Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF
Programa de Pós–Graduação em Física

Tese de Doutorado

Invariância de calibre e análise de vínculos em teorias de campo eletromagnético no espaço-tempo não-comutativo

Aluno: Rafael Leite Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu
Co-Orientador: Prof. Dr. Jorge Ananias Neto

22 de Maio de 2017
Juiz de Fora–MG

Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF
Programa de Pós–Graduação em Física

Tese de Doutorado

Invariância de calibre e análise de vínculos em teorias de campo eletromagnético no espaço-tempo não-comutativo

Aluno: Rafael Leite Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu
Co-Orientador: Prof. Dr. Jorge Ananias Neto

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor em Física.

22 de Maio de 2017
Juiz de Fora–MG

Dedicatória

Dedico esta tese aos meus pais, à minha esposa Vanessa, ao meu orientador, ao meu co-orientador, aos demais professores do Departamento de Física da UFJF e aos meus amigos.

Agradecimentos

Aos meus pais, Waldemiro e Eliane, pelo apoio de uma vida inteira.

À minha esposa, Vanessa, por me compreender e me apoiar nos momentos difíceis.

Ao professor Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu (Orientador) pela atenção e confiança em meu trabalho.

Ao professor Dr. Jorge Ananias Neto (Co-orientador), pelo apoio e confiança.

A todos os meus amigos, que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

À coordenação da pós-graduação, ao secretário da pós-graduação Domingos e aos professores do Departamento de Física da UFJF.

À FAPEMIG pelo apoio finaceiro.

Resumo

Neste trabalho vamos analisar as contribuições da não-comutatividade nos modelos eletrodinâmicos de Proca e Podolsky. O modelo de Proca não-comutativo (NC) é originalmente não invariante perante transformações de calibre. Neste trabalho obteremos, através do método chamado "gauge unfixing"(GU), uma hamiltoniana invariante por transformações de calibre. Em seguida, vamos estudar a versão NC do modelo eletrodinâmico de Podolsky. Utilizando o produto Moyal e o mapeamento de Seiberg-Witten, encontraremos uma lagrangeana para o modelo de Podolsky no espaço-tempo NC e, a partir daí, analisaremos as contribuições da não-comutatividade para tal modelo. O primeiro aspecto importante é a invariância de calibre. O modelo de Podolsky é originalmente invariante de calibre porém, no espaço-tempo NC, a lagrangeana não é invariante perante as mesmas tranformações. Utilizando o método de Noether, encontraremos uma ação dual invariante de calibre e as simetrias serão calculadas. Em seguida é feita a quantização do modelo de Podolsky NC através de dois métodos, o método de Dirac e o método de Faddev-Jackiw. Uma comparação será feita entre os dois métodos.

Palavras chave: Espaço-tempo não-comutativo, invariância de calibre, modelo de Proca não-comutativo, modelo de Podolsky não-comutativo, método de Dirac, método de Faddeev-Jackiw, "gauge unfixing"

Abstract

In this work we will analyse the contributions of non-commutative (NC) to the Proca electrodynamics and also Podolsky's electrodynamics. The NC Proca model is originally not gauge invariant. Here we find, through the gauge unfixing method, a gauge invariant Hamiltonian. With respect to the Podolsky model, we used de Moyal product and the Seiberg-Witten map to analyze the NC contributions to this model. The first important aspect is the gauge invariance. The Podolky model is originally gauge invariant, however, in NC space the Lagrangian in not gauge invariant through the same transformations. Using the Noether method, we find a dual action gauge invariant and we calculate the symmetries. Then, we make the quantization for the NC Podolsky model through two formalism: the Dirac and the Faddev-Jackiw. A comparison is make between this two methods.

Keywords: Gauge unfixing formalism, gauge invariance, noncommutative Proca model, noncommutative Podolsky model, Dirac method, Faddeev-Jackiw method

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O primeiro artigo sobre um espaço-tempo não-comutativo (NC) foi produzido por Snyder em 1947 [1]. Seu trabalho foi motivado pela necessidade de controlar as divergências que aparecem em teoria quântica de campos como, por exemplo, a eletrodinâmica quântica. A ideia de um espaço-tempo NC é inspirada na mecânica quântica, introduzida originalmente por Heisenberg, onde em um espaço de fase quântico, os operadores hermitianos $\hat{x}^i$ e $\hat{p}_j$ satisfazem as relações de incerteza

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j, \tag{1.1}$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são os operadores posição e momento respectivamente.

O objetivo era utilizar uma estrutura NC para as coordenadas do espaço-tempo em pequenas escalas e com isso introduzir um corte no regime ultravioleta. Entretanto, C. N. Yang [2] demonstrou que as divergências não desaparecem.

Além disso, nessa mesma época, as técnicas de renormalização em Teoria Quântica de Campos já se mostravam extremamente eficazes. A capacidade de previsão de grandezas da eletrodinâmica quântica era muito boa, o que fez com que essa ideia ficasse esquecida por um certo tempo.

Em 1980, A. Connes [3] publicou um trabalho pioneiro sobre o que atualmente conhecemos como geometria diferencial Euclidiana. Connes desenvolveu um tratamento geométrico diferencial do Toro NC. Posteriormente, descobriu uma homologia de correntes para álgebra de operadores, a cohomologia cíclica [4, 5].

Atualmente existem vários motivos teóricos para introduzirmos a não-comutatividade das coordenadas. Um deles é a aplicação em Gravitação Quântica, que é desenvolvida em uma escala da ordem da escala de Planck, sendo que esta, segundo De Witt [6, 7, 8], possui um princípio de incerteza que impede a medida de posições com uma precisão maior do que o comprimento de Planck. O momento e a energia necessários para realizar tal medida modificam a geometria nesta escala. A ideia é modelar estes efeitos através de certas relações de não comutação entre as coordenadas.

Com relação às coordenadas do espaço-tempo, temos simplesmente que o operador $\hat{x}$

obedece a seguinte relação de comutação

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

onde μ e ν são índices do espaço-tempo n-dimensional e $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz antissimétrica podendo ser constante ou não. Da relação anterior, pode-se perceber a relação de incerteza entre os operadores coordenadas, o que leva a problemas de não localidade e a quebra da invariância de Lorentz.

Recentemente foi demonstrado [9] que cordas abertas cujas extremidades estão ligadas em uma 2D-brana, em presença de um campo magnético $\vec{B}$, agem como dipolos elétricos do campo de calibre da brana, onde as extremidades vivem sobre campos de calibre no espaço-tempo NC determinado por (1.2).

Em um trabalho seminal, Edward Witten e Nathan Seiberg [10] mostraram que Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo NC pode ser obtida como um limite da Teoria de Cordas. Os efeitos da não-comutatividade podem ser sistematicamente estudados de uma maneira pertubativa através do chamado mapeamento de Seiberg-Witten (SW).

Teorias de calibre no espaço-tempo NC agora podem ser tratadas como teorias de calibre usuais com os mesmos graus de liberdade porém, com o parâmetro adicional de deformação θ. O mapeamento de SW nos permite formular um princípio da ação em termos dos campos usuais comutativos, assim a lagrangeana efetiva da ação é expandida como séries dos termos originais mais o parâmetro θ.

Com isso, a atenção da comunidade científica voltou-se novamente para a não-comutatividade em física e vários trabalhos foram produzidos. Houve aplicação do mapeamento de SW em vários modelos como eletromagnetismo de Maxwell [11], modelo de Maxwell-Chern-Simmons [12], modelo de Proca [13], entre outros.

Atualmente é de conhecimento geral que a invariância de calibre é fundamental no Modelo Padrão de física de partículas. Consequentemente, as investigações sobre a invariância de calibre dos diversos modelos teóricos e de como obter modelos que sejam invariantes de calibre é um procedimento importante em diversas áreas da física teórica.

Teorias que possuem termos com derivadas de ordem superior na lagrangeana foram estudadas inicialmente com o objetivo de resolver o problema de renormalização do campo gravitacional inserindo um termo quadrático do escalar curvatura na lagrangeana de Einstein-Hilbert [14]. Atualmente, tais lagrangeanas são utilizadas como um método de regularização da divergência ultravioleta de teorias invariantes de calibre supersimétricas [15].

A eletrodinâmica de Podolsky [16, 17, 18] surgiu com o objetivo de eliminar a divergência que aparece na eletrodinâmica de Maxwell em curtas dirtâncias. Assim, na eletrodinâmica de Podolsky a energia associada a uma partícula pontual é finita.

Neste trabalho iremos analisar as contribuições da não-comutatividade, via mapeamento de SW, nos modelos eletrodinâmicos de Proca e de Podolsky. Analisaremos as relações de vínculos de tais modelos e consequentemente sua invariância por transformações de calibre.

Para o modelo de Proca, analisaremos os resultados a partir do trabalho desenvolvido por F. Darabi e F. Naderi [13], onde foi mostrado que, assim como no caso comutativo, o modelo de Proca no espaço-tempo NC não é invariante perante as transformações de calibre do eletromagnetismo. Aqui, encontramos uma versão invariante de calibre para o modelo de Proca no espaço-tempo NC pelo método chamado "gauge unfixing"(GU) [19, 20]. Os resultados foram publicados em [22].

Em seguida, é feita a análise dos efeitos da não-comutatividade sobre a teoria eletrodinâmica generalizada de Podolsky. A teoria de Podolsky é, originalmente, invariante de calibre. Aqui, no caso NC, a teoria deixa de ser invariante pelas transformações $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Uma nova simetria será encontrada via método de Noether [23, 24, 25, 26, 27, 28]. Os resultados foram publicados em [29].

Ainda com relação à eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC, primeiramente foi feita a análise de vínculos. Os vínculos encontrados são vínculos de primeira classe, caracterizando assim uma teoria que possui simetrias de calibre. Tais simetrias foram calculadas a partir dos vínculos. Posteriormente, obtivemos os parênteses de Dirac pelo método de Dirac, ou seja, quantização canônica. Depois, os parênteses de Dirac são obtidos pelo formalismo simplético [30]. Uma comparação é feita entre os dois métodos aplicados.

No capítulo 2, falaremos sobre a não-comutatividade em Teoria Quântica de campos. Discutiremos o produto Moyal e o mapeamento de SW.

No capítulo 3, discutiremos os métodos de quantização de sistemas vinculados de Dirac e o método de Faddeev-Jackiw, bem como o método GU de conversão de vínculos.

No capítulo 4, encontraremos uma hamiltoniana, e uma lagrangeana, invariante de calibre para o modelo de Proca no espaço-tempo NC.

No capítulo 5, falaremos da eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC onde discutiremos sua invariância de calibre.

No capítulo 6, realizaremos a quantização do modelo de Podolsky no espaço-tempo NC via método de Dirac e Faddeev-Jackiw.

Capítulo 2

Não-Comutatividade em Teoria Quântica de Campos

2.1 Produto Moyal

Neste capítulo iremos discutir a teoria de campos em um espaço-tempo NC. O tratamento dos campos será feito via produto Moyal [31]. Além disso discutiremos a importante ligação feita entre os campos no espaço-tempo comutativo e NC via mapeamento de SW.

No espaço-tempo NC, a álgebra usual deve ser substituída por uma álgebra adequada a esse espaço-tempo. Nesta seção faremos uma breve apresentação desta álgebra via produto Moyal, onde apresentaremos as suas principais propriedades.

Seja uma álgebra comutativa de funções em $\mathbb{R}^D$, o produto usual é dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x). \tag{2.1}$$

Se os campos definidos em $\mathbb{R}^D$ possuem decrescimento rápido no infinito, então podem ser descritos pela sua transformada de Fourier

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} \phi(x), \tag{2.2}$$

onde $\tilde{\hat{\phi}}(-k) = \overline{\tilde{\hat{\phi}}(k)}$ se $\hat{\phi}(x)$ for real.

Para a construção de um espaço-tempo NC substitui-se as coordenadas locais $x^i \in \mathbb{R}^D$ por operadores Hermitianos $\hat{x}^i$ obedecendo as relações de comutação (1.2). A chamada quantização de Weyl fornece uma relação um-para-um entre a álgebra dos campos definida em $\mathbb{R}^D$ e esta álgebra de operadores. Assim, cada função $\hat{\phi}(x)$ possui seu respectivo coeficiente de Fourier, sendo o símbolo de Weyl definido por

$$\hat{W}[\phi] \equiv \hat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \tilde{\phi}(k) e^{ik_i \hat{x}^i}, \tag{2.3}$$

onde os $k_i'^s$ são c-números e o operador de Weyl é hermitiano se $\hat{\phi}(x)$ é uma função real.

A fim de definir o produto Moyal, vamos introduzir o operador

$$\hat{T}(k) \equiv e^{ik_i\hat{x}^i}, \tag{2.4}$$

que satisfaz as propriedades

$$\begin{aligned} \hat{T}^\dagger(k) &= \hat{T}(-k), \\ \hat{T}(k)\hat{T}(k') &= \hat{T}(k+k')e^{-\frac{i}{2}k_ik'_j\theta^{ij}}, \\ Tr\hat{T}(k) &= (2\pi)^D \prod_{i=0} \delta(k_i). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se introduzirmos a eq. (2.4) na eq. (2.3), obteremos

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\hat{T}(k)\tilde{\hat{\phi}}(k), \tag{2.6}$$

agora, utilizando as propriedades (2.5), chegaremos a

$$\tilde{\hat{\phi}}(k) = (2\pi)^D Tr\{\hat{\Phi}\hat{T}^\dagger(k)\}, \tag{2.7}$$

e essa expressão será nossa motivação para introduzirmos o produto Moyal.

Se substituirmos $\hat{\Phi}$ pelo produto $\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_2$, o campo $\tilde{\hat{\phi}}(k)$ estará relacionado a $\tilde{\hat{\phi}}_1$ e $\tilde{\hat{\phi}}_2$ através de um produto diferente do usual, ou seja,

$$(\widetilde{\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2})(k) \equiv (2\pi)^D Tr\{\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_2\hat{T}^\dagger(k)\}, \tag{2.8}$$

que com o auxílio das eqs. (2.5) e (2.6) podemos encontrar

$$(\widetilde{\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2})(k) = \int d^Dk'\tilde{\hat{\phi}}_1(k')\tilde{\hat{\phi}}_2(k-k')e^{-\frac{i}{2}k'_ik_j\theta^{ij}}, \tag{2.9}$$

ou seja, o produto $(\widetilde{\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2})$ indica a transformada de Fourier de $(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{k}_i|k> &= k_i|k>, \\ \hat{x}_i|x> &= x_i|x>, \\ <k|\phi> &= \tilde{\phi}(k), \\ <x|\phi> &= \phi(x), \\ <k|x> &= \frac{e^{ik_ix^i}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

assim, utilizando (2.10), podemos escrever, após um longo trabalho algébrico,

$$(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k' d^D x d^D y e^{-i(k-k')_i x^i - i k'_i y^i} e^{-\frac{1}{2}\theta^{ij}(-i\partial_i^x)(-i\partial_j^y)} \hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(y), \quad (2.11)$$

como

$$(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x) = \int d^D k e^{i k_i x^i} (\widetilde{\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2})(k), \quad (2.12)$$

o produto $(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x)$ fica

$$(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^x \partial_j^y} \hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(y)\Big|_{x=y}, \quad (2.13)$$

ou ainda,

$$(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \partial_\nu^y} \phi_1(x)\phi_2(y)\Big|_{x=y}, \quad (2.14)$$

que é a definição do produto Moyal.

O lado esquerdo da eq. (2.14) pode ser escrito como

$$(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x) \equiv \hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x), \quad (2.15)$$

assim,

$$\begin{aligned}(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2)(x) &= \hat{\phi}_1(x) exp\left(\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\theta^{\mu\nu}\frac{\vec{\partial}}{\partial x^\nu}\right)\hat{\phi}_2(x) \\ &= \hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{2}^n\frac{1}{n!}[\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}\phi_1(x)]\theta^{\mu_1\nu_1}\theta^{\mu_2\nu_2}...\theta^{\mu_n\nu_n}[\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\phi_2(x)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

de onde a não localidade é facilmente percebida pelo fato de possuir um número infinito de derivadas.

Definido o produto Moyal, podemos discutir algumas propriedades que serão utilizadas neste trabalho. Primeiramente, desenvolvendo a expressão (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x) &= \hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\phi}_1(x)\partial_\nu\hat{\phi}_2(x) + \frac{1}{2!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_\mu\partial_\rho\hat{\phi}_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\hat{\phi}_2(x) \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\frac{i}{2}\theta^{\chi\eta}\partial_\mu\partial_\rho\partial_\chi\hat{\phi}_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\eta\hat{\phi}_2(x) + 0(\theta^4). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A partir da eq. (2.17), é facil ver que a regra de derivação para o produto Moyal é

$$\partial_\mu(\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2) = \partial_\mu\hat{\phi}_1 * \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_1 * \partial_\mu\hat{\phi}_2, \quad (2.18)$$

que possui a mesma forma do caso comutativo.

Outra importante propriedade do produto Moyal é com relação aos termos quadráticos da ação. O fato de existir um número infinito de derivadas, eq. (2.17), implica na não localidade do produto Moyal. Porém, esta não localidade não aparece nos termos quadráticos da ação. De fato,

$$\begin{aligned}\int d^D x \hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x) &= \int d^D x \hat{\phi}_1(x) \hat{\phi}_2(x), \\ &= \int d^D x \hat{\phi}_2(x) \hat{\phi}_1(x), \\ &= \int d^D x \hat{\phi}_2(x) * \hat{\phi}_1(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

assim,

$$\int d^D x \partial_\mu \hat{\phi}_1(x) * \partial^\mu \hat{\phi}_2(x) = \int d^D x \partial_\mu \hat{\phi}_1(x) \partial^\mu \hat{\phi}_2(x), \tag{2.20}$$

ou seja, de acordo com a eq. (2.19), apesar de haver um número infinito de derivadas no produto Moyal, isso não ocorre nos termos quadráticos da ação, assim, essa não localidade não aparece nestes termos.

Agora vamos considerar o caso em que os campos são dados por $\hat{\phi}_1(x) = \hat{x}^\mu$ e $\hat{\phi}_2(x) = \hat{x}^\nu$. Pela eq. (2.17), temos

$$\hat{x}^\mu * \hat{x}^\nu = \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_\rho \hat{x}^\mu \partial_\lambda \hat{x}^\nu, \tag{2.21}$$

ou ainda, utilizando o fato de que $\partial_\rho x^\mu = \delta^\mu_\rho$ e $\partial_\lambda x^\nu = \delta^\nu_\lambda$, temos

$$\hat{x}^\mu * \hat{x}^\nu = \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}, \tag{2.22}$$

de onde podemos perceber que o produto $\hat{x}^\mu * \hat{x}^\nu$ possui uma parte simétrica e outra antissimétrica. Assim, o comutador Moyal fica definido por

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]_* \equiv x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu, \tag{2.23}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]_* &= \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} - \hat{x}^\nu \hat{x}^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\nu\mu}, \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\theta^{\nu\mu}, \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}, \\ [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]_* &= i\theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde na penúltima linha da equação anterior utilizou-se o fato do tensor $\theta^{\mu\nu}$ ser antissimétrico, ou seja, $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$.

É importante estender a definição do produto Moyal para mais de dois campos. Para o caso de três campos, por exemplo, temos

$$(\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x)) * \hat{\phi}_3(x) = [e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y}\hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(y)]_{x=y} * \hat{\phi}_3, \tag{2.25}$$

que desenvolvendo fica,

$$\begin{aligned}(\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x)) * \hat{\phi}_3(x) &= [\hat{\phi}_1(x)\hat{\phi}_2(x)] * \hat{\phi}_3 + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}[\partial_\mu\hat{\phi}_1(x)\partial_\nu\hat{\phi}_2(x)] * \hat{\phi}_3(x) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}[\partial_\mu\partial_\rho\hat{\phi}_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\hat{\phi}_2] * \hat{\phi}_3(x) + ...\end{aligned} \tag{2.26}$$

de onde podemos inferir que

$$(\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x)) * \hat{\phi}_3(x) = \hat{\phi}_1(x) * (\hat{\phi}_2(x) * \hat{\phi}_3(x)), \tag{2.27}$$

ou ainda,

$$(\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x)) * \hat{\phi}_3(x) = \hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x) * \hat{\phi}_3(x), \tag{2.28}$$

e

$$\begin{aligned}\int d^Dx\hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x) * \hat{\phi}_3(x) &= \int d^Dx\hat{\phi}_3(x) * \hat{\phi}_1(x) * \hat{\phi}_2(x) \\ &= \int d^Dx\hat{\phi}_2(x) * \hat{\phi}_3(x) * \hat{\phi}_1(x).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Como já definimos anteriormente o comutador Moyal para dois campos, podemos extender tal definição para o caso de três campos. Assim,

$$[\hat{\phi}_1(x), [\hat{\phi}_2(x), \hat{\phi}_3(x)]_*]_* + [\hat{\phi}_2(x), [\hat{\phi}_3(x), \hat{\phi}_1(x)]_*]_* + [\hat{\phi}_3(x), [\hat{\phi}_1(x), \hat{\phi}_2(x)]_*]_* = 0, \tag{2.30}$$

que possui a mesma forma do caso comutativo.

Até aqui discutimos as principais propriedades do produto Moyal. Iremos agora aplicar as propriedades expostas anteriormente à teoria $U(1)$, ou seja, à teoria eletromagnética de Maxwell, a fim de obter resultados importantes que utilizaremos neste trabalho.

Utilizando a propriedade da ação, eq. (2.19), temos que a ação da teoria $U(1)$ coincide com a usual. De fato,

$$\begin{aligned}S &= -\frac{1}{4}\int d^4x\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Porém, é no tensor de Maxwell que se encontram as contribuições da não-comutatividade, que no espaço-tempo comutativo é definido por

$$-ie\hat{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu], \tag{2.32}$$

onde e é a carga e D_μ é a derivada covariante definida por

$$D_\mu = \partial_\mu - ie\hat{A}_\mu. \tag{2.33}$$

No espaço-tempo NC, temos que o comutador usual deve ser substituído pelo comutador Moyal, eq. (2.23). Assim

$$-ie\hat{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]_*, \tag{2.34}$$

Desenvolvendo a expressão anterior temos

$$-ie\hat{F}_{\mu\nu} = -ie(\partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu) + (ie)^2(\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\nu), \tag{2.35}$$

consequentemente,

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - ie[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*. \tag{2.36}$$

que é o tensor eletromagnético no espaço-tempo NC.

A transformação de calibre infinitesimal referente à eq. (2.36) é

$$\delta_\epsilon\hat{A}_\mu = \partial_\mu\epsilon - i[\hat{A}_\mu, \epsilon] * . \tag{2.37}$$

ou seja, a transformação acima deixa a eq. (2.36) invariante.

Outro ponto importante que vale descatar é com relação às equações de movimento no espaço-tempo NC. Realizando a variação na eq. (2.31), temos que as equações de movimento são

$$\partial^\mu\hat{F}_{\mu\nu} - ie[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu}]_* = 0, \tag{2.38}$$

que podem ser escrita na forma compacta

$$D^\mu * \hat{F}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.39}$$

Após termos discutido as principais propriedades do produto Moyal, veremos na próxima seção os principais aspectos do chamado mapeamento de SW, que é uma conexão importante entre o espaços-tempos comutativo e NC.

2.2 O mapeamento de Seiberg-Witten

Nessa seção faremos uma breve apresentação do mapeamento de SW, onde mostraremos algumas aplicações que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho.

Nathan Seiberg e Edward Witten mostraram [10] que certas teorias no espaço-tempo NC são equivalentes, e existe um mapeamento entre os campos de calibre comutativos e NC's. Sendo assim, os efeitos da não-comutatividade podem ser sistematicamente estudados de uma forma perturbativa através do mapeamento de SW, que converte uma teoria no espaço-tempo NC em uma teoria convencional no espaço-tempo comum.

Como exemplo, temos o mapeamento de SW aplicado ao campo vetorial. Este campo no espaço-tempo NC expresso em termos do campo no espaço-tempo comutativo é dado por

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}), \tag{2.40}$$

onde $\hat{A}_\mu$ é o campo no espaço-tempo NC e A_μ no espaço-tempo comutativo.

Pela eq. (2.36), podemos escrever o tensor eletromagnético definido no espaço-tempo NC como

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ie(\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu). \tag{2.41}$$

Para realizar o mapeamento de SW, basta utilizar a definição do produto Moyal, eq. (2.17), e em seguida substituir a eq. (2.40) na eq. (2.41). Neste trabalho vamos desconsiderar termos com a ordem maior ou igual a (θ^2), pois θ tem valor na escala de Planck, ou seja, valor muito pequeno, assim iremos desconsiderar tais contribuições. Portanto, o mapeamento de SW aplicado no tensor $\hat{F}_{\mu\nu}$ se escreve

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma}(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}). \tag{2.42}$$

Nas expressões (2.40) e (2.42), podemos observar que quando o parâmetro da não-comutatividade θ se anula obtemos novamente as expressões originais, ou seja, no espaço-tempo comutativo.

A análise da não-comutativadade à luz do mapeamento de SW sobre a eletrodinâmica de Maxwell foi feita por S.I. Kruglov [11]. Introduzindo a eq. (2.42) na ação (2.31) e desprezando termos de ordem maior ou igual a θ^2, temos como resultado a densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F^\mu_\alpha F^\nu_\beta F_{\mu\nu} + 0(\theta^2), \tag{2.43}$$

onde $\theta_{0j} = 0$ porque traz problemas de unitariedade [50, 51].

A densidade de lagrangeana (2.43) pode também ser escrita em termos dos campo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ utilizando as relações

$$\begin{aligned}
A_\mu =&(\vec{A}, iA_0),\\
E_i =&iF_{i4},\\
B_i =&\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk},\\
\theta_i =&\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\theta_{jk},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

onde $i\partial_4 = \frac{\partial}{\partial t}$. Assim, utilizando as definições acima, temos que

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)[1 + (\vec{\theta}\cdot\vec{B})] - (\vec{\theta}\cdot\vec{E})(\vec{E}\cdot\vec{B}) + 0(\theta^2). \tag{2.45}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \tag{2.46}$$

na densidade de lagrangeana (2.43), obteremos as equações de movimento para a teoria de Maxwell no epaço-tempo NC

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\mu(F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\theta_{\mu\nu}\partial_\mu(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) - \theta^{\nu\beta}\partial_\mu(F_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha})\\
&+ \theta_{\mu\beta}\partial_\mu(F_{\alpha\beta}F^{\nu\alpha}) - \theta_{\alpha\beta}\partial_\mu(F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde estamos considerando o caso livre de cargas e correntes, ou seja, $J^\mu = 0$.

Capítulo 3

Métodos de quantização de sistemas vinculados

Neste capítulo discutiremos os formalismos de Dirac, que é um método para quantizar sistemas vinculados através do formalismo canônico de quantização, e o de Faddev-Jackiw, que também realiza a quantização de sistemas vinculados, porém de uma forma geométrica.

Além disso iremos descrever um método de conversão de sistemas vinculados de segunda classe para sistemas de primeira classe, que é o método GU. A importância de sistemas de primeira classe reside no fato de possuírem simetrias de calibre.

Primeiramente vamos descrever o método de quantização canônica a fim de mostrar o porquê de não ser possível utilizar este método em sistemas vinculados. Em seguida discutiremos o formalismo de Dirac de quantização de sistemas vinculados e, por fim, o formalismo simplético de Faddeev-Jackiw.

Para apresentarmos os métodos acima citados, vamos fazer uma breve recordação sobre os formalismos hamiltoniano e Lagrangeano. Para tanto, seja um sistema clássico possuindo N graus de liberdade, que representaremos por q_i $(i = 1, 2, ..., N)$ que são denominadas coordenadas generalizadas, a função lagrangeana é uma função das coordenadas e das velocidades generalizadas e, em caso geral, do tempo, ou seja,

$$L = L(q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N, t), \tag{3.1}$$

ou, numa notação mais concisa,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{3.2}$$

onde $i = 1, .., N$.

Se nos instantes de tempo t_1 e t_2 o sistema clássico está caracterizado pelas coordenadas e velocidades generalizadas $(q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1))$ e $(q_i(t_2), \dot{q}_i(t_2))$ respectivamente, o princípio de Hamilton estabelece que a evolução do sistema entre os instantes t_1 e t_2 é tal que

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L((q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1), t)dt, \tag{3.3}$$

que é a chamada ação. Esta ação deve possuir um valor mínimo, por isso, o princípio de Hamilton é também conhecido como princípio da mínima ação.

Fazendo portanto

$$\delta S = 0 \tag{3.4}$$

obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i)dt = 0 \tag{3.5}$$

que podemos escrever como

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta \dot{q}_i dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{3.6}$$

onde usamos o fato de $\delta\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\delta$.

Se todas as trajetórias começam em $q_i(t_1)$ e terminam em $q_i(t_2)$, temos que

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \tag{3.7}$$

assim, substituindo a eq. (3.7) na eq. (3.6), vem que

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i dt = 0. \tag{3.8}$$

Como as variações δq_i são arbitrárias, a eq. (3.8) só pode ser zero se

$$\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i = 0, \tag{3.9}$$

e, além disso, como δq_i são independentes

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{3.10}$$

que é conhecida como equação de Euler-Lagrange e nos dá a evolução temporal de um sistema clássico.

Agora vamos tratar do formalismo hamiltoniano. Para tanto, considere a expressão geral dL, ou seja, a diferencial de L, logo,

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{3.11}$$

Além disso, vamos introduzir a definição de momento canônico conjugado a q_i, que será fundamental na passagem do formalismo lagrangeano para o formalismo hamiltoniano, isto é,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.12}$$

que juntamente com a eq. (3.10) podemos reescrever a eq. (3.11) como

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \Big(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + d\dot{q}_i\Big) + \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{3.13}$$

Mas

$$\sum_{i=1}^{N} p_i d\dot{q}_i = d\big(\sum_{i=1}^{N} p_i\dot{q}_i\big) - \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i, \tag{3.14}$$

assim, introduzindo a eq. (3.14) em (3.13), obtemos

$$d\big(\sum_{i=1}^{N} p_i\dot{q}_i - L\big) = \sum_{i=1}^{N} \big(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\big) - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \tag{3.15}$$

portanto,

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{3.16}$$

que é uma função de q_i, p_i e t, ou seja, $H(q_i, p_i, t)$, ao contrário da lagrangeana que é função de q_i, $\dot{q}_i$ e t, ou seja, $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Podemos perceber, pela (3.16), que a transição entre os dois formalismo é feita através de uma transformação de Legendre.

A diferencial dH é dada por

$$dH = \sum_{i} \big(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\big) + \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3.17}$$

assim, comparando as eqs. (3.15) e (3.17), podemos identificar

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.18}$$

que são as chamadas equações de movimento de Hamilton. Tais equações descrevem a evolução temporal das coordenadas generalizadas q_i e p_i.

Fazendo uma análise comparativa entre os dois formalismo aqui tratados, o formalismo lagrangeano se desenvolve no espaço de configurações, definido por N coordenadas generalizadas e a evolução temporal do sistema é dada pelas equações de Euler-Lagrange, sendo estas de segunda ordem. Por outro lado, o formalismo hamiltoniano é definido no espaço de fase, sendo este $2N$-dimensional varrido por N $q_i's$ e N $p_i's$ e a evolução temporal do sistema é dada pelas equações de Hamilton, que são de primeira ordem.

Agora vamos definir uma relação essencial para a transição da mecânica clássica para a mecânica quântica. Seja $A(q_i, p_i, t)$ uma quantidade definida no espaço de fase. Sua evolução temporal é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \Big(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \Big) + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{3.19}$$

utilizando as equações de Hamilton obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \Big(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{3.20}$$

onde podemos identificar

$$\{A, H\} = \sum_i \Big(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big), \tag{3.21}$$

que é o chamado parênteses de Poisson entre A e H.

Assim, a evolução temporal de um operador A na mecânica clássica é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.22}$$

Na mecânica quântica, a evolução temporal de um operador A, é dada pela seguinte equação

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{3.23}$$

onde $[A, H]$ é o comutador entre A e H. Podemos observar a semelhança entre as eqs. (3.22) e (3.23). Isso sugere que as relações quânticas devem ser obtidas das análogas clássicas por substituições do tipo

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, H]. \tag{3.24}$$

Pela relação anterior, vemos que se determinarmos os parênteses de Poisson entre as quantidades de interesse para um sistema clássico, podemos promovê-las posteriormente em operadores simplesmente multiplicando pelo fator $\frac{1}{i\hbar}$. No entanto, quando tratamos de um sistema vinculado isso pode gerar inconsistências. Nas próximas seções iremos discutir dois métodos que tratam dessas inconsistências, o método de Dirac e o método de Faddeev-Jackiw.

3.1 O método de Dirac

Nesta seção apresentaremos o meio mais utilizado para quantizar sistemas vinculados, o formalismo de Dirac. Este método foi desenvolvido por Paul Maurice Dirac em seu livro “Lectures on Quantum Mechanics”[32]. Antes, porém, faremos uma breve digressão sobre sistemas vinculados e o tratamento especial que deve ser dado ao quantizá-los pelo método chamado de quantização canônica.

Seja uma teoria clássica que possua um vínculo envolvendo coordenadas e momentos

$$\Gamma(q,p) = 0, \tag{3.25}$$

onde q e p são todas as coordenadas q_i e momentos p_i, respectivamente. Apesar do vínculo possuir valor nulo, o parênteses de Poisson entre este vínculo e outra quantidade qualquer, A por exemplo, da teoria pode não ser nulo, ou seja,

$$\{A, \Gamma\} \neq 0, \tag{3.26}$$

o que é incoerente. Por isso, utilizamos a notação

$$\Gamma(q,p) \approx 0, \tag{3.27}$$

onde " $\approx$ " significa fracamente zero.

Sejam A e B duas quantidades de uma teoria. Na quantização canônica essas quantidades transforman-se em operadores e os colchetes de Poisson em comutadores, ou seja,

$$\{A, B\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}], \tag{3.28}$$

onde i é a unidade imaginária e $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π.

Assim, se Γ é um vínculo ao qual essa teoria está sujeita, e o parênteses de Poisson entre A e Γ é não nulo, eq. (3.26), ao promovermos A e Γ a operadores, $\hat{\Gamma}$ será um operador nulo e, consequentemente, qualquer comutador envolvendo $\hat{\Gamma}$ deve ser, necessariamente, nulo. Portanto, há uma clara inconsistência entre a quantização canônica e a análise de sistemas vinculados.

Vamos agora fazer uma breve apresentação do método de Dirac a fim de explicar seus seus principais aspectos.

Seja um sistema descrito pela lagrangeana $L(q_i, p_i)$ no espaço de configurações N-dimensional, com $i = 1, 2, ..., N$, sendo q_i as coordenadas generalizadas e $\dot{q}_i$ as velocidades generalizadas. A passagem para o formalismo hamiltoniano é feita introduzindo os momentos canônicos p_i, onde p_i se relaciona com a lagrangeana por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.29}$$

No caso de um sistema vinculado, q_i e p_i podem não ser independentes e a relação

(3.29) pode resultar em vínculos. Estes vínculos, que surgem diretamente das relações dos momentos canônicos, são chamados de vínculos primários e são denotados por

$$\phi_m(q_i, p_i) \approx 0, \tag{3.30}$$

onde $m = 1, 2, ..., M$ e $M \leq N$. Ou seja, um vínculo é uma relação entre $p_i's$ e $q_i's$.

Seja então, a hamiltoniana canônica

$$H_c(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i), \tag{3.31}$$

ao passarmos do formalismo lagrangeano para o hamiltoniano, queremos realizar tranformações entre o espaço de configurações $(q_i, \dot{q}_i)$ e o espaço de fase (q_i, p_i). O Jacobiano para essa transformação é determinado por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \tag{3.32}$$

onde W_{ij} é a chamada matriz Hessiana.

É fácil ver, pela eq. (3.32), que quando o sistema não possui vínculos, a matriz Hessiana possui o determinante diferente de zero, ou seja,

$$\det W \neq 0, \tag{3.33}$$

e transformações do tipo $(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i)$ são sempre possíveis. Neste caso, as eqs. (3.29) podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas.

Entretanto, quando o sistema possui vínculos a matriz Hessiana é singular, ou seja,

$$\det W = 0, \tag{3.34}$$

e nem todo $\dot{q}_i$ pode ser univocamente determinado em termos de q_i e p_i. Se existirem M vínculos na teoria, haverá M velocidades nessas condições.

O método de Dirac consiste em manter os vínculos que surgem na teoria e incorporá-los à hamiltoniana. A fim de descrever o método de quantização de Dirac, vamos reproduzir aqui o que foi feito em seu "Lectures on quantum Mechanics"[32]. Primeiramente, vamos aplicar o princípio de Hamilton à lagrangeana L, ou seja,

$$\int_a^b \delta L = 0, \tag{3.35}$$

assim, pela eq. (3.31),

$$\delta \int_a^b (p_i \dot{q}_i - H_c) dt = 0. \tag{3.36}$$

Desenvolvendo a relação anterior e usando a relação

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i, \tag{3.37}$$

encontramos

$$\int_a^b \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right] dt = 0. \tag{3.38}$$

Como δq_i e δp_i são funções arbitrárias do tempo, a única maneira da relação anterior ser satisfeita é

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i = 0. \tag{3.39}$$

Por outro lado, realizando uma variação na eq. (3.30), encontramos

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0. \tag{3.40}$$

Se existirem M vínculos, haverá igual número de equações desse tipo. Multiplicando a eq. (3.40) por λ_m e adicionando à eq. (3.39), obtemos

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(+\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right)\delta p_i \approx 0, \tag{3.41}$$

ou seja, temos M funções arbitrárias $\lambda_m(p,q)$, que são chamadas de multiplicadores de Lagrange. De acordo com a eq. (3.41), podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &\approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &\approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

que são as equações de Hamilton para sistemas vinculados.

Logo, a nova hamiltoniana, onde agora os vínculos estão incorporados, fica

$$H_T = H_c + \lambda_m\phi_m, \tag{3.43}$$

que é a hamiltoniana primária.

Como dissemos anteriormente, pode haver mais vínculos. Estes são incorporados à teoria de maneira semelhante. Por exemplo, se houver K vínculos secundários ($M + K \leq N$), a chamada hamiltoniana total passa a ser

$$H_T = H_c + \lambda_a\phi_a, \quad a = 1, 2, ..., M + K. \tag{3.44}$$

Para verificar se há novos vínculos devemos utilizar uma condição de consistência, ou seja, condição óbvia de que vínculos não evoluem com o tempo, assim,

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_T\} \approx 0. \tag{3.45}$$

De acordo com o parênteses de Poisson entre os vínculos ϕ_m e ϕ_n, pode acontecer de $\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$, se for esse o caso $H_T = H_c$, assim a eq. (3.45) se reduz a

$$\dot{\phi}_m = \{\phi, H_c\} \approx 0, \tag{3.46}$$

que é uma relação de vínculo. Este pode ser um vínculo já conhecido, ou pode ser um novo vínculo. Os vínculos que surgem da relação anteior serão denominados de vínculos secundários, por não vir diretamente da definição de momento.

Se, por outro lado, $\{\phi_m, \phi_n\} \neq 0$, não obteremos uma relação de vínculo, mas sim uma relação com o multiplicador de Lagrange λ_m.

Este processo deve ser repetido para todos os vínculos, inclusive para os secundários que vão sendo obtidos. Os novos vínculos obtidos neste estágio do processo são denominados terciários e assim por diante.

Uma outra classificação importante com relação aos parênteses de Poisson entre os vínculos é, se um vínculo possuir parênteses de Poisson nulo com todos os outros vínculos da teoria, ele é denominado vínculo de primeira classe. A existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui invariância por transformações de calibre. Se, por outro lado, o vínculo possuir parênteses de Poisson não nulo com pelo menos um outro vínculo da teoria, ele é denominado de segunda classe.

O método de Dirac consiste na fixação de calibre, quebrando a simetria, levando assim a novos vínculos. Assim a teoria passa a ser de segunda classe, ou seja, os parênteses de Poisson entre os vínculos, inicialmente de primeira classe, e os originados da fixação de calibre serão não nulos. Portanto, podemos quantizar a teoria de maneira canônica.

Para tanto, Dirac generalizou os parênteses de Poisson para teorias que contém vínculos, numa expressão denominada parênteses de Dirac, que desempenhará o mesmo papel que os parênteses de Poisson desempenham nas teorias sem vínculos. A expressão para os parênteses de Dirac é

$$\{A, H_c\}_D = \{A, H_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, H_c\}, \tag{3.47}$$

onde a matriz C_{ab} é

$$C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}, \tag{3.48}$$

e $a = 1, 2, ..., M + K$.

A matriz C_{ab}^{-1} só será não nula se os vínculos forem de segunda classe, ou seja, se os vínculos forem de primeira classe os parênteses de Dirac serão os parênteses de Poisson. Logo, a quantização pode ser realizada de maneira canônica através dos parênteses de

Dirac

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{2\hbar}[A, B]. \tag{3.49}$$

É importante perceber que agora vínculos valem fortemente nos parênteses de Dirac, ou seja,

$$\{A, \phi_a\}_D = 0, \tag{3.50}$$

assim, não há mais inconsistências na eq. (3.49).

3.2 Método de quantização de Faddeev-Jackiw

O método de Dirac, desenvolvido na seção anterior, tem como objetivo determinar os parênteses de Dirac e realizar a quantização de um sistema vinculado de maneira canônica. Em 1988, L. Faddeev e R. Jackiw [33], mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos de uma maneira geométrica, conhecido como formalismo simplético.

Na formulação simplética usa-se uma notação mais concisa para as coordenadas e momentos. Denotaremos a quantidade Y^α, onde $\alpha = 1, 2, ..., N$, como o conjunto de coordenadas e momentos, ou seja,

$$\begin{aligned} Y^i &= q_i, \\ Y^{N+i} &= p_i, \quad (i = 1, 2, ...N). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Pelas relações anteriores, é facil ver que os parênteses de Poisson tomam a forma

$$\{Y^\alpha, Y^\beta\} = \epsilon^{\alpha\beta}, \tag{3.52}$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta}$ é um elemento da matriz

$$(\epsilon^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

sendo 0 uma matriz nula e 1 a matriz indentidade, ambas $N \times N$.

Se o sistema possuir vínculos, é natural que a generalização da eq. (3.52) seja do tipo

$$\{Y^\alpha, Y^\beta\} = f^{\alpha\beta}, \tag{3.54}$$

onde $f^{\alpha\beta}$ é um tensor antissimétrico e não singular, denominado tensor simplético.

A fim de compreender como o formalismo simplético funciona, vamos repetir a análise feita na seção anterior, porém, no formalismo simplético. Assim, seja a lagrangeana de primeira ordem

$$L = a_\alpha(Y)\dot{Y}^\alpha - V(Y), \tag{3.55}$$

onde $V(Y)$ é o potencial de a_α.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial Y^\alpha} = 0, \tag{3.56}$$

na lagrangeana (3.55), encontramos

$$f_{\alpha\beta}\dot{Y}^{\beta} = \partial_{\alpha}V, \tag{3.57}$$

onde $\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial Y^{\alpha}}$ e o tensor simplético é dado por

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\beta}}{\partial Y_{\alpha}} - \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial Y_{\beta}}. \tag{3.58}$$

Se $f_{\alpha\beta}$ é não singular, podemos determinar sua inversa, assim, podemos expressar a eq. (3.57) como

$$\dot{Y}^{\alpha} = f^{\alpha\beta}\partial_{\beta}V. \tag{3.59}$$

onde $f^{\alpha\beta}$ é a inversa de $f_{\alpha\beta}$.

No entanto, se a lagrangeana (3.55) descreve um sistema vinculado, $f^{\alpha\beta}$ é singular e não podemos expressar as velocidades como em (3.59).

A fim de tratar do formalismo simplético com vínculos vamos denotar $f_{\alpha\beta}$ por $f^{(0)}_{\alpha\beta}$ e digamos que este possua M vínculos, com $M < 2N$, e modos zeros $v^{(0)}_{m}$, com $m = 1, 2, ..., M$. Assim,

$$f^{(0)}_{mn}v^{(0)}_{mn} = 0, \tag{3.60}$$

pela eq. (3.57), podemos escrever

$$v^{(0)}_{m}\partial_{m}V = 0, \tag{3.61}$$

que é um vínculo.

Neste ponto fica clara a diferença entre os formalismos de Dirac e de Faddeev-Jackiw. No formalismo simplético os vínculos são usados com o intuito de ir deformando a estrutura geométrica da teoria até obtermos o tensor simplético, isto é, se olharmos para a eq. (3.54) vemos que o foco é o lado direito desta. Já no formalismo de Dirac podemos generalizar os parênteses de Poisson incluindo os vínculos, até que todos os vínculos sejam considerados, obtendo-se assim a forma final dos parênteses de Dirac.

Para obtermos uma deformação no tensor $f^{(0)}$ introduzimos os vínculos na parte cinética da lagrangeana (3.55), que é feito tomando-se a derivada temporal do vínculo. Em seguida, incluímos esse resultado na lagrangeana por meio de um multiplicador de Lagrange. Ou seja, a deformação produzida é um alargamento do espaço de configurações, assim, as variáveis simpléticas passam a ser $(Y^{\alpha}, \lambda^{(0)}_{m})$ e a nova lagrangeana é escrita como

$$L^{(0)} = a^{(0)}_{\alpha}(Y)\dot{Y}^{\alpha} + \lambda^{(0)}_{m}\dot{\Omega}^{(0)}_{m} - V^{(0)}(Y), \tag{3.62}$$

ou ainda,

$$L^{(0)} = (a^{(0)}_{\alpha}(Y) + \lambda^{(0)}_{m}\partial_{\alpha}\Omega^{(0)}_{m})\dot{Y}^{\alpha} - V^{(0)}(Y). \tag{3.63}$$

Da lagrangeana (3.63), podemos identificar os vetores

$$\begin{aligned}
a_\alpha^{(1)} &= a_\alpha^{(0)} + \lambda_m^{(0)} \partial_\alpha \Omega_m^{(0)}, \\
a_m^{(1)} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

assim, pela eq. (3.58), obtemos os novos tensores

$$\begin{aligned}
f_{\alpha m}^{(1)} =& - \partial_m a_\alpha^{(1)}, \\
f_{mn}^{(1)} =& 0.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

O procedimento anterior será repetido quantas vezes forem necessárias, até que $det f \neq 0$. Neste caso, teremos o tensor simplético da teoria e consequentemente os parênteses de Dirac.

Se chegarmos a um ponto em que a matriz $f^{\alpha\beta}$ é singular e os modos zeros não correspondem a novos vínculos, caso de uma teoria de calibre, deveremos realizar a fixação de calibre para definirmos o tensor simplético.

Como exemplo, vamos considerar o modelo de Skyrme em mecânica quântica. Este modelo é uma teoria que descreve os bárions e suas interações através de soluções estáticas com energia finita em um modelo sigma não linear.

A hamiltoniana que descreve o modelo de Skyrme é

$$H = M + \frac{1}{8\lambda}\pi_i\pi_i + \eta(a_i a_i - 1), \tag{3.66}$$

onde M é a massa do sótiton, λ é o momento de inércia, a_i a coordenada coletiva e π_i o momento conjugado à coodenada a_i. Assim, a lagrangeana em primeira ordem fica

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= \pi_i \dot{a}_i - H \\
&= \pi_i \dot{a}_i - M - \frac{1}{8\lambda}\pi_i\pi_i + \eta(a_i a_i - 1) \\
&= \pi_i \dot{a}_i - V^{(0)}(\zeta_i^{(0)})
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde

$$V^{(0)}(\zeta_i^{(0)}) = M + \frac{1}{8\lambda}\pi_i\pi_i + \eta(a_i a_i - 1) \tag{3.68}$$

e as variáveis simpléticas são

$$\zeta_i^{(0)} = (a_i, \pi_i, \eta) \tag{3.69}$$

Além disso, as formas canônicas não nulas são

$$
\begin{aligned}
{}^{a_i}A^{(0)} &= \pi_i, \\
{}^{\pi_i}A^{(0)} &= 0, \\
{}^{\eta}A^{(0)} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

assim, o tensor simplético

$$
f_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j}, \tag{3.71}
$$

é dado por

$$
f_{ij}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Esta matriz é singular e possui o seguinte modo zero

$$
v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Utilizando a relação de consistência

$$
\begin{aligned}
v_m^{(0)} \partial_m V &= 0, \\
&= \partial_\eta V^{(0)} \\
&= a_i a_i - 1, \\
\Omega^{(0)} &\equiv 0
\end{aligned} \tag{3.72}
$$

que é uma relação de vínculo. O próximo passo é introduzir essa relação de vínculo na lagrangeana $L^{(0)}$ via multiplicador de Lagrange. Assim, temos

$$
L^{(1)} = \pi_i \dot{a}_i - V^{(1)}(\zeta_i^{(1)} + \rho \dot{\Omega}^{(0)}), \tag{3.73}
$$

ou ainda,

$$
L^{(1)} = (\pi_i + \rho a_i)\dot{a}_i - V^{(1)}(\zeta_i^{(1)}), \tag{3.74}
$$

onde

$$
V^{(1)}(\zeta_i^{(1)}) = V^{(0)}(\zeta_i^{(0)}\big|_{\bar{\Omega}(x)=0} = M + \frac{1}{8\lambda}\pi_i \pi_i \tag{3.75}
$$

Pela relação anterior, as novas variáveis simpléticas são

$$
\zeta_i^{(1)} = (a_i, \pi_i, \rho) \tag{3.76}
$$

de onde podemos identificar os novos vetores

$$ {}^{a_i}A^{(1)} = \pi_i + \rho a_i, \tag{3.77} $$

e, consequentemente, a nova matriz simplética fica

$$ f_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ij} & a_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ a_i & 0 & 0 \end{bmatrix}. $$

A matriz anterior é singular e possui os sefuintes modos zeros,

$$ v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \\ -1 \end{bmatrix}. $$

Assim, seguindo o método FJ, devemos utilizar novamente a relação de consintência, que nos dá

$$ \begin{aligned} v_m^{(1)}\partial_m V^{(1)} &= 0 \\ a_i\partial_{\pi_j} V(1) - \partial_\rho V^{(1)} &= 0 \\ a_i\pi_i &= 0 \end{aligned} \tag{3.78} $$

que é um vínculo, que denotaremos por,

$$ \Omega^{(1)} \equiv a_i\pi_i. \tag{3.79} $$

A nova Lagrangenana fica

$$ \begin{aligned} L^{(2)} &= (\pi_i + \rho a_i)\dot{a}_i - V^{(2)}(\zeta_i^{(2)} + \mu\dot{\Omega}^{(1)}, \\ &= (\pi_i + \rho a_i + \mu\pi_i)\dot{a}_i + \mu a_i\dot{\pi}_i - V^{(2)}(\zeta_i^{(2)}). \end{aligned} \tag{3.80} $$

Assim, as novas variáveis simpléticas são

$$ \zeta_i^{(2)} = (a_i, \pi_i, \rho, \mu), \tag{3.81} $$

e os vetores

$$
\begin{aligned}
{}^{a_i}A^{(0)} &= \pi_i + \rho a_i + \mu\pi_i, \\
{}^{\pi_i}A^{(0)} &= \mu a_i, \\
{}^{\eta}A^{(0)} &= 0 \\
{}^{\mu}A^{(0)} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

A nova matriz simplética é dada por

$$
f_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ij} & a_i & -\pi_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & a_i \\ a_i & 0 & 0 & 0 \\ \pi_i & a_i & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

que é uma matriz não singular e, sendo assim, sua inversa pode ser determinada e é dada por

$$
f_{ij}^{(2)^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ij} - a_i a_i & a_i & 0 \\ -\delta_{ij} + a_i a_j & a_j\pi_i - a_i\pi_j & -\pi_i & a_i \\ a_i & \pi_i & 0 & -\delta_{ij} \\ 0 & a_i & \delta_{ij} & 0 \end{bmatrix}.
$$

de onde podemos inferir que os parênteses de Dirac da teoria são

$$
\begin{aligned}
\{a_i, a_j\}_D &= 0, \\
\{a_i, \pi_j\}_D &= \delta_{ij} - a_i a_j, \\
\{\pi_i, \pi_j\}_D &= a_j\pi_i - a_i\pi_j
\end{aligned} \tag{3.83}
$$

Nesta seção mostramos um método alternativo para obter os parênteses de Dirac de uma teoria com vínculos. Como os resultados são equivalentes, em alguns casos é mais vantajoso utilizar o método de Dirac e em outros casos o método de Faddeev-Jackiw.

3.3 Método "gauge unfixing"de conversão de vínculo

Nesta seção iremos descrever um método para converter um sistema vinculado de segunda classe em um sistema de primeira classe, o método chamado GU. Vimos nas seções anteriores que a importância de uma teoria de primeira classe é que ela possui simetrias de calibre. Assim, todo sistema vinculado de primeira classe é invariante de calibre por simetrias geradas pelos vínculos de primeira classe [21].

Existem outros métodos de obtenção de simetrias de calibre em sistemas vinculados de segunda classe, entre eles temos o método Batalin-Fradkin (BF) [34], originalmente baseado na ideia de alargamento do espaço de fase de Faddeev and Shatashvili [35]. No método BF o alargamento do espaço de fase é feito incluindo novas variáveis.

Agora vamos descrever o método GU [19, 20] de conversão de vínculos. Ao contrário do método BF, nesse formlaismo não há alargamento do espaço de fase. A ideia do método GU é, uma vez que possuímos um número par de vínculos de segunda classe, tratar metade dos vínculos como geradores de simetria e a outra metade será descartada.

Seja um sistema de segunda classe descrito pela hamiltoniana H_c e que possua, por exemplo, dois vínculos de segunda classe ϕ_1 e ϕ_2. Podemos redefinir estes vínculos de tal maneira que eles formem um par canônico, ou seja,

$$\begin{aligned} &\phi_1 \to \chi \\ &\phi_2 \to \psi \end{aligned} \tag{3.84}$$

e, assim,

$$\{\chi(x), \psi(y)\} = \delta^3(x-y). \tag{3.85}$$

Logo, se escolhermos $\chi \cong 0$ como nosso vínculo de primeira classe e descartarmos $\psi \approx 0$, a dinâmica será relevante apenas na nova superfície vinculada Σ_1 definida apenas por $\chi \cong 0$. A fim de termos uma teoria invariante de calibre por transformações geradas por χ, as quantidades relevantes devem ser invariantes de calibre. Assim, para termos observáveis invariantes, definimos o operador projetor

$$\mathbb{P} =: e^{-\int d^3x \psi \hat{\chi}} :, \tag{3.86}$$

onde para um funcional qualquer no espaço de fase B temos $\hat{\chi}B \equiv \{\chi, B\}$. Para aplicar a equação acima, devemos adotar o seguinte ordenamento, quando $\mathbb{P}$ atua em B, ψ deve estar fora do parênteses de Poisson. Assim, teremos que $B(x)$ será uma quantidade invariante de calibre

$$\begin{aligned}\tilde{B}(x) &=: e^{-\int d^3x\psi\hat{\chi}} : B(x), \\ &= B(x) - \int d^3x\psi(y)\{\chi(y), B(x)\} \\ &+ \frac{1}{2!}\int d^3yd^3x\psi(y)\psi(z)\{\chi(y),\{\chi(z), B(x)\}\} - .... + ...\end{aligned} \tag{3.87}$$

No caso da hamiltoniana, iremos obter uma hamiltoniana invariante de calibre, por transformações geradas pelo vínculo de primeira classe, a partir da expansão

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x) &=: e^{-\int d^3x\psi\hat{\chi}} : H(x), \\ &= H(x) - \int d^3x\psi(y)\{\chi(y), H(x)\} \\ &+ \frac{1}{2!}\int d^3yd^3x\psi(y)\psi(z)\{\chi(y),\{\chi(z), H(x)\}\} - .... + ...\end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $\{\tilde{H}, \chi\} = 0$, ou seja, não há vínculos de segunda classe nem novos vínculos, além disso, χ deve satisfazer a álgebra de primeira classe $\{\chi(x), \chi(y)\} = 0$. Consequentemente, o sistema descrito acima será de primeira classe e, portanto, invariante de calibre.

Assim, o propósito do método GU é converter um sistema de segunda classe em um sistema de primeira classe escolhendo um dos vínculos de segunda classe para ser o gerador de simetrias. O outro vínculo deverá ser descartado e assim será construída uma nova hamiltoniana de primeira classe.

Uma versão alternativa do método GU apresentada aqui foi feita por Jorge em [19]

Capítulo 4

Extensões da invariância de calibre para o modelo de Proca em um espaço-tempo não-comutativo

Neste capítulo iremos aplicar o método GU à teoria eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo NC. Vamos rever os principais aspectos do modelo de Proca no espaço-tempo NC desenvolvido F. Darabi e F. Naderi em [13].

A ação da eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo NC é dada por

$$\mathcal{S} = \int \left(-\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 \hat{A}_\mu * \hat{A}^\mu \right) d^4x, \tag{4.1}$$

onde $*$ significa o produto Moyal, $\hat{A}^\mu$ e $\hat{F}^{\mu\nu}$ são o potencial vetor e o tensor eletromagnético respectivamente descritos no espaço-tempo NC, m é a massa do campo A_μ e iremos utilizar a métrica $(-,+,+,+)$.

Pela equação (4.1) podemos perceber que o modelo de Proca no espaço-tempo NC não é invariante perante as transformações usuais de calibre $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$. Isso deve-se ao termo que contém massa.

Neste capítulo vamos encontrar uma versão invariante de calibre para o modelo de Proca no espaço-tempo NC. Como dissemos ateriormente, invariância de calibre é um dos principais ingredientes do Modelo Padrão, logo, podemos dizer que estudar teoria de calibre no espaço-tempo NC é estudar invariância de calibre além do modelo padrão.

Podemos notar que na eq. (4.1) os termos NCs não aparecem, uma vez que os campos envolvidos vivem no espaço-tempo NC. Para tornar os termos NCs explícitos, como dissemos anteriormente, os termos devem ser reescritos em termos dos campos comutativos através do mapeamento de SW, conectando os campos comutativos e NCs. O mapeamento de SW aplicado aos campos $\hat{A}^\mu$ e $\hat{F}^{\mu\nu}$ é dado pelas eqs. (2.40) e (2.42) respectivamente.

Como dissemos anteriormente, uma propriedade básica em teoria NC é que a integral sobre o produto estrela de duas quantidades é igual à correspondente integral sobre o produto ordinário, levando a ação (4.1) a ser escrita como

$$\mathcal{S} = \int \left(-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\hat{A}_\mu\hat{A}^\mu \right) d^4x. \tag{4.2}$$

O próximo passo é usar o mapeamento de SW na ação anterior. Assim, utilizando as eqs. (2.40) e (2.42), a densidade de lagrangeana em (4.2) pode ser escrita em termos dos campos comutativos como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{8}\theta_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\left[A_\mu^2 - \theta_{\alpha\beta}A_\alpha(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta_\mu})A_\mu\right], \tag{4.3}$$

onde podemos ver facilmente que o modelo original de Proca é recuperado quando fazemos $\theta = 0$.

Utilizando as definições (2.44), a densidade de lagrangeana (4.3) pode ser escrita na forma explícita

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}(E^2 - B^2)(1 + \vec{\theta}\cdot\vec{B}) - (\vec{\theta}\cdot\vec{E})(\vec{E}\cdot\vec{B}) + \frac{m^2}{2}\left(-A_0^2 + A_i^2\right) \\ &+ \frac{m^2}{4}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\nabla(A_0^2) - \frac{m^2}{2}\left[(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}\right] \\ &+ \frac{3}{4}m^2\left[(\vec{\theta}\cdot\vec{B})A^2 - (\vec{\theta}\cdot\vec{A})(\vec{A}\cdot\vec{B})\right],\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$, obviamente. Podemos ver claramente que, como é esperado no espaço-tempo NC, a introdução do parâmetro de não-comutatividade quebra explicitamente a invariância de Lorentz. A invariância de Lorentz é a simetria fundamental da teoria da relatividade de Einstein que diz que as leis da física são invariantes perante transformações de translações ou boosts.

No espaço-tempo NC, no caso de um observador em um referencial inercial, rotações e boosts deixam as leis da física invariantes porque transformações unitárias da matriz $\theta_{\mu\nu}$ podem ser calibradas por uma transformação do tipo Moyal-calibre. Assim, seja a transformação

$$g_\alpha(x) * f(x) * g_\alpha(x)^\dagger = f_\alpha(x) \tag{4.5}$$

onde

$$\begin{pmatrix} x_\alpha^1 \\ x_\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\gamma & sen\gamma \\ -sen\gamma & cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

é uma rotação no plano através do ângulo

$$\gamma = arctg(\alpha\theta), \tag{4.6}$$

assim, é possível realizar rotações via transformações do tipo Moyal-calibre no parâmetro θ.

Porém, a teoria não é invariante perante uma transformação do tipo Lorentz partícula que corresponde a rotações ou boosts de campos de configurações localizados em um referencial fixo. Tais transformações deixam o parâmetro da não-comutatividade θ invariante, e leva a quebra espontânea de simetria [36]. Mas a discussão desse tópico está fora de nosso interesse.

As equações de campo podem ser organizadas em dois conjuntos de equações

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} &= -\vec{J}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde

$$\begin{aligned} \rho =& m^2 \left[A_0 + \frac{1}{2}\nabla \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) + \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{E} \right], \\ \vec{D} =& \vec{E} + (\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{B} - (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{B} - (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{\theta} - \frac{1}{2}m^2(\vec{\theta} \times \vec{A})A_0, \\ \vec{J} =& m^2 \left[\vec{A} - \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{\theta})A_0 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{A} - \frac{3}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})\vec{B} - \frac{3}{4}(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{\theta} \right], \\ \vec{H} =& \vec{B} + (\vec{\theta})\vec{B} + (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)\vec{\theta} - m^2 \left(\frac{1}{4}A_0^2 - A_j^2 \right) \vec{\theta} + m^2(\vec{\theta} \cdot \vec{A})\vec{A}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Podemos perceber que quando $\theta = 0$, temos as equações de campo de Proca originais.

Uma vez que nosso objetivo aqui é converter vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe, é conveniente estudar a dinâmica do sistema descrito acima no formalismo hamiltoniano. Neste contexto, seguindo [13], o próximo passo é calcular o momento conjugado a A_0 e A_i respectivamente

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \tag{4.9}$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})E_i + (\vec{\theta} \cdot \vec{E})B_i + (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{\theta} + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})A_0. \tag{4.10}$$

onde podemos perceber, pelas eqs. (4.8) e (4.10), que $\pi_i = -D_i$

Seguindo o formalismo de vínculos de Dirac, podemos ver claramente que a eq. (4.9) é um vínculo primário.

$$\phi_1 \equiv \pi_0 \approx 0. \tag{4.11}$$

Utilizando a eq. (4.9), podemos obter E_i em termos de π_i, ou seja,

$$E_i = -(1 - \vec{\theta}\cdot\vec{B})\pi_i - (\vec{\theta}\cdot\vec{\pi})B_i - (\vec{\pi}\cdot\vec{B})\vec{\theta} + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0. \tag{4.12}$$

Utilizando a transformação de Legendre e a eq. (4.10) para expressar E_i em termos de π_i em primeira ordem em θ, obtemos

$$\begin{aligned} H_c = & \int d^3x\{\frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)\vec{\theta}\cdot\vec{B} + (\vec{\pi}\cdot\vec{B})(\vec{\pi}\cdot\theta) + \frac{m^2}{2}A_0^2 \\ & - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi}A_0 - \frac{m^2}{2}A_i^2(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B}) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})_i(\partial_i A_0)A_0 \\ & + 3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta}\cdot\vec{A})(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \pi_i\partial_i A_0\}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde H_c é a hamiltoniana canônica.

Utilizando a condição de que vínculos não variam com o tempo, a fim de obter novos vínculos para a teoria, para o vínculo primário (4.11), temos

$$\phi_2 = \{\phi_1, H_c\}, \tag{4.14}$$

onde $H_c = \int \mathcal{H}_c d^3x$. Pela relação anterior obtemos o vínculo secundário em primeira ordem em θ

$$\phi_2 = \nabla\cdot\vec{\pi} + m^2 A_0 + \frac{m^2}{2}\nabla\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0 - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi} \approx 0, \tag{4.15}$$

onde usando o fato de que $\pi_i = -D_i$, a eq. (4.15) pode ser vista como a generalização da lei de Gauss no espaço-tempo NC.

O próximo passo é classificar o vínculo em primeira ou segunda classe. O resultado do parênteses de Poisson entre ϕ_1 e ϕ_2 é

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -m^2\left(1 + \frac{1}{2}\nabla\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A})\right)\delta(x-y), \tag{4.16}$$

que significa que ambos os vínculos são de segunda classe e o sistema NC não é invariante de calibre. Esses dois vínculos definem uma superfície no espaço de fase NC.

Podemos ver essa não invariância na equação (4.3), uma vez que se considerarmos a transformação de calibre local padrão para a teoria eletrodinâmica de Maxwell, isto é, $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\epsilon(x)$, onde $\epsilon(x)$, é o parâmetro de calibre local, temos que $\delta F = 0$. Esta invariância de $F_{\mu\nu}$ torna a lagrangeana em (4.3) um invariante de calibre se $m = 0$. Consequentemente, como no caso padrão, o termo de massa quebra a invariância de calibre do modelo. Na próxima seção iremos ver que o método GU recupera a invarância de calibre de (4.3) convertendo vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe.

Na próxima seção iremos ver que o método GU insere a invariância de calibre em (4.4), convertendo vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe.

4.1 Aplicação do método "gauge unfixing"no modelo de Proca no espaço-tempo não-comutativo

Como dissemos anteriormente, nossos objetivos aqui são dois, por um lado vamos analisar a invariância de calibre do modelo de Proca no espaço-tempo NC, onde o termo de massa quebrou essa invariância. Por outro lado, queremos investigar, em primeira ordem do termo θ, se o formalismo GU é capaz de recuperar a invariância de calibre de tal teoria NC pois, como dissemos antes, os termos NCs podem trazer uma não localidade na renormalização com vínculos. Acreditamos que nossos resultados possam adicionar um pouco de luz a invariância de calibre a respeito das teorias descritas no espaço de fase NC.

Como é uma característica do modelo de Proca possuir dois vínculos de segunda classe, para a construção das lagrangeanas invariantes de calibre iremos descrever os dois casos. Vamos construir duas hamiltonianas e suas respectivas lagrangeanas, que são invariantes de calibre, seguindo o método GU. Cada caso, será caracterizado pela escolha de um dos vínculos como sendo de primeira classe, ou seja, o gerador de simetrias de calibre. O outro será descartado. Feito isso, iremos calcular as transformações de calibre para cada caso.

4.1.1 Caso 1

Começaremos a aplicar o formalismo de GU ao modelo Proca em (4.3) redefinindo os vínculos, eqs. (4.11) e (4.15), como

$$\chi = \pi_0 \tag{4.17}$$

$$\psi = \frac{\phi_2}{m^2(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot ((\vec{\theta} \times \vec{A}))}, \tag{4.18}$$

onde temos usado que $\theta << 1$. Aqui, o denominador de ψ é o parênteses de Poisson entre ϕ_1 e ϕ_2, e ψ é o vínculo "normalizado"redefinido através do ponto de vista do método GU. Os vínculos χ e ψ, pela eq. (4.16), formam um par canônico conjugado, ou seja,

$$\{\chi(x), \psi(y)\} = -\delta^{(3)}(x - y). \tag{4.19}$$

No primeiro caso, seguindo o método GU, iremos considerar que χ na Eq. (4.17) será escolhido para ser o vínculo de primeira classe e ψ na Eq. (4.18) será descartado. Assim, usando χ como o gerador de simetrias e, aplicando a eq. (3.88), podemos calcular a hamiltoniana invariante de calibre como

$$\mathcal{H}_{1^{o}caso} = \mathcal{H}_c - \frac{1}{2m^2}\left[(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))\psi^2\right]. \tag{4.20}$$

Note que substituindo a Eq. (4.18) na Eq. (4.20) podemos escrever a hamiltoniana

(4.20) como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1^o caso} = & \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A_0 \\
& - \frac{m^2}{2}A_i^2(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})_i(\partial_i A_0)A_0 + 3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \pi_i \partial_i A_0 \\
& - \frac{1}{2m^2}\left[(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))\psi^2\right], \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

onde o último termo pode ser escrito, utilizando a eq. (4.18), como

$$
\frac{1}{2m^2}\left[(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))\psi^2\right] = \frac{\phi_2^2}{2m^2(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))}, \qquad (4.22)
$$

ou ainda, utilizando a aproximação $\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}))} = (1 - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))$, temos

$$
\frac{1}{2m^2}\left[(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot ((\vec{\theta} \times \vec{A}))\psi^2\right] = \frac{(1 - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}))\phi_2^2}{2m^2}, \qquad (4.23)
$$

assim, utilizando a eq. (4.15)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2m^2}\left[(1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot ((\vec{\theta} \times \vec{A}))\psi^2\right] = & \frac{1}{2m^2}(\partial_i \pi_i)^2 + \partial_i \pi_i A_0 + \frac{1}{2}m^2 {A_0}^2 + \frac{1}{4}m^2 {A_0}^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \\
& - \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A_0 - \\
& - \frac{1}{4m^2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})^2 \vec{\nabla}(\vec{\theta} \times \vec{A}). \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Substituindo este último resultado na Eq. (4.20), podemos reescrever a hamiltoniana de primeira classe, eq. (4.20), usando o fato de que $H = \int d^3x \mathcal{H}$, como

$$
\begin{aligned}
H_{1^o caso} = & \int d^3x \big(\frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A_0 \\
& - \frac{m^2}{2}A_i^2(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})_i(\partial_i A_0)A_0 + 3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \pi_i \partial_i A_0 \\
& - \frac{1}{2m^2}(\partial_i \pi_i)^2 - \partial_i \pi_i A_0 - \frac{1}{2}m^2 {A_0}^2 - \frac{1}{4}m^2 {A_0}^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \\
& + \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A_0 + \frac{1}{4m^2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})^2 \vec{\nabla}(\vec{\theta} \times \vec{A})\big), \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

ou ainda, simplificando a equação anterior, temos

$$H_{1^{\mathrm{o}}caso}=\int d^3x\big(\frac{1}{2}(\pi^2+B^2)+\frac{1}{2}(B^2-\pi^2)\vec{\theta}\cdot\vec{B}+(\vec{\pi}\cdot\vec{\theta})(\vec{\pi}\cdot\vec{B})-\frac{m^2}{2}A_i^2(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B})$$
$$+3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta}\cdot\vec{A})(\vec{A}\cdot\vec{B})-\frac{(\vec{\nabla}.\vec{\pi})^2}{2m^2}+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi})(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi}+\frac{1}{4m^2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi})^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}). \tag{4.26}$$

Podemos verificar facilmente que, como não há A_0 na hamiltoniana acima,

$$\{\chi(x),H'_{1^{\mathrm{o}}caso}(y)\}=0, \tag{4.27}$$

ou seja, a hamiltoniana é invariante de calibre. Assim, χ e $H_{1^{\mathrm{a}}caso}$ descrevem uma teoria de calibre consistente no espaço de fase. Pode ser mostrado que, embora $H_{1^{\mathrm{a}}caso}$ seja de primeira classe, possui campos não invariantes de calibre.

A dinâmica do modelo de Proca no espaço-tempo NC invariante de calibre pode ser obtida pelo método usual como

$$\begin{aligned}\dot{A}_n=&\{A_n,H'_{1^{\mathrm{o}}caso}\}_{PB},\\ \dot{\pi}_n=&\{\pi_n,H'_{1^{\mathrm{o}}caso}\}_{PB},\\ \dot{A}_0=&\{A_0,H'_{1^{\mathrm{o}}caso}\}_{PB},\\ \dot{\pi}_0=&\{\pi_0,H'_{1^{\mathrm{o}}caso}\}_{PB},\end{aligned} \tag{4.28}$$

que nos dá os valores

$$\begin{aligned}\dot{A}_n=&\,\pi_n-\partial_nA_0-(\vec{\theta}\cdot\vec{B})\pi_n+(\vec{\theta}\cdot\vec{\pi})B_n+(\vec{B}\cdot\vec{\pi})\theta_n-\frac{m^2}{2}A_0((\vec{\theta}\times\vec{A})_n)+\frac{1}{m^2}\partial_n(\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi})\\ &-\frac{1}{2}\partial_n[(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi}],\\ \dot{\pi}_0=&\,0,\\ \dot{A}_0=&\,0,\\ \dot{\pi}_n=&-\{\vec{\nabla}\times[\vec{B}(1+\vec{\theta}\cdot\vec{B})+\frac{1}{2}\vec{\theta}(B^2-\pi^2)+\vec{\pi}(\vec{\pi}\cdot\vec{\theta})-\frac{3}{4}m^2A_j^2\vec{\theta}-\frac{1}{4}m^2A_0\vec{\theta}-\frac{3}{4}m^2(\vec{A}\cdot\vec{\theta})\vec{A}]\}_n\\ &+m^2A_n(1+\frac{3}{2}(\vec{B}\cdot\vec{\theta}))+\frac{1}{2}m^2A_0^2(\vec{\pi}\times\vec{\theta})n-\frac{3}{4}m^2(\theta_n(\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{\theta}\cdot\vec{A})B_n)-\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi})[(\vec{\pi}\times\vec{\theta})]_n\\ &-\frac{1}{4m^2}\left[(\vec{\theta}\times\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi})\right]_n,\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde esta dinâmica é importante na nova superfície vinculada definida apenas por χ.

A densidade de lagrangeana invariante de calibre pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{1^{\mathrm{o}}caso}=-\pi_0\dot{A}_0+\pi_n\dot{A}_n-\mathcal{H}_{1^{\mathrm{o}}caso}, \tag{4.30}$$

onde o sinal menos no termo A_0 é devido à métrica adotada.

Substituindo a hamiltoniana invariante de calibre $H_{1^o caso}$, eq. (4.26), na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1^o caso} = &+\pi_n\Big[\pi_n - \partial_n A_0 - (\vec{\theta}\cdot\vec{B})\pi_n + (\vec{\theta}\cdot\vec{\pi})B_n + (\vec{B}\cdot\vec{\pi})\theta_n - \frac{m^2}{2}A_0((\vec{\theta}\times\vec{A})_n \\ &+ \frac{1}{m^2}\partial_n(\partial_i\pi_i) - \frac{1}{2}\partial_n[(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi}] + \frac{1}{2}(\partial_i\pi_i)(\vec{\theta}\times\vec{A})_n\Big] - \Big[\frac{1}{2}(\pi^2+B^2) + \frac{1}{2}(B^2-\pi^2)\vec{\theta}\cdot\vec{B} \\ &+ (\vec{\pi}\cdot\vec{B})(\vec{\pi}\cdot\vec{\theta}) - \frac{m^2}{2}A_i^2(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\vec{B}) + 3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta}\cdot\vec{A})(\vec{A}\cdot\vec{B})\Big] + \frac{(\partial_i\pi_i)^2}{2m^2} - \frac{1}{2}(\partial_i\pi_i)(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi} \\ &- \frac{1}{4m^2}(\partial_i\pi_i)\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Após alguma álgebra, a lagrangeana invariante de calibre para o primeiro caso pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L'_{1^o caso} =& \int d^3x \Big\{\mathcal{L} + \frac{1}{2}m^2{A_0}^2 - \frac{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})^2}{2m^2}\Big(1+2(\vec{\theta}\cdot\vec{B})\Big) \\ &- (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\left[-\frac{1}{m^2}\vec{B}\cdot\vec{\nabla}(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) - \frac{1}{m^2}\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}(\vec{E}\cdot\vec{B}) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot[(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0]\right] \\ &+ A_0\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})(1+\vec{\theta}\cdot\vec{B}) + \vec{B}\cdot\vec{\nabla}(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) + \vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{E}) + \frac{m^2}{2}\vec{\nabla}\cdot[(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0]\right] \\ &- \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\left[(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}\right] - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E} + \frac{1}{4}m^2A_0^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}) \\ &+ \frac{1}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}A_0 - \frac{1}{4m^2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A})\Big\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangeana (4.3).

Pode ser mostrado que as quantidades fisicamente importantes são invariantes perante transformações de calibre geradas por χ. Voltaremos a esse assunto em breve. Claro que, quando $\theta = 0$, recuperamos os resultados obtidos no espaço de fase comutativo. Vale a pena mencionar novamente que a presença do vetor $\vec{\theta}$ implica que a invariância de Lorentz é quebrada, como pode ser visto na lagrangeana.

Como no caso comutativo, as equações de campo para o caso invariante de calibre são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{D}' &= \rho' \\ \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t} - (\nabla\times\vec{H}') &= -\vec{J}', \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\rho' &= \rho + m^2 A_0 + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\vec{E})[\nabla\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}) + \vec{\theta}\cdot\vec{B}] + \vec{B}\cdot\nabla(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) + \theta\cdot\nabla(\vec{B}\cdot\vec{E}) \\
&+ \frac{3}{2}m^2\nabla\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0 + \frac{1}{2}m^2(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}, \\
\vec{D}' &= \vec{D} + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\vec{E})(\vec{\theta}\cdot\nabla)\vec{B} + A_0(\vec{\theta}\cdot\nabla)\vec{B} - \frac{1}{2}\nabla[(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{E}] - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\nabla)(\vec{\theta}\times\vec{A}) \\
&+ \frac{1}{2}m^2 A_0(\vec{\theta}\times\vec{A}) - \nabla\left\{\frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\vec{E})\left(\frac{6}{2}(\vec{\theta}\cdot\vec{B}) - \nabla\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}\right) - \frac{1}{m^2}\left(\vec{B}\cdot\nabla(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) + \vec{\theta}\cdot\nabla(\vec{E}\cdot\vec{B})\right)\right\} \\
&- \nabla\left\{\frac{1}{2}\nabla\cdot[(\vec{\theta}\times\vec{A})A_0] + A_0(\vec{\theta}\cdot\vec{B})\right\} + \frac{1}{m^2}[\vec{B}(\vec{\theta}\cdot\nabla) + (\vec{\theta}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{\theta}(\vec{B}\cdot\nabla + \nabla\cdot\vec{B})]\nabla\cdot\vec{E} \\
&+ (\vec{\theta}\cdot\nabla)(A_0\vec{B}) + [(\vec{B}\cdot\nabla A_0) + A_0(\nabla\cdot\vec{B})]\vec{\theta} - \frac{1}{2}[\nabla\cdot(\theta\times\vec{A}) + (\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\nabla]\vec{E}, \\
\vec{J}' &= \vec{J} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\vec{E}(\theta\vec{\times}\nabla)A_0 - \frac{1}{2}m^2 A_0(\vec{\theta}\times\nabla)A_0 \\
&+ \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\nabla)(\vec{\theta}\times\vec{E}) - \frac{1}{2}m^2 A_0(\vec{\theta}\times\vec{E}), \\
\vec{H}' &= \vec{H} - \left[\frac{1}{2}m^2 A_0 - \frac{3}{4m^2}(\nabla\cdot\vec{E})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\vec{E})A_0 + A_0(\nabla\cdot\vec{E}) - \frac{1}{4}m^2 A_0^2 + \frac{1}{4m^2}(\nabla\cdot\vec{E})\right] \\
&+ A_0\nabla(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) + A_0(\vec{\theta}\cdot\nabla)(\nabla\times\vec{E}) - \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{\theta})\times\vec{E} + (\vec{\theta}\cdot\nabla)\left[\left(\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{m^2} + A_0\right)\vec{E}\right] \\
&+ \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\vec{E})[\nabla(\vec{\theta}\cdot\vec{E}) + (\vec{\theta}\cdot\nabla)\vec{E}],
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

onde $(\rho, \vec{D}, \vec{J}, \vec{H})$ são dados pela eq.(4.8). Note que, comparando com as equações em (4.8), o número de termos que possuem θ aumentou drasticamente a fim de termos uma lagrangeana invariante de calibre, apesar das tranformações de calibre serem simples, como veremos mais adiante. Apesar do termo de massa quebrar a invariância de calibre no que diz respeito ao modelo de Proca, a introdução dos termos no espaço-tempo NC não age para tornar a invariância de calibre impossível, como vimos através do formalismo GU.

É sabido, pela análise de sistemas vinculados clássicos, que simetrias locais podem ser construídas a partir de vínculos de primeira classe [21]. Uma vez que os vínculos da hamiltoniana podem ser obtidos durante o procedimento de Dirac, isso fornece um método padrão para obter simetrias. Assim, uma transformação de calibre pode ser dada por

$$
\delta\phi(\vec{x}) = \epsilon(\vec{y})\{\phi(\vec{x}), T(\vec{y})\}, \tag{4.35}
$$

onde ϕ é a variável com transformação de calibre que estamos procurando, ϵ é um parâmetro de calibre local e T é um vínculo de primeira classe.

Em ambos os casos analizados aqui, o outro ainda será analisado, temos um parâmetro NC constante e dois vínculos de segunda classe. O espaço de fase primário é dado por (A_0, π_0, A_i, π_i), o vínculo de primeira classe escolhido é dado por χ e, seguindo o método GU, o outro vínculo ψ foi descartado. Substituindo estas quantidades em (4.35) temos, respectivamente, as transformações de calibre dadas por

$$\delta_{1^o caso} A_0(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \quad e \quad \delta_{1^o caso} \vec{A}(\vec{x}) = 0, \tag{4.36}$$

que são as transformações triviais para a lagrangeana (4.32). Pode ser verificado, usando identidades vetoriais e eliminando derivadas totais, essa invariância de calibre.

4.1.2 Caso 2

No segundo caso escolhemos ϕ_2 como gerador de simetrias e o vínculo ϕ_1 será descartado. Podemos reescrever estes vínculos, para facilitar o cálulos, como

$$\begin{aligned} \chi =& + \frac{1}{m^2}(\partial_i \pi_i + m^2(A_0 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A_0 - \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi})), \quad (gerador \quad de \quad simetrias) \\ \psi =& - \pi_0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

onde

$$\phi_2 = \partial_i \pi_i + m^2(A_0 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A_0 - \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi}. \tag{4.38}$$

Uma nova superfície vinculada é definida diferente do caso anterior. A nova teoria de calibre será definida nessa nova superfície.

Seguindo o método GU, a nova hamiltoniana invariante de calibre é dada por

$$\begin{aligned} H_{2^o caso} =& \int d^3x \Big\{ \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A_0 \\ & - \frac{m^2}{2}A_i^2(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})_i(\partial_i A_0)A_0 + 3\frac{m^2}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \pi_i \partial_i A_0 \\ & - \psi \left[\partial_i(A_i(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B})) - \frac{3}{4}\big(\partial_i(\theta_i(\vec{A} \cdot \vec{B}) + B_i(\vec{\theta} \cdot \vec{A}))\big) + \frac{3}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{\pi})A_0 + \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{\pi}) \cdot \vec{\nabla} A_0 \right] \\ & - \frac{1}{m^2}\Big[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\psi)^2(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + \frac{3}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla}\psi)(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

e podemos verificar que

$$\{\chi(x), H_{2^o caso}(y)\} = 0, \tag{4.40}$$

que confirma a invariância de calibre de $H_{2^o caso}$.

Assim como no primeiro caso, vamos analisar as equações de movimento, que são dadas por

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}_0 &= \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{\pi}) - m^2A_0 + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta}\times\vec{A})\cdot\vec{\pi} - \frac{m^2}{2}A_0\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{A}),\\
\dot{A}_0 &= \partial_i(A_i(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B})) - \frac{3}{2}\partial_i(\theta_i(\vec{A}\cdot\vec{B}) + B_i(\vec{\theta}\cdot\vec{A})) - \frac{3}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{\pi})A_0\\
&\quad - \frac{1}{2}(\vec{\theta}\times\vec{\pi})\cdot\vec{\nabla}A_0 + \frac{1}{m^2}\partial_i((\partial_i\psi)(1+\frac{3}{2}(\vec{\theta}\cdot\vec{B}))) + \frac{3}{4m^2}\partial_i(\theta_i\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\psi + B_i\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}\psi),\\
\dot{A}_n &= \pi_n - (\vec{\theta}\cdot\vec{B})\pi_n + (\vec{B}\cdot\vec{\pi})\theta_n + (\vec{\theta}\cdot\vec{\pi})B_n - \frac{m^2}{2}A_0(\vec{\theta}\times\vec{A})_n - \partial_nA_0 - \frac{3}{2}\left[\vec{\theta}\times\vec{\nabla}(\psi A_0)\right]_n\\
&\quad + \frac{\psi}{2}(\vec{\theta}\times\vec{\nabla}A_0)_n,\\
\dot{\pi}_n &= -\left\{\vec{\nabla}\times[\vec{B}(1+\vec{\theta}.\vec{B}) + \frac{1}{2}\vec{\theta}(B^2-\pi^2) + \vec{\pi}(\vec{\pi}\cdot\vec{\theta}) - \frac{3}{4}m^2A_j^2\vec{\theta} - \frac{1}{4}m^2A_0\vec{\theta} - \frac{3}{4}m^2(\vec{A}\cdot\vec{\theta})\vec{A}]\right\}_n\\
&\quad + m^2A_n(1+\frac{3}{2}(\vec{B}\cdot\vec{\theta})) + \frac{1}{2}m^2A_0^2(\vec{\pi}\times\vec{\theta})n - \frac{3}{4}m^2(\theta_n(\vec{A}\cdot\vec{B}) + (\vec{\theta}\cdot\vec{A})B_n)\\
&\quad - \partial_n[\psi(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B})] + \frac{3}{4}\vec{B}\cdot\vec{\nabla}(\psi\theta_n) + \frac{3}{4}(\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}\psi)B_n - \{\vec{\nabla}\times[-3\psi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{\theta} - \frac{3}{2}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi)\vec{\theta}\\
&\quad + \frac{3}{4}\psi\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{\theta}) - \frac{3}{4}\psi(\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \frac{3}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}(\psi\vec{A})]\}_n - \frac{3}{4m^2}\left[\{\vec{\theta}\times\vec{\nabla}(\nabla\psi)^2 + (\vec{\nabla}\times(\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}\psi)\vec{\nabla}\psi\right]\}_n.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

A densidade de lagrangeana de primeira classe pode ser obtida realizando a transformação de Legendre

$$
\mathcal{L}_{2^{\text{o}}caso} = -\pi_0\dot{A}_0 + \pi_i\dot{A}_i - \mathcal{H}_{2^{\text{o}}caso}. \tag{4.42}
$$

Assim, a densidade de lagrangeana de primeira classe resultante para o segundo caso é

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2^{\text{o}}caso} &= -\pi_0\partial_0A_0 + \tilde{\mathcal{L}} + \frac{3}{2}[\vec{\theta}\times\vec{\nabla}(\psi A_0)]\cdot\vec{\pi} - \frac{\pi_0}{2}(\vec{\theta}\times\vec{\nabla}A_0)\cdot\vec{\pi} + \pi_0[\partial_i(A_i(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B}))\\
&\quad - \frac{3}{2}\big(\partial_i(\theta_i(\vec{A}\cdot\vec{B}) + B_i(\vec{\theta}\cdot\vec{A}))\big) - \frac{3}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{E})A_0 - \frac{1}{2}(\vec{\theta}\times\vec{E})\cdot\vec{\nabla}A_0]\\
&\quad + \frac{1}{m^2}\big[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\pi_0)^2(1+\frac{3}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B}) + \frac{3}{4}(\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}\pi_0)(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\pi_0)\big],
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

onde, por simplicidade, não substituímos alguns resultados obtidos em (4.41) e $\tilde{\mathcal{L}}$ é a densidade de lagrangeana (4.4). Pode ser visto diretamente que π_0 é um novo campo que aparece na densidade de lagrangeana e iremos discutir isso adiante.

As equações de campo nesse caso são,

$$\nabla \cdot \vec{D}'' = \rho'',$$
$$\frac{\partial \vec{D}''}{\partial t} - \nabla \times \vec{H}'' = -\vec{J}'', \tag{4.44}$$

onde

$$\rho'' = \rho + \frac{3}{2}\pi_0 \nabla \cdot (\vec{\theta} \times \vec{E}),$$
$$\vec{D}'' = \vec{D} + \frac{1}{2}\pi_0(\vec{\theta} \times \vec{E}) + \frac{1}{2}\pi_0(\vec{\theta} \times \nabla A_0) - \frac{3}{2}\vec{\theta} \times \nabla(\pi_0 A_0),$$
$$\vec{J}'' = \vec{J} + \frac{3}{2}\left[\pi_0 \vec{\theta} \cdot \nabla \vec{B} - \pi_0 \nabla(\vec{\theta} \cdot \vec{B})\right],$$
$$\vec{H}'' = \vec{H} - \frac{3}{2}\pi_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{\theta} + \frac{3}{2}\pi_0(\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - \frac{3}{2}\pi_0 \vec{\nabla}(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{2m^2}\left[\frac{3}{2}(\nabla \pi_0)^2 \vec{\theta} + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \nabla \pi_0)\vec{\nabla}\pi_0\right]$$
$$+ \frac{3}{2}\{[\nabla \times (\pi_0 \vec{A})] \times \vec{\theta} + [\nabla \times (\pi_0 \vec{\theta})] \times \vec{A}\}. \tag{4.45}$$

Neste caso podemos ver que o momento π_0 está presente e, desta forma, a sua capacidade de introduzir a invariância de calibre na lagrangeana. Comparando estas últimas equações com as (4.34) veremos logo abaixo que o campo Stueckelberg π_0 introduziu a invariância de calibre usando uma série de termos em (4.45) e muito menos do que em (4.34).

O leitor deve observar que temos algumas questões para discussão relativas ao campo de Stueckelberg. É bem conhecido que o modelo de Proca padrão, após a incorporação de Stueckelberg, tem dois vínculos de primeira classe. No entanto, o método GU leva a apenas um vínculo. Podemos dizer que tal situação ocorre graças ao fato de que, no método GU, o campo auxiliar que ajuda no método de conversão é um dos campos existentes do sistema. Por outro lado, o campo de Stueckelberg é externo e, desta forma, é um novo grau de liberdade do sistema.

Outro tema a ser discutido é sobre a interpretação do campo π_0 na densidade de lagrangeana (4.43) como um campo Stueckelberg. Agora, devemos que notar que, uma vez que para a densidade de lagrangeana temos, de fato, um espaço de configurações e não um espaço de fase, o momento π_0 se comporta como um campo externo no espaço de configuração (4.43). Como um campo externo, podemos vê-lo como um campo de Stueckelberg. Algumas destas questões foram tratadas na referência [47]

Para o segundo caso, as transformações para a densidade de lagrangeana (4.43) são dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_{2^{o}caso}A_0(\vec{x}) &= 0, \\
\delta_{2^{o}caso}\vec{A}(\vec{x}) &= -\nabla\epsilon(\vec{x}) + \frac{1}{2}m^2(\vec{A}\times\vec{\theta})\epsilon(\vec{x}), \\
\delta_{2^{o}caso}\pi_0(\vec{x}) &= -m^2\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{B}\right)\epsilon(\vec{x}), \\
\delta_{2^{o}caso}\vec{\pi}(\vec{x}) &= \frac{1}{2}m^2\Big[(\vec{\pi}\times\vec{\theta})\epsilon(\vec{x}) - (\vec{\theta}\times\nabla)(A_0\epsilon(\vec{x}))\Big]
\end{aligned} \tag{4.46}$$

e, como no caso anterior, pode ser verificado que a densidade de lagrangeana (4.43) é invariante perante as transformações acima. Assim, podemos mostrar que o campo π_0 age como o campo de Stueckelberg como é mostrado na referência [20]. Podemos demonstrar também que a densidade de lagrangeana final é do tipo Stueckelberg no espaço de fase NC. Em outras palavras, π_0 ajuda a manter a densidade de lagrangeana no espaço-tempo NC invariante.

Construir versões NCs de sistemas clássicos em física teórica é uma maneira de introduzir termos ou quantidades que possuem um medida na escala de Planck. Isso pode ser considerada uma maneira semi-clássica uma vez que a constante de Planck em si não foi introduzida. Contudo, um espaço-tempo NC também pode ser considerado distorcido e este espaço-tempo distorcido resultante pode ser considerado um caminho para entender a gravidade quântica, além de outras formulações.

Como invariância de calibre é um dos principais ingredientes do modelo padrão, e uma vez que podemos considerar formulações da não-comutatividade como formulações além do modelo padrão, podemos dizer que estudar invariância de calibre de modelos teóricos no espaço-tempo NC é estudar invariância de calibre além do modelo padrão.

Este é o principal objetivo deste trabalho, onde construímos uma versão invariante de calibre do modelo de Proca no espaço-tempo NC. Acreditamos que seja um resultado interessante uma vez que na sua formulação clássica, comutativa, o modelo de Proca não é invariante de calibre devido ao termo de masssa. Além disso, uma vez que formulações NCs não alteram os graus de liberdade para converter esse sistema de segunda classe em um sistema de primeira classe, invariante de calibre, onde os parâmetros da não-comutatividade estão presentes, é um novo resultado na literatura de vínculos em espaços-tempos NCs.

Capítulo 5

Teoria eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo não-comutativo

Neste capítulo iremos desenvolver a não-comutatividade na Eletrodinâmica de Podolsky. A importância do estudo de teorias no espaço-tempo NC reside no fato de estarmos estudando os efeitos gerados em pequena escala no espaço-tempo, ou seja, em altas energias.

Obter contribuições da NC para o modelo de Podolsky é importante pois estaremos investigando contribuições da eletrodinâmica generalizada em pequenas distâncias. Para tanto, utilizaremos os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores como, produto Moyal, mapeamento de SW e invariância de calibre.

Além disso, descreveremos aqui o método de Noether, que é um mecanismo para obter uma ação dual, e invariante de calibre, à uma ação que não seja invariante por transformações de calibre. Uma comparação entre os métodos de Noether e o de Stueckelberg é realizada.

5.1 Método de Noether

Em um trabalho inspirador [37], Deser [1] utilizaram o conceito da "ação mestra"para mostrar a dinâmica equivalente entre as teorias auto-dual (SD)[2], e Maxwell-Chern-Simons (MCS). Os autores demonstraram precisamente a existência de simetrias escondidas no modelo SD. Após este resultado, o procedimento da ação mestra foi utilizado para expor a física escondida atrás de fenômenos físicos planares e bozonização. Relativo a este último, vale a pena explicar que é um procedimento que representa uma teoria de interação em termos de bósons livres. Em $D = 2$ essa aproximação revela a equivalência dual apresentada nessa representação [38, 39, 40, 41, 42] sendo estendida para dimensões extras [43, 44].

Motivado pela equivalência entre os modelos SD e MCS, foi natural questionar se há outra maneira de obtermos resultados novos e análogos. Em trabalhos que analisaram a existência de simetrias escondidas dentro de sistemas de segunda classe, foi provado que modelos não invariantes, são, de fato, equivalentes a sistemas invariantes de primeira classe. Esses resultados foram obtidos sob certas condições de fixação de calibre. A principal vantagem de se ter uma teoria de calibre é o fato de podermos estabelecer correntes equivalentes entre modelos diferentes através de diferentes condições de fixação de calibre.

A técnica de incorporação de Noether [45] é baseada na ideia tradicional de elevação local de uma simetria global e pode ser realizada por incorporação interativa de termos contadores de Noether. Esta técnica foi originalmente explorada no contexto do formalismo de solda [23, 24, 25] e foi discutida em [26, 27, 28] uma vez que esta parece ser a técnica mais apropriada para uma generalização não-Abeliana da concepção de mapeamento dual.

O método é um procedimento interativo e, o primeiro passo, acarreta a imposição de uma transformação de calibre local trivial consistindo em uma lagrangeana de ordem zero, que é como chamaremos a original e até agora intocada lagrangeana. Claro que esta lagrangeana de ordem zero não é invariante por transformações de calibre perante a transformação imposta. O cálculo desta variação nos permite construir a corrente de Noether. Assim, a variação da lagrangeana de ordem zero pode ser escrita como a soma das correntes de Noether acopladas com o parâmetro local de calibre. Isto basicamente completa a primeira interação.

A segunda começa com a introdução de campos auxiliares juntamente com as correntes de Noether calculadas na primeira interação. Assim, a agora primeira lagrangeana pode ser escrita como a soma da lagrangeana de ordem zero mais os termos que acoplam as correntes com o campo auxiliar. Se esta ainda não for invariante de calibre, temos que introduzir campos auxiliares, não necessariamente novos, mais uma vez a fim de obtermos invariância de calibre. Assim, o processo continua até obtermos uma ação invariante de calibre.

---

[1] el.al
[2] Self dual

5.2 Teoria eletromagnética de Podoslky no espaço-tempo não-comutativo

Vamos começar com a densidade de lagrangeana da teoria eletromagnética de Podolsky [16, 17, 18],

$$\mathcal{L}_{Pod} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}\partial^\mu F_{\mu\nu}, \tag{5.1}$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o campo tensorial e o termo a tem dimensão $1/[M]$. Aqui, iremos usar a métrica $(-,+,+,+)$ e a notação para somatório de índices repetidos.

No espaço-tempo NC, o produto usual deve ser substituído pelo produto Moyal. Assim, a densidade de lagrangeana da teoria eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC é dada por

$$\mathcal{L}_{Pod} = -\frac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu} * \hat{F}_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\lambda \hat{F}^{\lambda\nu} * \partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu}, \tag{5.2}$$

onde, como explicado anteriormente, $*$ significa produto Moyal e a notação com chapéu indica objetos no espaço-tempo NC.

Sabemos, pela eq. (2.19), que para dois objetos em uma integral o produto Moyal pode ser substiuído pelo produto usual. Assim, a eq. (5.2) coincide com a (5.1), ou seja, a densidade de lagrangeana (5.1) descreve a teoria de Podolsky no espaço-tempo NC.

A fim de mostrar a contribuição NC da respectiva teoria comutativa, devemos utilizar o mapeamento de SW, que foi discutido no capítulo 2. Utilizando as eqs (2.40) e (2.42) na eq. (5.1) temos que a densidade de lagrangeana do Podolsky no espaço-tempo NC com os mesmos graus de liberdade e termos adicionais devido ao parâmetro NC em primeira ordem em θ é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Pod} &= -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{8}\theta^{\rho\sigma}(4F^\mu_\rho F^\nu_\sigma F_{\mu\nu} - F_{\rho\sigma}F^2) \\ &+ \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}\partial^\mu\left[F_{\mu\nu} + 2\theta^{\rho\sigma}(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - A_\rho\partial_\sigma F_{\mu\nu})\right],\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde podemos perceber facilmente que se $\theta_{\mu\nu} = 0$ recuperamos a teoria comutativa. Assim, podemos supor que fazendo tal aproximação em θ, obteremos novamente os resultados comutativos.

Pela densidade de lagrangeana (5.3) podemos perceber que o último termo possui derivadas de terceira ordem. Assim, para analisarmos a física do modelo de Podolsky no espaço-tempo NC devemos utilizar o modelo de ordem superior. Aqui, estenderemos para terceira ordem o que foi desenvolvido no trabalho de Barcelos [46][3].

Voltando à densidade de lagrangeana (5.3), podemos escrevê-la em termos dos campos fundamentais eletromagnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e do potencial vetor $\vec{A}$ utilizando as relações (2.44).

[3] et.al.

Portanto, a densidade de lagrangeana (5.3) fica

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Pod} = &\frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{1}{2}a^2 \left[(\nabla \cdot \vec{E})^2 - (\dot{\vec{E}} - \nabla \times \vec{B})^2\right] - \left[(\vec{\theta} \cdot \vec{E})(\vec{B} \cdot \vec{E}) - (\vec{\theta} \cdot \vec{B})E^2\right] \\
&+ \frac{1}{2}(B^2 - E^2)\vec{\theta} \cdot \nabla \times \vec{A} + a^2 \Big\{ \left[(\vec{\theta} \cdot \dot{\vec{B}}\vec{E} + (\vec{\theta} \cdot \vec{B})\dot{\vec{E}}\right] \cdot \nabla \times \vec{B} \\
&- \vec{\theta} \cdot (\nabla \times \vec{B})\partial_0(\vec{E} \cdot \vec{B}) + \left[\vec{\theta} \cdot (\vec{A} \times \nabla)\right] \vec{E} \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

A fim de obtermos as equações de movimento lançaremos mão do modelo de derivadas de ordem superior generalizada [46]. Seja, então, uma densidade de lagrangeana que possua derivadas de ordem 3 do tipo

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu, \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\nu A_\mu). \tag{5.5}
$$

Pelo princípio variacional, temos

$$
\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = 0, \tag{5.6}
$$

e, considerando que nos instantes t_1 e t_2

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu(t_1) &= \delta A_\mu(t_2) = 0, \\
\delta \dot{A}_\mu(t_1) &= \delta \dot{A}_\mu \phi(t_2) = 0,
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

assim, realizando a variação na eq. (5.5), temos que a equação de Euler-Lagrange para o caso de ordem 3 fica

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} - \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} = 0, \tag{5.8}
$$

portanto, aplicando a equação acima na densidade de lagrangeana (5.3), as equações de movimento para o modelo de Podolsky no espaço-tempo NC ficam

$$
\begin{aligned}
&(1 + a^2\Box)\partial_\rho F^{\rho\lambda} + \partial_\rho \Big\{ \frac{1}{2} \left[\theta^{\mu[\rho} F^{\lambda]\nu} F_{\nu\mu} + \theta^{\mu[\rho} F \lambda]\nu F_{\mu\beta} + \theta^{\beta\alpha} F^{\rho[}_{\beta} F^{\lambda]}_{\alpha}\right] \\
&- \frac{1}{4}\left[\theta^{\beta\alpha} F^{\rho\lambda} F_{\beta\alpha} + \theta^{\rho\lambda} F^2\right] + a^2 \left[\theta^{\beta[\rho} \partial^\alpha F_{\lambda\alpha} \partial^\mu F_{\mu\beta} + \theta^{\alpha[\rho} \partial^{\lambda]} F_\nu \alpha \partial_\beta F^{\beta\nu} + \theta^{\alpha\lambda} \partial_\rho F^\rho_\nu \partial_\beta F^{\beta\nu}\right] \Big\} \\
+&\partial_\rho \partial_\sigma \left[a^2 F^\sigma_\beta \theta^{\beta[\rho} \partial_\alpha F^{\lambda]\alpha} + \theta^{\beta\sigma} \partial_\alpha F^{\alpha[\lambda} \partial^{\rho]} A_\beta\right] = 0.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Pela a eq. (5.3) podemos calcular os momentos relativo ao espaço de fase descrito pelos pares: (A_μ, ρ_μ), $(\dot{A}_\mu, \pi_\mu)$ e $(\ddot{A}_\mu, \chi_\mu)$, formado pelas coordenadas e seus respectivos momentos no espaço de fase. Para calcular os momentos canônicos, no nosso caso serão 3, consideremos variações da ação com apenas um dos extremos matidos fixo, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu(t_1) &= 0,\\
\delta \dot{A}_\mu(t_1) &= 0,\\
\delta \ddot{A}_\mu(t_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

obeteremos então,

$$\begin{aligned}
\delta S =& \int d^3x \Big[\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 2\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \dot{A}_\mu)} + 3\partial_0\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \ddot{A}_\mu)} + 3\partial_n\partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n\partial_m \dot{A}_\mu)} + \partial_0\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dddot{A}_\mu)} \Big) \delta A_\mu \\
&+ \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 3\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_n \ddot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dddot{A}_\mu} \Big) \delta \dot{A}_\mu + \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dddot{A}_\mu} \Big) \delta \ddot{A}_\mu \Big]
\end{aligned} \tag{5.11}$$

assim, os momentos canônicos ρ^μ, π^μ e χ^μ conjugados a A_μ, $\dot{A}_\mu$ e $\ddot{A}_\mu$ respectivamente são os coeficientes de δA_μ, $\delta\dot{A}_\mu$ e $\delta\ddot{A}_\mu$

$$\begin{aligned}
\rho^\mu =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 2\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \dot{A}_\mu)} + 3\partial_0\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \ddot{A}_\mu)} + 3\partial_n\partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n\partial_m \dot{A}_\mu)} + \partial_0\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dddot{A}_\mu)},\\
\pi^\mu =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 3\partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_n \ddot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dddot{A}_\mu},\\
\chi^\mu =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dddot{A}_\mu}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

É fácil ver que uma vez que $\mathcal{L}_{Pod}$ não possui $\dddot{A}_\mu$, todas as derivadas relativas a $\dddot{A}_\mu$ são nulas. Assim, podemos obter a forma explícita dada por

$$\begin{aligned}
\chi^\zeta &= 0,\\
\pi^0 &= 0,\\
\pi^n &= a^2\partial_\alpha F^{\alpha n} + a^2\theta^{ij}\partial^\alpha(F_{\alpha i}F^n_j - A_i\partial_j F^n_\alpha) + a^2\theta^{nj}(\partial_\alpha F^{\alpha k})F_{kj} + a^2\theta^{ij}\partial_j(A_i\partial_\alpha F^{\alpha n}),\\
\rho^0 &= a^2\partial_n(\partial_\alpha F^{\alpha n}) + a^2\theta^{ij}\partial_n\partial^\alpha(F_{\alpha i}F^n_j - A_i\partial_j F^n_\alpha) + a^2\theta^{nj}\partial_n(\partial_\alpha F^{\alpha k}F_{kj})\\
&\quad + a^2\theta^{ij}\partial_n\Big[\partial_j(A_i\partial_\alpha F^{\alpha n})\Big],\\
\rho^n &= -F^{0n}(1 - \frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij}) + 2a^2\partial^n\partial_i F^{i0} - a^2\partial_0(\partial_\alpha F^{\alpha n}) - \theta^{nj}F_{0k}F^k_j - \theta^{ij}F_{0i}F^n_j\\
&\quad - a^2\Big[\theta^{nj}\big(\partial_\alpha F^{\alpha m}\partial_j F_{0m} - \partial_k(\partial_0 F^{0k}F_{0i} - \partial^l(\partial_k F^{k0}F_{li}) + \partial_m(\partial_k F^{km}F_{0i} - \partial_0(\partial_\alpha F^{\alpha k}F_{kj})\Big]\\
&\quad + \theta^{ij}\big(-\partial_j(\partial_0 F^{on}F_{0i}) - \partial_j(\partial_k F^{0n}\partial_0 A_i) + \partial_j(\partial_k F^{k0}\partial^n A_i)\partial_j(\partial_k F^{kn}F_{0i} - \partial_j(\partial_k F^{kn}\dot{A}_i)\\
&\quad - \partial^n(F_{li}\partial^l F_{0j} - \partial^l A_i\partial_j F_{l0}) - \partial_0\Big[\partial^\alpha(F_{\alpha i}F^n_j - A_i\partial_j F^n_\alpha)\Big]\\
&\quad - 3\partial_0\partial_j(A_i\partial_0 F^{0n}) + 3\partial^n\partial_j\Big[A_i\partial_k F^{k0})\Big].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

A fim de passar do formalismo lagrangeano para o formalismo hamiltoniano, devemos realizar a transformação de Legendre. Como, pelas eqs. (5.13), o momento χ é nulo em todas as componentes, a densidade de hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_{Pod} = \pi_\mu \dot{\phi}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}_{Pod}, \tag{5.14}$$

onde $\phi = \ddot{A}_\mu$, os momentos são dados pelas eqs. (5.13) e a densidade de lagrangeana é escrita pela eq. (5.3). Note que, em uma teoria de ordem superior, o espaço de fase é dado por $(A_0, A_n, \dot{A}_0, \dot{A}_n, P_0, P_m, \pi_0, \pi_n)$. Assim, substituindo esses valores na equação acima temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{Pod} &= +\rho^\mu \phi_\mu + \frac{\pi_n \pi^n}{a^2}\Big(1 - \theta^{ij}\partial_j A_i\Big) - \pi_n \pi_i \theta^{ij} F^n_j - \theta^{ij}(F_{\alpha i})\pi_n \partial^\alpha (F^n_j) \\
&+ \theta^{ij}\pi_n \partial^\alpha (A_i)(\partial_j F^n_\alpha) - \theta^{nj}\pi_n \pi^k F_{kj} - \pi_n \partial^n \phi^0 + \pi_n \partial_i F^{in} \\
&+ \frac{1}{4}(2F^{0k}F_{0k} + F^{kl}F_{kl})(1 - \frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij})\frac{\theta^{ij}}{2}(F_{0i}F_{0k}F^k_j + F^k_i F_{k0}F_{0j} + F_{kl}F^k_i F^l_j) \\
&- \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^\mu F_{\mu 0} - \frac{\pi_n \pi^n}{2a^2} - \theta^{ij}\partial_j A_i \pi_n \pi^n + \theta^{ij}\pi_i \pi_n F^n_j + \theta^{ij}\pi_n F_{\alpha i}\partial^\alpha F^m_j \\
&+ \theta^{ij}\pi_n \partial^\alpha A_i \partial_j F^n_\alpha + \theta^{nj}\pi_n \pi^k F_{kj} - a^2\theta^{ij}\Big[\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^n (F_{ni}F_{0j} - A_i \partial_j F_{n0}) \\
&+ \partial_\lambda F^{\lambda n}\partial^\mu (F_{\mu i}F_{nj} - A_i \partial_j F_{\mu n})\Big],
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde escolhemos manter, por simplicidade, o tensor de Maxwell F_{ij}.

Na próxima seção iremos discutir a invariância original de calibre da densidade de lagrangeana (5.3), que é quebrada. Em outras palavras, uma vez que a introdução do parâmetro da não-comutatividade não modifica o número de graus de liberdade da teoria original, como já dissemos, o modelo descrito pela densidade de lagrangeana (5.3) é ainda de primeira classe. Assim, na próxima seção, iremos recuperar a invariância de calibre original e faremos uma comparação entre os métodos de Stueckelberg e de Noether.

5.3 Invariância de calibre e dualidade

5.3.1 A aproximação de Stueckelberg

Podemos ver claramente, pela densidade de lagrangeana (5.3), que o último termo da contribuição NC quebra a invariância original de calibre. Ou seja, pela densidade de lagrangeana (5.3), o último termo é

$$-a^2\theta^{\rho\sigma}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}\partial^\mu A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu} \tag{5.16}$$

ao aplicarmos a simetria $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$ o termo resultante é

$$-a^2\theta^{\rho\sigma}\partial^\mu\partial_\lambda F^{\lambda\beta}\partial_\sigma F_{\mu\beta}\partial_\rho\epsilon \tag{5.17}$$

o que implica que a variação não é zero e, assim, a lagrangeana não é invariante perante a transformação $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$.

No entanto, esperamos que o número de graus de liberdade seja o mesmo em ambas as lagrangeanas, comutativa e NC. Uma maneira de implementar a invariância de calibre na densidade de lagrangeana (5.3) é através do procedimento de Stueckelberg onde se introduz campos auxiliares que facilmente conectam os termos que quebram a invariância de calibre, de tal forma que $\mathcal{L}_{Pod}$ pode ser dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Pod} =& -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{8}\theta^{\rho\sigma}(4F^\mu_\rho F^\nu_\sigma F_{\mu\nu} - F_{\rho\sigma}F^2) \\ &+ \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}\left[\partial^\mu F_{\mu\nu} + 2\theta^{\rho\sigma}\partial^\mu(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - (A_\rho + \partial_\rho\chi)\partial_\sigma F_{\mu\nu})\right],\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde χ é um grau auxiliar de liberdade, o campo de Stueckelberg, que recupera a invariância original de $\mathcal{L}_{Pod}$ e se $\chi = 0$ retornamos para a $\mathcal{L}_{Pod}$ original. As transformações de calibre para a densidade de lagrangeana acima devem ser dadas por $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$ e $\delta\chi = -\Lambda$. No entanto, eliminar os campos auxiliares não é uma tarefa fácil, podemos perceber pela equação (5.18) que χ não é isolado na expressão, ou seja, temos apenas termos com derivadas. Veremos agora que utilizando o método de Noether para invariância de calibre podemos facilmente eliminar o campo auxiliar a fim de obter uma ação final invariante de calibre.

5.3.2 O método de Noether

Vamos utilizar agora o método de Noether para obter uma ação dual e invariante de calibre à ação relativa à eq. (5.3). Demonstraremos que os termos NC destroem a invariância de calibre.

Vamos começar, seguindo a técnica de dualização, fixando uma simetria de calibre local para o potencial vetor tal que

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon, \tag{5.19}$$

onde ϵ é o parâmetro de calibre. É trivial ver que o campo tensorial de Maxwell é invariante perante a transformação (5.19), tal que $\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \epsilon - \partial_\nu \partial_\mu \epsilon = 0$. Assim, o único termo que não é invariante perante as transformações (5.19) na eq. (5.3) é o último termo. Portanto, vamos considerar este termo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -a^2 \partial_\lambda F^{\lambda\nu} \Big[-2\theta^{\rho\sigma} \partial_\mu (A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}) \Big] \\
&= a^2 \theta^{\rho\sigma} \partial_\lambda F^{\lambda\nu} \Big[\partial^\mu A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu} - A_\rho \partial^\mu \partial_\sigma F_{\mu\nu} \Big].
\end{aligned} \tag{5.20}$$

A variação de calibre é, após uma integração por partes,

$$\delta \mathcal{L}_0 = -a^2 \theta^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda F^{\lambda\nu} \partial_\sigma F_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon, \tag{5.21}$$

que pode ser escrita como

$$\delta \mathcal{L}_0 = J^\rho \partial_\rho \epsilon. \tag{5.22}$$

Este resultado mostra, como foi dito anteriormente, que a teoria de Podolsky no espaço-tempo NC não é invariante perante as transformações (5.19). A corrente de Noether J^μ é dada por

$$J^\rho = -a^2 \theta^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda F^{\lambda\nu} \partial_\sigma F_{\mu\nu}. \tag{5.23}$$

O próximo passo é construir a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_1$ como

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 - J^\mu B_\mu, \tag{5.24}$$

onde B_μ é um campo auxiliar, podendo ser NC ou não. A variação de calibre de $\mathcal{L}_1$ é

$$\delta \mathcal{L}_1 = \delta \mathcal{L}_0 - (\delta J^\mu) B_\mu - J^\mu (\delta B_\mu), \tag{5.25}$$

e, seguindo o processo de dualização, podemos escolher convenientemente que

$$\delta B_\mu = \partial_\mu \epsilon, \tag{5.26}$$

e substituindo esta equação na eq. (5.25) temos que

$$\delta \mathcal{L}_1 = \delta \mathcal{L}_0 - (\delta J^\mu) B_\mu - J^\mu \partial_\mu \epsilon, \tag{5.27}$$

onde podemos ver que o primeiro e o último termos na última na eq. (5.27) se cancelam.

Assim,

$$\delta\mathcal{L}_1 = -(\delta J^\mu)B_\mu. \tag{5.28}$$

No entanto, pela eq. (5.23) podemos facilmente obter que $(\delta J^\mu) = 0$ e temos que $\mathcal{L}_1$ é invariante de calibre e pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_0 - J^\mu B_\mu \\ &= -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{8}\theta^{\rho\sigma}(4F^\mu_\rho F^\nu_\sigma F_{\mu\nu} - F_{\rho\sigma}F^2) \\ &+ \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}\partial^\mu\left[F_{\mu\nu} + 2\theta^{\rho\sigma}(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - A_\rho\partial_\sigma F_{\mu\nu}) - \theta^{\rho\sigma}(\partial_\sigma F_{\mu\nu}B_\rho)\right],\end{aligned} \tag{5.29}$$

que é a densidade de lagrangeana dual da ação (5.3) e possui as mesmas propriedades físicas da densidade de lagrangeana original $\mathcal{L}_0$. O próximo passo é eliminar B_μ através da equação de movimento para A_μ, que é dada pela eq. (5.9). Assim, temos

$$\begin{aligned}&(1 + a^2\Box)\partial_\rho F^{\rho\lambda} + \partial_\rho\Big\{\frac{1}{2}\big[\theta^{\mu[\rho}F^{\lambda]\nu}F_{\nu\mu} + \theta^{\mu[\rho}F^{\lambda]\nu}F_{\mu\beta} + \theta^{\beta\alpha}F^{[\rho}_\beta F^{\lambda]}_\alpha\big] \\ &- \frac{1}{4}\big[\theta^{\beta\alpha}F^{\rho\lambda}F_{\beta\alpha} + \theta^{\rho\lambda}F^2\big] - 2a^2\big[\partial_\sigma F^{\sigma[\lambda}\theta^{\rho]\beta}\partial^\mu F_{\mu\beta} + \theta^{\alpha[\rho}\partial^{\lambda]}F_{\nu\alpha}\partial_\beta F^{\beta\nu} + \theta^{\beta\lambda}\partial_\alpha F^{\alpha\nu}\partial_\beta F^\rho_\nu\big]\Big\} \\ &+ 2a^2\partial_\sigma\partial_\rho\big[(\partial_\alpha F^{\alpha[\lambda}\theta^{\sigma]\beta})F^\rho_\beta\big] - a^2(\partial_\rho\partial_\sigma\partial_\beta)\theta^{\beta\rho}\partial_\alpha(\partial^{\lambda[}F^{\sigma]\alpha}) \\ &- a^2\theta^{\beta\rho}\partial_\rho\partial_\sigma\partial_\alpha(\partial^{[\lambda}F^{\sigma]\alpha})B_\beta = 0.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Resolvendo a última equação para B_μ obtemos

$$B_\mu = \frac{\theta_{\mu\nu}A_\lambda\partial^\nu\Sigma^\lambda(F)}{2a^2\theta^2(\Box^2\partial_\rho F^{\rho\lambda})A_\lambda}, \tag{5.31}$$

onde $\theta^2 = \theta_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}$ e

$$\begin{aligned}\Sigma^\lambda(F) =&(1 + a^2\Box)\partial_\rho F^{\rho\lambda} + \partial_\rho\Big\{\frac{1}{2}\left[\theta^{\mu[\rho}F^{\lambda]\nu}F_{\nu\mu} + \theta^{\mu[\rho}F^{\lambda]\nu}F_{\mu\beta} + \theta^{\beta\alpha}F^{[\rho}_\beta F^{\lambda]}_\alpha\right] \\ &- \frac{1}{4}\left[\theta^{\beta\alpha}F^{\rho\lambda}F_{\beta\alpha} + \theta^{\rho\lambda}F^2\right] - 2a^2\Big[\partial_\sigma F^{\sigma[\lambda}\theta^{\rho[\beta}\partial^\mu F_{\mu\beta} + \theta^{\alpha[\rho}\partial^{\lambda]}F_{\nu\alpha}\partial_\beta F^{\beta\nu} \\ &+ \theta^{\beta\lambda}\partial_\alpha F^{\alpha\nu}\partial_\beta F^\rho_\nu\Big]\Big\} + 2a^2\partial_\rho\partial_\sigma\big[(\partial_\alpha F^{\alpha[\lambda}\theta^{\sigma]\beta})F^\rho_\beta\big],\end{aligned} \tag{5.32}$$

que pode ser resolvido após um árduo trabalho algébrico.

O ponto importante aqui é comparar os precedimentos de Stueckelberg e Noether que são equivalentes. O método de Stueckelberg é mais simples, porém mais trabalhoso de calcular os campos. Por outro lado, o método de Noether é mais longo, mas eliminar os campos auxiliares, é mais viável do que o método de Stueckelberg. Finalmente, podemos dizer, é possível obter uma versão invariante de calibre para um modelo eletromagnético possuindo derivadas de ordem superior.

No entanto, é facil perceber que, olhando para $\mathcal{L}_1$ na eq. (5.29), ela irá se transformar em uma lagrangeana enorme com muitos termos. Assim, para simplificar, vamos manter a forma com o campo auxiliar. Uma vez que nosso objetivo aqui é obter, além de uma versão NC da teoria de Podolsky, uma expressão dual invariante de calibre NC para a ação original.

O campo auxiliar B_μ apesar de recuperar a invariância de calibre de $\mathcal{L}_0$ não pode ser considerado um tipo de campo Stueckelberg. Embora em $\mathcal{L}_1$, aparentemente, temos um grau de liberdade a mais do que $\mathcal{L}_0$ pois, como temos explicado, B_μ pode ser eliminada através $F_{\mu\nu}$ pelas equações de movimento. Assim, a lagrangeana final, teria o mesmo número de graus de liberdade original NC.

Aqui, introduzimos dois novos resultados, o primeiro é a versão NC da eletrodinâmica do Podolsky através do produto Moyal e do mapeamento de SW e, após a demonstração de que termos NCs destroem a invariância de calibre original, obtivemos uma teoria de Podolsky invariante no espaço-tempo NC. Apesar da ação final possuir um grau de liberdade extra, um campo auxiliar B_μ, este pode ser eliminado através das equações de movimento para $F_{\mu\nu}$

Uma vez obtida a invariância de calibre, pode ser considerado um sistema de primeira classe e, seguindo o formalismo de Dirac, a quantização pode ser feita através dos parênteses de Poisson, que será discutido no próximo capítulo.

5.4 Método de Dirac aplicado à eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo não-comutativo

Nesta seção iremos aplicar o método de Dirac na teoria eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC, discutida na seção 2 deste capítulo. A análise da eletrodinâmica de Podosky no espaço-tempo comutativo foi feita por R. Bufalo e B.M. Pimentel na referência [48].

Primeiramente iremos obter os parênteses de Dirac pelo formalismo canônico, ou seja, pelo método de Dirac. A análise de vínculos é feita e comparada com o caso comutativo.

Na próxima seção, a obtensão dos parênteses de Dirac será feita pelo formalismo simplético, método de Faddev-Jackiw, que é realizada de uma maneira geométrica em comparação com o método de Dirac. Uma comparação entre os dois métodos é feita em seguida.

Primeiramente faremos uma breve revisão do que foi exposto na referência [48]. Como a densidade de lagrangeana que descreve a eletrodinâmica de Podolsky (5.1) possui derivadas de segunda ordem, devemos utilizar os momentos canônicos generalizados, para tanto, vamos utilizar o preocedimento utilizado em [49]. Portanto, vamos considerar variações da ação com apenas um dos extremos mantido fixo, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu(t_1) &= 0, \\
\delta \dot{A}_\mu(t_1) &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Assim, no caso de uma densidade de lagrangeana que possua derivadas de segunda ordem, ou seja,

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu), \tag{5.34}
$$

devemos realizar uma variação na densidade de Lagraneana (5.34), obtendo assim

$$
\begin{aligned}
P^\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \partial A_\mu} - 2\partial_k \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_k \partial A_\mu}, \\
\pi^\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \partial A_\mu}.
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

Logo, pela densidade de lagrangeana (5.1),

$$
\begin{aligned}
P^\mu &\equiv F^{\mu 0} - a^2(\eta^{\mu k} \partial_k \partial_\lambda F^{0\lambda} - \partial_0 \partial_\lambda F^{\mu\lambda}), \\
\pi^\mu &\equiv a^2(\eta^{\mu 0} \partial_\lambda F^{0\lambda} - \partial_\lambda F^{\mu\lambda}),
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

de onde é facil ver que a componente π^0 é nula, ou seja,

$$
\pi^0 = 0, \tag{5.37}
$$

que é um vínculo primário

$$
\Omega_1 \equiv \pi^0 \approx 0. \tag{5.38}
$$

Seguindo o formalismo de Dirac, vamos aplicar a relação de consistência à expressão anterior a fim de encontrar novos vínculos. Para tanto, devemos escrever a densidade de hamiltoniana a partir da aplicação da transformação de Legendre à densidade de lagrangeana (5.1), ou seja,

$$
\mathcal{H}_c = P^\mu \dot{A}_\mu + \pi^\mu \ddot{\phi}_\mu - \mathcal{L}, \tag{5.39}
$$

a densidade de hamiltoniana canônica resultante é

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c = & P^\mu \phi_\mu + \frac{1}{4a^2}(\pi^k)^2 + \pi^k(\partial_k \phi_0 - \partial_l F_{kl}) - \frac{1}{2}(\phi_k - \partial_k A_0)^2 + \frac{1}{4}({F_{kl}}^2) \\ & - \frac{a^2}{2}(\partial_k \phi_k - \partial_k \partial_k A_0)^2. \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde $\phi = \dot{A}_\mu$.

Aplicando a relação de consistência ao vínculo Ω_1

$$\dot{\Omega}_1 \equiv \{\Omega_1, \mathcal{H}_c + \lambda_1 \Omega_1\}, \tag{5.41}$$

que pela densidade de hamiltoniana (5.40) gera

$$\Omega_2 = \dot{\Omega}_1 \equiv P^0 - \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{5.42}$$

que é uma nova relação de vínculo.

Incorporando esses vínculos à densidade de hamiltoniana canônica temos a nova densidade de hamiltoniana total

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T = & P^\mu \phi_\mu + \frac{1}{4a^2}(\pi^k)^2 + \pi^k(\partial_k \phi_0 - \partial_l F_{kl}) - \frac{1}{2}(\phi_k - \partial_k A_0)^2 + \frac{1}{4}({F_{kl}}^2) \\ & - \frac{a^2}{2}(\partial_k \phi_k - \partial_k \partial_k A_0)^2 + \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Aplicando a relação de consistência ao vínculo Ω_2, temos

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \dot{\Omega}_2 \equiv \{\Omega_2, \mathcal{H}_T\}, \\ \Omega_3 = \dot{\Omega}_2 \equiv \partial_k P^k \approx 0, \end{aligned} \tag{5.44}$$

Incorporando este vínculo à densidade de hamiltoniana temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T = & P^\mu \phi_\mu + \frac{1}{4a^2}(\pi^k)^2 + \pi^k(\partial_k \phi_0 - \partial_l F_{kl}) - \frac{1}{2}(\phi_k - \partial_k A_0)^2 + \frac{1}{4}({F_{kl}}^2) \\ & - \frac{a^2}{2}(\partial_k \phi_k - \partial_k \partial_k A_0)^2 + \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \lambda_3 \Omega_3, \end{aligned} \tag{5.45}$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange.

Continuando, devemos realizar a evolução temporal do vínculo Ω_3. O resultado obtido é

$$\dot{\Omega}_3 = 0 \tag{5.46}$$

ou seja, não há mais vínculos na teoria.

O conjunto de vínculos encontrados aqui são todos de primeira classe, pois,

$$\{\Omega_i, \Omega_j\} = 0 \quad \forall_{i,j} = 1, 2, 3. \tag{5.47}$$

Agora vamos fazer a análise dos vínculos a partir dos momentos (5.13), ou seja, no espaço-tempo NC. Como já foi dito anteriormente, a densidade de lagrangeana do modelo eletrodinâmico de Podolsky no espaço-tempo NC difere da densidade de lagrangeana (5.2) por possuir derivadas de ordem 3, e um termo que quebra a invariância de calibre perante a transformação $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Analisaremos, pela perspectiva do formalismo de sistemas vinculados, qual é a contribuição desses termos para a invariância de calibre da teoria eletrodinâmica generalizada de Podolsky no espaço-tempo NC.

Para aplicar o formalismo de Dirac vamos partir da densidade de hamiltoniana canônica

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c = &+\rho^\mu \phi_\mu + \frac{\pi_n \pi^n}{a^2}\Big(1 - \theta^{ij}\partial_j A_i\Big) - \pi_n \pi_i \theta^{ij} F^n_j \\
&- \theta^{ij}(F_{\alpha i})\pi_n \partial^\alpha (F^n_j) + \theta^{ij}\pi_n \partial^\alpha (A_i)(\partial_j F^n_\alpha) - \theta^{nj}\pi_n \pi^k F_{kj} - \pi_n \partial^n \phi^0 + \pi_n \partial_i F^{in} \\
&+ \frac{1}{4}(2F^{0k}F_{0k} + F^{kl}F_{kl})(1 - \frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij})\frac{\theta^{ij}}{2}(F_{0i}F_{0k}F^k_j + F^k_i F_{k0}F_{0j} + F_{kl}F^k_i F^l_j) - \frac{a^2}{2}\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^\mu F_{\mu 0} \\
&- \frac{\pi_n \pi^n}{2a^2} - \theta^{ij}\partial_j A_i \pi_n \pi^n + \theta^{ij}\pi_i \pi_n F^n_j + \theta^{ij}\pi_n F_{\alpha i}\partial^\alpha F^m_j + \theta^{ij}\pi_n \partial^\alpha A_i \partial_j F^n_\alpha + \theta^{nj}\pi_n \pi^k F_{kj} \\
&- a^2\theta^{ij}\Big[\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^n(F_{ni}F_{0j} - A_i \partial_j F_{n0}) + \partial_\lambda F^{\lambda n}\partial^\mu (F_{\mu i}F_{nj} - A_i \partial_j F_{\mu n})\Big],
\end{aligned} \tag{5.48}$$

assim, os vínculos que surgirem serão introduzidos na densidade de hamiltoniana (5.48) através dos multiplicadores de Lagrange.

Pela eq. (5.13) temos como vínculo primário, o vínculo oriundo dos momentos canônicos é

$$\Omega_1 = \pi_0 \approx 0 \tag{5.49}$$

que é o primeiro vínculo encontrado.

Com o objetivo de verificar se há novos vínculos na teoria devemos, seguindo o formalismo de Dirac, realizar a evolução temporal desse vínculo. Logo, utilizaremos os parênteses fundamentais de Poisson para uma teoria de ordem superior, ou seja,

$$\begin{aligned}
\{A^\mu(x), \rho_\nu(y)\} &= \delta^\mu_\nu \delta^3(x - y), \\
\{\phi^\mu(x), \pi_\nu(y)\} &= \delta^\mu_\nu \delta^3(x - y).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Antes, porém, devemos acrescentar esse vínculo à densidade de hamiltoniana canônica (5.48), obtendo assim a densidade de hamiltoniana total,

$$\mathcal{H}_T = \rho^\mu\phi_\mu - \frac{(\pi^n)^2}{2a^2}(1-\theta^{ij}\partial_j A_i) - \pi_n\partial^n\dot{A}^0 + \pi_n\partial_i F^{in}$$
$$+ \frac{1}{4}(2F^{0k}F_{0k} + F^{kl}F_{kl})(1-\frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij}) + \frac{\theta^{ij}}{2}(F_{0i}F_{0k}F_j^k + F_i^kF_{k0}F_{0j} + F_{kl}F_i^kF_j^l)$$
$$- \frac{a^2}{2}(\partial_k\phi_k - \partial_k\partial_k A_0)^2 - a^2\theta^{ij}[\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^n(F_{ni}F_{0j} - A_i\partial_j F_{n0})] + \frac{\theta^{ij}\pi^n}{a^2}[\pi_i F_{nj} - A_i\partial_j\pi_n]$$
$$+ \theta^{ij}\pi^n[F_{\mu i}\partial^\mu F_{nj} - \partial^\mu A_i\partial_j F_{\mu n}] + \lambda_1\Omega_1. \tag{5.51}$$

O próximo passo é realizar a evolução temporal do vínculo Ω_1, ou seja,

$$\dot{\Omega}_1 = \int d^4x\{\Omega_1, H_T\}, \tag{5.52}$$

que, usando a eq. (5.51), obtemos

$$\Omega_2 = \dot{\Omega}_1 = \rho^0 - \partial_n\pi^n \approx 0, \tag{5.53}$$

que é um novo vínculo da teoria.

É importante perceber que esse vínculo possui a mesma forma do caso comutativo, mas as contribuições da não-comutatividade se encontram dentro dos termos ρ_0 e π^n pelas eqs. (5.13). Introduzindo este novo vínculo à densidade de hamiltoniana canônica temos

$$\mathcal{H}_T = \rho^\mu\phi_\mu - \frac{(\pi^n)^2}{2a^2}(1-\theta^{ij}\partial_j A_i) - \pi_n\partial^n\dot{A}^0 + \pi_n\partial_i F^{in}$$
$$+ \frac{1}{4}(2F^{0k}F_{0k} + F^{kl}F_{kl})(1-\frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij}) + \frac{\theta^{ij}}{2}(F_{0i}F_{0k}F_j^k + F_i^kF_{k0}F_{0j} + F_{kl}F_i^kF_j^l)$$
$$- \frac{a^2}{2}(\partial_k\phi_k - \partial_k\partial_k A_0)^2 - a^2\theta^{ij}[\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^n(F_{ni}F_{0j} - A_i\partial_j F_{n0})] + \frac{\theta^{ij}\pi^n}{a^2}[\pi_i F_{nj} - A_i\partial_j\pi_n]$$
$$+ \theta^{ij}\pi^n[F_{\mu i}\partial^\mu F_{nj} - \partial^\mu A_i\partial_j F_{\mu n}] + \lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2. \tag{5.54}$$

Dando prosseguimento ao formalismo de Dirac devemos agora verificar se há novos vínculos realizando a evolução temporal do vínculo Ω_2, assim,

$$\dot{\Omega}_2 = \int d^4x\{\Omega_2, H_T\}, \tag{5.55}$$

o que nos leva ao novo vínculo,

$$\Omega_3 \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\rho} \approx 0. \tag{5.56}$$

Realizando a evolução temporal desse vínculo encontramos a expressão

$$\dot{\Omega}_3 = a^2\theta^{ij}[-\partial^n(\partial_i\partial_m F^{m0})\partial_j F_{n0} + \partial_i\partial_m F^{m0}\partial_j\partial^n F_{n0}] - \theta^{ij}\partial^m(\partial_i\pi^n\partial_j F_{mn}), \tag{5.57}$$

que não caracteriza um vínculo pois, não é uma relação entre coordenandas e momentos. Portanto, temos três vínculo na teoria, todos de primeira classe

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\equiv \pi^0 \approx 0,\\
\Omega_2 &\equiv \rho^0 - \partial_n\pi^n \approx 0,\\
\Omega_3 &\equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\rho} \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

onde

$$\{\Omega_i, \Omega_j\} = 0 \quad \forall_{i,j} = 1,2,3. \tag{5.59}$$

e a hamiltoniana total resultante fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T = {} & \rho^\mu\phi_\mu - \frac{(\pi^n)^2}{2a^2}(1-\theta^{ij}\partial_j A_i) - \pi_n\partial^n\dot{A}^0 + \pi_n\partial_i F^{in}\\
& + \frac{1}{4}\Big(2F^{0k}F_{0k} + F^{kl}F_{kl}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\theta^{ij}F_{ij}\Big) + \frac{\theta^{ij}}{2}\Big(F_{0i}F_{0k}F^k_j + F^k_i F_{k0}F_{0j} + F_{kl}F^k_i F^l_j\Big)\\
& - \frac{a^2}{2}\Big(\partial_k\phi_k - \partial^2_k A_0\Big)^2 - a^2\theta^{ij}\Big[\partial_\lambda F^{\lambda 0}\partial^n(F_{ni}F_{0j} - A_i\partial_j F_{n0})\Big] + \frac{\theta^{ij}\pi^n}{a^2}\Big[\pi_i F_{nj} - A_i\partial_j\pi_n\Big]\\
& + \theta^{ij}\pi^n\Big[F_{\mu i}\partial^\mu F_{nj} - \partial^\mu A_i\partial_j F_{\mu n}\Big] + \lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 + \lambda_3\Omega_3.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Uma teoria que só possui vínculos de primeira classe é uma teoria que possui invariância por transformações de calibre. Adiante iremos discutir essas simetrias. Além disso, para realizarmos a quantização de Dirac, como só possuímos vínculos de primeira classe, devemos realizar a fixação de calibre a fim de fixar os graus de liberdade. Para tanto, vamos fixar os calibres

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\equiv \phi_0 \approx 0,\\
\Sigma_2 &\equiv (1+\Box)\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \approx 0,\\
\Sigma_3 &\equiv A_0 \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Ao realizar a fixação de calibre, a teoria passa a ser de segunda classe e os parênteses de Poisson entre os vínculos não é mais nulo, assim,

$$\begin{aligned}
\{\Sigma_1(x), \Omega_2(y)\} &= \delta^{(3)}(x-y),\\
\{\Sigma_2(x), \Omega_3(y)\} &= (1 - 2a^2\nabla^2)\nabla^2\delta^{(3)}(x-y),\\
\{\Sigma_3(x), \Omega_1(y)\} &= \delta^{(3)}(x-y).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Agora podemos obter os colchetes de Dirac da eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC, assim

$$
\begin{aligned}
\{A^0(x), \rho_i(y)\}_{DB} &= 0, \\
\{\phi^i(x), \rho_o(y)\}_{DB} &= 0, \\
\{A^0(x), \pi_i(y)\}_{DB} &= 0, \\
\{\phi^i(x), \pi_0(y)\}_{DB} &= 0, \\
\{A^i(x), \rho_k(y)\}_{DB} &= \delta^i_k \delta^{(3)}(x-y) - (1 - 2a^2\nabla^2) \times \partial_z \partial^i G(x-y), \\
\{\phi^i(x), \rho_k(y)\}_{DB} &= \delta^i_k \delta^{(3)}(x-y).
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

Cabe aqui uma digressão sobre o que foi apresentado nessa seção. A teoria de Podoslky no espaço de fase comutativo é uma teoria de primeira classe, ou seja, possui invariância por transformações de calibre. Na seção anterior desenvolvemos um estudo detalhado sobre a eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC e vimos que há um termo na lagrangeana (5.3) que quebra a invariância de calibre usual, sendo assim, a langrangeana (5.3) não é invariante pelas transformações de calibre usuais $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$.

No entanto, pelo que foi exposto acima, encontramos que a eletrodinâmica do Podolsky no espaço-tempo NC, só possui vínculos de primeira classe. Como vínculo de primeira classe é gerador de simetrias, devemos encontrar as simetrias geradas por esses vínculos. O espaço de fase é dado por

$$
\{A_0, A_i, \rho_0, \rho_i, \phi_0, \phi_i, \pi_0, \pi_i\}. \tag{5.64}
$$

Assim, as transformações de calibre para a eletrodinâmica do Podolsky no espaço-tempo NC são

$$
\begin{aligned}
\delta A_0 &= \epsilon\{A_0(x), \rho_0(y)\} = \epsilon\delta^3(x-y), \\
\delta A_i &= \epsilon\{\dot{A}_i(x), -\partial_j \rho_j(y)\} = -\epsilon\partial_i \delta^3(x-y), \\
\delta \phi_o &= \epsilon\{\dot{A}_0(x), \pi_0(y)\} = \epsilon\delta^3(x-y), \\
\delta \phi_i &= \epsilon\{\dot{A}_i(x), \partial_j \pi_j(y)\} = +\epsilon\partial_i \delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

o que pode ser facilmente verificado substituindo essas transformações na variação da eq. (5.3). Portanto, o que fizemos quando usamos o método de Noether, foi descobrir uma ação dual por simetria à eq. (5.3)

5.5 Formalismo simplético aplicado à eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo não-comutativo

Na seção anterior realizamos a quantização da teoria eletrodinâmica de Podolsky no espaço-tempo NC pelo formalismo canônico de Dirac. Nesta seção, iremos realizar a quantização via formulação simplética [33], onde os parênteses de Dirac (5.63) serão obtidos de uma maneira geométrica como foi discutido na seção (2.2) .

Como a lagrangeana (5.3) possui termos de ordem superior, devemos seguir a aproximação de Ostrogradski [52, 53, 54] para lidarmos com esses termos. Logo, introduzimos um novo par canônico

$$(\Gamma^\mu, \ddot{A}^\mu), \tag{5.66}$$

que juntamente com os pares canônicos

$$\begin{aligned} &(P^\mu, A^\mu), \\ &(\pi^\mu, \dot{A}^\mu), \end{aligned} \tag{5.67}$$

podemos reescrever a lagrangeana (5.3) em primeira ordem

$$\mathcal{L} = +\pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu - \nu^{(0)}, \tag{5.68}$$

onde $\nu^{(0)}$ é o potencial simplético e os momentos canônicos são dados pela eq. (5.13).

Pelas eqs. (5.68) e (5.3) podemos escrever o potencial simplético como

$$\begin{aligned} \nu^{(0)} = &+\rho_\mu \Gamma^\mu - \frac{1}{2a^2}\vec{\pi}^2(1-\theta^{ij}\partial_j A_i) - a^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Gamma} - \nabla^2 A_0)^2 - \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\Gamma_0 \\ &+ \left[1 - \vec{\theta}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]\left[\frac{1}{2}(\vec{\Gamma} - \nabla A_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right] \\ &- (\vec{\theta}\cdot\vec{\Gamma} - \vec{\theta}\cdot\nabla A_0)\Big[(\vec{\Gamma}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \nabla A_0(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\Big] \\ &+ a^2\theta^{ij}\Big[\Box A^0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Gamma}\partial^n(\epsilon_{nik}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^k(\Gamma_j - \partial_j A_0) - A_i\partial_j(-\Gamma_n + \partial_n A_0)\Big] \\ &- \theta^{ij}\pi^n\pi_i\epsilon_{njk}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^k - \theta^{ij}\pi^n\Big[(\Gamma_i - \partial_i A_0)(\partial_n\Gamma_j - \partial_j\Gamma_n) \\ &+ (\epsilon_{kil}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^l)\partial^k((\epsilon_{njm}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^m))\Big] \\ &+ \theta^{ij}\pi^n\Big[\Gamma_i\partial_j(\Gamma_n - \partial_n A_0) + \partial^m A_i\partial_j(\epsilon_{mnk}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^k)\Big] + \theta^{ij}\pi^n A_i\partial_j\pi_n, \end{aligned} \tag{5.69}$$

e, pela lagrangeana (5.68), temos que as variáveis simpléticas originais são dadas por

$$\zeta_\alpha^{(0)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \Gamma_0), \tag{5.70}$$

onde omitimos termo π_0 pois ele não aparece na lagrangeana (5.68). Podemos então identificar, pela lagrangeana (5.68), as formas canônicas não nulas como

$$^{A}a_k^{(0)} = -\rho_k; \quad ^{A_0}a^{(0)} = \rho_0; \quad ^{\Gamma}a_k^{(0)} = -\pi_k. \tag{5.71}$$

Seguindo o formalismo simplético, precisamos calcular a matriz $f_{ab}(x, y)$. Pelas relações anteriores, encontramos

$$f_{ab}(x,y) = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0_{4\times 3} \\ 0_{3\times 4} & B_{ij}, \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

onde

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É facil perceber que a matriz (5.72) é singular. Assim, o próximo passo é identificar o autovetor com autovalor nulo, que é facilmente identificado como

$$\nu_\alpha = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \nu^7). \tag{5.73}$$

onde ν^7 é arbitrário e associado à Γ.

Aplicando a relação de consistência, a fim de encontrar vínculos para a teoria, temos

$$\int dxdy \left((\nu^7 \frac{\delta\nu^{(0)}(y)}{\delta\Gamma_0(x)} \right), \tag{5.74}$$

o que nos permite obter

$$\int dx\nu^7(\rho_0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}) = 0, \tag{5.75}$$

que é claramente um vínculo que denotaremos por

$$\Omega_1(x) \equiv \rho_0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi} \approx 0, \tag{5.76}$$

onde

$$\begin{aligned} \pi^n =& a^2\partial_\alpha F^{\alpha n} + a^2\theta^{ij}\partial^\alpha(F_{\alpha i}F_j^n - A_i\partial_j F_\alpha^n) + a^2\theta^{nj}(\partial_\alpha F^{\alpha k})F_{kj} + a^2\theta^{ij}\partial_j(A_i\partial_\alpha F^{\alpha n}), \\ \rho^0 =& a^2\partial_n(\partial_\alpha F^{\alpha n}) + a^2\theta^{ij}\partial_n\partial^\alpha(F_{\alpha i}F_j^n - A_i\partial_j F_\alpha^n) + a^2\theta^{nj}\partial_n(\partial_\alpha F^{\alpha k}F_{kj}) \\ &+ a^2\theta^{ij}\partial_n(\partial_j(A_i\partial_\alpha F^{\alpha n})). \end{aligned} \tag{5.77}$$

É importante perceber que o primeiro vínculo que surge, eq. (5.76), é um vínculo gerado pela relação de consistência (5.74). No formalismo simplético, os vínculos que no formalismo canônico surgem diretamente das relações dos momentos canônicos, neste caso

$\pi_0 \approx 0$, não são considerados vínculos verdadeiros, por isso, ele não aparece aqui.

Seguindo o procedimento de Faddev-Jackiw devemos introduzir este vínculo na lagrangeana (5.68) por meio de um multiplicador de Lagrange λ, ou seja,

$$\mathcal{L} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}(\rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) - \nu^{(1)}, \tag{5.78}$$

e as novas variáveis simpléticas, pela eq. (5.78), são

$$\zeta_\alpha^{(1)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \lambda). \tag{5.79}$$

O novo potencial simplético é obtido pela relação

$$\nu^{(1)} = \nu^{(0)}\big|_{\Omega_1(x)=0}, \tag{5.80}$$

assim, pela eq. (5.69),

$$\begin{aligned}
\nu^{(1)} &= \rho_n \Gamma^n - \frac{1}{2a^2}\vec{\pi}^2(1 - \theta^{ij}\partial_j A_i) - \frac{a^2}{2}(\nabla\vec{\Gamma} - \nabla^2 A_0)^2 - \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&+ (1 - \vec{\theta} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}))\left[\frac{1}{2}(\vec{\Gamma} - \nabla A_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})\right] - (\vec{\theta} \cdot \vec{\Gamma} - \vec{\theta}\nabla A_0)(\vec{\Gamma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&- \nabla A_0(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2) + a^2\theta^{ij}\Big[\Box A^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}\partial^n(\epsilon_{nik}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^k(\Gamma_j - \partial_j A_0) - A_i\partial_j(-\Gamma_n + \partial_n A_0)\Big] \\
&- \theta^{ij}\pi^n\pi_i\epsilon_{njk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^k - \theta^{ij}\pi^n\Big[(\Gamma_i - \partial_i A_0)(\partial_n\Gamma_j - \partial_j\Gamma_n) \\
&+ (\epsilon_{kil}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^l)\partial^k((\epsilon_{njm}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^m))\Big] + \theta^{ij}\pi^n\Big[\Gamma_i\partial_j(\Gamma_n - \partial_n A_0) \\
&+ \partial^m A_i\partial_j(\epsilon_{mnk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^k)\Big] + \theta^{ij}\pi^n A_i\partial_j\pi_n,
\end{aligned} \tag{5.81}$$

e, consequentemente, os novos vetores são então dados por

$$^{A}a_k^{(1)} = -\rho_k; \quad ^{A_0}a^{(1)} = \rho_0; \quad ^{\Gamma}a_k^{(1)} = -\pi_k; \qquad ^{\lambda}a^{(1)} = \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}. \tag{5.82}$$

A nova matriz $f_{ab}(x, y)$, pelas eqs. (5.82), fica

$$f_{ab}(x, y) = \begin{bmatrix} A_{ij} & D_j \\ -D_j^t & C_{ij} \end{bmatrix},$$

onde

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & -\partial_j \\ 0 & -\partial_j & 0 \end{bmatrix}.$$

que, assim como a matriz (5.72), é uma matriz singular.

A partir da matriz anterior, podemos identificar os modo-zeros que possuem autovalores não nulos como

$$\bar{\nu}_\alpha = (0, 0, \bar{\nu}^3, 0, \bar{\nu}_i^5, 0, \bar{\nu}^7). \tag{5.83}$$

Logo, aplicando a relação de consistência, com o objetivo de obter novas relações de vínculo, temos

$$\int dx \left[\bar{\nu}^3 \frac{\delta}{\delta A_0(x)} + \bar{\nu}_i^5 \frac{\delta}{\delta \Gamma^i(x)} \right] \int dy \nu^{(1)}(y), \tag{5.84}$$

o que nos leva a

$$\int dx \bar{\nu}^3 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho})(x) = 0, \tag{5.85}$$

onde utilizou-se $\bar{\nu}_i^5 - \partial_i \bar{\nu}^3 = 0$. Ou seja, o novo vínculo gerado é

$$\bar{\Omega}_2 \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho})(x) = 0, \tag{5.86}$$

que é a mesma relação de vínculo obtida no caso da quantização canônica, eq. (5.56).

Continuando, devemos introduzir esse novo vínculo à lagrangeana através de um novo multiplicador de Lagrange, ou seja,

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}(\rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \dot{\eta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho}) - \nu^{(2)}, \tag{5.87}$$

onde

$$\nu^{(2)} = \nu^{(1)}\big|_{\bar{\Omega}_2(x)=0}. \tag{5.88}$$

As relações anteriores nos levam aos vetores

$$^{A}a_k^{(2)} = -\rho_k; \quad ^{A_0}a^{(2)} = \rho_0; \quad ^{\Gamma}a_k^{(2)} = -\pi_k \quad ^{\lambda}a^{(2)} = \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}; \quad ^{\eta}a^{(2)} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\rho}, \tag{5.89}$$

e às variáveis simpléticas

$$\zeta_\alpha^{(0)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \lambda, \eta). \tag{5.90}$$

Agora devemos escrever a nova matriz simplética, $f_{ab}^{(2)}(x,y)$, para analisar se tal matriz é singular ou não e assim identificar os parênteses de Dirac. A matriz $f_{ab}^{(2)}(x,y)$ resultante é

$$f_{ab}^{(2)}(x,y) = \begin{bmatrix} A_{ij} & E_{j,x} \\ -E_{i,y}^t & F_{ij} \end{bmatrix},$$

onde

$$E_{j,x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & -\partial_j & 0 \\ 0 & -\partial_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que também é uma matriz singular, ou seja, não possui inversa, assim não podemos identificar diretamente os parênteses de Dirac da teoria.

Identificando os modos zero, agora temos dois $(\bar{\nu}_\alpha)$ e (ν_α), obtemos

$$\bar{\nu}_\alpha = (\nu_i^{(1)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \nu_i^{(8)}), \tag{5.91}$$

e

$$\nu_\alpha = (0, 0, \nu_i^{(3)}, 0, \nu_i^{(5)}, 0, \nu_i^{(7)}, 0). \tag{5.92}$$

O próximo passo é aplicar a relação de consistência à procura de novos vínculos. Porém, a relação ν_α gera novamente o vínculo $\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0$. Consequentemente, a relação de consistência não gera novos vínculos e a matriz continua singular e, portanto, conforme o método simplético, o modelo apresenta uma simetria e o gerador da simetria é o respectivo modo-zero.

O próximo passo é realizar a fixação de calibre, ou seja, deve-se fixar os graus de liberdade de calibre. Assim como no caso comutativo, iremos escolher o calibre de Coulomb generalizado

$$\begin{aligned}(1 + \Box a^2)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= 0,\\ A_0 &= 0,\end{aligned} \tag{5.93}$$

o que nos leva a nova lagrangeana

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}(\rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \dot{\eta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho}) + \dot{\chi}(1 - a^2 \Box^2 \nabla^2) \nabla \cdot \vec{A} - \nu^{(3)}, \tag{5.94}$$

onde ν^3 é dado por

$$\begin{aligned}\nu^{(3)} = &\ \rho_n \Gamma^n - \frac{1}{2}\vec{\Gamma}^2 - \frac{a^2}{2}(\nabla\vec{\Gamma})^2 - \frac{1}{2a^2}\vec{\pi}^2(1 - \theta^{ij}\partial_j A_i) - \vec{\pi} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{A}))]\\ &+ \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \vec{\theta} \cdot (\nabla \times \vec{A})[\frac{1}{2}\vec{\Gamma}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2] - (\vec{\theta} \cdot \vec{\Gamma})[\vec{\Gamma} \cdot (\nabla \times \vec{A})]\\ &- a^2 \theta^{ij}[\partial_m \Gamma^m \partial^n(\epsilon_{nik}(\nabla \times \vec{A})^k(\Gamma_j + A_i \partial_j \Gamma_n)] - \theta^{ij}\pi^n \pi_i(\epsilon_{njk}(\nabla \times \vec{A})^k)\\ &- \theta^{ij}\pi^n[(\Gamma_i)(\partial_n \Gamma_j - \partial_j \Gamma_n) + (\epsilon_{kil}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^l)\partial^k((\epsilon_{njm}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^m))]\\ &+ \theta^{ij}\pi^n \Gamma_i \partial_j \Gamma_n + \theta^{ij}\pi^n \partial^m A_i \partial_j(\epsilon_{mnk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^k) + \theta^{ij}\pi^n A_i \partial_j \pi_n.\end{aligned} \tag{5.95}$$

Assim, a lagrangeana anterior nos permite identificar os vetores

$$\begin{aligned}&{}^{A}a_k^{(3)} = -\rho_k; \quad {}^{A_0}a^{(3)} = \rho_0; \quad {}^{\Gamma}a_k^{(3)} = -\pi_k \quad {}^{\lambda}a^{(3)} = \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi};\\ &{}^{\eta}a^{(3)} = \vec{\nabla}.\vec{\rho}; \quad {}^{\chi}a^{(3)} = \nabla_p^2 \nabla \cdot \vec{A},\end{aligned} \tag{5.96}$$

o que nos leva a terceira matriz simplética

$$f_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_p^2\partial_j^x \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & \partial_i^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \partial_i^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_i^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_p^2\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz anterior é uma matriz não singular, ou seja, podemos determinar, após um árduo trabalho algébrico, a sua inversa, e identificar os parênteses de Dirac da teoria. Assim, os parênteses de Dirac são

$$\begin{aligned} \{A_k(x), \rho^m(y)\}_{DB} &= \delta_k^m \delta(x,y) - \nabla_p^2 \partial_k \partial^m G(x,y) \\ \{\Gamma_k(x), \pi^m(y)\}_{DB} &= \delta_k^m \delta(x,y), \end{aligned} \tag{5.97}$$

identificando $G(x,y)$ como a função de Green

$$\nabla_p^2 \nabla^2 G(x,y) = \delta^{(3)}(x,y), \tag{5.98}$$

e esse resultado está de acordo com o obtido na seção anterior, eqs. (5.63), ou seja, ambos os resultados coincidem, porém, com suas vantagens e desvantagens, principalmente com relação aos cálculos extensos.

Capítulo 6

Conclusão

A teoria eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo NC é um sistema vinculado e não invariante de calibre. Como já foi dito anteriormente, teorias eletrodinâmicas invariantes de calibre são importantes pelo fato do modelo padrão ser desenvolvido a partir de modelos eletrodinâmicos invariantes de calibre. Assim, ao analisarmos a invariância de calibre no espaço-tempo NC, estamos contribuindo para o entendimento da invariância de calibre e de sistemas vinculados na escala de Planck, onde as coordendas do espaço-tempo possuem a relação de incerteza (1.2)

Neste trabalho, a partir dos resultados obtidos em [13], obtivemos a versão invariante de calibre para a eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo NC. Como este modelo constitui um sistema vinculado e, além disso, é um sistema de segunda classe, o método utilizado foi o método GU. Para utilizar o método GU, é necessário que os vínculos possuam o parênteses de Poisson nulos consigo mesmo. Sendo assim, podemos escolher um dos vínculos para ser o gerador de simetrias e o outro vínculo será descartado. A partir daí, contruímos uma hamiltoniana invariante pelas transformações geradas pelo vínculo gerador das simetrias.

Além disso, realizamos a análise da dinâmica do modelo a partir das equações de movimento encontradas. Comparando com os resultados dados pela sua versão não invariante de calibre, surgem novos termos devido a nova hamiltoniana possuir novas contribuições. A partir da hamiltoniana, agora invariante de calibre, realizamos uma transformação de Legendre a fim de encontrar a lagrangeana invariante por trasformações de calibre.

Como o modelo de Proca no espaço-tempo NC possui dois vínculos de segunda classe que satisfazem as condições de aplicação do método GU, realizamos a análise acima para os dois vínculos do sistema. Os resultados forma publicados em [22].

A teoria eletrodinâmica de Podolsky surgiu com o intuito de contornar divergências que aparencem em curtas distâncias na teoria de Maxwell, ou seja, a catástrofe ultravioleta. Isso foi feito acrescentando-se um termo que possui derivadas de ordem superior na lagrangeana. Além disso, o termos possui massa, ou seja, a do campo A_μ. Originalmente, a eletrodinâmica de Pdodolsky é um sistema vinculado de primeira classe. Como é sabido, um sistema de primeira classe possui simetrias onde o gerador dessas simetrias é o próprio vínculo de primeira classe.

Neste trabalho, analisamos as contribuições da NC na teoria eletrodinâmica de Podolsky, ou seja, seu comportamento em pequenas distâncias no espaço-tempo. Para tanto, utilizamos o produto Moyal, até primeira ordem em θ, na lagrangeana (5.1). Com isso as contribuições NC aparecem nos termos em θ. A partir do mapeamento de Seibreg-Witten, fizemos a ligação entre os campos no espaço-tempo NC e os campo no espaço-tempo comutativo.

A partir daí, investigamos o fato da lagrangeana (5.3) deixar de ser invariante perante as transformações usuais do eletromagnetismo, ou seja, $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Como a não-comutatividade não altera os graus de liberdade, espera-se que seja possível encontrar uma lagrangeana dual que seja invariante de calibre. Tal lagrangenana foi determinada através do método de Noether. Para tanto, introduziu-se um campo B_μ que foi determinado em seguida. A trabalho foi publicado em [29]

Em seguida, foi feita a análise dos vínculos da teoria de Podolsky no espaço-tempo NC. Assim como no caso comutativo, os vínculos encontrados são de primeira classe e, consequentemente, o modelo possui simetrias de calibre tendo os vínculos de primeira classe como geradores.

Além disso, determinamos os parênteses de Dirac do modelo de Podolsky no espaço-tempo NC através de dois métodos, primeiramente via formalismo de Dirac e, em seguida, pelo formalismo simplético. Os resultados encontrados pelos dois métodos são equivalentes e uma análise entre os formalismos foi feita.

Acreditamos que esses resultados sejam importantes pois, estamos analisando simetrias de calibre no espaço-tempo NC, ou seja, em curtas distâncias, que é importante para o estudo do universo primordial, além de contribuir para a literatura de sistemas vinculados no espaço-tempo NC.

Bibliografia

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev., v. 71, n. 38, 1947.

[2] N. C. Yang, Phys. Rev., v. 72, n. 874, 1947.

[3] A. Connes, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, v. 290, 1980.

[4] A. Connes, Mathematisches Forschungzentrum Oberwolfach, v. 42, 1981.

[5] A. Connes, C. R. Acad. Sci. Paris, v. 296, 1983.

[6] B. S. DeWitt, Phys. Rev., v. 160, n. 1113, 1967.

[7] B. S. DeWitt, Phys. Rev., v. 162, n. 1195, 1967.

[8] B. S. DeWitt, Phys. Rev., v. 162, n. 1239, 1967.

[9] V. Schomerus, JHEP v. 032, p. 9909, 1999.

[10] E. Witten e N. Seiberg, JHEP, v. 030, n. 9906, 1999.

[11] S. I. Kruglov, Annales de la Fondation Louis de Broglie, v. 27, p. 343-358, 2002.

[12] O. F. Dayi, Phys.Lett. B, v. 560 p. 239-244, 2003

[13] F. Darabi e F. Naderi, Int. J. Theor. Phys., v. 50, p. 3432-3441, 2011.

[14] See. P. Haves, Gen. Relativ. Gravit., v. 8, n. 631, 1971. R. Utiyama and B. S. DeWitt, J. Math. Phys., v. 3, n. 608, 1962. E. E. Fradkin and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys., v. 201, n. 469, 1982.

[15] K. S. Stelle, Phys. Rev. D, v.16, n. 953, 1977; P. West, Nucl. Phys. B268, n. 113, 1986.

[16] B. Podolsky, Phys. Rev., v. 62, n. 68, 1942.

[17] B. Podolsky and C. Kikuchy, , Phys. Rev., v. 65, n. 228, 1944.

[18] B. Podolsky, P. Schwed, Rev. Mod. Phys., v. 20 n. 40, 1948.

[19] J. Ananias Neto, Braz. J. Phys., v. 37, n. 1106, 2000.

[20] A. S. Vytheeswaran, Int. J. Mod. Phys. A, v. 13, n. 765, 1998.

[21] A. Derigalzov, Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism (Springer, 2010).

[22] E. M. C. Abreu, J. A. Neto, R. L. Fernandes e A. C. Mendes, International Journal of Modern Physics A, v. 31, n. 26, 2016.

[23] E. M. C. Abreu, R. Banerjee e C. Wotzasek, Nucl. Phys. B, v. 509, n. 519, 1998.

[24] E. M. C. Abreu, R. Menezes e C. Wotzasek, Phys. Rev. D, v. 71, n. 065004. 2005.

[25] R. Banerjee e C. Wotzasek, Nucl. Phys. B, v. 527, n. 402 1998.

[26] A. Ilha e C. Wotzasek, Phys. Lett. B, v. 519, n. 169, 2001; E. M. C. Abreu, Phys. Lett. B, v. 704, n. 322, 2011.

[27] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro e C. Wotzasek, Phys. Lett., v. 504, n. 268, 2001.

[28] D. Bazeia, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro e C. Wotzasek, Phys. Lett. B, v. 510, n. 329, 2001.

[29] E. M. C. Abreu, R. L. Fernandes, J. A. Neto, A. C. Mendes e M. J. Neves, Modern Physics Letter A, v. 32, n. 3, 2017.

[30] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, International Journal of Modern Physics A, v.7, n. 20, 1992.

[31] J.E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 45, n. 99, 1949.

[32] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, p. 87, 1964.

[33] L. Faddeev, R. Jackiw, Phys. Rev. Lett., v. 60, 1988.

[34] I A Batalin and E S Fradkin. Phys. Lett. B, v. 180, n. 157, 1986; Nucl. Phys. B, v.279, n. 514, 1987; I A Batalin and I V Tyutin, Int J Mod Phys A, v. 6 n. 3255, 1991.

[35] L D Faddeev and S L Shatashvili. Phys. Lett., v. 167, n. 225, 1986.

[36] Richard J. Szabo, Physics Reports, v. 378, 2003

[37] S. Deser, R. Jackiw e Templeton, Ann. Phys. v. 140, n. 372, 1982.

[38] P. H. Damgaard, H. B. Nielsen and R. Scollacher, Nucl. Phys. B, v. 385, n. 227, 1992.

[39] P. H. Damgaard, H. B. Nielsen and R. Scollacher, Phys. Lett. B, v. 296, n. 132, 1992.

[40] P. H. Damgaard, H. B. Nielsen and R. Scollacher, Nucl. Phys. B, v. 414, n. 541, 1994.

[41] P. H. Damgaard, H. B. Nielsen and R. Scollacher, Phys. Lett. B, v. 332, n. 131, 1994.

[42] P. H. Damgaard and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. B, v. 433, n. 671, 1995.

[43] M. Luscher, Nucl. Phys. B, v. 326, n. 557, 1989.

[44] 32. E. C. Marino, Phys. Lett. B, v. 263, n. 63, 1991.

[45] A. Ilha e C. Wotzasek, Nucl. Phys. B, v. 604, n. 426, 2001.

[46] J. Barcelos Neto e N. R. F. Braga, Acta physica polonica B, v. 20, n. 3, 1988.

[47] N. Banerjee and R. Banerjee, Mod. Phys. Lett. A, v. 11, n. 1919, 1996.

[48] R. Bufalo e B. M. Pimentel, Revista de ciências, v. 3, n. 1, 2013.

[49] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, Mechanics, 3ª edição, Nauka, ed. Reed educational and professional publishing ltd, 1976, p.138-140.

[50] O. Aharony, J. Gomis and T. Mehen, JHEP, v. 023, n. 0009, 2000.

[51] J. Gomis and T. Mehen, Nucl. Phys. B, v. 591, n. 265, 2000.

[52] M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersburg VI, v. 4, n. 385, 1850.

[53] R. Weiss, Proc. R. Soc. A, v. 169, n. 102, 1938.

[54] J. S. Chang, Proc. Camb. Philos. Soc., v. 44, n. 76, 1948.