa não conseguiram resolver problemas de área, quando utilizaram réguas, mas foram capazes de criar soluções multiplicativas, quando se lhe ofereceram oportunidades de cobrir superfícies com unidades quadradas.

Clements e Stefhan (2004) defendem que, para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem de áreas, o professor não deve focar os procedimentos de cálculo, mas sim os significados que tais processos trazem para os alunos. Para estes pesquisadores, pode ser um exagero o argumento básico de Piaget, de que as crianças devem aprender antes a conservar comprimentos para que possam produzir sentido para os sistemas de medições, como as réguas (físicas) ou ferramentas computacionais.

De acordo com a perspectiva vygotskiana, as réguas são vistas como instrumentos culturais, dos quais as crianças podem se apropriar. Ou seja, os alunos podem usar as réguas, apropriarem-se delas e assim construírem novas ferramentas mentais. (CLEMENTS e STEFHAN, 2004)

Concordamos com esta perspectiva, entendendo, porém, que outros instrumentos de medida de área e de comprimento podem ser apropriados pelos alunos, mesmo que não se lhes sejam oferecidos. Por exemplo, em nossa sala de aula de Geometria do Ensino Fundamental, já experimentamos situações nas quais, para fazer medições de comprimentos de objetos físicos (como porta e janelas), estudantes utilizaram pedaços de madeira e de barbante, por iniciativa própria, quando lhes faltava uma régua. E flagramos, de outra feita, um aluno usando até mesmo instrumentos não físicos (um *metro virtual*, chamaríamos) para estimarem a largura de um quadro. Nesta última situação, vale ressaltar, o jovem era aprendiz de pedreiro, auxiliar na construção civil.

2.3 – Aprendizagem de Área e Perímetro: a Nossa Perspectiva

A diferença fundamental que se estabelece entre a nossa pesquisa e todas as outras citadas anteriormente – que também investigam um caminho para a solução da reconhecida confusão entre as ideias de perímetro e área – está na perspectiva que adotamos, a partir do nosso referencial teórico. Como veremos no capítulo seguinte, este referencial nos proporciona um olhar diferente das teorias piagetianas e do modelo de Van Hiele, que analisam os processos cognitivos pela falta[25], mas também diferente dos trabalhos baseados no arcabouço da Didática Francesa, na qual as caracterizações epistemológicas são distintas daquelas trazidas pelo modelo teórico que adotamos. Este modelo nos possibilita identificar quais significados cada sujeito produz, no interior de uma certa atividade, para um determinado objeto que está sendo constituído por este sujeito.

Outra diferença importante está no fato de valorizarmos os significados não-matemáticos produzidos pelos alunos, na escola ou fora dela. Acerca disto, trataremos no próximo capítulo, mais amiúde.

Uma perspectiva que concebemos como pertinente à nossa questão de investigação, e coerente com nosso referencial teórico, é a da inicialização do trabalho com a Geometria – nomeadamente com as noções de medidas envolvendo área e perímetro – mais cedo, ou seja, nas séries iniciais do ensino fundamental. Esta perspectiva é defendida por alguns pesquisadores (por exemplo: LAMONATO, 2007; NUNES DA SILVA, 2006; JONES e MOONEY, 2003) e também por documentos de orientação curricular (NCTM, 2007; BRASIL, 1997). Fato é que, a partir dessas pesquisas e desses documentos, além da nossa perspectiva teórica, não encontramos impedimento para introduzir as noções de medidas, por exemplo, no 6º ano do ensino fundamental, e isto nos possibilitaria o desenvolvimento da pesquisa de campo com alunos desta série. No entanto, entendemos que este trabalho demandaria muito mais tempo do que tínhamos disponível. Assim, desenvolvemos nossa pesquisa de campo como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com o propósito de explicitar as dificuldades ligadas a área e perímetro, e também criar maneiras de intervir na aprendizagem da diferenciação deste temas geométricos (ver capítulo 4).

Citaremos e discutiremos, a seguir, uma pesquisa que influenciou a definição de nossa perspectiva para levantar as dificuldades dos alunos com área e perímetro, de modo a intervir na produção de significados dos alunos para estes temas.

[25] Por exemplo, o modelo dos Campos Conceituais de G. Vergnaud, como ressalta Lins (2008, p.534).

De acordo com Clements e Stefhan (2004), existem cinco conceitos básicos envolvidos no processo de aprender a medir áreas: *1)* partição, *2)* interação de unidades, *3)* conservação de medidas, *4)* estrutura de malha, e *5)* medição linear. Tal como a medição linear, a partição é uma ação mental de dividir o espaço bidimencional com unidades bidimensionais. Muitos docentes frequentemente assumem que, para os alunos, o produto de dois comprimentos estrutura uma região em unidades bidimensionais de área. Contudo, a construção de uma malha bidimensinal não é algo trivial para os estudantes. As primeiras experiências discentes com área deveriam incluir a partição de um região com unidades bidimensinais escolhidas e, nesse processo, discutir questões como os espaços que restaram, a sobreposição de unidades e a precisão de medidas. As discussões destas ideias podem orientar os alunos para fazerem mentalmente a partição de uma região em sub-regiões enumeráveis. Ao cobrirem regiões com unidades de área, sem deixar quaisquer lacunas ou sobreposições, as crianças podem desenvolver o conceito de interação de unidades para medir áreas. (CLEMENTS e STEFHAN, 2004)

Embora este trabalho de Clements e Stefhan (Ibidem) aponte para características importantes dos processos cognitivos de crianças que aprendem a medir área, dando pistas para as intervenções e modos de proceder do professor, a respeito da produção de significados para as noções de área e de comprimento, não compartilhamos o estabelecimento do que tais pesquisadores chamaram de conceitos básicos envolvidos na aprendizagem de medição de área. Esta predefinição ou antecipação do que pode acontecer na produção de significados para cada sujeito é o mesmo que estabelecer uma “maneira correta” (e a única aceitável!?) de operar, por exemplo, uma multiplicação de dois números inteiros com dois ou mais algarismos cada, como é muito comum se observar na prática de professores afeitos ao *ensino tradicional vigente*[26], nos 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental. Nossa perspectiva não quer privilegiar, em momento algum, esse ou aquele modo de produção de significados, mas objetiva expandir sempre as possibilidades de surgimento distintos conhecimentos sobre um mesmo tema, e do desenvolvimento de modos de leitura destes conhecimentos dos sujeitos pelos professores, no momento em que as produções ocorrem, permitindo intervenções

[26] Utilizamos este termo no sentido dado por Baldino (1998).

didáticas *ao vivo*, ou seja, quando surjam as dificuldades que demandam tais intervenções.

Para sintetizar nosso posicionamento sobre pontos-chave de alguns trabalhos que destacamos no presente capítulo, organizamos os seguintes tópicos:

- avaliamos que a principal dificuldade observada no processo de aprendizagem de área e de perímetro é a confusão entre estas grandezas geométricas, o que inclui a não dissociação entre suas medidas;
- aceitamos que o trabalho simultâneo com área e perímetro favorece a aprendizagem destas noções;
- assumimos o fato de que um sujeito saber calcular a área de um tipo de figura plana (um retângulo, por exemplo) não garanta que ele tenha aprendido a calcular a área de uma outra figura qualquer;
- concordamos com a afirmação (já muito bem endossada pelas pesquisas) de que a mudança de dimensão gera dificuldades na medição de certas grandezas, como comprimento e área de figuras planas;
- assumimos com válida a ideia de comparação entre objetos (figuras) mensuráveis para a aprendizagem de área e perímetro;
- atentamos para o fato de que a área de uma figura não é sempre reconhecida como uma de suas características (isto nos ajuda a pensar na gênese das possíveis dificuldades no processo cognitivo dos alunos que aprendem sobre perímetro e área);
- consideramos relevante o fato de muitos estudantes avaliarem que o aumento do perímetro de uma figura implica necessariamente em um aumento de sua área, e vice-versa;
- entendemos ser razoável considerar a estrutura de malhas (quadriculadas, triangulares, etc.) favorável à aprendizagem da noção multiplicativa de área, mas potencialmente geradora de dificuldades de aprendizagem, como aquelas citadas ao longo deste capítulo;
- damos foco para o caráter aditivo de área, a expressar-se na utilização de diferentes unidades de área e na decomposição e composição de figuras;
- não aceitamos as noções de concepções errôneas, de conhecimento *a priori* e de níveis de desenvolvimento do pensamento por faixa etária;

• não assumimos a necessidade de uma variedade de representações para o aprendizado de área e perímetro, mas sim de uma diversidade de experiências e de tarefas – que favoreçam a multiplicidade de significados produzidos pelos alunos – e também de intervenções docentes que objetivem a negociação destes significados.

Além destes posicionamentos, assumiremos também outros pressupostos, ligados ao nosso referencial teórico, o Modelo dos Campos Semânticos.

No seguinte capítulo, passaremos a explicitar este referencial e o nosso problema de pesquisa.

CAPÍTULO 3

A PERSPECTIVA TEÓRICA
E O PROBLEMA DE PESQUISA

Apresentaremos, neste capítulo, o problema de pesquisa que formulamos com o propósito de dar continuidade às nossas investigações precedentes sobre a produção de significados para a Geometria Escolar, que respondem a uma demanda gerada de nossa vivência em sala de aula de Matemática, em escolas publicas da cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais. No entanto, entendemos ser necessário, primeiramente, pontuar e exibir os pressupostos teórico-epistemológicos que assumimos em nossos trabalhos, o presente e os anteriores. Pois que estes pressupostos, além de servirem de base para nossos estudos, também tiveram as funções de motivá-los e de viabilizá-los.

Embora esta pesquisa se caracterize por um estudo específico acerca da aprendizagem de tópicos geométricos, empreendemo-lo com o propósito de alargar nossa visão sobre a prática de sala de aula, através do desenvolvimento de uma leitura crítica dos processos cognitivos discentes, relativos à Geometria Escolar, e das possibilidades de intervenção docente nesses processos.

Consideramos central a questão epistemológica na pesquisa em Educação Matemática, questão esta cuja relevância já foi defendida por importantes pesquisadores, como Godino e Batanero (1994) e Lins (1993; 1999), porquanto decidimos dar maior espaço a esta discussão, a serviço de nossos objetivos nesta pesquisa.

3.1 – Exibindo Nossos Pressupostos Teóricos

Uma das principais dificuldades que tenho vivenciado em minha prática profissional, como professor de matemática da educação básica, é a de decidir a que elementos constituintes desta prática devo dar especial atenção, a benefício do êxito de meu trabalho. Conteúdos curriculares? Objetivos curriculares? Metodologias e estratégias de ensino? Ferramentas pedagógicas? Tecnologias educacionais disponíveis? Sequências didáticas? Avaliações diagnósticas? Relacionamento entre professor e alunos? Restam ainda muitas outras dúvidas.

São um sem número de aspectos (não apenas pedagógicos, mas filosóficos, psicológicos, sociológicos, políticos, etc.) envolvidos no complexo processo tradicionalmente chamado de *ensino*, que tem sido também tradicionalmente concebido como *ação ou prática de quem ensina algo*. Não raro, o *ensinar* é tomado por verbo transitivo direto, esquecendo-se do *para quem* se ensina, ou seja, sendo relegado a segundo plano o processo de *aprendizagem*.

A minha formação, na graduação, não me propiciou visão crítica ou postura reflexiva[27] quanto ao ensino e à aprendizagem, tampouco maturidade para tal tomada de decisão, na prática docente. E menos ainda para as tomadas de decisão conscientes e flexíveis, levando-se em conta, por um lado, a ampla gama de aspectos envolvidos no processo de aprendizagem das crianças e jovens, e, por outro, a diversidade das estratégias de ensino que podem favorecer ou promover a aprendizagem matemática.

Este não parece ser um fato isolado, mas sim uma regra. Nos cursos de Licenciaturas em Matemática no Brasil, uma carga majoritária de disciplinas matemáticas obrigatórias é oferecida, e nas insuficientes disciplinas pedagógicas estudam-se (vagamente) as metodologias de ensino e os fenômenos de aprendizagem inerentes à sala de aula da escola básica, estando os licenciandos já dela muito distantes, ou dela ainda totalmente dissociados, como professores. Além disso, uma histórica desarticulação entre tais grupos de disciplinas das Licenciaturas em Matemática é sentida, ainda em nossos dias (ver, por exemplo, PIRES, 2000; SEVERINO, 2002; SOUZA e GARNICA, 2004). Tudo isto corrobora a noção de que “a formação matemática do licenciando, em boa parte similar à do futuro bacharel, não contribui de modo substancial para a formação daquele futuro profissional, a não ser ao reforçar as rotinas de aulas expositivas”, como afirmou Lins (2005a, p.12).

A partir daquelas dúvidas, que aos poucos emergiam do meu cotidiano de professor de matemática do ensino fundamental, experimentei inseguranças, angústias e insatisfação com a minha própria prática. Necessário se me fez, então, buscar compreender “por dentro” os processos de ensinar e de aprender.

Ao entrar em contato com o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) – referencial teórico que orienta a presente pesquisa –, entendi (e aceitei o fato de) que considerar a questão epistemológica é essencial para meu trabalho como educador matemático. Na descrição da gênese deste modelo, que foi proposto por Lins (1999, 2001, 2004, 2005b) e cuja elaboração sofreu importante influência das

---

[27] Com relação aos termos *visão crítica* e *postura reflexiva* na formação discente e docente, concordamos com as posições de Skovsmose (2001) e Freire (1996).

teorias de Vygotsky (1993), Leontiev (2006) e Goodman (1984), identificamos angústias do professor Lins (2008), de algum modo semelhantes às minhas:

> Perdi o gosto, e depois o hábito, de olhar para meus alunos e escutá-los, apenas para saber o que lhes faltava e, com o melhor da minha habilidade pessoal, corrigi-los. [...] Aos poucos, e muitas vezes dolorosamente, fui recusando meu dever de ensinar, depois abri mão do meu direito de ensinar. Aos poucos, e prazerosamente, fui entendendo que isto se referia aos conteúdos, ao ensinar conteúdos. (LINS, 2008, p. 540)

Observemos que ele se refere à perda do gosto por *ensinar algo* (conteúdos), mas não pelo *ensinar*. Ao descrever o percurso que o levou à criação do modelo, Lins (Ibidem) afirma ter entendido que enquanto não "lesse" seus alunos, não teria nada a dizer a eles; e relata o que seguiu a este entendimento:

> Dei-me conta de que não estava mais interessado no que eles *não sabiam fazer*, e sim *no que eles estavam efetivamente fazendo*. E, o melhor (pior, diriam alguns), é que não é jamais possível antecipar em que é que esse tipo de leitura vai resultar. (LINS, 2008, p. 540, grifos do autor)

E conclui, sintetizando o que seja o MCS:

> O resultado "prático" disso foi o desenvolvimento de uma teoria do conhecimento na qual o *significado* de algo é o que é *efetivamente* dito desse algo no interior de uma atividade; na qual um *objeto* é algo para o qual se produza *significado* (no sentido que proponho). Uma teoria do conhecimento em que o *conhecimento* é do domínio da enunciação, e não do enunciado: *não há conhecimento nos livros*. (LINS, 2008, p. 540, grifos do autor)

Passaremos, agora, a discutir brevemente esta concepção de *conhecimento* e de outras noções-categorias tratadas no MCS, como *significado*, *produção de significado*, *processo comunicativo* e *processos de ensino e aprendizagem*. Pois, como já dissemos, é este o modelo teórico e epistemológico que fundamenta o nosso presente estudo. Tais aportes ou noções-categorias são encontrados em Lins (1993, 1994, 1997, 1999, 2001, 2004, 2005b e 2008), Lins e Gimenez (1997), Lins e Silva (2002) e também em Lins e Kaput (2004).

As primeiras idéias do MCS, segundo Silva (2003), começam a surgir em sua tese de doutorado intitulada "*A framework for understanding what algebraic thinking is*" (Um quadro de referência para entender-se o que é pensamento algébrico), desenvolvida no Shell Centre of Mathematical Education de Nottingham, Inglaterra, de 1988 a 1992. Neste trabalho, Lins (1992) realizou um estudo histórico e um estudo experimental, nos quais surgiu a necessidade de responder às seguintes perguntas: *(i)* o que é conhecimento?; *(ii)* como é que o conhecimento é produzido?; e, *(iii)* como é que conhecemos os que conhecemos? (LINS, 1993, p. 77). Ele então propôs a seguinte caracterização para a noção de conhecimento:

> Conhecimento é entendido como uma **crença** – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para a sua **crença-afirmação**. (LINS, 1993, p. 88, grifos do autor)

Esta concepção epistemológica é um dos principais elementos do MCS, pois que a torna diversa de todas as outras teorias epistemológicas vigentes. A ela está fortemente ligada à idéia, defendida por Lins (1999, p. 89), de que conhecimento é algo do domínio da enunciação, entendendo-se que não há conhecimento nos livros (objetos físicos), mas ali há apenas enunciados, como já citamos anteriormente.

Dar legitimidade a uma enunciação é um dos papeis da justificação, no estabelecimento do conhecimento (de um sujeito do conhecimento). No entanto, a justificação não tem a função de explicar a crença-afirmação do sujeito. O outro papel da justificação é integrar o processo de constituir objetos[28], ou seja, produzir conhecimento (LINS, 1995). E como concluiu Silva (2003, p. 19), estudando o MCS, que "[...] produzir conhecimento é produzir justificações no processo de enunciação das crenças-afirmações".

Da caracterização de conhecimento, citada acima, decorre a noção de que diferentes justificações para uma mesma crença-afirmação constituem conhecimentos diferentes[29]. Por exemplo, consideremos que uma criança observa dois desenhos feitos num quadro. Ela acredita e afirma que são dois triângulos "iguais". E justifica afirmando que as figuras são muito parecidas. Uma outra pessoa, ao se deparar com os desenhos, também acredita e afirma o mesmo, ou seja, que são dois triângulos congruentes, mas justifica de outra forma: medindo os lados e os ângulos das figuras, com certa precisão; e então admite que elas são congruentes. Embora ambos os sujeitos compartilhem a mesma crença-afirmação, as justificações da criança e da outra pessoa são distintas. Portanto, de acordo com a formulação de conhecimento que apresentamos, elas produziram conhecimentos distintos. Isto equivale a dizer que produziram diferentes significados para as mesmas figuras desenhadas no quadro; ou, ainda, que constituíram objetos geométricos distintos.

---

[28] Para Lins (2004, p. 114), objeto é algo a respeito de que se diz algo. Ele afirma ainda (1999, p. 86) que "os objetos são constituídos enquanto tal precisamente pela produção de significados para eles".

[29] Cf. Lins, 1994, p. 29.

Uma razão para nos lançarmos, como professores-pesquisadores, a uma investigação guiada pelo prisma da produção de significados, foi oferecida Lins (1999, p. 86), quando afirmou: “Para mim, o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados”. De acordo com o MCS, *significado* é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto, no interior de uma *atividade*[30]. Assim, *produzir significados* é produzir ações enunciativas a respeito do objeto, no interior da atividade (Silva, 2003, p. 21). Vejamos o exemplo trazido por Lins (1999):

> Quando eu falo de *número decimal*, não estou falando de todos os possíveis significados que se pode produzir para este objeto – inclusive este objeto como conceito dentro da Matemática oficial –, e sim do que, numa dada situação específica, se diz efetivamente. (LINS, 1999, p. 87)

Algo semelhante ocorre quando falamos de área, em determinada situação. Por exemplo, veja os significados produzidos por Denise, nome fictício de um sujeito de pesquisa nossa anterior. Na análise da gravação da fala da aluna, observamos que ela distingue dois tipos de *área*: o da rua, que é um “tipo de lugar” da vida comum (a “área de um *show*” de *rock*); e o tipo da escola, ou seja, “na parte da Geometria”, quando afirma que “todas as figuras geométricas apresentam área”. Essa distinção indica a produção de significados matemáticos e não-matemáticos, por um mesmo sujeito. (HENRIQUES, 2007, p. 21)

Como observa Lins (1996, apud Silva, 2003, p. 21), “produzimos significados para que pertençamos a uma prática social ou, em escala maior, a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pelo mesmo motivo”. Esta afirmação tem profundas raízes nos trabalhos de Vygotsky, que foi o primeiro psicólogo moderno a sugerir mecanismos pelos quais a cultura torna-se parte da natureza de cada pessoa, influenciando seu desenvolvimento psicológico[31].

Outro pressuposto do MCS, também baseado nos estudos de Vygotsky, é aquele que postula que “somos todos diferentes”. Esta afirmação de Lins (1999, p. 79) não se refere a outra coisa senão ao comportamento cognitivo do ser humano,

---

[30] Para este termo, assumimos o sentido proposto por Leontiev (2006, p. 68). Segundo Oliveira (2002, p. 96), as atividades humanas são consideradas por Leontiev como formas de relação do homem com o mundo, dirigidas por motivos, por fins a serem alcançados. A idéia de atividade envolve a noção de que o homem orienta-se por objetivos, por meio de ações planejadas. Segundo Radford (2004, p. 9), a teoria de Leontiev propõe que a atividade humana se caracteriza, em outras coisas, pelo objetivo (motivo) que se persegue e pelos meios (signos e artefatos) para se alcançar tais objetivos.

[31] Ver, por exemplo, o capítulo introdutório do livro de Vygotsky (1991).

ou seja, “[...] refere-se ao fato indicado por Vygotsky, de que, dada a plasticidade do cérebro[32] humano, a menos que alguém intervenha, nosso caminho natural é divergirmos fortemente nas constituições de nosso funcionamento cognitivo”.

A questão que Lins (1999, p. 79) discute em seu estudo, a partir de tal pressuposto (somos todos diferentes), é “como chegamos a ser tão parecidos”. O autor não se refere à semelhança entre seres biológicos, mas sim à semelhança entre seres cognitivos. A contradição disto com o que apresentamos no parágrafo anterior é apenas aparente. Lins (Ibidem, p. 79) sinaliza que a caracterização de “sermos semelhantes” que adota é “sermos capazes de compartilhar um espaço comunicativo”. Para discutir esta caracterização, ele se dedicou a reconceitualizar as noções de *comunicação* e de *processo comunicativo*. Neste intuito, afirma haver duas posições acerca do processo comunicativo que são dominantes, tanto no mundo acadêmico quanto no senso comum, que assumem a possibilidade de uma comunicação efetiva, ou seja, da transmissão de uma mensagem de uma pessoa para outra (LINS, 1999, p. 80).

David K. Berlo[33] é apontado como um representante da posição tradicional sobre a noção de comunicação, para a qual propôs um modelo composto basicamente de seis elementos: a fonte, a mensagem, o codificador, o canal, o decodificador e o receptor (SILVA, 2003, p. 60). Outra posição, também tradicional, vinda da teoria da informação, é a sintetizada na tríade *emissor-mensagem-receptor*; mas, lembra Lins (1999, p. 81), tal posição não postula a transmissão de significados, mas apenas de informação.

Para estas duas formas de conceber o processo comunicativo, a não efetivação da comunicação é vista como um acidente, sendo considerada natural a sua efetivação. Já para Derrida (1991), a comunicação concebida tradicionalmente é que seria um acidente; a regra é a não-comunicação. (LINS, 1999, p.81)

Baseado nestas ideias, o MCS preconiza que não é possível transmitir conhecimento, nem “comunicar” significados. Pois a noção de *processo*

[32] Embora aceitemos o fato de sermos todos cognitivamente diferentes, uns dos outros, não concordamos com a hipótese vygotiskiana que *localiza* a atividade cognitiva no cérebro. Este, aliás, é um problema ainda bastante obscuro para pesquisadores de diversas áreas científicas, mas não tanto quanto o era para os próprios colaboradores de Vygotsky. Por exemplo, Lúria (2006, p. 198) ressaltou que pouco se conhecia, até aquele momento, acerca da relação entre consciência e cérebro, e afirmou categoricamente: “As tentativas de encontrar nas profundezas do cérebro um órgão gerador da consciência serão tão sem sentido quanto as tentativas, feitas na nossa época, de encontrar, na glândula pineal, a sede da alma, em apoio à ingênua hipótese de Descartes”.
[33] Ver Berlo (1979).

comunicativo do modelo que utilizamos é outra, formulada por Lins (1999, p. 81), a partir de três elementos – autor, texto e leitor –, e expressa por Silva (2003), da seguinte maneira:

> O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos, um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte ou o leitor de um livro. Já texto é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. (SILVA, 2003, p. 62)

Assim, autor é aquele que enuncia algo para alguém, e este alguém não é um indivíduo ou uma coletividade, embora o autor possa se encontrar em uma atividade que envolve pessoas, como orientar um filho ou fazer um palestra. Toda enunciação é dirigida a um alguém, dito *interlocutor*, que é um ser cognitivo (e não “rostos” com quem falamos), ou seja, é *uma direção* na qual o autor fala[34]. (LINS, 1994, p. 34)

O processo no qual o leitor *lê* algo[35] é semelhante, mas não idêntico ao processo anterior, do autor e sua enunciação. O leitor constitui sempre *um autor* (ser cognitivo e não biológico), e é em relação ao que diria este *um autor* que o leitor produz significado para o *resíduo de enunciação*, o qual se transforma em *texto* apenas no instante em que o leitor produz significados para ele. (LINS, 1999, p. 82)

Ainda tratando da relação entre os elementos por processo comunicativo, tal qual caracterizou, Lins (1999) aponta a possibilidade de convergência dos dois processos (do autor e do leitor), ao concluir:

> Então: o autor produz uma enunciação, para cujo resíduo o leitor produz significado através de uma outra enunciação, e assim segue. A convergência se estabelece apenas na medida em que compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com a autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um *espaço comunicativo*. (LINS, 1999, p. 82)

A questão do estabelecimento de um espaço comunicativo está intimamente ligada à questão da *legitimidade*, como podemos entender a partir das seguintes afirmações de Lins (1999):

---

[34] Neste ponto, a palavra “fala” é representativa da categoria de qualquer expressão enunciativa, como a escrita, os desenhos, os diagramas, os gestos e a própria articulação fonética.

[35] Este “algo” pode ser, por exemplo, a fala de alguém ou um texto escrito, entendidos por Lins (2001, p.59) como um **resíduo de enunciação**.

> Justificações, [...] ao me permitirem dizer algo, são o que garantem a *legitimidade* de minha enunciação. É aqui que a discussão [...] sobre leitor/texto/autor, ganha relevância maior. Ao produzir significado, minha enunciação é feita na direção de um *interlocutor* que, acredito, diria o que estou dizendo com a justificação que estou produzindo. Isto quer dizer que a legitimidade de minha enunciação não é função de algum critério lógico ou empírico que eu pusesse em jogo, e sim do fato de que acredito pertencer a algum espaço comunicativo. (LINS, 1999, p. 88)

É importante dizer que as legitimidades aqui tratadas vêm da *internalização* de legitimidades que caracterizam culturas, de forma que “a imersão de uma pessoa em uma cultura se dá através de sua imersão em modos legítimos de produção de significados”, isto é, a pessoa é internalizada nesses modos. (LINS, 2008, p. 541)

Mais adiante, voltaremos à questão da legitimidade dos significados.

A partir das noções acima apresentadas, podemos entender o *ensinar* como um processo docente sustentado em uma *leitura positiva*[36] (ou plausível), uma leitura do outro através de suas legitimidades, e não uma *leitura pela falta*, como acontece nas teorias piagetianas[37] e no *ensino tradicional vigente*[38]. Na função de ensinar, o professor deveria, então, ter consciência de um objetivo fundamental a ser por ele atingido: criar e compartilhar espaços comunicativos, começando por dar legitimidade aos significados produzidos por seus alunos. Mas entendemos também como característica do ensinar, o ter como foco principal a *aprendizagem* dos estudantes. Desta forma, surge a necessidade de compreendermos os processos cognitivos subjacentes à aprendizagem.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) nos permite divisar a necessidade de uma compreensão flexível e prática do que seja aprender, possibilitando-nos, ainda, concluir que as crianças aprendem do mesmo modo que aprendemos outras coisas, dentro e fora da escola. Indo um tanto além, ousamos considerar que é apenas no conjunto de estratégias escolhidas para determinada aprendizagem matemática – tais como a imitação, a interação com os colegas ou com pessoas mais velhas, a observação “passiva”, a resolução de problemas, os jogos, as tarefas com calculadoras e computadores, o uso de modelos concretos, os exercícios rotineiros, e assim por diante – que poderemos concluir se as escolhas são boas ou

[36] O termo **leitura positiva**, de Silva (2003, p.66), foi substituído por **leitura plausível** para se evitar que seja confundido com noções da escola filosófica de Comte.

[37] Por exemplo, o modelo dos Campos Conceituais de G. Vergnaud, como afirma Lins (2008, p.534). Na **leitura pela falta** está implicada a ideia de que o desenvolvimento precede a aprendizagem, isto é, para se aprender algo é preciso atingir certo nível de desenvolvimento, o das estruturas mentais correspondentes a certo conteúdo ou a certos conceitos.

[38] Para este termo, tomamos o sentido dado por Baldino (1998, p. 64).

não para aquela aprendizagem. Estas considerações são consequências dos pressupostos do MCS, entre os quais se encontra a noção de que diferentes atividades favorecem o desenvolvimento de diferentes modos de produção de significados.

Ainda acerca dos processos de aprendizagem e de ensino, afirmou Lins (2001, p. 45): “se aprendizagem é entendida – corretamente, eu penso – como aprender a produzir significado, ensinar deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesse processo”. E, desta forma, o MCS abre tal discussão, isto é, permite que sejam tratadas as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentem.

Para nós, dificuldades se dividem em duas categorias: obstáculos e limites epistemológicos. Segundo as caracterizações de Lins (1993), obstáculo epistemológico é o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz; já o limite epistemológico seria a impossibilidade de um aluno produzir significado para uma afirmação ou um resíduo de enunciação, numa certa direção, devido à sua maneira de operar cognitivamente. (LINS, 1993)

Muito ainda há que se pesquisar, com base no MCS, para se ter uma boa compreensão do que aceitamos por elementos-chave do processo de ensino: a *interação* e a *intervenção*. Pois estes dois elementos parecem também constituir o processo de aprendizagem, por exemplo, da matemática escolar, ou seja, do processo de aprender a produzir significados para os temas matemáticos, sejam estes significados matemáticos ou não-matemáticos (ou segundo Vygotsky[39], conceitos científicos ou conceitos espontâneos da criança). Mas entendemos que Lins (1999), ao apresentar uma alternativa à postura educacional que “lê” os alunos pela falta, consegue relacionar de modo simples os dois processos, de ensinar e de aprender, além de dar uma perspectiva importante para as futuras pesquisas acerca da interação e da intervenção, quando escreveu:

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999, p. 85)

---

[39] Vygotsky (1993, p. 71)

Propomo-nos, na presente pesquisa e em nossa prática docente, a fazer valer essa perspectiva de mudança de conduta. Isto é, ir deixando para trás a postura tradicional de ensinar *para uma classe* ou *turma*, sem saber quem são os alunos desta classe (como individualidades, seres cognitivos únicos, pois diferentes dos demais), onde eles estão (cognitivamente) e que conhecimentos estão trazendo ou produzindo para temas da matemática escolar, enquanto estamos “dando aula” sobre estes temas, mantendo-nos centrados e *engessados* nos conteúdos programáticos. No caminho de abandonarmos tal postura, vamos treinando o nosso olhar para os fenômenos cognitivos e vamos aprendendo a ouvir nossos alunos. Somente, assim, acreditamos, podemos ensiná-los algo.

Analisaremos, agora, outra noção do MCS que julgamos necessária ao desenvolvimento de nosso trabalho de dissertação. Referimo-nos à legitimidade dos significados não-matemáticos na escola.

Uma das importantes considerações que as pesquisas sobre produção de significados (por exemplo, JÚLIO, 2007) têm corroborado é o fato de que,

> [...] quando se encontram com textos do matemático – livros-didáticos, por exemplo – as pessoas de fato produzem significados que não são os do matemático, mas que as tornam capazes de falar a partir daquele texto. (LINS, 1994, p. 37).

Segundo Silva (2003, p. 22), a importância desta afirmação reside na frequência com que ocorre na prática. De fato, nas salas de aula de matemática presenciamos professores e alunos produzindo significados “não-matemáticos” quando estão falando sobre objetos da matemática. Daremos um exemplo disto mais adiante. Trataremos, agora, de uma importante questão trazida à tona pelo MCS: a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola.

Muito embora esta questão pareça bastante plausível ao senso comum (quem nunca ouviu, em sua escola, afirmar-se que é preciso trazer o a “vida real” para a sala de aula?), sua solução não é tão simples quanto possa parecer. E o *prisma* do MCS é bem diverso daqueles tradicionalmente utilizados na análise dessa questão.

Em primeiro lugar, importa-nos ressaltar que o termo *significado* tem sido bastante empregado nos estudos no campo da Educação Matemática, mas quase sempre sem sustentação teórica, e também quase sempre se referindo a significados matemáticos (Silva, 2003, p. 23). Discutiremos esta questão, a seguir. Em segundo lugar, ousamos afirmar que a legitimidade que concebemos, ao tratar de significados não-matemáticos, não tem senão uma forma semelhante ou uma pseudo-imagem nos cotidianos escolares. Pois, como asseveraram Lins e Gimenez (1997, p. 18), a idéia de valorizar os significados da rua[40] para *facilitar* a aprendizagem da matemática escolar ou para se chegar aos significados (matemáticos) privilegiados pela escola, "[...] embora pareça razoável do de vista didático, é perversa do ponto de vista cultural".

Via de regra, os pesquisadores se referem a *significados matemáticos*, e não a outro tipo de significados produzidos pelos estudantes. Como exemplo disto, vejamos os trabalhos de Godino e colaboradores (2008) e de Cobb e Bauersfeld (1995). Já na perspectiva do MCS, outros significados, ditos não-matemáticos, são também considerados possíveis e legítimos, mesmo em se tratando de significados produzidos por alunos em aulas de matemática. Esta é a diferença fundamental do MCS para as duas abordagens supracitadas, muito embora as três perspectivas tenham os trabalhos de Vygotsky como referencial comum. E esta diferença capital parece ter maior relevo, quando explicitadas as possíveis consequências da legitimação (ou não) dos significados não matemáticos na escola, nas considerações de Lins e Gimenez (1997):

> É preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são *mais um* modo de produzir significados, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são diferentes. Apenas assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 165)

E, ainda, quando Lins e Gimenez (Ibidem) garantem:

> É apenas com base na coexistência de significados matemáticos e não-matemáticos na escola que se poderá constituir uma legitimidade comum, o que pode, por sua vez, impedir que a matemática da escola seja percebida como inútil, um saber cuja razão deixa de existir quando termina a escolarização que envolve matemática. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 28)

Uma diferenciação semelhante a esta diz respeito ao caráter *internalista* da Matemática dos matemáticos, ou seja, aquele que a diferencia da Matemática do cotidiano, do cidadão comum. Para exemplificar, Lins (2004, p. 95) pondera que "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição

[40] Os autores utilizam a expressão "da rua" com o sentido de "algo que não é da escola". As coisas da rua e as coisas da escola constituem legitimidades diferentes, para diferentes modos de produção de significados, elucida Lins (1999, p.90).

corresponde bem ou mal a *algo* fora da própria matemática". É nesta direção que o MCS permite comparar e distinguir significados matemáticos e não-matemáticos.

Ao analisarem a gênese da exclusão dos significados não-matemáticos da escola, Lins e Gimenez (1997) identificam uma breve sequência de fatos e decisões que fizeram com que a comunidade científica dos matemáticos gerasse tal exclusão, primeiro internamente, depois nas escolas:

> Não é verdade que os significados da rua sempre foram considerados ilegítimos pela matemática acadêmica. O processo de depuração que torna a matemática acadêmica impermeável aos significados da rua, como ela é hoje, começa em meados do século XIX e culmina, na passagem do século, com o programa de David Hilbert. Quase 40 anos depois, já completamente dentro desse espírito, começa o trabalho de Bourbaki, que vai dar tanto em noções fundamentais nas teorias de Piaget quanto no movimento da chamada Matemática Moderna. Depois de completa a depuração, a matemática acadêmica pôde olhar para trás e dizer que *na verdade* os matemáticos sempre estiveram trabalhando com significados matemáticos, embora estes estivessem muitas vezes mascarados. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 24)

Estes autores destacam, então, a importância de se observar que o histórico "processo de exclusão da matemática dos significados não-matemáticos tem sua origem na matemática acadêmica, e não na escola". (Ibidem, p.23) Não obstante este fato e também o fato de ter se tornado *moda* dizer que "a escola rejeita *a vida*" e que "se deve trazer *a vida* para a escola"[41], todos os dias, milhões de alunos *rejeitam a escola*, como se, ao sinal do fim de cada aula, acabasse um pesadelo, no despertar diária para *a vida*. (LINS, 2008, p. 532)

Quanto à Geometria, é imensa a gama de informações e habilidades que os alunos levam às salas de aulas, fruto das suas experiências cotidianas, fora do âmbito escolar. Por exemplo, muitos daqueles que ajudam ou acompanham seus pais, nos trabalhos da construção civil, serão capazes de estimar uma quantidade de piso quadrangular, em metros quadrados, necessários para cobrir o chão de um determinado cômodo. Outro exemplo: os jovens com extraordinária habilidade para confeccionar papagaios. Mas de que forma pode a escola considerar legítimos os conhecimentos geométricos produzidos "não-oficialmente"?

A resposta a esta questão é dada por Lins e Gimenez (1997), quando afirmam que "a rua" não se caracteriza *a priori* pelas coisas que se faz na rua, mas sim por seus significados próprios; e seguem exemplificando:

---

[41] Expressões pronunciadas irrefletidamente, como se a escola não fosse vida também.

> [...] não é “fazer papagaios (pipas)” que caracteriza a rua, e, sim, os significados (da rua) que se produza numa atividade que envolva aquela tarefa. Quando um arquiteto ou um físico fazem papagaios, é quase certo que os significados produzidos não sejam os mesmos, nem entre si nem com relação os produzidos pela criança na rua. O que queremos dizer com isso é que não basta trazer para a escola a tarefa para produzir com base nela apenas significados da escola. Qual o sentido de dizer “Vamos fazer papagaios!” com a intenção única de falar de simetria, triângulos, cálculo de hipotenusas e de áreas, e – pior ainda – para terminar fazendo o mesmo papagaio de sempre? Alguns dos significados básicos que os papagaios têm na rua estão ligados à beleza e ao equilíbrio. Porque não colocar o desafio de fazer um papagaio diferente *mas que seja tão bom quanto o comum*? Numa situação dessas, é preciso discutir e explicar: i) o que é que faz o papagaio comum funcionar; ii) qual é o “papagaio dos sonhos”, o que envolve discussões sobre beleza, forma e tamanho. Num processo como esse, afirmações sobre a “geometria” do papagaio seriam feitas e possivelmente gerariam outras, abrindo-se a possibilidade da intervenção *legítima* do professor para trazer novas possibilidades. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 27)

Os pesquisadores (Ibidem, p. 27) asseguram que explorar o item (i) da citação acima, juntamente com uma intervenção legítima do professor, é o suficiente para que se constitua um conjunto de instrumentos que vão participar da organização da atividade de produzir novos papagaios. Desta forma, os alunos serão capazes de produzir, nessa atividade, significados matemáticos e não-matemáticos, que coexistirão e terão legitimidade comum.

A partir dos pressupostos por nós assumidos e descritos neste capítulo, afirmamos que a nossa proposta de tarefas – que favoreçam a produção de significados dos sujeitos de pesquisa – está calcada na concepção de Geometria não como conteúdo que se justifica por sua própria existência, mas como instrumento que participa da organização da atividade humana[42].

Preparando o terreno para a nossa elaboração de tarefas, poderíamos buscar compreender a relação existente entre a semiótica e a produção de significados para os elementos geométricos, a partir, por exemplo, de trabalhos como o de Santaella (1996), que afirmou:

> Não resta dúvida que muitas teorias da cultura [...] apresentam características nitidamente semióticas, principalmente quando explicam a dimensão cultural através de sistemas simbólicos de uma dada formação social. No entanto, enquanto nas conhecidas ciências humanas os estudos da cultura são utilizados para compreender os agentes dos processos culturais, a semiótica, por seu lado, coloca ênfase nos modos como esses sistemas são processados para produzirem sentidos e serem comunicados. (SANTAELLA, 1996, p. 30)

[42] Um posicionamento semelhante a este, que se refere mais amplamente à Matemática, é defendido por Skovsmose (2001).

No entanto, em nossa presente pesquisa, não sentimos necessidade de aprofundar o estudo da semiótica na geometria escolar, tampouco de discutir ou utilizar termos como visualização, pensamento visual, imagética, pensamento espacial, visão espacial, percepção visual, imaginação espacial, conceito figural, representação figural, representação mental, representação simbólica, dentre outros, para os quais são atribuídos importância e relevo em muitos trabalhos que envolvem Educação Geométrica (por exemplo, HERSHKOWITZ, 1998; COSTA, 2000; GOLDIN, 2002; JIROTKOVA e LITTLER, 2002; OWENS e OUTHRED, 2006; BATTISTA, 2007; LOUREIRO, 2009; PANAOURA e GAGATSIS, 2009). Pois o próprio Modelo dos Campos Semânticos (MCS) nos permite a leitura do processo de produção de significados. E dentro deste processo, os objetos são constituídos no exato momento em que o sujeito (do conhecimento, ser cognitivo) produz significados para eles. Desta forma, não podendo existir objetos *a priori*, ou *objetos essenciais*, pela ótica do MCS, resta-nos analisar os significados geométricos e não-geométricos produzidos durante uma atividade (no sentido proposto por Leontiev, como descrevemos anteriormente), sem atribuir-lhes características comuns ou categorizações prévias, nem antecipando o seu tratamento através determinadas sugestões de intervenção didática.

Passaremos, agora, a discutir característica constituintes da nossa questão de investigação, relacionadas aos pressupostos teóricos que acabamos de apresentar.

3.2 – O Interior do Problema de Pesquisa

O nosso problema de pesquisa pode ser sintetizado na seguinte sentença:

> *Elaborar um conjunto de tarefas que nos possibilite identificar a produção de significados de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental para área e perímetro de figuras planas, com o objetivo de levantar possíveis dificuldades de aprendizagem acerca dessas noções.*

Ao desenvolver estes objetivos, pretendemos dar continuidade às nossas investigações anteriores sobre a produção de significados para a Geometria Escolar. Em uma destas investigações (HENRIQUES e SILVA, 2009), tivemos a oportunidade de concluir, por exemplo, que estudantes de ensino médio produzem diferentes significados para área de figuras geométricas planas. A partir dos resultados desse e de outros estudos, iniciamos nossa busca por investigar mais detidamente os processos de produção de significados de estudantes para elementos da Geometria Escolar, notadamente para área e perímetro de figuras planas e para as relações entre estas grandezas. Desenvolvemos o presente trabalho em consonância com os PCN (BRASIL, 1998), que são os documentos oficiais de orientação curricular no Brasil, e com os aportes do MCS, e lançamos mão de algumas pesquisas quando precisamos assumir posicionamentos acerca de características do pensamento geométrico dos sujeitos de pesquisa.

Nesta direção, assumimos uma posição central em nossa investigação: defendemos que *objetivos orientam conteúdos*[43].

Conforme indicou a nossa revisão da literatura, feita do capítulo anterior, as dificuldades mais comuns são a confusão[44] área/perímetro e a não dissociação entre estas grandezas geométricas e também entre suas medidas. Como já discutimos, assumimos a concepção de Lins (1993) para dificuldades, que as categorizou em obstáculos e limites epistemológicos.

Tanto no levantamento das dificuldades quanto na intervenção didática, utilizamos os pressupostos que assumimos, em concordância com o MCS, que nos servem com poderoso instrumento de leitura dos significados produzidos pelos alunos, como já dissemos. Além disso, vários aspectos observados em nossa revisão da literatura determinarão nossas convergências e divergências com determinadas perspectivas lá apresentadas. Por exemplo, nossa concordância com a ideia de que o trabalho simultâneo com área e perímetro favorece a aprendizagem destas noções, e também com a afirmação de que a mudança de dimensão gera dificuldades na medição de certas grandezas, como comprimento e área.

Necessário se faz ressaltar que todo o nosso trabalho, em cada etapa desta pesquisa, é referenciado teoricamente, ou seja, não se apóia no *senso comum*. Desta forma, nossa intenção é produzir um conjunto de tarefas orientadas por objetivos e pressupostos teóricos bem definidos. E, no caminho de produzir tal *protótipo de tarefas*, nosso principal interesse reside em entender como elaborar

---

[43] Um bom exemplo disso é dado no livro *La Enseñanza Problémica*, de Majmutov (1983).
[44] Utilizamos o termo *confusão* por ser o mais geral, entre as pesquisas e relatos de práticas em Educação Matemática, No entanto, para ele não atribuímos nenhum juízo de valor, como, por exemplo, se tivéssemos tomado para esse termo o sentido de erro conceitual dos alunos, sem considerar os significados que eles produzam para tal.

tarefas geradoras de produção de significados, que permitam aos estudantes associarem os conhecimentos prévios aos novos conhecimentos que estão sendo produzidos a eles, de modo que o que é *dado* para o sujeito seja alicerce para o *novo*, isto é, aquilo que é ainda desconhecido para ele.

Em síntese, buscamos entender como essas tarefas podem tocar em dificuldades de aprendizagem já bem conhecidas dos pesquisadores[45], como, por exemplo, a confusão que os alunos fazem entre as noções de área e de perímetro, de modo que, ao se tornarem objeto de atenção destes alunos, tais dificuldades sejam superadas, a partir da intervenção de seu professor e da interação com seus colegas de classe. Nisto consiste a negociação de significados em sala de aula, de acordo com os aportes teóricos de Modelo dos Campos Semânticos, estudados neste capítulo. E é no processo de negociação de significados que encontramos as oportunidades de intervir e agir efetivamente para que a aprendizagem aconteça e as dificuldades sejam superadas, estejamos tratando de temas geométricos ou de outro tema qualquer.

Para que realizemos esta nossa busca e alcancemos estes nossos objetivos, lançamos mão da metodologia que descreveremos no próximo capítulo.

[45] Ver a revisão da literatura, capítulo 2 desta dissertação.

CAPÍTULO 4

A METODOLOGIA DA PESQUISA

No presente capítulo, apresentaremos, inicialmente, as características do nosso trabalho de investigação, envolvendo a pesquisa de campo e a nossa opção metodológica, e descreveremos também alguns elementos constituintes do universo da pesquisa de campo que empreendemos, como os sujeitos de pesquisa e o processo de coleta ou registro de dados para posterior análise. A escolha da metodologia e dos procedimentos metodológicos foi feita em função do nosso problema de pesquisa e do referencial teórico que adotamos, nesta dissertação; isto é o que pretendemos esclarecer, na segunda seção deste capítulo.

Na terceira seção, apresentaremos as tarefas que propusemos na pesquisa de campo e os objetivos que guiaram a elaboração de tais tarefas.

Na quarta e última seção, teceremos alguns comentários relevantes acerca do produto educacional que segue como um compêndio desta dissertação, com o qual damos desfecho ao nosso trabalho, abrindo perspectivas novas para o labor docente, envolvendo a aprendizagem de área e perímetro na escola básica, e para futuras investigações neste campo.

4.1 – Características da Pesquisa

De acordo com os pressupostos teóricos que discutimos no capítulo anterior, *o aspecto central de toda cognição humana é a produção de significados*. E para compreender como uma pessoa produz significados e, mais ainda, quais significados ele produz para determinado objeto, é necessário observar e analisar suas expressões enunciativas, como, por exemplo, a sua fala e os seus gestos, no interior de uma atividade.

Desta forma, para identificar e entender os elementos ou aspectos que uma abordagem alternativa para a Educação Geométrica deveria contemplar, necessitamos "mergulhar" com certa profundidade nos processos cognitivos dos alunos, sujeitos da pesquisa. Estes, por sua vez, estão imersos em culturas (religiosas, políticas, sociais e educacionais) com legitimidades próprias.

Assim, talvez pudéssemos considerar que a nossa investigação fosse qualitativa, em concordância com a perspectiva proposta por André (1995), que explicita a diferença entre etnografia e pesquisa do tipo etnográfico:

> Se o foco de interesse dos etnógrafos é a descrição da cultura (práticas, hábitos, crenças, valores, linguagens, significados) de um grupo social, a preocupação central dos estudiosos da educação é com os processos educativos. [...] O que se tem feito, pois, é uma adaptação da etnografia à educação, o que nos leva a concluir que fazemos estudos do tipo etnográfico e não etnografia no seu sentido estrito. (ANDRÉ,1995, p. 28)

No entanto, optarmos por não dar demasiada ênfase ao estudo etnográfico dos sujeitos, razão porque preferimos considerar que a nossa pesquisa é qualitativa com as características descritas por Bogdan e Biklen (1994), quais sejam:

> *1*- Na investigação qualitativa a fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...] *2*- A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são na forma de palavras, imagens, com pouca ou nenhuma preocupação com os dados numéricos. *3*- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...] *4*- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. [...] *5*- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47)

O quinto item desta descrição é, especialmente, uma característica marcante da nossa investigação, que pretende, com a pesquisa de campo, obter uma descrição minuciosa das ações enunciativas dos sujeitos envolvidos em atividades de produção de significados para alguns objetos da Geometria Escolar, sobre o que já discutimos anteriormente.

Nesta pesquisa, o campo de observação são alunos do 9° ano do ensino fundamental de escola pública federal e de uma escola publica estadual. Embora realizada com apenas dois sujeitos de pesquisa, a pesquisa de campo revelou-nos uma grande riqueza de informações, através das discussões travadas, das dúvidas e dificuldades surgidas, da diversidade da produção de significados e das mudanças dos modos com os quais estes sujeitos operaram (cognitivamente). Em todo registro audiovisual da aplicação das tarefas e das entrevistas, utilizamos uma câmera de vídeo com captação de áudio direto. Entendemos ter a videografia capital importância na coleta dos elementos da produção de significados dos alunos, pois, como observa Meira (1997),

> [...] a filmagem em vídeo pode [...] capturar múltiplas pistas visuais e auditivas que vão de expressões faciais a diagramas no quadro-negro, e do aspecto geral de uma atividade a diálogos entre professor e alunos. O vídeo é menos sujeito ao viés do observador que anotações baseadas em observação, simplesmente porque ele registra informações em maior densidade. (MEIRA, 1997, p. 61)

Embora entendendo ser importante utilizar o caderno de campo para registrar detalhes da nossa leitura *in loco*, como também as fichas contendo as tarefas e sua resolução pelos sujeitos, adotamos a videografia como principal instrumento da nossa pesquisa de campo, que envolve o pré-teste e a pesquisa final.

Outro aspecto do processo de registro audiovisual que nos interessa neste trabalho é o problema ético. Segundo Powell, Francisco e Maher (2003), captar informações de indivíduos ou grupos de indivíduos, nas pesquisas em educação matemática, envolve uma variedade de questões éticas, que vão além do simples consentimento formal dos sujeitos de pesquisa ou de seus responsáveis (pais, instituições, etc.). Ainda de acordo com estes autores, a confidenciabilidade e as estratégias para mantê-la são tão importantes quanto a autorização para empreender a captura e transcrição dos dados, através da gravação audiovisual.

A nossa presença em sala de aula, como observadores, durante o registro audiovisual, atende à finalidade de nos aproximar dos alunos e, assim, facilitar uma possível intervenção em sua produção de significados.

A primeira etapa da pesquisa de campo foi um pré-teste ou teste piloto, no qual algumas tarefas foram aplicadas a quatro alunos do 9º ano de uma escola pública estadual de Juiz de Fora, Minas Gerais. Este pré-teste foi filmado e analisado, o que permitiu refazermos algumas tarefas, eliminar outras e criar mais algumas, de modo que o conjunto de tarefas, tal qual aplicamos na pesquisa de campo derradeira, estivesse coerente com as perspectivas, pressupostos e objetivos que assumimos nos capítulos 2 e 3. Não sentimos necessidade de exibir, nesta dissertação, o pré-teste e seus resultados, mesmo porque isto tomaria a atenção que desejamos seja dada às etapas posteriores de nossa pesquisa. E ainda porque não houve mudanças significativas nas estratégias e direcionamentos do trabalho de campo, apenas pequenos ajustes.

Em etapa seguinte, aplicamos o novo conjunto de seis tarefas aos dois sujeitos de pesquisa, alunas do 9º ano de uma escola pública federal da cidade de Juiz de Fora. A escolha dos sujeitos obedeceu a dois critérios: o interesse em ser voluntário na pesquisa e a maior disponibilidade (dos mesmos) para os horários disponíveis na escola, durante os quais ocuparíamos uma sala acusticamente isolada – característica desejável à filmagens com captação de áudio direto (som ambiente). Fizemos o registro audiovisual de todas as sessões, totalizando quatro encontros, que foram divididos da seguinte maneira: 1º encontro, aplicação das tarefas 1 e 2; 2º encontro, aplicação das tarefas 3 e 4; 3º encontro, tarefa 5; e 4º encontro, tarefa de número 6. Esta divisão se mostrou importante, a partir da análise do pré-teste, no sentido de não cansar os sujeitos, ao alongar o tempo de aplicação das tarefas. Sobre as características das tarefas e sobre a ordem escolhidas para sua aplicação, discutiremos na terceira sessão deste capítulo.

As tarefas foram aplicadas à dupla de sujeitos, ao mesmo tempo para ambos, sempre assentados a uma mesa redonda, um próximo ao outro, de modo que pudessem ver mutuamente suas resoluções, e até mesmo dialogarem entre si. Não houve orientações rígidas aos alunos para a resolução dessas tarefas. Apenas falamos da importância de escreverem tudo o que julgassem relevante e também todos os cálculos que fizessem, nos espaços reservados para as resoluções e respostas, pois assim facilitariam o trabalho de análise.

Coletamos todas as fichas contendo as tarefas e respectivas resoluções pelos sujeitos de pesquisa. Tanto o material gravado quanto as fichas, foram todos analisados e, eventualmente, exibidos no capítulo 5, quando julgamos pertinente a sua análise.

Durante a aplicação das tarefas, houve algumas *intervenções orientadas*[46] do pesquisador, ou seja, com o objetivo de oferecer, aos sujeitos, novos elementos que influenciassem sua maneira de produzir significados. Ao final de algumas sessões, o pesquisador faz algumas perguntas, de certa forma nos moldes de entrevistas clínicas do tipo semi-estruturadas, como as citadas em Bogdan e Biklen (1994) e em Powell *et al* (2003). Estas perguntas tiveram, via de regra, o triplo objetivo de exibir as dificuldades dos sujeitos, fazer com que os sujeitos tomassem consciência destas dificuldades e, por fim, levantar possibilidades de superá-las ou de eliminá-las, através de uma negociação de significados.

A identidade dos sujeitos foi protegida por pseudônimos escolhidos por eles próprios e um termo de compromisso ético (vide Anexo 1) foi assinado entre o pesquisador, o orientador desta pesquisa, o diretor da escola à qual pertencem os sujeitos (e na qual foi realizada a investigação) e os responsáveis legais pelos alunos. Os sujeitos da pesquisa de campo final, ambos do sexo feminino e com 14 anos à época da pesquisa de campo, identificaram-se por Ortência e Marte.

---

[46] O termo intervenções orientadas é foi empregado neste texto no sentido dado por Silva (1997). Um bom exemplo desta conduta é dado por Bigode (1999), quando discute a gestão de interações em um *ambiente de inspiração lakatosiana*. Vide também Lakatos (1978).

4.2 – A Ferramenta de Leitura da Produção de Significados

Inicialmente, cabe-nos ressaltar que o modelo de análise de dados coletados em uma pesquisa de campo, escolhido pelos pesquisadores que vierem a desenvolvê-la, deve sempre ter relação com os pressupostos teóricos assumidos por tais pesquisadores. Esta afirmação é corroborada pela pesquisa de Powell *et al* (2003), que evidenciaram a importância do uso de da videografia nas investigações acerca do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, além de criarem um modelo próprio para análise dos dados de tais trabalhos e do discurso dos sujeitos de pesquisa, particularmente de suas argumentações e justificações.

Para Vygotsky (1993, p. 4 apud SILVA, 2003, p. 38), o método a seguir nas investigações da natureza do pensamento verbal seria a análise semântica, entendida como "[...] o estudo do desenvolvimento, do funcionamento e da estrutura dessas unidades, em que o pensamento e a fala estão inter-relacionados".

No processo de análise dos dados de nossa pesquisa de campo, utilizamos algumas caracterizações do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), como as de conhecimento e de significado, discutidas no capítulo 2. Pois, apesar de o MCS ser apontado (corretamente, entendemos) como um modelo epistemológico, Lins (2001) prefere concebê-lo como uma teoria que

> [...] provê uma ferramenta simples, ainda que poderosa, para a pesquisa e o desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, e assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula. (LINS, 2001, p. 59)

Tal leitura da produção de significados dos alunos por nós pesquisados, neste trabalho, é feita também através de outras noções-categorias do MCS, isto é, através da análise dos objetos que estão sendo constituídos, das operações (e suas lógicas) que estão em jogo, da constituição de um núcleo e das coisas que são legítimas os sujeitos dizerem, segundo eles próprios. Estas noções-categorias serão agora brevemente comentadas.

A visão proporcionada pelo MCS não tem concordância com abordagens tradicionais da psicologia cognitiva, que consideram que o pensamento se estrutura por *conceitos*. Além de discutir a possível origem deste modo de pensar (tradicional), Lins (1996, p. 137) propõe uma posição alternativa, que assume que o pensamento é estruturado por *objetos*.

Encontramos na ciência ocidental o protótipo da noção de *conceito*, como sendo uma construção teórica dentro de uma teoria (por exemplo, o conceito de massa, velocidade, número real). Esta seria então uma noção bastante aceitável de *conceito científico*. No entanto, esta noção teve extensão aos processos de ensino e aprendizagem, nos quais a inserção dos sujeitos (escolares) em uma prática científica, ainda que de forma "ficcional", foi historicamente pensada em termos de conceitos. Na visão de Piaget e das teorias piagetianas (como o Modelo dos Campos Conceituais, de Vergnaud), "matemática é pensamento" e, como a matemática é, por excelência, a ciência que lida com objetos "mentais" (ideias), torna-se praticamente impossível concebê-la sem a noção de conceito, que é colocada, então, na base de todo pensamento humano. A raiz desse modo de pensar parece encontrar-se no fato de as investigações piagetianas e derivativas dirigirem-se basicamente a estados, enquanto que as investigações de fundamentos vygotskianos (como o MCS) dirigem-se tipicamente aos processos em mudança. (LINS, 1996; SILVA, 2003)

O grande problema de se assumir que pensamento se estrutura por conceitos é a impossibilidade que surge, a partir disso, de analisarmos *os outros* senão pela *falta*, como já discutimos anteriormente. Como queremos ler os sujeitos pelos significados (sempre legítimos) que eles produzem, ou seja, pelos *elementos* que eles constituem, no interior de determinada atividade, torna-se necessária uma posição alternativa, com a proposta por Lins (1996), que esclarece:

> Podemos chamar estes elementos de *objetos*, não no sentido de "coisa-em-si", mas no sentido de "coisas sobre as quais sabemos dizer algo, e dizemos". Uma tal noção refere-se, naturalmente, ao fato de que eles existem sempre no interior de atividades: o significado de um objeto não é o conjunto de todas as coisas que possivelmente poderíamos dizer sobre ele (uma noção que beira perigosamente o idealismo), e sim o conjunto das coisas que *efetivamente* dizemos sobre ele. [...] *De fato*, é no interior de atividades que os objetos são constituídos. (LINS, 1996, p. 137)

A caracterização de processo de produção de significados envolve também a noção de *núcleo*, a qual desempenha um importante papel em nossa *leitura* de tal processo. Não obstante, o termo *núcleo* não surgirá em nossa análise, senão de maneira implícita, através dos objetos constituídos no interior das atividades, que são identificados através das enunciações dos sujeitos e que surgem, transformam-se e desaparecem, no dinamismo do processo de produção de significados.

Na compreensão de Silva (2003), a noção de *estipulação* de Goodman (1984) – de *algo que se toma como dado* – inspirou a constituição da noção de *núcleo*, a partir da qual este é entendido um conjunto de estipulações locais, ou seja, de afirmações que uma pessoa faz e não sente necessidade de justificá-las, por considerá-las absolutamente válidas. Esta noção de núcleo foi formulada por Lins (1997), que postulou:

> Os elementos de um núcleo funcionam como estipulações locais: localmente são "verdades absolutas", coisas que assumimos sem que haja necessidade de uma infinita cadeia regressiva de justificações. O que é importante e revelador é que esse "localmente" se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alternar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas. (LINS, 1997, p. 194)

Ao aceitar tal sentido para *núcleo*, temos em mente que tal termo não se refere a algo estático, como um conjunto de coisas. O sentido proposto pelo MCS para núcleo é de um processo que se constitui no interior de uma atividade e se modifica até o final desta. Em uma outra atividade, um novo núcleo se constitui. Este é o processo de produção de significados em seu dinamismo, reforçamos. Ao observar um núcleo, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos, bem como a lógica das operações ligadas à produção de significados para um resíduo de enunciação. (SILVA, 2003, p. 76)

Segundo Lins (1997, p.144), "toda operação é realizada segundo uma lógica", cuja compreensão é essencial – afirma ele –, se desejamos entender as maneiras de pensar de nossos alunos ou de nossos sujeitos de pesquisa.

A *lógica das operações* também é uma noção decisiva na formulação do MCS. Lins e Gimenez (1997) a entendem como

> [...] um conjunto de estipulações locais, dentro de um núcleo, que se referem diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 145)

Associando a noção de significado (tratada no capítulo 2 deste trabalho) à noção de núcleo, Lins (1994, p. 31) reformulou a noção de *campo semântico*, entendendo-o como "[...] um modo de produzir significado em relação a um núcleo".

Quando descrevemos, neste capítulo, uma série de elementos constituintes do MCS, elementos estes que chamamos habitualmente de noções-categorias, não queremos com isso dizer outra coisa senão que é o conjunto destas noções-categorias que levaremos em consideração, ao fazer a nossa leitura dos processos de produção de significado que surjam durante as sessões de aplicação das tarefas e as entrevistas gravadas no trabalho de campo.

Podemos assim listar e resumir os elementos envolvidos no processo de produção de significados:

i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;

ii) A formação de um núcleo (as estipulações locais, as operações e sua lógica);

iii) A produção de conhecimento – que foi apresentada no capítulo 3.

iv) Os interlocutores – item também apresentado no capítulo 3, quando discutimos o processo comunicativo.

v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade.

O método que apresentamos acima, descrito por Silva (2003) e denominado *Método de Leitura Positiva (ou Leitura Plausível)*, permite-nos identificar os significados que são produzidos por sujeitos humanos, a partir da análise dos resíduos de suas ações enunciativas. A importância desse método reside no fato de nos possibilitar a interação com os sujeitos, de modo que consigamos intervir intencionalmente em sua produção de significados. Nisto consiste o processo de negociação de significados.

Passaremos, agora, a tratar das tarefas que elaboramos para a pesquisa de campo, descrevendo suas características e seus objetivos, na presente investigação.

4.3 – As Tarefas e suas Características

Com *base* nas perspectivas que assumimos e com *foco* nos objetivos que levantamos anteriormente, procedemos à elaboração das tarefas a serem aplicadas na pesquisa de campo. Em termos mais particulares, estas tarefas devem conter questões que tragam à tona dificuldades dos sujeitos de pesquisa, envolvendo área e perímetro de polígonos, sobre as quais discutimos na revisão da literatura[47].

[47] Veja, por exemplo, Brito *et al* (2006), Baldini (2004) e Melo (2003).

De uma forma mais abrangente, uma boa tarefa deveria permitir ao professor e ao pesquisador:

a) observar a multiplicidade dos significados produzidos pelos alunos, para os elementos constituintes das tarefas;

b) explicitar o fato de que os significados produzidos pelos estudantes, pelo professor ou pelos autores de livros didáticos são alguns entre outros tantos significados que podem ser produzidos a partir daquelas tarefas;

c) dar o mesmo tratamento a significados matemáticos e a significados não-matemáticos que surjam no contexto das tarefas, sem juízo de valor.

Na prática, não nos preocupamos com o ineditismo das tarefas que propusemos no trabalho de campo, pois as entendemos por *resíduos de enunciação*, como discutimos anteriormente, porquanto a produção de significados dos sujeitos de pesquisa é o nosso foco de atenção. E a análise desta produção, através do ferramental do MCS, é imprescindível para a identificação das potencialidades do produto educacional que apresentamos juntamente com esta dissertação.

Consideramos que cada tarefa proposta, com seu enunciado e seus possíveis suportes[48], deva possuir duas características indispensáveis para lograrmos os objetivos que assumimos: deve ser *familiar* e, ao mesmo tempo, *não-usual*. Uma tarefa ser familiar significa, para nós, possibilitar que os alunos consigam falar algo a partir de seu enunciado, produzindo significados para elementos constituintes de tal tarefa. Para o termo não-usual, tomamos a acepção de Silva (2003):

> Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. [...] É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador através do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e do contexto onde o problema será aplicado, pois, não há nada que garanta tal crença. (SILVA, 2003, p. 53)

Vale destacar que estas ideias são perfeitamente coerentes com a noção de *zona de desenvolvimento proximal* de Vygotsky (1991), quando este caracteriza a *internalização* como aspecto central no desenvolvimento cognitivo de qualquer

[48] Termo bastante empregado pelos elaboradores de avaliações de larga escala, como o PISA e a Prova Brasil, quando querem se referir a desenhos, figuras, tabelas, gráficos ou algo parecido, que complementem ou reforcem as informações dadas nos enunciados das questões.

sujeito. Para Lins (1994, p. 33), "o que é internalizado são precisamente modos de produzir significado", através da *interação* com colegas ou outros possíveis interlocutores – seres cognitivos, uma direção na qual se fala algo, e não seres biológicos, de acordo com o que estudamos no capítulo anterior. E ainda conclui o autor: "o sujeito fala sempre para o outro, para o social, dentro da cultura a que pertence". (LINS, 1994, p. 33)

Outro aspecto que levamos em conta, na elaboração das tarefas e questões a serem aplicadas, diz respeito à sua legitimidade de tais tarefas. Uma questão proposta, que para nós, pesquisadores, é avaliada como interessante, no interior da presente pesquisa, pode também ser considerada sem valor (e, portanto, ilegítima), de acordo com a perspectiva de um matemático. Isto é possível justamente pela diferença de objetivos. O objetivo de um matemático será, muito provavelmente, *internalista*[49], ou seja, indagará se a questão (ou tarefa) ajuda a resolver ou demonstrar uma questão já posta. O nosso objetivo na elaboração e na proposição das tarefas – reafirmamos – será o de estimular os diversos modos de produção de significados para elementos geométricos envolvidos em tais tarefas, que se constituirão ou não em objetos no interior de certa atividade[50].

Na elaboração das tarefas, temos ainda o objetivo de investigar o próprio processo de produção de tarefas que possuam algumas características gerais, tais como:

i) Que estimulem a produção de significados dos alunos;
ii) Que ampliem as possibilidades discentes de desenvolver e utilizar estratégias de resolução das tarefas;
iii) Que possibilitem que vários elementos do pensar matematicamente estejam em discussão, como a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, etc.

Em termos mais peculiares do presente trabalho, cada tarefa possui objetivos próprios, que podem ser comuns ou não às demais. Antes de apresentar as tarefas que elaboramos, sintetizaremos alguns dos objetivos mais gerais que nortearam o nosso processo de elaboração das tarefas. Os objetivos específicos de cada tarefa

[49] No sentido proposto por Lins (2004, p. 95)
[50] Para este termo, assumimos o sentido proposto por Leontiev (2006, p. 68).

serão apresentados junto das mesmas, mais abaixo. Os objetivos gerais são os seguintes:

i) Obter tarefas que estimulem os alunos a falarem de área, de perímetro e das possíveis relações entre estas grandezas.

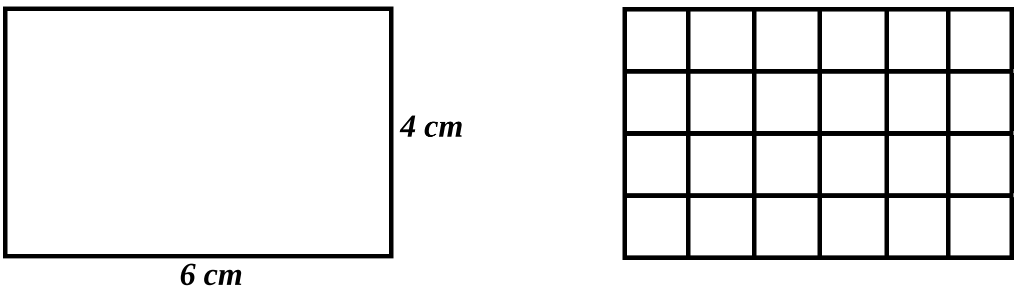
ii) Obter uma série de tarefas com número crescente de elementos que dificultem a resolução pelos sujeitos de pesquisa, ou seja, que gerem situações-problema de solução cada vez mais difíceis (ou problemáticas).

Apresentaremos, a partir deste ponto, a série de tarefas que elaboramos, mantendo a sua formatação com a qual foram apresentadas aos alunos (sujeitos de pesquisa), retirando apenas os espaços em branco, destinados à escrita destes sujeitos. Apenas as dimensões das figuras da Tarefa 6 foram levemente reduzidas, em relação à formatação proposta aos alunos.

Tarefa 1

Os dois retângulos abaixo são iguais. Observe.

FIGURA 1 *FIGURA 2*



Considerando as Figuras 1 e 2, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a medida da área do retângulo?

b) Qual é a medida do perímetro do retângulo?

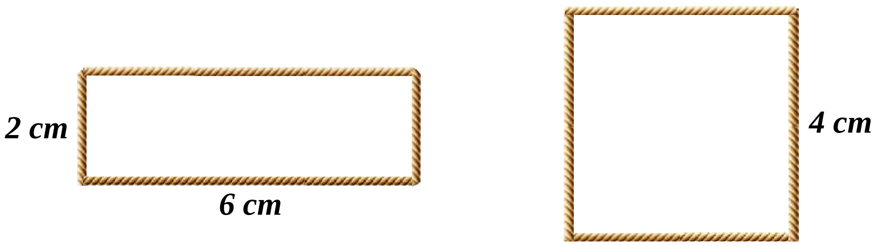
Figura 2 - *Tarefa 1 da pesquisa de campo*

Objetivos específicos da Tarefa 1: obter dois modos de apresentar o retângulo para gerar possíveis dualidades ou para permitir enunciações dos alunos que exibam diferentes modos de *operar* com área e com perímetro (por exemplo, com a multiplicação de grandezas lineares e com a contagem de unidades de área); vislumbramos a perspectiva de, através de uma intervenção orientada, fazer com que os sujeitos pensem e falem a partir das duas figuras, caso não o façam espontaneamente. A escolha de duas figuras idênticas, apresentadas de formas diferentes, atende ao objetivo de propiciar uma comparação entre tais formas e uma escolha, pelos alunos, por uma das figuras, que será possivelmente aquela cujos elementos (medidas de comprimento ou grade de unidades de área) se tornaram *objetos* para os sujeitos da pesquisa.

Tarefa 2

Você possui uma corda com a medida de 16 centímetros, quando está totalmente esticada, como mostra a figura abaixo.

Com esta corda, você construiu um retângulo e depois um quadrado, conforme o que podemos observar nas seguintes figuras. Veja.



a) Estas duas figuras têm a mesma área? Quais são suas áreas?

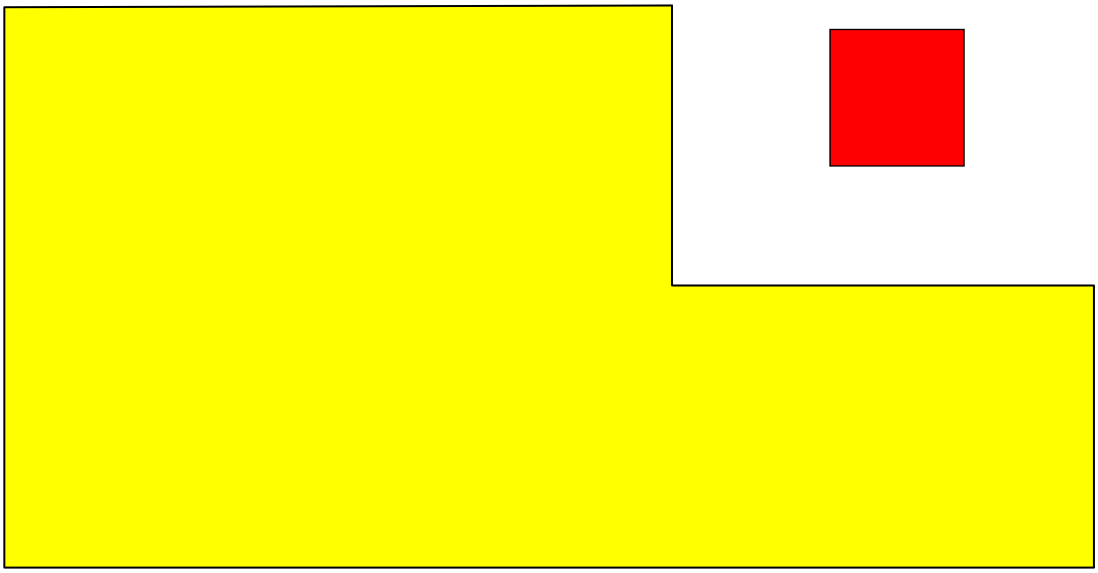
b) Estas duas figuras têm o mesmo perímetro? Quais são seus perímetros?

Figura 3 - *Tarefa 2 da pesquisa de campo*

Objetivos específicos da Tarefa 2: buscar uma aproximação da relação área-perímetro, segundo possíveis significados produzidos pelos sujeitos; vislumbramos a ideia de fixar o perímetro (com um exemplo que tenda ao físico, como uma corda, embora desenhada), com a intenção de gerar nos sujeitos o desconforto de obter medidas diferentes de área para uma mesma medida de perímetro, colocando em cheque a noção (bastante comum) da linearidade da variação destas grandezas.

Tarefa 3

Da forma que você achar melhor, utilize o quadrado vermelho para responder à pergunta abaixo, envolvendo a figura a seguir.



Quantos quadrados vermelhos iguais a este cabem na figura acima?

Figura 4 - *Tarefa 3 da pesquisa de campo*

Objetivos específicos da Tarefa 3: obter um modo de explicitar as possíveis dificuldades dos sujeitos operarem com a ideia da contagem das unidades de área para obter a área de uma figura, o que possivelmente estaria relacionado à confusão entre área e perímetro; buscar uma aproximação da relação área-perímetro, com a utilização de sobreposição e ladrilhamento (estrutura de malha), ou medição de dimensões das figuras dadas com suporte das tarefas.

O quadrado vermelho não foi apresentado aos sujeitos de pesquisa como a figura acima, ou seja, impresso na ficha da tarefa. Ele foi apresentado junto à ficha, mas como um recorte em cartolina, de modo que os alunos pudessem sobrepô-lo à figura da tarefa. Ainda outros três quadrados[51], idênticos ao primeiro, foram deixados ao alcance dos sujeitos, junto de réguas e esquadros, como sugestão de unidades quadradas de área, possíveis instrumentos mediadores para que os sujeitos operem com o ladrilhamento. As réguas e os esquadros oferecidos podem sugerir medições

[51] Os quadradinhos foram moldados como recortes da figura dada na tarefa, de tal modo que um número inteiro deles preenche toda a figura.

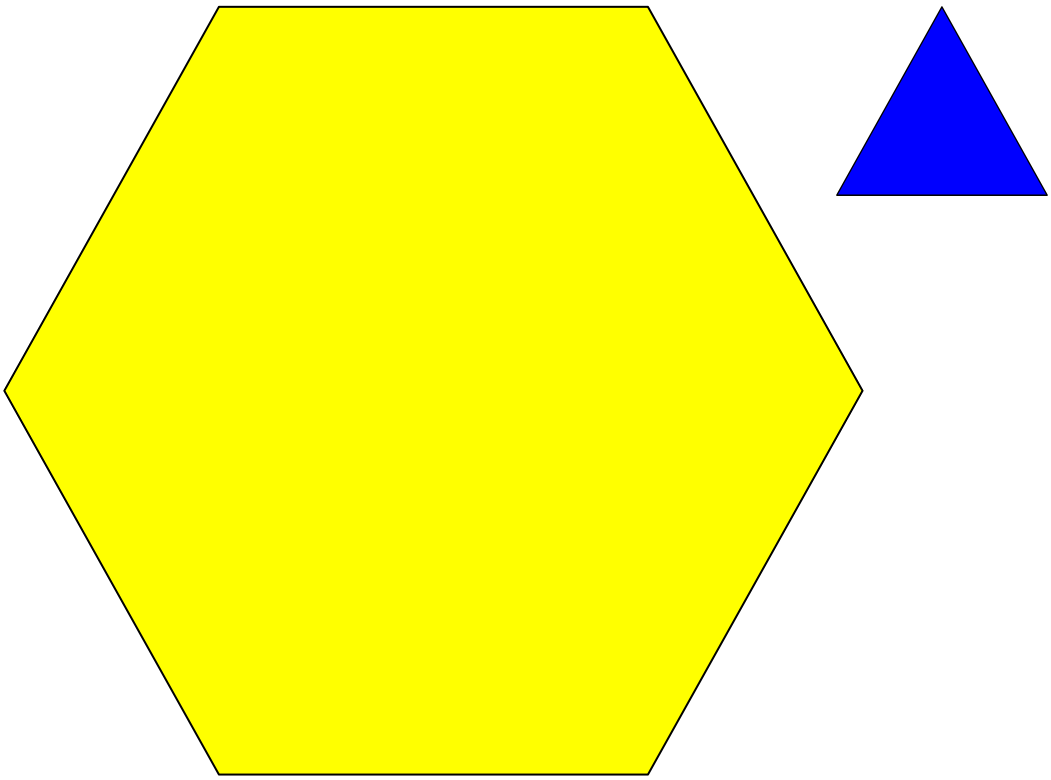
e desenhos, ou serem utilizados como possíveis instrumentos para que os sujeitos operem com fórmulas ou com o desenho geométrico.

Para a Tarefa 3, vislumbramos a ideia de sobreposição de elementos físicos de unidades de área, com o cuidado de serem figuras planas regulares cuja medida de área é um divisor da medida da figura da tarefa, de tal modo, ainda, que seja possível encaixá-las, sem sobreposição das unidades de área, uma em relação a outra, e sem sobrar lacunas entre elas, quando na provável atividade de ladrilhamento.

Os objetivos da Tarefa 4, a seguir, são os mesmos da Tarefa 3. A diferença está no tipo de figura e nas possíveis composições e decomposições com as quais os alunos podem operar, pois na Tarefa 4, a unidade de área é o triângulo, enquanto que na Tarefa 3, é o quadrado. A nossa perspectiva era de que esta diferença pudesse revelar modos distintos de produção de significados.

Tarefa 4

Da forma que você achar melhor, utilize o triângulo azul para responder à pergunta abaixo, envolvendo a figura a seguir.



Quantos triângulos azuis, como este, cabem na figura acima?

Figura 5 - *Tarefa 4 da pesquisa de campo*

Tarefa 5

Um *outdoor* de uma propaganda publicitária foi construído com a forma de um retângulo com área de 104 m^2 e com um dos lados sendo 5 metros maior do que o outro. A agência de publicidade responsável pela propaganda decidiu colocar um revestimento de alumínio para contornar todo *outdoor*, o que lhe dá um melhor acabamento. Imagine que você trabalhe nesta agência e precisa calcular quantos metros de alumínio serão necessários para cobrir toda a borda do *outdoor*. Então, faça agora este cálculo.

Figura 6 - *Tarefa 5 da pesquisa de campo*

Objetivos específicos da Tarefa 5: buscar uma aproximação da relação área-perímetro, com a utilização elementos algébricos, com a expectativa de que os alunos partissem para uma solução que ligasse álgebra e geometria[52]; obter um modo de explicitar as possíveis dificuldades relacionadas à mudança de grandezas, talvez geradora da confusão entre perímetro e área; vislumbramos um exemplo algo usual (na escola e nos livros didáticos) e que proporcionasse uma sensação imediata de solução rápida, seja por fórmulas ou por outra estratégia, mas que apresentasse um elemento dificultador a qualquer tentativa de solução geométrica.

Tarefa 6

Calcule a ***área*** e o ***perímetro*** das figuras abaixo.

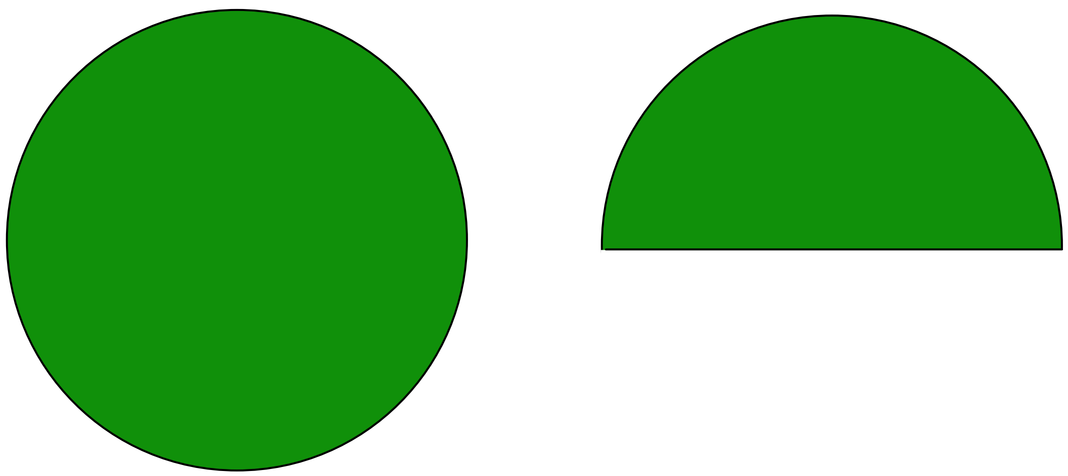


Figura 7 - *Tarefa 6 da pesquisa de campo – 1ª parte*

[52] Uma discussão sobre esse tipo de ligação é feita em Jones (2010).

Continuação da Tarefa 6.

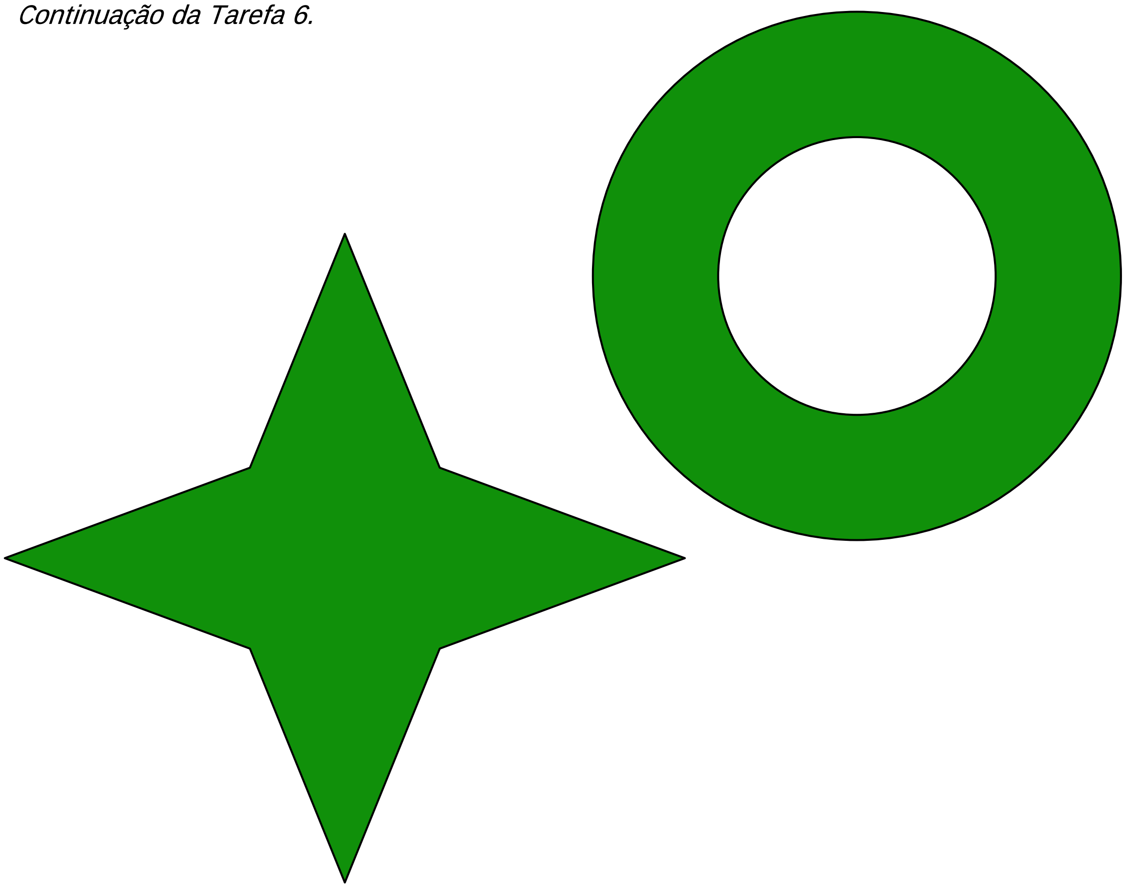


Figura 8 - *Tarefa 6 da pesquisa de campo – 2ª parte*

Objetivos específicos da Tarefa 6: buscar uma forma de fazer com que os sujeitos se deparem com situações nada usuais envolvendo medidas de área e de perímetro, e com a necessidade de comparar suas variações e estabelecer relações entre suas medidas, seja através da própria tarefa ou de perguntas que o pesquisador faça durante a sua resolução pelos sujeitos de pesquisa; vislumbramos exemplos usuais e outros não-usuais de figuras planas, mas que trouxessem, em suas estrutura, elementos desafiadores e *dificultadores* às soluções das questões apresentadas, como a relação entre os perímetros do círculo e do semi-círculo, e também a área da coroa circular, dependendo dos significados produzidos pelos sujeitos. Esta dependência constitui, aliás, condição à qual todas as outras descrições de objetivos e de saídas para as elaborações (de tarefas, citadas anteriormente) estão submetidas, com base nas premissas do Modelo dos Campos Semânticos.

4.4 – O Produto Educacional

No presente estudo, tivemos como meta produzir um conjunto de tarefas orientadas por objetivos e pressupostos teóricos bem definidos, como já afirmamos anteriormente. Ao produzir uma série de tarefas que pudessem ser aplicadas em nossas salas de aula e talvez em outras tantas, com outros alunos e professores, nosso principal interesse era entender como elaborar tarefas geradoras de produção de significados, e que permitissem interações (entre alunos, entre professor e alunos) e intervenções dos professores nos processos de produzir significados para elementos relacionados a área, perímetro, suas medidas e suas relações.

Em suma, repetimos ainda uma vez, buscamos entender como essas tarefas podem tocar em dificuldades de aprendizagem, como, por exemplo, a confusão que os alunos fazem entre *área* e *perímetro*, de modo que, ao se tornarem objeto de atenção destes alunos, as dificuldades sejam superadas, a partir da negociação de significados em classe.

Pensamos que a análise da transcrição das gravações da pesquisa de campo, apresentadas no próximo capítulo, servirão de modelo ou inspiração para que outros professores sintam segurança para criar suas próprias tarefas, conhecer maneiras novas de *olhar* para os processos de aprendizagem de temas geométricos, ouvir os seus alunos e procurar identificar *suas* dificuldades (discentes e docentes), no interior das atividades em que se encontram imersos, ao produzirem (os estudantes) significados para aqueles temas, e ao produzirem (os professores) significados para as enunciações de seus alunos.

Na produção de significados dos sujeitos de pesquisa, que apresentaremos no capítulo 5, é possível notar que os conteúdos matemáticos (ou geométricos, mais especificamente) foram orientados por objetivos previamente estabelecidos, e não o contrário, isto é, ao modo do ensino tradicional vigente, centrado em conteúdos, que ditam os objetivos do trabalho docente, estabelecendo padrões de organização curricular e estabelecendo conhecimentos *a priori*, a serem adquiridos ou assimilados pelos alunos, o que sugere a possibilidade de transmissão de conhecimento, na qual não acreditamos, como já discutimos no capítulo 3.

Constatações como estas acima dão-nos segurança para avaliar que o nosso trabalho de elaborar tarefas, aplicá-las e analisá-las deve ser bem entendido como protótipo para outras elaborações, outras pesquisas e, sobretudo, para ser utilizado pelos professores em suas salas de aula, direcionando, quem sabe, o seu trabalho. A noção de protótipo que assumimos aqui não coaduna com o sentido de modelo acabado, pronto, mas sim com o sentido de ideia geradora de novas ideias ou, ainda, de tarefa a ser modificada e adaptada a outras situações, outras ciclos ou níveis de escolaridade, outras turmas de alunos, em diferentes condições sociais, institucionais e culturais.

No produto educacional que apresentamos junto a esta dissertação, experimentamos modificar algumas de nossas tarefas utilizadas no pré-teste, criar outras apresentadas na pesquisa de campo e, ainda, outras mais que elaboramos após a pesquisa de campo e inserimos no escopo do produto educacional, por sentirmos necessidade de explorar outras possibilidades no levantamento de dificuldades e de produções de significados para os elementos relacionados a área e perímetros de figuras planas.

Em pesquisas futuras, pretendemos avançar na identificação de modos de intervenção nos processos cognitivos dos alunos, e acreditamos que o produto educacional que hora apresentamos nos servirá de ponto de partida para tal propósito.

CAPÍTULO 5

A ANÁLISE DA PESQUISA DE CAMPO

Antes de chegarmos ao cerne deste capítulo, a seção 3, que é composta pela analise dos dados gravados e das fichas de registro das tarefas propostas na pesquisa de campo, buscamos inicialmente identificar, em algumas publicações matemáticas adotadas em instituições de ensino superior no Brasil, significados produzidos por matemáticos para os objetos[53] *área* e *perímetro de figuras planas*. Na segunda seção do presente capítulo, apresentaremos uma de nossas investigações anteriores, na qual pesquisamos os significados produzidos por alunos do ensino médio da rede pública da cidade de Juiz de Fora para área de figuras poligonais e não-poligonais. As experiências vividas naquela investigação, bem como seus resultados, motivaram-nos a desenvolver a presente pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental.

5.1 – Os Objetos Perímetro e Área: Alguns Significados Matemáticos

Com a intenção de identificar algumas enunciações e possíveis justificativas dadas para elas em textos matemáticos – escritos por matemáticos, ao se expressarem sobre *área* e *perímetro* – e, ainda, buscando comparar os significados produzidos pelos matemáticos, para estes objetos, vamos exibir agora alguns resíduos de enunciação e desenvolver uma análise sobre alguns destes resíduos.

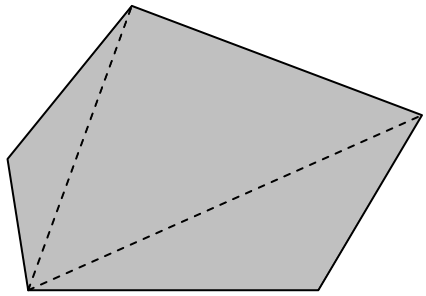
Antes, porém, cabe-nos destacar que, embora os matemáticos sejam membros de uma comunidade científica que lhes exige certos padrões de rigor, também podem produzir (e produzem, como mostraremos a seguir) significados diversos para os mesmos objetos.

Vejamos, inicialmente, algumas definições matemáticas dadas para o objeto *área*. Comecemos pelos seguintes recortes do capítulo intitulado *Áreas de Regiões Poligonais*, do livro de Rezende e Queiroz (2000):

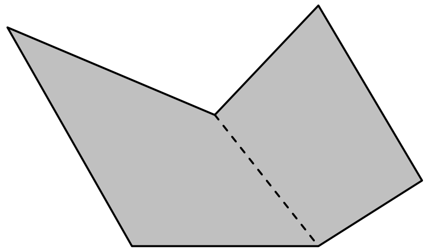
> Uma região poligonal convexa que, como definimos[[54]], é a reunião de um polígono com seu interior, pode ser vista com a união de um número finito de regiões triangulares tais que, se duas quaisquer delas se interseccionam, a intersecção é um segmento de reta ou um plano. Como

[53] De acordo com o que discutimos no capítulo 3, a noção de objeto não é a de algo que preexista à produção de significados de certo sujeito, ou seja, de um conhecimento estabelecido *a priori*, independente deste sujeito que, de acordo com o Modelo dos Campos Semânticos, é sempre o sujeito do conhecimento. A este respeito, afirmou Lins (1999, p. 86) que “os objetos são constituídos enquanto tal precisamente pela produção de significados para eles”.
[54] A referida definição está na página 30 do livro em citação.

exemplo, temos a figura (a). Vamos estudar também áreas de figuras poligonais que podem ser vistas como união de duas ou mais regiões poligonais convexas interseccionando-se de modo análogo. Como exemplo temos a figura (b).



(a)



(b)

Dessa maneira, e levando em conta o Postulado 16, devemos dar ênfase ao estudo das áreas de regiões triangulares. O Postulado 17 garante que duas regiões triangulares de mesma forma e tamanho têm mesma área. [...]
Postulado 16. Se uma região R é a união $R_1 \cup R_2$, com R_1 e R_2 sendo regiões que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de R é igual à soma das áreas de R_1 e R_2. [...]
Postulado 17. Se dois triângulos são congruentes, então suas regiões triangulares têm a mesma área.
Postulado 18. Se uma região quadrada tem lado de comprimento *a*, então sua área é a^2.
Daqui em diante, passaremos a usar "área de um polígono" ao invés de "área de uma região poligonal".
7.3 Teorema. A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados. (REZENDE e QUEIROZ, 2000, p. 106, grifos das autoras)

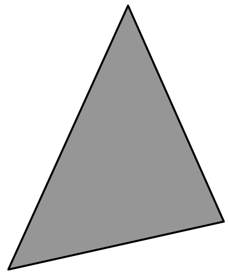
Nesta citação, as autoras, após afirmarem que as áreas de figuras poligonais "[...] podem ser vistas como união de duas ou mais regiões poligonais", justificam sua crença-afirmação com uma definição anterior e com os postulados que citaram em seguida. Além disso, Rezende e Queiroz (Ibidem, p. 106) apresentam uma demonstração[55] para o Teorema citado, apoiando-se nos postulados acima, que funcionam como estipulações locais, ou seja, afirmações para as quais não sentem necessidade de dar justificações. Embora esta estrutura axiomática seja usual e tenha coerência interna para os matemáticos, fazer com que afirmações, como "a área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados", pareçam verdades universais, talvez seja o suficiente para gerar algumas dificuldades na aprendizagem dos estudantes que se deparam com tais afirmações, como indicou a nossa revisão da literatura (ver, por exemplo, SANTOS, 2008; D'AMORE e FANDIÑO PINILLA, 2006).

Para outro matemático, Barbosa (1995), a noção de área pode ser expressa do seguinte modo:

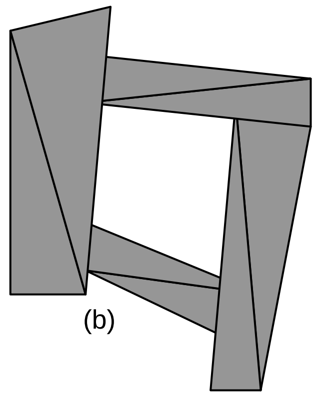
---

[55] Preferimos omitir esta demonstração, por extensa que se mostrou.

Uma região triangular (figura (a) abaixo) é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de *fronteira* da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertence à sua fronteira é chamado de *interior* da região triangular.

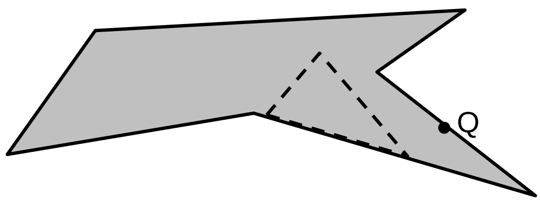


(a)



(b)

Uma *região poligonal* é a união de um número infinito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum (figura (b) acima).
Um *ponto* é *interior* a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O *interior* da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A *fronteira* da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.



P é ponto interior a região
Q é ponto de fronteira

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:
Axioma VI.1. *A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.*
O número a que se refere este axioma é chamado de *área* da região.
Axioma VI.2. *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões*.
Axioma VI.3. *Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.* [...]
Axioma VI.4. Se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto: AB . BC.
A partir destes axiomas, vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples. Vamos iniciar pelo paralelogramo.
Dado um paralelogramo ABCD designaremos por b o comprimento do lado AB e por h o comprimento de um segmento ligando AB a CD que seja perpendicular a ambos. Um tal segmento é chamado de altura do paralelogramo relativamente ao lado AB.
10.1 Proposição. A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado. (BARBOSA, 1995, p. 144)

Portanto, vemos que Barbosa (1995) define área de dois modos distintos: um modo *geométrico* (Axioma VI.2) e outro, *algébrico* (Axioma VI.4).

Vamos abrir um parêntese destacar alguns aspectos dos padrões de rigor comuns à comunidade dos matemáticos, observados no seguinte trecho texto de Barbosa (1995), que aparece entre os axiomas VI.3 e VI.4, da citação anterior:

> É claro que todo polígono convexo determina uma região poligonal. Nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo “a área de um quadrado” quando queremos dizer realmente “a área de uma região poligonal cuja fronteira é um quadrado”. Em geral, falaremos de “área de um dado polígono”, quando queremos de fato nos referir a área cuja fronteira é aquele polígono. Assim, o axioma VI.3 acima poderia ter sido enunciado como: “triângulos congruentes possuem áreas iguais”. (BARBOSA, 1995, p. 145)

Observemos, nesta citação, a preocupação rigorosa com a linguagem, quando o autor busca diferenciar o termo “área de um dado polígono” da expressão “área da região cuja fronteira é um polígono”, ao mesmo tempo em que assume um tipo de abstração ou abreviação de palavras, tomando a expressão “triângulos congruentes possuem áreas iguais” para expressar o Axioma VI.3 (“Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais”), como que tentando padronizar o modo dos possíveis leitores se expressarem sobre *área de um polígono*, o que seria equivalente a impor um modo de produzir de significados para tais objetos. Posturas como esta, conscientes ou não de suas consequências educacionais, parecem afastar dos alunos o interesse em aprender matemática.

Mais um ponto nos chamou a atenção na citação acima, que é o fato de o autor (BARBOSA, 1995, p. 145) inicia sua assertiva com o termo “É claro que...”, muito semelhante a “é trivial que...” ou a “é óbvio que...”, expressões estas muito comumente encontradas nos compêndios de Matemática voltados para o Ensino Superior e, por vezes, nos livros didáticos da Educação Básica. Em um contexto como este, que deseja apresentar um assunto ou um termo geométrico novo, ousamos, com base no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), questionar: o algo apresentado “é claro” para quem? E, ainda: O que é *ser claro*? No sentido de ser evidente, um certo enunciado certamente não será *claro* para todos que o lêem; talvez o seja para alguns. E isto se dá, não em função das características do que está escrito, mas em função das características individuais de cada leitor. E repetimos[56]: para nós, os livros não contêm conhecimento algum, mas apenas resíduos de enunciação.

---

[56] Já defendemos este pressuposto no capítulo 3.

Vejamos agora o que escreve Lima (1991), em seu livro da Coleção do Professor de Matemática, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática, no capítulo intitulado Área:

> Trataremos agora de medir a porção do plano ocupada por uma figura *F*. Para isso, comparemos *F* com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura *F* contém a unidade de área. Daremos aqui um **significado preciso** a esta ideia e estabeleceremos as fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas. (LIMA, 1991, p. 11, grifo nosso).

Vejamos que o autor desta citação tem a intenção explícita de eleger um significado para *área*, significado que deve ser preciso, ou seja, deve ser tomado como padrão para o cálculo de área de figuras planas, que são as fórmulas por ele *estabelecidas* – o que soa-nos como *impostas,* com conhecimentos dados *a priori*. Este "significado preciso" é resumido nestas mesmas fórmulas, de acordo com o que vemos nos trechos a seguir, em que Lima (1991) não considera sequer a possibilidade de outros significados (mesmo matemáticos) para a área de cada uma das figuras geométricas que contemplou; para de *estabelecer* a primeira fórmula, o autor utiliza a seguinte *definição*:

> O *quadrado* é o quadrilátero que tem os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado *quadrado unitário*. Qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1. Um quadrado *Q* cujo lado tem para medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e portanto com área 1. Segue-se que o quadrado *Q* deve ter área n^2. (...)

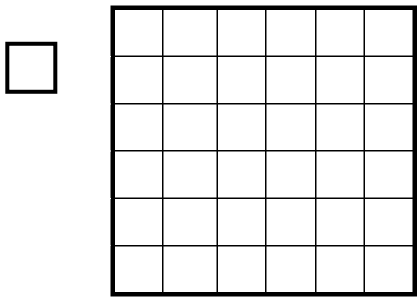


***Fig. 1.** Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$ quadrados unitários.*

> Podemos então concluir que a área de um quadrado *Q* cujo lado tem para medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão: área de $Q = a^2$. (...)
> Consideremos agora a área do retângulo. O retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos. Se os lados de um retângulo *R* têm para medidas os números inteiros *m* e *n*, então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor *R* em *mn* quadrados unitários, de modo que se deve ter de área $R = m.n$.

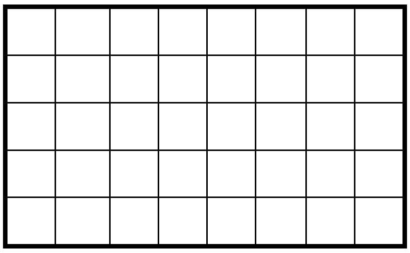


Fig. 4. *Retângulo R, cujos lados medem 5 e 8, subdividido em 5 x 8 = 40 quadrados unitários. Tem-se área de R = 8 x 5 = 40.*

> Diz-se, então, que a área do retângulo é o produto da base pela altura. (...) Da área do retângulo, passa-se facilmente para a área do paralelogramo. (...) Assim, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente. (...) Da área do paralelogramo passa-se imediatamente para a área do triângulo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo. (LIMA, 1991, pp. 13-21)

Concordamos com Lins (1993), quando afirma que a prática tradicionalmente adotada, quanto ao ensino de matemática, esconde os saltos entre diferentes campos semânticos e confiam numa passagem "suave" entre noções distintas, relacionadas a um mesmo elemento. E é o que observamos na citação acima, quando Lima (1991) diz: "passa-se facilmente para a área do paralelogramo"; e ainda: "passa-se imediatamente para a área do triângulo". Para o leitor, seja um professor ou um aluno, nem sempre é *fácil* ou *imediato* perceber a mudança de um elemento para o outro, da área de uma figura para a área de outra, embora o rigor das demonstrações matemáticas apresentadas. Aliás, como citamos em nossa revisão da literatura, pesquisadores como Outhred e Mitchelmore (1992, apud D'AMORE e FANDIÑO PINILLA, 2006) mostraram que é apenas uma ilusão a atividade de ensinar tomada como garantia de que, se uma criança calcula a área de um retângulo, ela está automaticamente aprendendo a medir ou calcular a área de qualquer outra figura geométrica.

Mas voltemos aos significados produzidos por matemáticos, para o objeto *área poligonal*. Neto (1982) dá uma interessante definição para área poligonal:

> Intuitivamente, a área de um polígono é um número que mede a sua extensão, ou seja, a porção de plano ocupada por ele.
> Desejamos, entretanto, estabelecer um significado mais preciso para esta ideia, fixando as **propriedades** que a área deve ter.
> A cada polígono, então, será associado um número real não negativo, chamado área, que deverá satisfazer as propriedades seguintes:
> 1ª) Polígonos congruentes têm mesma área.
> 2ª) Se um polígono P for decomposto como a união de um certo número de outros polígonos P_1, P_2, P_3, ..., Pn de tal modo que dois quaisquer entre eles tenham em comum pontos isolados ou segmentos, então a área de P é a soma das áreas desses polígonos.
> 3ª) A área de um quadrado cujo lado tem medida **a** é igual a $\mathbf{a}^2$. (NETO, 1982, p. 175, grifos do autor)

Atentemos para o fato de que, neste resíduo de enunciação, Neto (Ibidem, p. 175) produz dois significados para área. O primeiro significado é dado ao afirmar que "a área de um polígono é um número que mede a sua extensão", o que poderíamos chamar de noção numérica. O segundo significado, embora na mesma expressão, é diverso do primeiro, e é dado quando o autor afirma que área é "a porção de plano ocupada por ele", o que chamaríamos de noção geométrica, ou talvez disséssemos que ele opera, nesse momento, num campo semântico geométrico. Mas para ambos os significados produzidos, Neto justifica as suas afirmações com a expressão "intuitivamente", o que, ao mesmo tempo em que permite ao autor expressar tais noções, expressa um juízo de valor sobre essas noções (as quais são comuns aos alunos)[57], comprando-as com uma noção *mais precisa*, dentro do rigor matemático, quando afirmou: "Desejamos, entretanto, estabelecer um significado mais preciso para esta ideia, fixando as **propriedades** que a área deve ter".

Discutimos, no capítulo 3, que alguns pesquisadores[58] se referem a *significados matemáticos*, e não a outro tipo de significados produzidos pelos estudantes. No entanto, pela perspectiva do MCS, entendemos que outros significados, ditos não-matemáticos, devem ser também considerados legítimos, mesmo em se tratando de significados produzidos por alunos nas aulas de matemática, para objetos matemáticos. A este respeito, lembramos ainda o que afirmaram Lins e Gimenez (1997):

> É apenas com base na coexistência de significados matemáticos e não-matemáticos na escola que se poderá constituir uma legitimidade comum, o que pode, por sua vez, impedir que a matemática da escola seja percebida como inútil, um saber cuja razão deixa de existir quando termina a escolarização que envolve matemática. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 28)

Uma diferenciação semelhante a esta diz respeito ao caráter *internalista* da Matemática dos matemáticos, ou seja, aquele que a diferencia da Matemática do cotidiano, do cidadão comum. Para exemplificar, Lins (2004, p.95) pondera que "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição corresponde bem ou mal a *algo* fora da própria matemática". É nesta direção que o MCS permite comparar e distinguir significados matemáticos e não-matemáticos.

---

[57] Ver Henriques e Silva (2009).
[58] Ver, por exemplo, os trabalhos de Godino *et al* (2008) e de Cobb e Bauersfeld (1995).

5.2 – Sintetizando Experiências Anteriores

Durante a especialização em Educação Geométrica que cursei na Universidade Federal de Juiz de Fora, nos anos de 2006 e 2007, desenvolvi uma investigação sobre os significados produzidos por alguns estudantes para área de figuras geométricas planas. Nesta pesquisa, que foi inicialmente apresentada e publicada no VI Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, no Chile (HENRIQUES e SILVA, 2009), foram propostas algumas tarefas simples, envolvendo cálculo de áreas de figuras planas, para cinco alunos (voluntários) de turmas do segundo ano do ensino médio de uma escola estadual da cidade de Juiz de Fora, estado de Minas Gerais, Brasil. As entrevistas foram filmadas com o objetivo de registrar todas as possíveis ações enunciativas dos jovens pesquisados. Limitamo-nos a descrever aqui apenas os significados produzidos por duas alunas, cujos pseudônimos adotados são Roberta e Fernanda.

Quando desenvolvemos a leitura da produção de significados de Roberta, naquela pesquisa, o elemento que parece preponderante para Roberta é a fórmula *Área = base vezes altura.* Produzindo significado para *área*, escreveu Roberta: "Área é um local que pode ser medido em *cm, mm, m, km*, etc. Por exemplo, o tamanho de uma casa em metros quadrados". Como podemos ver na Figura 9 (abaixo), Roberta desenha a altura de modo perpendicular às bases do trapézio dado, como geralmente encontramos nos livros didáticos, mas a aluna considera base como sendo o segmento que marcamos em vermelho, ao analisarmos suas fichas. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

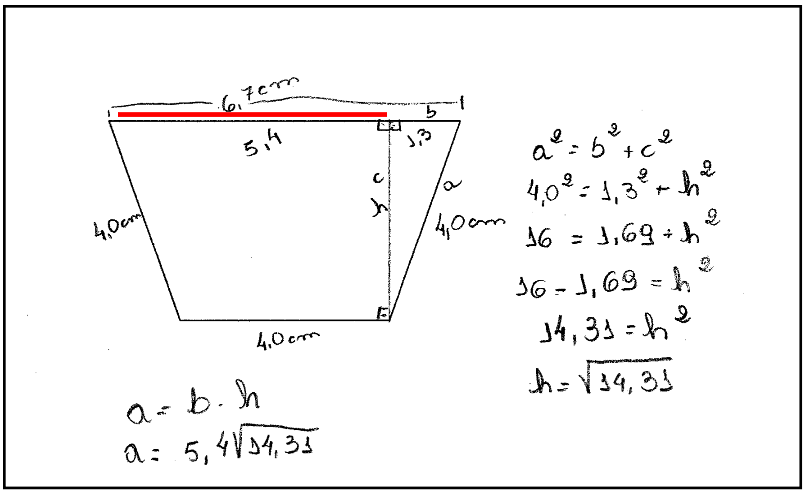


Figura 9 - *Escrita de Roberta ao calcular a área do trapézio dado*

Para a aluna Roberta, *calcular área* de uma figura poligonal plana parece ter o significado de dividir a figura em partes e calcular todas e quaisquer áreas com a fórmula *A=b.h.* Vejamos as Figuras 10 e 11, apresentadas a seguir, nas quais vemos esta ação de Roberta: ela decompõe o octógono em dois trapézios idênticos e um retângulo, mas calcula apenas a área do retângulo, multiplicando corretamente as medidas da *base* pela medida da *altura*. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

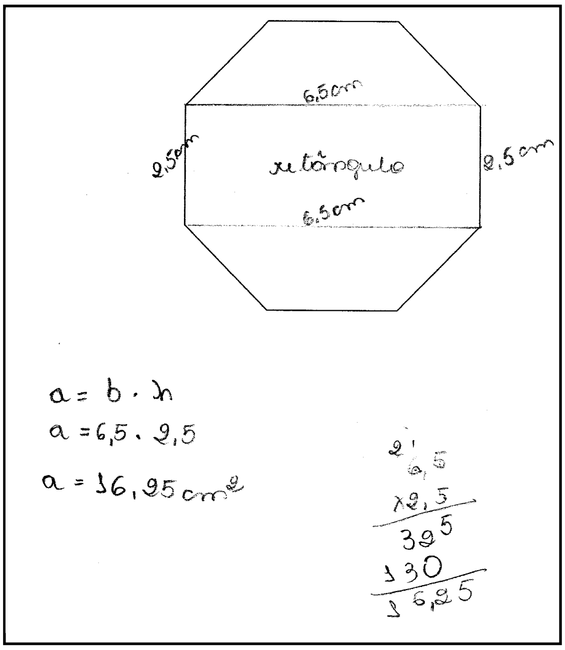


Figura 10 - *Escrita de Roberta ao calcular a área do octógono dado*

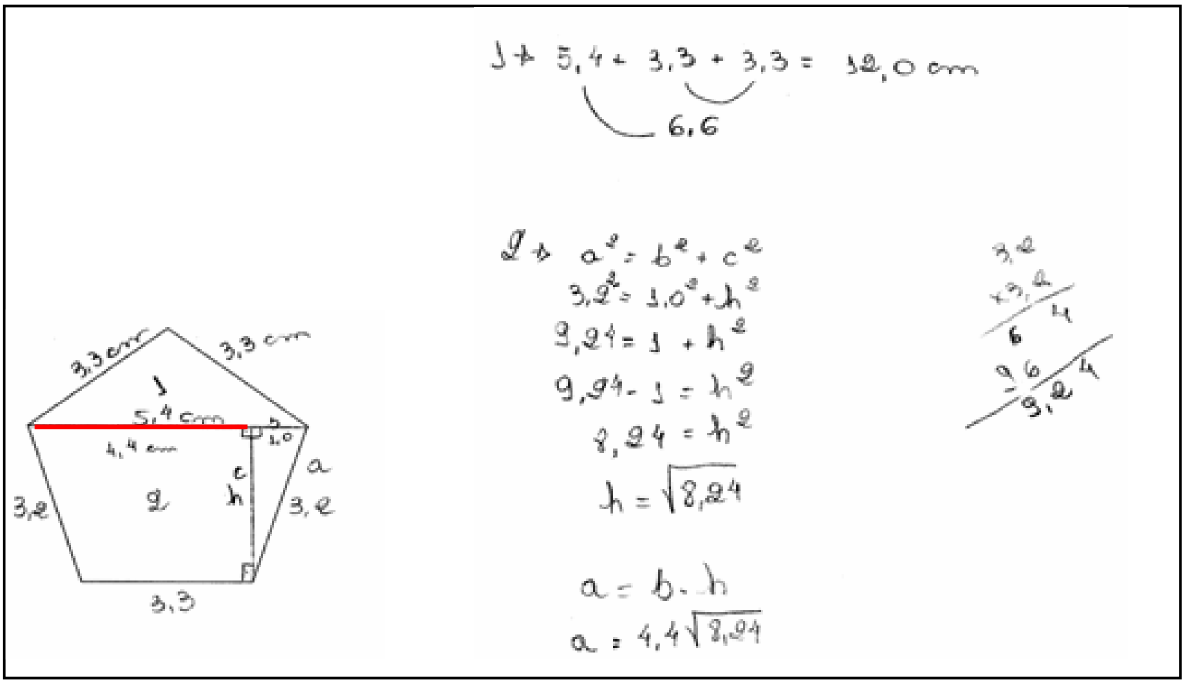


Figura 11 - *Escrita de Roberta ao calcular a área do pentágono dado*

A partir da Figura 11 e da videografia daquela pesquisa, identificamos a seguinte a ação de Roberta: a aluna decompõe o pentágono em um triângulo e um trapézio, calcula área do triângulo (que ela chamou de área 1, confundida com o seu perímetro) e área do trapézio, calculando a altura, (que marcou perpendicularmente às bases do trapézio desenhado), através do Teorema de Pitágoras, e depois multiplicando esta altura pela base, calculada como “5,4 - 1,0 = 4,4 cm”, e que foi por Roberta considerada como o segmento que marcamos em vermelho. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

Ao analisar o vídeo daquela pesquisa de campo (HENRIQUES e SILVA, Ibidem), compreendemos que Roberta talvez opere de modo a considerar que a área de qualquer figura plana poligonal pode ser calculada através da equação $A= b.h$. Ou seja, para todas as figuras poligonais apresentadas, sua maneira de operar é a mesma: multiplicar a *base* pela *altura*, de acordo com os significados que Roberta produziu para estes termos, como identificamos nas Figuras 9, 10 e 11. Por outro lado, quando analisamos, na mesma investigação, a produção de significados da aluna Fernanda, observamos que os termos *base* e *altura,* e a fórmula *Área = base vezes altura,* poderiam ser considerados estipulações locais. Para a aluna, *calcular área* de uma figura poligonal plana teria o significado de usar a fórmula que ela afirma conhecer, *Área = base vezes altura*, pois Fernanda justifica fazendo as medições de uma ‘base’ e de uma ‘altura’ da figura (ver figuras 12 e 13 abaixo). (HENRIQUES e SILVA, 2009)

Para calcular áreas das figuras poligonais apresentadas na atividade, Fernanda parece operar com a idéia de que a área de *qualquer* figura plana poligonal pode ser calculada através da multiplicação da *base* da figura por sua *altura*. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

O registro audiovisual daquela pesquisa mostra também a ação de Fernanda em identificar aquilo que para ela são elementos comuns a todas as figuras poligonais: uma base e uma altura. Na figura 12 e também na figura 13 (a seguir), marcamos segmentos de reta azuis para representar as medidas realizadas pela aluna, durante a atividade, utilizando régua graduada; nestas figuras, podemos observamos que as “alturas” estão sempre na vertical. Já as “bases”, marcadas em vermelho, parecem ser sempre um dos lados dos polígonos, hipótese justificada também pelas falas de Fernanda, registradas na videografia. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

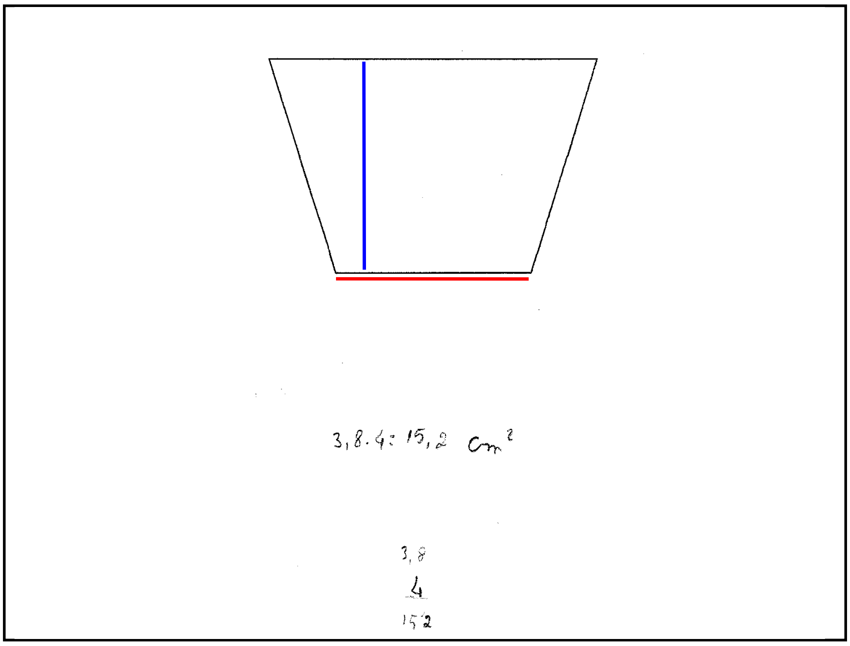


Figura 12 - *Escrita de Fernanda ao calcular a área do trapézio dado*

O vídeo mostra a ação de Fernanda: ela mede 7 centímetros na diagonal da estrela (marcamos em azul), o que afirma ser a altura, e mede 2,5 centímetros num dos lados da figura (em vermelho), dizendo se tratar da base da figura. (HENRIQUES e SILVA, 2009)

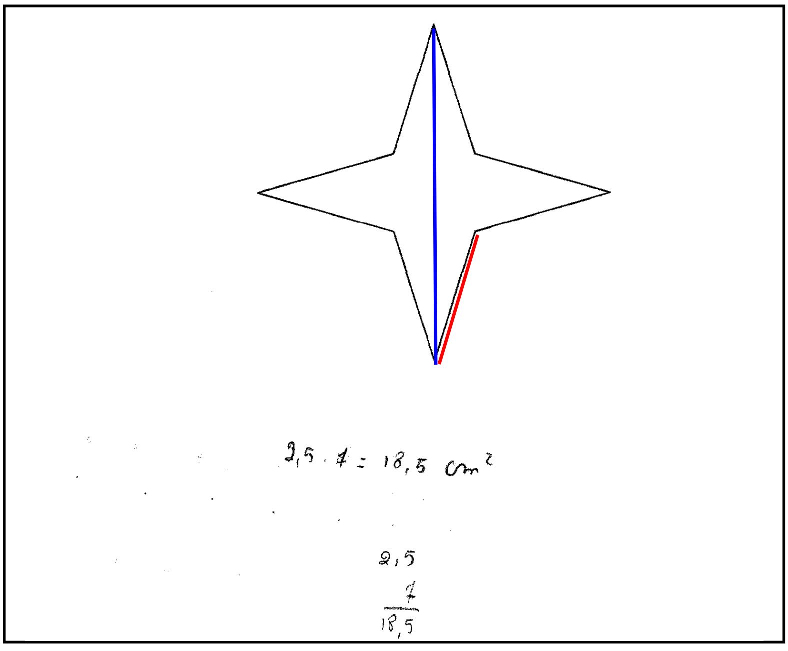


Figura 13 - *Escrita de Fernanda ao calcular a área da figura dada*

Este trabalho (HENRIQUES e SILVA, Ibidem) nos permitiu, dentre outras coisas, desenvolver um olhar mais refinado para *ler* a produção de significados dos futuros sujeitos de pesquisa e para identificar suas dificuldades de aprendizagem.

5.3 – Significados Produzidos pelos Sujeitos de Pesquisa: uma Análise

Nesta seção, faremos uma análise das produções de significados dos sujeitos, registradas durante a pesquisa de campo (resolução das tarefas, diálogos, expressões diversas). Esta análise será subdividida em seis seções, seguindo a ordem com a qual as seis tarefas foram apresentadas aos nossos sujeitos de pesquisa. No início de cada parte, apresentaremos novamente as tarefas (que já exibimos no capítulo anterior), cada qual à sua vez, para nos auxiliar na organização deste trabalho, facilitando a leitura deste capítulo.

Como também já dissemos no capítulo 4, características diversas dos sujeitos serão dadas durante a análise, por entendermos desnecessário fazê-lo antecipadamente a esta etapa, na qual queremos levantar os elementos que julgamos pertinentes a determinados momentos da pesquisa de campo.

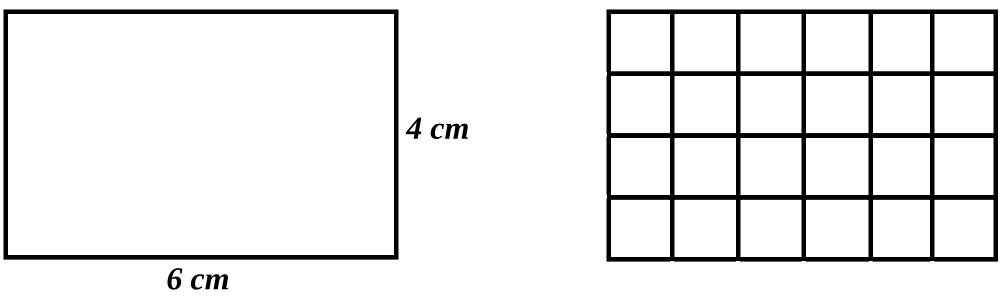
5.3.1 – A Produção de Significados para a Tarefa 1

Eis, a seguir, a Tarefa 1, tal qual apresentamos aos alunos na pesquisa de campo, estando ausentes aqui apenas os espaços que deixamos para a sua resolução. A esta tarefa, como às demais, acrescentamos margens, para distingui-la de nossa análise.

Tarefa 1

Os dois retângulos abaixo são iguais. Observe.

FIGURA 1 *FIGURA 2*



Considerando as Figuras 1 e 2, responda às seguintes perguntas:

c) Qual é a medida da área do retângulo?

d) Qual é a medida do perímetro do retângulo?

Figura 14 - *Tarefa 1 da pesquisa de campo*

Após ligeiras explicações acerca dos objetivos da pesquisa, o pesquisador[59] entrega as fichas contendo a Tarefa 1 para os sujeitos de pesquisa, que, atendendo a um pedido dele, escolheram os próprios pseudônimos para este trabalho, com os quais assinaram as fichas das tarefas: Ortência e Marte. Então o pesquisador deixa a sala de entrevistas e a câmera registra as primeiras reações dos sujeitos de pesquisa, expressas nas transcrições[60] a seguir. Eles começam a discutir acerca da identidade das duas figuras dadas:

> **Marte** – (Comparando as medidas dos retângulos usando o lápis). Se faltar um milímetro... Tipo, tem que ser exatamente do mesmo tamanho?
>
> **Ortência** – O quê que tem que ser exatamente do mesmo tamanho?
>
> **Marte** – Ó. (Apontando para as duas figuras).
>
> **Ortência** – Elas parecem que são iguais, mas...
>
> **Marte** – Hã hã... Se a gente coloca o coisa (lápis) aqui (lado superior da figura 1), ó...
>
> **Ortência** – Elas têm o mesmo tamanho.
>
> **Marte** – É.
>
> **Ortência** – A questão é que a gente não sabe se elas têm o mesmo tamanho. Porque a figura 2 tá quadriculada? Não tem nenhuma coisa que pergunte sobre isso.
>
> **Marte** – Mas, pra ele, talvez seja pra gente ver isso mesmo, entendeu?
>
> **Ortência** – Entendi. Porque não tem nenhuma questão que pergunte, tipo assim, qual é a área *dos* quadrados ou nada disso.
>
> **Marte** – É isso aí. Então, como é que faz? A gente escreve sim?... É meio, assim...
>
> **Ortência** – A gente vai acabar isso aqui em dois minutos.

Observemos que, como não oferecemos qualquer instrumento de medida convencional nesta tarefa, como a régua, Marte busca imediatamente comparar as medidas lineares das figuras, utilizando o seu lápis. Com pouco esforço, Ortência busca convencer Marte do fato de serem figuras idênticas, afirmando que "têm o mesmo tamanho". No entanto, Marte parece não aceitar que tenham o mesmo

---

[59] Para facilitar esta análise, não redigiremos na primeira pessoa, embora sejamos autor e pesquisador neste trabalho. E éramos ainda o professor de matemática destes sujeitos, à época da realização da pesquisa de campo.

[60] Nas transcrições das falas (integralmente contidas no Anexo 2 desta dissertação), as seguintes convenções foram usadas: a) os sujeitos de pesquisa são identificados por seus pseudônimos e o pesquisador pela abreviação Pesq; b) Parênteses são usados para indicar gestões, expressões e atitudes dos sujeitos de pesquisa; c) Reticências indicam pausa prolongada; d) Reticências entre parênteses indicam omissão de parte da transcrição; e) Barras indicam interrupção súbita ou mudança na direção da fala; f) Aspas indicam que o sujeito de pesquisa está lendo o que está dizendo.

tamanho, isso lhe parece facilitar demais a resolução. E discutem o que estaria por trás da tarefa. O quadriculado da figura 2 parece dificultar a escolha da figura cuja área deveriam calcular. Ortência abandona esta ideia (quadriculado como diferencial) e parte para o cálculo da área da figura 1, mas Marte transita na dúvida e prefere olhar para figura 2, cujas medidas dos lados não foram dadas. Vejamos:

Marte – Não precisa fazer para a figura 1, porque são do mesmo tamanho.

Ortência – Essa daqui não tem medida. (Aponta para a figura 2).

Marte – Ah! Eu sei... Olha só: um, dois, três, quatro, cinco, seis. (Contando os quadradinhos da linha superior da figura 2).

Ortência – Você não tinha percebido isso?

Marte – Não.

Ortência – Cada quadradinho tem um centímetro.

Ambas permanecem escrevendo e apagando, até que o pesquisador retorna à sala e é imediatamente questionado acerca da natureza da tarefa:

Marte – Professor, você tem certeza que é só isso?

Ortência – É, a gente tava pensando nisso.

Pesq – Sim. É só isso. Pra começar é só isso.

Marte – Ah! Pra começar!...

Pesq – Vocês estão achando muito fácil?

Ortência – Sim.

Marte – Não, tipo, fácil ainda é pouco!...

Ortência – Professor, não sei porque eu coloquei figura 1 se as duas figuras são do mesmo tamanho, as duas falam da... São a mesma coisa, então?... Não precisa fazer das duas.

Marte – Tem alguma pegadinha?

Ao responder a esta pergunta de Marte, o pesquisador aproveita para fazer a sua primeira intervenção:

Pesq – Não, não tem pegadinha. O trabalho é mesmo esse aí. Mas você falou o que mesmo, Ortência? Não precisa fazer das duas figuras?

Ortência – Sim, elas são iguais.

Marte – Não, eu acho que não.

Ortência – Não pergunta sobre a 1 e a 2, eu pensei em fazer sobre as duas. Só que essa é igual a essa.

Pesq – Hum hum.

Ortência – Ele não vai responder, não falei. (Olhando para Marte).

Pesq – Mas você escreveu sobre qual figura?

Ortência – Escrevi sobre a figura 1. A figura 2 tá quadriculada, mas ela é a mesma que essa. Cada quadradinho tem um por um.

Pesq – Tá.

Ortência – Porque quatro nesse e quatro nesse, seis nesse e seis nesse... (olha para o Pesquisador, apreensiva). Aí, precisa fazer das duas?

Marte – Não.

Ortência – Elas são a mesma?...

Marte – É.

Embora aparentemente concordem, quando afirmam que figuras são "a mesma", a partir de uma nova intervenção do pesquisador e da interação entre as alunas, parece que elas estão operando com significados diferentes, na atividade de "medir a área do retângulo". Para o objeto *medida de área*, Ortência para produzir o significado de *produto dos lados da figura*, enquanto Marte parece produzir o significado de *quantidade de quadradinhos cabem na figura*. Ou seja, enquanto esta opera com o que diríamos a noção de ladrilhamento com unidades de área, aquela parece operar com a noção de multiplicação de medidas. Vejamos:

Pesq – Você faria diferente se fosse a figura 2?

Marte – Ah!... Agora eu entendi! Ele quer saber se tivesse só essa daqui ou só essa daqui? Por exemplo, se não tivesse essa (aponta a figura 1), e todos os quadrados são iguais; qual seria a medida do retângulo, é isso?

Ortência – Entendi. Sim, só que...

Mantido o silêncio por trinta segundos, o pesquisador inquire, novamente:

Pesq – Você, Ortência, fez olhando a figura 1, certo? Mas e se só tivesse a figura 2, como faria?

Marte – Contar quantos quadrados tem.

Ortência – Mas com é que você saberia que o quadrado tem um centímetro?

Marte – Não, porque... Aí...

Ortência – Você teria que medir, por exemplo.

Marte – Mas aí eu poderia estimatizar, não?...

Pesq – Estimar?

Ortência – Isso. É o que eu ia falar.

Pesq – Sim, você poderia estimar.

Ortência – Mas você não teria como ter certeza. Eu nunca faria um cálculo sem saber com certeza se isso aqui tem um centímetro ou não. Eu acho que eu ficaria um pouco perdida só com a figura 2, porque eu não saberia a medida. Só se eu tivesse uma régua...

Marte – Mas na falta da régua, da certeza, você tem ir pelo que você tem, né?

Reparemos que a diferença entre os *caminhos* cognitivos dos sujeitos parece se acentuar. Quando Marte fala em *estimar* valores, demonstra que não está preocupada com as medidas dos lados (nem do retângulo, nem do quadrado), mas está pensando em unidades de área, isto é, parece operar com apenas uma grandeza, a área. Já Ortência, ao falar em *certeza*, demonstra preocupação com as medidas dos lados das figuras, pois não se arriscaria a fazer "um cálculo sem saber com certeza" quais são as medidas dos lados; Ortência parece operar com três grandezas (ou três variáveis, como se expressou Nunes[61]): as distintas medidas dos dois lados do retângulo e a medida da área do retângulo.

O pesquisador faz mais duas intervenções, com o objetivo de orientar a negociação de significados entre os sujeitos de pesquisa, que, a partir de então, parecem começar a considerar possível o modo *do colega* de pensar a tarefa, embora não abandonem o *seu próprio modo* (inicial). Com efeito, notemos que Marte permanece com a ideia de *unidades de área*, e Ortência, com a ideia de *medidas de comprimento*:

Pesq – Mas aqui neste caso, os retângulos são iguais. Você pode usar os dados de um para calcular as medidas do outro?

Ortência – Sim. Eu faria do mesmo jeito.

Pesq – Do mesmo jeito?

Ortência – Faria. Porque, independente dela tá quadriculada, eu quero saber a área dela toda.

Pesq – Antes você falou que contaria os quadradinhos? (Dirigindo-se a Ortência).

Ortência – Não. Foi ela. (Referindo-se a Marte).

Marte – Se eu tivesse só isso daqui (apontando para a figura 2).

[61] Nunes (1995, p.17). Ver também nossa revisão da literatura, no capítulo 2.

Ortência – Sem medida e sem nada? Mas, de quê que adiantaria contar os quadradinhos? Saberia...

Marte – A gente somaria, porque cada quadrado teria um centímetro. Porque dá pra ver, né?

Pesq – Você iria contar como? Pode mostrar?

Marte – Um, dois, três, quatro, cinco, seis (apontando para os quadradinhos na linha superior do retângulo 2).

Ortência – Seis centímetros.

Marte – Aí eu poderia multiplicar a altura pelo lado.

Ortência – Teria vinte e quatro quadrados, como...

Marte – É. Ou então conta tudo.

Ortência – Ah!... Eu pensei numa coisa: como você não precisaria fazer a multiplicação... não tecnicamente... contaria, então você faz a multiplicação. Então você faz seis quadrados por quatro quadrados, vinte e quatro quadrados; cada um tem um centímetro, vinte e quatro centímetros quadrados.

Neste trecho da entrevista, podemos perceber que Ortência não opera com a estrutura de malhas (matrizes) para medir a área de um retângulo. Pois o modo de operar a partir da estrutura de malhas é comumente revelado quando o sujeito multiplica uma linha pelo número de unidades (quadradas) dessa linha, ou uma coluna pelo número de unidades dessa coluna, em se tratando de um retângulo desenhado sobre um malha quadriculada ou que foi dividido em unidades de área, pela tesselação ou ladrilhamento do retângulo. E, como vimos, ao aceitar a negociação, Ortência se utiliza das unidades de área *apenas* como *instrumento para medir* os lados do retângulo, dentro da atividade de encontrar a área da figura.

O trecho a seguir corrobora a hipótese de que Ortência se mantém impermeável[62] à possibilidade de operar com a estrutura de malhas, e se propõe ainda a corrigir os cálculos de Marte:

Ortência – Mas então, se eu faria do mesmo jeito, eu não preciso fazer da outra, né? Eu faria do mesmo jeito, eu acho.

(Ambas escrevendo por um minuto. Ortência para de escrever e olha para a folha de Marte).

Ortência – Se o seu exercício tivesse errado, você gostaria que eu corrigisse? (Dirigindo-se a Marte).

Marte – Hã hã.

[62] Para este termo, assumimos o significado dado por Silva (2003).

Ortência – Sim, né?... Perímetro não é um lado mais o outro, mas a soma de todos os lados. É seis mais seis mais quatro mais quatro.

Marte – Ah... Realmente. Obrigada. (Refaz os seus cálculos)

Aqui, observamos um erro comum aos alunos: Marte calcula o perímetro somando os dois lados do retângulo cujas medidas foram dadas. O diagnóstico da possível gênese deste erro apresentado pela aluna é ensaiado pelos próprios sujeitos de pesquisa. Vejamos o seguinte trecho, quando elas já haviam terminado esta tarefa e o pesquisador faz mais algumas perguntas:

Marte – A gente acabou, não acabou?

Ortência – É, acabamos.

Pesq – Vocês acham que fizeram direitinho os cálculos?

Marte – Sim. Só que eu... errei o perímetro. Eu errei. (Tímida).

Pesq – Mas o que você pensou ao resolver esta questão?

Marte – Eu tinha esquecido, eu coloquei como se fosse área, também, só que eu somei. Eu tinha esquecido que a gente tem que somar todos os lados pra dar o perímetro.

Pesq – E você achou que confundiu com área por quê?

Marte – Porque faz um tempão que eu não faço essas contas.

Pesq – Mas o que você fez aí, que ficou parecendo conta de área?

Marte – Eu fiz a operação só com os dois lados que apareciam; só que em vez de multiplicar, eu somei.

Pesq – Como é que você descobriu que não estava certo?

Marte – A Ortência falou.

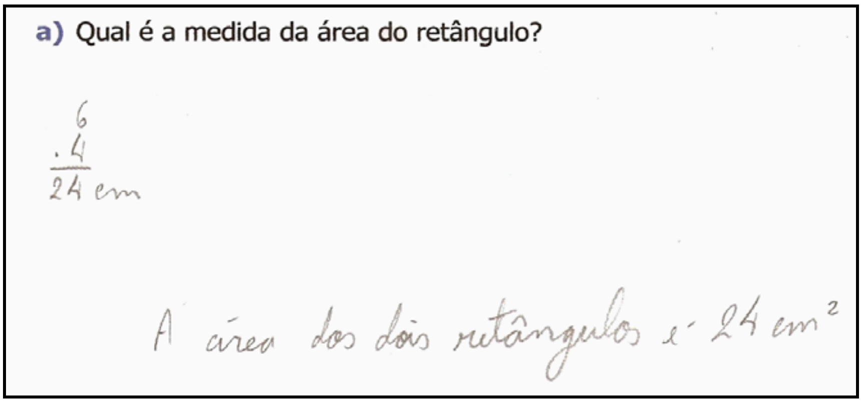
Ortência – Mas muita gente erra isso. Eu acho que, por exemplo, geralmente quando mostra uma figura, você põe (as medidas) só dos dois lados, e não dos quatro (apontando para a figura 1). Aí muita gente, na hora de fazer o... de medir o perímetro, não pensa que esse daqui tem medida e que esse daqui tem medida (apontando para os lados do retângulo sem medidas dadas). Ela vai no que tá escrito. “Ah, é quatro e seis, quatro mais seis, é isso aí”. Não é o caso dela (Marte), ela confundiu. Mas muita gente faz assim. Nem se toca, sei lá. Acha que é parecido, igual ela falou, parecido com área. “Área é esse vezes esse”. As pessoas decoram que área é um lado vezes o outro, e perímetro é um lado mais o outro.

Marte – Mas eu acho que, por exemplo, quando a gente tava aprendendo que acontece muito isso. Só que tudo na Matemática, se você praticar muito, você acaba... não decorando, mas...

Ortência – Entendendo, né?... Guardando.

> **Marte** – É, guardando. E essa coisa de área e perímetro, é porque ele dá ao mesmo tempo. O Professor sempre dá, assim, sobre área e perímetro, mais ou menos juntos. Aí você chega a confundir, mas com o tempo você vai acostumando, aí fica uma coisa normal.

Marte, como dissemos acima, parece operar com a ideia uma única grandeza, a área. Assim, embora calcule da maneira que podemos observar em suas fichas abaixo – talvez por influência de Ortência –, ela utiliza o mesmo modo para calcular a área e o perímetro, ou seja, tomando as medidas dos lados dados e operando-os, com a única diferença de trocar as operações (matemáticas), sendo ora a multiplicação, ora a adição. Vejamos, abaixo (Figura 15), como Marte calculou a medida da área dos retângulos:


a) Qual é a medida da área do retângulo?

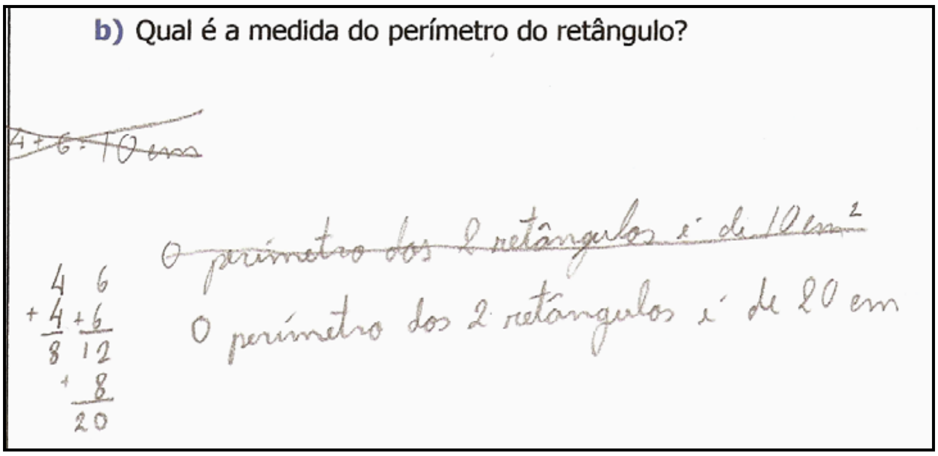
6
. 4
24 cm

A área dos dois retângulos é 24 cm²

Figura 15 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 1 – Item a*

Observemos que, nesta questão, a aluna calcula em centímetros e dá a respostas em centímetros quadrados.

Na figura a seguir, observe como Marte calculou, de início, a medida do perímetro (que riscou com um xis) e calculou novamente, depois da *correção* de Ortência:


b) Qual é a medida do perímetro do retângulo?

~~4 + 6 = 10 cm~~

~~O perímetro dos 2 retângulos é de 10 cm²~~

O perímetro dos 2 retângulos é de 20 cm

4 + 4 = 8
6 + 6 = 12
12 + 8 = 20

Figura 16 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 1 – Item b*

Marte parece estar convencida de que calculou erroneamente o perímetro das figuras, tanto que riscou o seu cálculo inicial e fez outros cálculos, encontrando o perímetro correto. Esta ação de Marte, em corrigir seus cálculos, não revela necessariamente uma mudança no modo como ela produz significados para os termos área e perímetro, confundindo-os. Esta mudança, aliás, parece não ocorrer durante todo o período de aplicação da sequência de tarefas, na pesquisa de campo. Acerca deste fato, discutiremos nas análises seguintes.

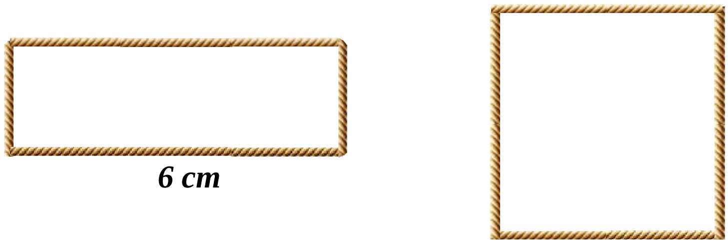
5.3.2 – A Produção de Significados para a Tarefa 2

Passaremos a discutir a produção de significados para a tarefa 2, dada na figura a seguir.

Tarefa 2

Você possui uma corda com a medida de 16 centímetros, quando está totalmente esticada, como mostra a figura abaixo.

Com esta corda, você construiu um retângulo e depois um quadrado, conforme o que podemos observar nas seguintes figuras. Veja.



a) Estas duas figuras têm a mesma área? Quais são suas áreas?

b) Estas duas figuras têm o mesmo perímetro? Quais são seus perímetros?

Figura 17 – *Tarefa 2 da pesquisa de campo*

As fichas desta tarefa são entregues às alunas, que se põem a ler de imediato. O pesquisador permanece na sala de entrevistas. Trinta segundos após a entrega, a primeira enunciação é feita, surgindo espontaneamente[63] um debate entre os sujeitos, acerca da importância do Desenho Geométrico para a aprendizagem de Geometria. Vejamos:

---

[63] Com o termo *espontaneamente*, queremos dizer sem a intervenção do pesquisador, a não ser através do enunciado da tarefa.

> **Marte** – Sabe o que isso daqui tá parecendo?
>
> **Ortência** – O quê?
>
> **Marte** – Aquela atividade de Desenho Geométrico que ele te dava a quantidade da área e você tinha que construir três tipos de triângulo, a partir daquela área.
>
> **Ortência** – Mas aquilo lá é legal, eu gosto.
>
> **Marte** – Mas aquilo é complicado pra caramba!
>
> **Ortência** – Mas o Desenho Geométrico facilita muito as coisas, eu acho. Eu prefiro resolver as coisas do jeito que o professor de Desenho Geométrico resolve, do que como o professor de Matemática resolve. Porque pelo Desenho Geométrico, como o próprio nome da matéria já diz, resolve pelo desenho; pela Matemática, só por cálculo, o que às vezes é bem complicado.
>
> **Marte** – Mas até agora, assim, eu não achei muita coisa que o Desenho Geométrico facilitou, nas coisas que a gente tá aprendendo agora, nesse ano.
>
> **Ortência** – Não?
>
> **Marte** – Não.
>
> **Ortência** – Não?!... Área, triângulo retângulo, essas coisas,... você acha que não ajudou? Nossa, pra mim ajudou pra caramba!
>
> **Marte** – Ah, não, conhecimento. Mas na hora de fazer o cálculo, tipo...
>
> **Ortência** – Ajuda, eu acho que ajuda pra caramba. Na hora de Pitágoras, essas coisas, ajudou, eu acho que ajudou.
>
> **Marte** – Ah, não, não. É, ajudou. É também porque aprofunda mais no Desenho Geométrico.
>
> **Ortência** – Sim. Mais do que na Matemática. Porque se não... Daqui a pouco a gente acaba entrando na Geometria, se a gente continuar indo na Matemática.

Concordamos com Ortência quando defende a posição de que a aulas de Desenho Geométrico podem ser de grande valor para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, acerca de temas geométricos, o que já foi também defendido por alguns pesquisadores, como Zuin (2002), Fernandes e Neves (2009) e Kopke (2006). Não obstante, concordamos igualmente com Marte, quando defende o oposto. Pois esta aluna parece aceitar a Matemática (e a Geometria, portanto) como uma disciplina de cálculos, de operações numéricas e algébricas talvez, quando afirma "Mas na hora de fazer o cálculo...", ao que acrescentaríamos, observando as expressões de Marte: "...o Desenho Geométrico não me ajudaria, pois nesta hora, só a Matemática resolve". Ou seja, para Marte, *coisas* do Desenho Geométrico não são as mesmas *coisas* da Matemática. E, para nós, fazer tal afirmação tem o sentido de dizer que o Desenho (disciplina escolar) possibilita modos de produzir significado distintos daqueles que a Matemática (escolar) permite, o que pode estar um função do modo como os professores abordam tal ou tal assunto em suas aulas.

Voltemos à tarefa. Os sujeitos de pesquisa lêem a tarefa por quase dois minutos e discutem o que estão pensando, como vemos a seguir:

> **Marte** – Se eu não tivesse parado pra pensar, eu já ia colocar sim.
>
> **Ortência** – (Risada). Os dois teriam a mesma área?
>
> **Marte** – Hã hã.
>
> **Ortência** – Não, só de bater o olho dá pra ver que não, né?
>
> **Marte** – Até que não, porque se você for pela ideia que foram feitos pela mesma corda, confunde, se você não olhar...
>
> **Ortência** – Sim, é, tem isso. Ah, é mesmo. É a mesma corda.
>
> **Marte** – Como foram feitos com a mesma corda...
>
> **Ortência** – É bem provável que tenham a mesma área.
>
> **Marte** – Mas é o perímetro.
>
> **Ortência** – É, o perímetro provavelmente vai ser o mesmo.
>
> **Marte** – É.
>
> **Ortência** – Não, provavelmente não. O perímetro obrigatoriamente vai ser o mesmo.
>
> **Marte** e **Ortência** – A área não.

A confusão entre área perímetro aparece novamente na enunciação inicial de Marte, quando o fato de ela considerar que as figuras foram feitas com a mesma corda a levou a associar, imediatamente, que as figuras teriam a mesma área. Mas, observamos ainda, na interação com Ortência, aquela dificuldade parece ter sido superada, ao menos para esta atividade de Marte (comparar as áreas e os perímetros das figuras). E ainda observamos que Ortência parece continuar operando com a noção multiplicativa, segundo sua fala:

> **Ortência** – Eu nem cheguei a pensar nisso que você falou, porque antes de pensar que eram feitos com a mesma corda, eu pensei: dois vezes seis, doze; quatro vezes quatro, dezesseis.

Esta fala de Ortência é coerente com seus registros gráficos, como podemos observar na Figura 18, a seguir.

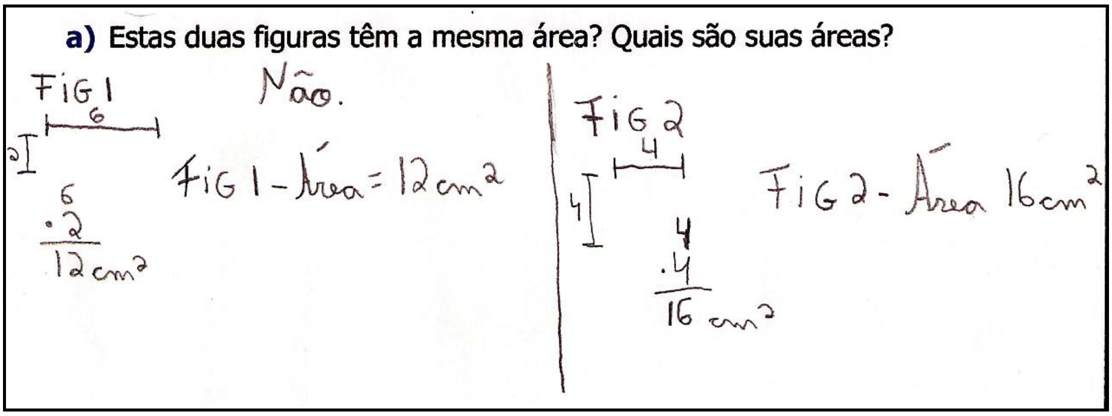


Figura 18 – *Registro escrito de Ortência – Tarefa 2 – Item a*

Quando as alunas terminaram a tarefa, o pesquisador faz algumas perguntas para identificar outros elementos das suas (das alunas) *produções*:

> **Marte** – Pronto.
>
> **Ortência** – Sim. Uma atividade ligeiramente fácil.
>
> **Pesq** – Então, alguém quer explicar o que fez nesta tarefa?
>
> **Ortência** – Acho que tá bem explicado, né? No primeiro, a gente mediu a área. Um lado vezes o outro da figura, doze centímetros. A gente ficou pensando que o tamanho da corda é o mesmo e a área é diferente.
>
> **Marte** – É.
>
> **Ortência** – Mas a área não tem a ver com isso, o que tem a ver é o perímetro. Mas se for para pensar, é bem parecido, sei lá. É estranho pensar que a corda é do mesmo tamanho e a área é diferente.
>
> **Marte** – A Ortência não tinha pensado nisso, não. Ela tinha ido mais pelo coisa do: tenho dois centímetros e seis centímetros, vou multiplicar os dois, é diferente.
>
> **Ortência** – É, eu nem pensei que pudesse ser igual.

Vemos que Ortência, de início, calculou as áreas para compará-las. Apenas depois de sua interação com Marte, passou a pensar na relação (não-linear) da área com o perímetro, o que lhe causou estranhamento, como podemos ver através de sua expressão: “É estranho pensar que a corda é do mesmo tamanho e a área é diferente”. Esta relação de não-linearidade entre perímetro e área, como também as dificuldades que surgem no seu aprendizado e as dificuldades de seu ensino, são discutidos, por exemplo, por Chamorro (1997), D’Amore e Fandiño Pinilla (2006) e Silva (2009), como vimos na revisão da literatura.

Atentemos, agora, para a produção de significados de Marte:

Marte – E eu não tinha prestado atenção nos centímetros. Eu tinha ido mais pela... É dezesseis centímetros, é com a mesma corda...

Ortência – Olha só como é que a gente pensa diferente.

Marte – É, completamente diferente.

Pesq – Desculpa, mas como é mesmo que você pensou, Marte?

Marte – A primeira coisa, eu pensei: é uma corda, a mesma corda pros dois; então se é a mesma corda pros dois, daí vai ser a mesma área.

Ortência – Tudo vai ser igual.

Marte – É, tudo vai ser igual. Mas não é, porque... só se for uma forma equilátera, que vai ser da mesma área, porque é multiplicação, e não soma. Aí já mudou completamente o coisa.

Ortência – E eu nem tinha pensado nisso. Depois, eu até concordei, porque ela falou, mas isso nem tinha passado pela minha cabeça. Eu sabia que era a mesma corda, mas isso não foi a primeira coisa que eu raciocinei. Eu raciocinei só nos lados, eu fui direto na conta. Eu sabia que não era a mesma área, só o mesmo perímetro, porque... Eu fui direto: dois vezes seis, dozes; quatro vezes quatro, dezesseis. Nem cheguei a pensar em ser a mesma coisa. Só na hora do perímetro que eu pensei isso, porque ela tinha falado.

Marte – Aí, no perímetro tem que ser.

Ortência – Porque é a mesma corda, ela tem o mesmo tamanho.

Marte – São os mesmos números e não pode ser diferente.

Observemos que as justificações de Marte, para suas afirmações sobre áreas iguais, envolvem ainda outros elementos, como figuras de “formas equiláteras” e a associação entre estas figuras e a possibilidade de terem a mesma área. Isto nos remete à noção do que chamaríamos de um campo semântico algébrico-geométrico, no qual opera agora Marte (diferente de seu campo semântico geométrico, na tarefa 1) e que tem como elemento a *estipulação local* de que a área de um polígono regular se calcula pela segunda potência de um de seus lados, como a fórmula da área do quadrado, apresentada nos mesmos termos por Neto (1982) e Lima (1991). Isto é o que pudemos entender, inicialmente, a partir da afirmação de Marte: “só se for uma forma equilátera, que vai ser da mesma área, porque é multiplicação”.

Mas o sentido que Marte produz para “formas equiláteras” é o de *figuras geométricas que têm a mesma área e todos os lados iguais*, o que mostra que estávamos errados quanto o que afirmamos no parágrafo anterior. A confusão entre área e perímetro está novamente presente. Vejamos as falas de Marte, no diálogo a seguir, que nos revelaram esse significado para “formas equiláteras”:

Pesq – Pra gente continuar a pensar sobre estas coisas, eu quero fazer mais uma pergunta. Vocês acham que existiriam figuras geométricas, como estas aí, com formatos diferentes e com áreas iguais, embora formadas pela mesma corda?

Marte – É... formas eqüiláteras.

O pesquisador quer saber mais e questiona ainda uma vez:

Pesq – Você pode dar um exemplo?

Marte – O triângulo equilátero.

Ortência – Mas você acha que, por exemplo, o triângulo equilátero e o quadrado teriam a mesma área?

Marte – O quadrado teria.

Ortência – Teria? Mas, olha só...

Marte – Mas se fosse com a mesma corda.

Ortência – Sim. Então, faz isso, por exemplo.

Marte – (Desenha na folha). Oh, um triângulo com quatro centímetros nos três lados... Ah, não...

Ortência – Não seria. Foi isso que eu pensei. Como é que você colocaria quatro, quatro, quatro? Só dá se for um quadrado. Eu acho que em momento algum as figuras teriam a mesma área. Só o mesmo perímetro. Pelo menos eu não consigo pensar em nenhuma situação.

Marte – Mas tem que ter.

Ortência – Não, não tem que ter.

Marte – Não tem outra forma de quatro lados iguais, não?

Ortência – Não, só o quadrado. Isso que eu ia falar. Não tem como, senão a figura seria igual. Cada figura tem a sua área. Se tiver meio centímetro de diferença na medida de um dos lados, a área já vai ser diferente.

Marte – Então não.

Marte parece estar convencida, a partir das intervenções de Ortência, de que não faz sentido afirmar que apenas figuras regulares (embora distintas) podem possuir a mesma área. No entanto, isto não nos permite pensar que, a partir de então, ela passou a produzir outros significados para área, para perímetro e para “formas equiláteras”, ou mesmo que ele tenha vencido a dificuldade de confundir área com perímetro. Mudanças assim não são sempre imediatas. É o que compreendemos a partir das conclusões de Vygotsky (1994), quando afirma:

> Qualquer processo psicológico, seja o desenvolvimento do pensamento ou do comportamento voluntário, é um processo que sofre mudanças a olhos vistos. O desenvolvimento em questão pode limitar-se a poucos segundos

> somente, ou mesmo frações de segundos (como no caso da percepção normal). Pode também (como no caso dos processos mentais complexos) durar muitos dias ou mesmo semanas. Sob certas condições, torna-se possível seguir esse desenvolvimento. (VYGOTSKY, 1984, p. 81)

Em seus registros (fichas da tarefa 2), Marte calcula as áreas de modo análogo ao de Ortência – talvez tenha copiado desta, após observar sua resolução – e não calcula o perímetro, apenas escrevendo: "*Sim.* $\boxed{a}$ *e* $\boxed{b}$ *= 16 cm*"[64].

Finalizando as discussões sobre a tarefa 2, seguem as falas:

> **Pesq** – Tá certo. Mas vocês conseguiram pensar em duas figuras diferentes que têm mesma área e mesmo perímetro?
>
> **Ortência** – Talvez só perímetro, talvez só área...
>
> **Marte** – É possível.
>
> **Ortência** – É possível duas figuras terem perímetros iguais e áreas diferentes, e áreas iguais e perímetros diferentes. Agora, ter perímetro e área iguais, só se for a mesma figura.
>
> **Marte** – Nunca tinha pensado nisso.
>
> **Ortência** – Eu também não.
>
> **Marte** – Isso é coisa do Desenho Geométrico.
>
> **Ortência** – É. E eu nunca tinha parado pra pensar. Isso é bem interessante.

Entendemos, então, que esta tarefa fez as alunas pensarem em relações entre área e perímetro, às quais, segundo disseram elas mesmas, não foram apresentadas durante toda a sua escolaridade, fato que é muito comum, segundo informam as pesquisas de Owens e Outhred (2006) e Carlin (2009). E trabalhos como o de Clements e Stefhan (2004) nos permitem entender a complexidade envolvida na aprendizagem de tais relações e, portanto, o quão complexo é também o esforço de criar meios que promovam tal aprendizagem, ou seja, *quais tarefas contribuem para que os alunos aprendam, por exemplo, a noção de área, a estrutura de malha e as noções que servem de base para medir área.*[65]

Mas o nosso foco aqui está no levantamento das dificuldades que os sujeitos de pesquisa apresentam, acerca das noções de área e perímetro. E é com este foco que daremos continuidade a esta nossa análise, utilizando o Modelo dos Campos Semânticos com instrumento de leitura dos significados produzidos pelos sujeitos.

---

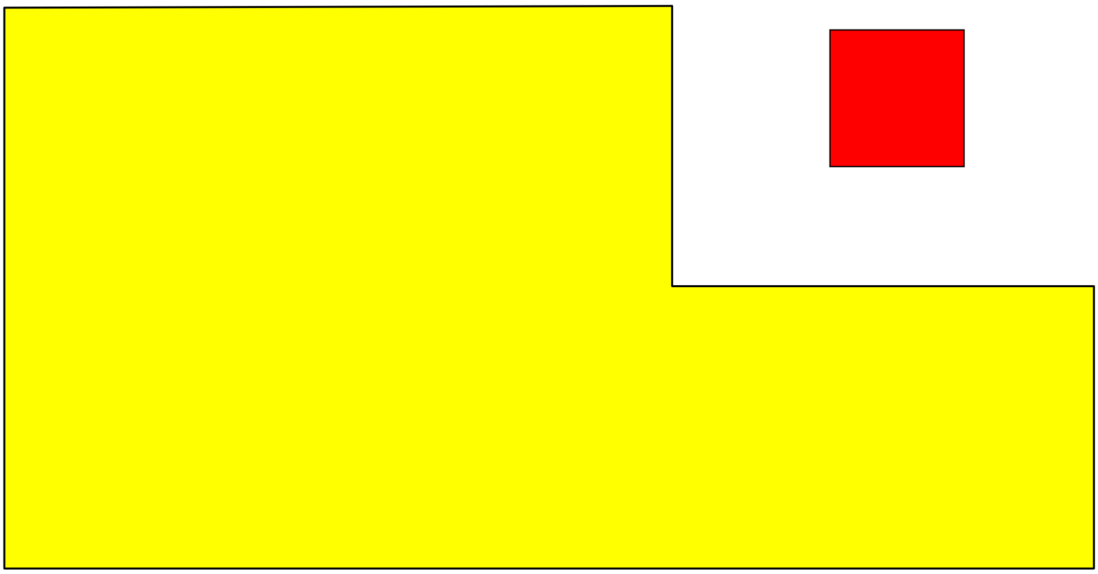
[64] Marte havia, no início da tarefa, nomeado as figuras de ***a*** e ***b***.
[65] Esta discussão foi feita no capítulo 2 desta dissertação.

5.3.3 – A Produção de Significados para a Tarefa 3

Analisaremos, a seguir, a produção de significados dos sujeitos de pesquisa para a tarefa 3. Consideremos a tarefa:

Tarefa 3

Da forma que você achar melhor, utilize o quadrado vermelho para responder à pergunta abaixo, envolvendo a figura a seguir.



Quantos quadrados vermelhos iguais a este cabem na figura acima?

Figura 4 - *Tarefa 3 da pesquisa de campo*

Entregues as fichas às alunas, elas passam a ler e, imediatamente, a comentar:

Marte – Você só pode tá de brincadeira! (Dirigindo-se ao Pesquisador).

Pesq – Por quê?

Ortência – Porque você deu três quadradinhos assim...

Marte – Olha o tamanho deles!

Ortência – Muito pequenos... Não, mas tá fácil, tá fácil.

Marte – Tem problema se a minha conta der um ou dois milímetros a menos?

Pesq – Bem esta é uma questão que vocês vão ter que decidir. Você tem até a régua disponível, mas vocês têm que ver se o problema tá pedindo precisão ou não. Fiquem à vontade para decidir.

Nesse momento, Ortência já utilizava a régua apenas para desenhar, enquanto Marte a usa também para medir. Esta, então, planeja o que fará:

> **Marte** – Então primeiro eu vou fazer exatamente, depois eu vou fazer arredondado.

Vejamos que Marte distingue dois modos de operar, na atividade da qual parece estar imbuída: identificar quantas unidades do quadradinho vermelho cabem na figura amarela, e calcular a área desta figura. De fato, ela operou com estes dois modos. Primeiro, quando sobrepõe os quadrados vermelhos à figura da tarefa, como vimos no vídeo e também nos pontos marcados na sobre a figura[66] dada na Tarefa 3 (Figura 20), que são vértices dos quadradinhos. O termo "fazer exatamente", utilizado por Marte, parece significar "quantos quadrados inteiros (e não suas frações) cabem na figura". É o que depreendemos, observando atenta e repetidamente suas ações enunciativas.

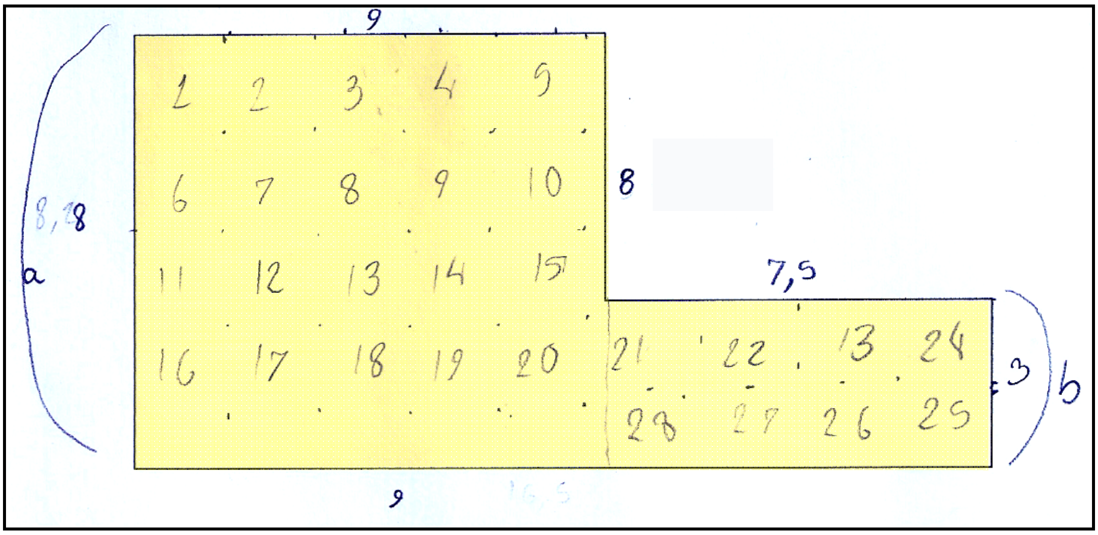


Figura 20 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 3 – Desenho*

Na figura a seguir, podemos observar a ação de Marte, ao calcular a área da figura da tarefa 3, utilizando a medida do lado do quadrado, a qual obteve com ajuda de uma régua. A aluna divide a figura em duas outras, que chamou de *a* e *b*. Depois riscou com um xis os seus cálculos. Aí está a segunda ação planejada por Marte, a de "fazer arredondando". Isto tem, para ela, o significado de *calcular quantos quadrados e suas frações cabem dentro da figura*.

[66] No momento em que marcou os quadradinhos na figura da tarefa, Marte ainda não marcava as medidas que aparecem na figura que apresentamos. Esta ação se deu em momento posterior, quando a aluna mede o lado do quadradinho e utiliza esta medida como padrão para medir os lados da figura da tarefa.

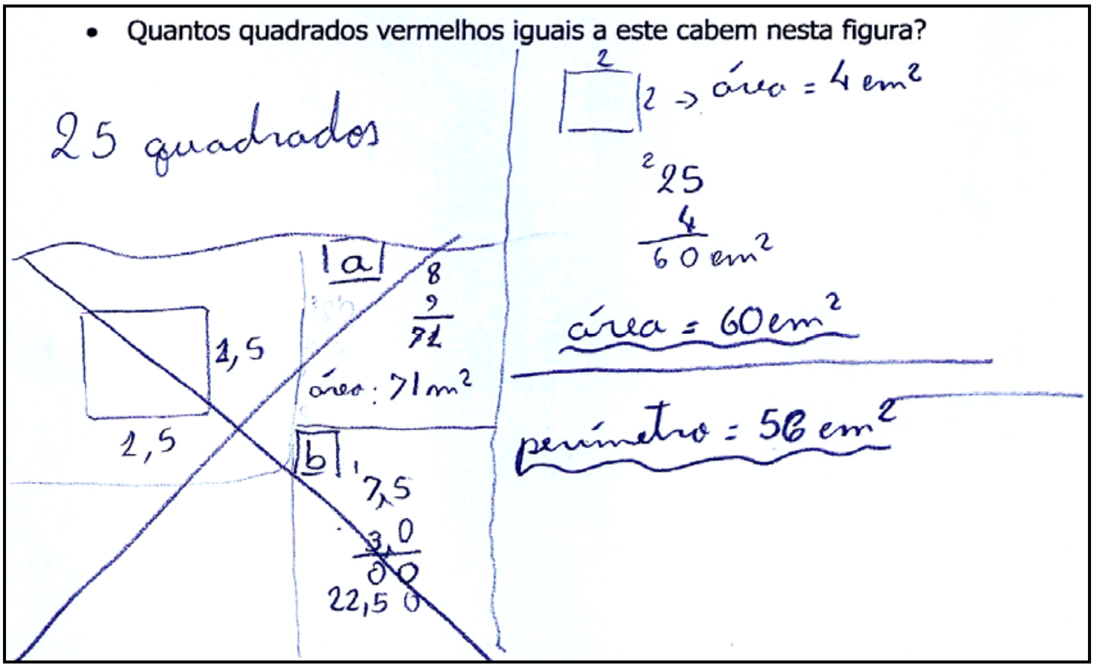


Figura 21 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 3 – Anotações e Cálculos*

Em seguida, as alunas ironizam as dificuldades que o quadrado vermelho lhes impõe, ao ser usado como instrumento de medida. Vejamos:

Ortência – Que quadradinho bom de segurar, né? Grande pra caramba! (Com ironia).

Marte – Coisa que eu amo nessa vida é esse quadrado vermelho. (Com ironia)

Mas elas prosseguem e desenham o contorno do quadrado múltiplas vezes dentro da figura dada. E a noção de calcular "exatamente" a área é novamente discutida por Marte, corroborando o significado que identificamos acima:

Marte – Ah, agora eu sei! Não falou que precisa caber o quadrado exatamente. "Quantos quadrados cabem". Se não cabe, não tem problema. Entendeu?

Ortência – Eu vou fingir que não ouvi essa.

Marte – Eu tô falando sério. Porque se sobrar espaço na figura, não tem problema, porque não tá pedindo pra caber, tipo, tantos quadrados...

Pesq – Você quer dizer que o problema aí é quantos quadrados inteiros cabem na figura?

Marte – É isso aí.

Os sujeitos continuam medindo, desenhando e fazendo contas. Em certo momento, a confusão entre área e perímetro vem novamente à tona:

Marte – Posso te fazer uma pergunta? (Se dirigindo a Ortência).

Ortência – Tá, só se eu puder te fazer uma também?

Marte – Aqui... Primeiro eu, tá? Quando eu quero saber quantas coisas cabem dentro de uma outra coisa, eu tenho que saber a coisa dessa coisa em área ou perímetro? (Formando um quadrado com as mãos).

Ortência – Eu... vou... me matar. Eu acabei de pensar em um outro raciocínio, muito mais fácil!

Pesq – Você pode repetir a pergunta, Marte?

Ortência – Ela quer saber, por exemplo...

Marte – Ó, eu tenho uma coisa (mostra o quadradinho vermelho) e tenho essa outra coisa (circula com o dedo a figura da tarefa), a figura e o quadrado. Eu quero saber quantos quadrados cabem dentro da figura. E aí, pra saber quantos quadrados cabem dentro da figura, eu tenho que saber a área ou o perímetro da figura? A área, né?

Ortência – Isso que você falou me fez pensar num outro raciocínio, muito mais fácil.

Pesq – Você quer responder a ela, Ortência?

Ortência – Pode? Sei lá...

Marte e **Pesq** – Pode.

Ortência – Em área.

Marte – Área? Obrigada.

Ortência confirmou a *suspeita* de Marte, mas não deu justificativas para sua resposta. Mesmo assim, Marte aceita a resposta sem questionar, talvez porque haja o reconhecimento de uma suposta superioridade de Ortência em relação a Marte, quando o assunto é Matemática. Isto nós observamos em vários momentos da pesquisa, como no trecho a seguir, no qual o pesquisador faz uma intervenção, oferecendo um novo elemento aos sujeitos e acrescentando um novo (e não planejado) item à tarefa 3.

Ortência – Eu quero só ver se o outro raciocínio que eu pensei vai dar certo também.

(Ortência mede o lado do quadradinho com a régua. Ambas param de escrever e parecem conferir seus resultados).

Pesq – Eu vou aproveitar o que a Ortência tá fazendo, para levantar uma questão extra, que não está escrita. A questão é esta: vamos considerar que o lado destes quadradinhos vermelhos mede dois centímetros...

Marte – O meu deu um e meio.

Pesq – Tudo bem. O que eu disse é uma hipótese, eu tô colocando um novo dado. Se o lado do quadradinho mede dois centímetros, qual é o perímetro e qual é a área da figura amarela? E quero que vocês, agora, calculem esta área e este perímetro.

(O Pesquisador sai da sala).

Marte – Ai, eu sou muito burra em Matemática!

Ortência – Eu também não sou muito boa em Matemática.

Marte – A questão não é ser boa, é ser burra em Matemática.

(Ambas escrevendo, por três minutos, sem falas. O Pesquisador retorna à sala.).

Ortência – Professor, o lado é dois centímetros?

Pesq – Considere isto, dois centímetros de lado.

Marte – Eu acho que eu vou ser psicóloga. Será que psicologia tem Matemática?

Para resolver a nova questão proposta, Ortência permanece com intenção de usar a régua e as medidas com ela encontradas, não aceitando de imediato o novo dado, a medida do lado do quadrado. Observemos:

Ortência – Professor, eu tenho ligeiros problemas com esse problema que você passou.

Pesq – Sim.

Ortência – Dois centímetros. Se eu vou fazer pelo que eu fiz, não vai dar certo, porque o quadradinho não tem dois centímetros exatos. Vai sobrar bastante.

Pesq – Onde vai sobrar bastante?

Ortência – (Mostrando a figura e a medida de um de seus lados). Olha só, aqui tem isso de medida. Não dá.

Pesq – Ah, então você tá medindo os lados com a régua?

Ortência – Sim.

Pesq – Que tal você usar os próprios quadradinhos como régua, já que você sabe que seu lado mede dois centímetros?

Ortência – Ah, entendi.

Então Ortência faz o que o pesquisador pediu, finalizando a tarefa com o uso do quadradinho como instrumento de medida, e compara o seu resultado com o de Marte:

Ortência – Professor, eu não vou colocar o que eu fiz no papel.

Pesq – Tudo bem, faz de cabeça. Se você puder falar o que fez...

Ortência – É porque tá pedindo o perímetro. E vou fazer o perímetro igual ela fez, porque eu já tinha pensado. É... O lado do quadradinho é dois. E eu não sei como fazer uma conta pra medir só os lados que aparecem, então eu vou contar, assim... (Mostra com o lápis os lados dos quadradinhos que formam os lados da figura, contando de dois em dois, até cinquenta e seis). Olha, deu o mesmo que o seu!

Marte – Deu?

Ortência – Deu. Cinquenta e seis.

Ao falar “os lados que aparecem”, Ortência está se referindo aos lados dos quadrados (da malha que desenhou) adjacentes aos lados da figura da tarefa. Pois a videografia, em outros momentos, permite-nos concluir isto. Observemos, ainda, a parte da ficha de Ortência (Figura 22), na qual ela fez o quadriculado da figura, depois de medir o lado do quadrado e obter *1,5 cm*:

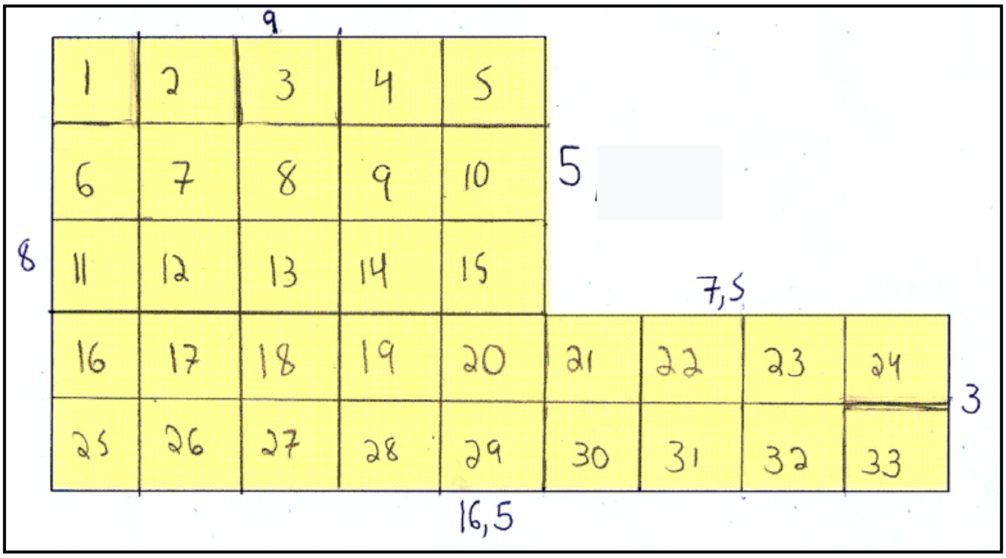
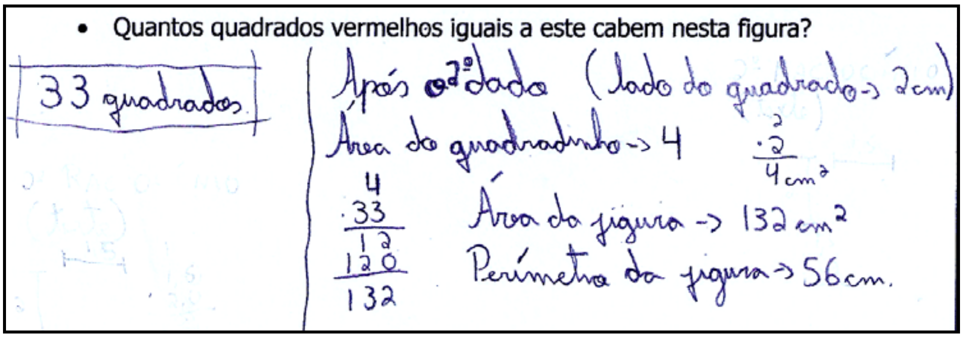


Figura 22 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 3 - Desenho*

Não pudemos identificar qual foi a mudança de “raciocínio” de Ortência, e talvez o modo com que fizemos as intervenções tenha contribuído para isto. Mas observamos que esta aluna operou com a ideia de pavimentação, sobrepondo os quadrados à figura amarela, deixando-os justapostos e sem sobreposição entre eles, e contando-os um a um, razão porque optou por numerá-los (ver Figura 22). Na Figura 23 (abaixo), a outra parte da ficha da aluna exibe a resposta à questão inicial (escrita) e os cálculos que fez para a questão final (falada), multiplicado a medida da área de um quadrado vermelho pelo número de quadrados que formam a figura:



• Quantos quadrados vermelhos iguais a este cabem nesta figura?

33 quadrados

Após o 2º dado (lado do quadrado -> 2cm)

Área do quadradinho -> 4

2
·2
4cm²

4
·33
12
120
132

Área da figura -> 132 cm²

Perímetro da figura -> 56cm.

Figura 23 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 3 – Anotações e Cálculos*

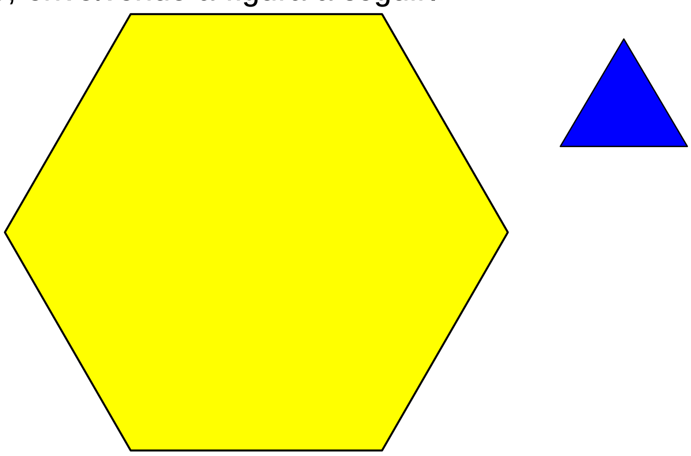
Ressaltamos, ainda, que esta tarefa atingiu alguns objetivos para os quais foi elaborada e selecionada para a pesquisa de campo. Sintetizamos a discussão que empreendemos na análise da tarefa 3, em três elementos por nós observados: *i)* a confusão entre perímetro e área foi explicitada, ao menos pelas enunciações de Marte, o que foi percebido até mesmo na utilização de centímetros quadrados como unidade de medida de área e de perímetro (ver Figura 23); *ii)* a dificuldade de medir o perímetro através de uma unidade de área (neste caso, o quadrado vermelho), dificuldade esta observada através da análise da produção de significados de Ortência; *iii)* a insistência em utilizar a régua para obter os lados e utilizar a noção multiplicativa para obter área, embora tenha sido dado outro instrumento de medida e ainda solicitada, no enunciado da tarefa, a utilização de tal instrumento (o quadradinho).

5.3.4 – A Produção de Significados para a Tarefa 4

Reapresentamos, agora, a tarefa 4, em sua formatação e suas dimensões originais. De modo análogo ao que procedemos na tarefa 3, um triângulo equilátero azul (ver figura abaixo) foi apresentado junto à ficha, como um recorte em cartolina, de modo que as alunas pudessem sobrepô-lo à figura da tarefa, e ainda outros três triângulos, idênticos ao primeiro, além de réguas e esquadros, foram deixados à disposição dos sujeitos de pesquisa.

<u>Tarefa 4</u>

Da forma que você achar melhor, utilize o triângulo azul para responder à pergunta abaixo, envolvendo a figura a seguir.



Quantos triângulos azuis, como este, cabem na figura acima?

Figura 24 - *Tarefa 4 da pesquisa de campo*

Entregues as fichas aos sujeitos de pesquisa, eles passam a lê-las e a utilizar os triângulos como moldes, buscando preencher toda a figura da tarefa. Talvez por influência de toda a discussão desenvolvida na tarefa 3, as réguas foram deixadas de lado e as alunas se envolveram unicamente com a atividade de *montar* a figura com os triângulos dados, a princípio sem preocupação com medidas. O pesquisador orienta as alunas a fazer o que o enunciado pede e, como segunda parte de tarefa, encontrar a área e o perímetro da figura.

Através da transcrição a seguir, vejamos que Marte monta rapidamente a figura e totaliza o número de triângulos pedido, enquanto Ortência se preocupa com uma *precisão geométrica* (encaixe das peças triangulares sobre a figura, com melhor configuração estética), o que leva a aluna a desenhar e apagar, algumas vezes.

> **Ortência** – É, eu tô me preocupando em não ficar preocupada com a precisão. Só que eu acho que eu me despreocupei demais.
>
> **Marte** – Acabei.
>
> **Pesq** – Já?
>
> **Marte** – Sim.
>
> **Ortência** – Eu acho que isso aqui tá errado, mas... Olha que droga, eu sou muito perfeccionista. Eu vou apagar e fazer tudo de novo.
>
> **Pesq** – Vocês acham que se eu desse um número maior de triângulos, isto ia ajudar nesta tarefa?
>
> **Marte** – Claro, ajudaria muito.

Ortência utilizava apenas um triângulo azul como molde para dividir a figura em uma malha[67], neste caso uma malha triangular. Mas, pela segunda vez, apaga seus desenhos expressando impaciência. Então, o pesquisador sugere à aluna uma possível saída:

> **Pesq** – E que tal, Ortência, se você usar todos os três triângulos juntos aí, ao invés de um só, como você fez antes?
>
> **Ortência** – Acho uma boa ideia. Vou tentar assim.

A aluna, então, marca as formas de quatros triângulos (nomeados depois por ela de 1, 6, 7 e 8, como podemos ver na Figura 25) sobre a figura da tarefa, com os

[67] Esta ação é chamada, pelos Matemáticos, de *equidecomposição*, como vemos, por exemplo, em Neto (1982, p.123), quando cita o Teorema de Boliay-Gerwin.

moldes, *completando* um sexto da área da figura, e em seguida desenha livremente os demais triângulos (ou seja, sem usar os moldes), parecendo visualizar todos eles, antes de desenhá-los, como divisões da figura.

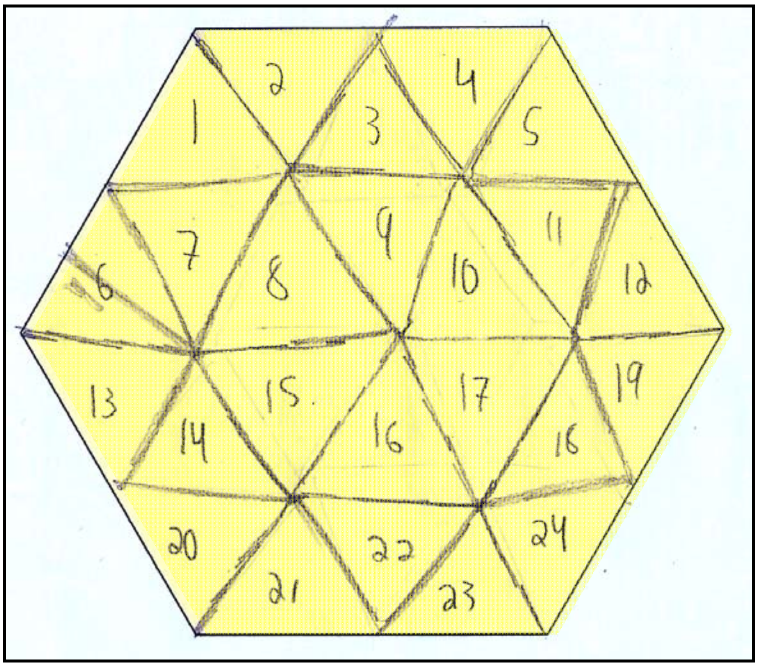


Figura 25 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 4 – Desenho*

Observemos, na Figura 25, que Ortência dividiu com uma altura (marcou com a letra *h*) o triângulo de número 6, para que, na última parte da tarefa, pudesse calcular a área de cada triângulo. E observemos que o desenho de Marte ficou um tanto parecido como o de Ortência (ver Figura 26).

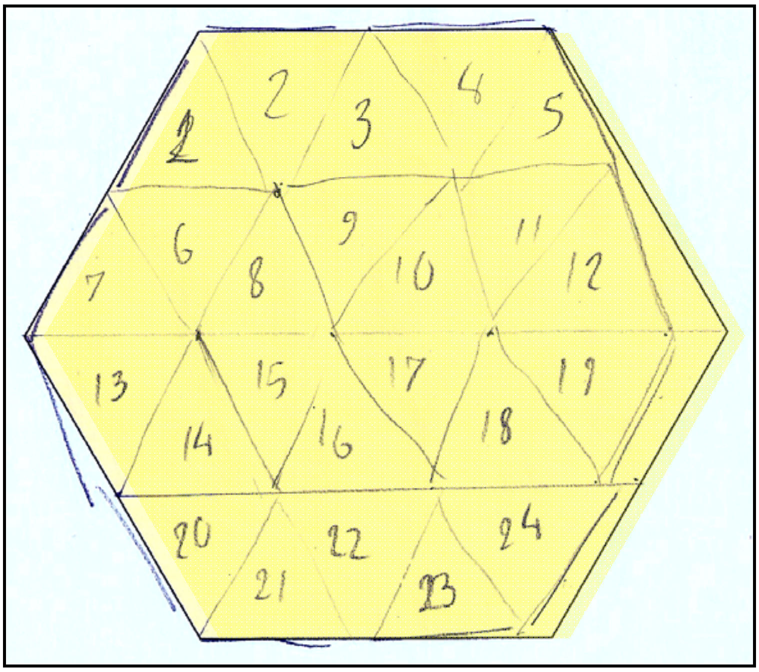


Figura 26 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 4 – Desenho*

De fato, os desenhos dos sujeitos não ficaram geometricamente “precisos”, mas Ortência terminou segura de que a resposta que encontrou estava correta (24 triângulos), embora diferente da resposta de Marte (23 triângulos, como vemos na Figura 28).

Quanto à segunda parte da tarefa, que foi “calcular a área e o perímetro da figura”, vejamos, na Figura 27, o que escreveu Ortência:

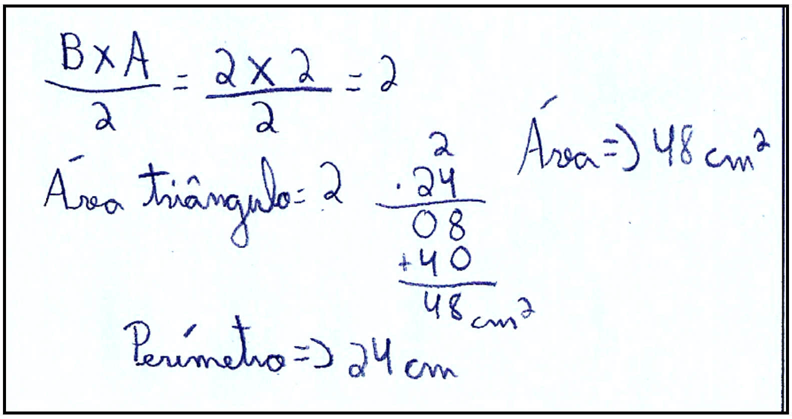


Figura 27 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 4 – Anotações e Cálculos*

Ortência se lembra da fórmula e escreveu-a, considerando a altura (h) como de mesma medida que o lado do triângulo, encontrando *2 cm*^{2} para a área de cada triângulo. Multiplicando esta área pelo número de triângulos que encontrou, ela calcula a área da figura. Para calcular o perímetro, a aluna conta, de um em um, os lados do triângulo que formam o contorno da figura (ação que não conseguiu levar a termo na tarefa 3, tendo quadrados como unidade de área) e encontra *24 cm*.

Já Marte operar inicialmente em uma outra direção, ou seja, com a noção de área de retângulo para calcular a área do triângulo, mas depois corrige seus cálculos, fazendo:

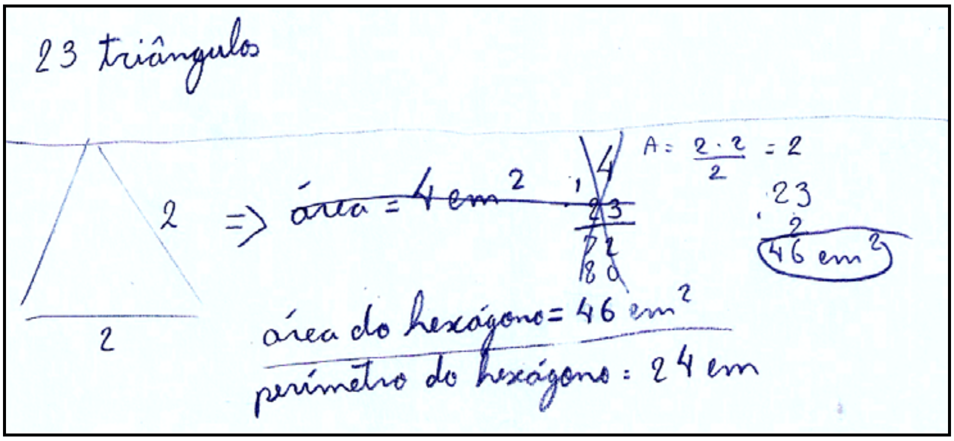


Figura 28 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 4 – Anotações e Cálculos*

Na videografia, observamos que Marte calcula o perímetro da mesma forma de Ortência. As enunciações de Marte mostram que ela, nesta tarefa, já não confundiu perímetro com área. Suspeitamos que as experiências das tarefas anteriores, nas quais a aluna interagiu com a colega e com o pesquisador, influenciaram essa possível mudança. Tal suspeita se baseia na afirmativa de Chappell e Thompson (1999), de que os estudantes precisam de tarefas nas quais possam analisar o perímetro e a área ao mesmo tempo para distinguirem claramente os dois objetos. E ao elaborar e aplicar as três primeiras tarefas, tínhamos isto como objetivo.

Passaremos, a seguir, a analisar os registros relativos à Tarefa 5.

5.3.5 – A Produção de Significados para a Tarefa 5

O enunciado da tarefa 5, que reapresentamos a seguir (Figura 29), foi elaborado com o objetivo de nos ajudar a levantar dificuldades relacionadas à mudança de grandeza (unidimensional para bidimensional, e vice-versa), quando os estudantes produzem significados para os objetos que são constituídos durante a sua ação de resolver a tarefa. Ao elaboramos esta tarefa, consideramos que, além da não dissociação entre área e perímetro e a confusão entre estas noções, outras dificuldades poderiam (e podem) existir e ser observadas por meio de uma *leitura* do processo de produção de significado de cada sujeito, segundo o MCS. Os elementos deste enunciado deveriam, ainda, permitir que os sujeitos de pesquisa falassem sobre noções algébricas ligadas ao cálculo da área e do perímetro de um retângulo.

Tarefa 5

Um *outdoor* de uma propaganda publicitária foi construído com a forma de um retângulo com área de 104 m^2, e com um dos lados sendo 5 metros maior do que o outro. A agência de publicidade responsável pela propaganda decidiu colocar um revestimento de alumínio para contornar todo *outdoor*, o que lhe dá um melhor acabamento. Imagine que você trabalhe nesta agência e precisa calcular quantos metros de alumínio serão necessários para cobrir toda a borda do *outdoor*. Então, faça agora este cálculo.

Figura 29 - *Tarefa 5 da pesquisa de campo*

Adotamos, para esta tarefa, os seguintes procedimentos: não demos nenhuma orientação aos sujeitos de pesquisa, apenas entregamos a eles as fichas da tarefa e disponibilizamos réguas, esquadros e lápis; ausentamo-nos da sala por todo o período (previsto) de aplicação da tarefa, sendo que, quando retornamos, os sujeitos já haviam terminado há cinco minutos, aproximadamente; não fizemos nenhuma pergunta ou intervenção depois deste tempo. O procedimento da ausência do pesquisador durante a tarefa teve por objetivo testar o quanto a interação entre os sujeitos, sem a intervenção do pesquisador, pode gerar novas produções de significados. Com efeito, na resolução da Tarefa 5, esta interação aconteceu mais intensamente do que nas demais tarefas da presente pesquisa, gerando uma diversidade de enunciações acerca dos temas da tarefa, mas também sobre diversos outros temas, como *contar nos dedos*, *decorar tabuada*, a relação do *contexto da tarefa* com a sua vida fora da escola, etc. Mas não traremos à análise os trechos da transcrição sobre estes temas, para não nos alongarmos em demasia e não nos desviarmos dos objetivos propostos.

O pesquisador entrega as fichas às alunas, que as lêem em silêncio por quatro minutos. Ao final deste período, o silêncio é interrompido pelo seguinte diálogo:

Ortência – Qual é mesmo a fórmula de Bhaskara?

Marte – Fórmula de Bhaskara?

Ortência – É, tem muito tempo que eu não uso.

Marte – Eu vou lembrar. (Olhando para o alto).

Ortência – Nossa, eu decorei! Eu não acredito que eu esqueci!

Marte – Será que agente pode olhar (no livro ou caderno).

Ortência – Ah, ele falou pra não preocupar. Calma...

(Ambas olhando para o alto, em silêncio).

Ortência – Ah, lembrei!

Marte – Duas vezes bê...

Ortência – Não. Já lembrei.

Marte – Vê se eu tô correta...

Ortência – Acho melhor a gente discutir no final.

Como podemos ver na ficha de registro de Ortência (Figura 30), ela equaciona o problema e chega a uma equação do segundo grau, razão porque cogita a necessidade de utilizar a fórmula de Bhaskara (ver trecho acima), e a utiliza.

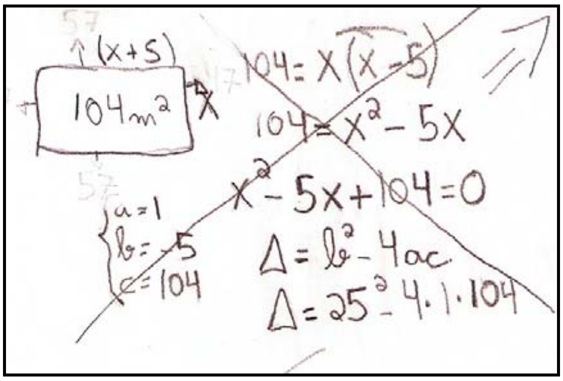


Figura 30 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 5 – Anotações e Cálculos*

Já ao analisarmos o fragmento da ficha de Marte abaixo (Figura 31), vemos que esta aluna encontra uma outra saída que, embora também algébrica, não utiliza a fórmula de Bhaskara. Neste fragmento, podemos identificar, ainda, a confusão entre área e perímetro, mas desta vez com uma característica diferente das ocasiões anteriores. Marte parte da noção de que a área de um retângulo é obtida pela operação entre duas medidas (os lados do retângulo), mas escolhe a operação de adição, ou invés da multiplicação. Na tarefa 1, a aluna calculou o perímetro da mesma maneira que calculou a área na tarefa 5.

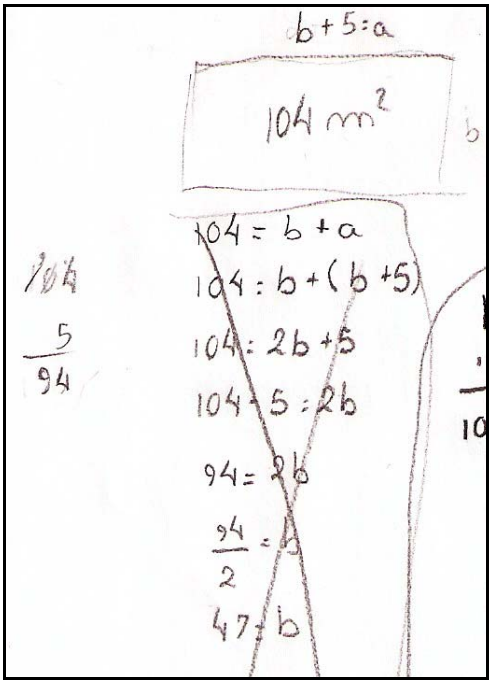


Figura 31 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 5 – Desenhos e Cálculos*

Marte parece não se importar com que grandeza está calculando, mas apenas com o resultado quantitativo do que se pede no enunciado. Isto é o que depreendemos de sua fala e seu diálogo com Ortência, em momentos distintos:

> **Marte** – Podia ser área... Não, podia ser perímetro, né?
>
> (...)
>
> **Marte** – Eu tenho uma pergunta. O alumínio cobriria tudo ou só as bordas?
>
> **Ortência** – Só as bordas. A gente tem que saber quais que são os lados pra saber as bordas.
>
> **Marte** – Ah, porque se não a gente ia falar que ia ser cento e quatro.
>
> **Ortência** – Não, é só a borda.

Voltemos a nossa atenção para a produção de significados de Ortência. Ela não consegue resolver a equação de segundo grau e atribui isto à maneira como pensou a partir do enunciado, relacionando as incógnitas que criou para as medidas dos lados do *outdoor* (ver Figura 32).

Embora para um matemático não haja diferenças entre uma e outra maneira de pensar (pois o fato de um lado ser maior que o outro, garante que este seja menor que aquele), para a aluna Ortência os significados de um e de outro modo são diferentes o suficiente para gerar interpretações algébricas igualmente diferentes, que por sua vez acabariam determinando resultados diversos para o problema apresentado. Vejamos o momento em que surgiu esta mudança de significados para Ortência, através de sua fala (nos seguintes trechos da transcrição da videografia) e em seus registros escritos, ou seja, em sua ficha relativa à Tarefa 5 (Figura 32):

> **Ortência** – Ah, por isso que a minha conta não tava dando certo. Eu li como um dos lados sendo cinco metros menor do que o outro.
>
> **Marte** – Ah, tá.
>
> **Ortência** – Aí deu completamente errado.
>
> (...)
>
> **Ortência** – Tô explicando o que eu errei: eu li o enunciado errado, li cinco metros menor.
>
> (...)
>
> **Ortência** – Agora muda tudo de novo. (Concentrada em sua resolução).

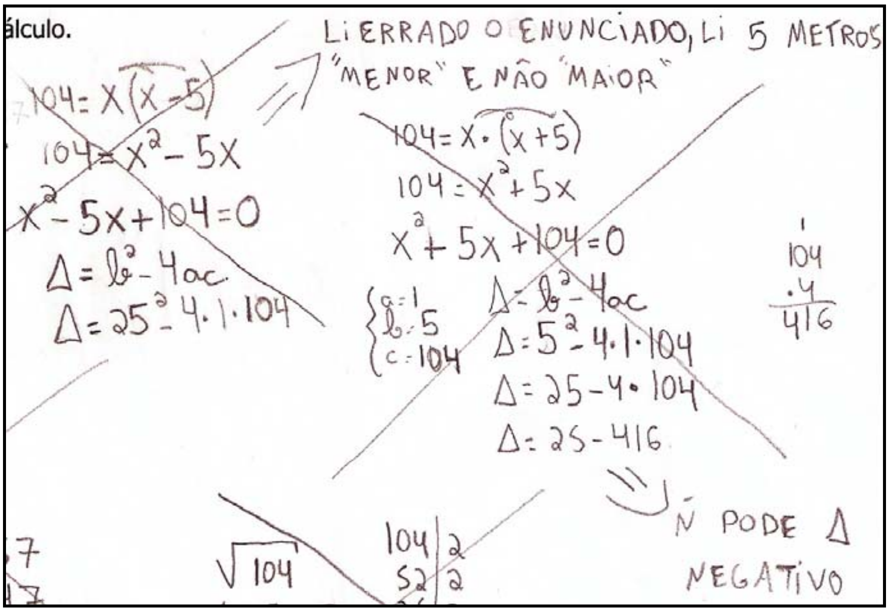


Figura 32 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 5 – Anotações e Cálculos 2*

Analisando esta Figura (32), vemos que, depois de fazer novos cálculos, Ortência percebe que seria novamente impossível resolver aquela equação, pois o *delta* resultava negativo. Vejamos também suas falas sobre isto, em distintos trechos da transcrição:

Ortência – Agora muda tudo de novo. (Concentrada em sua resolução).

Marte – Mais eu acho que não vai dar não. (Concentrada em sua resolução).

Ortência – Ouh, o meu vai continuar dando a mesma coisa.
(...)
Ortência – Vai continuar dando errado. Que droga! Acho que eu vou ter que mudar de raciocínio, este não tá dando certo, não.
(...)
Marte – Ah, mais aqui não é equação do segundo grau, então não precisa...

Ortência – Quem disse que não é? Você pode muito bem transformar ela numa equação do segundo grau.

Marte – Não, o meu não.

Ortência – A minha eu transformei. Só que delta tá dando negativo. E aí não tem como calcular. Ih!.. Tem alguma coisa errada, porque não pode tá dando negativo.

Em determinado momento da tarefa, Ortência deixa a tentativa de resolver o problema através de equações, e passa a testar valores para os lados da figura (*outdoor*), ainda considerando a diferença de medida entre seus lados. Observamos, ainda, na transcrição, que a aluna revela uma noção bastante comum quando se aprende Matemática na escola básica, que é a noção de que o *método de tentativa* *e erro* não é comumente aceito na escola; mas não discutiremos isso, na presente pesquisa. Ao testar alguns valores para os lados do *outdoor*, Ortência não fica convencida de que estes valores são os corretos, como podemos ver na Figura 33 e nos trechos da transcrição que seguem abaixo, os quais nos permitem, ainda, afirmar que suas noções de *dividir a área do retângulo* ou de *encontrar a sua raiz quadrada* podem ser estratégias para se encontrar os valores dos lados da figura.

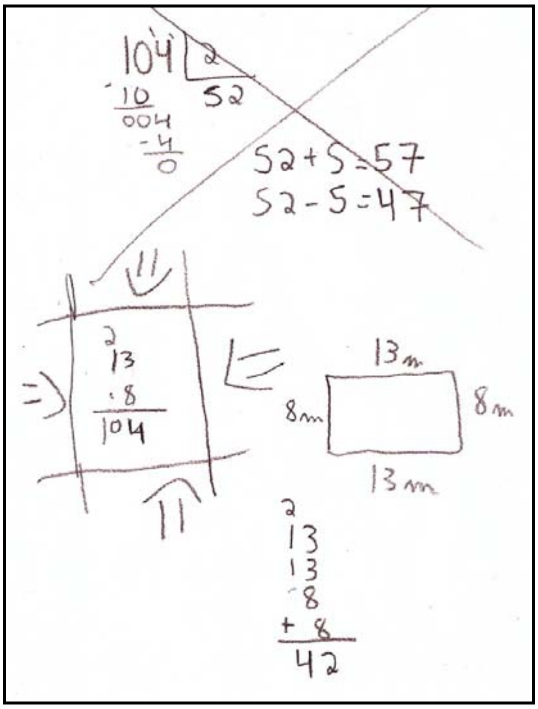


Figura 33 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 5 – Anotações e Cálculos 3*

Ortência – A gente quer que cento e quatro dividido por dois...

Marte – Eu sei! Aaah!... (Risadas)

Ortência – ...E cinquenta e dois vezes cinquenta e dois seja cento e quatro. Eu vou me matar com esses lápis.

Marte – Então essa é a raiz quadrada.

Ortência – Agora eu entendi porque a minha equação de segundo grau deu errada.

Marte – Por quê?

Ortência – Porque eu contei o cento e quatro como uma coisa qualquer. Só que é cento e quatro ao quadrado.

Marte – Ah, o meu também! Droga! (Gargalhadas). Se eu tivesse colocado o cento e quatro ao quadrado, teria dado certinho.

Ortência – Não, não teria, não.

Marte – Teria, sim. Não vem, não vem.

> **Ortência** – Teria não. Porque a gente não sabe fazer equação do terceiro grau. Quarto grau, no caso. Porque, olha só, o xis vai tá ao quadrado e o cento e quatro também vai tá ao quadrado. Aaah!...
>
> **Marte** – Não, mas a gente não tem o xis ao quadrado.
>
> **Ortência** – Mas a gente calcula.
>
> **Marte** – Não, mas olha só...
>
> **Ortência** – Não, eu vou resolver o meu xis. Eu sei porque que deu errado. Mentira, só vai dar mais errado ainda.
>
> **Marte** – A eu vou só fazer a raiz quadrada, fazer a mesma coisa que eu tinha feito antes e... Que aí vai dar zero, não vai?
>
> **Ortência** – Vai.
>
> (...)
>
> **Marte** – Mas então como é que a gente vai fazer.
>
> **Ortência** – Eu não sei ainda. Eu só sei que a gente tá errada.
>
> **Marte** – Nossa senhora, Deus me ajude nessa hora. (Tom irônico). E se a gente fizer assim... Eu vou tentar.
>
> **Ortência** – Ah, eu vou usar raciocínio, não vou usar conta, não. Porque se não eu desisto.
>
> **Marte** – Vamos lá fora, pedir ajuda de alguém? (Risadas).
>
> **Ortência** – Eu não preciso de ajuda, não.

Vejamos que Ortência diferencia "usar raciocínio" de "usar conta". Para ela, o termo "usar conta" parece ter o significado de usar fórmulas (decoradas) para resolver o problema apresentado, enquanto que o termo "usar raciocínio" significaria usar a estratégia de *tentativa e erro*. Isto nos faz pensar na conduta docente tradicional – e bastante comum – de apresentar fórmulas como $P = 2c + 2\ell$ ou $A = c \times \ell$, sem um trabalho anterior que possibilite aos alunos entender de que modo estas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida utilizada. E tal conduta pode gerar dificuldades na aprendizagem de perímetro e de área, apresentadas por muitos estudantes do ensino fundamental. (NCTM, 2007; LINDQUIST e KOUBA, 1989)

Ortência se decidiu por "usar raciocínio" e seguiu afirmando:

> **Ortência** – Nem que seja por eliminação, eu vou descobrir o resultado disso. Nem que eu fique aqui o dia inteiro. O marido da minha tia, que mexe com coisa de Matemática, ele disse que por eliminação você pode descobrir rápido ou pode demorar...
>
> **Marte** – Um ano.

Ortência – Exatamente. Nem que eu fique aqui, nessa sala, um ano, eu vou descobrir por eliminação.

Marte – E eu vou ficar aqui porque eu sou sua amiga.

Ortência – E porque você quer o resultado. (Risada).

Enfim, Ortência encontra, por tentativas, os valores dos lados, comemora e explica para Marte (e depois para a câmera) o que fez para chegar ao resultado final:

Ortência – Caraca! Eu sou muito inteligente, eu me amo! Na primeira conta que eu fiz, eu acertei.

Marte – Quanto que é?

Ortência – Não te falo!

Marte – Ah, Ortência, então eu não vou fazer...

Ortência – Eu tô brincando! Um lado tem treze metros e o outro tem oito!

Marte – Dá cento e quatro? Não dá cento e quatro.

Ortência – Eu... sou... muito... inteligente. Eu me amo, eu me amo muito.

Marte – Ah, não fala que a gente fez isso tudo pra não...

Ortência – Eu penso antes de fazer a conta. Tipo assim, por exemplo, eu vejo qual número multiplicado por qual daria o último número. Então eu fui por oito, que eu achei que era o mais provável de consegui cento e quatro. E aí eu pensei: oito vez o quê... qual é o último numerozinho aqui, tipo treze, quatorze, quinze... Oito vezes quatro, trinta e dois; o último número daria dois. Cento e quatro termina em quatro, eu pensei: oito vezes três vinte e quatro; número é quatro, quem sabe? Fui. Cento e quatro. Eu me amo.

Marte – Que número já era cinco a mais que oito?

Ortência – Sim. Dá certo!

Marte – Coisa estúpida! (Criticando a si mesma).

Ortência – Eu pensei nisso também: oito é exatamente cinco números menor do que treze.

Marte – Escreve isso também, o que você chegou. Ou então, não, só fala pra câmera.

Ortência – Será que o professor quer que escreve?

Marte – Hã hã... Não, fala pra câmera.

Ortência – Oi, câmera. (Acena para a câmera). É... eu pensei qual número daria quatro no último algarismo. Porque o cento e quatro, né, o último número e quatro... Eu fui pela tabuada de oito, fui aumentando ela porque eu achei que era a mais provável de eu conseguir o número cento e quatro, não sei por quê. E aí eu pensei oito vezes quatorze, por exemplo. Só que oito vezes quatro dá trinta e dois. Oito vezes três dá vinte e quatro; então o número é quatro. E aí eu fiz a conta e deu... cento e quatro.

Algumas discussões paralelas se desenrolam, enquanto Marte copia a resolução de Ortência, mas troca alguns valores e opera diferente da colega. Marte considera as medidas 4 e 13 (metros) como as possíveis medidas dos lados do *outdoor*, monta a operação de multiplicação, colocando a resposta que copiou de Ortência e, por fim, soma os valores dos lados, obtendo 34 metros. Vejamos a figura:

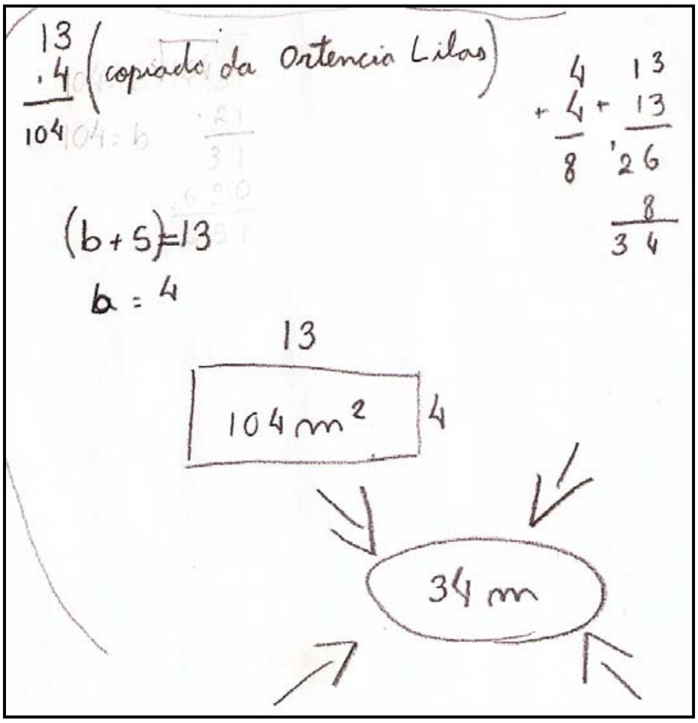


Figura 34 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 5 – Anotações e Cálculos*

Finalizando a tarefa 5, acontece um último diálogo entre os sujeitos, que nos revelou, através de falas e gestos de Ortência, o significado que ela produziu para o termo perímetro do retângulo: a medida do contorno da figura. E revelou, também, a confusão que Marte faz entre *área* e *perímetro*, não dissociando os significados que produz para estes termos, durante a (sua) atividade de *calcular os lados do outdoor*, na qual esta estudante parece estar imersa, ao fazer a tarefa. Vejamos esse último diálogo:

Ortência – Quanto que deu o seu?

Marte – Cento e quatro.

Ortência – Cento e quatro metros?

Marte – Tem que fazer o perímetro?

> **Ortência** – Não tem que fazer o perímetro, mas tem que falar... Agora é o resto. Primeiro a gente descobriu quais são os lados, a base pra gente poder fazer a questão. Agora a gente tem que descobrir quantos metros de alumínio você precisa pra fazer o acabamento, que é o perímetro, né, porque... (Faz o contorno do retângulo no ar, com os dedos).
>
> **Marte** – Que raiva!
>
> **Ortência** – É por isso que a gente precisava dos lados, pra poder fazer o perímetro, pra poder calcular quantos metros de alumínio, pra colocar em volta do *outdoor*. Eu fiz quatro raciocínios errados.
>
> **Marte** – Eu três, quatro, mas um eu apaguei.
>
> **Ortência** – Eu fiz quatro.
>
> (Pesquisador retorna à sala).
>
> **Pesq** – E aí, conseguiram acabar?
>
> **Ortência** – Eu fiz quatro raciocínios errados antes de desistir e fazer de cabeça. Eu tentei três tipos de equação do segundo grau e um tipo de alguma coisa muito estranha.

Com a análise da Tarefa 5, portanto, pudemos identificar a dificuldade de Marte em distinguir área de perímetro, como se os dois termos expressassem um único objeto, constituído pela aluna, quando ela associava as medidas de lados à medida dada, 104 metros quadrados. Para esta medida, esta aluna parece não produzir significado algum, em determinados momentos. Já Ortência não apresentou tal dificuldade, ou seja, ela parece não ter problemas em distinguir perímetro de área. Além disso, observamos que ambas as alunas apresentaram dificuldade de manipulação algébrica, ao tentarem encontrar as medidas dos lados da figura.

5.3.6 – A Produção de Significados para a Tarefa 6

Nenhuma orientação foi dada aos sujeitos de pesquisa, sobre esta tarefa; apenas lhes foram oferecidos lápis, borracha, réguas, esquadros e algumas figuras recortadas em cartolina, as mesmas das tarefas 3 e 4 (quatro triângulos equiláteros, cujos lados tem a medida aproximada do raio do círculo da tarefa 6, e quatro quadrados, cujos lados têm medida aproximada da metade do raio desta tarefa). A tarefa 6 (ver Figura 35) foi divida em duas fichas: a primeira contendo o círculo e o semicírculo; e a segunda, a coroa circular e a estrela. O enunciado e as figuras da tarefa 6 são exibidos a seguir.

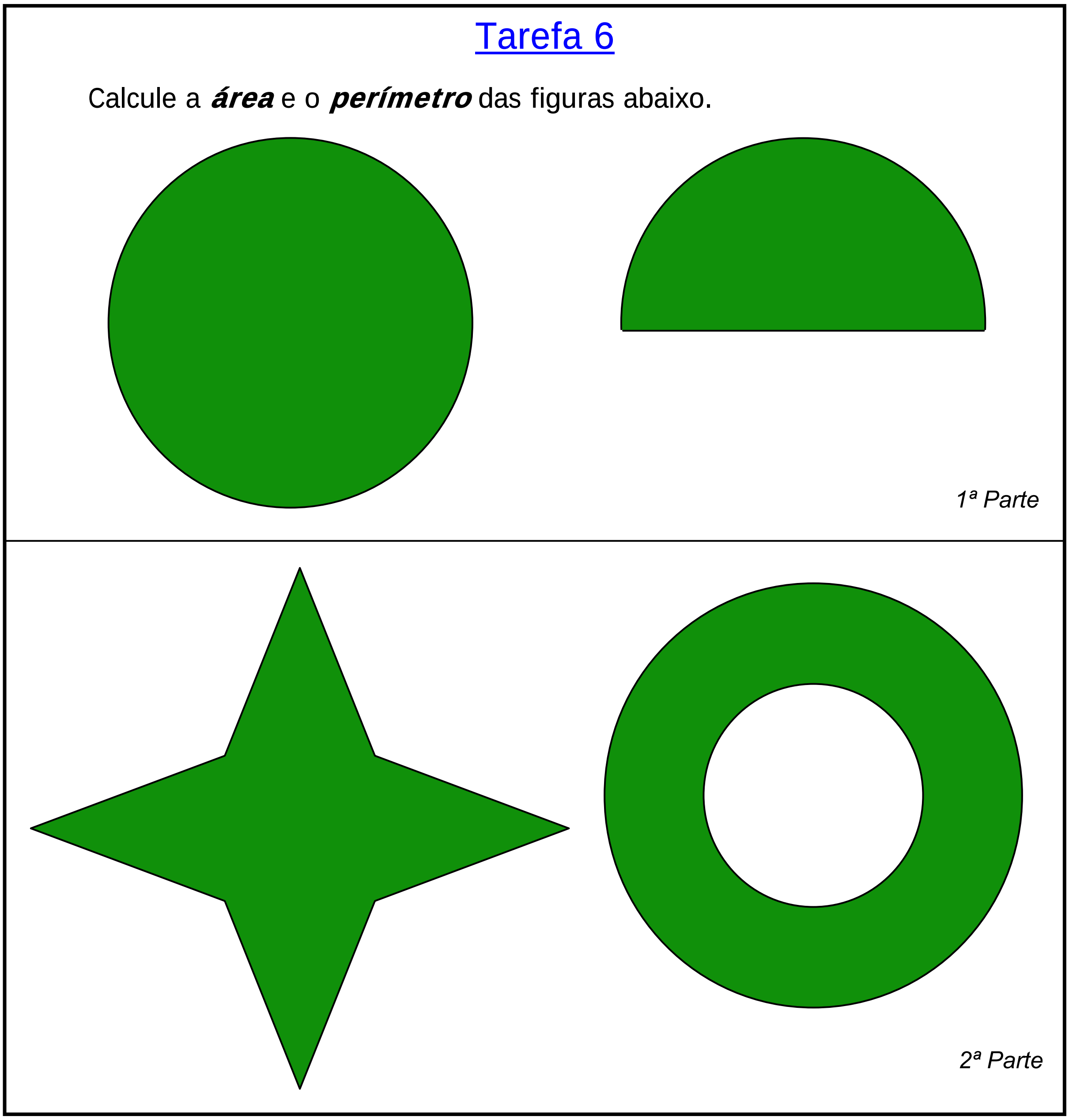


Figura 35 - *Tarefa 6 da pesquisa de campo*

Vejamos alguns dos resíduos de enunciação dos sujeitos de pesquisa, registrados segundos após lhes ser entregue a primeira duas fichas desta tarefa:

> **Ortência** – Professor, agora eu quero falar uma coisa muito importante. A gente não tem a mínima ideia de como calcular a área nem perímetro da circunferência. O professor de desenho geométrico disse que vai estudar isso com a gente no fim do ano. Como é que você pede isso pra gente? Eu não tenho a mínima ideia. Eu sei calcular o raio, mas não sei como eu posso utilizar isso com a área e o perímetro.
>
> **Marte** – Eu sei como eu posso... Não.
>
> **Pesq** – Mas talvez, em algum lugar do passado, vocês já tenham visto alguma fórmula ou alguma das várias saídas para esta tarefa, porque tem várias saídas.

Marte – Tem. Quadrado é uma.

Ortência – Não tem como eu transformar isso num triângulo, nem num quadrado, que é o que eu sei fazer a área.

A partir destas falas iniciais, podemos entender que ambas as alunas não sabem calcular a área de figuras planas diferentes de polígonos (vejamos, também, o trecho da transcrição a seguir). Assim, avaliamos que elas talvez estejam diante de um obstáculo epistemológico, pois podem produzir significados para *medida de área de não-polígonos*, mas não o fazem. No entanto, este obstáculo parece ser vencido, quando surgem novos elementos, na interação entre as alunas, como veremos adiante.

O pesquisador se ausenta da sala. Então as alunas pegam os esquadros e as réguas, e os movimentam sobre a primeira figura da tarefa. O diálogo se inicia, em torno de suas dificuldades com a tarefa e de suas possíveis *saídas*:

Ortência – Sinceramente, eu estou ligeiramente, completamente, totalmente perdida.

Marte – Aaah rá.

Ortência – Ah, e você que disse: eu sei o que fazer, eu sei... Então como é que é?

Marte – Eu vou fazer um quadrado em volta... Eu vou falar assim: a área do círculo é aproximada do quadrado.

Ortência – Cara, a sua inteligência me deixa perplexa! Eu fico com vergonha de ser sua amiga, de tão inteligente que tu é.

Marte – Nossa, você afetou meu coração. Acabou com o meu *hart* agora.

Ortência – Mas até que é uma boa ideia, tá. Eu tava brincando. É uma boa ideia. Mas eu já pensei em outra coisa.

Marte – É? Faz um triângulo, assim. (Coloca a régua sobre a figura).

Ortência – (Risada). Mas aí vai ser ligeiramente assim... O triângulo vai ter que ser muito maior. Eu tinha que pensar numa figura mais aproximada que a gente saiba fazer, mas a gente só sabe fazer área de triângulo, de quadrado ou de retângulo.

Marte – Mas se a gente fizesse o triângulo com um retângulo aqui em baixo.

Ortência – Pra que o triângulo, se o retângulo só dá.

Marte – Faz só um quadrado mesmo.

Ortência – Ah, eu vou fazer um retângulo.

No diálogo acima, as alunas discutem a possibilidade de circunscrevem um quadrado ou um triângulo à primeira figura, o círculo. E parecem acreditar que a área do quadrado circunscrito e a área do triângulo circunscrito teriam um valor aproximado do valor da área do círculo dado. Em seguida, Marte e Ortência discutem qual das figuras tem medida de área mais próxima da medida da área do círculo. Neste momento, ambas já consideram a possibilidade de calcular a área do círculo, ao menos de maneira *aproximada*. Isto indica que as alunas estão superando sua dificuldade inicial: não saber calcular a área de uma figura não-poligonal. Em outras palavras, estão aprendendo um modo de calcular a área de um círculo. E este aprendizado está acontecendo sem a intervenção do pesquisador.

Após esse diálogo, o pesquisador retorna à sala e é imediatamente questionado, mas ainda não faz nenhuma intervenção:

> **Ortência** – Professor, a gente só vai conseguir uma área aproximada, e olhe lá.
>
> **Marte** – Ah, tem que fazer desta figura também?! (Aponta a segunda figura da tarefa, o semicírculo). Ah, professor, eu já te falei o quanto eu te amo? (Tom irônico).
>
> **Ortência** – Eu vou conseguir o mais aproximado que você, porque eu tive uma ideia muito legal. A gente não fez um quadradão? Aí a gente pode fazer uns quadradinhos aqui e tirar esses quadradinhos. Aí vai ficar mais aproximado ainda.
>
> **Marte** – Ah, e depois pode fazer triângulos aqui!
>
> **Ortência** – Aí já é querer demais, né? (Risadas).
>
> **Marte** – Até que não. (Risadas).

As alunas utilizam réguas para medir, por três minutos, em silêncio. Ortência passa a calcular a área, do modo que já apontou antes, inscrevendo o círculo em um quadrado e “retirando” quadradinhos (de área unitária) da diferença geométrica das duas áreas (do quadrado e do círculo), conforme a ficha da aluna (Figura 36).

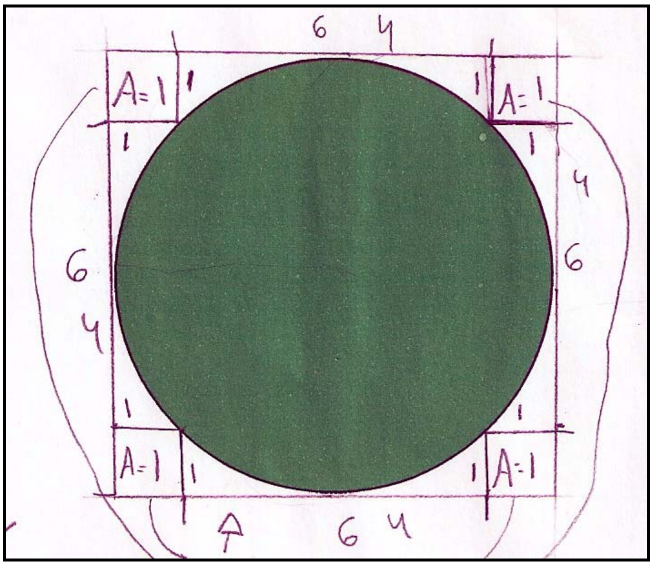


Figura 36 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 6 – Desenhos e Medidas*

E Ortência faz questão de justificar os seus passos, mais uma vez:

> **Ortência** – A minha conta tá incrivelmente aproximada, OK?
>
> **Pesq** – OK.
>
> **Ortência** – Da área do círculo, podia tá mais aproximada. Podia fazer alguns triângulozinhos aqui e aproximar ainda mais. Mas estaria bem mais complexo.

Marte se surpreende com seus resultados, ao que o pesquisador intervém, como vemos no trecho abaixo:

> **Marte** – Oh! A área e o perímetro deram igual.
>
> **Ortência** – Huuum.
>
> **Marte** – Hã hã!
>
> **Pesq** – Isto é impossível?
>
> **Ortência** – Não, não é impossível. Mas é improvável.

O trecho acima nos faz pensar que, embora as discussões travadas na aplicação da Tarefa 2 tenham levado às alunas a aceitarem esta mesma possibilidade (a de uma figura plana ter área e perímetro idênticos), isto parece não ter sido o suficiente para que elas tenham internalizado este modo de produzir significado para tal relação entre as duas grandezas geométricas. E entendemos que o aprendizado de determinadas relações entre área e perímetro – como a conservação da área quando o perímetro varia – é importante para que os estudantes possam produzir significados para tais objetos.

No trecho a seguir da transcrição, observamos que Ortência se depara com outro obstáculo epistemológico, pois ela parece não produzir significado para o perímetro do círculo, quando tenta, por várias formas, encontrar uma solução parecida com a que criou para calcular a área do círculo, mas não se convence de que uma delas pode estar correta. Vejamos:

> **Ortência** – O perímetro que eu tô meio agarrada, aqui. (Aponta para sua folha). Porque eu já pensei em tirar os quadradinhos que eu tirei na área. Eu já pensei... em fazer o quadrado todo. De qualquer jeito, eu acho que não vai dar certo, não.

No entanto, vemos (na Figura 37 e na videografia) que Ortência calcula o perímetro para as duas figuras. Para o perímetro do círculo, ela toma os quatro lados do quadrado circunscrito diminuídos de dois lados do quadrado cujo lado mede 1 cm. Assim, soma os lados dois a dois e faz, por fim, 8 + 8 = 16 cm.

Procedimento semelhante a aluna usa para calcular a área do semi-círculo, que considera corretamente com diâmetro medindo 6 cm, marcando este valor como a medida do segmento de reta que forma a figura, como podemos observar a seguir, na Figura 37.

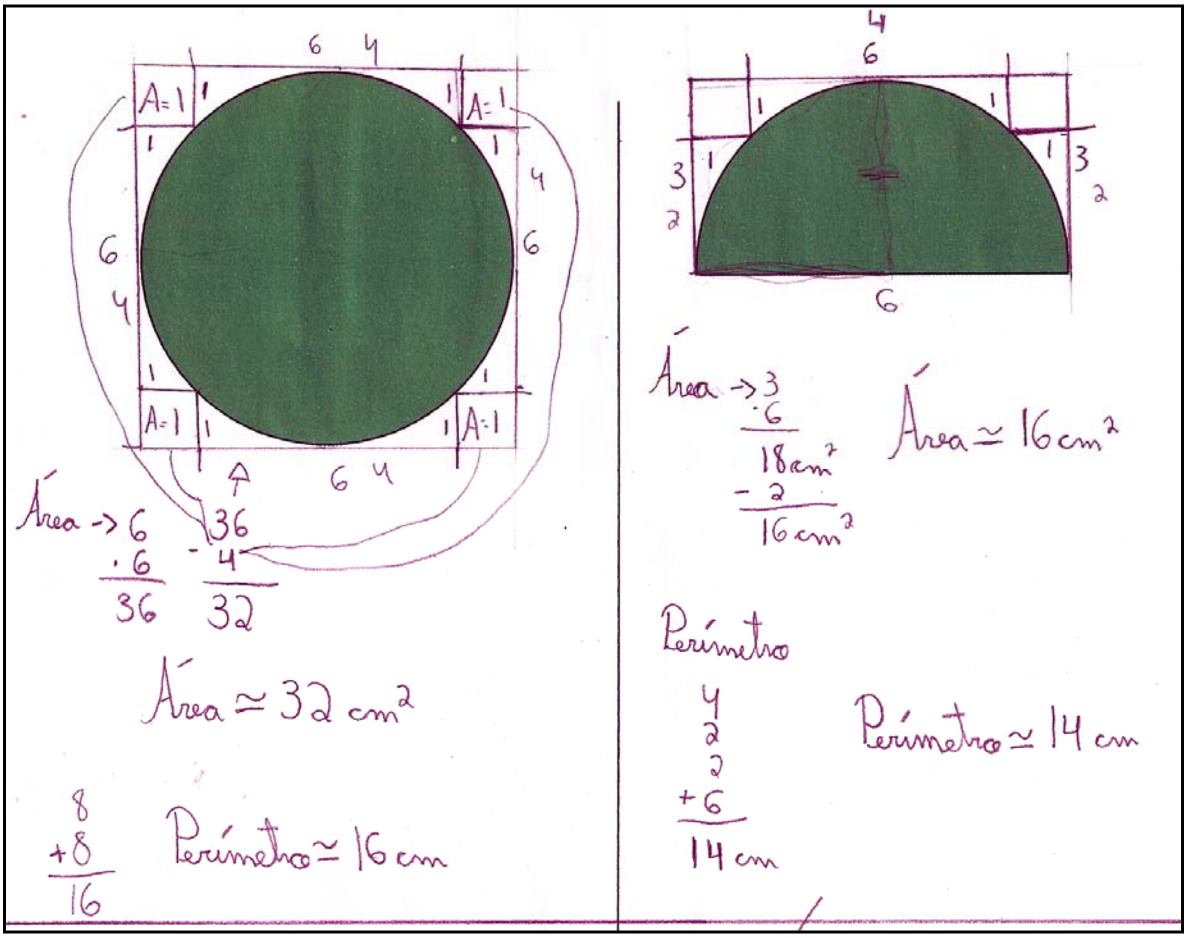


Figura 37 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações*

Analisemos, agora, a produção de significados da aluna Marte, através de seus registros gráficos (Figura 38). Para ela, a área do círculo tem valor aproximado da área do quadrado mensurada como 6 x 6 = 36 centímetros quadrados; e o perímetro do círculo terá, então, a medida do perímetro do quadrado, aproximadamente. Marte utilizou o mesmo modo de calcular a área do círculo, para encontrar a área do semicírculo, que inscreveu em um retângulo de lados 3 e 6 (centímetros), como vemos na Figura 38, a seguir.

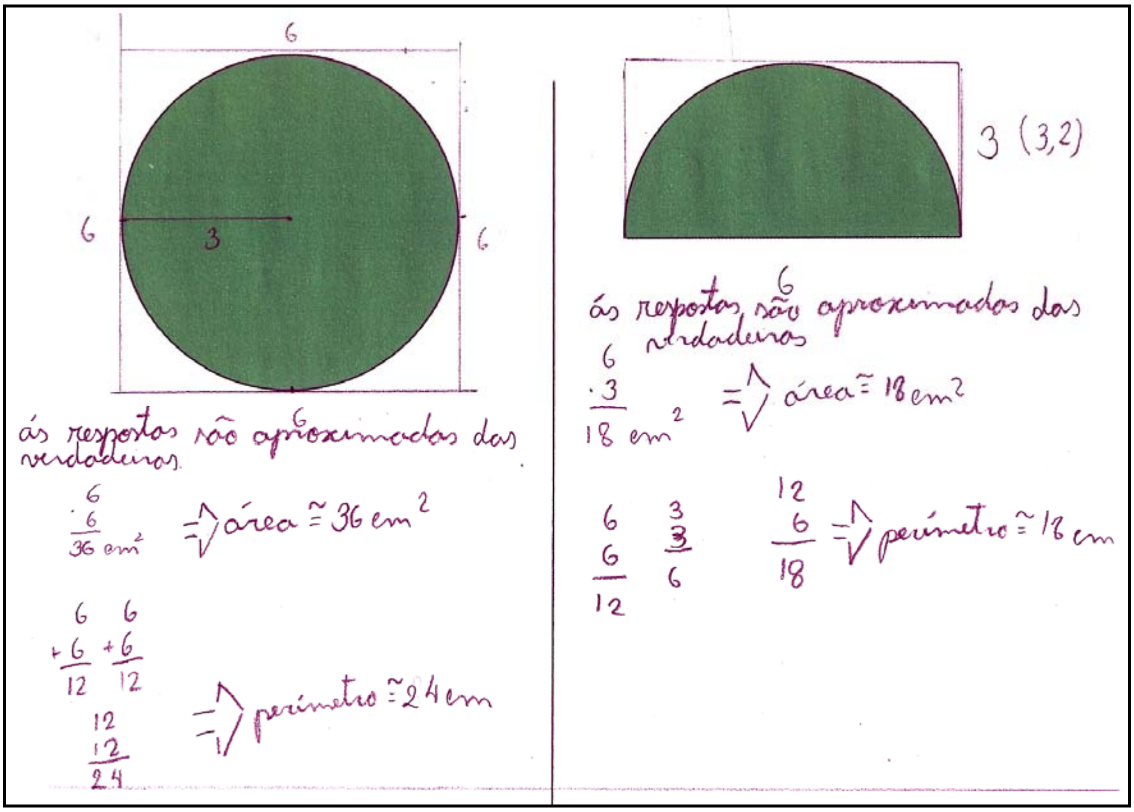


Figura 38 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações*

Vejamos que ambas as alunas se utilizaram da circunscrição de figuras, mas calcularam a área das figuras de modos diferentes, que foram por elas discutidos no trecho da transcrição abaixo, quando Marte parece querer se certificar de que o que ela fez era aquilo que foi pedido, e pergunta ao pesquisador:

Marte – Professor, mas você quer que a gente faça a área e o perímetro de um círculo?

Pesq – Mas você já não fez?

Ortência – Ela fez de qualquer jeito.

Marte – Não. Eu aproximei sim, mas ela tá colocando quadradinho aonde tem espaço livre. Entendeu?

Ortência – Pra poder aproximar mais.

Marte – Eu tentei, só que aí não deu... não coube. Eu ia fazer de um centímetro, meio centímetro, mas aí...

Ortência – Acho que acabei.

Com a intenção de oferecer novos elementos ao processo de produção de significado das alunas, o pesquisador faz as seguintes intervenções[68]:

[68] O objetivo destas novas intervenções foi criar um campo de novas possibilidades de produção de significados para área do círculo e área do semicírculo, com a introdução de elementos que as alunas

Pesq – Então, agora que as duas acabaram, eu vou colocar no quadro as duas fórmulas, de área e de perímetro, pra ver se vocês se lembram delas e pra que vocês usem estas fórmulas para calcular novamente a área e o perímetro de cada figura, agora com mais precisão.

Ortência – Professor, a gente não viu, a gente não pode lembrar o que a gente não chegou a ver!

Pesq – Vocês já ouviram falar deste número (escreve na lousa), o número pi?

Marte – Número o quê?

Ortência – Número pi. Sim, três vírgula quatorze quinze...

Pesq – Isso mesmo. Eu vou arredondar esse valor pra três, pra facilitar o cálculo da área e do perímetro, tá?

Ortência e **Marte** – Tá.

Pesq – Então a área do círculo é... (Começa a escrever a fórmula na lousa).

Ortência – Ai, a gente já viu área de circunferência, sim. Ai, que droga, não acredito!

Pesq – Eu sabia que vocês já conheciam isto... Então a área é igual a pi vezes o raio elevado ao quadrado. (Escreve a fórmula no quadro). Lembram?

Marte – *Erre*, o quê que é o *erre*? (Referindo-se à letra r da fórmula $A = \pi r^2$).

Pesq – *Erre* é o raio da circunferência...

Ortência – É o raio, é... a...

Pesq - ...a distância do centro até a borda. (Desenha uma circunferência na lousa).

Marte – Ah, tá.

Pesq – E o perímetro da circunferência é igual a dois vezes pi, vezes o raio. (Escreve a fórmula na lousa). Então agora eu vou pedir pra vocês calcularem novamente a área e o perímetro destas figuras (círculo e semicírculo) e depois compararem com os cálculos que já fizeram, tá?

Ortência – Claro que a gente vai mudar.

As alunas retornam às suas fichas, medem os raios usando réguas e, então, comparam suas medidas e seus cálculos, da seguinte maneira:

Ortência – A área é igual e oiten... Ah, você tá de brincadeira?

Pesq – Qual o valor do raio você mediu?

Ortência – Três.

---

já haviam estudado, mas dos quais não se lembravam, até aquele momento da pesquisa. Entendemos que aquele era o melhor momento para fazermos tais intervenções, pois o espaço comunicativo estava criado, com o desenrolar da tarefa pelas alunas, que pareciam estar imersas na atividade de mensurar a área e o perímetro daquelas figuras.

Pesq – E aí, o que você fez?

Ortência – Oh, área é igual a *pi* vezes *erre* elevado ao quadrado.

Marte – A minha também deu três.

Ortência – Ai, nossa! Não acredito, retardada! Não, não dá, não. Deixa pra lá.

Observando que as estudantes se entusiasmavam com a possibilidade de calcular rapidamente a área e o perímetro do círculo dado na tarefa, ao mesmo tempo em que elas se exaltavam, como que disputando quem acabaria os cálculos antes da outra e conferindo os seus cálculos com os cálculos da colega, o pesquisador interveio, novamente:

Pesq – O que foi?

Ortência – É porque o meu deu oitenta e um, tava dando oitenta e um. Mas é outra coisa. É porque eu esqueci da potência. Isso é uma coisa que faz a gente errar muito, essa coisa de multiplicação é antes de adição, e potência é antes de multiplicação, faz errar muito. Eu erro muito nisso.

Pesq – A ordem das operações?

Ortência – Sim, foi isso que eu fiz agora. Antes de fazer o três ao quadrado, eu fiz três vezes três, aí deu oitenta e um, e não vinte e sete.

Pesq – Mas você percebeu rápido.

Ortência termina seus cálculos e expressa, pela primeira vez nesta pesquisa, a sua preocupação com a unidade de medida a ser utilizada, gerando a seguinte discussão, que o pesquisador deixou se desenrolar, silenciando sua resposta:

Ortência – É em centímetros quadrados ou em centímetros normal?

Pesq – Boa pergunta.

Ortência – Porque é circunferência, então não é um vez o outro, então... O quê que você acha? (Dirige-se para Marte).

Marte – Eu acho que é centímetro quadrado.

Ortência – Você acha? Porque, tipo, não é um lado vezes o outro, não é uma medida vezes a outra. É uma medida só. (Faz um movimento circular com o lápis, no ar).

Marte – Ah, então não é.

Ortência – Não, mas eu também não sei se é uma medida só ou se são duas medidas, ah rá! Eu tenho argumento contra as duas teorias, mas a favor eu não tenho de nenhuma das duas.

(Risadas das alunas).

Marte – Ah, eu tenho, a (teoria) do que tem elevado a dois. Todas as áreas eu sempre coloco o elevado a dois.

Ortência – Ah, você não conhece todas as áreas, pra falar isso.

Marte – Ah, mais é.

Ortência – Todas que a gente conhece. E o círculo é uma curva só. Oh, tristeza!

Marte – É.

Ortência – Centímetro ou centímetro quadrado, eis a questão.

Marte – Ai, meu Deus.

Ortência – Calma, Marte, tudo vai dar certo no final.

Observamos que as alunas, no trecho acima, referiam-se sempre à unidade de medida de área, e não chegaram a uma conclusão sobre qual unidade utilizar, ao calcular a área do círculo. Esta dificuldade, muito comum em nossas salas de aula, parece estar relacionada com o estabelecimento de fórmulas para se calcular área (como fizemos através de algumas intervenções), sem que os alunos produzissem significados geométricos para os parâmetros destas fórmulas. Vejamos, por exemplo, que Ortência parece ter conseguido superar os obstáculos epistemológicos apresentados ainda no início desta tarefa, produzindo significado para área e perímetro das figuras circulares, operando com a noção de aproximação com figuras poligonais conhecidas. No entanto, a aluna não produziu significados para a *unidade de medida de área*, após calcular a área das figuras usando a fórmula. Parece-nos que um novo obstáculo epistemológico foi criado, pois Ortência passa a registrar suas respostas para área em centímetros (ver Figura 39), e não em centímetro quadrado, como fez até então, em todas as tarefas. A opção final de Ortência pela medida em *centímetros* é justificada por sua fala ("não é um lado vezes o outro, não é uma medida vezes a outra. É uma medida só.") e por seus gestos (ela faz um movimento circular com o lápis, no ar), no trecho da transcrição acima, através dos quais afirmamos que a aluna parece operar da seguinte maneira: quando calculamos a área de uma figura a partir da multiplicação de duas medidas desta figura, obtemos uma quantidade de área em *unidades quadradas;* quando não há duas medidas para serem multiplicadas (como é o caso do círculo), então obtemos um valor de área em *unidades simples*. Observemos, ainda, que a fórmula e os seus elementos (o raio, o número π e o número *2*) sequer são citados pelas alunas, na transcrição, embora sejam utilizados em seus cálculos.

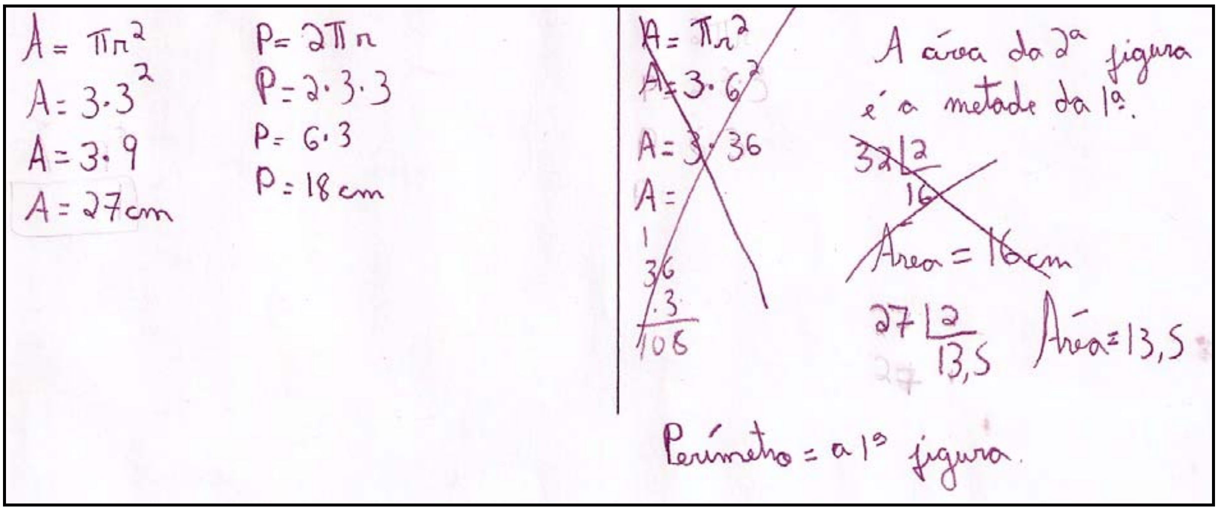


Figura 39 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 6 – Anotações e Cálculos*

Vejamos que Marte também optou por utilizar centímetros (unidade simples) para os valores calculados, tanto de área quanto de perímetro. Talvez esta aluna tenha sido convencida pela colega, Ortência, a proceder desta forma.

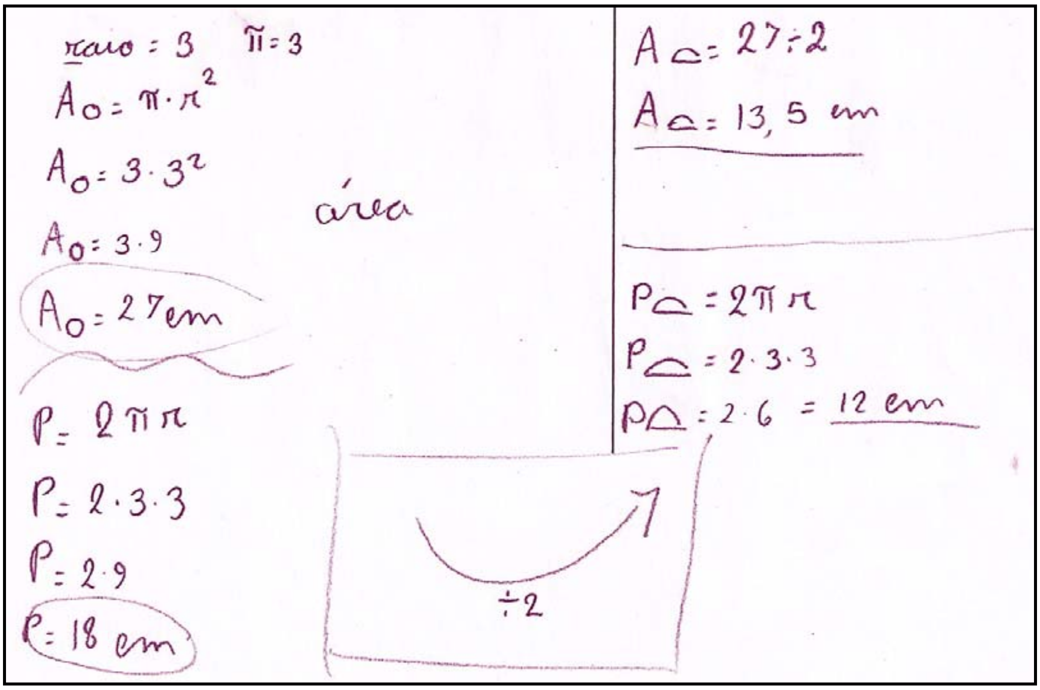


Figura 40 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 6 – Anotações e Cálculos*

Ao finalizarem esta primeira parte da Tarefa 6, as alunas passam a comparar seus novos resultados (depois das fórmulas dadas) com os resultados anteriores, como podemos ver no seguinte recorte da transcrição:

> **Ortência –** Eu acabei. Oh, professor, de um deles, eu errei por cinco centímetros, e o outro eu errei por dois centímetros.

Marte – Um eu errei por dois, não, por três centímetros...

Pesq – A área ou o perímetro?

Marte – A á... o perímetro. Não, é... ah, esquece.

Ortência – No meu, a área da primeira figura, a diferença foi de cinco centímetros, e o perímetro foi só por dois centímetros que eu errei.

A partir dessa comparação, Ortência se surpreende com uma grande diferença de valores, o que a faz se expressar sobre algumas estipulações locais de sua produção de significados para área do círculo (como o raio e o próprio círculo) e sobre algumas relações métricas entre estas estipulações. Nesse momento, o pesquisador inicia uma negociação de significados, sugerindo mais um modo de operar, produzindo significados geométricos para *área do semicírculo*, como podemos observar no trecho a seguir.

Ortência – Nossa! Ah, não, tem alguma coisa extremamente errada. A área da segunda figura deu cento e oito centímetros. Ah, eu fiz uma coisa muito errada. Professor, o raio disso (mostra o semicírculo da tarefa) não é isso aqui não, é? (Passa o lápis por sobre o diâmetro da figura).

Pesq – Você pode me mostrar novamente?

Ortência – O raio desse meio círculo não é isso (diâmetro), é isso (raio), né?

Marte – É tipo o círculo dividido por dois.

Pesq – Será que ajuda, vocês compararem as duas figuras?

Ortência – Sim. Se eu colocasse essa figura (semicírculo) aqui (círculo), o raio seria isso aqui (marca com o lápis o raio sobre o segmento do semicírculo).

Pesq – Quem sabe, se você dobrar o papel, sobrepondo as figuras, como você disse?

(Ortência dobra a folha e visualiza e sobreposição, aproveitando uma certa transparência do papel).

Ortência – (Sorriso). A área é a metade! Mas aí não precisa fazer conta?

Marte – Tem. É dividido por dois. Só que... agora, divide vinte e sete por dois. (Tom de desafio).

Ortência – Olha só, a área da segunda figura eu acertei. Sem fórmula.

Pesq – E o perímetro?

Marte – Bota a metade do outro.

Ortência – É. Mais não me faça falar qual é a diferença.

Pesq – Então vocês estão certas de que vai ser a metade?

Ortência e **Marte** – Sim.

Ortência – Porque uma figura é exatamente a metade da outra.

Vejamos que ambas as alunas operam com a mesma noção: a de que uma diminuição da área do círculo acarreta uma diminuição do seu perímetro, na mesma proporção. Entendemos ser esta mais uma dificuldade que as alunas apresentaram e que acontece, rotineiramente, também em nossas salas de aula. Uma nova intervenção do pesquisador parece ajudá-las a transpor esta dificuldade. Notemos:

Pesq – Como é que vocês me mostrariam o perímetro da primeira figura?

Ortência – O perímetro da figura é isso aqui, ó. É a linha que contorna ela.

Pesq – E da outra?

Ortência – A outra é... Aaaah! Totalmente, não é a mesma.

Pesq – A mesma?

Ortência – Não é a mesma, de jeito nenhum.

Pesq – Mas vocês tinham dito que era a mesma?

Marte – Não. Que erra a metade.

Ortência – Não! Também não era a metade, não. Seria a metade se a figura só tivesse isso aqui. (Passa o lápis por sobre o contorno do semicírculo). Como a figura tem isso (mostra o segmento de reta que forma o contorno da figura), não é a metade, porque isso daqui não faz parte.

Marte – Ah, é mesmo.

Ortência – O perímetro, vai ter que calcular. A área é a metade, o perímetro, não.

Então as estudantes passam a calcular as medidas da área e do perímetro do semicírculo, apresentando os resultados que exibimos nas Figuras 39 e 40 (acima). Marte finaliza esta parte da Tarefa 6 e, imediatamente, começa a resolver a última parte. Já Ortência, avaliando o que calculou, continua ainda pensando na primeira parte da tarefa, e discute sobre isso com o pesquisador. Observemos:

Marte – Acabei.

Pesq – Então pode começar a última folha, com as últimas figuras. (Entrega para Marte a ficha com a segunda parte da Tarefa 6).

Ortência – Professor, o perímetro é igual. (Referindo-se aos perímetros do círculo e do semicírculo).

Pesq – É igual?

Ortência – Eu acho que é igual.

Pesq – Por quê?

Ortência – Porque por mais que eu ache que isso (contorno do círculo) aqui não é mesma coisa que isso (contorno do semicírculo)... com certeza não acho... pensando de acordo com a fórmula, olha só, a fórmula é: dois *pi* vezes o raio. O raio dessa daqui (círculo) é três; pra mim, o raio dessa daqui (semicírculo) vai ser três também.

Pesq – Hum hum.

Ortência – Então, vai ser o mesmo. Porque, na fórmula, *pi* não vai mudar, dois também não vai mudar. Então o que muda, o que varia a quantidade, o tamanho, a medida do perímetro é o três, que é o raio. Se o raio aqui é três e aqui também, o perímetro vai ser o mesmo.

Pesq – Entendi. Aí você está pensando em termos da fórmula, o que a gente falaria em termos algébricos.

Ortência – Sim.

Pesq – E se você pensar só em termos geométricos, das medidas geométricas?

Ortência – Aí eu não acharia que é o mesmo, por questão de visualização. Eu não acharia que, se eu esticasse essa linha pra baixo, por exemplo, daria o mesmo tamanho.

Pesq – Daria ou não daria?

Ortência – Eu acho que não daria. Só que eu prefiro pensar do outro jeito, de acordo com a fórmula, que é o mais... certo. (Faz o sinal de aspas com os dedos).

Entendemos, a partir do trecho acima e dos registros escritos (Figura 39), que Ortência produz dois significados distintos, os quais, para ela, parecem ser conflitantes. A aluna parece atribuir, para *medida do perímetro de uma figura circular*, o seguinte significado (algébrico): obter o valor do raio da figura e, a partir disto, aplicar a fórmula $P = 2\pi r$. No entanto, Ortência parece também produzir um outro significado (geométrico, desta vez), para o mesmo objeto: esticar as linhas de contorno da figura e medir seu comprimento (com uma régua, por exemplo).

Com efeito, a ação de identificar estes significados nos permitiu compreender o conflito em que Ortência se encontrava, passo inicial para uma possível intervenção, que não fizemos naquele momento. Mas vejamos que a aluna faz um juízo de valor dos significados que produziu, escolhendo pelo primeiro (que chamamos de algébrico), que para ela é “o mais... certo”. Talvez este juízo seja o mesmo que muitos professores fazemos em nossas salas de aulas, elegendo esta ou aquela *definição* como a melhor ou a mais correta, para determinado objeto geométrico.

Passemos para a análise das produções de significados dos sujeitos na segunda parte da Tarefa 6.

Marte começa pela coroa circular, deixando os cálculos relativos à estrela para depois. Vejamos como esta aluna se expressa acerca dos elementos da coroa circular, ao inquirir o pesquisador:

> **Marte** – Professor, você quer do que tá verde... ou é de tudo? (Mostra na figura da coroa circular). Você entendeu?
>
> **Pesq** – A figura... é a verde.
>
> **Marte** – Quando eu for fazer o pi aqui, eu vou fazer do raio aqui no meio (aponta para o furo da coroa circular), ou não vai dar, ou você quer que calcule para os dois círculos?
>
> **Pesq** – A figura da tarefa é a figura verde, né?
>
> **Marte** – Deixa fazer dos dois círculos.

Já Ortência faz primeiramente os cálculos da área e do perímetro da estrela, que exibimos na Figura 41, a seguir.

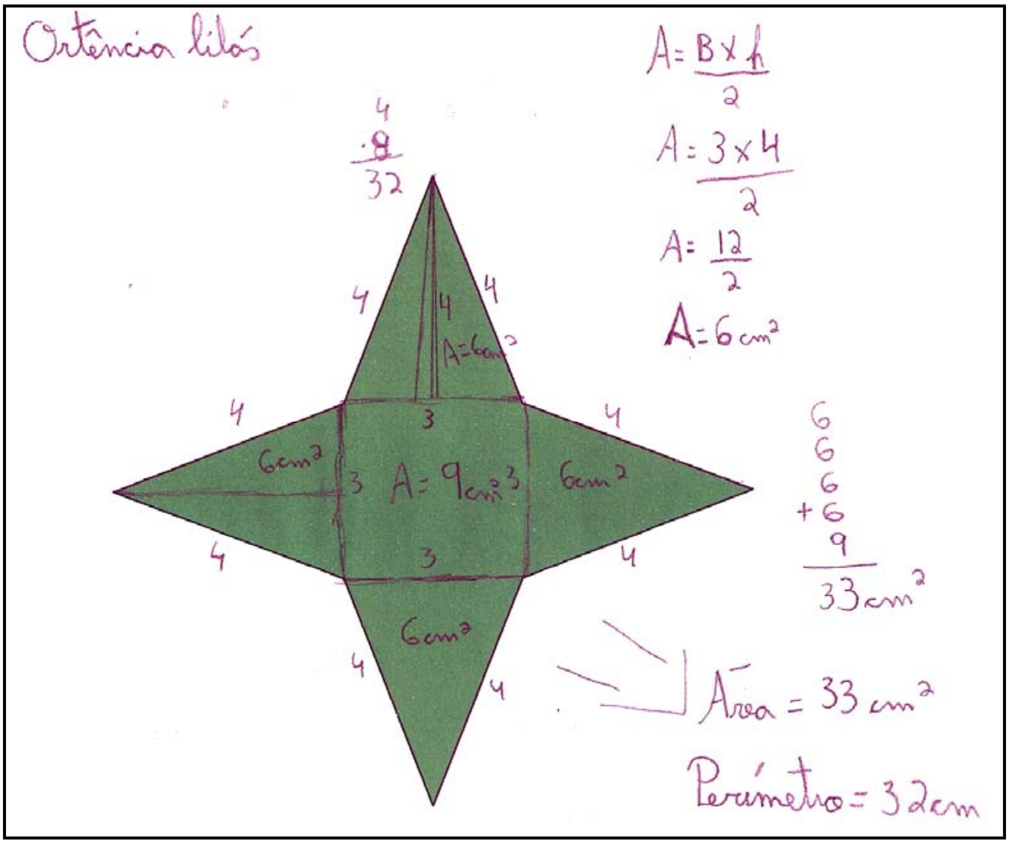


Figura 41 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações 2*

A partir desta figura, identificamos que, para Ortência, calcular a área da estrela parece ter o significado de dividir a figura em quatro triângulos e um quadrado, medir os lados destes polígonos e, finalmente, calcular suas áreas. Pois a aluna sabe calcular área de figuras como estas, é o que podemos concluir de sua afirmação (ao se referir ao círculo), que citamos no início desta seção: “Não tem como eu transformar isso num triângulo, nem num quadrado, que é o que eu sei fazer a área”. Em determinado momento, ele afirma:

> **Ortência** – Essa figura aqui (estrela) tá muito fácil. Eu tô preocupada quando chegar no círculo. Área dessa...

Diante esta fala de Ortência, Marte parece desanimar de seguir fazendo a tarefa, quando informa:

> **Marte** – (Olhando para a câmera). Professores de Matemática, eu tenho uma coisa pra falar: eu não sei Matemática.

No entanto, já tendo calculado a área e o perímetro da coroa circular (ver Figura 44), Marte volta sua atenção para a estrela e, a partir de um comentário, trava a seguinte discussão com a colega, com algumas intervenções do pesquisador:

> **Marte** – Professor, eu não tô lembrando com é que faz o perímetro e a área de um triângulo.
>
> **Ortência** – Ah-ah, eu se-ei! (Tom de convencimento).
>
> **Marte** – Ah, não, perímetro eu sei. Mas a área...
>
> **Ortência** – Eu sei.
>
> **Marte** - ...É aquela coisa lá da hipotenusa, que tem que ter dois triângulos retângulos.
>
> (Ortência fita Marte de modo repreensivo).
>
> **Marte** – Tá, então não é isso. (Risada). É...
>
> **Pesq** – Continua, Marte, pois pode ter várias saídas.
>
> **Ortência** – Sim, às vezes tem a ver.
>
> **Marte** – É porque tem muito tempo que eu não vejo, quer dizer, estas férias, né? Essas férias. Então não é triângulo retângulo?... É sim, é triângulo retângulo. Você tem que achar dentro do triângulo retângulo pra achar a hipotenusa.
>
> **Pesq** – Tenta, então, fazer.
>
> **Marte** – Não, eu já fiz.
>
> **Ortência** – E o quê que a hipotenusa tem a ver com isso, com a área do triângulo?
>
> **Marte** – Que aí eu vou fazer aquela conta... A hipotenusa... que eu não lembro... é duas vezes...
>
> **Ortência** – A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos. Mas isso é pra... Mas, enfim, né?... Cada um faz do jeito que sabe. (Sorri, olhando para o pesquisador). Eu num vou falar o meu jeito, né?

A partir esta discussão, vemos que Ortência enuncia o Teorema de Pitágoras, mas não sente necessidade de utilizá-lo na tarefa, pois ela já havia encontrado as medidas dos lados dos triângulos. Observemos, na Figura 41 (acima), que Ortência marcou o valor da altura que ela desenhou em cada triângulo como tendo o mesmo valor dos lados dos triângulos, ou seja, dos lados da estrela.

Já Marte opera em outra direção, a de considerar a necessidade de se calcular a medida da hipotenusa dos triângulos obtidos pela decomposição da estrela, para se obter a área de cada um destes triângulos. E como podemos observar na Figura 42 (a seguir), Marte faz o cálculo da área do quadrado e do perímetro da estrela, mas não calcula a área da estrela[69].

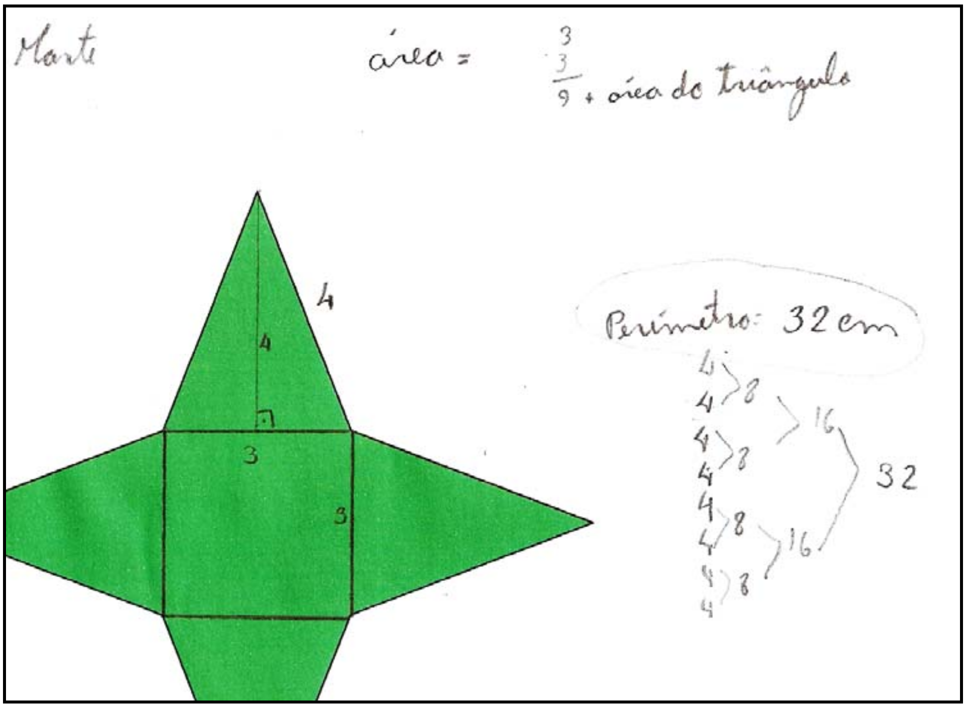


Figura 42 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações 2*

Ao terminar seus cálculos para estrela, Ortência passa a analisar a última figura, a coroa circular. Estando o pesquisador ausente da sala, ela se dirige a Marte, dizendo:

> **Ortência** – Acabei. Êba! (Comemora). Agora só falta esse círculo muito estranho aqui (cora circular), que eu não tenho a mínima ideia de como eu vou fazer. (Continua lendo). Eu não vou usar a fórmula neste círculo muito estranho, eu vou usar aquilo que a gente fez. Por que... não sei. Não sei qual que é o raio disso.

[69] Assim como Ortência, Marte fez a decomposição da estrela em quatro triângulos e um quadrado, medindo os lados destas figuras com a régua. Mas Marte não registra o cálculo da área da estrela, e isto perece estar relacionado ao fato de a aluna não se convencer de que o seu raciocínio para calcular a área do triângulo esteja correto.

Então, o pesquisador retorna à sala, ao que Ortência lhe indaga:

> **Ortência** – Professor, nessa última figura, eu não sei como eu vou usar a fórmula, porque eu não sei qual que é o raio disso. Isso não é um círculo, isso é uma... rodela, um pedaço de um círculo. É uma coisa muito estranha. Eu não sei com é que eu descobr... não sei “saber” o raio disso (faz o sinal de aspas com os dedos).

Nestes dois últimos trechos da transcrição, podemos identificar que Ortência sente um estranhamento em relação à figura. Este estranhamento talvez possa significar um obstáculo epistemológico da aluna, por não produzir significado, naquele momento, para área da coroa circular, que ela chamou de “círculo muito estranho” e de “pedaço de um círculo”. Mas, em um momento imediatamente seguinte, ela tenta operar com a sua noção de área do círculo, mas afirma não saber como identificar um raio na coroa circular. É isto o que depreendemos de suas fala: “não sei ‘saber’ o raio disso”.

Em seguida, Ortência afirma algo sobre a noção de aproximação para calcular área – o que ela de fato tenta fazer, mas depois desiste, como vemos na Figura 43 – e é questionada pelo pesquisador, que faz algumas intervenções que alteram o modo das alunas operarem:

> **Ortência** – Eu vou fazer daquele jeito que a gente fez, fazer o quadrado em volta, o quadrado dentro, fazer o mais aproximado que eu puder.
>
> **Pesq** – Tá. Você tá falando primeiro em área ou em perímetro?
>
> **Ortência** – Não, eu tô falando em área. Eu nem comecei a pensarem perímetro. Por favor, não me faça.
>
> **Marte** – Essa coisa do raio também serve pra uma rodela?
>
> **Ortência** – A gente realmente não aprendeu isso.
>
> **Pesq** – Então...
>
> **Ortência** – Eu nem sei ver o raio, direito. Eu só sei que num círculo completo, é do meio do círculo pra alguma das laterais.
>
> **Pesq** – Você sabe fazer para o círculo grande, com o raio grande?
> **Ortência** – Sim.
>
> **Pesq** – E pro círculo pequeno, você saberia fazer também?
>
> **Marte** – Sim.
>
> **Ortência** – Não. Ah, por exemplo, o círculo... (Faz um círculo com os dedos no ar).
>
> **Marte** – Ah, e se subtrair? Fizesse do grande, depois do pequeno, e subtraísse o pequeno do grande? Aaah!

> **Ortência** – (Faz sinal positivo com um das mãos). Tem que ser.
>
> **Marte** – É, um é a metade do outro. (Fica olhando para o pesquisador, aguardando algum *feedback*).

As alunas permanecem por mais três minutos escrevendo, em silêncio, e terminam de fazer a tarefa. Nas Figuras 43 e 44, abaixo, podemos observar que as alunas operam do mesmo modo, ao calcular a área da coroa circular (embora Marte considere $4^2 = 12$, assim obtendo valores diferentes): elas calculam a área do círculo maior e a área do círculo menor, depois subtraem uma área da outra.

É interessante notar que, também em relação ao perímetro dessa figura, ambas as alunas parecem operar do mesmo modo que operaram para área: elas calculam o perímetro de cada círculo (maior e menor), subtraindo suas medidas ao final, obtendo o perímetro da coroa circular (ver as Figuras 43 e 44). Certamente, este não é um modo usual (nem matematicamente correto) para se calcular o perímetro de uma coroa circular, mas é uma maneira legítima para as alunas, segundo sua produção de significado para perímetro da figura em questão.

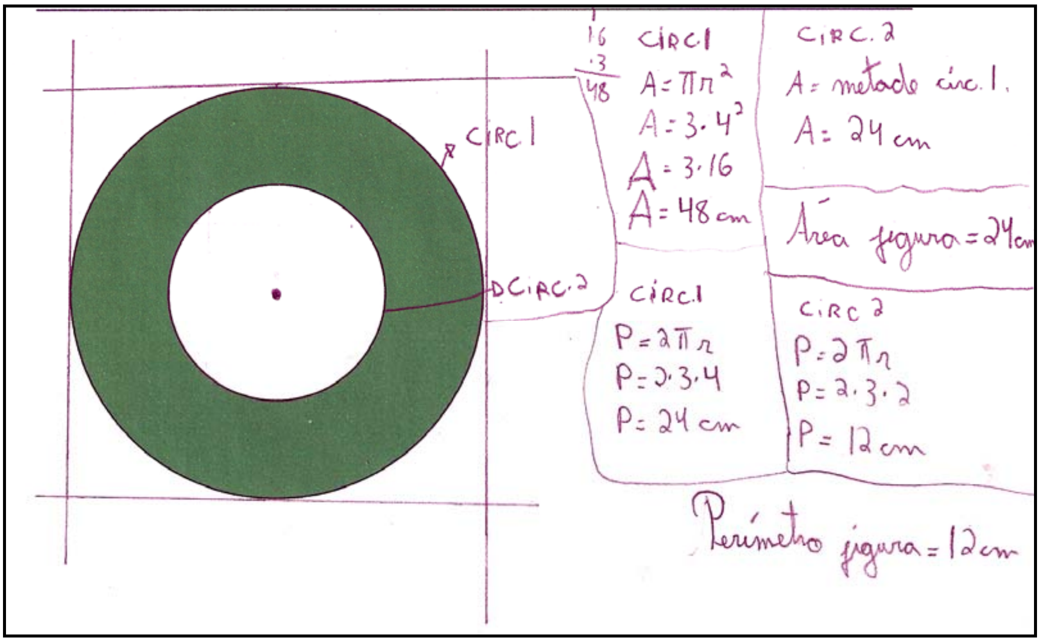


Figura 43 - *Registro escrito de Ortência – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações 3*

Observemos, na figura a seguir, os cálculos, feitos por Marte, da área e do perímetro da coroa circular, e notemos ainda que a aluna, mais uma vez, usa o centímetro como unidade de medida do perímetro e da área.

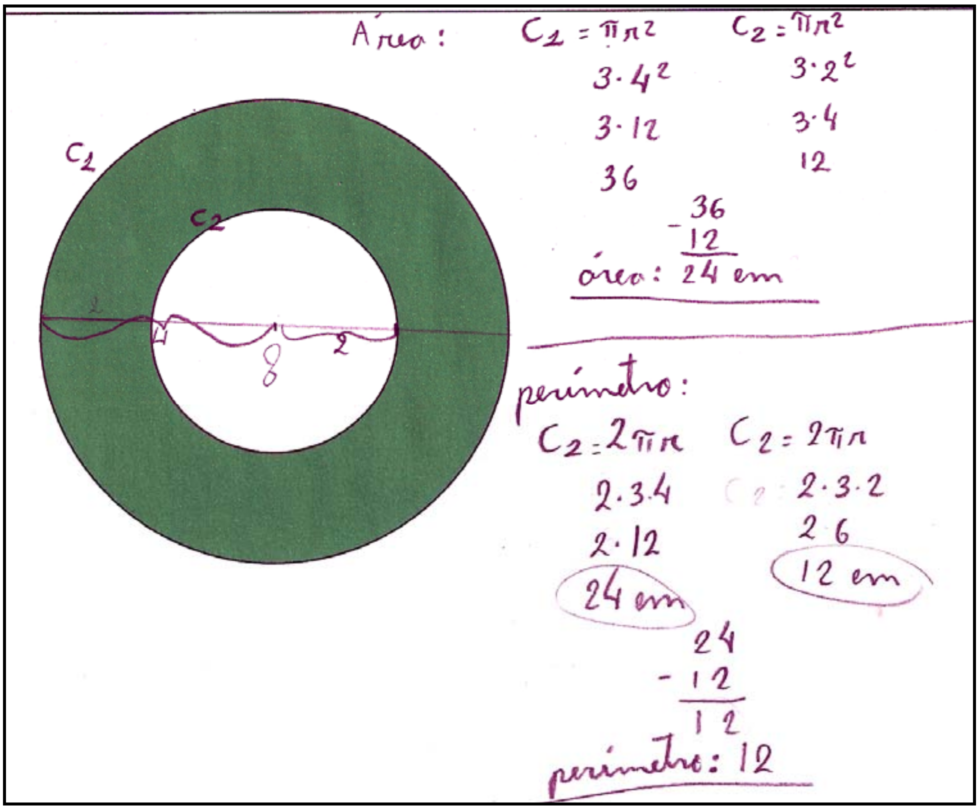


Figura 44 - *Registro escrito de Marte – Tarefa 6 – Desenhos, Cálculos e Anotações 3*

Passaremos, agora, a analisadas as últimas produções das alunas nesta pesquisa de campo, quando respondiam a algumas questões extras, ou seja, que não estavam contidas no conjunto de tarefas que aplicamos.

5.3.7 – Outras Produções de Significados dos Sujeitos de Pesquisa

Após a aplicação da última tarefa, a Tarefa 6, fizemos algumas perguntas aos sujeitos de pesquisa, com o objetivo de obter mais informações sobre os significados que eles produzem para área, perímetro e a relação entre estas grandezas. A primeira pergunta foi a registrada no seguinte trecho da transcrição:

Pesq – Tá. Então, a pergunta que eu ia fazer é a seguinte: vocês conseguem ver alguma relação entre área e perímetro?...

Marte – Não.

Ortência – ...Alguma relação clara entre área e perímetro?

Marte – Não, eu acho que eles são primos.

Ortência – Ah, rá. Primos? (Discretamente, voz baixa).
Pesq – Primos? Como assim?

Ortência – Não, pri... Pode falar. (Dirigindo-se a Marte).

Marte – Porque eles são... Fazem... são uma relação, são um valor...

(Com gestos e olhares, Ortência expressa ansiedade para falar, mas se contém e espera Marte falar).

Marte - ...Um número que explica... explica, não. Um número de um local, tipo, sabe... Um é o tamanho por fora, e o outro é o interior todo. Por fora e por dentro. Eu vejo assim.

Ortência – Eu já vejo diferente.

Pesq – Por que, então, que são primos?

Marte – É, entendeu, eles têm uma semelhança em alguns pontos, que é... Todas as figuras têm os dois lados... e, na hora de fazer a conta a gente encontra os dois, sabe?... Mas, na hora da resposta, na maioria das vezes não tem nada a ver.

Ortência – É...

Pesq – É? Você acha que não tem nenhuma relação direta? Quando um aumenta, o outro aumenta ou diminui?...

Ortência – Eu acho, eu acho.

Marte – Ah, não. Isso é. Eu tô falando, por exemplo, na resposta desse (aponta para a figura da estrela), sabe, na área total de uma figura fixa...

(...)

Marte – Uma figura fixa, eu acho os resultados completamente diferentes, tirando os quadrados.

Ortência – Eu...(Voz baixa).

Pesq – Entendi. Os quadrados são figuras especiais, em relação a área e perímetro?

Marte – Foram as únicas que eu vi até agora, que têm área e perímetro iguais.

Nas respostas dadas pelas alunas, no trecho acima, destacamos a fala de Marte. Primeiramente, quando ela se refere a uma característica como a área e perímetro, dando a entender que ambos são quantidades (ou quantificáveis), são "valores", "um é o tamanho por fora, e o outro é o interior todo". Ainda identificamos, pela expressão desta aluna, um significado que ela produz para o termo *primos*, ao se referir a área e perímetro: grandezas que "têm uma semelhança em alguns pontos", como o fato de *todas as figuras apresentarem estas grandezas*.

Já Ortência parece identificar diferenças entre área e perímetro. Com a intervenção do pesquisador, ela exibe sua produção de significados para a relação entre área e perímetro. Vejamos:

Ortência – Eu já acho que... Eu acho diferente, porque, tipo, a área é... você quer saber a... a dimensão não, mas... o perímetro também não, porque seria falar de outra coisa, mas a quantidade toda de figura. Por exemplo, a área de um terreno, tudo que tem de terreno, tudo que tá dentro da figura, igual ela tinha falado. E o perímetro é o contorno. Igual... o exemplo da corda, eu achei que foi ótimo pra poder ter noção de perímetro e área, porque o perímetro é só o contorno da figura, o perímetro é o contorno e a área é tudo o que tá dentro. Então, a maior parte das vezes, a área é maior que o perímetro. Eu consigo pensar talvez numa figura bem... bem não uniforme, assim, mais ou menos, por exemplo, ela teria que ser cheia de curvas e, assim, mais fina e, nesse caso, e acho que...

Pesq – Você consegue desenhar essa figura no quadro (lousa)?

(Ortência vai até a lousa e desenha, inicialmente, um quadrado).

Ortência – Só pra exemplificar o que eu tô falando. Por exemplo, a área é isso aqui (preenche o quadrado desenhado, usando o giz), o perímetro é só o que tá em volta, é só a cordinha que tava em volta. Achei esse exemplo muito bom.

(...)

Ortência – E a maior parte das figuras, pelo menos as que a gente teve contato até agora, a área é bem maior do que o perímetro. E eu tava pensando, enquanto ela tava falando, num exemplo em que o perímetro seja maior que a área.Talvez numa figura não uniforme, por assim dizer, que seria cheia de curva, e fina (desenha na lousa uma figura com forma de uma ameba estreita), com pouco espaço pra ter área, mas muito espaço de contorno. Num sei, alguma coisa assim, por exemplo. Eu acho que o perímetro dessa figura seria maior que a área, porque a área é só isso daqui (preenche parte da figura amorfa, usando giz), e o perímetro seria ela toda. Mas aí eu me pergunto como que eu faria pra calcular a área e o perímetro de uma figura dessa. (Risada). Eu não sei nem se tem como.

Vejamos um desenho que fizemos, semelhante ao de Ortência:

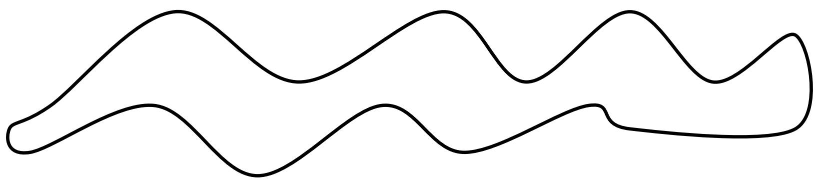


Figura 45 – *Desenho representativo da figura de Ortência*

E Ortência prossegue:

Pesq – É. Essa figura não é uma figura geométrica usual, né? Será que você poderia pegar uma figura usual, ou seja, que seria um polígono?

Ortência – Polígono? Não, não sei. Eu posso fazer um polígono irregular... aí eu não sei se eu saberia calcular também, mas... Isso seria um polígono. (Desenha na lousa uma figura de forma parecida com a anterior, mas poligonal).

Vejamos um outro desenho que fizemos, semelhante à segunda figura de Ortência:

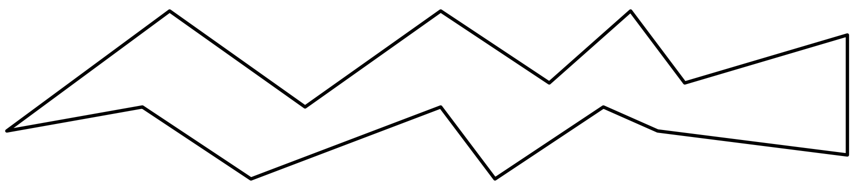


Figura 46 – *Desenho representativo da figura de Ortência 2*

Então o pesquisador faz nova intervenção:

Pesq – Nesta figura seria mais fácil calcular a área e o perímetro?

Ortência – Uma figura com muitas voltas e pouco espaço pra poder ter área.

Marte – É, ela te dá ideias e você pode ver ali figuras que você já conhece. Por exemplo, você vê ali um monte de triângulos e quadrados e retângulos...

Pesq – Figuras conhecidas, né?

Ortência – É. (E desenha triângulos e retângulos dentro da figura poligonal, dividindo-a em polígonos). Assim, ó, triângulo, triângulo, retângulo, quadrado, enfim, um monte de coisas.

A seguir, um outro desenho que fizemos, semelhante à terceira figura feita na lousa, por Ortência:

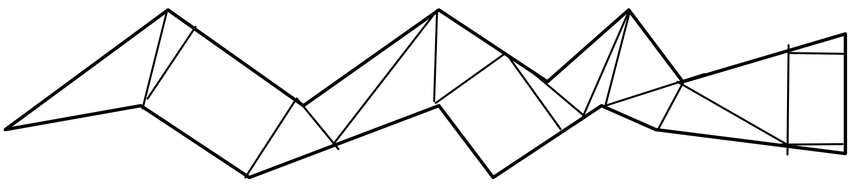


Figura 47 – *Desenho representativo da figura de Ortência 3*

E continua Ortência, justificando suas afirmações anteriores:

Ortência – Daria muito trabalho, mas daria pra calcular.

Pesq – Essa figura seria, então, um exemplo de que o perímetro pode ser maior que a área?

Ortência – Acho que sim, porque tem mais corda e menos...

Pesq – Então é possível.

Marte – É.

Ortência – É possível, mas é bem incomum.

Pesq – Então, de uma maneira geral, vocês acham que existe uma relação direta entre área e perímetro?

Ortência – Com certeza. Existe.

Marte – Hã hã. É tipo... Peraí que eu não tô lembrando. Ah, deixa pra lá, esqueci.

Ortência – Por exemplo, você tem o perímetro aqui, uma corda aqui (faz uma retângulo com as mãos no ar). Aí, se isso aqui aumentar (vai afastando as mãos uma da outra, aumentando a figura), consequentemente a área vai aumentar junto. O espaço ali dentro vai aumentar.

Marte – Tipo o volume e a área e a densidade, sabe? Tudo interligado.

Ortência – É.

Pesq – Volume, área e densidade?

Marte – É.

Ortência – É. O perímetro é tipo uma cordinha que segura a área. Eu gosto de pensar assim, tipo assim: tem uma coisa ali dentro que é a área, e o perímetro tá segurando ela, sabe? Se a área aumentar, o perímetro vai aumentar. Se o perímetro aumentar, a área aumenta também. Eles meio que obrigatoriamente dependem um do outro.

E, após uma longa discussão, com novas intervenções, Marte exibe um interessante modo de produzir significados para área e perímetro de três retângulos[70] desenhados pelo pesquisador na lousa, a partir do qual começam a negociar alguns outros significados. Observemos:

Pesq – E então, o quê que vocês me dizem dessa relação?

Ortência – É a forma da figura.

Marte – Ela foi espichando e... Foi emagrecendo e foi crescendo.

Ortência – Eu acho isso muito estranho. Eu não paro pra pensar nisso, às vezes. O perímetro continua sendo o mesmo; e a área, só por mudar sua forma, ela aumenta e diminui. Eu não consigo entender muito bem como, já que o perímetro continua sendo o mesmo; o que tinha dentro dele também era para continuar, mas muda completamente.

Marte – É tipo uma criança, é tipo uma criança. O A é um bebê, muito gordinho, só que pequenininho. Depois passa pra B, é... emagrece mais, não come mais e espicha, cresce, espicha. A gordura que ele tinha passa pra a altura. Depois, na C, ele emagrece completamente e fica completamente crescido. A gordura que ele tinha passa a ser a altura.

Ortência – Aaaah... (Voz baixa, expressando surpresa).

Pesq – Legal. E o quê que você me diz disso, Ortência?

Ortência – Ah, eu concordo. Eu achei muito legal o exemplo. Eu nunca teria pensado neste estilo.

Pesq – Então, aí eu vou voltar à pergunta. Vocês acham que esta relação se mantém?

Marte – Hã hã.

Pesq – Se a área aumenta, o perímetro aumenta; se a área diminui, o perímetro diminui; e se a área se mantém, o perímetro se mantém?

Ortência – Não, nem sempre. Tanto que ali (lousa) o perímetro se mantém em todos os três casos, e a área continua sendo completamente diferente.

Marte – É, pode variar, vai...

Ortência – Na Matemática, quase nunca você pode falar que uma coisa é sempre outra, porque sempre tem aquela exceção. Porque...

---

[70] O primeiro retângulo ele chamou de A (com lados 4 e 6 centímetros), o segundo ele nomeou de B (com lados 2 e 8 centímetros) e o terceiro, de C (lados 1 e 9 centímetro).

Marte – Você não pode criar muitas regras, você nunca conhece tudo.

Ortência – ...Porque você nunca conhece tudo, exatamente.

Marte – É impossível conhecer tudo na Matemática, porque, tipo, sai muito tirando os números que os filósofos, os lógicos, os...

Ortência – Os Matemáticos.

Marte – Não, também não é Matemáticos... Mas falam que a única coisa realmente verdadeira são os números, que é a única coisa que tem verdade, sabe? Que você sabe que um mais um é igual a dois.

Ortência – E é isso.

Marte – É isso. O resto, forma geométrica... não.

Pesq – Mesmo na Matemática, o resto dela, você não tem certeza?

Marte e **Ortência** – Não.

Pesq – Mas uma coisa vocês agora já estão percebendo: existe uma relação entre área e perímetro, mas esta relação não é...

Ortência – Constante.

Pesq - ...tão fixa assim, não é? Vocês já sabem que não é tão fixa assim.

Ortência – Exatamente.

Marte – É tipo o verbo regular e irregular, sabe, essas coisas assim da língua portuguesa, também. Na acentuação, a professora cria uma regra que quase sempre tá definitiva, mas sempre tem aquela palavrinha que o acento vai ser numa letra lá, sabe? Diferente a acentuação.

Esta negociação de significados entre pesquisador e alunos pode ser implementada nas aulas de Matemática, quando nos propomos a ouvir os alunos, dando sentido às palavras de Lins (1999), que já citamos anteriormente:

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999, p. 85)

Finalizamos esta seção, registrando que o fato de considerarmos que os diversos significados que as alunas produziram para os termos *área, perímetro e relação área-perímetro* são legítimos para elas, dá-nos condição de negociarmos novos significados e buscarmos um *caminhar juntos* – perspectivado pelo Modelo dos Campos Semânticos, a partir de interações e intervenções – nos processos de ensinar e de aprender.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Toda a análise que desenvolvemos, nesta investigação, permitiu-nos, efetivamente, levantar algumas dificuldades dos sujeitos de pesquisa, quando estes produziam significados para os objetos *área* e *perímetro de figuras geométricas planas*. Entre as dificuldades que identificamos, destaca-se a confusão entre área e perímetro, que aparece na análise da produção significados de Marte para todas as tarefas propostas na pesquisa de campo, com exceção da Tarefa 6. Pois, tanto pela transcrição quanto pelos registros escritos (fichas e caderno de campo) para tal tarefa, pareceu-nos que Marte não mais confundia as noções de perímetro e de área. Avaliamos que a ordem escolhida para apresentação desta série de tarefas, aos sujeitos de pesquisa, tenha permitido à aluna superar tal dificuldade, produzindo significados distintos aquelas noções geométricas. Neste caso, entendemos esta dificuldade como um obstáculo epistemológico, de acordo com o nosso referencial teórico.

Outra dificuldade que observamos, na produção de significados de Ortência para a Tarefa 1, foi o seu insucesso em operar com a noção de malhas ou ladrilhamento de figuras geométricas, como o retângulo. No entanto, a estudante não apresentou essa dificuldade em sua produção de significados para as demais tarefas, o que pode nos informar quais sejam as características de uma tarefa que coloque os alunos frente a uma situação incomum (não usual ou nova, para eles), de modo a favorecer-lhes a expressão de dificuldades relacionadas ao aprendizado desta ou de outras noções. Por exemplo, a Tarefa 1, ao trazer uma possibilidade de comparação entre duas figuras idênticas, embora apresentadas de formas diferentes, oferece oportunidade para que os alunos escolham entre um ou outro modo de produzir significados para os elementos daquelas figuras, em função de tal diferença entre a apresentação de cada figura, como a medida de um de seus lados ou a equidecomposição de sua superfície. As demais tarefas parecem não proporcionar tal oportunidade.

A mesma aluna, Ortência, apresenta uma dificuldade interessante, ao produzir significados para área e perímetro do círculo. Ela não consegue distinguir qual unidade métrica de área utilizar, para cada uma destas grandezas, e acaba por escolher o *centímetro* para medir comprimentos, expressar perímetros, mas também para mensurar e expressar áreas, justificando sua opção através da fala: “[...] não é um lado vezes o outro, não é uma medida vezes a outra. É uma medida só”. Observamos que esta dificuldade (relacionada à escolha da unidade métrica) apenas surgiu na tarefa 6 e, ainda assim, somente após lhe oferecermos a fórmula para calcular área do círculo. Importa, ainda, salientar que a citada dificuldade não foi observada na produção de significados dos sujeitos relativa às tarefas contendo figuras poligonais. Este fato nos remete à necessidade de se implementar novas pesquisas que investiguem modos didáticos de transformar dificuldades como esta em objetos de aprendizagem.

Na tarefa 3, Ortência revela a dificuldade de não conseguir medir a área da figura, utilizando unidades de área, como um quadrado, mas apenas a régua para calcular os lados da figura, para então calcular a área.

Outra dificuldade apresentada por ambas as alunas foi a de não conseguirem calcular a área de figuras não-poligonais, ao início da resolução da última tarefa, durante a qual Ortência parece ter vencido tal obstáculo epistemológico, produzindo significados para todas as figuras dadas. Por sua vez, Marte não conseguiu calcular a área da estrela apresentada na tarefa 6.

Entendemos que a ação de levantar tais dificuldades, a partir de uma série de tarefas elaboradas com este propósito, é um elemento-chave para que orientemos o nosso trabalho, em sala de aula, de modo coerente com os pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que nos oferece uma perspectiva nova para compreendermos os processos de aprendizagem de temas geométricos ou outro qualquer.

A partir do presente trabalho, identificamos, dentre outras, uma importante consequência do MCS na prática do educador matemático: a possibilidade de uma permanente mudança de direcionamento do trabalho docente, em função da identificação e da análise de produção de significados dos estudantes para os objetos de aprendizagem.

A presente investigação corrobora, ainda, o nosso posicionamento em relação à questão curricular, quando afirmamos que objetivos devem orientar conteúdos e métodos. É isto que tínhamos em mente ao elegermos os objetivos a partir dos quais o conjunto de tarefas (e também cada tarefa) seria elaborado. E, aplicadas as tarefas, pudemos identificar elementos da produção de significados dos sujeitos de pesquisa que ajudariam a redefinir as noções e os conteúdos a serem tratados em cada tarefa – de uma nova elaboração – e também o modo com o qual seriam tratados e *trabalhados* pelo professor, em sala de aula.

Desta forma, as orientações que traçamos para a aplicação do conjunto de tarefas, bem como a análise das produções de significados dos sujeitos de pesquisa para os elementos dessas tarefas, apoiada nos aportes do MCS, permitem-nos um novo *olhar* para sala de aula de Matemática, que diríamos *um tanto mais lúcido* do que o que tínhamos no passado, quando *ensinávamos sob neblinas* – como discutimos na introdução, lembrando as palavras de Georges Glaeser.

O trabalho de elaborar um produto educacional que pudesse orientar o trabalho do professor, ao ensinar área e perímetro, foi de notório crescimento para nós outros, de tal forma que se o estudo e o produto, por nós desenvolvidos, não fossem utilizados por mais nenhum outro professor, já teríamos atingido aqui o nosso propósito inicial, ao projetar e conceber a presente pesquisa.

Consideramos, ainda, de grande valor para o nosso aprimoramento pessoal, como pesquisadores e como professores, a oportunidade que nos foi oferecida por este Mestrado Profissional que, pela experiência e pela dedicação dos docentes do Programa, permitiu-nos abrir novos horizontes para a pesquisa em Educação Matemática, tendo como foco de atenção a sala de aula de Matemática da Educação Básica e seus elementos constituintes, subjacentes aos processos de aprendizagem e de ensino, sempre com vistas ao desenvolvimento amplo da criança e jovem, como cidadãos críticos, competentes para a vida social e, sobretudo, éticos.

Queremos considerar, por fim, que a pesquisa que apresentamos agora possa trazer contribuições para o campo em que se insere, estimulando o desenvolvimento de futuras investigações acerca da produção de significados sobre temas geométricos, e também acerca da reestruturação do currículo da Geometria Escolar. É nesta direção que pretendemos continuar a nossa trajetória na pesquisa em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica, 1999.

ALSINA, C. Three-dimensional citizens do not deserve a flatlanders´ Education: curriculum and 3-D geometry. In: Usiskin, Z.; Andersen, K.; Zotto, N. (Eds.). **Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference.** Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc., 2010. p. 147-154.

ALSINA I PASTELLS, A. **Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos para crianças de 6 a 12 anos**. Trad. de Vera Lúcia de Oliveira Dittrich. Curitiba, Brasil: Base Editorial, 2009.

BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito de área e perímetro: uma seqüência didática com o auxílio do software de Geometria dinâmica.** Londrina, Brasil: Universidade Estadual de Londrina, 2004.

BALDINO, R. R. Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. **Educação em Foco**, Editora da UFJF, Juiz de Fora, Brasil, v. 3, n. 1, p. 39-65, 1998.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étuide del'acquisition des relations entre lês longueurs et les aires au collège.** Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995. (Coleção do Professor de Matemática).

BATTISTA, M. The development of Geometric and spatial thinking. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. NCTM/Information Age Publishing, pp.843-908. Charlotte, NC, 2007.

BELLEMAIN, P. M. B. A aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. **Anais...** Santos, São Paulo, 2003.

BIGODE, A. J. L. Gestão de Interações e Produção de Conhecimento Matemático em um Ambiente de Inspiração Lakatosiana. **Educação Matemática em Revista**, n. 7, ano 6. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011: Matemática.** Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília: MEC, SEB; INEP, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (Terceiro e Quarto Ciclos). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (Primeiro e Segundo Ciclos). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BRITO, A. A. da S.; NASCIMENTO, H. L.; PIROLA, N. A. O desempenho de alunos formados e recém egressos do ensino fundamental em problemas envolvendo o conceito de área. In: III SIPEM, 2006, Águas de Lindóia. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2006 (versão em CD-ROM).

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198. Grenoble: RDM, 1983.

CARLIN, R. W. **A comparative study of Geometry Curricula.** Thesis of Master of Natural Sciences. Louisiana State University, 2009. Disponível em: <http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07082009-143307/unrestricted/carlinthesis.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2010.

CHAMORRO, M.C. **Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental**. Doctoral thesis. Madrid: UNED, 1997. Disponível em: <http://tesis.com.es/documentos/estudio-situaciones-ensenanza-medida-escuela-elemental/>. Acesso em: 15 out. 2010.

CHAPPELL, M.; THOMPSON, D. Perimeter or Area? Which measure is it? **Teaching Mathematics in the Middle School**, NTCM, v.1, n. 5, p. 20-23, Reston, VA, 1999.

CHIUMMO, A. **O Conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade católica da São Paulo, São Paulo: PUC-SP, 1998.

CLEMENTS, D.; BRIGHT, G. **2003 yearbook: Learning and Teaching Measurement**. Reston, VA: NCTM, 2003.

CLEMENTS, D.; STEFHAN, M. Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. In: Clements, D.; Sarama, J.; DiBiasi, A.-M. (Eds.). **Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates**. Mahwah, NJ, 2004. p. 299-320.

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.). **The Emergence of Mathematical Meaning - Interaction in Classroom Cultures.** Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1995.

COSTA, C. **Visualização, veículo para a educação em geometria.** Coimbra: Escola Superior de Coimbra, 2000. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2011.

D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers and students. **Mediterranean journal for research in mathematics education** (Cyprus Mathematical Society). v. 5, n. 2. p.1-29. Nicosia, Cipro: Università di Cipro, 2006. Disponível em: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/590%20Area%20and%20Perimeter.pdf >. Acesso em: 20 jan. 2011.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. Un processus d´apprentissage du concept d´aire de surface plane.In: **Educational Studies in Mathematics**. n. 20, p. 387-42, 1989. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/k5308m252884tr51/> Acesso em: 03 nov. 2009.

FERNANDES, M. C. V.; NEVES, J. U. Importância do Desenho Geométrico no Ensino de Geometria na Educação Fundamental. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES, 3., 2000, Ouro Preto. **Atas...** Ouro Preto, Brasil: UFOP, 2000.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FRENCH, D. **Teaching and learning geometry.** London: Continuum, 2004.

GLAESER, G. La didactique expérimentale des mathématiques. **Bulletin de l'APMEP**, n. 332, p. 82-92. Paris: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), 1982.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Revista Acta Scientiae**, v. 10, n. 1, p. 7-37. Canoas, Brasil: Ed. ULBRA, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C. Significado institucional y personal de los conceptos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 4, n. 3, p. 325-353, 1994.

GOLDIN, A. G. Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In: ENGLISH, L. D. (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2002. p. 197-218

GOODMAN, N. **Of mind and others matters.** London: Harvard University Press, 1984.

HENRIQUES, M. D. **Produção de significados e a noção de áreas de figuras planas.** Monografia apresentada como trabalho de conclusão do Curso de Especialização em Educação Geométrica do ICE/Universsidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, Minas Gerais: UFJF, 2007.

HENRIQUES, M. D.; SILVA, A. M. Significados producidos por estudiantes secundarios brasileños para área de figuras planas. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 6., 2009, Puerto Montt. **Actas…** Puerto Montt, Chile: FISEM, 2009. v.1, p. 580-585.

HERNANDEZ, B. **Creative ideas for teaching area and perimeter: ideas for teaching math.** About.com, 2008. Disponível em: <http://homeschooling.about.com/od/basicmath/qt/teachingarea.htm>. Acesso em: 21 nov. 2009.

HERSHKOWITZ, R. About Reasoning in Geometry. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.), **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1998. p. 29-83.

HOUDEMENT, C. Geometrical working space, a tool for comparison. In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR THE RESEARCH OF MATHEMATICS EDUCATION, 5., 2007, Chipre. **Proceedings…** University of Cyprus, 2007. p. 972-981.

HOUDEMENT, C.; KUZNIAK, A. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Bellaria. **Proceedings…** Bellaria, Italy, 2003.

HOYLES, C.; FOXMAN, D.; KÜCHEMANN, D. **A Comparative Study of Geometry Curricula.** London: Qualifications and Curriculum Authority, 2002.

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION. **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion**

document for an ICMI study, L'Enseignement Mathématique, vol. 40, pp. 345-357. Catania, Italia: ICMI, 1994.

JIROTKOVA, D.; LITTLER, G. H. Investigating cognitive and communicative processes through children's handling of solids. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 26., 2002, Norwich. **Proceedings…** Norwich, UK, 2002. v. 3, p. 145-152.

JONES, K. Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. In: USISKIN, Z.; ANDERSEN, K.; ZOTTO, N. (Eds.). **Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry.** Charlotte, NC: Infoage, 2010. p. 203-216.

JONES, K. Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In: Barton B. (Ed.), **Readings in Mathematics Education.** Auckland, New Zealand: University of Auckland, 2000. p 75-90.

JONES, K; MOONEY, C. Make Space for Geometry in Primary Mathematics. In: THOMPSON, I. (Ed.). **Enhancing Primary Mathematics Teaching**, London: Open University Press, 2003. p 3-15.

KALEFF, A . M.; NASCIMENTO; R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 44, 11-42. UFRRJ, 2004.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade: abordagens possíveis para a educação.** Tese de Doutorado. Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ, 2006.

KORDAKI, M. The effect of tools of a computer microworld on student’s strategies regarding the concept of conservation of area. **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 177-209, 2003.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas.** 5 ed. São Paulo: Perspectiva, 1998.

LAKATOS, I. **A Lógica do Conhecimento Matemático: Provas e Refutações.** Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LAMONATO, M. **Investigando geometria: aprendizagens de professoras da Educação Infantil.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, 2007.

LEHRER, R. Developing understanding of measurement. In Kilpatrick, J.; Martin, W.; Schifter, D. (Eds.). **A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics**, Reston, VA: NCTM, 2003. p. 179-192.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotsky, L. S. (Dir.), **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2006. p. 59-83.

LEUNG, A. Mathematics lesson on perimeter and area. In: **Learning Study 5**, 2001. Ddisponível em: <www.iediis4.ied.edu.hk/cidv/webdata/>. Acesso em 16 jan. 2010.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria. Comprimento, área, volume e semelhança.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

LINS, R. C. A diferença como oportunidade de aprender. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 14., 2008, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre, Brasil: PUCRS, 2008. p. 530-550.

LINS, R. C. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**, v. 18, p. 12-20. Campinas, Brasil: PUC-Campinas, 2005a.

LINS, R. C. Categories of every life as elements organizing mathematics teacher education and development projects. In: LINS, R.; OLIMPIO, A. **15th ICMI Study 'The professional education and development of teachers of mathematics': contributed papers, demonstrations and worksessions.** São Paulo: UNESP/ICMI, 2005b.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, M.A.V. (Ed.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo, Brasil: EDUNESP, 2004. p. 92-120.

LINS, R. C. The production of meaning for algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In: SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. (Eds.). **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 37-60.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 75-94.

LINS, R. C. Luchar por la supervivencia: la producción de significados. **UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 1, n. 14, p. 39-46. Barcelona: Graó, 1997.

LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: ESCOLA LATINO-AMERICANA SOBRE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 3., 1996, Canela. **Anais...** Canela, Rio Grande do Sul: UFRGS, 1996. p. 137-141.

LINS, R. C. Epistemologia e Matemática. **Revista Bolema**, v. 9, n. 3, p. 35-46. Rio Claro, Brasil: UNESP, 1995.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**. abril/junho. v.1, n. 7, p. 29-39. Blumenau: FURB, 1994.

LINS, R.C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. **Revista de Educação Matemática** da SBEM-SP, Ano 1, n.1, São Paulo: SBEM-SP, 1993.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is.** Doutorado em Educação Matemática. Nottingham, Inglaterra: University of Nottingham, 1992.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, Brasil: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática), 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: Stacey, K.; Chick, H. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 37-60

LINDQUIST, M. M.; KOUBA, V. L. Measurement. In: Lindquist, M. M. (Ed.). **Results from the Mathematics Assessment of the Natonal Assessment Of Educational Progress**. Reston, Va: NCTM, 1989. p. 35-43

LOUREIRO, C. Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. **Lisboa, Educação e Matemática,** n. 105, Lisboa, 2009.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, Brasil: UFPE, 2011. Disponível em: <http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1040/150>. Acesso em: 10 jul. 2011.

LURIA, A. R. O cérebro humano e a atividade consciente. In: Vigotsky, L. S. (Org.). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2006. p. 191-228

LURIA, A. R. **Curso de Psicologia Geral: Introdução Evolucionista à Psicologia.** v. 1. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

MAJMUTOV, M. I. **La enseñanza problémica.** La Habana: Ed. Pueblo y Educación, 1983.

MALLOY, C. E. Perimeter and Area Through the van Hiele Model.In: **Mathematics Theching in the Middle School**, vol. 5, n. 2, p. 87-90, NCTM, 1999.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study.** Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1998.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental.** 147 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: IGCE/UNESP, 2002.

MELO, M. A. P. **Um estudo de conhecimentos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro.** Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Recife, Brasil: UFPE, 2003.

MORRIS, R. **Studies in mathematics education volume 5: Geometry in schools.** Paris: Unesco, 1986.

NAIDOO, N; NAIDOO, R. An Evolution in Pedagogy: The Learning of Area and Perimeter in a Technology Enhanced Classroom. Readings in Education and Technology. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN EDUCATION, 2008, Corfu. **Proceedings…** Corfu, Geece, 2008. p. 213-222.

NETO, A. A. **Geometria: 2º Grau.** São Paulo: Editora Moderna, 1982. (Série Noções de Matemática, v. 5).

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. **Lisboa: APM, 2007. (Trabalho original, em Inglês, publicado em 2000).**

NUNES, T. Sistema de signos e aprendizagem conceptual. In: **Quadrante**, vol. 4, n. 1, p.7-24. Lisboa: APM, 1995.

NUNES, T.; LIGHT, P.; MASON, J. Tools for thought: the measurement of length and area. **Learning and Instruction**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1993. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search>. Acesso em: 15 fev. 2010.

NUNES DA SILVA, S. F. **Geometria nas Séries Iniciais: Por que não? A Escolha de Conteúdos – Uma tarefa Reveladora da Capacidade de Decidir dos Docentes.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006.

OUTHRED, L. N.; MITCHELMORE, M. C. Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. In: **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 31, p. 144-167, 2000. Disponível em: <http://www.jstor.org/pss/749749>. Acesso em: 12.Junho.2010.

OWENS, K; OUTHRED, L. The complexity of learning Geometry and Measurement. In: Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p.83-115.

PANAOURA, G.; GAGATSIS, A. Investigating the structures of students' geometrical performance. In: GAGATSIS, A. (Ed.). **Research in Mathematics Education**. Nicosia: University of Cyprus, 2008. p. 131-143

PAVANELLO, R. M. Que Geometria pode ser significativa para a vida? **Programa Salto para o Futuro**, TV Escola, 2004. Disponível em: **<**http://www.youtube.com/watch?v=ueQTHWjuFY0>. Acesso em 13 jan. 2009.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança.** Tradução de: Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Arte Médicas, 1993.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede.** São Paulo: FTD, 2000.

PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas.** Tese de Doutorado (em Educação Matemática). Campinas, Brasil: UNICAMP, 2000.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. In: Maher, C. A. (Ed.). **Journal of Mathematical Behavior**, v. 4, n. 22, p. 405-435. New Brunswick, USA: Rutgers University, 2003.

RADFORD, L. Semiótica Cultural e Cognición. In: REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, 18., 2004, Chiapas. **Actas…** México: Universiad Autónoma de Chiapas, 2004.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Campinas, Brasil: Editora da UNICAMP, 2000.

SANTAELLA, L. **Cultura das Mídias.** São Paulo: Brasiliense, 1996.

SANTOS, C. A. B. **Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro.** 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2008.

SEVERINO, A. J. Competência técnica e sensibilidade ético-política: o desafio da formação dos professores. **Cadernos FEDEP-SP**, n. 1, p. 7-20. São Paulo, 2002.

SILVA, A. M. da **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. Tese de Doutorado.** Rio Claro, Brasil: UNESP, 2003.

SILVA, A. M. da **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear.** 162p. Dissertação de Mestrado (Educação Matemática). Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1997.

SILVA, J. A. As Relações entre Área e Perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**, v. 3, p. 81-104, Rio Claro, Brasil: UNESP, 2009.

SKOLVERKET. **TIMSS 2007. Swedish Pupils' Mathematical Knowledge (Trends in International Mathematics and Science Study), an analysis**. (Report 323, 2008). Stockholm: Skolverket, 2008. Disponível em: <http://www.skolverket.se/2.2467/2.3903/2.3904/2.1143/publications-in-english-1.11289>. Acesso em: 04 mar. 2010.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia.** Campinas, Brasil: Papirus, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SOUZA, L. A.; GARNICA, A. V. M. Formação de professores de matemática: Um estudo sobre a influência da formação Pedagógica prévia em um curso de licenciatura. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 1, p. 23-39, 2004.

TELES, R. A. M. Um estudo sobre fórmulas de área em livros didáticos brasileiros. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 6., 2009, Puerto Montt. **Actas...** Puerto Montt, Chile: FISEM, 2009. v.1., p. 499-504.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDIQUIST, M. e SHULTE. A. P. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, 1994. p.21-37. (Trad. Hygino H. DOMINGUES).

VERGNAUD, G. **Atividade humana e conceitualização.** Porto Alegre: Comunicação Impressa, 2008.

VIANA, O. A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.** Tese de Doutorado (Educação Matemática). Campinas, Brasil: Universidade Estadual de Campinas, 2005.

VELOSO. E. **Geometria: temas actuais: materiais para professores.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.

VYGOTSKY, L. S. **A formação Social da Mente.** São Paulo, Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 1993.

YEO, J. K. H. Teaching Area and Perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content Knowledge-in-Action. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 31., 2008. **Proceedings...**. MERGA, 2008. p. 621-627.

ZUIN, E. S. L. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED (Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Educação), 15., Caxambu, Minas Gerais. **Anais...** Caxambu, Brasil, 2002. 1 CD-ROM.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BARRETT, J. E.; CLEMENTS, D. H.; KLANDERMAN, D.; PENNISI, S.; POLAKI, M. V. Students' coordination of geometric reasoning and measuring strategies on a fixed perimeter task: Developing mathematical understanding of linear measurement. In: **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 3, n. 37, p. 187-221, 2006.

BAUER, M. W.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático.** (P. A. Guareschi, Trad.). Petrópolis, Brasil: Vozes, 2002.

BEATTIE, T.; DER, E.; DUDANI, K.; GRATON A.; LOWDER, M. **Perimeter and Area.** UCIrvine, 2009. Disponível em: <https://eee.uci.edu/wiki/index.php/Perimeter_and_Area>. Acesso em: 21 mar. 2011.

CABARITI, E.; JAHN, A. P. A Geometria Hiperbólica na Formação Docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do Cabri-géomètre. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia, São Paulo: SBEM, 2006. v. 1, p. 18-28.

CHAMORRO, M. C. Le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base. **La matematica e la sua didattica.** Part I: 4, 2001, 332-351. Part II: 1, 2002, p. 58-77, 2001-02.

CLEMENTS, D. H. Mathematics in the preschool . **Teaching Children Mathematics**, n. 7, p. 270-275, 2001. Disponível em: <http://gse.buffalo.edu/fas/Clements/files/Preschool_Math_in_TCM.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2011.

CLEMENTS, D. H. Your child's geometric world. **Scholastic Parent & Child**, october/november, p. 48-54, 1999. Disponível em: <http://investigations.terc.edu/library/bookpapers/your_childs_geometric.cfm>. Acesso em: 19 jun.2011.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em Matemática: Registros e Representação Semiótica**, Campinas /SP: Papirus, 2003. p.11-33. (Coleção Papirus Educação).

EDO, M. Intuir y construir nociones geométricas desarrollando sentimientos y emociones estéticas (Ponencia núcleo temático 3). In: JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, 9., 2003. **Actas…** Canarias, 2003.

EDO, M. Reflexiones para una propuesta de geometría en el parvulario. **Suma**, n. 32, noviembre, pp. 53-60, 1999. Disponível em: http://pagines.uab.cat/meque/sites/pagines.uab.cat.meque/files/edo_geom_suma_0.pdf.>. Acesso em 23 mar. 2010.

EDUCATION DEVELOPMENT CENTER, Inc. **Connected Geometry**. Chicago: Everyday Learning Corporation, 2000.

EYSENK, M. W.; KEANE, M. T. **Psicologia Cognitiva – Um manual introdutório.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem.** Dissertação de Mestrado (Educação Matemática). São Paulo: PUC-SP, 2003.

FERRER, B. B.; HUNTER, B.; IRWIN, K. C.; SHELDON, M.J.; THOMPSON, C.S.; VISTRO-YU, C.P. By the unit or square unit? **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 7, p. 132-136, 2001.

GÁLVEZ, G. A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, C; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em civilizações e povos e a formação de professores**. Tese de Doutorado (Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: UNESP, 2003.

FUJITA, T.; JONES, K. The place of experimental tasks in geometry teaching: learning from the textbook designs of the early 20th century. **Research in Mathematics Education**, v. 5, n.1, p. 47-62, 2003. Disponível em: <http://eprints.soton.ac.uk/11247/>. Acesso em: 14 mai. 2010.

GILL, R. Análise de discurso. In: Bauer, M. W.; Gaskell, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático.** (P. A. Guareschi, Trad.). Petrópolis, Brasil: Vozes, 2002.

GIMÉNEZ, J. Aprendiendo a enseñar geometría en primaria: análisis de simulaciones sobre la intervención. **Revista ELectrónica de Investigación y Evaluación Educativa,** v. 5, n. 2, Espanha: Universidad de Cádiz, 1998.

GIMÉNEZ, J.; BAIRRAL, M. Improving teachers critical thinking in a ¨on line¨ geometry course. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 25., 2001, Utrecht. **Proceedings…**. Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v. 1, p. 309.

GOUGH, J. Fixing misconceptions: Length, area and volume.In: **Prime Number,** v. 3, n. 19, p. 8-14, 2004. Disponível em: <http://findarticles.com/p/articles/mi_7030/is_2_64/ai_n28548259/>. Acesso em: 01 jul. 2010.

IEZZI, G; DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar.** Geometria Plana.Vol. 9. São Paulo: Atual, 1980.

JAQUET, F. Il conflitto area - perimetro. **L’educazione matematica**. Part I: n. 2, v. 2, p. 66-77; Part II: n. 2, v. 3, p. 126-143, 2000.

KORDAKI M.; POTARI D. Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts.In: **Journal of Mathematical Behaviour,** v. 17, n. 3, p. 303-316. Patras, Geece: Elsevier, 1998.

MALKEVITCH, J. Finding room in the curriculum for recent geometry. In: MAMMANA, C. and VILLANI, V., **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study**, Dordrecht: : Kluwer Academic Publisher, 1998.

MARQUESIN, D. F. B. **Práticas compartilhadas e a produção de narrativas sobre aulas de Geometria: o processo de desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.** 242p. Dissertação (Mestrado em Educação – Linha de Pesquisa: Matemática, cultura e práticas pedagógicas). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2007.

MEDICI D.; MARCHETTI P.; VIGHI P.; ZACCOMER E. **Comparing perimeters and areas children's pre-conceptions and spontaneous procedures.** (Text presented at CERME 4), 2005. Disponível em: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/7/wg7listofpapers.htm>. Acesso em: 23 jul. 2010.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A Geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: EdUFcar, 2003.

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development). **The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills**. Paris: Author, 2003.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro, Brasil: UNESP, 2002.

PAPADOPOULOS, I.; DAGDILELIS, V. Estimatins Areas and Verifying Calculations in the Tradidional and Computational Environment. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33., 2009, Thessaloniki. **Proceedings…** Thessaloniki, Greece: PME, 2009. v. 4, p. 305-312.

RECTANUS, C. **Math by all means: Area and perimeter grades 5-6.** Sausalito: Math Solutions Publications, 1997.

RICKARD, A. Constant perimeter, varying area: A case study of teaching and learning mathematics to design. **Journal of American Indian Education**, v. 3, n. 33, p. 80-100, 2005. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search>. Acesso em: 30 ago. 2011.

SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. O papel do livro didático no estudo das noções de área e perímetro. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 6., 2009, Puerto Montt. **Actas...** Puerto Montt, Chile: FISEM, 2009. v.1., p. 580-585.

SANTOS, G. H. O. **Uma Leitura da produção de significados de pessoas com deficiência visual para a geometria.** Dissertação de Mestrado. Juiz de Fora, Brasil: Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora, 2006.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva.** (Trad. M. R. B. OSÓRIO). Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

STRUTCHENS, M.; HARRIS, K.; MARTIN, G. Assessing geometric and measurement understanding using manipulatives. **Mathematics Teaching in the Middle School**, n. 6, p. 402-405, 2001, NCTM. Disponível em: <http://www.nctm.org/profdev/content.aspx?id=23596>. Acesso em: 15 abr. 2010.

ANEXOS

ANEXO I

UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem a pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática/UFJF, e a utilização dos dados nela coletados. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre os envolvidos e o tratamento e uso das informações que serão colhidas.

As entrevistas, videografadas e transcritas, servirão como material para nossas pesquisas que procuram investigar o processo de produção de significados para a área e perímetro por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. O acesso ao conteúdo dos vídeos será de uso exclusivo da pesquisadora e dos pesquisadores do Núcleo de Investigação e Divulgação dos Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, que assumem o compromisso de não divulgar a imagem ou informações que permitam identificar os sujeitos de pesquisa.

As informações provenientes da análise dessas entrevistas poderão ser utilizadas pelos citados pesquisadores em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Juiz de Fora, 09 de agosto de 2011.

____
Amarildo M. da Silva
Orientador da pesquisa

____
Marcílio Dias Henriques
Pesquisador

____
Responsável pelo Sujeito de Pesquisa

ANEXO II

TRANSCRIÇÃO[71] DA PESQUISA DE CAMPO

Sujeitos de Pesquisa: Ortência e Marte (pseudônimos).

TAREFA 1

Após ligeiras explicações acerca dos objetivos da pesquisa, o pesquisador entrega as folhas contendo a Tarefa 1 para os sujeitos de pesquisa, que a pedido nosso se auto-alcunharam exatamente como Ortência e Marte.

Ortência – É só isso?... Tô achando tão fácil... (Ao ler a primeira tarefa).

Marte – É...

(Pesquisador sai da sala. Segundos depois, Marte dá risadas tímidas).

Ortência – Você não considera sob pressão?

Marte – Não. (sorrindo)

Ortência – Nem eu, fazer o que?...

(Silêncio, elas lendo).

Ortência – Será que é só isso mesmo?

Marte – (Sussurra algumas palavras, sorrindo). O ruim é que não dá nem pra falar nada... Na frente dele, mas ele saiu e a câmera tá aí.

Ortência – É. (sorrindo)

Marte – (Comparando as medidas dos retângulos usando o lápis). Se faltar um milímetro... Tipo, tem que ser exatamente do mesmo tamanho?

Ortência – O quê que tem que ser exatamente do mesmo tamanho?

Marte – Ó. (Apontando para as duas figuras).

Ortência – Elas parecem que são iguais, mas...

Marte – Hã hã... Se a gente coloca o coisa (lápis) aqui (lado superior da figura 1), ó...

Ortência – Elas têm o mesmo tamanho.

Marte – É.

Ortência – A questão é que a gente não sabe se elas têm o mesmo tamanho. Porque a figura 2 tá quadriculada? Não tem nenhuma coisa que pergunte sobre isso.

[71] Nas transcrições das falas ou expressões videografadas, as seguintes convenções foram usadas: *a)* os sujeitos de pesquisa são identificados por seus pseudônimos e o pesquisador pela abreviação Pesq; *b)* parênteses são usados para indicar gestões, expressões e atitudes dos sujeitos de pesquisa; *c)* reticências indicam pausa prolongada; *d)* reticências entre parênteses indicam omissão de parte da transcrição; *e)* barras indicam interrupção súbita ou mudança na direção da fala; *f)* aspas indicam que o sujeito de pesquisa está lendo o que está dizendo.

Marte – Mas, pra ele, talvez seja pra gente ver isso mesmo, entendeu?

Ortência – Entendi. Porque não tem nenhuma questão que pergunte, tipo assim, qual é a área dos quadrados ou nada disso.

Marte – É isso aí. Então, como é que faz? A gente escreve sim?... É meio, assim...

Ortência – A gente vai acabar isso aqui em dois minutos.

(Marte olha para a resolução de Ortência).

Ortência – Tira os zói, copiona! (Risadas).

Marte – Gente, eu fico muito nervosa sob pressão!

Ortência – Num tem pressão nenhuma!

Marte – Claro que tem!... Tem aquela câmera ali.

Ortência – Mas é só pra ver como a gente raciocinou.

Marte – Não precisa fazer para a figura 1, porque são do mesmo tamanho.

Ortência – Essa daqui não tem medida. (Aponta para a figura 2).

Marte – Ah! Eu sei... Olha só: um, dois, três, quatro, cinco, seis. (Contando os quadradinhos da linha superior da figura 2).

Ortência – Você não tinha percebido isso?

Marte – Não.

Ortência – Cada quadradinho tem um centímetro.

(Marte conta novamente os quadradinhos, apontando com o lápis a figura 2).

Ortência – Cada quadradinho tem um centímetro!

Marte – Eu sei disso! Eu posso fazer do jeito que eu quiser! (Risadas)

(Ambas escrevendo e apagando. O pesquisador retorna à sala).

Marte – Professor, você tem certeza que é só isso?

Ortência – É, a gente tava pensando nisso.

Pesq – Sim. É só isso. Pra começar é só isso.

Marte – Ah! Pra começar!...

Pesq – Vocês estão achando muito fácil?

Ortência – Sim.

Marte – Não, tipo, fácil ainda é pouco!...

Ortência – Professor, não sei porque eu coloquei figura 1 se as duas figuras são do mesmo tamanho, as duas falam da... São a mesma coisa, então?... Não precisa fazer das duas.

Marte – Tem alguma pegadinha?

Pesq – Não, não tem pegadinha. O trabalho é mesmo esse aí. Mas você falou o que mesmo, Ortência? Não precisa fazer das duas figuras?

Ortência – Sim, elas são iguais.

Marte – Não, eu acho que não.

Ortência – Não pergunta sobre a 1 e a 2, eu pensei em fazer sobre as duas. Só que essa é igual a essa.

Pesq – Hum hum.

Ortência – Ele não vai responder, não falei. (Olhando para Marte).

Pesq – Mas você escreveu sobre qual figura?

Ortência – Escrevi sobre a figura 1. A figura 2 tá quadriculada, mas ela é a mesma que essa. Cada quadradinho tem um por um.

Pesq – Tá.

Ortência – Porque quatro nesse e quatro nesse, seis nesse e seis nesse... (olha para o pesquisador, apreensiva). Aí, precisa fazer das duas?

Marte – Não.

Ortência – Elas são a mesma?...

Marte – É.

Pesq – Você faria diferente se fosse a figura 2?

Marte – Ah!... Agora eu entendi! Ele quer saber se tivesse só essa daqui ou só essa daqui? Por exemplo, se não tivesse essa (aponta a figura 1), e todos os quadrados são iguais; qual seria a medida do retângulo, é isso?

Ortência – Entendi. Sim, só que...

(Silêncio por trinta segundos).

Pesq – Você, Ortência, fez olhando a figura 1, certo? Mas e se só tivesse a figura 2, como faria?

Marte – Contar quantos quadrados tem.

Ortência – Mas com é que você saberia que o quadrado tem um centímetro?

Marte – Não, porque... Aí...

Ortência – Você teria que medir, por exemplo.

Marte – Mas aí eu poderia estimatizar, não?...

Pesq – Estimar?

Ortência – Isso. É o que eu ia falar.

Pesq – Sim, você poderia estimar.

Ortência – Mas você não teria como ter certeza. Eu nunca faria um cálculo sem saber com certeza se isso aqui tem um centímetro ou não. Eu acho que eu ficaria um pouco perdida só com a figura 2, porque eu não saberia a medida. Só se eu tivesse uma régua...

Marte – Mas na falta da régua, da certeza, você tem ir pelo que você tem, né?

Pesq – Hum hum. Você vai usar um outro instrumento de medida.

Marte – Sim.

Pesq – Mas aqui neste caso, os retângulos são iguais. Você pode usar os dados de um para calcular as medidas do outro?

Ortência – Sim. Eu faria do mesmo jeito.

Pesq – Do mesmo jeito?

Ortência – Faria. Porque, independente dela tá quadriculada, eu quero saber a área dela toda.

Pesq – Antes você falou que contaria os quadradinhos?

Ortência – Não. Foi ela.

Marte – Se eu tivesse só isso daqui (apontando a figura 2).

Ortência – Sem medida e sem nada? Mas, de quê que adiantaria contar os quadradinhos? Saberia...

Marte – A gente somaria, porque cada quadrado teria um centímetro. Porque dá pra ver, né?

Pesq – Você iria contar como? Pode mostrar?

Marte – Um, dois, três, quatro, cinco, seis (apontando para os quadradinhos na linha superior do retângulo 2).

Ortência – Seis centímetros.

Marte – Aí eu poderia multiplicar a altura pelo lado.

Ortência – Teria vinte e quatro quadrados, como...

Marte – É. Ou então conta tudo.

Ortência – Ah!... Eu pensei numa coisa: como você não precisaria fazer a multiplicação... não tecnicamente... contaria, então você faz a multiplicação. Então você faz seis quadrados por quatro quadrados, vinte e quatro quadrados; cada um tem um centímetro, vinte e quatro centímetros quadrados.

Pesq – Entendi.

Ortência – Então eu acho que eu faria do mesmo jeito se eu tivesse as medidas, independente dela tá quadriculada. Isso que eu falei pra ela no início, quando você não tava aqui. Não adianta ela tá quadriculada; não pergunta nada em relação aos quadriculados.

Pesq – E se não tivesse medida, apenas quadriculado?

Ortência – Aí o quadriculado ajudaria, como ela falou...

Marte – Aí você estimatiza...

Ortência – Se você não tem nada, é preferível você estimar alguma coisa.

Marte – É. Se você não tem cão caça com gato. Eu quis falar isso!

(Risadas).

Pesq – Beleza.

Ortência – Mas então, se eu faria do mesmo jeito, eu não preciso fazer da outra, né? Eu faria do mesmo jeito, eu acho.

(Ambas escrevendo por um minuto. Ortência para de escrever e olha para a folha de Marte).

Ortência – Se o seu exercício tivesse errado, você gostaria que eu corrigisse? (Dirigindo-se a Marte).

Marte – Hã hã.

Ortência – Sim, né?... Perímetro não é um lado mais o outro, mas a soma de todos os lados. É seis mais seis mais quatro mais quatro.

Marte – Ah... Realmente. Obrigada. (Refaz os seus cálculos)

(Ortência escreve e Marte a observa).

Marte – Cúbico não tem, não?

Ortência – Quê que tem cúbico?

Marte – Não rola cúbico, não?

Ortência – Cúbico? Não, porque... Isso é só quando tem multiplicação, por exemplo, aqui tem um lado vezes o outro, então fica centímetro quadrado. Se fosse um lado vezes o outro vezes o outro, centímetro cúbico. Mas com é só soma, fica centímetro comum. Era isso que eu fiquei aqui parada, pensando.

Marte – E quando tem multiplicação e adição, pra achar quanto mede?

Ortência – Como assim? Por exemplo?...

Marte – Não tem exemplo, não. É, nunca acontece, não.

Ortência – É, isso que eu fiquei pensando.

Marte – A gente acabou, não acabou?

Ortência – É, acabamos.

Pesq – Vocês acham que fizeram direitinho os cálculos?

Marte – Sim. Só que eu... errei o perímetro. Eu errei. (Tímida).

Pesq – Mas o que você pensou ao resolver esta questão?

Marte – Eu tinha esquecido, eu coloquei como se fosse área, também, só que eu somei. Eu tinha esquecido que a gente tem que somar todos os lados pra dar o perímetro.

Pesq – E você achou que confundiu com área por quê?

Marte – Porque faz um tempão que eu não faço essas contas.

Pesq – Mas o que você fez aí que ficou parecendo conta de área?

Marte – Eu fiz a operação só com os dois lados que apareciam, só que em vez de multiplicar, eu somei.

Pesq – Como é que você descobriu que não estava certo?

Marte – A Ortência falou.

Ortência – Mas muita gente erra isso. Eu acho que, por exemplo, geralmente quando mostra uma figura, você põe só dos dois lados, e não dos quatro (apontando para a figura 1). Aí muita gente, na hora de fazer o... de medir o perímetro, não pensa que esse daqui tem medida e que esse daqui tem medida (apontando para os lados do retângulo sem medidas dadas). Ela vai no que tá escrito. "Ah, é quatro e seis, quatro mais seis, é isso aí". Não é o caso dela (Marte), ela confundiu. Mas muita gente faz assim. Nem se toca, sei lá. Acha que é parecido, igual ela falou, parecido com área. "Área é esse vezes esse". As pessoas decoram que área é um lado vezes o outro, e perímetro é um lado mais o outro.

Marte – Mas eu acho que, por exemplo, quando a gente tava aprendendo que acontece muito isso. Só que tudo na Matemática, se você praticar muito, você acaba... não decorando, mas...

Ortência – Entendendo, né?... Guardando.

Marte – É, guardando. E essa coisa de área e perímetro, é porque ele dá ao mesmo tempo. O Professor sempre dá, assim, sobre área e perímetro, mais ou menos juntos. Aí você chega a confundir, mas com o tempo você vai acostumando, aí fica uma coisa normal.

<u>TAREFA 2</u>

(Alunas lendo a tarefa).

Ortência – Pode dar nomes às figuras, pra não ter que ficar escrevendo retângulo, quadrado?

Pesq – Sim, da maneira que vocês acharem melhor.

Marte – Sabe o que isso daqui tá parecendo?

Ortência – O quê?

Marte – Aquela atividade de Desenho Geométrico que ele te dava a quantidade da área e você tinha que construir três tipos de triângulo, a partir daquela área.

Ortência – Mas aquilo lá é legal, eu gosto.

Marte – Mas aquilo é complicado pra caramba!

Ortência – Mas o Desenho Geométrico facilita muito as coisas, eu acho. Eu prefiro resolver as coisas do jeito que o professor de Desenho Geométrico resolve, do que como o professor de Matemática resolve. Porque pelo Desenho Geométrico, como o próprio nome da matéria já diz, resolve pelo desenho; pela Matemática, só por cálculo, o que às vezes é bem complicado.

Marte – Mas até agora, assim, eu não achei muito coisa que o Desenho Geométrico facilitou, nas coisas que a gente tá aprendendo agora, nesse ano.

Ortência – Não?

Marte – Não.

Ortência – Não?!... Área, triângulo retângulo, essas coisas,... você acha que não ajudou? Nossa, pra mim ajudou pra caramba!

Marte – Ah, não, conhecimento. Mas na hora de fazer o cálculo, tipo...

Ortência – Ajuda, eu acho que ajuda pra caramba. Na hora de Pitágoras, essas coisas, ajudou, eu acho que ajudou.

Marte – Ah, não, não. É, ajudou. É também porque aprofunda mais no Desenho Geométrico.

Ortência – Sim. Mais do que na Matemática. Porque se não... Daqui a pouco a gente acaba entrando na Geometria, se a gente continuar indo na Matemática.

(Ambas lendo as tarefas, por um minuto e meio. De vez em vez, olham uma para a folha da outra).

Marte – Se eu não tivesse parado pra pensar, eu já ia colocar sim.

Ortência – (Risada). Os dois teriam a mesma área?

Marte – Hã hã.

Ortência – Não, só de bater o olho dá pra ver que não, né?

Marte – Até que não, porque se você for pela ideia que foram feitos pela mesma corda, confunde, se você não olhar...

Ortência – Sim, é, tem isso. Ah, é mesmo. É a mesma corda.

Marte – Como foram feitos com a mesma corda...

Ortência – É bem provável que tenham a mesma área.

Marte – Mas é o perímetro.

Ortência – É, o perímetro provavelmente vai ser o mesmo.

Marte – É.

Ortência – Não, provavelmente não. O perímetro obrigatoriamente vai ser o mesmo.

Marte e **Ortência** – A área não.

Marte – Porque a área depende da, do...

Ortência – Eu nem cheguei a pensar nisso que você falou, porque antes de pensar que eram feitos com a mesma corda, eu pensei: dois vezes seis, doze; quatro vezes quatro, dezesseis.

Marte – Só se tivesse uma coisa, um desenho que fosse feito com duas dobradas da corda, sabe, uma coisa...

Ortência – Bem estranha. (Risada)

Marte – Assim, sabe. Que aí vem e multiplicava só os dois coisas, e tinha que dar dezesseis.

(Ambas escrevendo).

Marte – São todos os lados iguais, tipo quadrado. Se fosse um triângulo, seria um triângulo equilátero.

Ortência – É... Mas é um triângulo e um quadrado, né? Não tem muito por onde.

Marte – O da forma A é...

Ortência – O que você quis dizer com esta frase? (Risadas)

Marte – O da forma A é... (Gesticula, formando letras com a mão, e dá risadas)

Ortência – Ficou muito estranha, esta frase. (Risadas). Põe um azinho maiúsculo, que vai ficar... Ah, você colocou um azinho minúsculo.

(Marte escreve).

Ortência – Ótimo, muito bem.

Marte – Não, não bate palmas, não, que é humilhação.

(Risadas).

Ortência – Eu, ao invés de colocar “com a mesma corda”, eu coloquei “com uma corda de mesmo tamanho”. É muita burrice pra uma pessoa só, cara!

Marte – É, não precisa nem de pensar.

Ortência – Mas de qualquer jeito, tem que fazer. Vamos lá.

(Ambas escrevendo).

Ortência – Olha, dezesseis centímetros. Que descoberta! (Conferindo sua resposta com a de Marte).

Marte – Acabei, professor. Ah, ela ainda não...

Ortência – Eu tô anotando, você simplesmente põe. Eu gosto de fazer tudo bem explicadinho.

Marte – Claro que não! Olha: “A e B é igual a 16”.

Ortência – Olha a minha: “Sim, pois são feitas com a mesma corda. Fig.1, fiz a continha, Fig. 2...”. Eu faço a conta...

Marte – Isso daí é encheção de linguiça.

Ortência – Não é encheção de linguiça.

Marte – É sim.

Ortência – Não é. Eu gosto de explicar o meu raciocínio. Eu gostava de fazer direto, mas depois eu acostumei a escrever tudo que eu penso, entende?

Marte – Na prove de Português que é bom, pra colocar a resposta completa. Porque você enche lingüiça e parece que é inteligente.

Ortência – A gente tá fugindo do assunto.

Marte – Pronto.

Ortência – Sim. Uma atividade ligeiramente fácil.

Pesq – Então, alguém quer explicar o que fez nesta tarefa?

Ortência – Acho que tá bem explicado, né? No primeiro, a gente mediu a área. Um lado vezes o outro da figura, doze centímetros. A gente ficou pensando que o tamanho da corda é o mesmo e a área é diferente.

Marte – É.

Ortência – Mas a área não tem a ver com isso, o que tem a ver é o perímetro. Mas se for para pensar, é bem parecido, sei lá. É estranho pensar que a corda é do mesmo tamanho e a área é diferente.

Marte – A Ortência não tinha pensado nisso, não. Ela tinha ido mais pelo coisa do: tenho dois centímetros e seis centímetros, vou multiplicar os dois, é diferente.

Ortência – É, eu nem pensei que pudesse ser igual.

Marte – E eu não tinha prestado atenção nos centímetros. Eu tinha ido mais pela... É dezesseis centímetros, é com a mesma corda...

Ortência – Olha só como é que a gente pensa diferente.

Marte – É, completamente diferente.

Pesq – Desculpa, mas como é mesmo que você pensou, Marte?

Marte – A primeira coisa, eu pensei: é uma corda, a mesma corda pros dois; então se é a mesma corda pros dois, daí vai ser a mesma área.

Ortência – Tudo vai ser igual.

Marte – É, tudo vai ser igual. Mas não é, porque... só se for uma forma equilátera, que vai ser da mesma área, porque é multiplicação, e não soma. Aí já mudou completamente o coisa.

Ortência – E eu nem tinha pensado nisso. Depois, eu até concordei, porque ela falou, mas isso nem tinha passado pela minha cabeça. Eu sabia que era a mesma corda, mas isso não foi a primeira coisa que eu raciocinei. Eu raciocinei só nos lados, eu fui direto na conta. Eu sabia que não era a mesma área, só o mesmo perímetro, porque... Eu fui direto: dois vezes seis, dozes; quatro vezes quatro, dezesseis. Nem cheguei a pensar em ser a mesma coisa. Só na hora do perímetro que eu pensei isso, porque ela tinha falado.

Marte – Aí, no perímetro tem que ser.

Ortência – Porque é a mesma corda, ela tem o mesmo tamanho.

Marte – São os mesmos números e não pode ser diferente.

Ortência – É o tamanho da corda dividido em quatro pedaços. Não tem como ser diferente. Tem que ser dezesseis.

Pesq – Hum hum. Vocês, em algum momento, pensaram que poderia sobrar um pedaço de corda, ou faltar, ou então que a corda deveria ser dividida em dois pedaços pra formar as duas figuras?

Marte – Não, porque teria que tá no enunciado.

Ortência – Exatamente, taria sendo meio que injusto. Seria uma pegadinha. Teria que tá explicado na atividade. Mas não, fala que a mesma corda forma as duas figuras, então é a mesma corda.

Marte – É. E quando a gente meche com coisas de Matemática, tem que ser uma... as formas são... não sei se eu posso falar isso... são sólidas, sabe, tem que ser uma coisa permanente, fixo...

Pesq – Entendi.

Marte – Porque, se não, não vai ser uma coisa matemática, vai ser uma coisa lógica ou... não é nem lógica, mas uma coisa pra você pensar, pra te pôr pra pensar.

Ortência – Sim.

Pesq – Pra gente continuar a pensar sobre estas coisas, eu quero fazer mais uma pergunta. Vocês acham que existiriam figuras geométricas, como estas aí, com formatos diferentes e com áreas iguais, embora formadas pela mesma corda?

Marte – É... formas eqüiláteras.

Pesq – Você pode dar um exemplo?

Marte – O triângulo equilátero.

Ortência – Mas você acha que, por exemplo, o triângulo equilátero e o quadrado teriam a mesma área?

Marte – O quadrado teria.

Ortência – Teria? Mas, olha só...

Marte – Mas se fosse com a mesma corda.

Ortência – Sim. Então, faz isso, por exemplo.

Marte – (Desenha na folha). Oh, um triângulo com quatro centímetros nos três lados... Ah, não...

Ortência – Não seria. Foi isso que eu pensei. Como é que você colocaria quatro, quatro, quatro? Só dá se for um quadrado. Eu acho que em momento alguns as figuras teriam a mesma área. Só o mesmo perímetro. Pelo menos eu não consigo pensar em nenhuma situação.

Marte – Mas tem que ter.

Ortência – Não, não tem que ter.

Marte – Não tem outra forma de quatro lados iguais, não?

Ortência – Não, só o quadrado. Isso que eu falar. Não tem como, senão a figura seria igual. Cada figura tem a sua área. Se tiver meio centímetro de diferença na medida de um dos lados, a área já vai ser diferente.

Marte – Então não.

Pesq – Então só é possível se as figuras forem iguais?

Ortência – Têm figuras de áreas iguais, mas a mesma medida, que é, no caso, dezesseis centímetros. Na minha opinião, não tem como.

Marte – Se, aquela coisa que você falou de ter cortado uma parte da corda, você teria que ter colocado o perímetro antes da área, porque na hora de você fazer o perímetro é que você veria que o perímetro dos dois não seria igual, aí tinha que ter alguma coisa errada.

Ortência – Eu acho que não.

Marte – Porque a área é diferente.

Ortência – Sim. Mas você não precisa ver que tem alguma coisa de errado pra saber a área. Porque o que você precisa pra saber a área, não importa se a figura um ou a dois têm o mesmo tamanho de corda. O que importa é o tamanho dos lados.

Marte – Eu não tô falando isso. Eu tô falando que, se o professor colocasse numa prova esta corda, aí com um retângulo cortasse um pedaço da corda, não tá prevendo a área de jeito nenhum, porque o número dos dois ia ser diferente. Agora, no perímetro...

Ortência – Mas a área não é igual.

Marte – Então, não tem como saber que você cortou um pedaço da corda, porque a área vai ser diferente. Entendeu?

Ortência – Entendi o que você disse.

Marte – Poderia colocar o perímetro depois, mas seria muito injusto, porque você ia fazer um monte de conta, sabendo que tava faltando um pedaço da corda.

Ortência – Eu entendi o que você quis dizer, só que, uma coisa, porque que seria injusto? Pra calcular a área, não importa o se tiver faltando um pedaço da corda, porque eu não vou calcular com o tamanho da corda, eu vou calcular com o tamanho do lado. Então, não vai fazer diferença.

Marte – Mas, é... não questão de se taria errado ou não, mas é só assim, que no caso a gente tava falando sobre ter cortado ou não um pedaço, então toda a atividade taria rodando ao redor do fato da corda ter sido cortada ou não.

Ortência – Rapidão, deixa eu só perguntar uma coisa. Por exemplo, essa figura aqui (aponta para o retângulo da tarefa). Vamos supor que quando fez ela, cortou um pedaço da corda. Você não sabe disso, mas cortou e o exercício não fala. E chega aqui e te pede a área. Mas independente de ter um pedaço ou não da corda, esse lado é dois e esse lado é seis, o exercício te fala isso. Vai fazer diferença? Não, né?

Marte – Não.

Ortência – No perímetro é que vai fazer diferença, porque você vai ter que saber se isso daqui tá faltando um pedaço, não tem os dezesseis centímetros. Aí eu acho, ao contrário de você, seria injusto fazer o contrário, deixar o perímetro na frente, porque talvez confundiria pra fazer a área, entendeu? Porque a área não tem nada a ver com cortar a corda, o perímetro sim. Acho que teria que obrigatoriamente continuar deixando o perímetro por último.

Marte – Mas é isso que eu tô falando, essa atividade não tem nada a ver com se tivesse cortado a corda ou não.O professor que falou. Mas e se a corda tivesse sido cortada, ou seja, a atividade taria relacionada com se a corda foi cortada ou não. Mas como o enunciado tá falando “como essa corda”, então tem que ser essa.

Pesq – Tá certo. Mas vocês conseguiram pensar em duas figuras diferentes que têm mesma área e mesmo perímetro?

Ortência – Talvez só perímetro, talvez só área...

Marte – É possível.

Ortência – É possível duas figuras terem perímetros iguais e áreas diferentes, e áreas iguais e perímetros diferentes. Agora, ter perímetro e área iguais, só se for a mesma figura.

Marte – Nunca tinha pensado nisso.

Ortência – Eu também não.

Marte – Isso é coisa do Desenho Geométrico.

Ortência – É. E eu nunca tinha parado pra pensar. Isso é bem interessante.

TAREFA 3

Para esta tarefa, além da folha e de réguas, foram oferecidos três quadradinhos vermelhos idênticos ao quarto quadradinho oferecido junto à ficha da tarefa, que foram moldados como recortes da figura dada na tarefa, de modo tal que um número inteiro deles preenche toda a figura.

Marte – Você só pode tá de brincadeira! (Dirigindo-se ao Pesquisador).

Pesq – Por quê?

Ortência – Porque você deu três quadradinhos assim...

Marte – Olha o tamanho deles!

Ortência – Muito pequenos... Não, mas tá fácil, tá fácil.

Marte – Tem problema se a minha conta der um ou dois milímetros a menos?

Pesq – Bem esta é uma questão que vocês vão ter que decidir. Você tem até a régua disponível, mas vocês têm que ver se o problema tá pedindo precisão ou não. Fiquem à vontade para decidir.

(Ortência utiliza a régua apenas para desenhar, enquanto Marte a usa também para medir).

Marte – Então primeiro eu vou fazer exatamente, depois eu vou fazer arredondado.

Ortência – Que quadradinho bom de segurar, né? Grande pra caramba! (Com ironia).

Marte – Coisa que eu amo nessa vida é esse quadrado vermelho. (Com ironia)

Pesq – Vocês estão usando a régua pra medir com precisão?

Ortência – Não, eu não. Eu tô usando a régua só pra me ajudar a marcar as linhas aqui na figura.

Marte – A minha era pra medir. A minha eu queria... Eu já ia medir tudo, aí já acabar e dar a resposta.

Ortência – Não, eu não ia fazer assim...

Marte – Mas não dá muito certo nessa vida, né? Essa vida não é precisa. (Ironia, novamente).

(Ambas desenham o contorno do quadradinho múltiplas vezes dentro da figura dada).

Marte – Ah, agora eu sei! Não falou que precisa caber o quadrado exatamente. “Quantos quadrados cabem”. Se não cabe, não tem problema. Entendeu?

Ortência – Eu vou fingir que não ouvi essa.

Marte – Eu tô falando sério. Porque se sobrar espaço na figura, não tem problema, porque não tá pedindo pra caber, tipo, tantos quadrados...

Pesq – Você quer dizer que o problema aí é quantos quadrados inteiros cabem na figura?

Marte – É isso aí.

Pesq – Mas tá claro pra vocês que o ideal é que não sobrem espaços entre os quadradinhos, e também que os quadradinhos não fiquem sobrepostos?

Marte e **Ortência** – Tá.

(Ambas medindo, desenhando e contando).

Ortência – Não dá pra acreditar que eu vou ter que fazer quadradinho por quadradinho.

Pesq – Será que precisa?

Ortência – Não, eu não acho que precisa. Só que eu tô com medo de fazer com a régua, porque com a régua eu vou ter que fazer com medida, e as medidas não são iguais.

Marte – Acabei. Agora eu vou tentar outra coisa. Pode fazer vários raciocínios.

Ortência – Claro! Pra isso até eu sei a resposta.

(As alunas escrevem).

Marte – Posso te fazer uma pergunta? (Se dirigindo a Ortência).

Ortência – Tá, só se eu puder te fazer uma também?

Marte – Aqui... Primeiro eu, tá? Quando eu quero saber quantas coisas cabem dentro de uma outra coisa, eu tenho que saber a coisa dessa coisa em área ou perímetro? (Formando um quadrado com as mãos).

Ortência – Eu... vou... me matar. Eu acabei de pensar em um outro raciocínio, muito mais fácil!

Pesq – Você pode repetir a pergunta, Marte?

Ortência – Ela quer saber, por exemplo...

Marte – Ó, eu tenho uma coisa (mostra o quadradinho vermelho) e tenho essa outra coisa (circula com o dedo a figura da tarefa), a figura e o quadrado. Eu quero saber quantos quadrados cabem dentro da figura. E aí, pra saber quantos quadrados cabem dentro da figura, eu tenho que saber a área ou o perímetro da figura? A área, né?

Ortência – Isso que você falou me fez pensar num outro raciocínio, muito mais fácil.

Pesq – Você quer responder a ela, Ortência?

Ortência – Pode? Sei lá...

Marte e **Pesq** – Pode.

Ortência – Em área.

Marte – Área? Obrigada.

Ortência – Professor...

Pesq – Sim.

Ortência – Será que vai dar exato o número de quantos quadrados tinha que caber? Acho que a gente ficou muito preocupada com precisão e talvez fique errado o número de quadrados.

Pesq – Mas também não se preocupe com isto. O que você fez está ótimo para que eu entenda sua maneira de pensar. Depois vamos discutir os resultados. Vocês já acabaram?

Marte – Quase acabando.

Ortência – Eu quero só ver se o outro raciocínio que eu pensei vai dar certo também.

(Ortência mede o lado do quadradinho com a régua. Ambas param de escrever e parecem conferir seus resultados).

Pesq – Eu vou aproveitar o que a Ortência tá fazendo, para levantar uma questão extra, que não está escrita. A questão é esta: vamos considerar que o lado destes quadradinhos vermelhos mede dois centímetros...

Marte – O meu deu um e meio.

Pesq – Tudo bem. O que eu disse é uma hipótese, eu tô colocando um novo dado. Se o lado do quadradinho mede dois centímetros, qual é o perímetro e qual é a área da figura amarela? E quero que vocês, agora, calculem esta área e este perímetro.

(O Pesquisador sai da sala).

Marte – Ai, eu sou muito burra em Matemática!

Ortência – Eu também não sou muito boa em Matemática.

Marte – A questão não é ser boa, é ser burra em Matemática.

(Ambas escrevendo, por três minutos, sem falas. O Pesquisador retorna à sala.).

Ortência – Professor, o lado é dois centímetros?

Pesq – Considere isto, dois centímetros de lado.

Marte – Eu acho que eu vou ser psicóloga. Será que psicologia tem Matemática?

Ortência – Professor, eu tenho ligeiros problemas com esse problema que você passou.

Pesq – Sim.

Ortência – Dois centímetros. Se eu vou fazer pelo que eu fiz, não vai dar certo, porque o quadradinho não tem dois centímetros exatos. Vai sobrar bastante.

Pesq – Onde vai sobrar bastante?

Ortência – (Mostrando a figura e a medida de um de seus lados). Olha só, aqui tem isso de medida. Não dá.

Pesq – Ah, então você tá medindo os lados com a régua?

Ortência – Sim.

Pesq – Que tal você usar os próprios quadradinhos com régua, já que você sabe que seu lado mede dois centímetros?

Ortência – Ah, entendi.

Marte – Eu sei, eu sei! (Fazendo cálculos e cantando).

(O Pesquisador sai da sala por dois minutos. Conversas sobre música entre as alunas).

Pesq – E aí, já terminaram?

Ortência e **Marte** – Quase.

Ortência – Marte, me deixa concentrar, por favor.

Marte – A não, essa conta tá muito complicada. Professor, acabei.

Ortência – Eu só quero acabar e comparar com a atividade dela.

Pesq – Tá. Só não se esqueçam de colocar seus pseudônimos nas folhas.

(Ortência permanece na Tarefa 3, enquanto Marte começa a ler a tarefa 4).

Ortência – Professor, eu não vou colocar o que eu fiz no papel.

Pesq – Tudo bem, faz de cabeça. Se você puder falar o que fez...

Ortência – É porque tá pedindo o perímetro. E vou fazer o perímetro igual ela fez, porque eu já tinha pensado. É... O lado do quadradinho é dois. E eu não sei como fazer uma conta pra medir só os lados que aparecem, então eu vou contar, assim... (Mostra com o lápis os lados dos quadradinhos que formam os lados da figura, contando de dois em dois, até cinquenta e seis). Olha, deu o mesmo que o seu!

Marte – Deu?

Ortência – Deu. Cinquenta e seis.

Pesq – Só isso? Finalizou?

Ortência – Sim, tem só que colocar o nome.

TAREFA 4

Para esta tarefa, além da folha e de réguas, foram oferecidos três triângulos equiláteros azuis, idênticos ao quarto triângulo junto à ficha da tarefa, todos moldados como recortes da figura dada na tarefa, de modo tal que um número inteiro deles preenche toda a figura.

(Ambas as alunas usam os triângulos como moldes para preencher toda a figura da tarefa).

Pesq – Vocês se lembram do nome desta figura amarela?

Ortência – Pentágono.

Marte – Não. É... Hexágono

Ortência – É, hexágono, tá certo.

(Alunas desenhando e escrevendo).

Ortência – É, eu tô me preocupando em não ficar preocupada com a precisão. Só que eu acho que eu me despreocupei demais.

Marte – Acabei.

Pesq – Já?

Marte – Sim.

Ortência – Eu acho que isso aqui tá errado, mas... Olha que droga, eu sou muito perfeccionista. Eu vou apagar e fazer tudo de novo.

Pesq – Vocês acham que se eu desse um número maior de triângulos, isto ia ajudar nesta tarefa?

Marte – Claro, ajudaria muito.

Pesq – E que tal, Ortência, se você usar todos os três triângulos juntos aí, ao invés de um só, como você fez antes?

Ortência – Acho uma boa ideia. Vou tentar assim.

(Ortência desenha e Marte apenas observa).

Pesq – Olha que bonito que tá ficando o desenho dela!

Marte – É verdade. O meu ficou parecendo um abacaxi. (Risada).

Pesq – Mas você chegou lá, não é?

Marte – Eu cheguei. Encontrei a resposta.

Pesq – Será que a resposta vai ser a mesma? E tô achando que ela (Ortência) já visualizou e agora não vai usar mais os triângulos azuis.

Marte – Só tem um jeito de visualizar?

Pesq – Acho que cada um visualiza de uma maneira diferente dos outros. E você, o que acha?

Marte – Eu acho que não, porque eu cheguei na mesma resposta que ela tá chegando agora.

Pesq – Mas talvez o seu caminho para montar a figura com os triângulos tenha sido um caminho diferente do dela.

Marte – É...

Ortência – Ah, graças a Deus! Acabei.

Pesq – Mereceu as palmas?

Ortência – Talvez. É dois centímetros, né? E tem que descobrir a área e o perímetro?

Pesq – Sim, é isto.

(Marte retoma a tarefa, por achar que calculou errado).

Marte – Agora faz sentido.

Ortência – Acabei!

Marte – E também.

<u>TAREFA 5</u>

Entrega a folha desta tarefa, sem orientações. O pesquisador se mantém ausente durante toda a tarefa.

(As alunas lêem e escrevem, por quatro minutos, sem falas).

Ortência – Qual é mesmo a fórmula de Bhaskara?

Marte – Fórmula de Bhaskara?

Ortência – É, tem muito tempo que eu não uso.

Marte – Eu vou lembrar. (Olhando pro alto).

Ortência – Nossa, eu decorei! Eu não acredito que eu esqueci!

Marte – Será que agente pode olhar (no livro ou caderno).

Ortência – Ah, ele falou pra não preocupar. Calma...

(Ambas olhando para o alto, em silêncio).

Ortência – Ah, lembrei!

Marte – Duas vezes b...

Ortência – Não. Já lembrei.

Marte – Vê se eu tô correta...

Ortência – Acho melhor a gente discutir no final.

Marte – Olha...

Ortência – Não, deixa pro fim.

(Silêncio de um minuto).

Ortência – Ai, eu li o enunciado errado.

Marte – Não, não apaga não. Ele gosta só que...

Ortência – Sim, mas eu li o enunciado errado.

Marte – É, mas ele gosta que deixa tudo pra ele vê como é que a gente raciocina, como é que a gente vê as coisas.

Ortência – Tá.

Marte – Quanto que é noventa e quatro dividido por dois?

(Ortência está concentrada e demora quinze segundos para dar uma resposta).

Ortência – Como é que é?

Marte – Noventa e quatro dividido por dois.

(Ortência faz o cálculo na folha).

Ortência – É... quarenta e sete.

(Ambas escrevem, por 3minutos).

Ortência – Eu sei que muita gente fala que não deve contar no dedo, mas eu uso.

Marte – É, eu também, porque o dedo é muito mais sólido do que fazer de cabeça.

Ortência – Só que às vezes eu fico com vergonha e faço escondido. Porque alguns vão falar: “Nossa, uma menina de quatorze anos, nono ano, ainda tá contando no dedo!”. Igual ontem, por exemplo, nas outras atividades, eu já usei, só que eu fiz assim, oh... (Escondeu a mão direita debaixo do braço esquerdo).

Marte – Eu já usei assim. Normal. E quando a gente esquece uma coisa da tabuada, eu faço assim, oh... Aí eu coloco por exemplo...

Ortência – Você fatora o número.

Marte – É, só fatorar.

Ortência – Legal.

Marte – Porque é melhor eu tirar a minha dúvida do que...

Ortência – Quando eu era mais nova, eu tinha muita dificuldade com tabuada. Quando tinha aquele...

Marte – Ditado?

Ortência – É, ditado. A professora pedia, eu ficava rachando a cabeça pra saber. E aí, eu acho que foi na terceira série, que eu surtei e falei: ah, não, chega! E aí eu passei uma tarde inteira estudando a tabuada, nunca mais eu esqueci. Eu sei a tabuada todinha de cor até hoje.

Marte – Eu nunca decorei a tabuada todinha.

Ortência – Desde a terceira série eu decorei a tabuada. Acho que foi na terceira série que a gente aprendeu e...

Marte – A minha mãe me fazia decorar todo dia, mas não dá, gente. Não dá pra decorar, eu não consigo decorar as coisas assim. Tipo, por exemplo, eu consigo decorar alguns números porque aconteceu alguma coisa comigo, sabe, que lembra, agora tá decorado.

Ortência – Eu decorei por causa dos ditados. Tipo assim, se não fosse os ditados, eu acho que eu não teria... Isso eu acho importante: o ditado, pra decorar tabuada, essas coisas.

Marte – Ah, eu não acho, não. Porque... Sei lá, sabe...

Ortência – Se não fosse o ditado, eu não ia tentar decorar.

Marte – É...

Ortência – Porque o motivo pelo qual eu decorei... Não foi por causa da conta, porque na hora da conta, você se vira. Agora, foi por causa do ditado. Na hora do ditado, não tinha como.

Marte – Eu fico muito ruim... Quando qualquer um me pergunta alguma coisa assim de Matemática, eu fico com aquela tensão de responder errando, aí eu não consigo, eu não consigo, sério. É a única matéria. Eu fico muito nervosa, muito nervosa.

Ortência – Duas. Matemática não é meu forte... Tamos fugindo do assunto, mas tudo bem.

Marte – Droga, eu tô no cinco. Ah, eu não deveria ter posto o cinco.

Ortência – Ah, por isso que a minha conta não tava dando certo. Eu li como um dos lados sendo cinco metros menor do que o outro.

Marte – Ah, tá.

Ortência – Aí deu completamente errado.

Marte – Eu não tô fazendo com a fórmula de Bhaskara aí, não.

Ortência – Não, mas o meu tava errado, lembra?

Marte – Eu sei, eu tô fazendo tipo... Não, não sei se você tá fazendo assim, se eu posso falar agora...

Ortência – Depois a gente discute. Porque se não às vezes você atrapalha o meu ou o meu atrapalha o seu.

Marte – Ai, eu ainda não sei! Tá faltando símbolos... coisas aqui... a porcaria... eu já coloquei.

(Silêncio)

Marte – Quarenta e sete. Quarenta e oito, quarenta e nove, cinquenta, cinquenta e um, cinquenta e dois. Que droga! (Contando nos dedos).

Ortência – Tô explicando o que eu errei: eu li o enunciado errado, li cinco metros menor.

Marte – Ah, não. Claro que não, sua idiota. Bobona! Sou muito idiota! (Apagando sua resolução na ficha data tarefa).

Ortência – Agora muda tudo de novo. (Concentrada em sua resolução).

Marte – Mais eu acho que não vai dar não. (Concentrada em sua resolução).

Ortência – Ouh, o meu vai continuar dando a mesma coisa.

Marte – Duas vezes sete, quatorze. Oito, nove...

(Ambas sussurram contas).

Marte – Cinco, três, dois...

Ortência – Vai continuar dando errado. Que droga! Acho que eu vou ter que mudar de raciocínio, este não tá dando certo, não.

Marte – Dez, onze, doze, treze, quatorze. (Contando nos dedos).

(Ambas escrevendo).

Marte – Jura? Jura que dá dois mil, quatrocentos e quarenta e quatro? (Olha para a própria resolução).

Ortência – (Risadas). Pior que eu, em, colega!

Marte – Eu tô multiplicando pra ver a área. Porque... cento e quatro é a área, não é?

Ortência – Sim.

Marte – Então, tem que dar cento e quatro, mas não dá. (Bate a mão na mesa).

Ortência – Eu sei um jeito de fazer isso muito fácil, mas não é um jeito, tipo assim, muito aceitável.

Marte – Qual?

Ortência – Peraí, deixa eu só ver se essa coisa não vai dar certo.

Marte – Ah... (Tapa seu rosto com as mãos).

Ortência – Você já desistiu?

Marte – Não, peraí, deixa eu só ter coragem. É porque eu acho que tá certo, não sei outro modo de fazer. Fórmula de Bhaskara?... Gente, como é que eu tô ruim!... Vou ter que voltar pra essas aulas. Pra que é que a gente usa a fórmula de Bhaskara?

Ortência – Como é que é? (Concentrada em sua resolução).

Marte – Pra que é que a gente usa a fórmula de Bhaskara?

Ortência – Pra resolver equação do segundo grau?

Marte – Olha, é mesmo! Eu tinha esquecido desse detalhe.

Ortência – Acho que a gente devia ter feito uma revisão...

Marte – Ah, mais aqui não é equação do segundo grau, então não precisa...

Ortência – Quem disse que não é? Você pode muito bem transformar ela numa equação do segundo grau.

Marte – Não, o meu não.

Ortência – A minha eu transformei. Só que delta tá dando negativo. E aí não tem como calcular. Ih!.. Tem alguma coisa erra, porque não pode tá dando negativo.

Marte – Acho que eu errei alguma coisa na conta, só pode ser.

Ortência – Me dá uma raiva quando eu tô fazendo uma conta e não dá certo, não dá certo, não dá certo...

(Ortência escrevendo e Marte olhando para o alto, pensativa).

Marte – Ã!... É. Porque não, né? (Continua olhando para o alto).

(Ambas escrevendo e balbuciando cálculos, por quarenta segundos).

Marte – Será que eu vou conseguir?

Ortência – Ã?

Marte – Será que agora eu vou conseguir?

Ortência – Eu tô tentando isso aqui só pra ver se vai dar certo a conta.

Marte – Agora, se isso for a solução, eu...

Ortência – Eu vou tentar saber o que é que eu fiz.

(Risadas das alunas).

Ortência – Gente, olha só. O meu delta tá dando vinte e cinco menos quatro vezes cento e quatro.

Marte – É... Eu acho que isso é meio difícil, né?

Ortência – Não, nem mínimo. Olha só... O delta é... Eu desisto.

Marte – Dá vinte e um... Menos vinte e um...

Ortência – Pirou, garota?!

Marte – Dá vinte e um.

Ortência – Que...!

Marte – Aí vezes cento e quatro.

Ortência – Não, num pode fazer isso aqui, não.

Marte – Ah, é! Porque tá multiplicando lá.

Ortência – Olha!... Não preciso nem fazer pra saber que essa conta tá completamente errada. (Ambas olhando para a folha de Ortência). Alá, vinte e cinco menos quatrocentos e dezesseis.

Marte – Vai dar negativo.

Ortência – Ah... Desisto, tá?

(Ambas escrevendo).

Marte – O meu deu seiscentos e vint... e cinquenta e um, agora.

(Ambas olham para a folha de Marte).

Ortência – Ouh, eu tô tentando entender até agora o que você tá fazendo de conta, porque...

Marte – Não, agora eu tô fazendo diferente.

Ortência – Não, tá muito complicado pra mim. Eu vou fazer do meu jeito.

Marte – Não...

Ortência – Não, deixa eu fazer do meu jeitinho aqui. Eu ia fazer por equação do segundo grau, mas... cansei.

Marte – Podia ser área... Não, podia ser perímetro, né?

(Ambas olhando para o alto. Ortência espreguiça e Marte boceja).

Marte – É!... Não. Ah, é mesmo! Ó! Ou será que precisa?

(As alunas escrevem por cerca de um minuto).

Marte – Ah, eu desisto!

Ortência – Desiste, não. Confie na sua metade brasileira.

(Risadas).

Marte – Eu tô com medo, tipo...

(Ortência lê rapidamente e em voz baixa o enunciado).

Ortência – Muito fácil.

Marte – Óooh!

Ortência – Tô te falando!... Facinho pra caramba!

Marte – Você conseguiu?

Ortência – Sim.

Marte – Mentira que você conseguiu!

Ortência – Consegui.

Marte – Deixa eu ver.

Ortência – Deixa eu acabar isso aqui que eu te mostro.

Marte – Eu fiz isso que você fez. Só que eu dividi o número cinquenta e dois em dois. Mas não precisa, idiota! Cinquenta e dois já é a metade de cento e quatro! Não acredito! Meu Deus do céu, como eu sou burra, né, Ortência?!

Ortência – Só um pouquinho. (Risadas) Eu tô brincando.

Marte – Não, tô falando sério. Olha só o que eu fiz: eu peguei cento e quatro e dividi por dois. Aí depois, eu divido cinquenta e dois por dois. Agora, pra quê eu não sei. Aí eu fiz menos e mais. Por isso que deu errado.

Ortência – Tem alguma coisa muito estranha, aqui. (Olha para a própria folha).

Marte – Mas você não multiplicou isso daqui, não?

Ortência – Ah, você é inteligente!

Marte – O meu é... Vinte e um vezes trinta e um, deu seiscentos e cinquenta e um.

Ortência – Você fez conta errada. Não tem como, porque... cento e quatro dividido por dois dá cinquenta e... Eu vou me matar agora e você não me acorde, por favor.

Marte – Aaah! (Risadas).

Ortência – A gente quer que cento e quatro dividido por dois...

Marte – Eu sei! Aaah!... (Risadas)

Ortência – ...E cinquenta e dois vezes cinquenta e dois seja cento e quatro. Eu vou me matar com esses lápis.

Marte – Então essa é a raiz quadrada.

Ortência – Agora eu entendi porque a minha equação de segundo grau deu errada.

Marte – Por quê?

Ortência – Porque eu contei o cento e quatro como uma coisa qualquer. Só que é cento e quatro ao quadrado.

Marte – Ah, o meu também! Droga! (Gargalhadas). Se eu tivesse colocado o cento e quatro ao quadrado, teria dado certinho.

Ortência – Não, não teria, não.

Marte – Teria sim, não vem, não vem.

Ortência – Teria não. Porque a gente não sabe fazer equação do terceiro grau. Quarto grau, no caso. Porque, olha só, o xis vai tá ao quadrado e o cento e quatro também vai tá ao quadrado. Aaah!...

Marte – Não, mas a gente não tem o xis ao quadrado.

Ortência – Mas a gente calcula.

Marte – Não, mas olha só...

Ortência – Não, eu vou resolver o meu xis. Eu sei porque que deu errado. Mentira, só vai dar mais errado ainda.

Marte – A eu vou só fazer a raiz quadrada, fazer a mesma coisa que eu tinha feito antes e... Que ái vai dar zero, não vai?

Ortência – Vai.

Marte – Quer que eu pegue a calculadora?

Ortência – Não. Depois de todas essas contas de raiz quadrada, você não decorou? Eu decorei de dez, de onze, de doze, de treze, de quatorze, de quinze...

Marte – Ah, não. Mas eu decorei de cento e quatro.

Ortência – Cento e quatro... Tenho que ter muita calma, muita paciência, muito amor...

Marte – Amor, dedicação...

Ortência – Marte...

Marte – Tem que ter felicidade, alegria...

Ortência – Escuta! De doze é cento e quarenta e quatro. De onze... não tenho certeza, mas acho que é cento e vinte e um. É. Não, não é. Calma. Me perdi.

Marte – Mas, e de cento e quatro...

Ortência – É. Cento e vinte e um. Agora, dez é... (Olha para Marte, esperando complemento).

Marte – Cem.

Ortência – Sim. Cento e quatro não é uma raiz exata. Porque o cento e quatro, eles não têm o mesmo tamanho, entendeu? (Faz a forma de um retângulo com as mãos). Um lado tem um tamanho, o outro tem outro. Não são iguais.

Marte – Mas então como é que a gente vai fazer.

Ortência – Eu não sei ainda. Eu só sei que a gente tá errada.

Marte – Nossa senhora, Deus me ajude nessa hora. (Tom irônico). E se a gente fizer assim... Eu vou tentar.

Ortência – Ah, eu vou usar raciocínio, não vou usar conta, não. Porque se não eu desisto.

Marte – Vamos lá fora, pedir ajuda de alguém? (Risadas).

Ortência – Eu não preciso de ajuda, não.

(Marte cantando).

Ortência – Vai sair na fita isso.

(Ambas escrevendo).

Marte – Ortência, quanto que é mil e onze dividido por dois?

Ortência – Porque que você chegou em mil e onze divido por dois?

Marte – Porque... eu coloquei cento e quatro...

Ortência – Eu tenho a leve impressão que o lado não vai ser mil e onze. (Com tom irônico).

Marte – Não, então, mil e onze dividido por dois.

Ortência – Quinhentos vezes quinhentos. Não, não é quinhentos. Se fosse mil, seria quinhentos. É mais do que quinhentos.

Marte – Ah, porque que a vida é tão triste para nós, pessoas que não sabemos Matemática mas que tentamos, arduamente, trabalhar nessa vida em comunidade? (Tom de ironia). Ortência, olha a minha conta.

Ortência – Chí! (Pedindo silêncio).

Marte – Porque que isso acontece comigo, que eu não consigo fazer a atividade? Ah, meu Deus!

Ortência – Calma. A gente tem tempo, a gente vai conseguir.

Marte – Ortência, isso daqui não tem como!

Ortência – Eu não vou desistir.

Marte – Agência de publicidade... Isso daqui é pra eles ganharem dinheiro, nem eu vou ganhar dinheiro.

Ortência – Calma!

Marte – E se for assim?...

Ortência – *Quiet!*

Marte – O xis está qui...

Ortência – Nem que seja por eliminação, eu vou descobrir o resultado disso. Nem que eu fique aqui o dia inteiro. O marido da minha tia, que mexe com coisa de Matemática, ele disse que por eliminação você pode descobrir rápido ou pode demorar...

Marte – Um ano.

Ortência – Exatamente. Nem que eu fique aqui, nessa sala, um ano, eu vou descobrir por eliminação.

Marte – E eu vou ficar aqui porque eu sou sua amiga.

Ortência – E porque você quer o resultado. (Risada).

Marte – Mas como eu não sou... (Risada).

(Ortência escreve e Marte fica olhando para baixo, afastada da mesa).

Marte – Você não quer ver o que eu fiz, não?

Ortência – Peraí, rapidão. Eu tô pensando.

Marte – Eu tenho uma pergunta. O alumínio cobriria tudo ou só as bordas?

Ortência – Só as bordas. A gente tem que saber quais que são os lados pra saber as bordas.

Marte – Ah, porque se não a gente ia falar que ia ser cento e quatro.

Ortência – Não, é só a borda.

(Ortência escrevendo).

Ortência – Caraca! Eu sou muito inteligente, eu me amo! A primeira conta que eu fiz, eu acertei.

Marte – Quanto que é?

Ortência – Não te falo!

Marte – Ah, Ortência, então eu não vou fazer...

Ortência – Eu tô brincando! Um lado tem treze metros e o outro tem oito!

Marte – Dá cento e quatro? Não dá cento e quatro.

Ortência – Eu... sou... muito... inteligente. Eu me amo, eu me amo muito.

Marte – Ah, não fala que a gente fez isso tudo pra não...

Ortência – Eu penso antes de fazer a conta. Tipo assim, por exemplo, eu vejo qual número multiplicado por qual daria o último número. Então eu fui por oito, que eu achei que era o mais provável de consegui cento e quatro. E aí eu pensei: oito vez o quê... qual é o último numerozinho aqui, tipo treze, quatorze, quinze... Oito vezes quatro, trinta e dois; o último número daria dois. Cento e quatro termina em quatro, eu pensei: oito vezes três vinte e quatro; número é quatro, quem sabe? Fui. Cento e quatro. Eu me amo.

Marte – Que número já era cinco a mais que oito?

Ortência – Sim. Dá certo!

Marte – Coisa estúpida! (Criticando a si mesma).

Ortência – Eu pensei nisso também: oito é exatamente cinco números menor do que treze.

Marte – Escreve isso também, o que você chegou. Ou então, não, só fala pra câmera.

Ortência – Será que o professor quer que escreve?

Marte – Hã hã... Não, fala pra câmera.

Ortência – Oi, câmera. (Acena para a câmera). É... eu pensei qual número daria quatro no último algarismo. Porque o cento e quatro, né, o último número e quatro... Eu fui pela tabuada de oito, fui aumentando ela porque eu achei que era a mais provável de eu conseguir o número cento e quatro, não sei por quê. E aí eu pensei oito vezes quatorze, por exemplo. Só que oito vezes quatro dá trinta e dois. Oito vezes três dá vinte e quatro; então o número é quatro. E aí eu fiz a conta a deu... cento e quatro.

Marte – Copiar... Qual que é o seu nome?

Ortência – Ortência Lilás.

Marte – Ah, meu Deus do Céu. Imagina se o colégio pegasse fogo, e a gente ficasse presa aqui.

Ortência – Eu pularia a janela.

Marte – Eu colocaria uma caixa, todas essas caixas perto da janela, e...

Ortência – Não precisa ser tão difícil. A gente sobe na caixa, sobe na janela, a gente pendura e vai direto na mata. Ouh, o quê que você tá fazendo?

(Marte se levanta e vai até a janela).

Marte – Não, eu tô só vendo aqui. Mas é o segundo andar que a gente tá. É fundão.

Ortência – Finalmente conseguimos, que felicidade!

Marte – Conseguimos, não. Você conseguiu.

Ortência – Ah, mesmo assim. Pelo menos, agora... foi.

(As alunas escrevem, por mais de um minuto).

Ortência – Quanto que deu o seu?

Marte – Cento e quatro.

Ortência – Cento e quatro metros?

Marte – Tem que fazer o perímetro?

Ortência – Não tem que fazer o perímetro, mas tem que falar... Agora é o resto. Primeiro a gente descobriu quais são os lados, a base pra gente poder fazer a questão. Agora a gente tem que descobrir quantos metros de alumínio você precisa pra fazer o acabamento, que é o perímetro, né, porque... (Faz o contorno do retângulo no ar, com os dedos).

Marte – Que raiva!

Ortência – É por isso que a gente precisava dos lados, pra poder fazer o perímetro, pra poder calcular quantos metros de alumínio, pra colocar em volta do *outdoor*. Eu fiz quatro raciocínios errados.

Marte – Eu três, quatro, mas um eu apaguei.

Ortência – Eu fiz quatro.

(Pesquisador retorna à sala).

Pesq – E aí, conseguiram acabar?

Ortência – Eu fiz quatro raciocínios errados antes de desistir e fazer de cabeça. Eu tentei três tipos de equação do segundo grau e um tipo de alguma coisa muito estranha.

Pesq – Mas vocês acabaram?

Ortência e **Marte** – Sim.

Pesq – Já que vocês têm aula agora e não temos mais tempo, eu vou agradecer e liberar vocês. Muito obrigado.

TAREFA 6

Entrega a folha desta tarefa, sem orientações. Na mesa à qual se assentam as alunas, há lápis, borracha, réguas, esquadros e algumas figuras recortadas em cartolina, as mesmas das tarefas 3 e 4 (quatro triângulos equiláteros cujos lados tem a medida aproximada do raio do círculo da tarefa 6, e quatro quadrados cujos lados têm medida aproximada da metade do raio desta tarefa).

Marte – Tem esquadro e régua, então a gente vai ter que usar o esquadro e a régua?

Pesq – Não necessariamente. Apenas se vocês sentirem necessidade.

Ortência – Professor, agora eu quero falar uma coisa muito importante. A gente não tem a mínima ideia de como calcular a área nem perímetro da circunferência. O professor de desenho geométrico disse que vai estudar isso com a gente no fim do ano. Como é que você pede isso pra gente? Eu não tenho a mínima ideia. Eu sei calcular o raio, mas não sei como eu posso utilizar isso com a área e o perímetro.

Marte – Eu sei como eu posso... Não.

Pesq – Mas talvez, “em algum lugar do passado”, vocês já tenham visto alguma fórmula ou alguma da várias saídas para esta tarefa, porque tem várias saídas.

Marte – Tem. Quadrado é uma.

Ortência – Não tem como eu transformar isso num triângulo, nem num quadrado, que é o que eu sei fazer a área.

Pesq – Talvez tenham saídas muito exatas, talvez tenham saídas aproximadas... Façam com puderem.

Marte – Eu sei. Eu sei.

Ortência – Seja feliz com a sua sabedoria.

(Pesquisador se ausenta da sala. As alunas pegam esquadros e réguas e os movimentam sobre a primeira figura da tarefa).

Ortência – Sinceramente, eu estou ligeiramente, completamente, totalmente perdida.

Marte – Aaah rá.

Ortência – Ah, e você que disse: eu sei o que fazer, eu sei... Então como é que é?

Marte – Eu vou fazer um quadrado em volta.. Eu vou falar assim: a área do círculo é aproximada do quadrado.

Ortência – Cara, a sua inteligência me deixa perplexa! Eu fico com vergonha de ser sua amiga, de tão inteligente que tu é.

Marte – Nossa você afetou meu coração. Acabou com o meu *hart* agora.

Ortência – Mas até que é uma boa ideia, tá. Eu tava brincando. É uma boa ideia. Mas eu já pensei em outra coisa.

Marte – É? Faz um triângulo, assim. (Coloca a régua sobre a figura).

Ortência – (Risada). Mas aí vai ser ligeiramente assim... O triângulo vai ter que ser muito maior. Eu tinha que pensar numa figura mais aproximada que a gente saiba fazer, mas a gente só sabe fazer área de triângulo, de quadrado ou de retângulo.

Marte – Mas se a gente fizesse e triângulo com um retângulo aqui em baixo.

Ortência – Pra que o triângulo, se o retângulo só dá.

Marte – Faz só um quadrado mesmo.

Ortência – Ah, eu vou fazer um retângulo.

Marte – Porque você vai fazer um retângulo?

Ortência – Porque eu não quero fazer um quadrado.

Marte – Mas aí a gente pode corrigir uma da outra. Pô, sacanagem o que fizeram com o Nuno[72] hoje, né? Mas acho que não chega a ser *bulling* não, né?

Ortência – Não. Mas não que chame ele de santo, mas o coitado sofre, né?

Marte – Sério, tinha que ter psicólogo nesta escola, mas não tem, né?

Ortência – Não. Tem assistente social.

Marte – Oh, fiz um quadrado.

(Ortência levanta-se para pegar uma borracha, balbuciando alguma música).

Ortência – A minha mãe fala que eu sou uma pessoa musical. Quando eu não tô cantando, eu tô fazendo algum barulho, ritmado, é claro.

Marte – Esse quadrado é equilátero.

Ortência – Oh, que descoberta, colega! (Tom de ironia).

(O pesquisador retorna à sala).

Ortência – Professor, a gente só vai conseguir uma área aproximada, e olhe lá.

Marte – Ah, tem que fazer desta figura também?! (Aponta a segunda figura da tarefa, o semicírculo). Ah, professor, eu já te falei o quanto eu te amo? (Tom irônico).

Ortência – Eu vou conseguir o mais aproximado que você, porque eu tive uma ideia muito legal. A gente não fez um quadradão? Aí a gente pode fazer uns quadradinhos aqui e tirar esses quadradinhos. Aí vai ficar mais aproximado ainda.

Marte – Ah, e depois pode fazer triângulos aqui!

Ortência – Aí já é querer demais, né? (Risadas).

Marte – Até que não. (Risadas).

Ortência – Ah, você falou: todo quadrado é equilátero. Claro que é equilátero. Se não for equilátero não é quadrado.

Marte – É, eu sei. Foi a felicidade do momento.

---

[72] Nome que criamos para não identificar um dos colegas de classe dos sujeitos de pesquisa.

Ortência – Não dá um centímetro. Meu quadrado de lá deu certinho, o de cá não tá dando, não.

Marte – Eu te falei, não tem como, não.

Ortência – Tem, sim. Se você tiver um pouquinho de boa vontade, tem.

Marte – Ah, então não dá, não.

Ortência – Eu tenho boa vontade, sabe?

Marte – Ah, eu vou fazer triângulo mesmo.

Ortência – Acredite, vai ser bem mais complicado.

Marte – Não, é só riscar aqui e ali.

Ortência – O triângulo vai ser fácil. Com a conta é que eu quero ver.

Marte – Pode fazer aproximado? (Dirigindo-se ao pesquisador).

Pesq – Cada um com a ideia que achar melhor.

Ortência – Você acha que isso aqui vai ser exato? (Risadas).

(As alunas utilizam as réguas para desenhar e medir, por três minutos, em silêncio).

Ortência – Professor, o símbolo de aproximadamente é tracinho com aquela cobrinha em cima, não é?

Pesq – É isso mesmo.

Ortência – A minha conta tá incrivelmente aproximada, OK?

Pesq – OK.

Ortência – Da área do círculo, podia tá mais aproximada. Podia fazer alguns triângulozinhos aqui e aproximar ainda mais. Mas estaria bem mais complexo.

Marte – Oh! A área e o perímetro deram igual.

Ortência – Huuum.

Marte – Hã hã!

Pesq – Isto é impossível?

Ortência – Não, não é impossível. Mas é improvável.

Pesq – Vocês já viram um exemplo, outro dia, não foi?

Ortência e **Marte** – Não.

Pesq – Aquele exemplo da tarefa 2, não se lembram?

Ortência – Não.

(Marte balança a cabeça, negativamente).

Pesq – O exemplo da corda de dezesseis centímetros, que formava um quadrado de lado quatro centímetros.

Ortência – Ah, sim, sim, eu lembro.

Marte – Eu não.

(Pesquisador vai ao quadro e desenha um quadrado, marcando o número quatro em cada um dos lados).

Pesq – E então, Marte?

Marte – Ah, sim.

Ortência – O perímetro que eu tô meio agarrada, aqui. (Aponta para sua folha). Porque eu já pensei em tirar os quadradinhos que eu tirei na área. Eu já pensei... em fazer o quadrado todo. De qualquer jeito, eu acho que não vai dar certo, não.

Pesq – Tá, mas tenta fazer da maneira que conseguir visualizar.

Marte – Terminei.

Pesq – Já terminou?

Marte – Sim.

(Ortência continua escrevendo, apagando e escrevendo).

Marte – Professor, mas você quer a gente faça a área e o perímetro de um círculo?

Pesq – Mas você já não fez?

Ortência – Ela fez de qualquer jeito.

Marte – Não. Eu aproximei sim, mas ela tá colocando quadradinho a onde tem espaço livre. Entendeu?

Ortência – Pra poder aproximar mais.

Marte – Eu tentei, só que aí não deu... não coube. Eu ia fazer de um centímetro, meio centímetro, mas aí...

Ortência – Acho que acabei.

Pesq – Então, agora que as duas acabaram, eu vou colocar no quadro as duas fórmulas, de área e de perímetro, pra ver se vocês se lembram delas e pra que vocês usem estas fórmulas para calcular novamente a área e o perímetro de cada figura, agora com mais precisão.

Ortência – Professor, a gente não viu, a gente não pode lembrar o que a gente não chegou a ver!

Pesq – Vocês já ouviram falar deste número (escreve no quadro ou lousa), o número pi?

Marte – Número o quê?

Ortência – Número pi. Sim, três vírgula quatorze quinze...

Pesq – Isso mesmo. Eu vou arredondar esse valor pra três, pra facilitar o cálculo da área e do perímetro, tá?

Ortência e **Marte** – Tá.

Pesq – Então a área do círculo é... (Começa a escrever a fórmula na lousa).

Ortência – Ai, a gente já viu área de circunferência. Ai, que droga, não acredito!

Pesq – Eu sabia que vocês já conheciam isto... Então a área é igual a pi vezes o raio elevado ao quadrado. Lembram?

Marte – Erre, o quê que é o erre?

Pesq – Erre é o raio da circunferência...

Ortência – É o raio, é...

Pesq - ...a distância do centro até a borda. (Desenha uma circunferência na lousa).

Marte – Ah, tá.

Pesq – E o perímetro da circunferência é igual a dois vezes pi, vezes o raio. (Escreve a fórmula na lousa). Então agora eu vou pedir pra vocês calcularem novamente a área e o perímetro destas figuras (círculo e semicírculo) e depois compararem com os cálculos que já fizeram, tá?

Ortência – Claro que a gente vai mudar.

Marte – Ah, que coisa linda! (Ironicamente).

Ortência – Ah, você tá de...

Marte – Mas o negócio agora é achar o meio.

(Ambas medindo com réguas e escrevendo).

Ortência – A área é igual e oiten... Ah, você tá de brincadeira?

Pesq – Qual o valor do raio você mediu?

Ortência – Três.

Pesq – E aí, o que você fez?

Ortência – Oh, área é igual a pi vezes erre elevado ao quadrado.

Marte – A minha também deu três.

Ortência – Ai, nossa! Não acredito, retardada! Não, não dá, não. Deixa pra lá.

Pesq – O que foi?

Ortência – É porque o meu deu oitenta e um, tava dando oitenta e um. Mas é outra coisa. É porque eu esqueci da potência. Isso é uma coisa que faz a gente errar muito, essa coisa de multiplicação é antes de adição, e potência é antes de multiplicação, faz errar muito. Eu erro muito nisso.

Pesq – A ordem das operações?

Ortência – Sim, foi isso que eu fiz agora. Antes de fazer o três ao quadrado, eu fiz três vezes três, aí deu oitenta e um, e não vinte e sete.

Pesq – Mas você percebeu rápido.

Ortência – É em centímetros quadrados ou em centímetros normal?

Pesq – Boa pergunta.

Ortência – Porque é circunferência, então não é um vez o outro, então... O quê que você acha? (Dirige-se para Marte).

Marte – Eu acho que é centímetro quadrado.

Ortência – Você acha? Porque, tipo, não é um lado vezes o outro, não é uma medida vezes a outra. É uma medida só. (Faz um movimento circular com o lápis, no ar).

Marte – Ah, então não é.

Ortência – Não, mas eu também não sei se é uma medida só ou se são duas medidas, ah rá! Eu tenho argumento contra as duas teorias, mas a favor eu não tenho de nenhuma das duas.

(Risadas das alunas).

Marte – Ah, eu tenho, a do que tem elevado a dois. Todas as áreas eu coloco sempre coloco o elevado a dois.

Ortência – Ah, você não conhece todas as áreas, pra falar isso.

Marte – Ah, mais é.

Ortência – Todas que a gente conhece. E o círculo é uma curva só. Oh, tristeza!

Marte – É.

Ortência – Centímetro ou centímetro quadrado, eis a questão.

Marte – Ai, meu Deus.

Ortência – Calma, Marte, tudo vai dar certo no final.

Marte – Dois, que dois é esse.

Ortência – Eu acabei. Oh, professor, de um deles, eu errei por cinco centímetros, e o outros eu errei por dois centímetros.

Marte – Um eu errei por dois, não, por três centímetros...

Pesq – A área ou o perímetro?

Marte – A a... o perímetro. Não, é... ah, esquece.

Ortência – O meu, a área da primeira figura, a diferença foi de cinco centímetros, e o perímetro foi só por dois centímetros que eu errei.

Pesq – Beleza. Então, em certo caso, a aproximação resolve?

Ortência – Sim.

(Ambas escrevendo).

Ortência – Nossa! Ah, não, tem alguma coisa extremamente errada. A área da segunda figura deu cento e oito. Centímetros. Ah, eu fiz uma coisa muito errada. Professor, o raio disso (mostra o semicírculo da tarefa) não é isso aqui não, é ? (Passa o lápis por sobre o diâmetro da figura).

Pesq – Você pode me mostrar novamente?

Ortência – O raio desse meio círculo não é isso (diâmetro), é isso (raio), né?

Marte – É tipo o círculo dividido por dois.

Pesq – Será que ajuda vocês compararem as duas figuras?

Ortência – Sim. Se eu colocasse essa figura (semicírculo) aqui (círculo), o raio seria isso aqui (marca com o lápis o raio sobre o segmento do semicírculo).

Pesq – Quem sabe, se você dobrar o papel, sobrepondo as figuras, como você disse?

(Ortência dobra a folha e visualiza e sobreposição, aproveitando uma certa transparência do papel).

Ortência – (Sorriso). A área é a metade. Mas aí não precisa fazer conta?

Marte – Tem. É dividido por dois. Só que... agora, divide vinte e sete por dois. (Tom de desafio).

Ortência – Olha só, área da segunda figura eu acertei. Sem fórmula.

Pesq – E o perímetro?

Marte – Bota a metade do outro.

Ortência – É. Mais não me faça falar qual é a diferença.

Pesq – Então vocês estão certas de que vai ser a metade?

Ortência e **Marte** – Sim.

Ortência – Porque uma figura é exatamente a metade da outra.

Pesq – Como é que vocês me mostrariam o perímetro da primeira figura?

Ortência – O perímetro da figura é isso aqui, ó. É a linha que contorna ela.

Pesq – E da outra?

Ortência – A outra é... Aaaah! Totalmente, não é a mesma.

Pesq – A mesma?

Ortência – Não é a mesma, de jeito nenhum.

Pesq – Mas vocês tinham dito que era a mesma?

Marte – Não. Que erra a metade.

Ortência – Não! Também não era a metade, não. Seria a metade se a figura só tivesse isso aqui. (Passa o lápis por sobre a linha do demicírculo). Como a figura tem isso (mostra o segmento de reta que forma o semicírculo), não é a metade, porque isso daqui não faz parte.

Marte – Ah, é mesmo.

Ortência – O perímetro vai ter que calcular. A área é a metade, o perímetro, não.

Marte – Quanto é vinte e sete dividido por dois?

Ortência – Ah, fala sério, Marte. Vinte e seis dividido por dois, treze. Treze e meio com treze e meio, vinte e sete.

Marte – Obrigada.

(Ambas escrevem, por trinta segundos).

Marte – Acabei.

Pesq – Então pode começar a última folha, com as últimas figuras.

Ortência – Professor, o perímetro é igual.

Pesq – É igual?

Ortência – Eu acho que é igual.

Pesq – Por quê?

Ortência – Porque por mais que eu ache que isso (contorno do círculo) aqui não é mesma coisa que isso (contorno do semicírculo)... com certeza não acho... pensando de acordo com a fórmula, olha só, a fórmula é: dois pi vezes o raio. O raio dessa daqui (círculo) é três; pra mim, o raio dessa daqui (semicírculo) vai ser três também.

Pesq – Hum hum.

Ortência – Então, vai ser o mesmo. Porque, na fórmula, pi não vai mudar, dois também não vai mudar. Então o que muda, o que varia a quantidade, o tamanho, a medida do perímetro é o três, que é o raio. Se o raio aqui é três e aqui também, o perímetro vai ser o mesmo.

Pesq – Entendi. Aí você está pensando em termos da fórmula, o que a gente falaria em termos algébricos.

Ortência – Sim.

Pesq – Se você pensar só em termos geométricos, das medidas geométricas?

Ortência – Aí eu não acharia que é o mesmo, por questão de visualização. Eu não acharia que,se eu esticasse essa linha pra baixo, por exemplo, daria o mesmo tamanho.

Pesq – Daria ou não daria?

Ortência – Eu acho que não daria. Só que eu prefiro pensar do outro jeito, de acordo com a fórmula que o mais... certo. (Faz o sinal de aspas com os dedos).

Marte – Professor, você quer do que tá verde... ou é de tudo? (Mostra na figura da coroa circular). Você entendeu?

Pesq – A figura... é a verde.

Marte – Quando eu for fazer o pi aqui, eu vou fazer do raio aqui no meio (aponta para o furo da coroa circular), ou não vai dar, ou você quer que calcule para os dois círculos?

Pesq – A figura da tarefa é a figura verde, né?

Marte – Deixa fazer dos dois círculos.

Pesq – Talvez você precise fazer dos dois círculos.

(Ambas desenhando com a régua).

Marte – Eu sou péssima em Desenho Geométrico. Péssima em qualquer coisa que envolva números.

Pesq – Talvez isso não seja bem verdade.

(Ortência continua desenhado e medindo. Marte, olhando para o alto).

Ortência – Se uma medida é três vírgula sete, eu posso arredondar para quatro?

(O pesquisador balança a cabeça, respondendo positivamente. Ambas as alunas escrevem e desenham, por três minutos).

Ortência – Professor, essa é a nossa última atividade?

Pesq – É a última. E nós gastamos dois encontros e mais o horário de uma aula para fazer todas as tarefas. Tá cansativo?

Ortência – Não, normal. Perguntei só mesmo pra saber.

Pesq – Mas o último encontro foi bem cansativo pra vocês, né?

Marte e **Ortência** – É, foi.

Pesq – É, muitas tarefas seguidas cansam mesmo.

Ortência – É igual aquilo que você falou da Olimpíada de Matemática. Muitas vezes eu até comecei a fazer realmente, mas chega no fim da Olimpíada, você já tá tão cansada de raciocinar...

Marte – Você já tá marcando tudo de chute.

Ortência – ...Você já tá marcando no chute, porque você não aguenta mais raciocinar. Eu acho que, ou a Olimpíada tinha que ser menor... Na verdade eu não acho que a Olimpíada tinha que ser menor, acho que tinha que ser dividida em duas partes, por exemplo. É muito ruim!

Marte – Professor, eu não tô lembrando com é que faz o perímetro e a área de um triângulo.

Ortência – Ah-ah, eu se-ei! (Tom de convencimento).

Marte – Ah, não, perímetro eu sei. Mas a área...

Ortência – Eu sei.

Marte - ... É aquela coisa lá da hipotenusa, que tem que ter dois triângulos retângulos.

(Ortência fita Marte de modo repreensivo).

Marte – Tá, então não é isso. (Risada). É...

Pesq – Continua, Marte, pois pode ter várias saídas.

Ortência – Sim, às vezes tem a ver.

Marte – É porque tem muito tempo que eu não vejo, quer dizer, estas férias, né? Essas férias. Então não é triângulo retângulo?... É sim, é triângulo retângulo. Você tem que achar dentro do triângulo retângulo pra achar a hipotenusa.

Pesq – Tenta, então, fazer.

Marte – Não, eu já fiz.

Ortência – E o quê que a hipotenusa tem a ver com isso, com a área do triângulo?

Marte – Que aí eu vou fazer aquela conta... A hipotenusa... que eu não lembro... é duas vezes...

Ortência – A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos. Mas isso é pra... Mas, enfim, né?... Cada um faz do jeito que sabe. (Sorri, olhando para o pesquisador). Eu num vou falar o meu jeito, né?

(Ortência escreve e Marte olha para o papel).

Ortência – Essa figura aqui (estrela) tá muito fácil. Eu tô preocupada quando chegar no círculo. Área dessa...

Marte – (Olhando para a câmera). Professores de Matemática, eu tenho uma coisa pra falar: eu não sei Matemática.

(Ortência balbucia cálculos, escrevendo. O pesquisador se ausenta da sala).

Marte – Não lembro de jeito nenhum! Não sei mais! Eu decorei a fórmula de... Só se deixar olhar no meu caderno. Ortência, me ajuda!...

Ortência – Eu não vou te ajudar, cada um faz o seu raciocínio.

Marte – Mas eu não tenho raciocínio.

Ortência – Então cria um. (Risada).

Marte – Não, nesse. Tá bom, então eu vou fazer esse. Nem esse. Não vou fazer essa prova, não! (Ironia).

Ortência – Aqueles bem idiotas: não vale ponto.

(Ambas escrevendo, por dois minutos).

Ortência – É só a... área, ou tem que ter área e perímetro?

Marte – Perímetro também. Tipo... continuação da primeira atividade.

(Ambas escrevendo, por mais de um minuto).

Ortência – Acabei. Êba! (Comemora). Agora só falta esse círculo muito estranho aqui (cora circular), que eu não tenho a mínima ideia de como eu vou fazer. (Continua lendo). Eu não vou usar a fórmula neste círculo muito estranho, eu vou usar aquilo que a gente fez. Por que... não sei. Não sei qual que é o raio disso.

(Ambas escrevendo. O pesquisador retorna à sala).

Ortência – Professor, nessa última figura, eu não sei como eu vou usar a fórmula, porque eu não sei qual que é o raio disso. Isso não é um círculo, isso é uma... rodela, um pedaço de um círculo. É uma coisa muito estranha. Eu não sei com é que eu descobr... não sei “saber” o raio disso (faz o sinal de aspas com os dedos).

Marte – Ah, eu vou chutar.

Ortência – Eu vou fazer daquele jeito que a gente fez, fazer o quadrado em volta, o quadrado dentro, fazer o mais aproximado que eu puder.

Pesq – Tá. Você tá falando primeiro em área ou em perímetro?

Ortência – Não, eu tô falando em área. Eu nem comecei a pensarem perímetro. Por favor, não me faça.

Marte – Essa coisa do raio também serve pra uma rodela?

Ortência – A gente realmente não aprendeu isso.

Pesq – Então...

Ortência – Eu nem sei ver o raio, direito. Eu só sei que num círculo completo, é do meio do círculo pra alguma das laterais.

Pesq – Você sabe fazer para o círculo grande, com o raio grande?

Ortência – Sim.

Pesq – E pro círculo pequeno, você saberia fazer também?

Marte – Sim.

Ortência – Não. Ah, por exemplo, o círculo... (Faz um círculo com os dedos no ar).

Marte – Ah, e se subtrair. Fizesse do grande, depois do pequeno, e subtraísse o pequeno do grande? Aaah!

Ortência – (Faz sinal positivo com um das mãos). Tem que ser.

Marte – “Não copia o raciocínio, não...” (Imitando Ortência, em tom irônico).

Ortência – Você já copiou o meu.

Marte – Eu sei, só tô sendo irônica.

Ortência – Garota, esperta, você, hein?

Marte – Nossa!... Super!

Ortência – Tô morrendo de inveja. (Ironia)

(Ambas escrevendo).

Ortência – (Faz sinal retângulo com as mãos no ar). Um grande, um pequeno... (Voz baixa).

(Ambas olham as fórmula na lousa e escrevem na folha).

Marte – É, um é a metade do outro. (Fica olhando para o pesquisador, aguardando algum *feedback*).

(Silêncio. Ambas escrevendo, por vezes olhando para a lousa. Assim permanecem por três minutos).

Ortência – Ah, acabei.

Pesq – Acabou? Você também, Marte.

Marte – Hã hã.

Ortência – Até que não foi difícil.

Marte – Ah, não...

Ortência – Nenhum dos dois foi muito difíceis. Quer dizer, os primeiros foram meio complicadinhos, mas depois que você passou a fórmula, os outros dois foram muito fáceis.

Pesq – É? Deixa eu te fazer uma pergunta, então, enquanto ela tá fazendo. É... dessas quatro aí, qual que seria a mais fácil de calcular, sem ter a fórmula?

Ortência – Obviamente, esta daqui. (Aponta a estrela).

Pesq – A estrela?

Ortência – Sim. É a mais fácil de todas.

Marte – Eu não acho. Eu acho a do círculo.

Pesq – A do círculo?

Ortência – Porque...

Marte – Sem dá a coisa (fórmula), eu que eu não ia conseguir nenhumas delas. Mas a da estrela, eu não consegui fazer a área, não.

Pesq – Não?

Marte – Não.

Ortência – Porque calcular área de triângulo e de quadrado é coisa, na minha opinião, é muito fácil, bem mais fácil do que calcular área de circunferência. Pra mim foi muito fácil fazer isso aqui. (Aponta novamente a estrela na folha da tarefa). Porque é o que a gente tá acostumada todo dia a fazer: área de triângulo e de quadrado.

Pesq – É mais comum pra vocês?

Ortência – Muito mais comum. E mais utilizado. Tanto que, em todas as figuras que a gente tá aprendendo em Desenho Geométrico agora, pra saber a área delas a gente usa a área de triângulos. A gente acha um monte de triângulos na figura e usa a área deles pra saber a área da figura. Então, é muito mais fácil. Com certeza, por isso que eu comecei por ela (estrela). Primeira coisa que eu fiz quando eu bati o olho, foi falar: foi ela. Na minha opinião, é a mais fácil.

(Durante esta fala de Ortência, Marte ficou olhando para Ortência e para o alto, um tanto “hipnotizada” pela fala).

Pesq – (Dirigindo-se a Marte). Você quer falar alguma coisa sobre isso?

(Marte balança a cabeça, negativamente).

Pesq – Você já acabou a tarefa?

Marte – Sim.

Pesq – Vocês já colocaram os nomes nas folhas?

Ortência – Eu já coloquei.

Pesq – Eu só quero fazer mais umas perguntinhas rápidas, pode ser? (Preocupado com o horário das alunas, que precisavam ir embora).

Ortência e **Marte** – Sim.

Ortência – Só uma coisa, rapid...

Pesq – Pode falar.

Ortência – É... Marte, aquela hora que você tava falando da hipotenusa, pra fazer a área de um triângulo, tem uma fórmula...

Marte – Eu sei, eu esqueci a fórmula.

Ortência – ...Base vezes altura dividido por dois.

Marte – É... eu esqueci.

Pesq – Vocês discutiram esta fórmula outro dia, em outra tarefa, não foi?

Ortência – Sim.

Marte – Hã hã.

Pesq – Pra você, é mais comum a fórmula de quadrado do que de triângulo, é isso?

Marte – É. Foram as regras. Eu não estudei nada, aí...

Pesq – Tá. Então, a pergunta que eu ia fazer é a seguinte: vocês conseguem ver alguma relação entre área e perímetro?...

Marte – Não.

Ortência – ...Alguma ralação clara entre área e perímetro?

Marte – Não, eu acho que eles são primos.

Ortência – Ah, rá. Primos? (Discretamente, voz baixa).

Pesq – Primos? Como assim?

Ortência – Não, pri... Pode falar. (Dirigindo-se a Marte).

Marte – Porque eles são... Fazem... são uma relação, são um valor...

(Com gestos e olhares, Ortência expressa ansiedade para falar, mas se contem e espera Marte falar).

Marte - ...Um número que explica... explica, não. Um número de um local, tipo, sabe... Um é o tamanho por fora, e o outro é o interior todo. Por fora e por dentro. Eu vejo assim.

Ortência – Eu já vejo diferente.

Pesq – Por que, então, que são primos?

Marte – É, entendeu, eles têm uma semelhança em alguns pontos, que é... Todas as figuras têm os dois... e, na hora de fazer a conta a gente encontra os dois, sabe?... Mas, na hora da resposta, na maioria das vezes não tem nada a ver.

Ortência – É...

Pesq – É? Você acha que não tem nenhuma relação direta? Quando um aumenta, o outro aumenta ou diminui?...

Ortência – Eu acho, eu acho.

Marte – Ah, não. Isso é. Eu tô falando, por exemplo, na resposta desse (aponta para a figura da estrela), sabe, na área total de uma figura fixa...

(Ortência expressa novamente ansiedade pra falar, o que Marte percebe).

Marte – Peraí, rapidão.

Ortência – Não, nada não, é porque... (Envergonhada).

Marte – Um figura fixa, eu acho os resultados completamente diferentes, tirando os quadrados.

Ortência – Eu...(Voz baixa).

Pesq – Entendi. Os quadrados são figuras especiais, em relação a área e perímetro?

Marte – Foram as únicas que eu vi até agora, que têm área e perímetro iguais.

Pesq – Tá.

Ortência – Eu já acho que... Eu acho diferente, porque, tipo, a área é... você quer saber a... a dimensão, não, mas... o perímetro também não, porque seria falar de outra coisa, mas a quantidade toda de figura. Por exemplo, a área de um terreno, tudo que tem de terreno, tudo que tá dentro da figura, igual ela tinha falado. E o perímetro é o contorno. Igual... o exemplo da corda, eu achei que foi ótimo pra poder ter noção de perímetro e área, porque o perímetro é só o contorno da figura, o perímetro é o contorno e a área é tudo o que tá dentro. Então, a maior parte das vezes, a área é maior que o perímetro. Eu consigo pensar talvez numa figura bem... bem não uniforme, assim, mais ou menos, por exemplo, ela teria que ser cheia de curvas e, assim, mais fina e, nesse caso, e acho que...

Pesq – Você consegue desenhar essa figura no quadro (lousa)?

(Ortência vai até a lousa e desenha, inicialmente, um quadrado).

Ortência – Só pra exemplificar o que eu tô falando. Por exemplo, a área é isso aqui (preenche o quadrado desenhado, usando o giz), o perímetro é só o que tá em volta, é só a cordinha que tava em volta. Achei esse exemplo muito bom.

Pesq – Sim.

Ortência – E a maior parte das figuras, pelo menos as que a gente teve contato até agora, a área é bem maior do que o perímetro. E eu tava pensando, enquanto ela tava falando, num exemplo em que o perímetro seja maior que a área.Talvez numa figura não uniforme, por assim dizer, que seria cheia de curva, e fina (desenha na lousa uma figura com forma de uma ameba estreita), com puco espaço pra ter área, mas muito espaço de contorno. Num sei, alguma coisa assim, por exemplo. Eu acho que o perímetro dessa figura seria maior que a área, porque a área é só isso daqui (preenche parte da figura amorfa, usando giz), e o perímetro seria ela toda. Mas aí eu me pergunto como que eu faria pra calcular a área e o perímetro de uma figura dessa. (Risada). Eu não sei nem se tem como.

Pesq – É. Essa figura não é uma figura geométrica usual, né? Será que você poderia pegar uma figura usual, ou seja, que seria um polígono?

Ortência – Polígono? Não, não sei. Eu posso fazer um polígono irregular... aí eu não sei se eu saberia calcular também, mas... Isso seria um polígono. (Desenha na lousa uma figura de forma parecida com a anterior, mas poligonal).

Pesq – Nesta figura seria mais fácil calcular a área e o perímetro?

Ortência – Uma figura com muitas voltas e pouco espaço pra poder ter área.

Marte – É, ela te dá ideias e você pode ver ali figuras que você já conhece. Por exemplo, você vê ali um monte de triângulos e quadrados e retângulos...

Pesq – Figuras conhecidas, né?

Ortência – É. (E desenha triângulos e retângulos dentro da figura poligonal, dividindo-a em outras). Assim, ó, triângulo, triângulo, retângulo, quadrado, enfim, um monte de coisas.

Pesq – Entendi.

Ortência – Daria muito trabalho, mas daria pra calcular.

Pesq – Essa figura seria, então, um exemplo de que o perímetro pode ser maior que a área?

Ortência – Acho que sim, porque tem mais corda e menos...

Pesq – Então é possível.

Marte – É.

Ortência – É possível, mas é bem incomum.

Pesq – Então, de uma maneira geral, vocês acham que existe uma relação direta entre área e perímetro?

Ortência – Com certeza. Existe.

Marte – Hã hã. É tipo... Peraí que eu não tô lembrando. Ah, deixa pra lá, esqueci.

Ortência – Por exemplo, você tem o perímetro aqui, uma corda aqui (faz uma retângulo com as mãos no ar). Aí, se isso aqui aumentar (vai afastando as mãos uma da outra, aumentando a figura), consequentemente a área vai aumentar junto. O espaço ali dentro vai aumentar.

Marte – Tipo o volume e a are e a densidade, sabe? Tudo interligado.

Ortência – É.

Pesq – Volume, área e densidade?

Marte – É.

Ortência – É. O perímetro é tipo uma cordinha que segura a área. Eu gosto de pensar assim, tipo assim: tem uma coisa ali dentro que é a área, e o perímetro tá segurando ela, sabe? Se a área aumentar, o perímetro vai aumentar. Se o perímetro aumentar, a área aumenta também. Eles meio que obrigatoriamente dependem um do outro.

Pesq – Tá. Eu vou dar um último exemplo e pedir pra vocês dizerem o que acham dele, tá? (Vai para a lousa e desenha um retângulo, marcando as medidas dois e oito, em dois de seus lados). Dois vezes oito...

Ortência – Dezesseis.

Pesq – Esse dezesseis aí seria o que dessa figura?

Ortência – O perímetro. Não...

Marte – A área.

Ortência – A área.

Pesq – Tá. Mais uma figura. (Desenha um retângulo, marcando as medidas um e nove, em dois de seus lados).

Marte – Ah, eu acho que o perímetro é maior que a área.

Ortência – É, o perímetro que a área. Nossa! Eu podia ter pensado num exemplo tão mais simples!

Pesq – Não, o seu exemplo foi ótimo. Eu só queria colocar mais esse exemplo.

(Ortência olha o relógio, algo ansiosa. O pesquisador desenho outro retângulo na lousa, colocando as medidas quatro e seis, em dois de seus lados).

Ortência – A área é vinte e quatro e o perímetro é... oito mais doze... vinte.

Pesq – Eu vou chamar esta figura de A, esta de B e esta de C.

Ortência – A área da figura A é vinte e quatro, e o perímetro, vinte.

Marte – A figura B...

Ortência – Pode falar.

Marte – Não, pode falar.

Ortência – A área da figura B é dezesseis e o perímetro é... dez mais seis, dezesseis, dezesseis mais quatro... vinte.

Pesq – Também?

Ortência – Vinte também.

Marte – Olha! (Tom de surpresa).

Ortência – E figura C: a área é nove e o perímetro é... um... vinte também.

Pesq – Vinte também?

Ortência – Sim.

Pesq – Então todas as figuras têm o mesmo perímetro?

Ortência – É, todas foram feitas com a mesma... “corda”. (Faz o sinal de aspas com os dedos no ar).

Pesq – E qual tem a área maior?

Ortência – A primeira.

Marte – A.

Ortência – É, A.

Pesq – A primeira tem a área maior?

Ortência – Sim.

Pesq - Então da C pra figura A, a área foi aumentando?

Ortência – Diminuindo.

Marte – Não.

Pesq – A área.

Ortência – Sim, a área foi diminuindo.

Marte – Foi aumentando.

Ortência – Vinte e quatro... Não, dimnuindo.

Marte – Não, de C pra A.

Ortência – Ah, de C pra A. Entendi A pra C, foi mau. É foi aumentando.

Pesq – E aumentou bastante, de C pra A?

Ortência – Sim, foi de nove, dezesseis e vinte e quatro

Pesq – E o perímetro, aumentou muito?

Ortência – Não, continuou a mesma coisa.

Marte – É.

Pesq – E então, o quê que vocês me dizem dessa relação?

Ortência – É a forma da figura.

Marte – Ela foi espichando e... Foi emagrecendo e foi crescendo.

Ortência – E acho isso muito estranho. E não paro pra pensar nisso, às vezes. O perímetro continua sendo o mesmo; e a área, só por mudar sua forma, ela aumenta e diminui. Eu não consigo entender muito bem como, já que o perímetro continua sendo o mesmo; o que tinha dentro dele também era para continuar, mas muda completamente.

Marte – E tipo uma criança, é tipo uma criança. O A é um bebê, muito gordinho, só que pequenininho. Depois passa pra B, é... emagrece mais, não come mais e espicha, não cresce, espicha. A gordura que ele tinha passa pra a altura. Depois, na C, ele emagrece completamente e fica completamente crescido. A gordura que ele tinha para ser a altura.

Ortência – Aaaah... (Voz baixa, expressando surpresa).

Pesq – Legal. E o quê que você me diz disso, Ortência?

Ortência – Ah, eu concordo. Eu achei muito legal o exemplo. Eu nunca teria pensado neste estilo.

Pesq – Então, aí eu vou voltar à pergunta. Vocês acham que esta relação se mantém?

Marte – Hã hã.

Pesq – Se a área aumenta, o perímetro aumenta; se a área diminui, o perímetro diminui; e se a área se mantém, o perímetro se mantém?

Ortência – Não, nem sempre. Tanto que ali (lousa) o perímetro se mantém em todos os três casos, e a área continua sendo completamente diferente.

Marte – É, pode variar, vai...

Ortência – Na Matemática, quase nunca você pode falar que uma coisa é sempre outra, porque sempre tem aquela exceção. Por que...

Marte – Você não pode criar muitas regras, você nunca conhece tudo.

Ortência – ...Porque você nunca conhece tudo, exatamente.

Marte – É impossível conhecer tudo na Matemática, porque, tipo, sai muito tirando os números que os filósofos, os lógicos, os...

Ortência – Os Matemáticos.

Marte – Não, também não é Matemáticos... Mas falam que única coisa realmente verdadeira são os números, que é a única coisa que tem verdade, sabe? Que você sabe que um mais um é igual a dois.

Ortência – E é isso.

Marte – É isso. O resto, forma geométrica... não.

Pesq – Mesmo na Matemática, o resto dela, você não tem certeza?

Marte e **Ortência** – Não.

Pesq – Mas uma coisa vocês agora já estão percebendo: existe uma relação entre área e perímetro, mas esta relação não é...

Ortência – Constante.

Pesq - ...Tão fixa assim, não é? Vocês já sabem que não é tão fixa assim.

Ortência – Exatamente.

Marte – É tipo o verbo regular e irregular, sabe, essas coisas assim da língua portuguesa, também. Na acentuação, a professora cria uma regra que quase sempre tá definitiva, mas sempre tem aquela palavrinha que o acento vai ser numa letra lá, sabe? Diferente a acentuação.

Pesq – Tá. Agora, uma última pergunta mesmo. Existe uma maneira melhor pra calcular a área, usando um tipo ou outro de instrumento, um tipo ou outro de técnica, um tipo ou outro de ideia, que vocês acham melhor pra calcular a maioria das áreas, senão todas?

Marte – Hã hã.

Ortência – Régua.

Marte – E procurar outras formas dentro das formas que você não conhece, igual a gente fez.

Ortência – A gente faz isso sempre na aula de Desenho Geométrico. Por exemplo, igual: na estrela, eu não calculei a fórmula dela; eu calculei a área de quatro triângulos e de um quadrado; depois eu somei as cinco áreas, deu a área da figura. Você sempre acha a figura, se você sabe fazer a área dentro das outras.

Marte – É tudo questão de se adaptar.

Ortência – De visualização. É tudo questão de visualização.

Marte – Não, eu é que é mais de se adaptar à situação, aos instrumentos que você tem. Porque, mesmo que você saiba a... a... Por exemplo, na época que a gente aprende... que a gente tem que decorar tabuada, nossa primeira prova que a gente tem que ter decorado a tabuada. Você não vai ter decorado a tabuada, pelo menos a maioria não. Aí você vai fazer outras contas que vai te levar a fazer aquilo. Na provado Vestibular também, você não vai decorar, você não vai lembrar de tudo que você estudou. Você tem que se adaptar à situação. Você vai pegar o seu lápis, vai olhar o tamanho, é... sabe? Ir pelo que você tem na hora.

Ortência – É. O professor de Desenho Geométrico fala sempre isso pra gente, na sala de aula. É... os tipos de coisa que você pode se adaptar, por exemplo, na hora você tem um lápis, você faz o seu lápis de régua, você marca o seu lápis... E fala muito isso.

Pesq – Marte, você tinha falado algo sobre ver uma figura dentro de outra. Isto também faz parte dessa adaptação?

Marte – Faz. Porque você não pode ficar só nessa coisa de decorar. É... por exemplo, de um círculo, você só sabe a circunferência, você só saber aquilo e pronto. Você tem que saber o que tem dentro também. Você tem que enxergar além, você tem que enxergar... dentro.

Ortência – Foi isso que eu quis dizer com visualização. Porque numa figura você acha outras, e nisso você consegue fazer alguma coisa a mais. Pra mim, é só isso.

Pesq – E perímetro já é diferente disso?

Marte – Não, mesma coisa. Perímetro é mais fácil ainda... de você achar as coisinhas.

Ortência – É.

Marte – Porque é mais...

Ortência – Simples.

Marte – É. Eu me sinto mais segura com a adição e subtração do que coma multiplicação e divisão. Eu acho a multiplicação e a divisão uma coisa muito volúvel, muito falsa.

Pesq – Volúvel?

Marte – É. Volúvel, falsa, sabe? Porque você sabe que cinco mais cinco é igual a dez. (Contando nos dedos). Tá na sua mão, você vai... Mas multiplicação já é...

Ortência – É estranho. Porque assim, desde cedo a gente tem aquele coisa: eu tenho uma laranja mais uma laranja é igual a duas laranjas. Você sabe, aquilo é palpável, você tem exemplos. Agora, a multiplicação o exemplo não é muito comum. É uma coisa mais... estranha.

Marte – É, e tem muitos números escondidos por traz daquele sinal, sabe? Tipo, duas vezes seis, sabe? Umas coisas assim.

Pesq – Que tem coisas escondidas ali, por traz da multiplicação. E vocês não tem exemplo tão reais, é isso?

Marte – Não muito na cara.

Ortência – Exatamente.

Pesq – *That´s all. Thank you, very much!*

Ortência – De nada.

Marte – Acabou?

Pesq – Acabou. Ótimo! Muito obrigado, mesmo!