Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rômulo Machado Garcia

O uso do Princípio Fundamental da Contagem e estratégias para abordar e desenvolver a Análise Combinatória

Juiz de Fora

2017

Rômulo Machado Garcia

O uso do Princípio Fundamental da Contagem e estratégias para abordar e desenvolver a Análise Combinatória

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Garcia, Rômulo Machado.
O uso do Princípio Fundamental da Contagem e estratégias para abordar e desenvolver a Análise Combinatória / Rômulo Machado Garcia. – 2017.
51 f. : il.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

1. Análise Combinatória. 2 Resolução de problemas. 3 Princípio fundamental da contagem. I. Vasconcelos, Sérgio Guilherme de Assis, orient. II. Título.

Rômulo Machado Garcia

O uso do Princípio Fundamental da Contagem e estratégias para abordar e desenvolver a Análise Combinatória

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 08 de agosto 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Mateus Balbino Guimarães
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

RESUMO

Este trabalho tem como propósito facilitar a compreensão da Análise Combinatória no Ensino Médio e, também, ser um material de referência para os professores que lecionam esse assunto. Aqui procuramos ilustrar como é possível construir toda a Análise Combinatória sem ficar restrito ao uso de fórmulas, tomando o PFC - Princípio Fundamental da Contagem - como base, e não usando Arranjos e Combinações. Esses dois assuntos serão trabalhados, mas não como referência. A versatilidade e a aplicabilidade da Análise Combinatória são apresentadas de forma acessível tanto a professores quanto a alunos através da resolução de vários problemas. Buscamos em diversas situações estabelecer raciocínios importantes e exemplificar diversos problemas com o intuito que os alunos e professores entendam que é de extrema importância visualizar o que está ocorrendo no exercício e se colocar no lugar da pessoa que está executando a tarefa proposta no enunciado.

Palavra-chave: Análise Combinatória. Resolução de problemas. Princípio fundamental da contagem.

ABSTRACT

This work aims to facilitate the understanding of Combinatorics in High School and to be also a reference material for teachers who teach this subject. Here, we seek to illustrate how it is possible to construct all Combinatorics without being restricted to the use of formulas, taking the PFC - Fundamental Principle of Counting - as a base, and not using Arrangements and Combinations. These two issues will be worked out, but not as a reference. The versatility and applicability of Combinatorics are presented in a way to make it available for use by other teachers and students as well, through the resolution of different problems. In various situations, our aim is to establish important reasonings important and illustrate several problems in order to make students and teachers understand that it is extremely important to show all the process and to put oneself in the place of the one who is performing the task proposed in the statement.

Keyword: Combinatorics. Troubleshooting. Fundamental Principle of Counting.

SUMÁRIO

.

1 INTRODUÇÃO

Durante a vida no ensino médio e na universidade, a Análise Combinatória sempre foi a minha grande dificuldade. Não conseguia compreender a linha do raciocínio que eu deveria seguir e sempre me deparava com uma grande dificuldade em usar as fórmulas, pois não conseguia identificar o momento para usar cada uma delas.

Atravessei a universidade e me formei sem ter um domínio sequer razoável do assunto, mas um desafio apareceu e mudou muito a minha vida dentro da Matemática. Em 2006 fiz um processo para monitor de Matemática no colégio Apogeu em Juiz de Fora. Recordo-me que foram 20 questões e acertei 19 errando, justamente, uma questão relacionada à Análise Combinatória. Fui selecionado e as oportunidades foram aparecendo.

Um dos donos do colégio à época, Vinícius Batalha, era professor de Análise Combinatória da turma preparatória para os vestibulares do IME (Instituto Militar de Engenharia) e ITA (Instituto Tecnológico da Aeronáutica), que são dois dos vestibulares mais difíceis do país, exigindo uma grande preparação do aluno, e precisava sair de sala de aula em 2007. Chegou até mim e ofereceu essas aulas. Aceitei na mesma hora, mas retifiquei a minha grande deficiência nesses assuntos. Foi então que se iniciou um longo processo de aprendizagem, onde ele me deu dois livros para eu iniciar os estudos [3].

A medida que a dúvidas foram surgindo, eu retornava a ele e, assim, a evolução foi ocorrendo. Comecei a entender muito melhor o assunto e fui construindo uma linha própria de raciocínio. Passei a observar e focar não no assunto em si, mas sim no que o problema solicitava. O tempo passava, mas os estudos não paravam. Depois de um estudo nesses dois livros, uma nova etapa surgiu, onde tive a oportunidade de conhecer o livro espanhol "¿De quantas formas?". Com o avanço, comecei a me fazer algumas perguntas, ainda mais pelo fato da abordagem da Análise Combinatória nos deixarmos com várias opções para atacarmos um problema e ficarmos diante de uma situação em que várias vezes nos perguntamos o que devemos usar para desenvolvermos tal questão: Princípio Fundamental da Contagem, Permutações (simples, com repetições, circulares), Arranjos, Combinações?

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda de quantas formas diferentes um determinado acontecimento pode ocorrer, sem que haja a necessidade de descrevermos todas essas possibilidades. Análise Combinatória é a "arte de contar" e, para facilitar a compreensão dessa arte, passei a fazer uma análise baseada em diversas contestações:

i Será que o leitor precisa saber resolver um problema usando os Arranjos Simples?

ii Por que não desenvolver todos os problemas de Análise Combinatória básica: P.F.C., Permutações, Arranjos e Combinações usando apenas o P.F.C. e a ideia de Permutação Simples e depois apresentar os demais itens como facilitadores para desenvolver o problema e não mais uma fórmula ou ferramenta para confundir, ainda mais, um problema?

iii Por que não criarmos estratégias para desenvolver alguns tipos de problemas?

iv Como mostrar de forma clara a grande importância da ideia de ordem para o problema e como devemos nos posicionar quando essa ordem não for importante para o mesmo? Como desconsiderar essa ordem?

v Podemos "construir" e desenvolver a Análise Combinatória de um modo diferente forçando o leitor a raciocinar e vivenciar aquele enunciado em vez de ficar diante de várias formulas sem saber como utilizá-las.

vi Nunca adiar uma decisão e não ter medo de separar um determinado problemas em casos diferentes. Muitas vezes, devemos separar um problema em alguns casos para conseguir solucioná-lo.

Algumas açõesdevem ser feitas para se obter o sucesso em Análise Combinatória é uma **sequência de importantes perguntas:**

I O que queremos fazer?

II Quantas atitudes devemos tomar? Quantas "coisas" queremos escolher?

III De quantas formas podemos tomar cada atitude? De quantas formas podemos fazer cada uma dessas escolhas?

IV Escolhidos os elementos (em problemas que temos um grupo de elementos e precisamos selecionar uma quantidade de elementos desse grupo), a ordem entre os elementos que estamos escolhendo IMPORTA ou NÃO IMPORTA?

Meu grande objetivo nesse trabalho foi construir uma Análise Combinatória passando diversos raciocínios e ótimas estratégias para abordarmos diversos tipos de problemas. Um material em que professores e alunos possam usar para se aprimorarem e, também, para perceberem que essa "arte de contar" pode ser muito prazerosa, mesmo sendo um dos assuntos mais complicados de todo o ensino médio.

Veremos aqui não somente a parte básica da Análise Combinatória, mas também raciocínios mais elaborados como a Combinação Completa (ou Combinação com elementos repetidos), Lema de Kaplansky, Princípio da Inclusão e Exclusão e Permutação Caótica.

2 FATORIAL

Para iniciarmos e, principalmente, facilitar os estudos em Análise Combinatória, precisamos conhecer o fatorial de um número natural, que é o produto de todos os números inteiros positivos, desde 1 até n.

Definição:

Sendo n um número natural, maior que 1, $n!$ (n fatorial ou fatorial de n) é o produto de todos os naturais de n até 1, ou seja, $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$ e por convenção $1! = 1$ e $0! = 1$. Ao desenvolvermos um fatorial é conveniente colocarmos os fatores em ordem decrescente podendo interromper onde for conveniente e indicando os últimos com a notação fatorial.

Exemplos:

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 6.5.4.3! = 6.5!$

$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)!$

$(n+2)! = (n+2).(n+1)! = (n+2).(n+1).n.(n-1)!$

3 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (P.F.C.)

O princípio fundamental da contagem (P.F.C.) é um princípio combinatório que indica quantas vezes e as diferentes formas que um acontecimento pode ocorrer.

“Se um acontecimento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e se, para cada uma das m maneiras possíveis de ocorrências de A, um segundo acontecimento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento A seguido do acontecimento B é $m \cdot n$". Em outras palavras, o acontecimento é formado por dois estágios (duas atitudes!) caracterizados como sucessivos e independentes:

- O **primeiro estágio** pode ocorrer de m modos distintos.
- O **segundo estágio** pode ocorrer de n modos distintos.

Se para a escolha da primeira atitude temos m possibilidades e para cada uma dessas m possibilidades temos n possibilidades para a segunda atitude, podemos dizer que o número de formas diferentes que pode ocorrer um acontecimento é igual ao produto $m.n$.

Os problemas de contagem de alguns tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos são típicos em Análise Combinatória. O estudo do P.F.C. pode ser iniciado mostrando a sua ligação com os Produtos Cartesianos e com Relações entre conjuntos.

Veremos agora alguns exemplos da aplicação do princípio fundamental da contagem:

3.1 EXEMPLOS

1. De quantas formas diferentes podemos colocar 5 pessoas (A, B, C, D, E) em:

a) 3 bancos alinhados.

Resolução

Temos 5 pessoas para colocarmos em 3 lugares. Como não temos lugares para todas pessoas, não é o ideal “perguntar para cada pessoa” quantas possibilidades de lugares que temos para cada uma delas, pois temos mais pessoas que lugares. A melhor estratégia é verificar quantas possibilidades temos para cada lugar. Portanto, **temos 3 atitudes a serem tomadas!**

h h h

$5p \,.\, 4p \,.\, 3p = 60p$ (60 possibilidades)

b) 7 bancos alinhados

Resolução

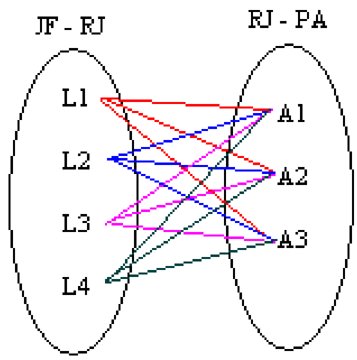
Temos 5 pessoas para colocarmos em 7 lugares. Como não temos pessoas para todos os lugares, não é o ideal “perguntar” quantas pessoas podem ocupar cada lugar, pois temos mais lugares que pessoas. A melhor estratégia é verificar quantas possibilidades de lugar temos para cada pessoa. Portanto, **temos 5 atitudes a serem tomadas!**

A	B	C	D	E	
$7p$.	$6p$.	$5p$.	$4p$.	$3p$	$= 2520p$

2. Um aluno deseja se deslocar de Juiz de Fora até Porto Alegre, mas ele deseja ir de avião e só poderá embarcar na aeronave no Rio de Janeiro. Sabendo que ele tem quatro linhas diferentes de ônibus para ir de Juiz de Fora até o Rio de Janeiro e, chegando lá, ele deve escolher 3 companhias aéreas para Porto Alegre, de quantas maneiras o aluno pode fazer isso?

Resolução

Figura 1



Fonte: Própio Autor

É fundamental a pessoa se envolver no problema. Ela deve se colocar no lugar do aluno que está em JF e pode escolher 1 dentre 4 linhas de ônibus disponíveis e ele deve se indagar: “Caso eu escolha a L_1, tenho 3 opções para escolher a companhia aérea, mas se eu escolher a L_2, também, terei 3 possibilidades e da mesma forma se escolher L_3 ou L_4 terei as mesmas 3 possibilidades para escolher o avião a ser tomado. Assim, como para cada possibilidade de escolher a linha de ônibus eu tenho 3 possibilidades de escolher a companhia aérea e como eu tenho 4 linhas disponíveis, posso realizar essa viagem de $4.3 = 12$ modos distintos, pois para cada possibilidade de escolher 1 linha de ônibus eu tenho 3 possibilidades de escolher uma companhia aérea." Assim, vivenciando o problema, colocando-se no lugar da personagem, e pensando sempre que para cada possibilidade de efetuar a primeira escolha ele tem x possibilidades de efetuar a segunda escolha, o problema se torna mais simples de ser solucionado. É essencial ele pensar nessa ideia e ter calma na hora de analisar cada escolha feita inicialmente.

3. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

Resolução

Para o primeiro algarismo (milhar), existem 9 possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram 9 algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram 8 algarismos.

Logo, existem 9.9.8 = 648 números.

4. Um prédio possui 7 portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

Resolução

Para a entrada posso escolher qualquer uma das 7 portas. Escolhida a porta de entrada, sobram 6 portas para a saída. Logo, existem 7.6 = 52 maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

5. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

Resolução

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Se ele termina com 2, sobram 2 posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição temos 5 possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram 4 para a segunda posição. Logo, existem 5.4 = 20 números pares com 3 algarismos distintos terminando com 2. Analogamente, existem 20 que terminam com 4 e vinte que terminam com 6. Logo, o número total é 60.

6. Quantos números com 4 algarismos podemos formar usando os elementos do conjunto A = 1, 3, 5, 6, 8?

Resolução

5.5.5.5 = 625 possibilidades

7. Quantos números ímpares com 4 algarismos podemos formar usando os elementos do conjunto A = 1, 3, 5, 6, 8?

Resolução

5.5.5.3 = 375 possibilidades

8. Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar usando os elementos do conjunto A = 1, 3, 5, 6, 8?

Resolução

5.4.3.2 = 120 possibilidades

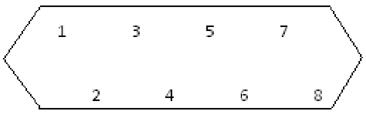
9. Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar usando os elementos do conjunto A = 0, 1, 3, 5, 6, 8?

Resolução

Atenção com o 0 (ZERO) 5.5.4.3 = 300 possibilidades

10. Consideremo um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:

Figura 2



Fonte: Próprio Autor

Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições:

Os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par.

Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições.

Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

Resolução

Os remadores A e B devem ficar do lado ímpar, assim temos 4.3 = 12 posições para eles. Como o remador C deve ficar do lado par, temos 4 posições para ele. Os demais 5 remadores podem ser distribuídos de qualquer forma, isto é, 5.4.3.2.1= 120. Pelo P.F.C., temos 12.4.120 = 5760 posições distintas. Entraremos em alguns exemplos onde veremos o quão importante a definição do PFC tem que ser levada em consideração.

11. Quantos números pares com 3 algarismos distintos podemos formar usando os elementos do conjunto A = 0, 1, 3, 5, 6, 8?

Resolução

Inicialmente, o leitor deve impor quais algarismos são candidatos às três casas numéricas que temos.

Ele deve analisar o que acontece com as suas possibilidades ao escolher cada algarismo. Como o problema deseja que o número seja par, ele deve perguntar quantas possibilidades ele terá para compor a casa das unidades. Mas e se ele escolher o 0 para colocar na casa das unidades? E se escolher o 6? E o 8?

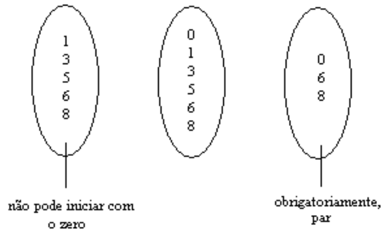
Ele, ainda, deve observar que caso escolha o 0, para a casa das unidades, ele terá 5 possibilidades para a casa das centenas, mas caso ele escolha o 6, ele terá apenas 4 possibilidades, pois os algarismos não podem ser repetidos e o 0 não pode aparecer na casa da centena. Assim, ele fica diante de um problema: se ele escolher o 0 ele tem 5 possibilidades para escolher o 1° algarismo e se escolher o 6 ou o 8 ele terá 4 possibilidades. Logo, ele deve perceber que o problema deve ser separado em dois casos. Ele só perceberá que esse problema fica mais simples se, com calma, **analisar cada caso, olhar para cada algarismo e ver o que a escolha de cada um afeta na escolha dos outros.**

Caso perceba que para determinada posição temos x algarismos, mas para cada um deles não temos a mesma quantidade de possibilidades de escolhermos os algarismos de outra "casa" devemos pensar em separar em casos. Com isso, a solução agora tornaria mais tranquila e objetiva. Para que tudo isso ocorra, realmente, a entrega ao problema deve existir e o leitor tem que se colocar dentro da questão.

Devemos separar em dois casos:

iNão termina em zero:
$4p.4p.2p = 32$ possibilidades

Figura 3



Fonte: Próprio Autor

iiTermina em zero:

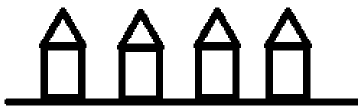
$5p.4p.1p = 20$ possibilidades

Logo, temos $32 + 20 = 52$ possibilidades.

12.) De quantas formas podemos pintar 4 casas usando 4 cores diferentes de modo que as casas vizinhas tenham cores diferentes?

a) as casas estão dispostas uma ao lado da outra, alinhadas como na figura:

Figura 4



Fonte: Próprio Autor

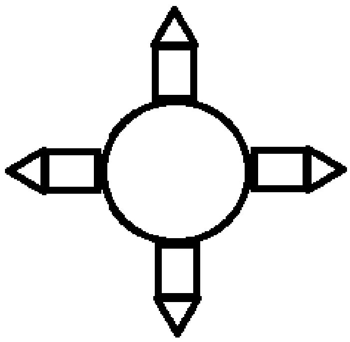
Resolução

Sejam A, B, C e D essas 4 cores diferentes. Mesmo se a pessoa que está executando esse exercício não for muito atenta à definição do P.F.C., poderá ter êxito. Porém, no exemplo seguinte isso será difícil.

Temos 4 possibilidades para a escolha da cor para pintar a 1ª casa e, escolhida essa cor, sobram 3 cores distintas para a escolha da cor para pintar a 2 ª casa. Já para a 3ª casa, continuamos com 3 possibilidades para a escolha da cor, pois não podemos usar, somente, a cor usada na 2ª casa (podemos usar a cor da 1ª casa, pois só a casas vizinhas precisam ter cores diferentes) e, finalmente, temos, analogamente, 3 possibilidades para a escolha da cor da 4ª casa. Logo, pelo PFC temos 4p . 3p. 3p . 3p = 108 possibilidades para pintar essas 4 casas com as restrições solicitadas.

b) as casas estão dispostas de forma circular, como na figura:

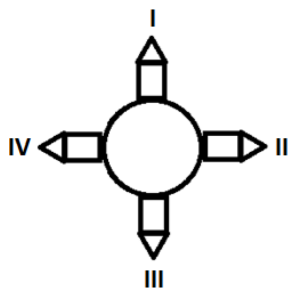
Figura 5



Fonte: Próprio Autor

Resolução

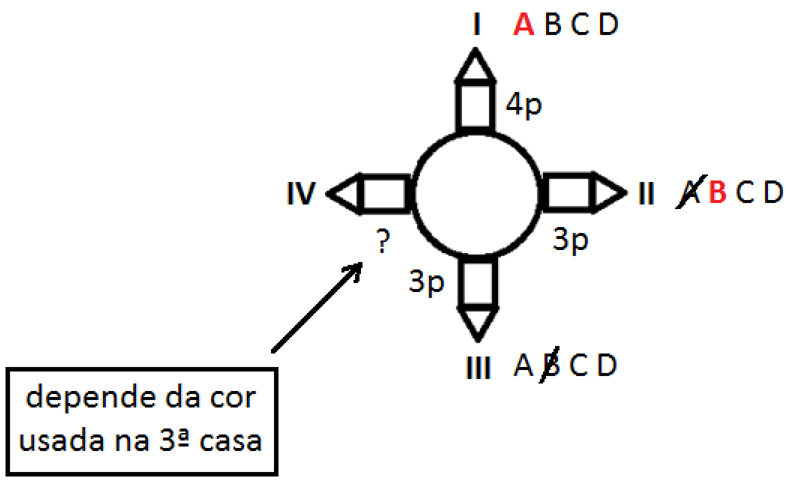
Figura 6



Fonte: Próprio Autor

Se a conduta para esse problema for exatamente a mesma da letra a, não conseguiremos êxito, pois quando chegarmos para a escolha da cor para pintar a 4 ª casa, não podemos afirmar quantas possibilidades teremos. De fato, se a cor usada para as casas I e III forem iguais, em IV teremos 3 possibilidades, caso forem diferentes, em IV teremos 2 possibilidades. Mas isso fica claro se tomamos uma conduta mais adequada para um problema de Análise Combinatória como esse:

Figura 7



Fonte: Próprio Autor

Para pintar a 1ª casa temos 4 possibilidades e, independentemente da cor escolhida, temos 3 possibilidades para a escolha da cor para a 2ª casa. Sem perda de generalidade, suponhamos que a cor escolhida para a 1ª casa seja A. Agora, independente da cor escolhida na 2ª casa, temos 3 possibilidades para a escolha da cor para a 3ª casa, pois não pode ser a mesma cor da 2ª casa. Novamente, sem perda de generalidade, podemos supor que a cor escolhida foi a B. Observamos agora que se a cor escolhida na 3ª casa for a cor A, temos 3 possibilidades para a 4ª casa e se a escolha for a cor C ou D teremos 2 possibilidades. Assim, temos que separar as escolhas da 3ª casa em dois casos: usando a cor A (que foi a usada na 1ª casa) e não usando a cor A. Com efeito:

I	II	III	IV	
$4p.$	$3p.$	$1p.$	$3p$	$=36p$
BBB				
C	C		C	
D	D		D	

I	II	III	IV	
$4p.$	$3p.$	$2p.$	$2p$	$=48p$
BBDB				
C	C		C	

Logo, temos 36 + 48 = 84 possibilidades para pintarmos essas 4 casas da forma solicitada.

4 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Compreendido o princípio da contagem, uma continuação imediata é iniciar a ideia de permutação como uma forma de abreviar algumas situações. Assim, após termos o conhecimento que a troca de lugar de n objetos diferentes pode ser realizada de $n.(n-1).(n-2).....3.2.1 = n!$ modos distintos, podemos começar a construir alguns raciocínios importante para a Análise Combinatória.

Definimos, $P_n = n!$ como a permutação de n elementos distintos.

É muito importante ressaltar que a permutação simples é usada para trocar n elementos diferentes entre si. Por exemplo, se queremos saber de quantas formas podemos colocar 3 pessoas em 3 lugares diferentes, devemos usar $P_3 = 3!$. Isso nada mais é que pensarmos que temos 3 possibilidades para escolhermos a pessoa que ocupará a 1ª posição e, escolhida essa pessoa, temos 2 possibilidades para escolhermos a pessoa para ocupar a 2ª posição e, finalmente, 1 possibilidade para a escolha da pessoa que ocupará a 3ª posição. Logo, pelo P.F.C. temos 3p.2p.1p = 6 possibilidades para colocarmos 3 pessoas em 3 lugares.

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

O que veremos agora são diversos exemplos relacionados à permutação simples, mas o mais importante é estabelecermos algumas estratégias para conseguir trabalhar com as restrições solicitadas no enunciado. Veremos que não adianta apenas sabermos os conceitos específicos de permutações e sim, a importância de criarmos ideias e estratégias para a solução dos problemas. Temos várias restrições (juntos, separados, intercalados, ordenados, ...) e veremos as principais a seguir.

4.1 EXEMPLOS

1. De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma única fila (indiana)?

Resolução

Formar uma fila com 6 pessoas consiste em colocá-las em uma sequência com 6 elementos, na qual, evidentemente, não é permitida repetição, pois uma pessoa não pode ocupar duas posições simultaneamente. Portanto, o número pedido é dado por: $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ formas distintas.

2. Quantos são os anagramas da palavra HONRA?

Resolução

Cada anagrama pode ser encarado como uma sequência (ordenada) de 5 elementos, formados pelas letras H, O, N, R e A, portanto sem repetição. Então, a quantidade procurada é: $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

3. Determine de quantas formas podemos colocar em uma fila (alinhados) um casal e seus 7 filhos, sendo 4 homens e 3 mulheres:

a) Sem nenhuma restrição:

Resolução

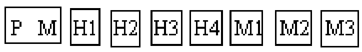
Nesse exemplo queremos, na realidade, apenas trocar de lugar, livremente (sem nenhuma restrição) essas 9 pessoas de lugar. **Trocar** 9 elementos de lugar **é permutar** 9 elementos, ou seja:

$$P_9 = 9!$$

b) De modo que os pais fiquem sempre juntos:

Resolução

Figura 8



Fonte: Próprio Autor

Em problemas em que necessitamos que determinadas pessoas fiquem juntas, devemos "amarrá-las" em um único "bloco". Nesse caso, devemos permutar esses 8 blocos e, ainda, podemos fazer a permutação "interna" no bloco dos pais, pois podemos ter P M ou M P. Com isso, segue:

$$P_8.P_2 = 8!.2!$$

c) De modo que os pais fiquem sempre separados:

Resolução

Basta calcular todas as possibilidades para trocar de lugar as 9 pessoas (exemplo - letra a) e subtrair pelas possibilidades em que os pais fiquem sempre juntos (exemplo - letra b).

Logo, temos $9! - 8!.2! = 9.8! - 2.8! = (9 - 2).8! = 7.8!$ possibilidades.

ATENÇÃO:

Esse método de calcular todas possibilidades e retirar aquelas em que eles estão juntos para determinar as possibilidades em que as pessoas estão separadas, só é válido quando estamos diante de 2 pessoas. No exemplo da letra f veremos que esse método não é viável e criaremos um raciocínio muito interessante para resolvermos qualquer problema em que determinados elementos não podem ficar juntos.

d) De modo que os 4 filhos (homens) fiquem sempre juntos:

Resolução

Figura 9

$$\boxed{P}\ \boxed{M}\ \boxed{H1\ \ H2\ \ H3\ \ H4}\ \boxed{M1}\ \boxed{M2}\ \boxed{M3}$$

Fonte: Próprio Autor

Nesse caso, devemos permutar esses 6 blocos e, ainda, podemos fazer a permutação "interna" no bloco dos filhos (H), pois podemos ter a mudança de lugar entre eles. Com isso, segue:

$$P_6.P_4 = 6!.4!$$

e) De modo que os pais fiquem sempre juntos e os 4 filhos (H), também, fiquem sempre juntos:

Resolução

Figura 10

$$\boxed{P\ \ M}\ \boxed{H1\ \ H2\ \ H3\ \ H4}\ \boxed{M1}\ \boxed{M2}\ \boxed{M3}$$

Fonte: Próprio Autor

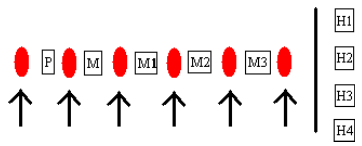
Devemos permutar esses 5 blocos e, ainda, podemos fazer a permutação "interna" no bloco dos filhos (H) e dos pais, pois podemos ter a mudança de lugar entre eles. Com isso, segue:

$$P_5.P_2.P_4 = 5!.2!.4!$$

f) De modo que os 4 filhos (homens) fiquem sempre separados

Resolução

Figura 11



Fonte: Próprio Autor

Nesse caso, não podemos calcular todas as possibilidades e excluir aquelas em que esses 4 filhos estão juntos (como feito no exemplo da letra c), pois estaríamos excluindo, apenas, os casos em que os 4 filhos estão juntos. Porém, também, não podemos ter casos em que 3 estão juntos ou 2 juntos e os outros 2 separados ou os 2 juntos e os outros 2 também... Enfim, é necessário criar uma nova estratégia para solucionar esse tipo de problema. Devemos separar em um "canto" os elementos que não podem ficar juntos (os 4 filhos) e permutar, "livremente", as outras 5 pessoas (5!). Depois disso, temos 6 lugares para escolher com o intuito de colocar um filho, sobrando 5 possibilidades de escolha de lugar para o segundo filho (visto que o 1° vai ocupar um lugar), 4 lugares para o 3° filho e, finalmente, 3 lugares para o 4° filho. Assim, segue:

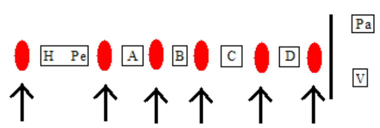
$$P_5.6.5.4.3 = \frac{5!.6!}{2!}$$

4. De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

Resolução

Temos as pessoas: V, Pa, H, Pe, A, B, C, D

Figura 12



Fonte: Próprio Autor

Como Vera (V) e Paulo (Pa) não podem ficar juntos, devemos observar que temos 6 possibilidades de escolha para o lugar que pode ser destinado ao 1° e, consequentemente, 5 para o 2°. Mas antes, devemos permutar os 5 "blocos" e, ainda, permutar, internamente, o "bloco". Com isso, temos:

$$P_5.P_2.6.5 = 120.2.6.5 = 7200$$

5. Temos 3 livros de Filosofia, 4 livros de Sociologia e 5 livros de História. De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

Resolução

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem 12! = 479.001.600 maneiras de organizar os livros. Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são 3 assuntos, há 3! = 6 maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de História, há 5! = 120 maneiras de organizá-los; para os livros de Filosofia, 3! = 6 maneiras e para os livros de Sociologia, 4! = 24 maneiras. Pelo princípio fundamental, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é 6.6.24.120 = 103680 maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.

6. 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

Resolução

Devemos colocar um casal em cada degrau. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos colocar os 5 homens em 5 degraus de 5! formas distintas e as 5 mulheres, analogamente, de 5! formas distintas. Mas em cada degrau temos 2 possibilidades de colocarmos o casal (H e M ou M e H). Logo, temos $5!.5!.2^5 = 460800$ modos distintos.

5 PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

O raciocínio sinônimo nesse assunto é de extrema importância para a abordagem de diversos problemas em Análise Combinatória. A abordagem desse assunto muitas vezes é feita através de exemplos envolvendo anagramas com elementos repetidos, mas o raciocínio envolvido nesse assunto vai muito além e , por isso, nem iremos estabelecer alguma espécie de fórmula para ele.

Devemos trabalhar as permutações com elementos repetidos para o aluno observar a enorme importância que é identificar a ordem num problema. Podemos questionar o seguinte problema: De quantas formas podemos colocar alinhadas 5 frutas, sendo 3 maçãs e 2 laranjas (idênticas entre si)?

Podemos solicitar que o leitor descreva todas essas possibilidades. E, assim, ele obterá as 10 possibilidades:

M	M	M	L	L	M	M	L	M	L
M	L	M	M	L	L	M	M	M	L
M	M	L	L	M	M	L	M	L	M
L	M	M	L	M	M	L	L	M	M
L	M	L	M	M	L	L	M	M	M

Podemos questioná-los: caso as maçãs sejam diferentes e as laranjas também, de quantas formas podemos dispor essas 5 frutas?

Antes de apresentar o resultado, podemos pegar um desses 10 casos e discuti-lo. Por exemplo, supondo que as frutas sejam diferentes, o que acontece se trocarmos de lugar as maçãs e as laranjas entre si em cada um desses casos?

Vejamos:

M M M L L será tratado com M1 M2 M3 L1 L2 e trocando de lugar da forma proposta, temos:

M1	M2	M3	L1	L2	M1	M2	M3	L2	L1
M1	M3	M2	L1	L2	M1	M3	M2	L2	L1
M2	M1	M3	L1	L2	M2	M1	M3	L2	L1
M2	M3	M1	L1	L2	M2	M3	M1	L2	L1
M3	M1	M2	L1	L2	M3	M1	M2	L2	L1
M3	M2	M1	L1	L2	M3	M2	M1	L2	L1

Assim, o leitor observará que para cada um dos 10 casos propostos inicialmente ele terá, levando em conta que as frutas são diferentes entre si, 12 casos (pois podemos trocar de lugar entre si 3 maçãs e 2 laranjas, isto é, podemos permutar entre si as maçãs $P_3 = 3!$ e as laranjas $P_2 = 2!$). Logo, ele saberá que tem 120 possibilidades. Assim, o leitor pode observar que essas $10.12 = 120$ possibilidades nada mais são que as permutações de 5 frutas supostas distintas e $P_5 = 5! = 120$. Mas se as frutas são iguais cada um desses 12 casos descritos representa um único caso. Logo, como em 120 possibilidades, podemos separar em grupos idênticos de 12 possibilidades, nos restam $\frac{120}{12} = 10$ possibilidades distintas de alinharmos essas frutas da forma proposta inicialmente.

O que foi feito na realidade? O leitor agora deve observar que a ordem das frutas iguais não pode ser considerada, ou seja, ele não pode trocar de lugar entre si as maçãs e laranjas. Ele deve desconsiderar a permutação entre as 3 maças e as 2 laranjas e observando que ele tinha 120 possibilidades e dividiu por 12, ele verificará que, na realidade, ele dividiu foi por $3!.2!$, pois desconsiderou a ordem entre as frutas iguais.

Nesse ponto, o leitor vai estar diante de um fato importantíssimo:

Quando queremos desconsiderar a ordem de r, s, t, ... elementos devemos dividir pela permutação entre eles.

Com isso, vários problemas podem ser solucionados com esse raciocínio. Por exemplo:

1. Quantos anagramas da palavra COMBINATORIA apresentam as consoantes em ordem alfabética?

Resolução

Nesse problema, devemos permutar as letras e desconsiderar as permutações entre as consoantes, pois como elas devem permanecer em ordem alfabética a permutação entre eles não é permitida. Como visto, quando a permutação de determinados elementos não é permitida devemos dividir pela permutação entre eles. Nesse caso, temos então que desconsiderar a permutação entre as letras iguais e também desconsiderar a permutação entre as consoantes, pois como elas devem ficar em ordem alfabética, não podem trocar de lugar entre si. Logo, podemos pensar que o tratamento dado para "os elementos repetidos" pode ser usado sempre em que determinados elementos não podem ser trocados de lugar, e isso pode ocorrer por diversos motivos. Elementos não podem ser trocados de lugar não apenas quando eles são iguais, mas, também, quando queremos estabelecer uma ordem entre eles (estabelecida uma ordem, não podemos mais trocar esses elementos de lugar) e, com isso, podemos tratar as consoantes C, M, B, N, T e R como sendo letras todas iguais e, assim, teríamos que permutar 12 elementos sendo que 3 deles aparecem 2 vezes cada (referente as letras A, I e O) e 6 deles não podem ser trocados de lugar (isto é, como se fossem 6 elementos iguais). Logo, a solução seria dada por $\frac{12!}{2!.2!.2!.6!}$

Dessa forma, quando um problema desejar que uma determinada ordem seja estabelecida (alfabética, crescente, decrescente) na realidade, queremos desconsiderar a permutação entre elas.

2. Dado um grupo com 5 pessoas, de quantas formas podemos montar uma comissão com 3 pessoas?

Resolução

Temos sempre que lembrar de algumas importantes perguntas:

1. **O que queremos fazer?**
   Selecionar, escolher 3 pessoas.

2. **Quantas atitudes devemos tomar?**
   Três atitudes.

3. **De quantas formas podemos tomar cada atitude?**
   Temos 5 possibilidades para escolhermos a 1ª pessoa e, escolhida essa pessoa, temos 4 possibilidades para escolhermos a 2ª pessoa e, finalmente, 3 possibilidades para a 3ª pessoa. Logo, temos $5p.4p.3p = 60$ possibilidades para escolhermos essas 3 pessoas entre 5 pessoas. Mas esse raciocínio muito comum, é ERRADO!

   Quando efetuamos o P.F.C., ao mesmo tempo em que estamos escolhendo as 3 pessoas, estamos contanto as permutações entre elas e, nesse nosso exemplo, a ordem entre os elementos escolhidos não importa. Por isso, sempre devemos fazer uma última pergunta:

4. **A ordem entre os elementos escolhidos importa?**
   Se a resposta for SIM (pois os elementos desempenham cargos distintos, ocupam posições diferentes) então não devemos fazer mais nada, o P.F.C. no fornece diretamente a resposta.

   Se a resposta for NÃO (pois os elementos desempenham cargos iguais, ocupam posições iguais) então devemos DIVIDIR PELA PERMUTAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS ESCOLHIDOS PARA CANCELAR A PERMUTAÇÃO ENTRE ELES.

   Quando fazemos o P.F.C. entre os elementos de um mesmo grupo, esses elementos vêm permutados e, se essa permutação não puder ser considerada, devemos dividir pela permutação entre os elementos escolhidos.

   Logo, temos $\frac{5p.4p.3p}{3!} = 10$ possibilidades.

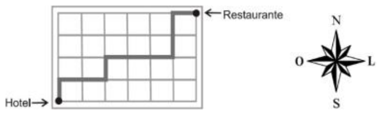
   Diante disso, um aluno pode desenvolver um problema referente à Combinação Simples sem nunca ter visto a fórmula $C_{n,p}$ ou sem ter ouvido falar em combinações. Por exemplo, se queremos saber de quantos modos podemos selecionar 3 médicos para montar uma comissão se dispomos de um total de 7 médicos, o aluno não precisa saber que isso pode ser feito de $C_{7,3}$ modos distintos. Basta saber que tem 7 possibilidades para escolher a 1ª pessoa, 6 para a 2ª e, finalmente, 5 para a 3ª, 7.6.5 modos e observar que a ordem de escolha dessas 3 não influencia, ou seja, devemos desconsiderar a permutação entre essas 3 pessoas. Assim, devemos dividir 7.6.5 por 3! e, com isso, teríamos 35 possibilidades para realizar tal escolha.

As estratégias para atacar alguns problemas são de suma importância! Com essa linha de estudo, o leitor teria mais facilidade e maturidade para, agora, usar algumas relações do tipo permutações com elementos repetidos ou combinações simples para construir suas soluções.

Dessa forma e com estratégias para resolver alguns problemas a Análise Combinatória pode ser desenvolvida de uma forma mais fácil sem que o leitor fique diante de várias fórmulas sem saber como e quando utilizá-las.

3. Um garoto chega de férias a uma pequena cidade do litoral norte e dirige-se a um hotel. As ruas da cidade interceptam-se em ângulos retos, como mostra a figura. Certo dia, ele decide almoçar no único restaurante da cidade. Quantos caminhos diferentes ele pode escolher para ir do hotel ao restaurante se ele caminha somente para o norte ou para o leste. A figura 13 indica um possível caminho.

Figura 13



Fonte: Próprio Autor

Resolução

Seja L e N, respectivamente, os deslocamentos para leste e para norte.

O caminho em destaque é o N L L N L L L N N L. Observe (escreva para confirmar) que qualquer troca de lugar entre essas letras (L e N) representa um caminho diferente para chegar até o hotel. Com isso, permutando de todas as formas possíveis essas letras, encontramos todos os possíveis caminhos. Como a permutação desses 10 elementos é dada por $\frac{10!}{6!.4!} = 210$ (temos 6 L e 4 N - elementos repetidos), temos 210 caminhos diferentes para ele escolher para ir do hotel ao restaurante.

4. De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas umas das outras, e os rapazes juntos uns dos outros?

Resolução

Uma maneira fácil de resolver problemas envolvendo cadeiras, sendo que algumas estão vazias, é usar uma permutação com elementos repetidos, as cadeiras vazias serão os "elementos repetidos". Nesse problema, devemos ter 2 moças juntas uma da outra, 3 rapazes juntos uns dos outros e 2 cadeiras vazias. Assim, devemos permutar as 2 moças juntas, como se fossem uma só, ou seja, um bloco com as duas moças, um bloco com os 3 rapazes e as 2 cadeiras vazias, isso pode ser feito de $\frac{4!}{2!} = 12$ modos diferentes. Como devemos permutar, ainda, dentro dos blocos, a solução será $\frac{4!}{2!}.P_2.P_3 = 144$ formas diferentes.

Resumindo, podemos chamar a **PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS DE PERMUTAÇÃO ENTRE ELEMENTOS QUE NÃO PODEM TROCAR DE LUGAR ENTRE SI**, pois a atitude de dividir pela permutação não é usada somente quando os elementos são repetidos, mas sim quando eles não podem trocar de lugar entre si.

6 PERMUTAÇÕES CIRCULARES

As permutações circulares são utilizadas para resolver problemas em que os objetos são dispostos ao redor de um círculo, e não ao longo de uma reta (Permutações Lineares) como visto até aqui.

Dados n objetos, o número possível de disposições dos mesmos ao redor de um círculo, é dado por:

$$PCn = (n - 1)! = \frac{n!}{n}$$

Devemos saber quantas permutações simples distintas geram permutações circulares equivalentes. Assim, iremos compreender melhor o fato de PCn ser igual $a.(n - 1)!$. É fácil ver que este número é n, pois, se não considerássemos equivalentes figuras que podem coincidir por rotação, teríamos o total de $n!$. Logo, $n.(PCn) = n!$, o que implica $PCn = \frac{n!}{n}$, ou seja,

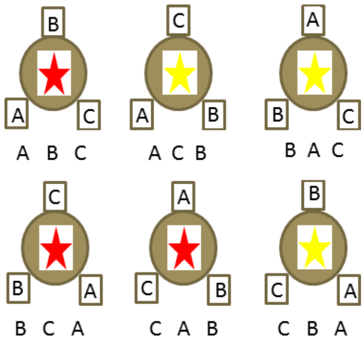
$$P\ Cn = (n - 1)!$$

Um raciocínio muito mais interessante que esse que acabamos de expor é resolver um problema de permutação circular sem se preocupar com esse fato e dividir pelo número de "blocos" (bancos).

Vejamos esses simples exemplos:

1. De quantas formas podemos colocar 3 pessoas sentadas em uma mesa circular com 3 lugares:

Figura 14



Fonte: Próprio Autor

Resolução

Temos $\frac{3p.2p.1p}{3} = 2$ possibilidades, visto que temos apenas 2 casos distintos, pois temos sempre 3 casos iguais por rotação. Logo, em problemas envolvendo permutações circulares, o número de casos idênticos por rotação serão equivalentes ao número de bancos/blocos na configuração inicial.

2. De quantas formas diferentes podemos colocar 5 pessoas (A, B, C, D, E) em uma mesa circular com:

a) 3 bancos alinhados

Resolução

Temos 5 pessoas para colocarmos em 3 lugares. Como não temos lugares para todas pessoas, não podemos "perguntar para cada pessoa" quantas possibilidades de lugares que temos para cada uma delas, pois temos mais pessoas que lugares. O que devemos fazer é verificar quantas possibilidades temos para cada lugar. Portanto, **temos 3 atitudes a serem tomadas!**

$$\underset{5p}{h} \;.\; \underset{4p}{h} \;.\; \frac{\overset{h}{3p}}{3} = 20p$$ (20 possibilidades)

Temos 5 possibilidades para escolhermos a pessoa que irá ocupar o 1º banco. Escolhida essa pessoa e independentemente de qual pessoa foi escolhida, temos 4 possibilidades para a escolha da pessoa para colocarmos no 2º banco e, analogamente, temos 3 possibilidades para escolhermos a pessoa para colocarmos no 3º banco e, como estamos diante de uma mesa circular com 3 lugares, devemos dividir por 3, pois essas $5.4.3 = 60$ permutações estão repetidas em relação às suas rotações de 3 em 3.

b) 7 bancos alinhados

Resolução

Temos 5 pessoas para colocarmos em 7 lugares. Como não temos pessoas para todos os lugares, não podemos "perguntar para cada lugar" quantas pessoas podem ocupar cada lugar, pois temos mais lugares que pessoas. O que devemos fazer é verificar quantas possibilidades de lugar temos para cada pessoa. Portanto, **temos 5 atitudes a serem tomadas!**

$$\underset{7p}{A} \;.\; \underset{6p}{B} \;.\; \underset{5p}{C} \;.\; \underset{4p}{D} \;.\; \frac{\overset{E}{3p}}{7} = 360p$$

3. De quantas formas distintas podemos colocar 5 pessoas em uma mesa circular?

Resolução

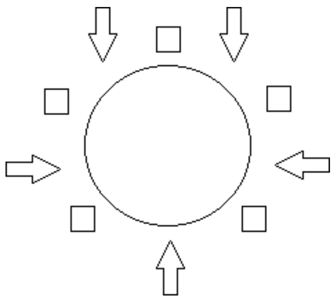
A permutação circular de 5 elementos distintos é dada por $PC_5 = P_4 = 4! = 24$. Logo, temos 24 formas distintas para colocar essas 5 pessoas em uma mesa circular.

Vejamos agora outros exemplos:

1. De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, sendo que duas determinadas pessoas não devem estar juntas?

Resolução

Figura 15



Fonte: Próprio Autor

Basta permutarmos, de modo circular, as 5 pessoas que não possuem restrições. Assim, temos $PC_5 = P_4 = 4! = 24$ formas para fazer isso. Para cada uma dessas permutações, podemos colocar as outras duas determinadas pessoas que não devem estar juntas, e isso pode ser feito de $5.4 = 20$ modos distintos, pois para a 1ª pessoa temos 5 lugares vagos (representado pelas setas) e para a 2ª pessoa temos 4 lugares vagos. Logo, pelo P.F.C. temos $24.20 = 480$ modos distintos para distribuirmos essa pessoa da forma solicitada pelo enunciado.

2. De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda para brincar sem que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas?

Resolução

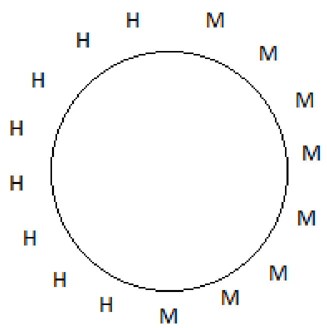
Inicialmente, sem perda de generalidade, colocamos em fila e permutamos de modo circular os 8 meninos, e isso pode ser feito de $PC_8 = P_7 = 7!$ modos distintos. Para cada um desses modos, podemos "intercalar" as mulheres nos 8 lugares vagos que sobram.

Assim, a 1ª mulher tem 8 lugares para escolher, a 2ª tem 7 lugares para escolher e, assim, sucessivamente, até chegarmos na 8ª mulher que tem 1 lugar pra escolher. Logo, temos 8.7.6.....2.1 = 8! modos distintos para distribuirmos as mulheres. Portanto, pelo P.F.C. temos 7!.8! modos distintos para distribuirmos essas pessoas da forma solicitada pelo enunciado.

3. Qual seria a resposta do exercício anterior se todas as meninas ficassem juntas?

Resolução

Figura 16



Fonte: Próprio Autor

Nesse caso, temos dois blocos para permutarmos de modo circular (o bloco dos 8 homens e o bloco das 8 mulheres) e, com isso, temos apenas 1 possibilidade, isto é, só existe a disposição mostrada na figura. A única coisa que deve ser feita é a permutação entre as pessoas do mesmo sexo. Logo, temos 8!.8! = 8! de permutarmos essas pessoas de modo que todas as meninas fiquem juntas.

7 COMBINAÇÕES SIMPLES X ARRANJO SIMPLES

Inicialmente, iremos propor dois problemas para compararmos e compreendermos essa ideia. Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4}, determine o total de números com 3 algarismos distintos que podemos formar. Facilmente, podemos observar que isso pode ser feito de 4.3.2 = 24 formas distintas que são:

123	124	134	234
132	142	143	243
213	214	314	324
231	241	341	342
312	412	413	423
321	421	431	432

O que fizemos aqui é o que chamamos de Arranjo simples de n elementos tomados p a p. Nesse caso, fizemos $A_{4,3}$. Arranjo simples usamos quando queremos escolher os elementos e incluir a permutação entre eles, mas como observamos, podemos usar, simplesmente, o P.F.C. para resolver QUALQUER problema envolvendo Arranjo simples.

É importante conhecer o conceito de Arranjo simples na teoria (**Arranjo Simples** de n elementos tomados p a p são as **sequências** de p elementos que podem ser formados com os n elementos e é bom destacar, novamente, que em uma sequência, a ordem para dispormos esses p elementos faz diferença), mas é, completamente, desnecessário o uso de Arranjo Simples para efetuarmos um problema. Basta usar o P.F.C.! O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Agora, dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4}, determine o total de subconjuntos com 3 algarismos que podemos formar. Observe que temos apenas 4 possibilidades (destacadas) que são: {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4} e {2, 3, 4}, pois a permutação entre si dos elementos de cada conjunto não pode ocorrer, ou seja, temos que desconsiderar a ordem de escolha desses 3 elementos. O fato de desconsiderar a ordem de escolha dos elementos é essencial para compreendermos as Combinações Simples. Assim, temos que as **Combinações Simples** de n elementos tomados p a p são os **subconjuntos** de p elementos que podem ser formados com os n elementos e é bom destacar, novamente, que em um conjunto, a ordem para dispormos esses p elementos não faz diferença. O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$$

Resumindo, o número de combinações simples de n elementos tomados p a p nos fornece o total de subconjuntos com p elementos que podemos formar de um conjunto de n elementos, ou seja, é total de possibilidades que temos para escolher p elementos diferentes de um grupo com n elementos diferentes, de modo que todos elementos do grupo desempenham um mesmo papel, uma mesma função, isto é, a ordem entre os elementos escolhidos não importa, não pode ser considerada.

Para compreendermos melhor a origem das fórmulas do arranjo simples e combinação simples, podemos pensar na seguinte situação: De um grupo com n pessoas (P_1, P_2, ..., P_n), de quantas formas podemos escolher p pessoas desse grupo de modo que elas exerçam:

a) p cargos diferentes:

Pelo P.F.C., temos n possibilidades para a escolha da 1ª pessoa, n - 1 possibilidades para a escolha da 2ª pessoa, n - 2 possibilidades para a escolha da 3ª pessoa e, assim temos n - p + 1 possibilidades para escolhermos a pª pessoa. Logo, temos $An,\ p = n.(n-1).(n-2).....(n-p+1)$. Multiplicando e dividindo o lado direito dessa equação por (n - p)!, segue:

$$A_p^n = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

b) p cargos iguais:

Basta pegarmos o total de possibilidade na escolha ORDENADA de p elementos entre os n dados e dividir por p!, para cancelar a permutação entre os elementos escolhidos, ou seja, para contar apenas os conjuntos formados e não as sequências. Logo, temos $C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$.

7.1 EXEMPLOS

1. Os 25 alunos de um determinado colégio resolvem formar uma comissão com 5 membros para formar um time de futebol de salão. Quantos possíveis times podem ser formados?

Resolução

Temos 25 alunos e devemos escolher 5 desses alunos. Isto é, temos 5 “convites” a serem feitos. Vamos convidar essas pessoas? Pense exatamente assim. Visualize as 25 pessoas e convide, uma de cada vez, para preencher essas 5 vagas. Você tem que pensar da seguinte forma:

Tenho 25 opções para o 1º convite, vou entregar um dos convites e irão sobrar, agora, 24 pessoas para o 2º convite. Seguirá esse raciocínio até entregar todos os cinco convites. Com isso o total de formas pra fazer isso é dado por 25.24.23.22.21 Correto? ERRADO!

O erro ocorre porque ao usarmos o P.F.C. (essa "multiplicação sucessiva"), **ao mesmo tempo em que selecionamos as pessoas, estamos trocando-as de lugar entre elas** e essa troca de lugar não é importante para o problema, pois, ao selecionarmos as pessoas desse grupo, não tem diferença, dentro do grupo, entre elas. Logo, devemos desconsiderar a permutação que o P.F.C. calculou e, para isso, sabemos que devemos dividir pela permutação entre os elementos escolhidos. Portanto, a solução é dada por

$$\frac{25.24.23.22.21}{5!} = \frac{25.24.23.22.21}{5.4.3.2.1} = 53130 \ \textit{comissões distintas.}$$

Outra solução:

Uma comissão formada pelos alunos A, B, C, D, E é a mesma formada pelos alunos C, B, A, E, D. Daí, tem-se um problema de combinação. O número de comissões possíveis será:

$$C_{25,5} = \frac{25!}{(25-5)!.5!} = \frac{25!}{20!.5!} = \frac{25.24.23.22.21.20!}{20!.5.4.3.2.1} = 53130$$

2. Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?

Resolução

Temos dois casos para analisar:

i - Caso em que o casal faz parte do grupo: Nesse caso, como os dois, obrigatoriamente, fazem parte do grupo, devemos escolher mais 2 pessoas do total de 8 (pois como já foram retirados os dois, sobraram 8 pessoas, sendo que só mais duas devem ser escolhidas). Como a ordem de escolha não importa, isso pode ser feito de $C_{8,2} = \frac{8!}{6!.2!} = 28$ possibilidades.

ii - Caso em que o casal não faz parte do grupo: Nesse caso, como os dois, obrigatoriamente, não fazem parte do grupo, devemos escolher 4 pessoas do total de 8 (pois como eles não podem ser escolhidos, devemos retirá-los do grupo de 10 pessoas, sobrando, com isso, 8 pessoas a serem escolhidas). Como a ordem de escolha não importa, isso pode ser feito de $C_{8,4} = \frac{8!}{4!.4!} = 70$ possibilidades.

Logo, temos $28+70=98$ possibilidades de escolha desse grupo com as restrições impostas pelo enunciado.

3. Um químico possui 10 tipos de sustâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser associadas porque produzem mistura explosiva?

Resolução

Suponha que temos as substâncias A, B, C, D, E, F, G, H, X, Y em que se misturadas, X e Y, por exemplo, explodem. Inicialmente, iremos calcular o total de possibilidades para misturar 6 dessas 10 substâncias, sem restrições.

Como a ordem de escolha não importa, isso pode ser feito de $C_{10,6} = \frac{10!}{6!.4!} = 210$. Mas, dessas 210 possibilidades, temos algumas que geram misturas explosivas. Vamos calculá-las:

Para gerar uma substância explosiva devemos escolher, obrigatoriamente, X e Y e mais 4 substâncias entre as outras 8 que restaram e isso pode ser feito de $C_{8,4} = \frac{8!}{4!.4!} = 70$ modos distintos. Com isso, se de todas as formas para escolher essas 6 substâncias excluirmos as possibilidades em as substâncias explosivas (nesse caso X e Y) estão juntas, restam os casos em que elas estão separadas. Logo, temos 210 - 70 = 140 modos distintos de fazer a escolha da forma solicitada.

4. Num congresso há 102 representantes do partido A e 81 representantes do partido B. Para uma determinada sessão, foram convocados 99 elementos do partido A e 79 do partido B. De quantas maneiras poderia ter sido efetuada tal convocação?

Resolução

Temos 102 e 81 representantes do partido A e B, respectivamente. Queremos escolher 99 e 79 elementos do partido A e B, respectivamente. Como a ordem de escolha desses elementos é desprezível, isso pode ser feito de $C_{102,99}.C_{82,79} = 556308000$ modos diferentes.

5. Dados 20 pontos do espaço, dos quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos?

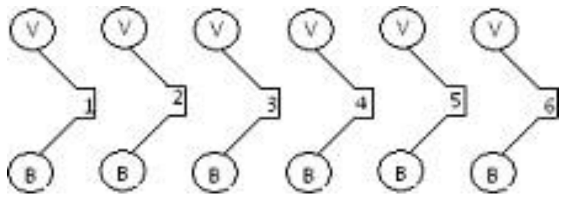
Resolução

Temos 20 pontos distintos dos quais não existem 4 coplanares, e para formarmos um plano precisamos escolher 3 desses 20 pontos em qualquer ordem. Logo, isso pode ser feito de $C_{20,3} = 1140$ maneiras diferentes.

6. Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais de uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados.

Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.

Figura 17



Fonte: Próprio Autor

Resolução

Devemos escolher 3, 4, 5 ou 6 pontos de luz de um total de 6 e, em cada um deles, temos duas possibilidades para escolher a cor (vermelha ou branca). Com isso o total T de possibilidades é dado por:

$$T = C_{6,3}.2^3 + C_{6,4}.2^4 + C_{6,5}.2^5 + C_{6,6}.2^6 = 656.$$

7. Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

Resolução

São 3 provas de Matemática e 7 provas quaisquer (Q_1, Q_2, ..., Q_7). Inicialmente, iremos dispor as provas que não sofrem restrições. $\_Q_1\_Q_2\_Q_3\_Q_4\_Q_5\_Q_6\_Q_7\_$

Temos 8 lugares (_) para colocar as 3 provas de Matemática e isso pode ser feito de C8, 3 = 56. Devemos, agora, permutar a ordem das 7 provas quaisquer e as 3 de Matemática tendo, assim, 336 possibilidades para isso.

Podemos pensar também da seguinte forma: temos 8 lugares (_) para colocar a 1ª prova de Matemática e, escolhido esse lugar, temos 7 lugares (_) para colocar a 2ª prova de Matemática e, finalmente, temos 6 lugares para a 3ª prova. Logo, podemos colocar essas 3 provas de Matemática de $8.7.6 = 336$ modos distintos. Portanto, temos $56.3!.7! = 1693440$ possibilidades de programar a sequência dessas 10 provas.

8. Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada?

Resolução

Podemos pensar que temos 5 mesas com 2 cadeiras para colocar os 10 participantes, e isso pode ser feito de 10! formas diferentes, mas como a ordem das mesas não influencia (uma partida realizada na mesa 1 ou na mesa 5, por exemplo, é indiferente para o problema), isso pode ser feito de $\frac{10!}{5!} = 30240$ modos distintos. Nesse caso, estamos levando em consideração que a partida A x B é diferente da B x A, pois numa partida de xadrez quem inicia é quem tem as peças brancas e, nesse caso, temos essa diferença. Caso essa distinção não seja levada em consideração, a permutação entre os jogares numa partida não influenciará. Logo, teremos $\frac{10!}{5!.25} = 945$ formas distintas para realizar a primeira rodada.

8 RACIOCÍNIOS IMPORTANTES PARA A ABORDAGEM DE DIVERSOS PROBLEMAS

Para uma melhor organização, irei separar alguns importantes raciocínios que devemos ter.

ACREDITE, O SUCESSO EM ANÁLISE COMBINATÓRIA ESTÁDIRETAMENTE LIGADO AO NÚMERO DE EXERCÍCIOS QUE VOCÊ FAZ, A ORGANIZAÇÃO NA HORA DE FAZER AS PERGUNTAS PARA O PROBLEMA E AS ESTRATÉGIAS QUE DEVEM SER TOMADAS PARA VÁRIOS PROBLEMAS DIFERENTES!.

i **- Problemas em que devemos trocar de lugar alguns elementos e, entre eles, determinados elementos devem ficar juntos.**
Esses são os problemas dos "blocos". Nunca se esqueça de permutar, sempre que possível, os elementos que estão "dentro" de cada "bloco".

ii **- Problemas em que devemos trocar de lugar alguns elementos e, entre eles, determinados elementos NÃO devem ficar juntos.**
Esses são os problemas do "cantinho dos excluídos" (colocar em um canto os elementos que não podem ficar juntos e, POR ÚLTIMO, colocá-los nos espaços dos elementos que não tinham esse tipo de restrição).

iii **- Problemas em que devemos trocar de lugar elementos que estão em uma mesa circular ou em círculo (sem que as posições de cada pessoa na mesa estejam definidas).**
Nesses problemas de "permutação circulares" devemos sempre dividir pelo número de "blocos" ou "bancos".

iv **- Problemas em que devemos trocar de lugar alguns elementos e, entre eles, determinados elementos devem ficar em uma determinada ordem.**
Devemos tratar os elementos que devem ficar em uma ordem específica como sendo elementos iguais.

v **- Selecionar elementos de um dado grupo para formarmos uma comissão.**
Se os cargos não forem definidos, devemos usar o P.F.C. e dividir pela a permutação entre os elementos escolhidos para eliminar a permutação dos elementos selecionados (que sempre é incluída no P.F.C.) ou usar uma COMBINAÇÃO SIMPLES.
Se os cargos forem definidos, devemos usar o P.F.C., pois ele sempre inclui a permutação dos elementos selecionados ou usar um ARRANJO SIMPLES.

EXEMPLOS

1. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

Resolução

Goleiros: $C_{3,1} = \frac{3.2.1}{3!}$

Zagueiros: $C_{8,4} = \frac{8.7.6.5}{4!}$

Meio campistas: $C_{10,4} = \frac{10.9.8.7}{/4!}$

Atacantes: $C_{6,2} = \frac{6.5}{2!}$

Logo, temos $C_{3,1}.C_{8,4}.C_{10,4}.C_{6,2} = 3.70.210.15 = 661500$ maneiras do time ser formado.

2. Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.

Resolução

Comissão de alunas será dada por: $C_{11,4} = \frac{11.10.9.8}{4!}$ Comissão de alunos será composta por: $C_{7,3} = \frac{7.6.5}{3!}$ Logo, o número de comissões, respeitando a condição imposta, será de $C_{11,4}.C_{7,3} = 11550$.

3. No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.

Resolução

Dos 12 jogadores, 2 são titulares absolutos, então teremos 10 jogadores disputando 3 vagas (a ordem entre os elementos escolhidos não importa). Portanto, temos a seguinte combinação: $C_{10,3} = \frac{10.9.8}{3!} = 120$. Logo, o treinador poderá formar 120 equipes.

vi - Problemas em que precisamos separar elementos em grupos

O raciocínio usado para esse tipo de problema iremos acompanhar agora. Sempre que formos separar ELEMENTOS DIFERENTES em grupos, devemos nos preocupar com duas coisas:

I Os grupos têm a mesma quantidade de elementos?

II Os grupos são iguais ou diferentes, isto é, tem a mesma função ou não.

EXEMPLOS

1. De quantas formas podemos separar 4 pessoas em dois grupos com duas pessoas em cada?

Resolução

Sejam A, B, C e D essas pessoas. Inicialmente, temos que escolher 2 pessoas para o 1º grupo e, após isso, 2 pessoas para o 2º grupo. Como as pessoas dentro do grupo tem a mesma função, a ordem entre elementos não importa e, com isso, podemos escolher as 2 pessoas para o 1º grupo de $C_{4,2}$ e, consequentemente, das 2 pessoas que sobraram (pois das 4 pessoas, escolhemos 2 para o 1º grupo), temos $C_{2,2}$ modos de fazermos essa escolha. Logo, temos $C_{4,2}.C_{2,2} = 6.1 = 6$ modos para fazer isso. Mas está ERRADO! Devemos ainda dividir por 2!, pois a ordem entre os grupos não importa, jus que os grupos tem a mesma função. Observe o que iremos fazer para ficar tudo mais claro. Vejam o que essas 6 possibilidades representam:

1º Grupo	2º Grupo
ABCD	
ACBD	
ADBC	
BCAD	
BDAC	
CDAB	

Observe que os pares das linhas 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4 representam a mesma coisa, pois como os grupos são iguais, não faz diferença, por exemplo se temos AB em um grupo e CD em um outro, ou se temos CD em um grupo e AB em outro. Assim, temos que dividir por 2!. Podemos pensar em um "esquema" que facilita e muito problemas desse tipo:

$$XX|XX$$

$$\frac{4!}{2!.2!.2!}$$

onde:

4! : refere-se à permutação dos 4 elementos entre si;

2!.2! : usado para desconsiderar a permutação entre os elementos que estão no mesmo grupo;

2! : usado para desconsiderar a permutação entre os grupos.

ATENÇÃO: Se os grupos desempenham missões diferentes, não devemos dividir pela permutação entre eles.

2. De quantas formas podemos separar 5 pessoas em dois grupos, sendo um com 3 pessoas e outro com 2 pessoas?

Resolução

Sejam A, B, C, D e E essas pessoas. Inicialmente, temos que escolher 3 pessoas para o 1º grupo e, após isso, 2 pessoas para o 2º grupo. Como as pessoas dentro do grupo tem a mesma função, a ordem entre elementos não importa e, com isso, podemos escolher as 3 pessoas para o 1º grupo de $C_{5,3}$ e, consequentemente, das 2 pessoas que sobraram (pois das 5 pessoas, escolhemos 2 para o 1º grupo), temos $C_{2,2}$ modos de fazermos essa escolha. Logo, temos $C_{5,3}.C_{2,2} = 10.1 = 10$ modos para fazer isso. Nesse caso, não devemos dividir por 2!. Observe o que iremos fazer para ficar tudo mais claro. Vejam o que essas 10 possibilidades representam:

1º Grupo	2º Grupo
ABC	DE
ABD	CE
ABE	CD
ACD	BE
ACE	BD
ADE	BC
BCD	AE
BCE	AD
BDE	AC
CDE	AB

Observe que não temos nenhum grupo repetido, como no exemplo anterior. Portanto, quando os grupos têm a mesma missão, devemos dividir **SOMENTE QUANDO ELES TÊM A MESMA QUANTIDADE DE ELEMENTOS** . Podemos pensar em um "esquema" que facilita e muito problemas desse tipo.

$$XXX|XX$$

$$\frac{5!}{3!.2!}$$

5!: refere-se à permutação dos 5 elementos entre si;

3!: usado para desconsiderar a permutação entre os elementos que estão no 1º grupo;

2!: usado para desconsiderar a permutação entre os elementos que estão no 2º grupo.

3. De quantas formas podemos separar 8 pessoas em três grupos, sendo dois com 3 pessoas e outro com 2 pessoas?

Resolução

$$XXX|XXX|XX$$

$$\frac{8!}{3!.3!.2!.2!} = \frac{C_{8,3}.C_{5,3}.C_{2,2}}{2!}$$

8!: refere-se à permutação dos 8 elementos entre si;

3!.3!: usado para desconsiderar a permutação entre os elementos que estão no dois primeiros grupos;

2!: usado para desconsiderar a permutação entre os elementos que estão no mesmo 3º grupo ;

2!: usado para desconsiderar a permutação entre os grupos com a mesma quantidade de elementos.

ATENÇÃO: Não podemos dividir por 3!, pois não temos 3 grupos com a mesma quantidade de elementos, e sim 2 grupos com a mesma quantidade de elementos.

Vejamos agora um ótimo exemplo para nos ajudar a perceber a importância em identificar se os grupos com a mesma quantidade de elementos são iguais (têm as mesmas funções) ou não:

3. De quantas formas podemos separas as 28 peças de um dominó em:

a) entre 4 pessoas, cada uma recebendo 7 peças?

Resolução

$$\begin{array}{cccc} pessoa\,A & pessoa\,B & pessoa\,C & pessoa\,D \\ XXXXXXX| & XXXXXXX| & XXXXXXX| & XXXXXXX \end{array}$$

$$\frac{28!}{7!.7!.7!.7!} = \frac{28!}{7!^4} = C_{28,7}.C_{21,7}.C_{14,7}.C_{7,7}$$

28!: refere-se à permutação das 28 peças diferentes entre si;

7!: usado para desconsiderar a permutação entre as peças que estão no mesmo grupo e, como são 4 grupos/pessoas, devemos dividir por 7! quatro vezes.

*b)*em 4 grupos, cada um com 7 peças?

Resolução

$$XXXXXXX|XXXXXXX|XXXXXXX|XXXXXXX$$

$$\frac{28!}{7!.7!.7!.7!.4!} = \frac{28!}{7!^4.4!} = \frac{C_{28,7}.C_{21,7}.C_{14,7}.C_{7,7}}{4!}$$

28!: refere-se à permutação das 28 peças diferentes entre si;

7!: usado para desconsiderar a permutação entre as peças que estão no mesmo grupo e, como são 4 grupos/pessoas, devemos dividir por 7! quatro vezes;

4!: usado para desconsiderar a permutação entre os grupos com a mesma quantidade de elementos.

9 COMBINAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS OU COMBINAÇÕES COMPLETAS

Vamos iniciar esse assunto com o seguinte problema: De quantos modos podemos comprar 3 doces em uma padaria que tem 4 tipos de doces diferentes? A solução para esse problema não é $C_{4,3}$. Seria, se ele afirmasse que deveríamos escolher 3 doces DIFERENTES sabendo que temos a nossa disposição 4 tipos diferentes. Nesse caso, de 4 elementos diferentes, deveríamos escolher 3 desses elementos diferentes (sem que a ordem de escolha importe) e isso pode ser feito de $C_{4,3}$. A resposta para esse caso é $CR_{4,3}$, isto é, de 4 tipos de doces diferentes queremos escolher 3 tipos de doces não, necessariamente, distintos. Suponha que temos a nossa disposição 4 tipos de doces. A saber: Brigadeiro (B), cajuzinho (C), josefina (J) e sonho (S). Podemos escolher 3 tipos da seguinte forma:

BBB	BBC	CCB	JJB	SSB	BCJ
CCC	BBJ	CCJ	JJC	SSC	BCS
JJJ	BBS	CCS	JJS	SSJ	BJS
SSS					CJS

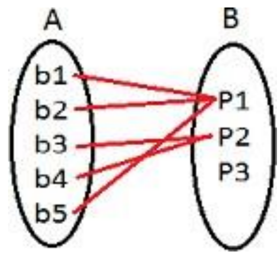
Essas são as $CR_{4,3} = 20$ combinações completas possíveis para esse caso. Podemos pensar nesse problema da seguinte forma: Seja a equação $B + C + J + S = 3$, com B, C, J, S naturais. Podemos interpretar que cada solução para essa equação linear representa uma possível forma de escolhermos os 3 doces. Por exemplo, a solução (1, 0, 0, 2) significa que desses 4 doces que temos a disposição queremos comprar 1 doce B e 2 doces S (é o caso B B S, descrito acima). Agora, resta sabermos como determinamos o total de soluções inteiras e não negativas de uma equação linear da forma $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_n = p$, com X_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq n$.

OBSERVAÇÃO:

$C_{n,p}$ é o **total de possibilidades de escolhermos p elementos DISTINTOS de um total de n elementos distintos dados.**

$CR_{n,p}$ é o **total de possibilidades de escolhermos p elementos DISTINTOS OU NÃO DISTINTOS de um total de n elementos distintos dados** ou $CR_{n,p}$ é o número de soluções da equação linear da forma $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_n = p$ em inteiros não negativos.

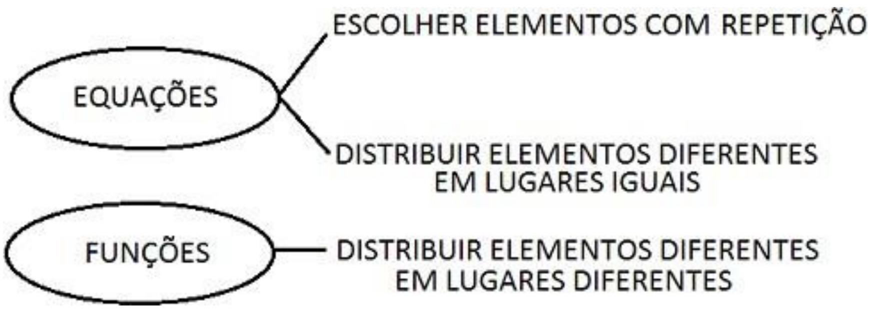
Figura 18



Fonte: Próprio Autor

Com isso, temos esse importante esquema:

Figura 19



Fonte: Próprio Autor

Veremos no capítulo 10, numa extensão das equações lineares, uma importante estratégia para escolhermos elementos não consecutivos: Os Lemas de Kaplansky.

10 OS LEMAS DE KAPLANSKY

De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} de modo que não haja números consecutivos?

Devemos usar o seguinte raciocínio:

1, 3, 5, 9 - representação: + - + - + - - - + (o sinal de + significa que o número que ocupa a posição do sinal está sendo escolhido, e o sinal - significa que o número não está sendo escolhido)

2, 4, 6, 8 - representação: - + - + - + - + -

2, 5, 7, 8 - representação: - + - - + - + + - (observe que esse caso não serve para o problema, pois 2 sinais + juntos significa que teremos números consecutivos)

Observe que sempre que trocarmos de lugar esses 9 símbolos, sendo 5 sinais $(-)$ e 4 sinais $(+)$ de modo que não tenhamos 2 sinais $(+)$juntos, teremos uma e somente uma representação para um possível subconjunto da forma solicitada. Assim, resta solucionarmos o problema: De quantos modos podemos permutar 9 símbolos, sendo 5 sinais $(-)$ e 4 sinais $(+)$ de modo que não tenhamos 2 sinais $(+)$ juntos?

o - o - o - o - o - o

Observe que podemos colocar 4 sinais $(+)$ em 6 possíveis lugares, ou seja, devemos escolher 4 dos 6 lugares vagos (representado pelo símbolo "o") para colocarmos os sinais $(+)$ e isso pode ser feito de $C_{6,4}$ modos distintos.

Logo, podemos afirmar que a solução do problema proposto é dado por $C_{6,4}$.

Agora, usando o mesmo raciocínio, vamos determinar a solução do seguinte problema:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com p elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, ..., n} de modo que não haja números consecutivos?

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos permutar n símbolos, sendo p sinais $(+)$ e $n-p$ sinais $(-)$ sem que haja sinais $(+)$ juntos. Teremos $n-p+1$ lugares para escolhermos p para colocarmos os p sinais $(+)$ e isso pode ser feito de $C_{n-p+1,\,p}$, que é a solução para o problema proposto.

Primeiro Lema de Kaplansky:

"Seja $f(n, p)$ o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, ..., n} de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de $Cn - p + 1, p$ modos distintos, ou seja:"

$$f(n,\ p) = C_{n-p+1,p}$$

Essa demonstração encontra-se na bibliografia [2].

Observe essa questão que apareceu no vestibular do IME:

Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Vamos pensar que os cavaleiros estão na mesa como se formassem um relógio, numerando-os de 1 a 12, é claro. Iremos separar o problema em 2 casos:

i - Um cavaleiro específico participa. Sem perda de generalidade, vamos supor o cavaleiro 12. Como o cavaleiro 12 participa, obrigatoriamente, o 11 e o 1 não podem participar do grupo que tem o cavaleiro 12, pois eles são vizinhos e, consequentemente, inimigos. Agora, temos que selecionar mais 4 cavaleiros dentre os 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 de modo que não tenhamos dois vizinhos. Teremos que escolher 4 (simbolizados por +) e restarão 5 (simbolizados por -). Por exemplo, o caso + - - + - + - - + é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 2, 5, 7 e 10. Já o caso - - + - + - + + - não é válido, pois ele representa a escolha dos cavaleiros 4, 6, 8 e 9 (dois vizinhos: 8 e 9). Com isso, devemos permutar os 4 sinais (+) e os 5 sinais (-)de modo que não tenhamos dois sinais (+) juntos e isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ formas diferentes.

ii - O cavaleiro 12 não participa Como o cavaleiro 12 não participa, devemos escolher 5 cavaleiros dentre todos os outros 11 (1, 2, 3, ..., 10, 11). Teremos que escolher 5 (simbolizados por +) e restarão 6 (simbolizados por -). Por exemplo, o caso + - - + - + - - + - + é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 1, 4, 6, 9 e 11. Com isso, devemos permutar os 5 sinais (+) e os 6 sinais (-) de modo que não tenhamos dois sinais + juntos e isso pode ser feito de $C_{7,5} = 21$ formas diferentes. Logo, temos $15 + 21 = 36$ formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.

Agora, usando mesmo raciocínio, vamos determinar a solução do seguinte problema:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, sabendo que os elemento 1 e n são consecutivos, de modo que não haja números consecutivos?

Vamos separar esse problema em dois casos:

iO elemento 1 figura no subconjunto com p elementos:

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os outros $p-1$ elementos do conjunto {3, 4, 5,..., n - 1} (pois, como o 1 figura, o 2 e o n não podem figurar), não podendo ser escolhidos elementos consecutivos.

Assim, o número de modos que isso pode ser feito é:

$$f(n-3,\ p-1) = C_{n-p-1,p-1}$$

iiO elemento 1 não figura no subconjunto com p elementos:

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os p elementos do conjunto {2, 3, 4, 5, ..., n}, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Assim, o número de modos que isso pode ser feito é:

$$f(n-1,\ p) = C_{n-p,p}$$

Portanto, de (i) e (ii) segue que a solução desse problema proposto é dada por:

$$C_{(n-p-1,p-1)} + C_{(n-p,p)} = \frac{n}{(n-p)} \cdot C_{(n-p,p)}$$

Esse problema do IME aqui apresentado nada mais é que uma aplicação direta do Segundo Lema de Kaplansky (o número de k - subconjuntos de {1, 2, 3, ..., n - 1, n} nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é igual a $\left(\frac{n}{n-p}\right) C_{n-p,p}$. Logo, temos para solução $\frac{12}{(12-5)} C_{12-5,5} = 36$. Logo, temos 36 formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.

Segundo Lema de Kaplansky:

"Seja $g(n,p)$ o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, sabendo que os elemento 1 e n são consecutivos, de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de $\left(\frac{n}{n-p}\right) C_{(n-p,p)}$ modos distintos, ou seja:"[4]

$$g(n,\ p) = \frac{n}{(n-p)}\ C_{(n-p,p)}$$

Além dos Lemas de Kaplansky - Um raciocínio mais abrangente

Poderíamos pensar em um suposto “Terceiro Lema de Kaplansky” que não existe. Por exemplo, como poderíamos solucionar problemas do tipo:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 4 elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, ..., 12} de modo que eles se diferem de ao menos 3? Por exemplo, se o número 4 figurar no subconjunto além do 3 e o 5 não poderão figurar o 2 e o 6. Isto é, dado um elemento x, não podemos ter no mesmo conjunto os elementos x - 2, x - 1, x + 1 e x + 2.

Mostraremos um belo método de solução para esse tipo de problema:

+ - - + - - + - - + : Chamaremos isso de configuração mínima, onde o sinal (+) exibe um elemento que queremos no subconjunto e o sinal (−) exibe um elemento que não queremos no subconjunto. O fato de sempre termos entre dois sinas (+) dois sinais (−) nos garante que nunca poderemos escolher dois números cuja diferença entre ele seja menor que 3.

Nesse conjunto A queremos escolher 4 elementos - 4 sinais (+) - e, consequentemente, deixaremos de escolher 8 elementos - 8 sinais (−) - (com as condições impostas pelo enunciado). Mas, a configuração mínima usa 4 sinais (+) e 6 sinais (−), restando, portanto, 2 sinais (−) para colocarmos em 5 possíveis lugares (antes, entre ou depois dos sinais (+). Assim, nosso problema fica resumido ao seguinte:

Quantas soluções inteiras e não negativas a equação linear $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 = 2$(.), com X_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq 5$ possui?

Sabemos que a resposta pra esse problema é dada por C6,2 ou CR5,2, pois queremos escolher 5 lugares para 2 sinais (+). Por exemplo, se escolhermos o subconjunto 2, 6, 9, 12 significa que a solução da equação (.) é (1, 1, 0, 0, 0) o que nos daria a configuração - + - - - + - - + - - +. Caso escolhêssemos o subconjunto 1, 5, 8, 11 significa que a solução da equação (.) é (0, 1, 0, 0, 1) o que nos daria a configuração + - - - + - - + - - + -. Logo, a solução para o problema proposto é $C_{6,2} = CR_{5,2} = 15$. Esse raciocínio pode ser aplicado em outros problemas, mas devemos sempre ficar atentos para a configuração mínima.

Vejamos esse exemplo:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 5 elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, ..., 25} de modo que eles se diferem de ao menos 4?

Nesse caso, a configuração mínima é a seguinte:

$$+ - - - + - - - + - - - + - - - +$$

Nesse conjunto A queremos escolher 5 elementos - 5 sinais (+) - e, consequentemente, deixaremos de escolher 20 elementos - 20 sinais (−) - (com as condições impostas pelo enunciado). Mas, a configuração mínima usa 5 sinais (+) e 12 sinais (−), restando, portanto, 8 sinais $(-)$ para colocarmos em 6 possíveis lugares (antes, entre ou depois dos sinais $(+)$). Assim, nosso problema fica resumido ao seguinte:

Quantas soluções inteiras e não negativas a equação linear $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 8 (.)$, com X_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq 6$ possui? Sabemos que a resposta pra esse problema é dada por $C_{13,8} = CR_{6,8} = 1287$, pois queremos escolher 6 lugares para 8 sinais $(-)$. Como esse raciocínio, o Lema de Kaplansky passa a ser apenas um problema desse tipo com uma configuração mínima da forma $+-+-+-+-+\ldots+-+$.

11 CONCLUSÃO

O objetivo do trabalho aqui exposto é que esse material sirva como apoio a professores e estudantes do ensino médio para evoluírem no estudo da análise combinatória. Precisamos compreender que o mais importante é o aluno saber atacar o problema olhando suas restrições e jamais se preocupando se devemos usar arranjos, combinações ou permutações.

O uso de combinações deve ser apenas para facilitar e não o foco principal do problema. O sucesso em análise combinatória é diretamente ligado ao número de exercícios que a pessoa tem em mente e as estratégias que ela consegue para solucionar um problema. Muitas vezes, diante de um problema, temos a lembrança de um outro em que usamos um mesmo raciocínio. E nunca podemos esquecer de um importantíssimo detalhe: coloque-se no lugar da pessoa que está no problema e vivencie-o ao máximo.

REFERÊNCIAS

[1] BACHX, A.C., POPPE, L.M.B. e TAVARES, R.N.O. Prelúdio à Análise Combinatória. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

[2] MORGADO, A.C.O., CARVALHO, J.B.P., CARVALHO, P.C.P. e FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2000.

[3] PLINIO, J., MELL, M., Murari, I. Introdução à Análise Combinatótia. Campinas-SP: Editora UNICAMP, 2002.

[4] SANTOS, J.P.O., MELLO, M.P. e MURARI, I.T.C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[5] ILENKIN, N., ¿De cuántas formas?. Editora MIR, 1972.