

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Luiz Fernando Vianna Faulhaber Ferreira

Mecânica dos Fluidos como um Sistema Vinculado

Juiz de Fora
2014

Luiz Fernando Vianna Faulhaber Ferreira

Mecânica dos Fluidos como um Sistema Vinculado

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFJF,
como requisito para a obtenção parcial do grau de
MESTRE em Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

UFJF

Co-orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira

UFJF

Juiz de Fora

2014

Aos meus pais

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo em Dinâmica de Fluidos, em que foram discutidas as equações básicas como por exemplo a equação de Navier-Stokes e a equação da continuidade em suas formas diferenciais tradicionais. Apresentamos também uma analogia destas equações com as equações de Maxwell do eletromagnetismo. E tendo em vista esta analogia, as equações da dinâmica dos fluidos foram escritas em uma forma linear, análoga à forma das equações de Maxwell. Com isso podemos obter uma formulação Lagrangiana e Hamiltoniana, o que permite estudar o sistema como um sistema vinculado aplicando então métodos de teoria quântica de campos. Inicialmente para o caso de um fluido incompressível usamos o método simplético para a obtenção dos comutadores. Por fim, apresentamos uma extensão da analogia entre fluidos incompressíveis e as equações de Maxwell, tratando agora de um fluido compressível. No caso de um fluido compressível fizemos o tratamento através do uso do calibre de Lorentz para proceder a quebra da simetria do modelo. E com isso obtemos os comutadores através dos parênteses de Poisson.

Palavras-chaves: Teoria de Calibre, Mecânica de Fluidos.

Abstract

In this dissertation was showed a study in fluids dynamic, where it was discussed the basic equations of fluids, for example, the Navier-Stokes equations and the continuity equations in differentials form and in the tensorial form. It was also presented an analogy between Maxwell equations and fluids equations. This analogy allows writing the equations of fluids in a linear form as the electromagnetism equations. Thus, using this analogy one can do a Lagrangian and a Hamiltonian formulation for fluids. Treating this system as constrained system and applying quantum field theory methods in the study of fluids dynamic. We first use a symplectic method to obtain the commutators for a compressible fluid. In this case, the commutators were obtained using the Lorentz gauge to broken the gauge symmetry.

Keywords: Gauge Theory, Fluid Mechanics.

Agradecimentos

A todos os meus parentes, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Alber Carlo pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Departamento de Física pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 6 |
| 2 | Mecânica dos fluidos | 7 |
| 2.1 | Elementos de Mecânica dos fluidos | 7 |
| 2.1.1 | Equação Diferencial da Continuidade | 7 |
| 2.1.2 | Equação Diferencial do Momentum. | 9 |
| 2.1.3 | Equação de Navier-Stokes. | 12 |
| 2.1.4 | Equações da Vorticidade. | 14 |
| 3 | Dinâmica Metafluida como um Sistema Vinculado | 16 |
| 3.1 | Dinâmica Metafluida | 16 |
| 3.2 | Novos conceitos e Equações | 17 |
| 3.3 | As equações da Dinâmica Metafluida | 22 |
| 3.4 | Abordagem Lagrangiana da Dinâmica Metafluida | 26 |
| 3.5 | Análise Simplética | 31 |
| 4 | Fluidos Compressíveis como um Sistema Vinculado | 36 |
| 4.1 | Analogia com as Equações de Maxwell | 39 |
| 4.2 | Formulação Lagrangiana | 40 |
| 5 | Conclusão | 45 |
| A | Sistemas Vinculados | 46 |
| A.1 | Formalismo simplético | 47 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| B | Elementos de Análise Tensorial Cartesiana | 50 |
| B.1 | Elementos da Análise Tensorial | 50 |
| B.1.1 | Vetores | 50 |
| B.1.2 | Tensores Cartesianos | 52 |
| B.1.3 | Operações Vetoriais | 53 |
| C | Equações na Forma Tensorial | 59 |
| C.1 | Equações da Dinâmica de Fluidos | 59 |
| C.1.1 | Equação da Continuidade | 59 |
| C.1.2 | Equação de Euler sem Forças Externas | 60 |
| C.1.3 | A Equação de Navier-Stokes | 62 |
| | Referências Bibliográficas | 68 |

1 Introdução

As Teorias de Gauge, também chamadas de Teorias de Calibre, representam uma classe de teorias baseadas na idéia de que as transformações de simetria podem ser locais ou globais. Essa idéia aplica-se não somente às teorias de campo, mas aos sistemas de dimensão finita, como alguns descritos por equações diferenciais ordinárias. Muitas teorias são descritas por Lagrangianas que são invariantes sob determinados grupos de transformações de simetria. A quantização dessas teorias necessita de cuidados especiais pois, devido a presença de simetrias de calibre, existem graus de liberdade supérfluos, os quais devem ser eliminados (antes ou depois) da implementação de um processo de quantização válido.

O nosso objetivo é investigar as simetrias em modelos para fluidos. Em um primeiro momento, devido a uma analogia com o eletromagnetismo de Maxwell, estudaremos a Dinâmica Metafluida (DM) como um sistema vinculado (simetria de calibre). Com objetivo de determinar a dinâmica do modelo, aplicaremos o método simplético para sistemas vinculados invariantes de calibre, obtendo-se os parênteses de Dirac do modelo. Contudo primeiramente iremos expor a DM.

Em um segundo momento, mostraremos como podemos formular as equações tipo-Maxwell para o caso de fluidos compressíveis. Permitindo o tratamento do modelo como um sistema vinculado. Ao estudarmos a dinâmica utilizaremos o calibre de Lorentz para quebrar a simetria do modelo.

2 Mecânica dos fluidos

Neste capítulo iremos apresentar as principais equações da dinâmica de fluidos na sua forma diferencial tradicional. Iniciaremos apresentando a equação diferencial da continuidade e logo depois a equação do momentum. E com a inclusão dos efeitos da viscosidade as equações de Navier-Stokes e a equação da vorticidade.

2.1 Elementos de Mecânica dos fluidos

As equações que descrevem a mecânica de fluidos são equações diferenciais parciais. Essas equações exigem condições que especificam certos valores para as variáveis dependentes em valores dados pelas variáveis independentes. Se a variável independente é o tempo, as condições são chamadas *condições iniciais*; se a variável independente é uma coordenada espacial, as condições são *condições de contorno*. O problema total é dito *problema de valor inicial* ou um *problema de valor de contorno*.

2.1.1 Equação Diferencial da Continuidade

Começaremos nossa procura das equações diferenciais parciais que representam o movimento de um fluido, aplicando a conservação da massa a um pequeno volume em escoamento. Consideremos o fluxo de massa através de cada face do volume de controle infinitesimal fixado. Estabelecemos que o fluxo líquido de massa que entrou no elemento de volume é igual á taxa de variação da massa do elemento, isto é,

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} m_{elemento}. \quad (2.1)$$

Para realizarmos este balanço de massa, identificamos as quantidades ρv_x , ρv_y e ρv_z no centro do elemento e as tratamos como variáveis simples. Tomando a função ρv no ponto $(x - \frac{dx}{2}, dy, dz)$ a eq.(2.1) toma a forma

$$\begin{aligned}
& \left[\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz - \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz + \\
& \left[\rho v_y - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz + \\
& \left[\rho v_z - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy - \left[\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \quad . \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Segue-se da eq.(2.2) que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

de onde

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3)$$

Como a densidade ρ é considerada uma variável, então

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.4)$$

ou, em termos da chamada derivada substantiva (B.35)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Esta equação é chamada *equação diferencial da continuidade*.

Podemos introduzir o *operador gradiente*, chamado *nabla*, o qual, em coordenadas cartesianas, tem a forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}. \quad (2.6)$$

A equação da continuidade pode então ser escrita na forma

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.7)$$

onde $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ e $\nabla \cdot \vec{v}$ é chamado da divergência da velocidade.

Para o caso de fluxos incompressíveis, um fluxo no qual a densidade de uma partícula não muda à medida que ela movimentada-se no fluido, temos que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

Fluxos incompressíveis que têm gradientes de densidade são algumas vezes chamados de *fluxos estratificados*; fluxos atmosféricos e oceânicos são exemplos de fluxos estratificados. Usando a eq.(2.8) na equação da continuidade, para um fluxo incompressível temos que:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.9)$$

Isso significa que a divergência do vetor velocidade é zero para um fluido incompressível.

2.1.2 Equação Diferencial do Momentum.

Suponhamos que o campo de velocidade ou o campo de pressão em um fluxo incompressível ¹ não sejam conhecidos e desejamos resolver as equações diferenciais que nos darão as informações desejadas. A equação diferencial da continuidade é uma equação que nos ajuda para este fim; entretanto, ela tem três quantidades não conhecidas, a saber, as três componentes da velocidade. A equação diferencial do momentum é uma equação vetorial, o que equivale a três equações escalares. Estas equações nos auxiliarão em nossa tentativa para determinar os campos de velocidade e pressão. Existe uma dificuldade na obtenção dessas equações, já que devemos usar as componentes da tensão para determinar as forças exigidas na equação do momentum. Vamos identificar as componentes da tensão.

Existem nove componentes da tensão que atuam em um dado ponto em um escoamento. Isto quer dizer que a tensão na realidade é um tensor de nove componentes, que indicaremos por τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Relacionaremos as nove componentes da tensão com os campos de velocidade e pressão por meio de equações apropriadas. As componentes da tensão atuam na direção positiva em uma face positiva (um vetor normal aponta na direção das coordenadas positivas) e na direção negativa em uma face negativa (um vetor normal aponta na direção das coordenadas negativas). O primeiro subscrito em uma componente da tensão indica a face a qual a componente da tensão atua, e o segundo subscrito indica a direção em que uma componente atua; a componente τ_{xy} atua na direção y positiva sobre uma x -face positiva e na direção y negativa sobre uma x -face negativa. Uma componente que atua perpendicular a uma face é dita uma *tensão normal*;

¹Em uma discussão geral, tal como nesta seção, o fluxo incompressível significará um fluxo de densidade constante.

as componentes σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} são tensões normais; uma componente da tensão que atua tangencialmente a uma face é chamada uma *tensão de cisalhamento*; as componentes τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} e τ_{zy} são as componentes da tensão de cisalhamento.

Para obtermos a equação diferencial do momentum, consideremos as forças que atuam sobre uma partícula que ocupa o elemento de fluido infinitesimal. As componentes da tensão são funções de x , y , z e t , e então os valores destas mudam de face para face, já a localização da cada face é ligeiramente diferente.

A segunda lei de Newton da direção x é dada por $\sum F_x = ma_x$. Para a partícula do fluido ocupando um elemento infinitesimal, ela toma a forma

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ & - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ & + \rho g_x dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{Dv_x}{Dt}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a componente do vetor gravidade \vec{g} na direção x é g_x , e $\frac{Dv_x}{Dt}$ é a aceleração da partícula no fluido. Após dividirmos pelo volume $dx dy dz$, a equação acima simplifica-se para

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x. \quad (2.11)$$

Analogamente, para as direções y e z teríamos

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho g_z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pode-se mostrar, calculando-se torques em relação aos eixos que passam pelo centro do elemento infinitesimal, que

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Isto é, o tensor tensão é simétrico; assim, temos realmente seis componentes da tensão.

O tensor tensão é expresso de modo usual por

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Agora vamos obter a equação de Euler. Em vários fluxos, especialmente para fluxos em torno de um contorno (fluxo em torno de um aerofólio) ou em regiões de mudança repentina (fluxo mediante uma colisão), uma boa aproximação para o tensor tensão é:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para tais fluxos, assumimos que as componentes da tensão de cisalhamento, que resultam de efeitos viscosos, podem ser negligenciadas as componentes normais da tensão são iguais ao negativo da pressão ².

Introduzindo estas componentes na eq.(2.11) e na eq.(2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x, \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y, \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Suponhamos que o eixo z é vertical tal que $g_x = g_y = 0$ e $g_z = -g$. As equações em (2.16) podem ser escritas como

$$\rho \frac{D}{Dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \right) - \rho g \hat{k}. \quad (2.17)$$

Na forma vetorial, temos a *equação de Euler*:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P - \rho g \hat{k}. \quad (2.18)$$

²Esse fato também é usado para a dedução da equação de Bernoulli.

2.1.3 Equação de Navier-Stokes.

Vários fluidos exibem relações lineares entre as componentes da tensão e os gradientes de velocidade. Tais fluidos são chamados *fluidos newtonianos* e incluem fluidos comuns tais como água, óleo e ar. Se, além da linearidade, exigirmos que o fluido seja *isotrópico*³, é possível relacionar as componentes da tensão e os gradientes de velocidade usando somente duas propriedades do fluido, a *viscosidade* μ e o *segundo coeficiente de viscosidade* λ . As relações entre a tensão e os gradientes de velocidade, chamadas de *equações constitutivas*, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \vec{v}, \\
 \sigma_{yy} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \vec{v}, \\
 \sigma_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \vec{v}, \\
 \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\
 \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\
 \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para a maioria dos gases, e para gases monoatômicos exatamente, o segundo coeficiente da viscosidade está relacionado com a viscosidade por:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \tag{2.20}$$

essa condição é conhecida como *hipótese de Stokes*. Com essa relação, a média negativa das três componentes normais da tensão é igual a pressão, ou seja,

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \tag{2.21}$$

A eq.(2.21) é também válida pra um gás. Se substituirmos as expressões constitutivas (2.19) nas equações diferenciais do momentum (2.11) e (2.13), e usando a hipótese de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\
 \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\
 \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

³A condição de isotropia existe se as propriedades do fluido são independentes da direção.

onde estamos supondo um *fluido homogêneo*, isto é, as propriedades do fluido (isso inclui a viscosidade) são independentes da posição.

Para um fluxo incompressível ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$), a equação da continuidade mostra que as equações em (2.22) se reduzem a

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Essas equações são chamadas *equações de Navier-Stokes*. Note que com essas três equações diferenciais e a equação diferencial da continuidade, temos quatro equações e quatro incógnitas, a saber, v_x, v_y, v_z e P . A viscosidade e a densidade são propriedades conhecidas do fluido. Com condições de contorno e iniciais apropriadas, as equações em (2.23) podem ser resolvidas. É oportuno comentar aqui que pelo fato das equações serem equações diferenciais parciais, não podemos assegurar que a solução encontrada será realmente observada no laboratório, já que as soluções não são únicas. Por exemplo, um fluxo laminar e um fluxo turbulento podem ter idênticas condições iniciais e de contorno, ainda que sejam dois fluxos (duas soluções) diferentes.

Podemos expressar as equações de Navier-Stokes na forma vetorial. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{Dv_x}{Dt}\hat{i} + \frac{Dv_y}{Dt}\hat{j} + \frac{Dv_z}{Dt}\hat{k} \\ \nabla P &= \frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k} \\ \nabla^2 \vec{v} &= \nabla^2 v_x \hat{i} + \nabla^2 v_y \hat{j} + \nabla^2 v_z \hat{k},\end{aligned}\quad (2.24)$$

em que usamos o Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\quad (2.25)$$

Combinando as equações em (2.24), as equações de Navier-Stokes em (2.23) tomam a forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}.\quad (2.26)$$

2.1.4 Equações da Vorticidade.

As equações da vorticidade serão obtidas das equações de Navier-Stokes. Sabemos que a vorticidade $\vec{\omega}$ e a aceleração \vec{a} são dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \nabla \times \vec{v} \\ \vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Tomando o rotacional da equação de Navier-Stokes (2.26), vem que:

$$\nabla \times \left[\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla \times \nabla P + \rho \nabla \times \vec{g} + \mu \nabla \times \nabla^2 \vec{v}.\quad (2.28)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \\ \nabla \times \nabla^2 \vec{v} &= \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = \nabla^2 \vec{\omega},\end{aligned}\quad (2.29)$$

além disso, obtemos também que:

$$\begin{aligned}\nabla \times [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] &= (\vec{v} \cdot \nabla) (\nabla \times \vec{v}) - [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \nabla] \vec{v} \\ &= (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

A eq.(2.28) então torna-se, supondo que ρ e μ são constantes, e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, a equação da vorticidade,

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}.\quad (2.31)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_x \\ \frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_y \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_z.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Pelo fato de que a vorticidade é o rotacional da velocidade, todos os termos nas equações da vorticidade envolvem somente a velocidade e suas derivadas. Consequentemente, as equações da vorticidade são frequentemente escolhidas quando as equações diferenciais do movimento são necessárias para a resolução de alguns problemas. Vejamos, agora, algumas conclusões que podem ser feitas considerando-se a equação da vorticidade (2.31). Se um fluxo é invíscido, então ele é irrotacional (ou seja, $\vec{\omega} = \vec{0}$ em todos os pontos do fluxo);

ele deve permanecer irrotacional porque $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{0}$ -*persistência a irrotacionalidade*. Se um fluxo uniforme aproxima-se de um objeto, a vorticidade (rotação das partículas do fluido) é introduzida somente pela ação da viscosidade. Sem efeitos viscosos, a vorticidade não pode ser criada em um fluxo irrotacional que se aproxima. Se $v_z = 0$, $v_x = v_x(x, y)$ e $v_y = v_y(x, y)$ (fluxo plano), então a única componente não nula da vorticidade é ω_z . Para tal fluxo a equação da vorticidade toma a forma:

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega_z. \quad (2.33)$$

Notemos que efeitos viscosos são necessários para causar mudanças na vorticidade em um fluxo plano.

3 Dinâmica Metafluida como um Sistema Vinculado

Neste capítulo apresentaremos inicialmente as equações da DM. Logo em seguida iremos formular a Lagrangiana do modelo, com objetivo de tratar o modelo como vinculado. E finalmente utilizar o método simplético para estudarmos a dinâmica do sistema.

3.1 Dinâmica Metafluida

Consideremos o escoamento de um fluido incompressível ($D\rho/Dt = 0$) com altíssimos números de Reynolds, ou em outras palavras, fluxos newtonianos incompressíveis turbulentos. As equações de movimento para um fluido newtoniano são dadas pelas equações de Navier-Stokes, como mostrado no capítulo 2,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.1)$$

onde $\vec{v}(\vec{x}, t)$ é o campo de velocidade, $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ é o campo de vorticidades, $p(\vec{x}, t)$ é o campo de pressão, ρ é a densidade (constante) e ν é a viscosidade cinemática do fluido. O produto vetorial da vorticidade com a velocidade é o vetor de Lamb, e será indicado por

$$\vec{l}(\vec{x}, t) = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (3.2)$$

A quantidade entre parênteses no segundo termo do lado direito da equação (3.1) é a função energia de Bernoulli

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (3.3)$$

Para um fluido incompressível, a equação da continuidade ($\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$) se reduz a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.4)$$

Notemos que as equações (3.1) e (3.4), constituem um sistema de equações diferenciais acopladas, ao qual é adicionado condições iniciais e de contorno. Por exemplo, na presença de contornos rígidos, a condição de que o fluido em contato com tais contornos rígidos

esteja em repouso é frequentemente usada e o escoamento pode ser gerado do repouso. O sistema acima descreve adequadamente escoamentos com altos números de Reynolds. Entretanto, fluxos turbulentos são caracterizados por muitas escalas espaço-temporais produzidas e mantidas por uma transferência contínua de energia das grandes para pequenas escalas. É aqui que entra, e temos que nos contentar com isso, uma descrição de quantidade médias. Reynolds introduziu a decomposição dos campos através de uma média e uma parte devido a flutuações. Esta é a famosa decomposição de Reynolds, que aplicada às equações de movimento leva ao aparecimento de termos que não podem ser obtidos analiticamente, devido a parte convectiva não-linear. Note que as equações de Navier-Stokes já são não-lineares devido a parte convectiva. Uma questão que naturalmente levantamos é se existem variáveis dinâmicas em termos das quais as equações que descrevem o escoamento tornam-se lineares. Em geral, a resposta é que não existem tais variáveis “especiais”. Entretanto, podemos apresentar alguma parte da não-linearidade como fontes a serem modeladas, ou seja, identificaremos certas quantidades como fontes do movimento turbulento. Estas novas quantidades do fluxo possuem estrutura espacial e temporal, e resultam de uma tentativa de apresentar a turbulência como uma interação entre vorticidade e o vetor de Lamb.

Nesta “nova teoria da turbulência” é proposto formar um sistema de equações não para valores médios de \vec{v} e p , mas para valores médios de $\vec{\omega}$ e \vec{l} . Esta nova teoria é chamada de Dinâmica Metafluida [6].

3.2 Novos conceitos e Equações

Vamos iniciar escrevendo a forma usual das equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.5)$$

note que

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}. \quad (3.6)$$

Introduzindo a eq.(3.6) na eq.(3.5), obtemos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.7)$$

onde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$. Isto justifica a eq.(3.1). Tomando-se o rotacional da eq.(3.7), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla \times \vec{v})}{\partial t} &= -\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \nu \nabla \times \nabla^2 \vec{v} \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{l} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esta equação descreve a evolução da vorticidade. Por outro lado, como a vorticidade é o rotacional da velocidade temos

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0. \quad (3.9)$$

É claro que as equações (3.8) e (3.9) são válidas localmente, independentemente se o fluxo é turbulento ou não. Note que as formas “mediadas” destas equações são válidas. A eq.(3.8) contém apenas a vorticidade e o vetor de Lamb; logo, conhecendo-se \vec{l} , a solução da equação (3.8), com condições iniciais e de contorno apropriadas, constituiria-se no problema de resolvermos uma equação diferencial parcial linear. A questão é como obter o vetor de Lamb. Uma das possibilidades seria modelar o rotacional do vetor de Lamb por alguma outra quantidade envolvendo somente a vorticidade. Mas como podemos ver a definição de \vec{l} , teríamos gradientes de velocidade diferentes da vorticidade, e nenhum progresso seria feito. De qualquer modo, podemos considerar o vetor Lamb como uma outra variável dinâmica, além da vorticidade, e olhar as equações (3.8) e (3.9) como um sistema incompleto de quatro equações, onde a evolução e a divergência da vorticidade são dados, ao passo que a evolução e divergência do vetor de Lamb estão ausentes. Vamos então obter estas relações para completarmos o sistema de equações, onde a evolução de um campo envolve variações espaciais do outro, enquanto termos extras não lineares são vistos como suas fontes. Estas fontes são determinadas pelas condições externas do fluxo (a geometria e crescimento energético) não dos valores dos campos.

Agora, vamos estudar a divergência do vetor de Lamb. Aplicando o operador divergência em ambos os lados da equação de Navier-Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{v})}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) - \nabla \cdot \nabla \phi + \nu \nabla \cdot \nabla^2 \vec{v} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{l} &= -\nabla^2 \phi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

logo a divergência do vetor de Lamb está relacionado com a “aglomeração” da função energia de Bernoulli, que representa a tendência da energia de aglomerar-se em algumas regiões onde seu valor é positivo, evacuar-se de algumas outras regiões onde seu valor é negativo; quanto maior a tendência, maior a magnitude da divergência. Alguns autores chamam esta aglomeração de curvatura (isto não tem nada haver com o conceito

geométrico de curvatura). Note que para um fluido Newtoniano incompressível, a divergência do vetor de Lamb é a mesma tanto no caso viscoso como no não viscoso, o que pode ser visto diretamente no cálculo realizado para a obtenção da eq.(3.10).

As considerações anteriores, nos levam a um novo conceito teórico, a saber, o de densidade de carga turbulenta, que indicaremos por $n(\vec{x}, t)$. Sua definição matemática é dada por

$$n(\vec{x}, t) = \nabla \cdot \vec{l}. \quad (3.11)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} n(\vec{x}, t) &= \nabla \cdot \vec{l} \\ &= \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) \\ &= \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{\omega} \cdot \nabla \times \vec{v} \\ &= \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

o que implica que a densidade de carga turbulenta é identicamente nula em escoamentos irrotacionais.

Vamos obter agora as equações que descrevem a evolução do vetor de Lamb. Para isso, escrevamos a equação de Navier-Stokes, eq.(3.7), na seguinte forma

$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.13)$$

derivando esta equação com respeito ao tempo, obtemos

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu \nabla^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Os dois primeiros termos do lado direito da eq.(3.14) podem ser caracterizados como contribuições invíscidas para evolução do vetor Lamb, no sentido de que eles são os únicos termos presentes no caso invíscido, ao passo que o terceiro termo pode ser considerado como correção viscosa dela. Portanto, primeiramente escreveremos a evolução do vetor de Lamb como se o fluido fosse invíscido (isto é, governado pelas equações de Euler), e logo exigiremos que os efeitos viscosos ocorrerão somente através do último termo da eq.(3.14).

Vamos ao cálculo dos termos invíscidos. Vem da eq.(3.14) que

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\omega} \times \vec{v}) \\ &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Das equações (3.7) e (3.8), obtemos (considerando apenas os termos invíscidos)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{l} - \nabla \phi, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l}. \quad (3.18)$$

Introduzindo as equações (3.17) e (3.18) na eq.(3.16), obtemos

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -(\nabla \times \vec{l}) \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (-\vec{l} - \nabla \phi). \quad (3.19)$$

Note que

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{l}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{l}) + \vec{l} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l}. \quad (3.20)$$

Mas $\vec{v} \cdot \vec{l} = \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0$, e logo a equação (3.20) fica

$$-(\nabla \times \vec{l}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{l} \times \vec{\omega}. \quad (3.21)$$

Introduzindo a equação (3.21) em (3.19), vem que

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{\omega} \times \nabla \phi. \quad (3.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{v} \times \vec{l}) &= \vec{v}(\nabla \cdot \vec{l}) - \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} \\ &= \vec{v}n + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} \\ \Rightarrow -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{l}) - \vec{v}n - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} \\ &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{v}) - \vec{v}n - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} \\ &= \nabla \times [v^2\vec{\omega} - (\vec{v} \cdot \vec{\omega})\vec{v}] - \vec{v}n - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} \\ &= v^2\nabla \times \vec{\omega} + \nabla(v^2) \times \vec{\omega} - \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega})\vec{v} - \vec{v}n - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Introduzindo a equação (3.23) em (3.22), temos

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2\nabla \times \vec{\omega} - \vec{v}n - \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega})\vec{v} - \vec{\omega} \times \nabla(\phi + v^2) - 2(\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (3.24)$$

Notemos que o primeiro termo do lado direito da equação (3.24) assemelha-se, a menos do fator multiplicativo v^2 , ao primeiro termo que aparece na equação de evolução da vorticidade (vide equação (3.8)). Os termos restantes não têm equivalentes na equação de vorticidade e não podem ser escritas como combinações de $\vec{\omega}$ ou \vec{l} . Assim, aqui entra o conceito da segunda fonte turbulenta, a saber, o vetor corrente turbulenta $\vec{j}(\vec{x}, t)$, dado por

$$\vec{j} = \vec{v}n + \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{\omega})\vec{v} + \vec{\omega} \times \nabla(\phi + v^2) + 2(\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (3.25)$$

Introduzindo a parte viscosa e a equação (3.25) na (3.24), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla^2 (-\vec{l} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v}) \\ \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= v^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla n - \nu \nabla^2 \vec{l} + \nu^2 \nabla^4 \vec{l}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O último termo nesta equação é uma correção de segunda ordem na viscosidade e pode ser negligenciada. Portanto, a forma final da equação que fornece a evolução do vetor de Lamb é

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla n - \nu \nabla^2 \vec{l}. \quad (3.27)$$

Esta equação implica que existem duas correções ao resultado invíscido dado pela equação (3.24). A primeira envolve o gradiente de carga turbulenta e pode ser vista como uma correção viscosa ao vetor corrente turbulenta. A segunda correção é de maior importância e descreve como os gradientes espaciais do vetor de Lamb afetam sua evolução através da viscosidade. Notemos que o sinal negativo em frente a estes termos, como veremos mais tarde, é responsável pela obtenção de uma equação de onda simples para ambos, a vorticidade e o vetor de Lamb. Em conclusão, temos encontrado um sistema de quatro equações, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j} + \nu \nabla n - \nu \nabla^2 \vec{l}, \quad (3.31)$$

que são válidas localmente em um escoamento laminar ou turbulento. Note que este sistema de equações é linear.

3.3 As equações da Dinâmica Metafluida

Para um fluido invíscido, ou seja, $\nu = 0$, as equações (3.28)-(3.31) tornam-se

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l}, \quad (3.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \vec{u}^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{j}. \quad (3.35)$$

Estas equações são análogas às então chamadas equações de Maxwell microscópicas, que podem ser escritas da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{e}, \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \vec{e} = 4\pi\rho, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{b} - 4\pi\vec{i}, \quad (3.39)$$

onde $\vec{b}(\vec{x}, t)$ é o campo magnético microscópico, $\vec{e}(\vec{x}, t)$ é o campo elétrico microscópico, $\rho(\vec{x}, t)$ é a densidade de carga microscópica, e $\vec{i}(\vec{x}, t)$ é a corrente microscópica. Uma descrição mais econômica dos campos é obtida introduzindo-se o potencial vetor $\vec{a}(\vec{x}, t)$ e o potencial escalar ψ . É fácil ver que as substituições

$$\vec{b} = \nabla \times \vec{a}, \quad (3.40)$$

$$\vec{e} = -\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \nabla\psi \quad (3.41)$$

deixam as equações (3.36) e (3.37) como identidades. Os dois sistemas dividem uma característica comum, que é a de ter seus campos variando com extrema rapidez no espaço e no tempo. Podemos argumentar que no eletromagnetismo a carga e a corrente são dadas, ao passo que na hidrodinâmica elas fazem parte do problema. Na verdade, isto não é

tão rigoroso. As variações espaciais dos campos eletromagnéticos microscópicos ocorrem em distâncias da ordem $\leq 10^{-8}s$, e suas flutuações temporais ocorrem em períodos de $\leq 10^{-13}s$ para vibrações nucleares e $\leq 10^{-17}s$ para movimentos de orbitais eletrônicos. Medidas macroscópicas levam a médias em intervalos muito maiores que estes. Portanto, todas as flutuações microscópicas são “mediadas”, dando variações de quantidades macroscópicas relativamente suaves e lentas. Estas quantidades macroscópicas são determinadas experimentalmente e esta é a razão porque são consideradas como uma espécie de “insumo” nas equações de Maxwell macroscópicas. O quadro qualitativo resultante para as fontes eletromagnéticas é análogo ao das fontes turbulentas na formulação da dinâmica metafluida.

Obtidas as equações “microscópicas” fundamentais, equações (3.28)-(3.31), tomaremos as médias de todas as quantidades sobre o espaço, aplicando um método de filtragem devido a Russakoff [43]. As fontes médias obtidas deverão ser determinadas experimentalmente, exatamente ou numericamente, e devem ser consideradas como um “insumo” nas equações da DM. Vamos começar com o método de filtragem. A média espacial de uma função $A(\vec{x}, t)$ com respeito a uma função teste $f(\vec{x})$ é definida por

$$\langle A(\vec{x}, t) \rangle = \int f(\vec{x}') A(\vec{x} - \vec{x}', t) d^3x', \quad (3.42)$$

onde $f(\vec{x}) > 0$ em alguma vizinhança de $\vec{x} = \vec{0}$, e $\int f(\vec{x}') d^3x' = 1$. Vamos supor também que $f(\vec{x})$ é isotrópica. Uma $f(\vec{x})$ que satisfaz esta hipótese é $f(\vec{x}) = (\pi R)^{3/2} e^{-r^2/R^2}$. Outra hipótese necessária sobre nossa função filtro é que ela seja de classe $C^\infty(\mathfrak{R})$. Assim, sobre pequenas distâncias, por exemplo, da ordem da microescala de Kolmogorov η , podemos expandir f da seguinte maneira

$$f(\vec{x} + \vec{a}) \approx f(\vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla) f(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}), \quad (3.43)$$

onde $|\vec{a}| \approx \eta$. Vamos, agora, aplicar o método de filtragem nas equações (3.28)-(3.31). Os campos de Lamb e vorticidade, em grande-escala, serão definidos por

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \langle \vec{l}(\vec{x}, t) \rangle \\ \vec{W} &= \langle \vec{\omega}(\vec{x}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Logo as equações homogêneas, (3.28) e (3.29), ficam

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (3.45)$$

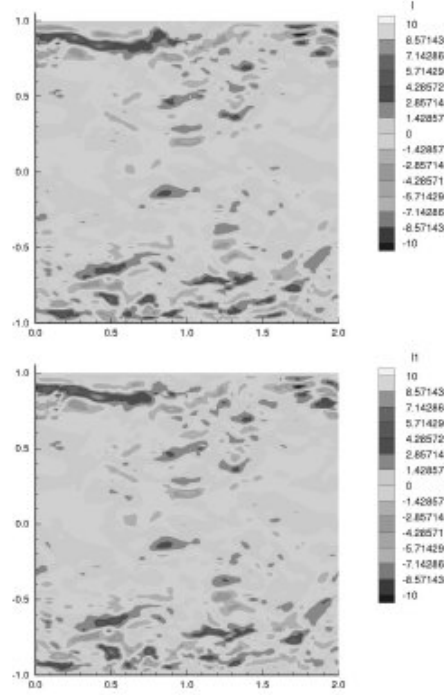


Figura 3.1: Comparação entre os campos $\langle \vec{u}^2 \nabla \times \vec{\omega} \rangle$ e $\langle \vec{u}^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$ de um fluxo em um canal[6]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{L} + \nu \nabla^2 \vec{W}, \quad (3.46)$$

e as não homogêneas, (3.30) e (3.31), ficam

$$\nabla \cdot \vec{L} = \langle n(\vec{x}, t) \rangle, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = -\langle v^2 \nabla \times \vec{\omega} \rangle - \langle \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle + \nu \nabla \langle n(\vec{x}, t) \rangle - \nu \nabla^2 \vec{L}. \quad (3.48)$$

Com o intuito de que o sistema acima tenha solução, usaremos a seguinte aproximação 3.3 [6]

$$\langle v^2 \nabla \times \vec{\omega} \rangle = \langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}. \quad (3.49)$$

Com esta aproximação podemos classificar os escoamentos em “homogêneos” e “não-homogêneos”. No escoamento homogêneo as fontes turbulentas são nulas e, neste

caso, as equações da DM ficam

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{W} &= 0 \\
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{L} + \nu \nabla^2 \vec{W}, \\
\nabla \cdot \vec{L} &= 0, \\
\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} &= \langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W} - \nu \nabla^2 \vec{L}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

O valor médio da velocidade, $\langle \vec{v} \rangle$, pode ser tomado como a raiz quadrada da energia cinética total por unidade de massa e volume filtrado. Estas equações podem ser resolvidas analiticamente e numericamente para condições de contorno apropriadas; por exemplo, uma caixa cúbica periódica. No caso da turbulência não homogênea, as fontes turbulentas não são nulas, e as equações da DM ficam

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{W} &= 0 \\
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{L} + \nu \nabla^2 \vec{W}, \\
\nabla \cdot \vec{\tilde{L}} &= N(\vec{x}, t) \\
\frac{\partial \vec{\tilde{L}}}{\partial t} &= \langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{\tilde{W}} - \vec{J}(\vec{x}, t) + \nu \nabla N(\vec{x}, t) - \nu \nabla \vec{\tilde{L}},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

onde $N(\vec{x}, t) \equiv \langle n(\vec{x}, t) \rangle$ e $\vec{J}(\vec{x}, t) \equiv \langle \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle$. Os dois novos campos $\vec{\tilde{L}}$ e $\vec{\tilde{W}}$ foram introduzidos devido a generalidade. Eles representam os efeitos que a filtragem das fontes turbulentas introduzem nos campos básicos \vec{L} e \vec{W} . Em notação tensorial, podemos expressar suas relações como seguem

$$\tilde{L}_\alpha = L_\alpha + 4\pi(P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots), \tag{3.52}$$

$$\tilde{W}_\alpha = W_\alpha + 4\pi(M_\alpha + \dots). \tag{3.53}$$

As quantidades \vec{P} , \vec{M} , $Q_{\alpha\beta}$ (e objetos similares em ordem superior) representam as médias macroscópicas de dipolo de carga turbulenta, dipolo de vórtice, e quadrupolo de carga turbulenta, e densidades de momento superior do particular fluxo turbulento. Estes momentos são nulos no caso de turbulência homogênea. As relações que expressam $\vec{\tilde{L}}$ e $\vec{\tilde{W}}$ em termos dos campos básicos \vec{L} e \vec{W} e serão chamadas relações constitutivas. No caso mais simples, temos uma relação linear do seguinte tipo

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{L}} &= \epsilon \vec{L}, \\
\vec{\tilde{W}} &= \xi \vec{W}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

As constantes ϵ e ξ podem ser interpretadas como os análogos hidrodinâmicos das constantes dielétricas e permeabilidade magnética, respectivamente. Nos casos mais simples podem ser consideradas como escalares, ao passo que em geral serão tensores de segunda ordem, refletindo a presença de anisotropias.

3.4 Abordagem Lagrangiana da Dinâmica Metafluida

A partir da interpretação geométrica para escoamentos de Euler (NS com $\nu = 0$), Arnold [21, 22] mostrou, usando métodos de álgebra de Lie, que este tipo de escoamento pode ser descrito em um formalismo Lagrangiano em qualquer dimensão. Isto tem muitas consequências interessantes em mecânica dos fluidos, e foi ativamente estudado [23, 24, 25, 26, 27]. A aplicação do princípio variacional em escoamentos de fluidos incompressíveis sem viscosidade é muito usado no estudo do movimento de fluidos oceânicos e atmosféricos em grandes escalas, conhecidos como escoamentos quasigeostróficos [27, 28, 29].

Associado a estas formulações Lagrangiana da equação de Euler, eq.(C.6), existe uma estrutura simplética e várias formulações Hamiltonianas. Isto não é um novo estudo deste tipo de sistema. Em hidrodinâmica, Clebsh introduziu variáveis canônicas [30] para descrever o movimento de um fluido ideal (sem viscosidade) em uma classe particular, mas fisicamente importante, de escoamentos nos quais as linhas de vórtice são as linhas de interseção de duas famílias de superfícies $\lambda(\vec{x}, t)$ e $\mu(\vec{x}, t)$ [31]. As variáveis de Clebsh podem descrever a turbulência resultante na instabilidade do escoamento plano paralelo ou escoamentos de Couette axialmente simétricos. Este é um exemplo de uma descrição contínua. Uma outra descrição Hamiltoniana de fluidos turbulentos é dada pela teoria de ondas de turbulência que estuda os estados estacionários do sistema estatístico clássico, que consiste de ondas que apresentam uma pequena interação [32, 33]. A Hamiltoniana neste caso pode ser escrita como a soma de duas partes: a Hamiltoniana não perturbada mais a Hamiltoniana perturbada. A descrição por vórtices pontuais também forma um sistema Hamiltoniano [34], porém, discreto, para escoamentos de fluidos turbulentos. Uma outra representação Hamiltoniana, que é apropriada quando tratamos com escoamentos hélicos, é devida a Kuz'min [35] e Oseledets [36].

Entretanto, embora haja uma grande variedade de formulações Lagrangianas para a equação de Euler, eq.(C.6), em nenhum destes casos as descrições Lagrangianas(ou

Hamiltonianas) permitem obter a equação de movimento de NS, eq.(3.1), para o escoamento de fluidos viscosos. Não é óbvio que tais descrições possam ser estendidas para escoamentos viscosos, isto é, para descrição verdadeira da turbulência. Naturalmente uma pergunta que se pode fazer é se existe um formalismo Lagrangiano (ou Hamiltoniano) cujas as variáveis canônicas nos conduzam as equações de movimento de um escoamento com viscosidade. Neste ponto é que entra a DM, nos apontando um caminho para contornar esta dificuldade e, portanto, encontrar um formalismo Hamiltoniano(ou Lagrangiano) para tratar escoamentos turbulentos com viscosidade. Estenderemos a analogia que existe entre as equações de movimento da DM, equação(3.50), e as equações de Maxwell do eletromagnetismo para obtermos um formalismo Lagrangiano para o sistema que permitirá, mais tarde, discutir os vínculos e as simetrias presentes no escoamento turbulento. É importante ressaltar que estaremos usando os valores médios para as equações da DM, onde foi aplicado o método de filtragem devido a Russakoff. Com o intuito de simplificar a notação tomaremos as seguintes definições dos valores médios

$$\begin{aligned}\vec{l} &= \langle \vec{l}(\vec{x}, t) \rangle \\ \vec{w} &= \langle \vec{\omega}(\vec{x}, t) \rangle,\end{aligned}\tag{3.55}$$

então o conjunto de equações para os valores médios da vorticidade e do vetor de lamb, é dado por

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0,\tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \nu \nabla^2 \vec{\omega},\tag{3.57}$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = N(\vec{x}, t)\tag{3.58}$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{\omega} - \vec{J}(\vec{x}, t) + \nu \nabla N(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{l},\tag{3.59}$$

Note que $c^2 = \sqrt{v^2}$, que é a média espacial do quadrado da velocidade e que pode ser tomada como a raiz quadrada da energia cinética total por unidade de massa e volume filtrado. As quantidades \vec{J} e N são respectivamente as médias espaciais das fontes \vec{j} e n .

No eletromagnetismo clássico, a densidade de Lagrangiana é dada pela a diferença entre o quadrado do campo elétrico (\vec{E}) e o quadrado do campo magnético (\vec{B}), a saber,

$$\mathcal{L}_{e.m.} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (3.60)$$

Usando a analogia estabelecida entre eletromagnetismo e turbulência e a correspondência entre as entidades físicas apresentadas anteriormente, propomos a seguinte Lagrangiana para a turbulência

$$L = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2}(\vec{l}^2 - c^2\vec{\omega}^2), \quad (3.61)$$

que pode também ser escrita em termos do campo de velocidade e da função energia de Bernoulli. Usando a eq.(3.13), e pelo fato de que $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nu\nabla^2\vec{v})^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2. \quad (3.62)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange [60] na lagrangiana (3.62) e considerando a equação canônica para a coordenada ϕ , temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}\phi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} = -(\partial_i\phi - v_i + \nu\partial^2v_i)\delta_{ij}, \quad (3.63)$$

$$\partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} + \partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}\phi)} - \partial_{jk} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (3.64)$$

onde usamos a identidade dada na eq.(3.1). Agora, considerando a equação canônica para a coordenada \vec{v} , a identidade dada na eq.(3.1) e $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_l} = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{v}_l} = -(-\partial_i\phi - \dot{v}_l + \nu\partial^2v_i)\delta_{ij}, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j v_l)} = 2c^2(\partial_l v_j - \partial_j v_l) \quad (3.67)$$

,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk} v_l)} = -2\nu(-\partial_i\phi - \dot{v}_i + \nu\partial^2v_i)\delta_{jk}\delta_{il}. \quad (3.68)$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange, tem-se

$$\frac{\partial \vec{l}(\vec{x}, t)}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{\omega}(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{l}(\vec{x}, t). \quad (3.69)$$

Deste modo, a Lagrangiana, eq.(3.62), gera corretamente as duas últimas equações de movimento para a DM, equações (3.56)-(3.59), para o caso em que não existem fontes turbulentas ($N = \vec{J} = 0$), com as coordenadas generalizadas sendo a função energia de Bernoulli ϕ e o campo de velocidade \vec{v} . As outras duas equações são obtidas devido ao modo como $\vec{\omega}$ e \vec{l} são definidos, Para obter a primeira equação na eq.(3.56) basta tomar a divergência de $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ e para a segunda, tomar o rotacional da eq.(3.1).

Consideremos agora a situação em que os termos de fontes estão presentes nas equações de movimento. A densidade Lagrangiana de interação \mathcal{L}_{int} é postulada

$$\mathcal{L}_{int} = \vec{J} \cdot \vec{v} - n\phi - \nu \vec{v} \cdot \nabla N, \quad (3.70)$$

que traz um termo de correção devido à viscosidade. Neste caso, a densidade Lagrangiana total é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \vec{v} \right)^2 - \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{v})^2 + \vec{J} \cdot \vec{v} - N\phi - \nu \vec{v} \cdot \nabla N. \quad (3.71)$$

Este é sem dúvida um resultado interessante da DM, que nos permite encontrar um formalismo Lagrangiano para o movimento de fluidos viscosos incompressíveis. As equações da DM, (3.56)-(3.59), podem ser derivadas da densidade de Lagrangiana (3.71) (da mesma forma que o caso sem fontes) a partir das equações de Euler-Lagrange [60], com o campo de velocidade \vec{v} e a função de energia de Bernoulli ϕ sendo as variáveis canônicas.

Um resultado importante que pode se derivar dessa descrição Lagrangiana para o escoamento de fluidos incompressíveis com viscosidade, é a possibilidade de obtermos a equação de Navier-Stokes, eq.(3.1). Para tanto, vamos calcular o momento conjugado ao campo de velocidade \vec{v} , dado por

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(\vec{x}, t) &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t)} \\ &= \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) + \nabla \phi(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Comparando com a eq.(3.1), temos que

$$\vec{\pi}(\vec{x}, t) = -\vec{l}(\vec{x}, t). \quad (3.73)$$

Podemos então escrever que

$$\dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) = -\vec{l}(\vec{x}, t) - \nabla\phi(\vec{x}, t) + \nu\nabla^2\vec{v}(\vec{x}, t), \quad (3.74)$$

que é a equação de Navier-Stokes, eq.(3.1), para os campos filtrados, onde usamos $\vec{l}(\vec{x}, t) = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Vamos agora derivar a Hamiltoniana do sistema fazendo uma transformação de Legendre da Lagrangiana, que é obtida como

$$H = \int d^3\vec{x}(\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} - \mathcal{L}). \quad (3.75)$$

Mas, do momento conjugado dado na eq.(3.72), temos $\dot{\vec{v}} = \vec{\pi} - \nabla\phi + \nu\nabla^2\vec{v}$. Desta forma, a densidade de Hamiltoniana para o escoamento de um fluido viscoso incompressível é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla\phi + \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v} - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2 - \vec{J} \cdot \vec{v} + N\phi + \nu\vec{v} \cdot \nabla N. \quad (3.76)$$

As equações Hamiltonianas de movimento são

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\vec{\pi}} = \vec{\pi}(\vec{x}, t) - \nabla\phi(\vec{x}, t) + \nu\nabla^2\vec{v}(\vec{x}, t) \\ -\frac{\partial\vec{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\vec{v}} = \nu\nabla^2\vec{v}(\vec{x}, t) + c^2\nabla \times \nabla \times \vec{v}(\vec{x}, t) + \nu\nabla N(\vec{x}, t) - \vec{J}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (3.77)$$

A primeira destas equações é a equação de Navier-Stokes, e que nos leva a concluir que $\vec{l}(\vec{x}, t) = -\vec{\pi}(\vec{x}, t)$. Então, a segunda equação na (3.77) concorda com a quarta equação da DM, já que $\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{v}$. A primeira e segunda equação da DM, (3.56) e (3.57), são satisfeitas tomando-se o divergente de $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ e o rotacional da eq.(3.1), respectivamente. A terceira das equações da DM não pode ser obtida como uma equação Hamiltoniana baseada na equação (3.76). Podemos contudo, dizer que devemos considerar as soluções das equações Hamiltonianas para as quais $\nabla \cdot \vec{l} - N = 0$ ou $\nabla \cdot \vec{\pi} + N = 0$, em algum instante de tempo definido. Se então pudermos mostrar que esta restrição é mantida para todos os instantes, as soluções obtidas formam um conjunto consistente e satisfatório. A derivada do tempo de $\nabla \cdot \vec{\pi} + N = 0$ é encontrada a partir da segunda, eq.(3.77). Tomando a divergência da equação e usando a equação da continuidade, temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\nabla \cdot \vec{\pi}}{\partial t} &= \nu\nabla^2\nabla \cdot \vec{\pi} + c^2\nabla \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{v} + \nu\nabla^2 N - \nabla \cdot \vec{J} \\ &= \nu\nabla^2(\nabla \cdot \vec{\pi} + N) - \nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial N}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{\pi} + N) &= 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Já que a equação é de primeira ordem na derivada temporal, mostramos que a restrição de que $\nabla \cdot \vec{\pi} + N = 0$ em algum instante do tempo é equivalente à validade da terceira equação (3.58) ao longo do tempo.

Uma característica importante dessa descrição Hamiltoniana para escoamentos turbulentos de fluidos incompressíveis em $3D$, é o caráter geral desse formalismo obtido. Apresentamos um formalismo Hamiltoniano para o escoamento mais geral sem a necessidade da introdução de novos parâmetros ou de trabalhar com um outro conjunto de variáveis.

3.5 Análise Simplética

Agora vamos aplicar o método simplético à DM descrita pela densidade de Lagrangiana, eq. (3.71). Primeiramente, vamos reescrever eq.(3.71) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{v}^2 + \dot{\vec{v}} \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2 - \nu\dot{\vec{v}} \cdot \nabla^2\vec{v} - \nu(\nabla^2\vec{v}) \cdot (\nabla\phi) \\ &+ \frac{\nu^2}{2}(\nabla^2\vec{v})^2 + \vec{J} \cdot \vec{v} - \nu\vec{v} \cdot \nabla N - \phi N. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Conforme o método simplético, deve-se reduzir a densidade de Lagrangiana de segunda ordem para primeira ordem na velocidade. Para tanto, usa-se o próprio momento conjugado a velocidade como campo auxiliar, que ao ser inserido na Lagrangiana, eq.(3.79), gera a seguinte Lagrangiana de primeira ordem,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} - U^{(0)}, \quad (3.80)$$

onde (0) indica a interação zero e onde o potencial simplético é

$$U^{(0)} = \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla\phi + \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v} - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2 + \nu\vec{v} \cdot \nabla N - \vec{v} \cdot \vec{J} + \phi N. \quad (3.81)$$

O conjunto inicial de variáveis simpléticas é $\xi^{(0)} = (v_i, \pi_i, \phi)$, permite identificar a eq.(3.80) com a eq.(A.5), as quantidades

$$\begin{aligned} A_i^{(0)\vec{v}} &= \pi_i, \\ A_i^{(0)\vec{\pi}} &= 0, \\ A_i^{(0)\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

o que nos leva a seguinte quantidade não nulas (veja eq.(A.7))

$$f_{ij}^{(0)\vec{v}\vec{\pi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta a_j^{(0)\vec{\pi}}(\vec{y})}{\delta v_i(\vec{x})} - \frac{\delta a_i^{(0)\vec{v}}(\vec{x})}{\delta \pi_j(\vec{y})} = \delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) = -f_{ij}^{(0)\vec{\pi}\vec{v}}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (3.83)$$

A matriz simplética correspondente $f^{(0)}$ é então dada por

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.84)$$

que obviamente é singular e, portanto, possui vínculos, de acordo com o método simplético. Vamos, então, encontrar estes vínculos para produzir uma deformação na estrutura geométrica e chegar a um novo tensor não-singular.

Como a matriz, eq.(3.84), é singular ela tem um modo-zero, obtida partir da eq.(A.10), a saber

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & v^\phi \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

onde \tilde{v} é a matriz transposta de v , e representa uma matriz (1×3) e v^ϕ é diferente de zero. Logo, contraindo este modo zero com o gradiente do potencial $U^{(0)}$, tem-se

$$\int d^3\vec{y} \nu^\phi \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x}, t)} U^{(0)}(\vec{y}) = 0, \quad (3.86)$$

onde usando eq.(3.80), encontra-se

$$\int d^3\vec{y} \nu^\phi \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x}, t)} U^{(0)}(\vec{y}) = \int d^3\vec{y} \nu^\phi (\nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{y}) + N(\vec{y})) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = 0. \quad (3.87)$$

Como v^ϕ é uma função diferente de zero, o seguinte vínculo é obtido,

$$\Omega \equiv \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}, t) + N(\vec{x}, t), \quad (3.88)$$

que é equivalente a lei de Gauss no eletromagnetismo.

Segundo o método simplético, este vínculo deve ser introduzido no setor cinético da densidade de Lagrangiana, eq.(3.80), por meio de multiplicador de Lagrange λ logo, a Lagrangiana de primeira iteração é obtida como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + N) - \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2 - \nu\vec{v} \cdot \nabla N + \vec{v} \cdot \vec{J} - \phi N \\ &+ \vec{\pi} \cdot \nabla\phi - \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Agora considerando o vínculo, dada na eq.(3.88), fortemente no setor potencial da Lagrangiana, eq.(3.89), temos

$$\int d^3\vec{x} (\vec{\pi} \cdot \nabla\phi - \phi N) = \int d^3\vec{x} (\nabla \cdot (\phi\vec{\pi}) - (\nabla \cdot \vec{\pi} + N)\phi) = 0. \quad (3.90)$$

Desta forma, a densidade de Lagrangiana de primeira ordem pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + N\phi) - U^{(1)}, \quad (3.91)$$

onde o potencial simplético é dado por

$$U^{(1)} = U^{(0)}|_{\Omega=0} = \frac{1}{2}\vec{\pi}^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{v})^2 + \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{J} + \nu\vec{v} \cdot \nabla N. \quad (3.92)$$

Note que, ao considerar o vínculo fortemente igual a zero no potencial simplético, o campo ϕ naturalmente desaparece. Considerando agora que o novo conjunto de variáveis simpléticas é dado na seguinte ordem $\xi^{(1)} = (v_i, \pi_i, \lambda)$, temos os momentos canônicos uma-forma,

$$\begin{aligned} A_i^{(1)\vec{v}} &= \pi_i \\ A_i^{(1)\vec{\pi}} &= 0 \\ A^{(1)\lambda} &= \nabla \cdot \pi + N, \end{aligned} \quad (3.93)$$

e a matriz simplética,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & \partial_i^y \\ 0 & -\partial_i^x & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.94)$$

como podemos observar, a matriz $f^{(1)}$ é singular. Precisamos, então, continuar procurando os vínculos da teoria para encontrarmos um tensor não-singular. Nesse caso o modo-zero, usando a eq.(A.10), é dado por

$$\tilde{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_j^{\vec{v}} & \mathbf{0} & v^\lambda \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

que deve satisfazer a condição

$$v_j^{\vec{v}} - \partial_i v^\lambda = 0, \quad (3.96)$$

que são expressões totalmente arbitrárias. Contraindo o modo-zero $v^{(1)}$ com o gradiente do potencial $U^{(1)}$, temos

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= v_i^{(1)\vec{v}}(\vec{x}) \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta v_i} \int d^3\vec{y} (\nabla \times \vec{v}(\vec{y}))^2 - \nu \frac{\delta}{\delta v_i} \int d^3\vec{y} \vec{\pi}(\vec{y}) \cdot \nabla^2 \vec{v}(\vec{y}) \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\delta}{\delta v_i} \int d^3\vec{y} \vec{v}(\vec{y}) \cdot \nabla N(\vec{y}) - \nu \frac{\delta}{\delta v_i} \int d^3\vec{y} \vec{v}(\vec{y}) \cdot \vec{J}(\vec{y}) \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Combinando a eq.(3.95) e a eq.(3.96), temos

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \nu \frac{\delta}{\delta v_i} \int d^3 \vec{y} v_i^{(1)\vec{v}}(\vec{y}) J_i(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = -v^{(1)\lambda}(\vec{x}) \partial_i(\vec{x}) \\
&= v^{(1)\lambda}(\vec{x}) \dot{N}(\vec{x}) \\
&= v^{(1)\lambda}(\vec{x}) \nabla^2 \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.98}$$

onde foram usadas as eq (3.10) e equação da continuidade.

A análise simplética abre a possibilidade de investigarmos a DM dentro e fora do intervalo inercial. A DM fora deste intervalo será investigada em um trabalho futuro. É importante considerarmos que no intervalo inercial, apesar da existência de viscosidade, não existe dissipação de energia, então a função energia de Bernoulli (ϕ) é constante. Devido a isto, Ω_2 é igual a zero e, conseqüentemente, a simetria de calibre escondida é revelada. Isso ocorre devido ao modo-zero não gerar um novo vínculo, ou seja, quando ϕ é constante, a eq.(3.98) é identicamente nula. Assim, conforme o método simplético, quando um modo-zero não gera um novo vínculo, temos a presença de uma simetria.

Para obtermos os parênteses de Dirac entre os campos do espaço de fase, temos que fixar a simetria de calibre. Isto é feito introduzindo uma condição de calibre no setor cinético da Lagrangiana de primeira ordem, eq(3.91), através de um multiplicador de Lagrange.

Seguindo a analogia entre o eletromagnetismo e a turbulência, vamos escolher o calibre de Coulomb

$$\chi_2 \equiv \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t). \tag{3.99}$$

Este calibre vem da condição de incompressibilidade do fluido. Neste caso, obtemos a seguinte densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + N) + \dot{\eta}(\nabla \cdot \vec{v}) - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})^2 - \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{J}, \tag{3.100}$$

tomando o vínculo χ_2 fortemente no setor do potencial simplético, eq.(3.100),

$$\int d^3 \vec{x} (\nabla \times \vec{v})^2 = - \int d^3 \vec{x} (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}); \tag{3.101}$$

Assim, a densidade de Lagrangiana de segunda iteração é dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + N) + \dot{\eta}(\nabla \cdot \vec{v}) - U^{(2)}, \tag{3.102}$$

onde o potencial é

$$U^{(2)} = U^{(1)}|_{x_2} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})^2 + \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{J}. \quad (3.103)$$

Sendo o novo conjunto de variáveis simpléticas dado na ordem $\xi^{(2)} = (v_i, \pi_i, \lambda, \eta)$

$$\begin{aligned} A_i^{(2)\vec{v}} &= \pi_i \\ A_i^{(2)\vec{\pi}} &= 0 \\ A_i^{(2)\lambda} &= \nabla \cdot \vec{\pi} + N \\ A_i^{(2)\eta} &= \nabla \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

com a correspondente matriz simplética $f^{(2)}$ escrita como

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \partial_i^y \\ \delta_{ij} & 0 & \partial_i^y & 0 \\ 0 & -\partial_i^x & 0 & 0 \\ -\partial_i^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.105)$$

que é a uma matriz não-singular. Segundo o método simplético, a inversa de $f^{(2)}$ gera os parênteses de Dirac entre os campos físicos,

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - \frac{\partial_j^x \partial_i^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_i^y}{\nabla^2} \\ -\delta_{ij} + \frac{\partial_j^x \partial_i^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_i^y}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.106)$$

Sendo assim, a partir da matriz $(f^{(2)})^{-1}$ identificamos os seguintes parênteses de Dirac,

$$\begin{aligned} \{v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}^D &= \left(-\delta_{ij} + \frac{\partial_j^x \partial_i^x}{\nabla^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{v_i(\vec{x}), v_j(\vec{y})\}^D &= \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}^D = 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Estes são nada menos que o parênteses de Dirac da teoria de turbulência no calibre $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. O próximo passo seria a quantização da teoria vinculada, que pode ser obtida pela regra de quantização canônica $\{, \}^D \longrightarrow -i[,]$. Fazendo isso, obtemos os comutadores da teoria

$$\begin{aligned} [v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})] &= \left(-\delta_{ij} + \frac{\partial_j^x \partial_i^x}{\nabla^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [v_i(\vec{x}), v_j(\vec{y})] &= [\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

4 Fluidos Compressíveis como um Sistema Vinculado

Teorias de calibre têm desempenhado um papel importante em teorias de campos já que elas estão relacionadas com interações físicas fundamentais na natureza. De um modo mais geral, estas teorias têm simetrias de calibre definidas por algumas relações chamadas, na linguagem de Dirac, de vínculos de primeira classe. A quantização dessas teorias necessita de cuidados especiais pois, devido a presença de simetrias de calibre, existem graus de liberdade supérfluos, os quais devem ser eliminados (antes ou depois) da implementação de um processo de quantização válido. Um exemplo de uma teoria de calibre é o eletromagnetismo.

Já foram feitas algumas tentativas para a obtenção de um conjunto de equações Tipo-Maxwell para a mecânica dos fluidos. Por exemplo, uma analogia apresentada entre as equações de Maxwell e as equações de um fluido incompressível turbulento foram feitas por Troshkin (1993) [45] e Marmanis (1998)(DM) [6]. Diferentemente deles T. Kambe (2010)[44], escreveu as equações Tipo-Maxwell para um fluido compressível. Motivado pela similaridade das equações entre a mecânica dos fluidos e o eletromagnetismo.

Como existe a analogia entre os sistemas, todos os modelos citados anteriormente apresentam simetria de calibre como o eletromagnetismo. Isso permite tratar os modelos como um sistema vinculado. Isso foi feito primeiramente para fluidos incompressíveis turbulentos (DM) e apresentado no capítulo anterior [8]. Agora queremos tratar o modelo para fluidos compressíveis. Por isso faremos a descrição Lagrangiana e Hamiltoniana do modelo de Kambe para finalmente obter os comutadores.

No caso compressível não podemos utilizar o método simplético [apêndice A] porque agora não conseguimos eliminar os graus de liberdade supérfluos utilizando o calibre de Coulomb pois tal calibre, na mecânica dos fluidos está relacionado com a incompressibilidade, o que deixa a escolha inviável para um fluido compressível. Portanto só nos resta utilizar o calibre de Lorentz para eliminarmos os graus supérfluos dos sistema.

Vamos em primeiro lugar escrever as equações tipo-Maxwell para fluidos compressíveis. Começaremos recordando a forma das equações de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{q^e}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\vec{J}^e}{\epsilon_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $q^e = 4\pi\rho^e\rho$ e $\vec{J}^e = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^e$ são respectivamente a densidade de carga e o vetor densidade de corrente. Os campos vetoriais \vec{E} e \vec{H} podem ser escritos também em termos dos potenciais vetor \vec{A} e escalar ϕ , através da relação

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

com essas definições, as equações acima requerem que os potenciais \vec{A} e ϕ satisfaçam as seguintes equações

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}^e,\tag{4.3}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = q^e,\tag{4.4}$$

juntamente com a condição de Lorentz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0.\tag{4.5}$$

Já na mecânica dos fluidos, as equações de movimento de um fluido ideal são dadas pelo conjunto de equações

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P,\tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0,\tag{4.7}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s = 0,\tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0, \quad (4.9)$$

onde ρ é a densidade do fluido, s é a entropia por unidade de massa e P é a pressão. As interpretações destas equações já foram apresentadas nos capítulos anteriores. A primeira equação é a equação de Euler, a segunda é a equação da continuidade, a terceira a equação da entropia enquanto a última equação é a equação da vorticidade. Note que se a entropia tem um valor uniforme s_0 , neste caso o fluido se mantém em um estado isentrópico $s = s_0$ em qualquer região do fluido e tempo. Portanto considerando um fluido isentrópico, podemos da termodinâmica escrever que $\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla P$, onde h é a entalpia por unidade de massa. Imediatamente, podemos escrever que uma variação da entalpia está relacionada com uma variação na densidade através da relação

$$\Delta h = \frac{1}{\rho} \Delta P = \frac{a^2}{\rho} \Delta \rho, \quad (4.10)$$

portanto

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \frac{a^2}{\rho} \partial_t \rho \\ \nabla h &= \frac{a^2}{\rho} \nabla \rho, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde a é a velocidade do som definida por $a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$. Substituindo essas relações nas equações de Euler (4.6) e da continuidade (4.7), chegamos nas seguintes expressões

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla h = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) h + a^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.13)$$

Linearizando a eq.(4.12) negligenciando o termo $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, e da mesma forma para eq.(4.13), mas negligenciando $(\vec{v} \cdot \nabla) h$, e finalmente substituindo a velocidade do som a por um valor constante a_0 , as equações são reescritas

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla h = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + a_0^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.15)$$

portanto combinando essas duas equações obtemos uma equação de onda para os campos de velocidade e da entalpia, ou seja,

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \nabla^2 h = 0. \quad (4.17)$$

Observe que as equações são análogas as equações do eletromagnetismo. As equações (4.16) e (4.17) são idênticas às equações (4.3) e (4.4) no vácuo onde $\vec{J}^e = 0$ e $q^e = 0$. Note ainda que a eq.(4.12) é análogo a condição de Lorentz (4.2), portanto temos as seguintes correspondências $(\vec{A}, \phi^e, c) \leftrightarrow (a_0 \vec{v}, h, a_0)$. O que possibilita a formulação das equações Tipo-Maxwell para a mecânica dos fluidos. Além disso note que as ondas sonoras de um fluido são análogas as ondas eletromagnéticas.

4.1 Analogia com as Equações de Maxwell

A formulação das equações tipo-Maxwell para a mecânica dos fluidos é baseada na correspondência entre os potenciais eletromagnéticos com o campo de velocidade e a entalpia por unidade de massa $((\vec{A}, \phi^e, c) \leftrightarrow (a_0 \vec{v}, h, a_0))$. Observe que os campos elétricos e magnéticos no eletromagnetismo são escritos em termos dos potenciais, eq.(4.2). Dessa forma podemos escrever os seguintes vetores

$$\begin{aligned} \vec{E}^f &= -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla h \\ \vec{H}^f &= \nabla \times \vec{v}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde os campos \vec{v} e h são os campos de velocidade e a entalpia por unidade de massa respectivamente. Com essa definição temos as seguintes equações tipo-Maxwell para um fluido compressível:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}^f &= q^f \\ \nabla \cdot \vec{H}^f &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}^f + \frac{\partial \vec{H}^f}{\partial t} &= 0 \\ a_0^2 \nabla \times \vec{H}^f - \frac{\partial \vec{E}^f}{\partial t} &= \vec{j}^f, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde a_0 denota a velocidade do som em um estado do fluido em repouso, e as fontes são dadas por

$$q^f = -\partial_t(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 h \quad (4.20)$$

$$\vec{j}^f = \partial_t^2 \vec{v} - \partial_t(\nabla h) + a_0^2 \nabla \times \vec{v}. \quad (4.21)$$

Note que essas fontes satisfazem uma equação da continuidade similar ao eletromagnetismo, ou seja,

$$\partial_t q^f + \nabla \cdot \vec{j}^f = 0. \quad (4.22)$$

Podemos ainda com a equação de Euler (4.6) escrever o campo vetorial \vec{E}^f somente em termos do campo de velocidade

$$\vec{E}^f = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \quad (4.23)$$

Essa expressão nos leva a escrevermos a fonte q^f em termos do campo de velocidade

$$q^f = \nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \nabla^2 \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \quad (4.24)$$

Se substituirmos uma derivada parcial da entalpia no tempo, com auxílio da eq.(4.13), no vetor densidade de corrente, chegaremos na expressão

$$\vec{j}^f = \partial_t^2 \vec{v} - \nabla((\vec{v} \cdot \nabla)h) + a^2 \nabla \cdot \vec{v} + a_0^2 \nabla \times \vec{v}, \quad (4.25)$$

cuja a evolução dos termos fontes devem ser determinados pelas resoluções das equações de Euler (4.6) e da continuidade (4.7). A inclusão do efeito da viscosidade nas equações para o modelo, é realizada reescrevendo as equações de movimento para o caso de um fluido viscoso.

4.2 Formulação Lagrangiana

A existência da analogia entre os potenciais eletromagnéticos com as quantidades de um fluido abre a premissa que além de podermos escrevermos um sistema de equações análogo ao eletromagnetismo, podemos ainda obter uma Lagrangiana para o sistema. Podemos observar que os campos \vec{E}^f e \vec{H}^f , equações (4.18), são componentes de um tensor de segunda ordem anti-simétrico. O tensor intensidade do campo

$$H^{\mu\nu} = \tilde{\partial}^\mu \tilde{A}^\nu - \tilde{\partial}^\nu \tilde{A}^\mu, \quad (4.26)$$

que ainda pode ser escrito explicitamente em termos de \vec{E}^f e \vec{H}^f ,

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x^f & -E_y^f & -E_z^f \\ E_x^f & 0 & -H_z^f & H_y^f \\ E_y^f & H_z^f & 0 & -H_x^f \\ E_z^f & -H_y^f & H_x^f & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

onde introduzimos o quadrivetor potencial e o quadrivetor corrente,

$$\begin{aligned} V^\mu &= (h, a_0 \vec{v}) \\ J^\mu &= (a_0 q^f, \vec{j}^f), \end{aligned} \quad (4.28)$$

5 respectivamente. Além do operador diferencial

$$\tilde{\partial}^\mu = \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (4.29)$$

No caso da teoria de Maxwell para o eletromagnetismo a densidade de Lagrangiana é dada por $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, utilizando a analogia entre os potenciais eletromagnéticos com as entidades físicas da mecânica dos fluidos, e com o uso do tensor $H^{\mu\nu}$, propomos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

O momento canônico π^μ associado ao quadrivetor V^μ é dado por

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}^\mu} \\ \pi^\mu &= H^{\mu 0} \end{aligned} \quad (4.31)$$

e aplicando a equação de Euler-Lagrange em (4.30), obtemos a seguinte equação de movimento

$$\tilde{\partial}_\mu H^{\mu\nu} = 0. \quad (4.32)$$

No caso com fontes devemos somente acrescentar o termo de interação $\mathcal{L}_{int} = -J^\mu V_\mu$, na densidade de Lagrangiana da equação (4.30)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{a_0} J^\mu V_\mu \quad (4.33)$$

cujas aplicação da equação de Euler-Lagrange gera a nova equação de movimento

$$\tilde{\partial}_\mu H^{\mu\nu} = \frac{1}{a_0} J^\nu \quad (4.34)$$

No caso da densidade de Hamiltoniana do sistema basta fazermos uma transformação de Legendre da densidade de Lagrangiana, (4.26), que é obtida como

$$\mathcal{H} = \pi_\mu V^\mu - \mathcal{L}. \quad (4.35)$$

Com o uso da Hamiltoniana, podemos obter os parênteses de Poisson fundamentais do modelo:

$$\begin{aligned}\{V^\mu(x), \pi^\nu(x')\} &= \eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{V^\mu(x), V^\nu(x')\} &= 0, \\ \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(x')\} &= 0.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Não podemos proceder a quantização canônica via parênteses de Poisson acima, porque a teoria apresenta vínculos. Da relação (4.31), imediatamente obtemos o seguinte vínculo (primário)

$$\pi^0 \approx 0.\tag{4.37}$$

Alguns caminhos podem ser seguidos para obtenção dos comutadores do modelo. Como exemplo pode ser citado o método simplético (Apêndice B) que usamos na DM no capítulo anterior e o método de Dirac. Mas devemos ser cuidadosos na escolha do procedimento porque no eletromagnetismo os potenciais eletromagnéticos não tem uma interpretação física, diferentemente do modelo proposto para a mecânica dos fluidos onde os potenciais equivalentes são entidades físicas, no caso o campo de velocidade e a entalpia. Por isso a escolha de um calibre análogo ao calibre de Coulomb, ou seja, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ que é a condição de incompressibilidade do fluido. Mas, como o tipo de fluido que queremos investigar, que é descrito pelo conjunto de equações (4.19), são fluidos compressíveis a escolha do calibre de Coulomb é inviável. Além disso um outro problema surge com os termos de fonte, com a escolha adequada do calibre eles serem nulos que é um caso particular. Então, uma alternativa apropriada é o equivalente ao calibre de Lorentz, eq.(4.12), que está relacionado com a compressibilidade do fluido e com ondas sonoras. Portanto ao invés de usarmos a densidade de Lagrangiana (4.30) iremos usar a densidade de Lagrangiana proposta por Fermi (1929)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\tilde{\partial}^\mu V_\mu)^2,\tag{4.38}$$

em que α é uma constante arbitrária. Como podemos notar, a densidade de Lagrangiana acima não é mais um invariante de calibre. Note que é como se já tivéssemos “fixado o calibre”. Por isso o termo $-\frac{1}{2\alpha} (\tilde{\partial}^\mu V_\mu)^2$ na eq.(4.30) é chamado o termo de fixação de calibre. Assim, os problemas decorrentes da fixação de calibre não existem mais. Entretanto, podemos argumentar que o modelo descrito pela a Lagrangiana dada por

(4.38) não corresponde às equações (4.19). Note-se que a equação de movimento para V_μ é agora

$$\tilde{\square}V_\mu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\tilde{\partial}_\mu\tilde{\partial}_\nu V^\nu = 0, \quad (4.39)$$

onde $\tilde{\square} = \tilde{\partial}_\mu\tilde{\partial}^\mu$. Vamos analisar este ponto com mais detalhes. Para tornar mais claras as nossas conclusões, juntemos o termo de interação à Lagrangiana. Assim, temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}H^{\mu\nu}H_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu V_\mu)^2 - J_\mu V^\mu. \quad (4.40)$$

A equação de movimento para V^μ é, neste caso,

$$\tilde{\partial}_\mu H^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}\tilde{\partial}^\nu(\tilde{\partial}_\mu V^\mu) = J^\nu. \quad (4.41)$$

O que, positivamente, não correspondem às equações (4.19), a não ser que por hipótese, consideremos $(\tilde{\partial}_\mu V^\mu) = 0$. Não vamos fazer isto. A hipótese que vamos tomar é que a corrente J^μ seja conservada, o que é bem razoável. Isto significa que, no presente modelo, $(\tilde{\partial}_\mu J^\mu = 0)$ não surge mais em decorrência das equações de movimento. Assim, tomando a derivada de ambos os lados de (4.41) com respeito a x^ν , obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\tilde{\square}\tilde{\partial}_\mu V^\mu = 0. \quad (4.42)$$

Considerando que α seja uma constante não infinita, temos que $\tilde{\partial}_\mu V^\mu$ satisfaz uma equação de campo livre. Logo o termo $\frac{1}{2\alpha}(\tilde{\partial}^\mu V_\mu)^2$ não deve, efetivamente, causar nenhuma influência na teoria. Assim, a Lagrangiana (4.40) deve descrever, em termos efetivos, o modelo das equações Tipo-Maxwell para fluidos. O passo agora é a obtenção dos comutadores para o modelo. O momento conjugado a V^μ é

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}^\mu} \\ &= H^{\mu 0} - \frac{1}{\alpha}\eta^{\mu 0}(\tilde{\partial}_\nu V^\nu). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Note-se que agora π^0 não é mais nulo. Não há vínculos. Assim, a quantização pode ser feita, diretamente, via parênteses de Poisson. Temos, então, os comutadores.

$$\begin{aligned} [V^\mu(x), \pi^\nu(x')] &= \eta^{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [V^\mu(x), V^\nu(x')] &= 0, \\ [\pi^\mu(x), \pi^\nu(x')] &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Voltemos agora às equações de movimento (4.42), vimos que o termo de calibre satisfaz uma equação de um campo livre. Agora em virtude de escolhermos o calibre de Feynman,

$\alpha = 1$ obtemos uma equação de movimento em termos de V^μ , dada pela seguinte expressão

$$\tilde{\square}V^\mu = J^\mu. \quad (4.45)$$

Repare que no caso sem fontes, $J^\mu = 0$, a equação anterior se torna

$$\tilde{\square}V^\mu = 0, \quad (4.46)$$

no caso ($\mu = 0$),

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h - \nabla^2 h = 0 \quad (4.47)$$

Observe que não precisamos usar o processo de linearização das equações de movimento para chegarmos na equação de onda para uma onda sonora (4.47). O que demonstra que o nosso modelo não altera a física da mecânica dos fluidos.

5 Conclusão

Nesta dissertação, cujo o principal objetivo consiste na investigação das simetrias de calibre em fluidos, mostramos primeiramente que, no contexto da DM, a turbulência hidrodinâmica apresenta uma simetria escondida. Mostramos que esta simetria, revelada através do formalismo simplético, só é preservada dentro do intervalo inercial. No caso de um fluido compressível não utilizamos o método simplético para revelar a simetria escondida. Procedemos quebrando a simetria de calibre e chegando nos comutadores de forma usual para um sistema sem vínculos.

A Sistemas Vinculados

Todas as teorias de campos fundamentais em física são invariantes com relação a algum grupo de transformação de simetria local. Tais teorias são chamadas de teorias de calibre (ou gauge) ou mais geralmente de sistemas singulares, ou seja, sistemas com vínculos. A teoria de calibre tem ocupado um papel importante no contexto da teoria de campos. As interações fundamentais conhecidas na natureza são todas governadas pelas teorias de calibre. De um modo mais geral, nós chamamos de teoria de calibre aquelas teorias com vínculos de primeira classe [12, 13]. Sistemas vinculados foram estudados sistematicamente pela primeira vez por Dirac [12, 13] há mais de cinquenta anos, e seu desenvolvimento se fez no formalismo Hamiltoniano.

Sistemas vinculados são caracterizados no espaço de fase pela presença de vínculos, que são funções das coordenadas e momentos, dados por

$$T(q, p) = 0 \tag{A.1}$$

Apesar disso, o parêntese de Poisson desta quantidade com outra qualquer, $A(q, p)$, da teoria pode não ser nulo, ou seja

$$\{A, T\} \neq 0 \tag{A.2}$$

Por este motivo, em lugar de (A.1), é comum escrevermos

$$T(q, p) \approx 0 \tag{A.3}$$

onde se diz fracamente igual a zero, significando que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson.

Para fazermos a passagem para a mecânica quântica, T e A devem ser transformados em operadores, que chamaremos de \hat{T} e \hat{A} . Em virtude de (A.1), T é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo T deve ser nulo, ou seja

$$[A, T] = 0 \tag{A.4}$$

Mas pela regra geral de quantização canônica $\{, \} \rightarrow -i[,]$ e (A.2) deveríamos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre \hat{T} e \hat{A} .

Como podemos ver, a regra geral de quantização canônica nos leva a uma inconsistência quando o sistema apresenta vínculos. Estes vínculos podem ser classificados em primários e secundários, etc, ou de primeira classe e segunda classe [12, 13, 14, 15]. Os vínculos de primeira classe implicam na presença de invariância de calibre da teoria. Por outro lado, em teorias com vínculos de segunda classe não há esta propriedade. Existem vários métodos para se tratar sistemas vinculados baseando-se na classificação acima. A maioria trabalha com vínculos de primeira classe [14, 15], que estão relacionados á chamada simetria BRST. Para os de segunda classe existe o método dos parêntese de Dirac [12, 13]. Existe também um método mais recente de Fadeev e Jackiw [16] e Barcelos Wotzasek [17, 18], que não segue a classificação anterior. Neste método o formalismo de Dirac pode ser evitado.

Nós consideraremos os formalismos de Fadeev-Jackiw-Barcelos-Wotzasek para tratarmos turbulência como um sistema vinculado. Estes procedimentos têm sido usados com grande sucesso em teoria Quântica de Campos para quantizar alguns modelos [37, 38, 39, 40, 41, 42]. Vamos ver um pouco mais sobre o formalismo de Fadeev-Jackiw-Barcelos-Wotzasek.

A.1 Formalismo simplético

No estudo de campos autoduais, Fadeev e Jackiw mostraram como o parêntese de Dirac pode ser obtidos através de um tratamento geométrico usando estruturas simpléticas [9]. Mas, campos autoduais só apresentam vínculos quando tratados no formalismo de Dirac [12]. O que nem sempre ocorre, já que a maioria dos sistemas vinculados no formalismo de Dirac o são, também, no formalismo simplético. A proposta de Fadeev-Jackiw para tais sistemas é que se fizesse, primeiramente, a eliminação dos graus de liberdade supérfluos. Isto, porém nem sempre é possível. Mesmo assim, o método simplético pode ser convenientemente estendido de tal maneira que os vínculos do sistema possam ser incorporados [10, 11], trabalhando com Lagrangianas de primeira ordem, do tipo

$$\mathcal{L} = A_\alpha \dot{\xi}^\alpha - U \quad (\text{A.5})$$

onde $\xi^\alpha(a_i, p_i)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 2N$) são variáveis simpléticas, A_α são os momenta canônico uma forma e U é o potencial simplético. Os a_i e p_i são variáveis do espaço e seus momen-

tos conjugados, respectivamente.

As Lagrangiana quadráticas sempre podem ser transformadas em primeira ordem introduzindo-se campo auxiliares e estendendo o espaço de configurações. A equação de Euler-Lagrange de (A.5) é

$$f_{\alpha\beta}\xi^\beta = \partial_\alpha U, \quad (\text{A.6})$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial U_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad (\text{A.7})$$

Quando os coeficientes $A_\alpha(\xi)$ são tais que $\det(f_{\alpha\beta}) \neq 0$ sem vínculos, podemos resolver (A.6) para as velocidades, tal que

$$\xi^\alpha = f^{\alpha\beta} \partial_\beta U, \quad (\text{A.8})$$

onde $f^{\alpha\beta}$, que é a inversa de $f_{\alpha\beta}$, é anti-simétrica e não singular. Ele é chamado de tensor simplético, e corresponde ao parênteses de Dirac do sistema descrito pela a Lagrangiana(A.5)

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\}^D = f^{\alpha\beta} \quad (\text{A.9})$$

Quando a matriz $f^{\alpha\beta}$ é singular, não podemos identificar $f_{\alpha\beta}$ com o tensor simplético, e o parênteses da teoria não podem ser consistentemente definidos. Para contornar esta dificuldade, os vínculos da teoria são usados para se produzir uma espécie de deformação na estrutura geométrica, levando ao aparecimento de um novo tensor que pode ser não singular [11].

Para isto, vamos denotar a quantidade singular acima por $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ e considerar que ela tenha M modos zeros $\nu_m^{(0)}$, $m = 1, 2, \dots, M$, tal que

$$f_{mn}^{(0)} \nu_m^{(0)} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Agora, usando (A.10) na equação (A.6) verificamos que

$$\nu_m^{(0)} \partial_m U = 0, \quad (\text{A.11})$$

que pode ser um vínculo. Consideremos que (A.11) seja realmente um vínculo (chamado de vínculo verdadeiro). Para produzirmos uma deformação do tensor $f_{\alpha\beta}^{(0)}$, devemos introduzir este vínculo na parte cinética da Lagrangiana por meio de multiplicadoes de

Lagrange. O espaço das configurações da teoria é estendido com este processo. Assim, a partir desta nova Lagrangiana, identificamos novos vetores $A_\alpha^{(1)}$. Em consequência, pode-se identificar novos tensores $f_{\alpha\beta}^{(1)}$. Se o $\det f_{\alpha\beta}^{(1)} \neq 0$, os vínculos da teoria foram eliminados, e os elementos da matriz $f^{(1)}$ podem ser identificados como sendo os parênteses de Dirac da teoria. Caso contrário, o procedimento deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias. Porém, pode acontecer do modo zero não conduzir a novos vínculos e a matriz continuar singular. Este é o caso, por exemplo, das teorias de calibre. Neste caso, a saída é fazer a fixação de calibre para se obter um tensor simplético.

B Elementos de Análise Tensorial

Cartesiana

B.1 Elementos da Análise Tensorial

O objetivo desse apêndice é apresentar, de modo breve, uma notação matemática - notação tensorial cartesiana-, que permitirá escrever as equações da dinâmica dos fluidos, em sua forma mais geral, de uma maneira relativamente simples e concisa.

B.1.1 Vetores

Um vetor pode ser caracterizado pelo seu módulo, sentido e direção, ou, ainda, por suas três componentes cartesianas,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ou

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (\text{B.2})$$

em que \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} são os vetores unitários dos eixos x, y, z , respectivamente. Em *notação tensorial cartesiana* ou *notação dos índices*, a e.(B.1) pode ser escrita

$$\vec{v} \equiv v_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{B.3})$$

em que $v_1 \equiv v_x$, $v_2 \equiv v_y$, $v_3 \equiv v_z$.

Consideremos, agora, um novo sistema de eixos x', y', z' obtido, por exemplo, a partir da rotação dos eixos originais x, y, z

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

As coordenadas do vetor \vec{v} nesse novo sistema de eixos podem ser escritas

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = v'_i. \tag{B.5}$$

E sabemos que \vec{v}' pode ser obtido a partir de \vec{v} por

$$\vec{v}' = A\vec{v}, \tag{B.6}$$

em que A é a matriz que descreve a transformação de coordenadas, ou matriz de rotação. Seja a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) o elemento genérico da matriz A . Logo, a eq.(B.6) pode ser escrita

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \tag{B.7}$$

ou seja,

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j \equiv a_{ij}v_j, \tag{B.8}$$

em que estamos usando a *convenção da soma*¹, em que a repetição de um índice significa soma. A eq.(B.8) representa três equações, para as componentes $v'_1 = v'_x$, $v'_2 = v'_y$, $v'_3 = v'_z$, contidas na eq.(B.7)

Note-se que, se o novo sistema de eixos for obtido pela rotação dos eixos x e y de um ângulo θ em torno do eixo z , a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.9}$$

¹ou convenção de Einstein.

Neste caso, a matriz (B.7) fica

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} v'_x &= \cos \theta v_x + \text{sen } \theta v_y, \\ v'_y &= -\text{sen } \theta v_x + \cos \theta v_y, \\ v'_z &= v_z. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Também notemos que os elementos da matriz de rotação são os *co-senos* diretores das direções dos novos eixos de coordenadas x', y', z' em relação aos eixos x, y, z . Assim, a_{ij} é o *co-seno* do ângulo entre o novo eixo i ($i = 1, 2, 3; \quad 1 = x', 2 = y', 3 = z'$) e o antigo eixo j ($j = 1, 2, 3; \quad 1 = x, 2 = y, 3 = z$).

B.1.2 Tensores Cartesianos

Além da convenção da soma, usamos na eq.(B.8) a *convenção de dimensões*, isto é, admitimos que um vetor tem três componentes, que representam as três dimensões do espaço físico. Em um espaço com n dimensões, o número de componentes de um vetor é $n^1 = n$. Por extensão do conceito de vetor, um *tensor de ordem r* em um espaço n dimensional terá n^r componentes. Por exemplo, para $n = 3$ (espaço físico tridimensional) o número de componentes de um tensor de ordem r está relacionado na tabela a seguir

| r | número de componentes | notação | denominação |
|---|-----------------------|-----------|---------------------------|
| 0 | $3^0 = 1$ | A | escalar |
| 1 | $3^1 = 3$ | A_i | vetor |
| 2 | $3^2 = 9$ | A_{ij} | tensor de segunda ordem |
| 3 | $3^3 = 27$ | A_{ijk} | tensor de terceira ordem. |

A eq.(B.8) para a transformação de um vetor pode ser generalizada para um tensor cartesiano de ordem r . Neste caso, temos, para uma rotação do sistema de coor-

denadas (ou também uma transformação ortogonal linear ²),

$$A'_{pqs\dots} = a_{pi}a_{qj}a_{sk}\dots A_{ijk\dots}, \quad (\text{B.12})$$

em que

1. $A_{ijk\dots}$ são as componentes de um tensor de ordem r no sistema inicial;
2. $A'_{pqs\dots}$ são as componentes do mesmo tensor no novo sistema de coordenadas;
3. a_{ij} são os *cosenos* diretores entre os novos eixos e os antigos.

Para um tensor de segunda ordem, a eq.(B.12) fica

$$A'_{pq} = a_{pi}b_{qj}A_{ij}, \quad (\text{B.13})$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

o que representa nove equações algébricas. Assim vemos que, comparando a notação (B.13) com a notação matricial (B.14) a concisão e elegância da primeira.

B.1.3 Operações Vetoriais

A notação tensorial cartesiana, usada, por exemplo, em (B.3) e (B.8), permite maior clareza e concisão na manipulação de vetores e operadores vetoriais. Consideremos as operações mais usuais nessa notação.

Produto Escalar

Na notação vetorial, temos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{B.15})$$

²Podemos, também, de uma maneira geral, considerar transformações lineares de coordenadas.

e usando a notação dos índices

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j. \quad (\text{B.16})$$

Introduzindo o delta de Kronecker (que é um tensor de segunda ordem),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

a Eq.(B.16) pode ser escrita por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j \delta_{ij}. \quad (\text{B.18})$$

Gradiente

O gradiente de uma função escalar f , contínua e com derivadas parciais contínuas em uma certa região é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}, \quad (\text{B.19})$$

que pode ser escrito por

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f, \quad (\text{B.20})$$

com $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Divergência

A divergência de uma função vetorial \vec{A} contínua e com derivadas contínuas em uma certa região é

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{B.21})$$

que pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \\ &= \partial_i A_i. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Produto Vetorial

O produto vetorial de \vec{A} e \vec{B} é

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (\text{B.23})$$

podendo ser escrito por

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (\text{B.24})$$

em que introduzimos o *símbolo de permutação* ϵ_{ijk} , ou símbolo anti-simétrico de Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i, j, k \text{ formam permutação na ordem cíclica: } 123, 231, 312. \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ formam permutação na ordem anti-cíclica: } 132, 213, 321. \\ 0, & \text{se } i, j, k \text{ não formam uma permutação: } i = j, i = k, \text{ ou } j = k. \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

O símbolo de permutação está relacionado com o delta de Konecker pela relação

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{irs} = \epsilon_{jki} \epsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr} \quad (\text{B.26})$$

ϵ_{ijk} é um pseudotensor, pois não se transforma exatamente segundo a relação (B.12). O produto $(\vec{A} \times \vec{B})_i$, então é um pseudovetor.

Rotacional

O rotacional do campo vetorial \vec{A} é

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}, \quad (\text{B.27})$$

e esta relação pode ser escrita por

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (\text{B.28})$$

em analogia com a equação (B.24).

Teorema de Stokes

Seja \vec{A} um campo vetorial e γ uma curva fechada, o teorema de Stokes afirma que podemos relacionar a circulação de \vec{A} em torno de γ com o fluxo de $\nabla \times \vec{A}$ através da área delimitada por γ da seguinte maneira

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} ds. \quad (\text{B.29})$$

Em notação de índices, temos

$$\oint_{\gamma} A_i dx_i = \int_S \epsilon_{ijk} \partial_j A_k n_i ds. \quad (\text{B.30})$$

Teorema do Gradiente

Seja f uma função escalar, e V o volume delimitado pela superfície fechada S . Então,

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f \hat{n} ds, \quad (\text{B.31})$$

em notação tensorial cartesiana

$$\int_V \partial_i f dV = \oint_S f n_i ds. \quad (\text{B.32})$$

Laplaciano

O operador Laplaciano em coordenadas cartesianas é

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{B.33})$$

ou em notação tensorial

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \partial_i^2. \quad (\text{B.34})$$

Derivada Material

Para a derivada material

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}, \quad (\text{B.35})$$

podemos escrever

$$\frac{DA_i}{Dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \partial_j A_i. \quad (\text{B.36})$$

Produto Externo

O produto externo de dois tensores cartesianos é o tensor obtido pela colocação dos tensores lado a lado, sem o uso dos índices de soma. Como exemplo, podemos fazer o produto de A_i e B_j

$$A_i B_j = C_{ij}, \quad (\text{B.37})$$

ou seja, o produto externo de dois tensores de primeira ordem é um tensor de segunda ordem. Para A_i e B_{jk} , temos

$$A_i B_{jk} = C_{ijk}, \quad (\text{B.38})$$

ou seja, o produto externo de um tensor de primeira ordem e um tensor de segunda ordem é um tensor de terceira ordem. Para A_{ij} e B_{mn} , temos

$$A_{ij} B_{mn} = C_{ijmn}. \quad (\text{B.39})$$

ou seja, o produto externo de dois tensores de segunda ordem é um tensor de quarta ordem.

Produto Interno

Chama-se *contração* ao processo de identificação de dois índices quaisquer de um tensor. Por exemplo,

1. $A_{ijk} \longrightarrow A_{ik}$ após a contração dos índices i e j .
2. $A_{ijk} \longrightarrow A_{ji}$ após a contração dos índices i e k .
3. $A_{ijk} \longrightarrow A_{ij}$ após a contração dos índices j e k .

Note-se que, como prevalece a convenção de soma, o tensor resultante é de primeira ordem. De modo geral, o processo de contração reduz a ordem de um tensor cartesiano por um fator 2. Podemos, então, definir o *produto interno* de dois tensores cartesianos como um produto externo seguido de uma contração envolvendo os índices de ambos os tensores. Por exemplo, para os tensores A_i e B_j , obtemos

$$A_i B_j \xrightarrow{\text{prod ext}} A_i B_i \xrightarrow{\text{prod int}} C,$$

ou seja, o produto interno de dois tensores de primeira ordem é um escalar. Naturalmente, este é o *produto escalar*, que é um caso particular do produto interno. Para os tensores A_j e B_{jk} , temos

$$A_i B_{jk} \longrightarrow A_i B_{ik} \longrightarrow C_k$$

$$A_i B_{jk} \longrightarrow A_i B_{ji} \longrightarrow C_j$$

ou seja, o produto interno de um tensor de segunda ordem por um de primeira é um tensor de primeira ordem. Para os tensores A_{ij} e B_{rs} , temos

$$A_{ij} B_{rs} \longrightarrow A_{ij} B_{is} \longrightarrow C_{js},$$

$$A_{ij} B_{rs} \longrightarrow A_{ij} B_{ri} \longrightarrow C_{jr}.$$

Assim, o produto interno de dois tensores de segunda ordem é um tensor de segunda ordem.

C Equações na Forma Tensorial

C.1 Equações da Dinâmica de Fluidos

Vamos usar, agora, a elegante notação tensorial cartesiana descrita no capítulo anterior para re-escrever as equações dos fluidos discutidas anteriormente em uma forma particularmente compacta e elegante. Nessa forma, as equações são especialmente úteis no caso de fluidos reais, em que a viscosidade não pode ser desprezada.

C.1.1 Equação da Continuidade

Anteriormente vimos que a equação da continuidade pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Usando a notação tensorial cartesiana, essa equação fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \partial_i \rho + \rho \partial_i v_i = 0, \quad (\text{C.2})$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v_i) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Note-se que

$$\partial_i (\rho v_i v_j) = \rho v_i \partial_i v_j + v_j \partial_i (\rho v_i), \quad (\text{C.4})$$

introduzindo (C.3) em (C.4), obtemos

$$\partial_i (\rho v_i v_j) = \rho v_i \partial_i v_j - v_j \partial_t \rho, \quad (\text{C.5})$$

que pode ser vista como a equação da continuidade em notação tensorial cartesiana.

C.1.2 Equação de Euler sem Forças Externas

A equação de Euler para um fluido não viscoso sem a ação de forças externas é (vide eq.(2.18))

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P. \quad (\text{C.6})$$

Usando notação tensorial cartesiana, temos

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_i P. \quad (\text{C.7})$$

Note-se que

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{C.8})$$

combinado as equações (C.7) e (C.8), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= -\partial_i P - \rho v_j \partial_j v_i + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\partial_i P - \left(\rho v_j \partial_j v_i - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Introduzindo (C.5) em (C.9), obtemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -[\partial_i P + \partial_j(\rho v_j v_i)]. \quad (\text{C.10})$$

Vamos escrever esta equação em uma forma mais simples, introduzindo o tensor Π_{ij} o qual é definido por

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j. \quad (\text{C.11})$$

Da eq.(C.11) vem que

$$\begin{aligned} \partial_j \Pi_{ij} &= \partial_j (P\delta_{ij} + \rho v_i v_j) \\ &= \partial_j (P\delta_{ij}) + \partial_j (\rho v_i v_j) \\ &= \partial_i P + \partial_j (\rho v_i v_j). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Combinando (C.10) e (C.12), obtemos

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_j \Pi_{ij}. \quad (\text{C.13})$$

em que fizemos $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. A eq.(C.13) é a *equação de Euler sem forças externas em notação tensorial cartesiana*. Esta equação é equivalente à equação de conservação do momentum (densidade de momentum), colocada em uma forma semelhante à da equação de continuidade eq.(C.3).

Note-se que o tensor Π_{ij} definido em (C.11) é de segunda ordem e simétrico, e seus componentes podem ser escritas na forma

$$\Pi_{ik} = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

ou ainda

$$\Pi_{ik} = \begin{pmatrix} P + \rho v_x^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_x v_y & P + \rho v_y^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & P + \rho v_z^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

Vamos mostrar que Π_{ik} está associado ao *fluxo de momentum* do fluido. Note-se que o momentum associado a um elemento de volume dv deslocando-se com velocidade \vec{v} é $\rho \vec{v} dv$. Assim, o primeiro membro da eq.(C.13) é simplesmente, a taxa de variação com o tempo do momentum do fluido, por unidade de volume. E segue-se da eq.(C.13) que

$$\int_V \partial_t(\rho v_i) dv = - \int_V \partial_k \Pi_{ik} dv, \quad (\text{C.16})$$

Usando o teorema da divergência no lado direito da eq.(C.16), temos que

$$\partial_t \int_V (\rho v_i) dv = - \oint_S \Pi_{ik} n_k ds, \quad (\text{C.17})$$

Agora, é natural chamar Π_{ik} de *fluxo de momentum* que, no presente caso, é um tensor simétrico de segunda ordem, sendo o momento um vetor, ou seja, um tensor de primeira ordem.

Por fim, a eq.(C.13) mostra que uma variação do momento em um dado ponto do espaço está relacionada com o fluxo do momento através de um elemento de volume em torno do ponto considerado. A forma (C.13) da equação de Euler é especialmente usada nos fluidos reais, onde a viscosidade está presente.

C.1.3 A Equação de Navier-Stokes

Já sabemos que, em fluidos ideais, na ausência de forças externas, só existe transporte de momento (e, portanto, forças atuando em um elemento de volume) por meio de gradiente de pressão. Vamos evidenciar a limitação desse tratamento com um exemplo bem simples. Consideremos uma camada de fluido em repouso e, acima desta, outra camada do mesmo fluido desloca-se com velocidade constante. Em um fluido ideal, o movimento se prolongaria indefinidamente, ainda que nenhuma força externa atuasse sobre o fluido. Obviamente, em fluidos reais, a camada superior sofreria uma desaceleração até parar, ficando todo o fluido finalmente em repouso. Essa desaceleração é causada por uma força tangencial (ou força de cisalhamento), sendo uma consequência da viscosidade do fluido. A viscosidade é uma manifestação dos processos irreversíveis de dissipação de energia, e atua como uma força de atrito. O escoamento de um fluido viscoso pode ser imaginado como uma pilha de lençóis deslizando uns sobre os outros. Nesse caso, a viscosidade corresponderia ao atrito, ou fricção entre os lençóis.

Nesta seção, apresentaremos uma dedução simplificada e intuitiva da equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos, usando a notação tensorial cartesiana. Nosso ponto de partida será a equação de Euler na forma tensorial, para um fluido sem ação de forças externas.

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik}. \quad (\text{C.18})$$

Podemos considerar a ação da viscosidade na forma de uma força por unidade de volume $\vec{\mathcal{F}}$. Neste caso, a Eq.(C.18) pode ser escrita

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik} + \mathcal{F}_i, \quad (\text{C.19})$$

É conveniente definir o *tensor de viscosidade* σ_{ik} tal que

$$\mathcal{F}_i = \partial_k \sigma_{ik}. \quad (\text{C.20})$$

A equação de Euler (C.19) fica

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) &= -\partial_k \Pi_{ik} + \partial_k \sigma_{ik} \\ &= -\partial_k (\Pi_{ik} - \sigma_{ik}). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

E logo,

$$\begin{aligned}\partial_t \int_V \rho v_i dv &= - \int_V \partial_k (\Pi_{ik} - \sigma_{ik}) dv, \\ &= - \oint_S (\Pi_{ik} - \sigma_{ik}) n_k ds.\end{aligned}\tag{C.22}$$

Em analogia com o que temos feito, se $-\oint_S \Pi_{ik} n_k ds$ corresponde à variação do momentum produzido pelas forças de pressão e pelo movimento do fluido através da superfície S , $\oint_S \sigma_{ik} n_k ds$ é o termo correspondente produzido pelas forças viscosas atuantes no fluido. Em uma descrição microscópica, este termo refere-se ao momentum transferido através da superfície S pelas colisões inelásticas dos átomos próximos à superfície.

O tensor de viscosidade σ_{ik} pode ser obtido de maneira geral e vigorosa, por exemplo, em estudos sobre elasticidade. Neste capítulo, faremos somente uma dedução intuitiva [20].

Seja um fluido isotrópico. Se o fluido estiver em repouso, ou em movimento uniforme, com velocidade \vec{v} idêntica em todos os pontos, não temos forças de cisalhamento. Porém, se houver alguma velocidade relativa entre as partículas do fluido, as forças viscosas serão importantes. Assim, espera-se que o tensor σ_{ik} não seja proporcional à velocidade v_i , mas que dependa das possíveis variações da velocidade, envolvendo termos do tipo $\partial_k v_i, \partial_k \partial_j v_i, \dots$. Vamos restringir nossa análise aos termos lineares, por simplicidade. Note-se, também que as forças viscosas atuam como se o fluido estiver em rotação uniforme, tal que sua velocidade possa ser escrita por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},\tag{C.23}$$

em que $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do fluido. Portanto, σ_{ik} deve ser nulo se a velocidade for constante e também se uma relação do tipo (C.23) for satisfeita. Usando notação tensorial cartesiana, podemos escrever

$$\begin{aligned}v_i &= \epsilon_{ijk} \omega_j x_k \\ v_k &= \epsilon_{kji} \omega_j x_i,\end{aligned}\tag{C.24}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\partial_k v_i &= \epsilon_{ijk} \omega_j \\ \partial_i v_k &= \epsilon_{kji} \omega_j,\end{aligned}\tag{C.25}$$

Assim, para que as duas condições ¹ sejam satisfeitas, o tensor σ_{ik} deverá ser proporcional aos termos $\partial_k v_i + \partial_i v_k$ e $\delta_{ik} \partial_r v_r$. Em outras palavras podemos escrever

$$\sigma_{ik} = \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) + \lambda \delta_{ik} \partial_r v_r,\tag{C.26}$$

em que μ e λ são os coeficientes de viscosidade dinâmica ² (veja equação (2.19)), que, em geral, são independentes da posição do fluido.

Introduzindo (C.26) em (C.21)

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik} + \partial_k [\mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) + \lambda \delta_{ik} \partial_r v_r].\tag{C.27}$$

Usando a definição de Π_{ik} , e a relação (C.11), obtemos

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k [P_0 \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) - \lambda \delta_{ik} \partial_r v_r],\tag{C.28}$$

em que usamos a notação P_0 para a pressão do fluido. Em termos da derivada material, a eq.(C.28) fica

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_k [P_0 \delta_{ik} - \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) - \lambda \delta_{ik} \partial_r v_r].\tag{C.29}$$

Definindo o tensor τ_{ik} :

$$\begin{aligned}\tau_{ik} &= \sigma_{ik} - P_0 \delta_{ik} \\ &= -P_0 \delta_{ik} + \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) + \lambda \delta_{ik} \partial_r v_r,\end{aligned}\tag{C.30}$$

a eq.(C.29) fica

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \partial_k \tau_{ik}.\tag{C.31}$$

Essa equação é análoga com a eq.(C.7) . Vemos que, se $\mu = \lambda = 0$, isto é, se a viscosidade for desprezível, as equações (C.29) e (C.31) reduzem-se ao caso anterior, dado pela eq.(C.7), e P_0 é a pressão exercida em um ponto qualquer do fluido. Note-se que no

¹ σ_{ik} não deve ser proporcional a v_i e o fluido não está em rotação uniforme.

²Alguns valores típicos: $\mu \simeq 0,01 \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$ para a água e $\mu \simeq 1,8 \times 10^{-4} \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$ para o ar; ambos medidos em temperatura ambiente.

caso presente, o conceito de pressão é mais complexo, e o termo $P_0\delta_{ik}$ constitui o valor estático do tensor τ_{ik} , que é chamado *tensor da tensões*. O tensor τ_{ik} é definido de modo que $\tau_{ik}n_k$ é a força que atua em um elemento de área de unitário \hat{k} . Portanto, τ_{ii} é a componente normal atuando em um elemento de área de unitário n_i . Sejam os tensores

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(\partial_k v_i + \partial_i v_k), \quad (\text{C.32})$$

$$e_{rr} = \partial_r v_r, \quad (\text{C.33})$$

Assim, o tensor τ_{ik} fica

$$\tau_{ik} = -P_0\delta_{ik} + 2\mu e_{ik} + \lambda\delta_{ik}e_{rr}. \quad (\text{C.34})$$

O tensor e_{ik} é conhecido como *tensor da taxa de deformação*, e a relação (C.34) reflete o fato de que a tensão em um fluido é proporcional à taxa de variação da deformação sofrida pelo fluido. Esse resultado foi inicialmente enunciado por Newton, nos *Principia*. Da Eq.(C.34), vem que

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= -P_0 + 2\mu e_{11} + \lambda e_{rr}, \\ \tau_{22} &= -P_0 + 2\mu e_{22} + \lambda e_{rr}, \\ \tau_{33} &= -P_0 + 2\mu e_{33} + \lambda e_{rr}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Logo

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \\ &= -3P_0 + 2\mu(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 3\lambda e_{rr} \\ &= -3P_0 + 2\mu e_{rr} + 3\lambda e_{rr}. \end{aligned}$$

e logo

$$-\frac{1}{3}\tau_{ii} = P_0 - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) e_{rr}. \quad (\text{C.36})$$

Vamos definir a pressão média P por

$$P = -\frac{1}{3}\tau_{ii}. \quad (\text{C.37})$$

Da eq.(C.36), temos

$$P = P_0 - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) e_{rr}. \quad (\text{C.38})$$

Como $e_{rr} = \nabla \cdot \vec{v}$ (vide Eq.(C.33)), então

$$P = P_0 - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v}. \quad (\text{C.39})$$

Novamente vemos que, se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, $P = P_0$, que é o valor estático da tensão (normal). Porém, se isto não ocorrer em um fluido viscoso, teremos $P \neq P_0$, o que significa que a pressão definida em (C.37), não poderá ser tratada como uma variável termodinâmica, já que ela passa a depender do tensor da taxa de deformação. Para que isso seja contornado, devemos ter

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (\text{C.40})$$

que é a hipótese de Stokes (vide equação (2.20)). E, desta forma, $P = P_0$

Considerando as equações (C.26) e (C.40), o tensor de viscosidade σ_{ik} fica

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_r v_r \right), \quad (\text{C.41})$$

e a equação de movimento (C.27) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) &= -\partial_k \Pi_{ik} + \partial_k \left[\mu \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_r v_r \right) \right] \\ &= -\partial_k \left[P \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \mu \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_r v_r \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

A equação (C.42) diz respeito ao movimento de um fluido viscoso sem forças externas não viscosa, como, por exemplo, as forças gravitacionais. Introduzindo a (densidade) de força \vec{F} devida a esses processos, a equação (C.42) fica

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \left[P \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \mu \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_r v_r \right) \right] + F_i. \quad (\text{C.43})$$

Consideremos, agora o caso particular de um fluido incompressível sob ação de forças externas. Neste caso, temos

$$\partial_r v_r = 0. \quad (\text{C.44})$$

Logo, a equação (C.41) reduz-se a

$$\sigma_{ik} = \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k), \quad (\text{C.45})$$

e a eq.(C.43) fica

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v_i &= -\partial_k \Pi_{ik} + \partial_k [\mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k)] + F_i \\ &= -\partial_k \Pi_{ik} + \mu \partial_k^2 v_i + \mu \partial_i \partial_k v_k + F_i \\ &= -\partial_k \Pi_{ik} + \mu \partial_k^2 v_i + F_i \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

onde usamos o fato que $\mu\partial_i\partial_kv_k = 0$.

Note-se que

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\partial_kv_i,$$

logo

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho D_tv_i - \rho v_k\partial_kv_i. \quad (\text{C.47})$$

Introduzindo a equação (C.47) em (C.46), vem que

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho v_k\partial_kv_i - \partial_k(P\delta_{ik}) - \partial_k(\rho v_iv_k) + \mu\partial_k^2v_i + F_i. \quad (\text{C.48})$$

Pela eq.(C.5), temos

$$\rho v_k\partial_kv_i - \partial_k(\rho v_iv_k) = v_i\partial_t\rho = 0. \quad (\text{C.49})$$

Portanto, a eq.(C.48) fica

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_k(P\delta_{ik}) + \mu\partial_k^2v_i + F_i, \quad (\text{C.50})$$

ou

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\partial_k(P\delta_{ik}) + \nu\partial_k^2v_i + \frac{1}{\rho}F_i, \quad (\text{C.51})$$

em que $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática.

As expressões (C.50) e (C.51) são as formas alternativas da *equação de Navier-Stokes* para um fluido homogêneo e incompressível. Esta equação representa a aplicação da segunda lei de Newton a um fluido com viscosidade.

Para encerrarmos esta seção, vamos voltar à equação (C.43) e obter a equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível com forças externas. Assim, usando (C.43), (C.47) e as equações (C.5) e (C.11), obtemos

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_k(P\delta_{ik}) + \mu\partial_k^2v_i + \mu\partial_k\partial_iv_k - \frac{2}{3}\mu\partial_k\partial_rv_r\delta_{ik} + F_i, \quad (\text{C.52})$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\partial_k(P\delta_{ik}) + \nu\partial_k^2v_i + \frac{1}{3}\nu\partial_k\partial_rv_r\delta_{ik} + \frac{1}{\rho}F_i, \quad (\text{C.53})$$

ou ainda, voltando a notação vetorial

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \frac{1}{\rho}\vec{F}. \quad (\text{C.54})$$

As relações (C.52), (C.53) e (C.54) são as expressões da *equação de Navier-Stokes para fluidos compressíveis*.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica vol.3*, Blucher, 2002.
- [2] W. Oliveira, *Notas de estudos*, Departamento de Física, ICE, UFJF.
- [3] Gabriel de Lima e Silva, *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Monografia/UFJF, 2010.
- [4] Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B. e Sands, Matthew. *The Feynman Lectures on Physics vol.2*, Addison-Wesley, 1970.
- [5] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, (1998).
- [6] H. Marmanis, *Phys.Fluids 10*, 1428 (1998).
- [7] H. Marmanis, *Analogy between the eletromagnetic and hydrodynamic equations: Application to Turbulence*, Ph.D. thesis, Brown University, July 1999.
- [8] A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira e F. I. Takakura, *Braz. J. Phys.* 33, 346 (2003).
- [9] Maciel, Walter J.; *Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução*, Edusp, 2005.
- [10] O. V. Troshkin, *The Wave of Turbulence* (VTs Akad. Nauk S.S.S.R., Moscow, 1989).
- [11] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York (1980).
- [12] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechancs*, (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Unversity, New York, 1964).
- [13] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Can. J. Math.* **3**, 1(1951); *Proc. R. Soc. A* **246**, 326 (1958); *Proc. R. Soc. A* **257**, 32 (1960).
- [14] A.J Hanson, T. Regge e C. Teitelboin, *Constrained Hamiltonian Systems*. Academia Nazionale dei Lincei, Rome (1976).
- [15] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, vol **169**. Springer-Verlag, New York/Berlin (1982).

- [16] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [17] L. Fadeev e R. Jackiw, Phys. Rev Lett. **60** , 1692(1988).
- [18] J. Barcelos Neto e C. Wotzasek, Mod. Phys. Lett. A. **7**, 1737 (1992).
- [19] J. Barcelos Neto e C. Wotzasek, Int. J. Mod. Phys. A. **7**, 4981 (1992).
- [20] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [21] V. I. Arnold, Ann. Inst. Fourier, **16**, 319 (1966).
- [22] V. I. Arnold, Appl. Math. Mech, **36**, 236 (1972).
- [23] V.I. Arnold and B.A. Khesin, Ann. Rev. Fluid Mech., **24**, 145 (1992).
- [24] J. Marsdem and A. Weinstein, Physica D **7**, 305 (1983).
- [25] V. Zeitlin, J. Phys. A **25**, L171 (1992).
- [26] V. Zeitlin, J. Phys. D **49**, 353 (1991).
- [27] P. J. Morrison *Hamiltonian description of the ideal fluid* Poceedings GFD 1993, 17-110. Woods-Hole Oceanographic Institute, Woods Hole (WHOI-94-12).
- [28] D. D Holm e V. Zeitlin, Phys. Fluids **10**, 800 (1998).
- [29] D. D Holm, Physica D **98**, 379 (1996).
- [29] H.Lamb, *Hidrodynamics*. Dover, New York (1932).
- [30] A. Clebsh e A. Crelle, J. Reine Angew. Math. **54**, 293 (1857);
A. Clebsh e A. Crelle, J. Reine Angew. Math. **5**, 1 (1859).
- [31] V. E. Zakharov, S. L Musher e A. M. Rubenchik, Phys. Rep. **129** (5), 285 (1985).
- [32] V. E. Zakharov, V. S. L'vov e G. Falkovic, *Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence*. Springer Verlag, New York (1992).
- [33] V. I Oseledets, Russian Math. Surveys **44**, 210 (1983).

- [34] S. Gama e U. Frish, *Local helicity, a material invariant for the odd dimensional Euler equations*, in NATI-ASI: Solar and Planetary Dynamos, 115-119, eds M. R. E. Proctor, P. C. Mathews e A. M. Rucklidge. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [35] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition. Addison-Wesley, Reading, MA (1980).
- [36] I. Antoniou e G. P. Pronko, hep-th/0106119.
- [37] J. Ananias Neto, W. Oliveira e Emanuel R. de Oliveira, *J. Phys. A: Math. Gen* **34**, 1 (2001).
- [38] M. M. Horta-Barreira e C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* **45**, 1410 (1992).
- [39] J. Barcelos-Neto e E.S. Cheb-Terrab, *Phys. C* **54**, 133 (1992).
- [40] J. Barcelos-Neto e E. Vasquez, *Z. Phys. C* **61**, 695 (1992).
- [41] C. Wotzasek, *Ann. Phys.* **241**, 76 (1995).
- [42] J. Ananias Neto, C. Neves e W. Oliveira, *Phys. Rev. D* **63**, 085018 (2001).
- [43] G. Russakoff, *A derivation of the macroscopic Maxwell equations*, *Am. J. Phys.* **38**, 1188 (1970).
- [44] T. Kambe (2010b), *A new formulation of equations ... by analogy with Maxwell's equations*, *Fluid Dyn. Res.* (42), 055502.
- [45] O. V. Troshkin 1993 *Comp. Maths Math. Phys.* **33** (12), 1613.