

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Dissertação de Mestrado

**Gravitação modificada pelos efeitos quânticos e as soluções
inomogêneas do tipo Kasner**

Simpliciano Castardelli dos Reis

9 DE JULHO DE 2015

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Dissertação de Mestrado

**Gravitação modificada pelos efeitos quânticos e as soluções
inomogêneas do tipo Kasner.**

Autor: Simpliciano Castardelli dos Reis

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Co-orientador: Dr. Filipe de Oliveira Salles

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física.

9 DE JULHO DE 2015

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Agradecimentos

- A Deus;
- Aos meus familiares;
- Ao meu orientador, Prof.Dr. Ilya L. Shapiro;
- Ao meu co-orientador, Dr. Filipe de Oliveira Salles;
- Ao meu amigo e primo em terceiro grau, Thiago Moralles de Abreu;
- Ao meu amigo, Fabricio Mattos;
- Ao meu amigo, Diego Gouvêa Pinto;
- Ao Sr. Domingos Lopes;
- A CAPES e FAPEMIG;
- A John Ono Lennon, James Paul McCartney, George Harrison e Richard Starkey.

Simpliciano Castardelli dos Reis

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

9 de Julho de 2015. Juiz de Fora – MG, Brasil

*“Quero desejar, antes do fim,
pra mim e os meus amigos,
muito amor e tudo mais;
que fiquem sempre jovens
e tenham as mãos limpas
e aprendam o delírio com coisas reais.”*

Belchior

Antes do Fim, ÁLBUM Alucinação

*“And in the end the love you take is
equal to the love you make.”*

The Beatles

The End, ÁLBUM Abbey Road

Resumo

Nesta dissertação serão vistos elementos de teoria de gravitação modificada pelos efeitos quânticos e uma proposta de métrica inomogênea do tipo Kasner. Primeiramente, irá se abordar a teoria semiclássica, consistindo esta na quantização dos campos de matéria, deixando o campo gravitacional como um campo externo clássico. Depois será vista a ação efetiva induzida pela anomalia como consequência do traço do tensor-momento energia não ser nulo a nível quântico. Por fim, será considerada a proposta da solução inomogênea do tipo Kasner e perspectivas futuras para essa solução.

Palavras chave: Ação efetiva; Espaço curvo; Métrica de Kasner; Métrica anisotrópica.

Abstract

In this work will be seen gravitation theory elements modified by quantum effects and a proposal for inhomogeneous metric type Kasner. First, it will address the semiclassical theory, consisting in this quantization of matter fields, leaving the gravitational field as a classical external field. Then will be seen the effective action induced by anomaly as a result of energy-momentum tensor trace not be null in the quantum level. Finally, the proposal of the inhomogeneous solution of the Kasner type and future prospects for this solution will be considered.

Keywords:Effective action; Curved space; Kasner metric; Anisotropic metric.

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	ii
Notação e convenções	v
Introdução	1
Aspectos gerais de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo	4
1 Aspectos Gerais de Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo	4
1 Campos quânticos em um espaço-tempo de fundo	4
2 A ação efetiva e correções quânticas a 1-loop	5
3 Acoplando Matéria e Gravidade	7
4 Método Schwinger-DeWitt	9
5 Aplicação da fórmula de Schwinger-DeWitt	12
Ação Induzida por Anomalia	13
2 Ação Induzida por Anomalia	13
1 Ação efetiva e anomalia	15
Solução de Kasner	20

3 Solução de Kasner	20
Anomalia e Kasner	23
4 Anomalia e Kasner	24
1 Métrica do tipo Kasner	25
Considerações finais	26
5 Considerações finais	27
Bibliografia	28

Geometria Riemanniana

A convenção de sinal para a métrica e para o tensor de curvatura utilizada nesta dissertação será (+ - - -). Logo será usada a seguinte assinatura para a métrica: (+ -, - -), sendo o tensor de Riemann,

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho},$$

e também defini-se o tensor de Ricci como sendo $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$. Em espaço-tempo curvo escreve-se a métrica como $g_{\mu\nu}$ e no caso especial para métrica de Minkowski como $\eta_{\mu\nu}$. O determinante da métrica será representado como

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}).$$

A simetrização entre dois índices será representada pelo uso de parênteses

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}),$$

e a anti-simetrização será denotada por colchetes

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}).$$

Convenções e abreviações

Na maior parte serão as unidades naturais de medida com $c = \hbar = \epsilon_0 = 1$, a não ser que seja dito o contrário. Também serão usadas as seguintes abreviações,

- ∂_μ : Derivada parcial;
- ∇_μ : Derivada covariante;
- $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$: Operador D'Alembertiano generalizado;
- \ln : Logaritmo natural;
- diag : matriz diagonal.

Introdução

Na ausência de uma teoria quântica de gravitação consistente, uma alternativa é a abordagem semiclássica. Trata-se, em primeira instância, em quantizar os campos de matéria e deixar o campo gravitacional figurando como um campo clássico externo. Nesta abordagem é necessária a inclusão de termos de altas derivadas na ação original, para que os campos de matéria possam ser renormalizáveis. Dessa forma a ação completa inclui o termo de Einstein-Hilbert com constante cosmológica [1]

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (1)$$

e os termos de altas derivadas

$$S_{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\}, \quad (2)$$

onde $C^2 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2R^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2$ é o quadrado do tensor de Weyl e $E = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\alpha\beta} + R^2$ é o termo topológico de Gauss-Bonnet. Todos os termos da ação do vácuo

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{HD} \quad (3)$$

pertencem à ação gravitacional. Se as equações de Einstein são consideradas como algo que de fato define a relação entre distribuição de matéria e geometria, é claro que ação completa, chamada ação do vácuo, deve contribuir.

De posse da ação do vácuo, passa-se em Teoria Quântica de Campos a investigar o comportamento dos campos de matéria no espaço-tempo curvo. Uma abordagem que se mostra útil é a da ação efetiva [9], na qual identificamos as correções quânticas à ação clássica dos campos de

matéria através da expansão em loop da ação efetiva. Com isso, pode-se calcular, por exemplo, o chamado potencial efetivo, obtendo a dinâmica do campo de matéria em questão [19]. Nesses cálculos surgem quantidades divergentes, sendo então necessário se passar ao processo de renormalização dos campos de matéria. Portanto, torna-se necessário identificar essas divergências na ação efetiva, e um dos métodos para isso é o chamado Método Schwinger-DeWitt.

As teorias de gravitação de altas derivadas tiveram início na investigação da estabilidade de soluções fisicamente importantes em [4], onde a estabilidade do vácuo quântico no espaço-tempo de Minkowski foi explorada pela primeira vez. Tarefa semelhante também foi posta em prática para o espaço de De Sitter [5]. No entanto, poucos estudos tem sido feitos sobre o comportamento de soluções anisotrópicas em teorias de gravitação de altas derivadas. Uma razão para estudo de modelos com métrica anisotrópica é porque a solução mais geral perto da singularidade acaba por ser anisotrópica. Dizendo isso, considera-se que, nos primeiros estágios da solução cosmológica, a expansão foi primeiramente anisotrópica, perto da singularidade, e apenas depois fez a transição para uma expansão isotrópica, a qual se observa no Universo de hoje.

Ainda que se considere que o Universo fora anisotrópico perto da singularidade, continua a existir o problema da própria singularidade. Como não há uma teoria quântica de gravitação completa, é preciso de início uma teoria clássica, mas com a qual pode-se construir as correções quânticas necessárias.

Os primeiros estudos acerca do comportamento de modelos cosmológicos anisotrópicos perto da singularidade na abordagem semiclássica foram feitos por V. A. Belinsky, A. A. Starobinsky e em outros trabalhos [6, 7].

Aspectos Gerais de Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo

Será focada a atenção aqui no desenvolvimento da teoria da gravitação semiclássica. Parti-se-á da revisão dos conceitos fundamentais da teoria e então será feita uma introdução à expansão de Schwinger-DeWitt (também conhecida como *DS-expansion*). Por fim, será mostrado a aplicação da expansão de Schwinger-DeWitt a um campo escalar real.

1 Campos quânticos em um espaço-tempo de fundo

Mesmo que uma teoria quântica da gravitação esteja atualmente fora de possibilidade [10], é possível formular uma teoria semiclássica para a gravitação. Tal teoria poderia então ser aplicada em escalas além da relatividade geral até à escala de Planck, onde toma lugar a teoria quântica da gravitação. A forma mais natural de formular uma teoria semiclássica é através de pequenas perturbações na métrica clássica de fundo. As perturbações irão surgir do campo de matéria quantizado [10].

Deve-se começar a formulação da teoria semiclássica considerando as equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

O conteúdo de matéria-energia do espaço-tempo irá contribuir na equação acima através do tensor de energia-momento, que é obtido através dos campos de tensores clássicos. Contudo,

a primeira tarefa será substituir o tensor de energia-momento clássico $T_{\mu\nu}$ pelo valor esperado quântico $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, definido como,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle}{\langle \text{out}, 0 | \text{in}, 0 \rangle}, \quad (1.2)$$

onde $|\text{in}\rangle$ e $\langle \text{out}|$ são os estados *in* e *out* do vácuo. Formalmente o valor esperado é obtido através dos campos de matéria quânticos. Porém, na prática, utiliza-se outro método, no qual é calculada uma ação efetiva para os campos de matéria pelo valor esperado através da seguinte relação,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (1.3)$$

2 A ação efetiva e correções quânticas a 1-loop

Uma vez que essa dissertação tem como um dos objetivos analisar correções quânticas a 1-loop para a ação com métrica anisotrópica de fundo, é de suma importância apresentar alguns elementos matemáticos e físicos da Teoria Quântica de Campos.

Na quantização de campos pode-se utilizar dois procedimentos de quantização: a quantização canônica ou a quantização por integrais de trajetória. A primeira consiste basicamente em se fazer uso do método operatorial, no qual os campos são tratados como operadores que atuam em um espaço de Fock[13]. Na segunda, soma-se, de uma maneira apropriada, sobre todas as configurações possíveis do campo, tratando os campos não como operadores, mas sim como variáveis estocásticas [3]. Usando qualquer uma das duas abordagens pode-se calcular amplitudes de transições de estados quânticos em processos de espalhamento de partículas fornecidas pela matriz S [13].

Na abordagem da quantização por integrais de trajetória define-se um dos objetos matemáticos mais importantes da Teoria Quântica de Campos, as chamadas funções de Green de n pontos

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle, \quad (1.4)$$

onde T significa ordenamento cronológico, ϕ é um campo escalar real e são usados os estados de vácuo. Dentro do formalismo das integrais de trajetória define-se ainda o funcional gerador das funções de Green

$$Z[J] = \langle 0, \text{out} | | \text{in}, 0 \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ iS[\phi, g_{\mu\nu}] + i \int d^n x J(x) \phi(x) \right\}. \quad (1.5)$$

O funcional $Z[J]$ pode ser entendido como o fornecedor da amplitude de transição entre o “vácuo inicial” e o “vácuo final” na presença da fonte “produtora de partículas” $J(x)$. O elemento diferencial $D\phi$ denota integração sobre todas as configurações possíveis do campo.

O funcional gerador $Z[J]$ gera todas as possíveis funções de Green, conectadas e não-conectadas. As funções de Green de n pontos são geradas através de $Z[J]$ efetuando-se n derivações variacionais

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta Z[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.6)$$

Define-se outro funcional, $W[J]$, que gere apenas funções de Green conectadas de n pontos, e que esteja relacionado com $Z[J]$ expresso na forma

$$e^{iW[J]}. \quad (1.7)$$

A dinâmica de um campo clássico, por exemplo, é expressa através das equações de movimento provenientes da variação de uma ação [14]. No domínio quântico a generalização da ação clássica recebe o nome de ação efetiva e consiste em se fazer correções quânticas à ação clássica. Considere-se primeiramente a definição de campo médio

$$\bar{\phi} = \frac{\delta W[J]}{\delta iJ(x)}, \quad (1.8)$$

então a ação efetiva é introduzida com a seguinte expressão

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int d^4x \bar{\phi}(x) J(x). \quad (1.9)$$

Pode-se notar que a ação efetiva é um funcional do campo médio e para se obter as correções quânticas à ação clássica, faz-se a expansão do campo escalar em torno do campo médio através de

$$\phi \longrightarrow \bar{\phi} + \phi,$$

e escreve-se a ação efetiva como

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\bar{\phi}, g_{\mu\nu}] + \bar{\Gamma}[\bar{\phi}], \quad (1.10)$$

sendo, $\bar{\Gamma}[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Gamma}^{(n)}[\bar{\phi}]$, a parte devido a correção quântica .

Ao nível de 1-loo, isto é, em primeira ordem na expansão, pode-se obter a conhecida fórmula para a parte devido a correção [2],

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\bar{\phi}] = \frac{i}{2} \ln \text{Det } S_2[\bar{\phi}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2[\bar{\phi}, g_{\mu\nu}], \quad (1.11)$$

com

$$S_2 [\bar{\phi}] = \frac{\delta S[\phi, g_{\mu\nu}]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \Big|_{\phi=\bar{\phi}}. \quad (1.12)$$

As correções quânticas a nível de 1-loop exigem o cálculo de determinantes funcionais. Para isso pode-se utilizar o método de Schwinger-DeWitt que será abordado em uma seção mais à frente.

Tomando-se $J = 0$ para o funcional $Z[J]$ obtém-se,

$$Z[0] = \langle 0, \text{out} | | \text{in}, 0 \rangle_{J=0}, \quad (1.13)$$

podendo-se notar que

$$\delta Z[0] = i \int \mathcal{D}\phi \delta S e^{iS[\phi, g_{\mu\nu}]} = i \langle 0, \text{out} | \delta S | \text{in}, 0 \rangle. \quad (1.14)$$

Logo,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} = i \langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle. \quad (1.15)$$

Se é conhecida a expressão para $Z[0]$ com a ação efetiva sendo

$$Z[0] = e^{i\Gamma}, \quad (1.16)$$

teremos,

$$ie^{i\Gamma} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = i \langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle. \quad (1.17)$$

Dividindo por $Z[0] = e^{i\Gamma} = \langle 0, \text{out} | | \text{in}, 0 \rangle$ iremos obter,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | \text{in}, 0 \rangle}{\langle 0, \text{out} | | \text{in}, 0 \rangle} = \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (1.18)$$

Que justifica a expressão (1.3).

3 Acoplado Matéria e Gravidade

Para o cálculo do valor esperado $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, por exemplo, para um campo escalar real, é conveniente começar escrevendo a ação clássica para o campo escalar acoplado à gravidade. Iremos obter que a variação desta ação com respeito ao campo escalar irá produzir a equação de movimento para o campo clássico. Esta equação de movimento pode ser “convertida” na expressão para

funções de Green. Vamos considerar agora o exemplo mais simples de campo escalar acoplado à gravidade. A lagrangiana clássica em quatro dimensões para esse caso será

$$\mathcal{L}_{cl} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\xi R\phi^2. \quad (1.19)$$

O espaço curvo manifesta-se nesta equação em duas formas: através da métrica no primeiro termo e do último termo no qual a gravidade está acoplada com o campo escalar.

A constante ξ determina o acoplamento entre matéria e gravitação. Dois casos importantes são o acoplamento mínimo $\xi = 0$ e o acoplamento não-mínimo, definido no espaço n -dimensional como [2],

$$\xi(\eta) = \frac{n-2}{4(n-1)}. \quad (1.20)$$

Para o caso bidimensional esses acoplamentos serão iguais, como podemos ver facilmente em (1.20).

A equação de movimento para o campo escalar será obtida variando a ação clássica

$$S_{cl} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{cl}, \quad (1.21)$$

com relação ao campo escalar

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \phi} = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + m^2 \phi + \xi R \phi = 0. \quad (1.22)$$

O campo clássico, então, deve satisfazer a equação de movimento clássica

$$[\square + m^2 + \xi R] \phi = 0, \quad (1.23)$$

onde, \square representa o operador de d'Alembert generalizado para coordenadas curvilíneas,

$$\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta. \quad (1.24)$$

A equação de movimento clássica dada em (1.23) pode ser usada para construir o operador de campo quantizado para ϕ . Porém, mais importante ainda é que pode-se usar (1.23) para encontrar as funções de Feynman-Green para o campo escalar

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)] G_F(x, x') = \frac{\delta^n(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}, \quad (1.25)$$

A equação (1.25) possui a seguinte solução,

$$G_F(x, x') = -[\square_x + m^2 + \xi R(x)]^{-1} \frac{\delta^n(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}. \quad (1.26)$$

4 Método Schwinger-DeWitt

Na segunda seção anterior, mostrou-se que as correções quânticas a 1-loop aos campos de matéria reduzem-se ao cálculo de um determinante funcional. Para empreender tal tarefa pode-se considerar um método, originalmente desenvolvido por Schwinger no contexto da Eletrodinâmica Quântica [16], e depois utilizado por DeWitt [15] no espaço-tempo curvo, chamado *Método Schwinger-DeWitt*. Como dito anteriormente, inicialmente irá se este método para o caso de um campo escalar real.

Para começar, é útil estabelecer o significado de $S[\bar{\phi}]$. Ele pode ser visto como o elemento matricial do operador

$$\hat{H} = \square + m^2 + \xi R, \quad (1.27)$$

atuando em uma espaço de Hilbert não-físico. Assim, tem-se

$$S_2[\bar{\phi}] = H(x_1, x_2) = \langle x_1 | \hat{H} | x_2 \rangle. \quad (1.28)$$

Os vetores $|x'\rangle$, que formam uma base para esse espaço de Hilbert, são autovetores de um conjunto de operadores x^μ hermitianos com espectro contínuo, logo

$$x^\mu |x'\rangle = x'^\mu |x'\rangle \quad \text{e} \quad (1.29)$$

$$\langle x' | x'' \rangle = \delta^{(4)}(x', x''). \quad (1.30)$$

Visto dessa maneira, o cálculo de determinantes funcionais se reduz a encontrar o determinante de uma matriz com infinitos termos. Tal abordagem é desenvolvida em [9].

Para aplicar o método de Schwinger-DeWitt, vamos considerar a variação de

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}$$

em relação a parâmetros externos. Dito de maneira mais específica, irá se ter apenas um parâmetro externo, neste caso o campo gravitacional de fundo. Obtém-se então

$$\delta \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = \frac{i}{2} \text{Tr} \hat{H}^{-1} \delta \hat{H}. \quad (1.31)$$

Pode-se representar o operador, \hat{H} , do seguinte modo [15]

$$\hat{H}^{-1} = \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}}, \quad (1.32)$$

sendo s chamado *tempo próprio de Schwinger*. A expressão para a correção em primeira ordem torna-se

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \hat{H}^{-1} \delta \hat{H} = \frac{i}{2} \text{Tr} \delta \hat{H} \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}} = \frac{i}{2} \text{Tr} \delta i \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}. \quad (1.33)$$

Comparando-se os lados esquerdos e direitos da expressão acima, obtemos

$$\text{Tr} \ln \hat{H} = i \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}. \quad (1.34)$$

Seguindo [DeWitt-65, livro muk], é introduzido o operador *Evolução*, dado por

$$\hat{U}(x, x', s) = e^{-is\hat{H}}, \quad (1.35)$$

o qual satisfará a equação

$$i \frac{\partial \hat{U}}{\partial s} = \hat{H} \hat{U}, \quad (1.36)$$

com a condição de que quando $s = 0$ se tem $\hat{U}(x, x'; s = 0) = \delta^{(4)}(x, x')$. Define-se também o operador

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi is)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(x, x') e^{i \frac{\sigma(x, x')}{s^2} - im^2 s}, \quad (1.37)$$

com $\sigma(x, x')$ sendo a distância geodésica entre os eventos x e x' , N o número de dimensões e $\mathcal{D}(x, x')$ o determinante de *Van Vleck-Morret*, o qual tem a seguinte forma

$$\mathcal{D}(x, x') = \det \left(-\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right).$$

Partindo de uma representação para o operador evolução na forma de uma expansão em série de potências de s , com a seguinte forma

$$\hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s) \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n(x, x'), \quad (1.38)$$

definindo-se a quantidade

$$\Delta(x, x') = \sqrt{-g(x')} \mathcal{D}(x, x') \sqrt{-g(x)}, \quad (1.39)$$

considerando que \hat{H} possa ser escrito do seguinte modo

$$\hat{H} = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}$$

e usando algumas propriedades de $\sigma(x, x')$, os coeficientes $\hat{a}_n(x, x')$ podem ser determinados através das seguintes equações [9, 15]

$$\nabla^\mu \sigma \nabla_\mu \hat{a}_0 = 0 \quad (1.40)$$

$$(n+1)\hat{a}_{n+1} + \nabla^\mu \sigma \nabla_\mu \hat{a}_{n+1} = \Delta^{-\frac{1}{2}} \square (\Delta^{\frac{1}{2}} \hat{a}_n) + \hat{\Pi} \hat{a}_n. \quad (1.41)$$

Para o caso em que $x \rightarrow x'$, segue que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \hat{a}_0 = \frac{1}{2} \hat{R}_{\mu\nu}, \quad (1.42)$$

sendo $\hat{R}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ o comutador no espaço dos campos. Para os demais coeficientes obtém-se [15]

$$\hat{a}_1(x, x) = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \quad (1.43)$$

$$\hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P} + \frac{1}{6} \square \hat{P} + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2, \quad (1.44)$$

onde o operador $\hat{S}_{\mu\nu}$ tem a seguinte expressão

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \hat{h}_\nu - \nabla_\nu \hat{h}_\mu) + (\hat{h}_\mu \hat{h}_\nu - \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu).$$

Ainda é possível, embora mais complicado, o cálculo dos demais coeficientes a_n , o que é feito para os coeficientes \hat{a}_3 e \hat{a}_4 em [17]. De posse dos coeficientes da expansão em potências de s do operador evolução, é feita sua substituição na relação $\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}$, e obtém-se assim

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = \frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{(4\pi i s)^{\frac{N}{2}}} \frac{\mathcal{D}^1(x, x')}{s^2} e^{i \frac{\sigma(x, x')}{s^2} - im^2 s} \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n(x, x') \quad (1.45)$$

Para o número de dimensões igual a quatro, somente os três primeiros termos na integral acima serão divergentes [10], com as divergências logarítmicas correspondendo ao terceiro termo da expansão. Portanto, a ação efetiva terá uma parte finita e outra divergente, com a expressão para a última, na regularização dimensional, dada por

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4 x \sqrt{-g} \text{Tr} \hat{a}_2(x, x), \quad (1.46)$$

onde $\varepsilon = (4\pi)^2 (n-4)$ é o parâmetro de regularização dimensional e μ o parâmetro dimensional de renormalização. Finalmente, fazendo-se a substituição da expressão para $\hat{a}_2(x, x)$ em (1.46) encontra-se

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P} + \frac{1}{6} \square \hat{P} + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right]. \quad (1.47)$$

5 Aplicação da fórmula de Schwinger-DeWitt

A fórmula de Schwinger-DeWitt foi obtida para o cálculo das divergências a 1-loop na seção anterior. Para o caso de um campo escalar real o operador \hat{H} tem a seguinte expressão

$$\hat{H} = \hat{1}(\square - m^2 - \xi R)_x, \quad (1.48)$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, N_s$, com N_s sendo o número de campos escalares reais. Comparando \hat{H} para o campo escalar real com a expressão geral

$$\hat{H} = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\mu\nabla_\mu + \hat{\Pi},$$

pode-se indentificar $\hat{h}^\mu = 0$, $\hat{\Pi} = -\hat{1}(m^2 + \xi R)$. Então, $\hat{S}_{\mu\nu} = 0$ e $\hat{P} = \delta_j^i[(\xi - \frac{1}{6})R - m^2]$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = & - N_s \frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2) + \frac{1}{2} m^4 + \right. \\ & \left. + m^2 (\xi - \frac{1}{6}) R + \frac{1}{2} (\xi - \frac{1}{6})^2 R^2 - \frac{1}{6} (\xi - \frac{1}{6}) \square R \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

É possível calcular também as divergências a 1-loop para campos espinoriais e vetoriais [10]. Por fim pode-se escrever a fórmula de Schwinger-DeWitt em uma forma mais compacta como

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = \frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} [wC^2 + bE + c\square R], \quad (1.50)$$

onde $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}R^2$ é o quadrado do tensor de Weyl para o espaço 4-dimensional, $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$ é o invariante topológico de Gauss-Bonet em quatro dimensões e os coeficientes w , b e c , são, respectivamente,

$$w = \frac{1}{120}N_0 + \frac{1}{20}N_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10}N_1 \quad (1.51)$$

$$b = - \left(\frac{1}{360}N_0 + \frac{11}{360}N_{\frac{1}{2}} + \frac{31}{180}N_1 \right) \quad (1.52)$$

$$c = \frac{1}{180}N_0 + \frac{1}{30}N_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}N_1, \quad (1.53)$$

sendo N_0 , $N_{\frac{1}{2}}$ e N_1 , nessa ordem, o número de campos escalares, espinoriais e vetoriais.

Após o uso da fórmula de Schwinger-DeWitt, resta passar à renormalização da ação, já que esta contém termos divergentes. Para o empreendimento dessa tarefa são incluídos contra termos afim de se cancelar as divergências. No entanto, a inclusão desses contra-termos gera o que se chama de Anomalia Conforme, que será tratada no próximo capítulo.

Ação Induzida por Anomalia

Considerando a nível clássico a ação total como sendo composta da ação do vácuo juntamente com a ação dos campos de matéria escalares, férmions de Dirac e Gauge Vetoriais, todos livres e sem massa, pode-se mostrar que há invariância da ação perante transformações conformes [20]. Isso é acarretado pela invariância conforme de cada parte da ação. Como consequência o traço do tensor momento-energia será nulo. No que se segue, primeiramente irá se demonstrar tal fato.

Para isso, suponha que se tenha um conjunto de campos ϕ^i na presença de um campo gravitacional externo $g_{\mu\nu}$. A identidade de Noether correspondente à simetria conforme local tem a forma [11]

$$-2g_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} + \sum_i \frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0, \quad (2.1)$$

onde d_i são os chamados pesos conformes. A nível clássico, como já dito, a ação é composta pela ação do vácuo e a dos campos de matéria. Os campos de matéria irão satisfazer as equações de movimento obtidas do principio variacional

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0,$$

o que reduz a identidade de Noether a

$$g_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.2)$$

Portanto, da definição dinâmica do tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{g_{\mu\nu}},$$

obtém-se que seu traço será nulo.

Ao se levar em conta as correções quânticas a 1-loop à ação dos campos de matéria na presença de um campo gravitacional de fundo, obtém-se a ação efetiva

$$\Gamma = S_{matéria} + S_{vac} + \bar{\Gamma}^{(1)}. \quad (2.3)$$

A parte devido à correção quântica, $\bar{\Gamma}^{(1)}$, possui termos divergentes. Para lidar com esse problema, faz-se uso do processo de renormalização, no qual são incluídos novos termos a fim de se cancelar essas divergências. Entretanto, restará uma parte finita que não é conformalmente invariante, e por isso é gerada uma anomalia no traço do tensor momento-energia [1].

Após a renormalização, a ação efetiva torna-se

$$\Gamma = S + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S, \quad (2.4)$$

onde novamente abreviou-se para S a ação do vácuo e da matéria, $\bar{\Gamma}^{(1)}$ é a parte devido a correção quântica a 1-loop e ΔS é o contra termo escolhido de maneira a cancelar as divergências. Em n dimensões ΔS tem a forma

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n \sqrt{-g} [wC^2 + bE + c\Box R], \quad (2.5)$$

que não é conformalmente invariante e como consequência tem-se

$$T = T^\mu_\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Delta S}{g_{\mu\nu}}.$$

Para calcular o traço acima será usada a transformação conforme e após se efetuar a derivação variacional serão tomados os limites indicados, obtendo-se

$$T = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-n\sigma} \frac{\delta \Delta S[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Big|_{n \rightarrow 4, \sigma \rightarrow 0, \bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}}. \quad (2.6)$$

É necessário expressar ΔS em função da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Para isso será aplicada a transformação conforme em cada termo de ΔS no espaço quadridimensional. Começando pelo quadrado do tensor de Weyl, temos segundo [11]

$$C^2_{\mu\nu\alpha\beta} = e^{4\sigma} \bar{C}^2_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.7)$$

e

$$\sqrt{-g} = e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}}, \quad (2.8)$$

de tal modo que

$$\sqrt{-g} C^2_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-\bar{g}} \bar{C}^2_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

Para se calcular a transformação conforme do segundo e terceiro termos de ΔS , é útil reescreve-lo como

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n \sqrt{-g} \left[w C^2 + b \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) + \left(c + \frac{2}{3} b \right) \square R \right], \quad (2.10)$$

Pode-se mostrar que a transformação conforme, em um espaço quadridimensional, para o segundo termo da integral acima fica sendo [11]

$$\sqrt{-g} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) = \sqrt{-\bar{g}} \left[\left(\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) + 4 \bar{\Delta}_4 \sigma \right], \quad (2.11)$$

onde Δ_4 é um operador conformalmente invariante no espaço quadridimensional, satisfazendo a

$$\sqrt{-g} \Delta_4 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4,$$

com a seguinte forma

$$\Delta_4 = \square^2 + 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \square + \frac{1}{3} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu. \quad (2.12)$$

Usando os resultados obtidos da aplicação da transformação conforme aos termos de ΔS , e substituindo-os na expressão do traço, obtém-se o resultado para anomalia [20].

$$T = -(w C^2 + b E + c \square R). \quad (2.13)$$

1 Ação efetiva e anomalia

Foi demonstrado anteriormente que devido às correções quânticas, chega-se a anomalia do traço do tensor momento-energia. Nesta seção, será considerada para a anomalia uma equação para a parte finita de Γ já renormalizada, na seguinte forma

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} = -(w C^2 + b E + c \square R). \quad (2.14)$$

Serão necessárias aplicações de transformação conforme a vários termos. Os resultados dessas transformações serão tirados de [11]. Também será usado, quando se mostrar necessário, a fórmula

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\delta A[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta\sigma}\Big|_{\bar{g}_{\mu\nu}\leftrightarrow g_{\mu\nu},\sigma\rightarrow 0} \quad to \quad (2.16)$$

Vamos expressar a equação para o traço utilizando-se da transformação conforme, assim temos

$$e^{4\sigma}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\sigma} = -\sqrt{-g}\left[wC^2 + b\left(E - \frac{2}{3}\square R\right) + \left(c + \frac{2}{3}b\right)\square R\right]\Big|_{g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}}, \quad (2.17)$$

onde os segundo e terceiros termos foram reescritos de uma forma conveniente, em razão da qual surgirá o operador auto-adjunto conformalmente invariante Δ_4 após a aplicação da transformação conforme. É obtida então uma equação diferencial em derivada variacional. Para resolvê-la aplica-se a transformação conforme em cada um dos termos e depois faz-se a integração em σ , com o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[\bar{g}_{\mu\nu}] &= S_c[\bar{g}_{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left[w\sigma\bar{C}^2 + b\sigma\left(\bar{E} - \frac{2}{3}\square\bar{R}\right) + 2b\sigma\bar{\Delta}_4\sigma\right] - \\ &- \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}\left(c + \frac{2}{3}b\right)R^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

No cálculo acima foi usada a fórmula

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}R^2 = -12\square R. \quad (2.19)$$

Por fim, é necessário expressar todos os termos na métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$, obtendo então

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= S_c[\bar{g}_{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{w\sigma\bar{C}^2 + b\sigma\left(\bar{E} - \frac{2}{3}\square\bar{R}\right) + 2b\sigma\bar{\Delta}_4\sigma - \right. \\ &- \left. \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}\left(c + \frac{2}{3}b\right)[\bar{R} - 6(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 6(\square\sigma)]^2\right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

O funcional conformalmente invariante S_c figura como uma constante de integração e geralmente ele é desconhecido. A solução acima entretanto não é covariante, pois não está expressa em função da métrica original $g_{\mu\nu}$. É necessário então obter uma solução covariante [12]. Para isso,

primeiramente deve-se obter algumas relações úteis para os cálculos aqui desenvolvidos. Será usada a relação

$$\int d^4x \sqrt{-g(x)} A(g_{\mu\nu}) \left[E - \frac{2}{3} \square R \right], \quad (2.21)$$

onde $A = A(g_{\mu\nu})$ é uma quantidade arbitrária, porém conformalmente invariante. Aplicando-se a transformação conforme a ela e após isso fazendo a variação em relação ao fator conforme $\sigma(y)$, tem-se então

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}(x)} A(g_{\mu\nu} e^{2\sigma}) \left[\bar{E} - \frac{2}{3} \square \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right] = 4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 A = 4\sqrt{-g} \Delta_4 A. \quad (2.22)$$

Visando a utilidade do último resultado para a obtenção da forma covariante da ação induzida, faz-se ainda a introdução da função de Green do operador Δ_4 , satisfazendo a

$$(\Delta_4)_x G(x, y) = \delta^4(x, y).$$

Usando desses resultados o termo na ação efetiva, que quando sofre variação com respeito ao fator conforme produz $T_w = -C^2$ é

$$\Gamma_w = \frac{w}{4} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y. \quad (2.23)$$

De maneira completamente análoga, o termo responsável por gerar $T_b = b \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)$ é

$$\Gamma_b = \frac{w}{4} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y, \quad (2.24)$$

por fim, utilizando (3.19) e (3.22) encontra-se para o último termo

$$\Gamma_c = -\frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x). \quad (2.25)$$

A ação induzida pela anomalia pode ser representada em forma local introduzindo campos escalares tensoriais [12]. Para a obtenção da representação covariante e local, é útil reescrever a ação na forma simétrica

$$\begin{aligned} \Gamma_{w,b} &= \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \\ &\quad \left[\frac{w}{4} C^2 - \frac{b}{8} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

É ainda útil a introdução do termo $\int d^4x d^4y \sqrt{-g(x)} \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) C^2(y)$ na ação. Apesar desse termo não ser diretamente produzido pela anomalia, ele é conformalmente invariante e pode

ser visto como uma redefinição do funcional $S_c[g_{\mu\nu}]$. Portanto, a ação induzida fica

$$\begin{aligned} \Gamma_{w,b} &= -\frac{b}{8} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left[\left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{w}{b} C^2 \right]_x G(x,y) \left[\left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{w}{b} C^2 \right]_y - \\ &- \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(\frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right)_x G(x,y) \left(\frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right)_y \end{aligned} \quad (2.27)$$

Então, com já dito, introduzindo os dois campos escalares auxiliares, ϕ e ψ , a ação efetiva induzida pela anomalia fica, na forma geral

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R - \frac{k_3}{12} R^2 + \frac{1}{2} \phi \Delta_4 \phi + \phi [k_1 C^2 + k_2 (E - \frac{2}{3} \square R)] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi + k_4 \psi C^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são os parâmetros da ação clássica do vácuo; k_1 , k_2 , k_3 e k_4 dependem dos coeficientes w , b e c , e consequentemente através deles, do número de campos de matéria, relacionados por

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{w}{2\sqrt{-b}}, \\ k_2 &= -\frac{\sqrt{-b}}{2}, \\ k_3 &= c + \frac{2}{3}b, \\ k_4 &= \frac{w}{2\sqrt{-b}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As equações de movimento para os campos auxiliares são obtidas da variação da ação com relação a ϕ e ψ , sendo portanto

$$\sqrt{-g} \left[\Delta_4 \phi + \frac{\sqrt{-b}}{2} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] = 0 \quad (2.30)$$

e

$$\sqrt{-g} \left[\Delta_4 \psi - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] = 0. \quad (2.31)$$

Já que os campos auxiliares são conformalmente invariantes, há a liberdade de escolher a transformação $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tornando as equações de movimento

$$\partial_\eta^4 \phi + 8\pi \sqrt{-b} \partial_\eta^4 \sigma = 0 \quad (2.32)$$

e

$$\partial_\eta^4 \psi = 0, \quad (2.33)$$

cujas soluções são

$$\phi = -8\pi\sqrt{-b}\sigma + \phi_0 \quad (2.34)$$

e

$$\psi = \psi_0, \quad (2.35)$$

onde ϕ_0 e ψ_0 são soluções da equação homogênea.

CAPÍTULO 3

Solução de Kasner

Neste capítulo será considerada uma solução exata e anisotrópica das equações de Einstein, estas derivadas da ação de Einstein-Hilbert, primeiramente obtida por Kasner em 1921 [8]. A razão para isso é que, ainda que o modelo isotrópico seja adequado para a descrição de estágios mais avançados na evolução do universo, em estágios iniciais (isto é, perto da singularidade), podem ter existido anisotropias que posteriormente passaram a ser isotrópicas. O desenvolvimento da obtenção dessa solução seguirá o livro [18]

Vamos considerar as equações de Einstein para o vácuo. Com uma escolha conveniente do sistema de coordenadas, teremos que todas as componentes do tensor métrico serão funções da coordenada $x^0 = t$, em unidades $c = 1$. Nesse caso, sem perda de generalidade, pode-se ter $g_{i0} = 0$, com $i = 1, 2, 3$. Com uma transformação de coordenadas

$$\sqrt{g_{00}} dt \longrightarrow dt, \quad (3.1)$$

podemos fazer g_{00} igual a um. Portanto, estamos diante do problema de resolver as equações de Einstein no vácuo, cuja a métrica tem as seguintes características

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}(t).$$

Usando a métrica acima, as equações do campo gravitacional no vácuo serão

$$\dot{\chi}_i^i + \frac{1}{2} \chi_i^j \chi_j^i = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\chi_i^j)' = 0, \quad (3.3)$$

onde $\chi_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}$ e γ é o determinante do jacobiano e o ponto representa derivação em relação ao tempo. Da segunda equação imediatamente temos

$$\sqrt{\gamma}\chi_i^j = 2\lambda_i^j, \quad (3.4)$$

onde os λ 's são constantes de integração. Contraindo os índices i e j , e usando as equações (3.2) e (3.4), temos

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_i^i. \quad (3.5)$$

Portanto, surge uma equação diferencial ordinária bastante simples e com ela obtemos que o determinante do jacobiano é

$$\gamma = \lambda_j^i t^2. \quad (3.6)$$

Com uma transformação apropriada, podemos sem perda de generalidade, fazer $\lambda_j^i = 1$. Usando dessa última condição e substituindo (3.4) em (3.2), temos

$$\lambda_i^j \lambda_j^i = 1. \quad (3.7)$$

Levantando-se o índice em (3.4) com a métrica γ_{ij} e usando a solução do determinante do Jacobiano, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{2}{t}\lambda_i^k \gamma_{jk}. \quad (3.8)$$

Os coeficientes λ_i^k podem ser vistos como as componentes de uma matriz. Por uma transformação linear nas coordenadas x^1 , x^2 e x^3 podemos fazer essa matriz assumir a forma diagonal. Denotando seus autovalores como p_1 , p_2 e p_3 e assumindo que eles sejam reais e distintos, temos

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}.$$

Com isso o sistema de equações diferenciais se tornará mais simples, por exemplo, uma das equações será

$$\dot{\gamma}_{11} = \frac{2}{t}\lambda_1^1 \gamma_{11},$$

cuja solução é

$$\gamma_{11} = \text{Constante} \cdot t^{2p_1}.$$

É fácil ver que acontecerá o mesmo para os demais elementos diagonais de γ_{ij} . Portanto, as demais soluções serão

$$\gamma_{22} = \text{Constante} \cdot t^{2p_2}$$

e

$$\gamma_{33} = \text{Constante} \cdot t^{2p_3}.$$

As constantes podem ser absorvidas por uma mudança de coordenadas, por exemplo, $\text{Const } dx \rightarrow dx$. Finalmente, escolhendo a direção dos autovetores de λ_j^i como a direção de nossos eixos do sistema de coordenadas, aos quais chamaremos de x , y e z , obtemos o intervalo

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2. \quad (3.9)$$

Do fato que $\lambda_i^j \lambda_j^i = 1$, obtemos a primeira condição que satisfazem os autovalores,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad (3.10)$$

e usando a solução para γ , temos a segunda condição

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (3.11)$$

Os três autovalores não podem ter o mesmo valor. O caso em que dois deles tem o mesmo valor ocorre em $(0, 0, 1)$ e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Em todos os outros casos os autovalores são diferentes, um deles sendo negativo e outro positivo. Podemos ver que o elemento de volume espacial na métrica de Kasner será dado por,

$$dV = t dx dy dz. \quad (3.12)$$

Portanto, a métrica de Kasner corresponde a um espaço homogêneo, porém anisotrópico, cujo volume e as distâncias entre dois eixos, por exemplo, os eixos y e z , aumenta com o tempo, enquanto que no outro eixo, neste caso o eixo x , as distâncias diminuem. O momento $t = 0$ é um ponto singular da solução. Neste ponto a métrica tem uma singularidade a qual não pode ser eliminada por qualquer transformação do sistema de coordenadas onde o tensor de curvatura quadridimensional seja nulo no infinito. A única exceção ocorre para os valores de $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Para estes valores, através da seguinte transformação

$$t \sinh z = \zeta \quad (3.13)$$

e

$$t \cosh z = \tau, \quad (3.14)$$

obtemos a métrica de um espaço de Minkowski, com intervalo dado por

$$ds^2 = d\tau^2 - d\zeta^2 - dx^2 - dy^2. \quad (3.15)$$

Caso se considere que os autovalores p_1 , p_2 e p_3 possam assumir valores complexos, a métrica pode ter funções, por exemplo, senoidais e logarítmicas. Uma métrica diferente, também poderia ser obtida se de início fosse considerado que todas as suas componentes são funções de outra coordenada que não a coordenada temporal. Por exemplo, se fosse considerado a coordenada $x^1 = x$ ao invés de $x^0 = t$, o método de obtenção das componentes do tensor métrico seria totalmente análogo, porém a solução obtida acarretaria no seguinte intervalo

$$ds^2 = x^{p_1} dt^2 - dx^2 - x^{p_2} dy^2 - x^{p_3} dz^2 \quad (3.16)$$

Cabe ainda ressaltar (como dito no início desse capítulo) que as equações de Einstein, das quais foi obtida a solução de Kasner, são provenientes da ação do vácuo, considerando-a apenas composta da ação de Einstein-Hilbert.

Este capítulo apresentará uma proposta de solução anisotrópica mais geral do tipo Kasner com base na ação efetiva induzida pela anomalia. Para começar, retorna-se temporariamente à solução de Kasner do capítulo anterior. Como obtido lá, a métrica de Kasner é dado por

$$ds^2 = dt^2 - t^{p_1} dx^2 - t^{p_2} dy^2 - t^{p_3} dz^2, \quad (4.1)$$

que é uma solução exata das equações de Einstein no vácuo. Usando essa solução, podem-se calcular as componentes do tensor de Ricci, dadas por

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{t^2} (p_1 + p_2 + p_3 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)), \\ R_{i0} &= R_{0i} = 0, \\ R_{11} &= (p_1 + p_2 + p_3 - 1) p_1 t^{2(p_1-1)}, \\ R_{22} &= (p_1 + p_2 + p_3 - 1) p_2 t^{2(p_2-1)}, \\ R_{33} &= (p_1 + p_2 + p_3 - 1) p_3 t^{2(p_3-1)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

com $i = 1, 2, 3$, além de que $R_{ij} = 0$ para $i \neq j$. O escalar de Ricci, R , será

$$R = \frac{1}{t^2} (p_1 + p_2 + p_3 (2 - p_1 + p_2 + p_3) - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \quad (4.3)$$

Se os coeficientes p_1, p_2 e p_3 satisfazem a

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad (4.4)$$

todas as componentes dos tensor de Ricci e do escalar de Ricci serão nulas. Portanto, se a solução de Kasner fosse usada como métrica de fundo, quaisquer termos calculados nas correções quânticas que envolvessem o tensor e o escalar de Ricci seriam nulos. As únicas contribuições poderiam surgir apenas do tensor de Riemann, cujas componentes são

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{p_1(1-p_1)t^{2p_1}}{t^2}, \\
R_{0202} &= \frac{p_2(1-p_2)t^{2p_2}}{t^2}, \\
R_{0303} &= \frac{p_3(1-p_3)t^{2p_3}}{t^2}, \\
R_{1212} &= \frac{p_1p_2t^{2p_1}t^{2p_2}}{t^2}, \\
R_{1313} &= \frac{p_1p_3t^{2p_1}t^{2p_3}}{t^2}, \\
R_{2323} &= \frac{p_2p_3t^{2p_2}t^{2p_3}}{t^2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

1 Métrica do tipo Kasner

A métrica de Kasner como apresentada até então é solução das equações de movimento do campo gravitacional no vácuo obtidas a partir da ação do vácuo contendo apenas o termo de Einstein-Hilbert. Devido as correções quânticas à ação clássica, a ação total considerada será a ação do vácuo adicionada da ação efetiva induzida pela anomalia e da ação dos campos de matéria classicamente conformes. Na busca de uma solução anisotrópica mais geral, irá se partir do seguinte intervalo, usando coordenadas esféricas

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)[dr^2 + b^2(t)r^2d\Omega], \tag{4.6}$$

sendo $d\Omega$ o elemento de ângulo sólido, dado por

$$d\Omega = d\theta^2 + c^2(t)\text{sen}^2\theta d\varphi^2. \tag{4.7}$$

Para simplificar, será adotado o tempo conforme, através da seguinte mudança

$$N(t)dt = a(\eta)d\eta. \tag{4.8}$$

Expressando $a(\eta)$ como

$$a(\eta) = e^{2\sigma(\eta)}, \tag{4.9}$$

tem-se então uma transformação conforme do tensor métrico na seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma(\eta)}\bar{g}_{\mu\nu}. \tag{4.10}$$

Desse modo, na métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ o intervalo será

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\eta^2 - dr^2 - b^2(\eta)r^2d\Omega. \quad (4.11)$$

É ainda útil expressar as funções $b^2(\eta)$ e $c^2(\eta)$ como

$$b^2(\eta) = e^{2\rho(\eta)}, \quad (4.12)$$

$$c^2(\eta) = e^{2\tau(\eta)}, \quad (4.13)$$

e no lugar de r^2 usar $\lambda(r)$. Com essas novas designações, a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ será

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -e^{2\rho(\eta)+2\lambda(r)}, -e^{2\rho(\eta)+2\lambda(r)+2\tau(\eta)} \text{sen}^2\theta). \quad (4.14)$$

Recorrendo às seguintes abreviações

$$2\rho(\eta) + 2\lambda(r) = W(r, \eta) \quad (4.15)$$

$$2\rho(\eta) + 2\lambda(r) + 2\tau(\eta) = \chi(r, \eta), \quad (4.16)$$

a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser expressa como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -e^{W(r,\eta)}, -e^{\chi(r,\eta)} \text{sen}^2\theta). \quad (4.17)$$

O próximo passo será aplicar a transformação conforme na ação total constituída da ação clássica e da ação efetiva induzida pela anomalia 2.28, expressar todos os termos na métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ e fazer as seguintes variações da ação para se obtêr as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\sigma(\eta)} &= 0, \\ \frac{\delta S}{\delta\rho(\eta)} &= 0, \\ \frac{\delta S}{\delta\tau(\eta)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com isso, pode-se analisar os efeitos quânticos de uma solução anisotrópica, pois se obterá um sistema de equações diferenciais de três equações para as funções $\sigma(\eta)$, $\rho(\eta)$ e $\tau(\eta)$. Voltando ao tempo físico, t , espera-se que para $t \rightarrow \infty$ se tenha $\rho = 0$ e $\tau = 0$, e com isso a métrica acabe por se isotropizar. Em um trabalho futuro serão feitos os cálculos anteriores e suas análises.

Considerações finais

Nesta dissertação foram apresentados elementos da teoria de gravitação modificada pelos efeitos quânticos e uma proposta de solução da métrica inomogênea do tipo Kasner. Primeiramente, partiu-se da revisão de alguns conceitos básicos da Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo, com a apresentação da abordagem da ação efetiva e as correções quânticas à ação. Depois foi apresentado o método Schwinger-DeWitt, com o qual pode-se identificar, usando regularização dimensional, a parte divergente da ação efetiva e realizar a renormalização com a introdução de contra-termos na ação. Também se considerou a aplicação do método Schwinger-DeWitt a um campo escalar real livre no espaço-tempo curvo. Depois foi feita uma breve exposição da invariância conforme, apresentando a identidade de Noether, e mostrando com esta que se uma ação clássica é conformalmente invariante o traço do tensor momento-energia será nulo. Porém, devido as correções quânticas à ação clássica, o traço do tensor-momento energia deixará de ser nulo, e por isso foi desenvolvida a ação efetiva induzida pela anomalia. Porém, na sua obtenção, a ação passa a ser não-local. Para contornar esse problema foram introduzidos dois campos escalares auxiliares, e ação pôde ser expressa localmente. Antes de se entrar de fato na proposta da solução inomogênea, foi feita uma dedução da solução exata das equações de Einstein no vácuo como obtida pelo matemático norte-americano Edward Kasner em 1921. Por fim, apresentou-se a proposta da solução inomogênea do tipo Kasner para as equações de movimento provenientes da ação total como composta da ação clássica juntamente da ação efetiva induzida pela anomalia.

Mostrou-se como aplicar uma transformação conforme à fim de reescrever a ação total de maneira conveniente a se encontrar as equações de movimento. Desenvolvimento mais aprofundados da proposta de solução inhomogênea do tipo Kasner serão deixados para trabalhos futuros.

Bibliografia

- [1] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [2] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder (Author), *An Introduction To Quantum Field Theory* (Westview Press,1995).
- [4] T. W. B. Kibble and S. Randjbar-Daemi, *Nonlinear Coupling Of Quantum Theory And Classical Gravity*, J. Phys. A A **13**, 141 (1980);
S. Randjbar-Daemi, *Stability Of The Minkowski Vacuum In The Renormalized Semiclassical Theory Of Gravity*, J. Phys. A A **14**, L229 (1981).
- [5] D. J. Gross, M. J. Perry and L. G. Yaffe, *Instability of Flat Space at Finite Temperature*, Phys. Rev. D **25**, 330 (1982).
- [6] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology*, Adv. Phys. **19** (1970) 525.
- [7] Y. B. Zeldovich and A. A. Starobinsky, *Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 1159 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 2161].

- [8] E. Kasner, *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations*, Am. J. Math. **43**, 217 (1921).
- [9] V.Mukhanov and S.Wnitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [10] I. L. Shapiro, *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001 [arXiv:0801.0216 [gr-qc]].
- [11] I. L. Shapiro, *Conformal anomaly and its applications to cosmology and black hole physics*, PoS BHGRS (2008) 031.
- [12] I. L. Shapiro and A. G. Zheksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. B **324** (1994) 286.
- [13] W.Greiner, *Field Quantization* (Springer, Berlin, 1996).
- [14] N.A Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [15] B.S.DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields* (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [16] J.Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [17] I.G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity* (Ph.D. thesis at Moscow State University, 1986).
- [18] L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *The classical theory of fields* (Butterworth Heine-
mann, New York, 1987).
- [19] I.L. Shapiro, *Notas de aula em Teoria Quântica de Campos* (unpublished).
- [20] A.M Pelinson, *Modelo Cosmológico Inflacionário baseado nos Efeitos Quânticos do Vácuo* (Ph.D. thesis at Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2003).