Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Carlos Alberto Almendras Montero

Existência e unicidade da solução de um problema de plasma confinado

Juiz de Fora

2014

Carlos Alberto Almendras Montero

Existência e unicidade da solução de um problema de plasma confinado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de matemática aplicada.

Orientador : Dr. Sandro Rodrigues Mazorche.

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Almendras Montero, Carlos Alberto.
Existência e unicidade da solução de um problema de plasma confinado / Carlos Alberto Almendras Montero. -- 2014.
98 f. : il.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Plasma confinado. 2. Subdiferencial. 3. Operador projeção. 4. Inequação variacional. I. Rodrigues Mazorche, Sandro , orient. II. Título.

Carlos Alberto Almendras Montero

Existência e unicidade da solução de um problema de plasma confinado

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rolci de Almeida Cipolatti
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Juiz de Fora, 20 de Fevereiro de 2014.

A meus pais, Domínica e Alberto, que sempre me ajudaram com seu apoio e conselhos de maneira incondicional.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a meu orientador Dr. Sandro Rodrigues Mazorche pelo seu apoio, sua paciência e dedicação para me orientar. Por me aceitar para trabalhar na dissertação de mestrado sob sua orientação. Sua confiança, amizade e capacidade para guiar minhas ideias foram de muito valor.

Quero agradeçer também ao Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria e minha amiga, Sandra Imaculada, pelo apoio e participação na conclusão da dissertação.

A meus pais, Domínica e Alberto, meus irmãos, José e Jesenia, e a minha sobrinha Milagros que sempre acreditam e apoiam os meus objetivos.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Aos professores, que partilharam seus conhecimentos nas disciplinas que cursei durante o mestrado, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo seu apoio financeiro.

A todos meus amigos, peruanos e brasileiros, que compartilharam comigo tempo de estudo, conversas e brincadeiras, tornando estes anos de estudos mais leves.

RESUMO

Neste trabalho, o objetivo é estudar a existência e unicidade da solução num sentido fraco para um problema não linear com valor na fronteira que é derivado de um modelo que decreve o equilibrio de um plasma confinado. Para esta finalidade se formula um problema equivalente e se estabelecem condições para este novo problema. Logo, utilizando a teoria da subdiferencial e fazendo um estudo de autovalor se consegue que este novo problema tenha solução e, além disso, seja única.

Palavras-chave: Inequação variacional. Operador projeção. Subdiferencial. Plasma confinado.

ABSTRACT

In this work, the objective is to study the existence and uniqueness of the solution in a weak sense of a nonlinear boundary value problem which it is derived from a model that describe the equilibrium of a confined plasma. For this purpose, we formulate an equivalent problem and establish conditions for this new problem. Therefore, using the theory of subdiferencial and studing an eigenvalue problem, we obtain that this new problem has a unique solution.

Key-words: Variational Inequality. Projection operator. Subdifferential. Confined plasma.

LISTA DE NOTAÇÕES

E^*	espaço dual topologico de E
$\|.\|_E$	norma definida no espaço E
$(.,.)_E$	produto interno definido em E
$\langle .,. \rangle_E$	produto de dualidad definido entre E^*e E
$\sigma(E, E^*)$	topologia fraca definida em E
$\rightarrow$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$q.t.p.$	quase toda parte
$dimX$	dimensão do espaço E
$L(X)$	conjunto de operadores $T : X \rightarrow X$lineares e limitados
$\rho(T)$	conjunto resolvente do operador T
$\sigma(T)$	espectro do operador T
$\sigma_p(T)$	espectro pontual do operador T
$\sigma_c(T)$	espectro contínuo do operador T
$\sigma_r(T)$	espectro residual do operador T
∇u	$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$
Δu	$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	subconjunto aberto
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$L^p(\Omega)$	espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
	con norma L^p finita $\|u\|_{L^p} = \big(\int_\Omega \|u\|^p \big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$
$L^p_{loc}(\Omega)$	espaço de funções localmente integraveis
$suppf$	suporte da função f
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$A \subset\subset \Omega$	indica que o fecho de A e compacto e $\overline{A} \subset \Omega$
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas em Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto

$C(\overline{\Omega})$	espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$
$W^{k,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev. Veja Capítulo 1, Seção 1.3
$H^k(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$
$U \hookrightarrow V$	imersão contínua entre os espaços U e V
$U \overset{c}{\hookrightarrow} V$	imersão compacta entre os espaços U e V
$dom(F)$	domínio de F
$\mathcal{I}_K$	função indicadora do conjunto K
$epi(F)$	epígrafo de F
$s.c.i.$	semicontínua inferior
$\Gamma(V)$	conjunto de funções que são supremos pontuais de uma família de funções contínuas afins
F^*	função conjugada de F
$\partial F(u)$	subdiferencial de F no ponto u
$F'(u_0)$	diferencial de Gâteaux da função F no ponto u_0
$DF(u_0)$	diferencial de Fréchet da função F no ponto u_o
$P_K x$	projeção de x sobre o conjunto K
$K^\perp$	cone polar do cone K

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

De acordo com o livro [7], o plasma é um gas totalmente ionizado; isto é, formado por íons positivos e elétrons livres. Em uma escala de volume macroscópica, o plasma pode ser considerado quase neutro, já que, em grandes volumes, o número de cargas negativas é aproximadamente igual ao número de cargas positivas, porém, os plasmas são fluidos que, estando formados de partículas carregadas livres, conduzem a eletricidade. Assim, eles são sucetíveis à ação de campos eletromagnéticos ao mesmo tempo que os geram; de modo que o movimento de cada uma das partículas carregadas que costituem o plasma é influenciada pelo movimento de todas as outras, levando ao que se denomina "efeito coletivo". O plasma é formado a temperaturas acima de 10000 graus celsius mas, a temperaruras mais elevadas (da ordem das dezenas de milhões de graus celsius), sempre que o plasma se mantenha confinado, as colisões entre os nucleos ionizados que neste caso o integram são tão violentas que podem levar a um processo de fusão nuclear. O problema consiste em que, devido às altíssimas temperaturas envolvidas, não existe nenhum material com o qual possa ser construído um reservatório para o plasma nesse estado, sem resultar na sua imediata destruição, contaminando-o e esfriando-o no processo, e por tanto, acabando imediatemante com a reação de fusão. Daí que se recorra ao uso de armadilhas magnéticas para manté-lo confinado. Este é o principio que inspirou a ideia de construir o dispositivo conhecido como Tokamak.

O termo Tokamak é uma transliteração de um acrônimo de palavras russas que em português significam câmara toroidal e bobinas magnéticas e denomina um reator experimental de fusão nuclear criado nos anos 50 pelos físicos soviéticos Igor Yevgenyevich Tamm e Andrei Sakharov (a partir de uma ideia original de Oleg Lavrentyev). O Tokamak é um imenso eletroímã que possui no seu interior uma câmara de vácuo na qual um anel de plasma fica confinado por um intenso campo magnético toroidal, a fim de que o plasma não toque as paredes do Tokamak, o que causaria a perda da tempetura.

Neste trabalho estudamos um problema não linear com valor na fronteira que é derivado de um modelo que descreve o equilíbrio de um plasma confinado:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K(u)\,, \quad \text{em}\,\Omega \\ u\,|_{\partial\Omega}= \theta\varphi\,, \quad \theta \in \mathbb{R} \;\text{ não conhecido} \\ \displaystyle\int_\Omega P_K(u)\psi = \frac{I}{\lambda}\,, \quad I > 0 \;\text{ é préscrito.} \end{cases} \tag{1}$$

onde:

- Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$.
- $\lambda \neq 0$ é um parâmetro real.
- K é um conjunto fechado convexo de $L^2(\Omega)$ e P_K é o operador projeção sobre K.
- ψ é uma extensão harmônica a Ω de uma função dada $\varphi \neq 0$ em $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Este é um problema que de algum jeito generaliza o modelo de plasma confinado, pois quando $K = \{v \in L^2(\Omega) : v \geq 0,\;$ q.t.p em $\Omega\}$ e $\varphi \equiv 1$ sobre $\partial\Omega$ temos o modelo do problema de plasma introducido por R. Temam [15] e amplamente estudado por vários autores (ver [3], [14], [16]).

O trabalho está organizado como segue. Nos Capítulos 1, 2, 3 fazemos um estudo breve das ferramentas utilizadas ao londo do trabalho, apresentando alguns resultados para resolver o Problema (1). Os capítulos são dados da seguinte forma: No Capítulo 1 apresentamos resultados de análise funcional e equações diferenciais parciais. No Capítulo 2 fazemos um estudo breve da subdiferencial e a diferencial de Gâteaux e Fréchet. No Capítulo 3 estudamos alguns resultados das inequações variacionais.

No Capítulo 4 se estudamos a existência e unicidade para o problema (1), ver [6]. Este capítulo está dado em duas seções: Na primeira seção formulamos um problema equivalente e estabelecemos condições para garantir a existência da solução do novo problema. Na segunda seção estudamos a unicidade da solução para o Problema (1), conseguindo restringir os valores para λ.

Finalmente apresentamos algumas concluções e as referências.

1 RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Neste capítulo, apresentamos, alguns resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Estes resultados são tratados detalhadamente nas referências [1] [4], [11].

1.1 ALGUMAS NOÇÕES DA ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 1.1. Seja E um espaço vetorial real. Suponha que esteja definida uma função $\|.\|_E : E \to \mathbb{R}$ tal que,

i. $\|u\|_E \geq 0, \forall\, u \in E$ e $\|u\|_E = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

ii. $\|\alpha u\|_E = |\alpha|\|u\|_E, \quad \forall\, u \in E, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E, \quad \forall\, u, v \in E$.

Nestas condições a função $\|.\|_E$ é chamada uma norma e dizemos que $(E, \|.\|_E)$ é um espaço normado que só denotaremos por E.

Em espaços normados é possível definir o conceito de limite.

Definição 1.2. Seja E um espaço normado e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a $u \in E$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $\|u_n - u\|_E < \varepsilon$.

Existe também para espaços normados a noção de sequência de Cauchy.

Definição 1.3. Seja E um espaço normado e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Vamos dizer que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy quando para cada $\varepsilon > 0$, for possível obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \in \mathbb{N}$ com $n, m > n_0$, então $\|u_n - u_m\|_E < \varepsilon$.

Um espaço normado onde toda sequência de Cauchy converge é chamado espaço de Banach.

Observação 1.1. É imediato que toda sequência que converge fortemente é uma sequência de Cauchy. A recíproca, porém, só é verdadeira se E é um espaço de Banach.

Definição 1.4. Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que $(.,.)_E : E \times E \to \mathbb{R}$ define um produto interno se:

i. $(.,.)_E$ é bilinear;

ii. $(.,.)_E$ é simétrica;

iii. $(u,u)_E \geq 0, \forall\, u \in E$ e $(u,u)_E = 0$ se, e somente se $u = 0$.

Neste caso, dizemos que $(E, (.,.)_E)$ é um espaço com producto interno, que também denotaremos por E. A partir disto, é imediato ver que a função $\|.\|_E : E \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\|_E = (u,u)_E^{1/2}$ define uma norma em E. Logo, em todo espaço com produto interno é possível definir uma norma induzida pelo produto interno. Consequentemente, surge em espaços com produto interno a noção de limite. Finalmente, se num espaço com produto interno toda sequência de Cauchy for fortemente convergente a algum elemento deste espaço com a norma induzida, $\|u\|_E = (u,u)_E^{1/2}$, então este espaço será chamado Espaço de Hilbert, que denotaremos por H. Note que todo espaço de Hilbert é Banach.

Agora vamos introduzir a noção de convergência fraca num espaço de Banach. Para uma vizão mas detalhada, veja [4].

Notação: Designamos por E^* o dual (topológico) de E; isto é, o espaço de todas os funcionais lineares e contínuos sobre E. Quando $f \in E^*$ e $x \in E$ denotaremos por $\langle f, x\rangle_{E^* \times E}$ em vez de $f(x)$.

Definição 1.5. Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é a topologia menos fina que torna todos os funcionais $\varphi \in E^*$ contínuos.

Quando colocamos em E a topologia fraca $\sigma(E, E^*)$, induzimos uma nova noção de convergência chamada convergência fraca. Neste caso, dada uma sequênecia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente a $x \in E$. Denotaremos esta convergência por $x_n \rightharpoonup x$ em E e a convergência forte será denotado por $x_n \to x$ em E.

Teorema 1.6. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:

i. $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle_{E^* \times E} \to \langle f, n\rangle_{E^* \times E}\,, \quad \forall\, f \in E.$

ii. Se $x_n \to x$ fortemente em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

iii. Se $x_n \rightharpoonup x$ em E então $(\|x_n\|_E)$ está limitada e $\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E$.

iv. Quando E tem dimensão finita, então a convergência fraca e forte coincidem.

A demonstração pode ser encontrada em [4].

Observação 1.2. Sendo E um espaço normado, podemos definir uma injeção canônica J dada da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} J : E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & Jx \quad : E^* \to \mathbb{R} \\ & & \qquad\qquad f \mapsto \langle Jx, f\rangle_{E^{**}\times E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*\times E} \end{array}$$

onde E^{**} é o bidual, isto é, o dual de E^*. Então, J assim definida é linear e também é uma simetría; isto é, $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$

Se a injeção canônica é sobrejetiva, então E é chamado **espaço reflexivo**. Observe que todo espaço de Hilbert é reflexivo.
O seguinte teorema, o qual estabelece a relação entre a convergência fraca e os espaços reflexivos, será de grande utilidade para mostrar a existência e unicidade de nosso problema.

Teorema 1.7. Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em E.

Em particular, uma sequência limitada num espaço de Hilbert H possui uma subsequência que converge fracamente en H.
Para fechar esta seção, apresentamos alguns resultados de operadores em espaços normados.

Definição 1.8. Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \to Y$ é chamado compacto (ou chamado também de completamento contínuo), se a imagem $T(A)$ de todo conjunto limitado $A \subset X$ é pré-compacto (ou também relativamente compacto) em Y; isto é, o fecho $\overline{T(A)}$ é compacto.

Observação 1.3. Uma forma equivalente de definir um operador compacto é: um operador linear $T : X \to Y$ é compacto se $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y para toda subsequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

O teorema a seguir, no qual relaciona um operador compacto com a convergência fraca e forte, será de grande utilidade posteriormente.

Teorema 1.9. Seja $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $Tx_n \to Tx$; ou seja, um operador compacto leva sequências fracamente convergêntes em sequências fortemente convergêntes.

A demonstração pode ser encontrada em [13].

Consideremos agora H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Seja $T : H_1 \to H_2$ um operador linear limitado, então o operador adjunto de Hilbert $T^* : H_2 \to H_1$ é definido como sendo o operador que satisfaz

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \forall\, x \in H_1,\, y \in H_2.$$

Observação 1.4. O operador T^* definido acima é único, linear e limitado, com norma $\|T^*\| = \|T\|$.

O operador $T : H \to H$, linear e limitado sobre um espaço de Hilbert H, é chamado autoadjunto se $T = T^*$. Neste caso

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall\, x, y \in H.$$

Teorema 1.10. Seja $T : H \to H$ um operador linear limitado. Então:

a) Se T é autoadjunto, $\langle Tx, x \rangle$ é real para todo $x \in H$.

b) Se H é complexo e $\langle Tx, x \rangle$ é real para todo $x \in H$, então T é um operador autoadjunto.

A demonstração pode ser encontrada em [13].

Definição 1.11. Un operador $T : H \to H$ linear, limitado e autoadjunto é positivo se $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, $\forall\, x \in H$.
Se a desigualdade é estrita para todo $x \neq 0$, então T é chamado estritamente positivo.

Denotemos por $L(X)$ o conjunto de operadores $T : X \to X$ lineares e limitados.
Podemos obter muita informação de um operador linear T estudando a família de operadores $T - \lambda I$, com λ real ou complexo.
No caso de dimensão finita a situação é particularmente simples: dado um operador linear

$T : X \to X$ com X espaço normado de dimensão finita, $dimX = n$, fixado um escalar λ, ou existe $(T - \lambda I)^{-1}$ ou não existe. Se não existe, λ é chamado autovalor de T e existem no máximo n autovalores que são as raízes da equação característica do $det(T - \lambda I) = 0$ (onde identificamos o operador T com a sua matriz associada a qualquer base de X). Além disso; todas as matrizes que representam o mesmo operador $T \in L(X)$ com relação às distintas bases de X têm os mesmos autovalores.

O caso de dimensão infinita não é tão simples, pois pode haver infinitos valores de λ para os quais $(T - \lambda I)^{-1}$ não existe, nos casos de existência temos que precisar os resultados, tanto o que $(T-\lambda I)^{-1}$ seja linear e limitado, assim como a imagem de $(T-\lambda I)$ seja denso em X. Nada disso tem sentido em dimensão finita. O estudo destas questões conduzem à análise espectral, obtendo resultados que geralizam o caso de dimensão finita. Para mais detalhes veja [4].

No que segue, apresentamos só alguns resultados da análise espectral que precissamos neste trabalho.

Definição 1.12. Seja $X \neq 0$ um espaço normado complexo e $T \in L(X)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um ponto regular de T se existe $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ e é um operador limitado definido num subconjunto denso de X.

O conjunto resolvente de T é o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é ponto regular de T}\}.$$

O termo resolvente significa que a equação $(T - \lambda I)x = y$ tem solução $x = (T - \lambda I)^{-1}y$. Chamamos espectro de T ao conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$; isto é, ao conjunto de pontos não regulares de T. O ponto $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado ponto espectral ou valor espectral.
O espectro de T é particionado em 3 conjuntos disjuntos:

- O **espectro pontual** ou espectro discreto $\sigma_p(T)$ é tal que $R_\lambda(T)$ não existe. Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ então λ é chamado autovalor de T. Cada $x \in X$ que satisfaz $(T - \lambda I)x = 0$, com $\lambda \in \sigma_p(T)$, é chamado autovetor de T correspondente a λ.

- O **espectro contínuo** $\sigma_c(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe, está definido num subconjunto denso em X mas não é limitado.

- O **espectro residual** $\sigma_r(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe, pode ser ou não limitada, mas não está definida num subconjunto denso em X.

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES COMPACTOS AUTO-ADJUNTOS

Lema 1.13. Se $T \in L(H)$ é autoadjunto. Então:

i. Os auto-valores de T (se existirem) são reais.

ii. Auto-vetores correspondentes a auto-valores distintos são ortogonais.

iii. $\|T\| = \sup\big\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\big\}$.

Observe que, da parte iii do lema dado acima, $\|T\|$ é o primer autovalor para o operador L.

O resultado necessario para a demonstração do teorema espectral é:

Lema 1.14. Se T é um operador autoadjunto e compacto, então T tem pelo menos um autovalor μ_1 não nulo, com $|\mu_1| = \|T\|$.

Teorema 1.15. (Teorema Espectral). Seja $T \in L(H)$ um operador compacto e auto-adjunto, $T \neq 0$. Então existem sequências $\{\mu_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ e $\{\Phi_j\}_{j=1}^{n} \subset H$, onde n pode ser infinito, tais que

$$T\Phi_j = \mu_j \Phi_j, \qquad (\Phi_j, \Phi_k) = \begin{cases} 0, & j = k \\ 1, & j \neq k, \end{cases}$$

$$T\Phi = \sum_{k=1}^{1} \mu_k (\Phi, \Phi_k)\Phi_k, \quad \forall\, \Phi \in H, \tag{1.1}$$

onde os números reais μ_j são ordenados de modo que $|\mu_j| \geq |\mu_{j+1}| > 0$ para todo j. Caso $n = \infty$, a série (1.1) converge na norma de H e $\lim_{j\to\infty} |\mu_j| = 0$. Além disso, se M é o fecho do espaço gerado pelo conjunto $\{\Phi_j\}_{j=1}^{n}$, então $T|_{M^\perp} = 0$

Dos lemas 1.13 e 1.14 temos

$$|\mu_k| = \|T_{k-1}\| = \sup\big\{|(Tf, f)| : f \in H_{k-1}^{\perp}, \|f\| = 1\big\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots,$$

onde $T_0 = T$ e $H_0^{\perp} = H$. Ver [8].

1.2 ESPAÇOS L^P

Seja μ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ nos quais μ está bem definido são denominados conjuntos mensuráveis. As funções f tais que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ é um comjunto mensurável, são denominados funções mensuráveis. A integral de Lebesgue, por sua vez, é definida para funções mensuráveis. Para mais detalhes sobre a teoria da medida e as integrais de Lebesgue, ver [2].

Definição 1.16. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que duas funções são **equivalentes** em Ω com respeito à medida de Lebesgue, se elas são iguais quase toda parte (q.t.p.). Isto é, $v \equiv u$, se v e u são diferentes apenas sobre um subconjunto de Ω com medida nula.

A **clase de equivalência** determinada por v consiste de todas as funções w que são equivalentes a v.
Com base nas clases de equivalência, definimos os espaços L^p.

Definição 1.17. Seja $1 \leq p < \infty$. Definima-se o espaço $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p < \infty\}.$$

A função $\|.\|_{L^p} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \tag{1.2}$$

é uma norma para $L^p(\Omega)$. Esta informação é válida, pois consideramos $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço de classes de funções equivalentes; isto é, duas funções iguais quase sempre em Ω são interpretadas como o mesmo elemento. Caso esta condição não fosse assegurada, $\|.\|_{L^p}$ caracterizaria o que denominamos seminorma.

Os espaços $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, são espaços de Banach com a norma dada por (1.2). Em particular, para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,, \quad \forall\, f, g \in L^2(\Omega).$$

Neste caso, vê-se que $\|f\|_{L^2} = (f, f)^{1/2}$.

Teorema 1.18. (Desigualdade de Hölder)
Seja $1 \leq p \leq \infty$ e p' tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

A demonstração pode ser encontrada em [4].
Um caso particular da desigualdade de Hölder é a desigualdade de Cauchy quando $p = 2$.

Teorema 1.19. (Desigualdade de Interpolação)
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e consideremos $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e é verificado

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ com } \alpha \in [0,1] \text{ tal que } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

1.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção introduzimos a noção de derivada fraca, os espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades. Para maiores detalhes veja [1], [11].

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto não-vazio e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 1.20. Dizemos que um comjunto A está compactamente contido em Ω, e denotamos por $A \subset\subset \Omega$ se $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ é compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.21. O conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ é chamado **Suporte** da função f. Denotamos este conjunto por $suppf$.

Definição 1.22. Representemos por $C_0^{\infty}(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais para todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Definimos a função

$$1_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{se } x \notin K, \end{cases}$$

e é chamada a função característica de K.

Definição 1.23. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f 1_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$; isto é, se $f \in L^p(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega$.

Seja um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, onde α_i é um inteiro não negativo. Então α é chamado um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.
Dado um multi-índice α definimos

$$D^{\alpha} u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.24. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, α um multi-índice e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a $\alpha - esima$ derivada fraca de f em Ω e escrevemos $D^\alpha f = g$, se

$$\int_\Omega f(x).D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x).\phi dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.25. Seja k um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, como o espaço das funções $v \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de v, até a ordem k, é uma função do $L^p(\Omega)$. Isto é,

$$W^{k,p} = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Nota-se que para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$,

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{1.3}$$

Além disso, para cada p, $W^{k_1,p} \subset W^{k_2,p}$ se $k_1 \geq k_2$. Para $1 \leq p \leq \infty$, temos que $W^{k,p}(\Omega)$ caracteriza um espaço de Banach munido da norma $\|.\|_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que é dada por

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty. \tag{1.4}$$

Segundo Trudinger, ref [11], uma norma equivalente de (1.4) para $W^{k,p}(\Omega)$ é

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p}.$$

Em particular, para $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ caracteriza um espaço de Hilbert, para cada k não negativo, munido do produto interno:

$$(u, v)_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Usualmente denota-se H^k o espaço $W^{k,2}(\Omega)$, assim de (1.3) temos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição 1.26. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, se

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}} = 0.$$

Definição 1.27. Definimos o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho e $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Analogamente, denotemos por $H_0^k(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$.
Portanto, uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.
O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ interpreta-se como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1$$

Notamos que, para cada k não negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Também nota-se que para $p = 2$, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida de $H^k(\Omega)$.

Segundo Trudinger, ref [11], prova-se que uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma dada em (1.4) pode ser definido por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}.$$

Como $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert então são espaços reflexivos.

No que segue, apresentamos alguns teoremas de imersão, mas precisamos definir outro conceito importante. Ver [1].

Definição 1.28. (Imersão) Sejan U e V dois espaços normados. Dizemos que U está imerso no espaço V, e denotamos por $U \hookrightarrow V$, se satisfaz o seguinte

i. U é um subespaço de V.

ii. O operador identidade $I : U \to V$ definido por $Ix = x$, para todo $x \in U$, é contínuo.

Já que I é linear, (ii) é quivalente a dizer que existe uma constante c tal que

$$\|Ix\|_V \leq c\|x\|_U, \quad \forall\, x \in U.$$

Se $U \hookrightarrow V$ e o operador identidade $I : U \to V$ na imersão é compacto, então dizemos que a imersão é compacta e a denotamos por $U \overset{c}{\hookrightarrow} V$.

Teorema 1.29. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de clase C^1 com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:

i. Se $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

ii. Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, +\infty[$.

iii. Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Observação 1.5.
Da parte (i) e (ii) do teorema acima temos

$$\|u\|_{L^q} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

onde $q = \dfrac{pn}{n-p}$ se $n > p$ e $q \in [p, +\infty[$ se $n = p$.
Em particular para $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\|u\|_{L^q} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e pela equivalência de normas obtemos

$$\|u\|_{L^q} \leq c \|u\|_{W_0^{1,p}} = c \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, se $p = 2$, obtemos

$$\|u\|_{L^q} \leq c \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $q = \dfrac{2n}{n-2}$ se $n > 2$ e $q \in [2, +\infty[$ se $n = 2$.

Teorema 1.30. (Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas.

i. Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

ii. Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$.

iii. Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

A demonstração pode ser encontrada em [4].

Observação 1.6.
Notar que, se $p = 2$, então para (i) e (ii) do teorema acima, temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2} \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

onde $q \in [1, p^*[$ com $p^* = \dfrac{2n}{n-2}$ se $n > p = 2$, e $q \in [1, +\infty[$ se $n = p = 2$.

Agora, como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, então

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

De fato: Seja o operador identidade $I : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Temos que mostrar que I é um operador compacto.
Com efeito: Seja $A \subset H_0^1(\Omega)$ limitado, então $\|u\|_{H_0^1} \leq k$, $\forall\, u \in A$. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, então pela equivalência de normas, temos que $\|u\|_{H^1} \leq c\|u\|_{H_0^1} \leq ck$, $\forall\, u \in A$, assim A é limitado em $H^1(\Omega)$. Já que $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, obtemos que $IA = A$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$ o que implica que I é um operador compacto.
Em particular, se $q = 2$ temos,

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Corolário 1.31. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:

i. $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$; $\quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$ se $p < n$.

ii. $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$; $\quad 1 \leq q < +\infty$ se $p = n$.

iii. $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^m\left(\overline{\Omega}\right)$; $\quad$ se $p > n$.

Corolário 1.32. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $n \geq 2$. A seguinte imersão é compacta:

$$W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega).$$

1.4 O ESPECTRO DO LAPLACIANO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. O problema de autovalor para o laplaciano consiste em encontar os valores reais λ tais que

$$-\Delta u = \lambda u\,, \quad \text{em } \Omega$$

admite soluções não triviais, com alguma condição de fronteira imposta sobre u. Consideremos o problema de autovalor com condição de Dirichlet homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u\,, & \text{em } \Omega, \\ u = 0\,, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema pode ser formulado fracamente da seguinte forma: dizemos que λ é um autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet e $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção correspondente se

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \lambda \int_\Omega uv\,, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega u^2,$$

de modo que todos os autovalores do laplaciano com condição de Dirichlet são positivos (se $\lambda = 0$. então a única solução do problema é a solução nula).

Teorema 1.33. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u\,, & \text{em } \Omega, \\ u = 0\,, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

tais que

$$\lambda_k \longrightarrow \infty\,, \quad \text{quando } \; k \longrightarrow \infty,$$

e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$; isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i\rangle_{L^2}^2.$$

Além disso, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i\rangle_{L^2}^2.$$

O primeiro autovalor λ_1 é o menor autovalor e é dado por

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2},$$

além disso, λ_1 é atingido por uma função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1\,, & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0\,, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, u_1 é uma autofunção para λ_1.

Propriedades do autovalor $\boldsymbol{\lambda_1}$.

O autovalor λ_1 fornece propriedades importantes que são:

i. $u_1 < 0$ ou $u_1 > 0$ em Ω.

ii. Se v é uma λ_1-autofunção, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha u_1$

2 ALGUNS RESULTADOS DA ANÁLISE CONVEXA

A área da análise convexa, mais especificamente a otimização, vem apresentando um desenvolvimento acentuado desde a década de 60, em grande parte impulsionado pelos trabalhos de Fenchel, Moreau e Rockafellar. Inclusive, foi na década de 60 que se manfestou grande interesse com relação a análise convexa em dimensão infinita, sobre todo em espaços de Banach.
O objetivo nesta seção é apresentar alguns resultados da subdiferencial. Só o fato de a subdiferenciação ser uma generalização da diferenciação já nos permite concluir que o subdiferencial não é menos relevante do que a derivada. Além disso, se tratando de uma generalização, é esperado que muitos resultados clássicos possam ser estendidos. Para mais detalhes ver [4], [9].

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um conjunto $K \subset V$ é chamado convexo, se para todo $x, y \in K$, $tx + (1-t)y \in K$, $\forall\, t \in [0,1]$.

Seja K um conjunto convexo. Dizemos que $F : K \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função convexa no conjunto K se $\forall\, x, y \in K$ tem-se

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Dizemos que F é estritamente convexa se $\forall\, x, y \in K$, com $x \neq y$,

$$F(tx + (1-t)y) < tF(x) + (1-t)F(y), \quad \forall\, t \in]0,1[.$$

Segundo Ekeland, ref [9], os conjuntos $\{u : F(u) \leq a\}$ e $\{u : F(u) < a\}$, chamadas seções, são convexas se $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa. Para cada aplicação $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$, a seção

$$dom(F) = \{u \in V : F(u) < +\infty\},$$

é chamado domínio efetivo (ou simplesmente domínio) de F. Assim, o domínio de uma função convexa é convexa.

Nestas condições, $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é chamada própria se $F(u) > -\infty$, $\forall\, u \in V$, e seu domínio é não vazio; isto é, existe pelo menos um elemento $u \in V$ tal que $F(u) < +\infty$.

A função F é coerciva sobre um espaço vetorial normado se

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} F(u) = +\infty.$$

Por que permitir o valor $+\infty$?. Se F é uma é uma aplicação convexa de $K \subset V$ em $\mathbb{R}$, então podemos associar a F a função $\widetilde{F}$ definindo em todo V por:

$$\begin{cases} \widetilde{F} = F(u), & \text{se} \quad u \in K \\ \widetilde{F} = +\infty, & \text{se} \quad u \notin K. \end{cases}$$

Nota-se que, $\widetilde{F}$ é uma função convexa se, e somente se, $K \subset V$ e $F : K \to \mathbb{R}$ são convexas.

Na teoria das funções convexas, devido a esta extensão, necessitamos considerar funções definidas em todas partes. Uma vantagem é que pode-se definir, para $K \subset V$, a seguinte função

$$\mathcal{I}_K(u) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u \in K \\ +\infty, & \text{se} \quad u \notin K. \end{cases} \tag{2.1}$$

A função $\mathcal{I}_K$ definida acima é chamada indicadora do conjunto K.

Definamos agora um subconjunto do espaço produto $V \times \mathbb{R}$ que é de muita utilidade, já que permite trabalhar com funções e conjuntos indistintamente.

O epígrafo de $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ consiste no conjunto

$$epi(F) = \{(u, \alpha) \in V \times \mathbb{R} : F(u) \leq \alpha\}.$$

Este subconjunto de $V \times \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos de $V \times \mathbb{R}$ que se encontram acima do gráfico de F e a projeção do $epi(F)$ sobre V não é outro que o $dom(F)$.

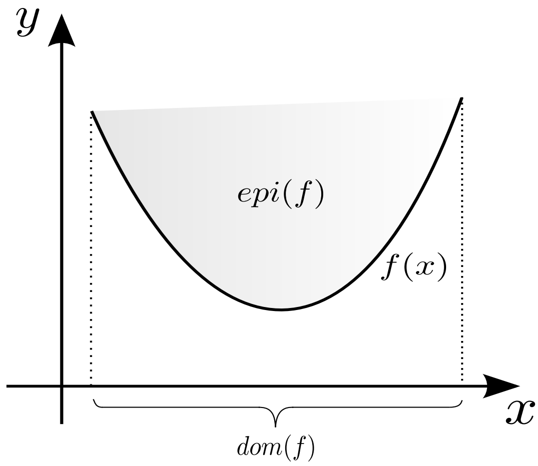

Figura 2.1: Interpretação geométrica do epígrafo de F

Observação 2.1. O domínio da função indicadora $\mathcal{I}_K$ é o conjunto próprio K e seu epígrafo é o conjunto $K \times \mathbb{R}_0^+$, onde $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Portanto, $\mathcal{I}$ é convexa se, e somente se, K é um conjunto convexo.

Proposição 2.1. Uma função $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa se, e somente se, seu epígrafo é um conjunto convexo.

A demonstração pode-se encontrar em [9].

Observação 2.2. Se $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa então:

i. Se λ é um número real positivo, então λF é convexa.

ii. Se F e G são funções convexas de V em $\overline{\mathbb{R}}$, então $F + G$ é convexa.

Outra classe de funções de muita utilidade neste trabalho são as funções semicontínuas inferiormente. Para definir esta classe de funções consideremos V um espaço topológico.

Definição 2.2. Uma função $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é chamado semicontínua inferior (s.c.i.) em $u_0 \in V$ se

$$F(u_0) \leq \liminf_{v \to u_0} F(v).$$

Diz-se que F é s.c.i. em V quando F é s.c.i. em todo ponto de V; isto é,

$$\forall\, u \in V, \quad F(u) \leq \liminf_{v \to u} F(v).$$

Caracterizações úteis para funções s.c.i. são dadas na proposição a seguir.

Proposição 2.3. Seja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$, então:

i. F é s.c.i. em V se, e somente se, o seu epígrado, $epi(F)$, é um conjunto fechado no espaço produto $V \times \mathbb{R}$.

ii. F é s.c.i. em V se, e somente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{u \in V : F(u) \leq \lambda\}$ é fechado.

A demonstração pode-se encontrar em [9].

Observação 2.3. Se F e G são funções s.c.i. então $F + G$ é s.c.i.

Exemplo 2.1. A função indicadora $\mathcal{I}_K$ definida em (2.1) é própria e s.c.i.

De fato, pela definição de $\mathcal{I}_K$ tem-se que $\mathcal{I}_K$ é própria.
Por outro lado, por definição temos

$$\begin{aligned} epi(\mathcal{I}_K) &= \{(u,\alpha) \in V \times \mathbb{R} : \mathcal{I}_K(u) \leq \alpha\} \\ &= \{(u,\alpha) \in K \times \mathbb{R} : \mathcal{I}_K(u) \leq \alpha\} \cup \{(u,\alpha) \in (V \setminus K) \times \mathbb{R} : \mathcal{I}_K(u) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Como $\{(u,\alpha) \in (V \setminus K) \times \mathbb{R} : \mathcal{I}_K(u) \leq \alpha\} = \emptyset$, então

$$epi(\mathcal{I}_K) = \{(u,\alpha) \in K \times \mathbb{R} : 0 \leq \alpha\} = K \times \mathbb{R}_0^+.$$

Já que, K e $\mathbb{R}_0^+$ são fechados, então o $epi(\mathcal{I}_K)$ é fechado. Logo, pela Proposição 2.3, parte (i), tem-se que $\mathcal{I}_K$ é s.c.i.

Exemplo 2.2. Seja H um espaço de Hilbert. Então a funcional $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ definido como $f(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|_H^2$ é s.c.i.
Com efeito: Por definição

$$epi(f) = \{(u,\alpha) \in H \times \mathbb{R} : f(u) \leq \alpha\}.$$

Seja $(u,\alpha) \in \overline{epi(f)}$, então existe $(u_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset epi(f)$ tal que $(u_n,\alpha_n) \to (u,\alpha)$, quando $n \to \infty$. Assim, $u_n \to u$ e $\alpha_n \to \alpha$, quando $n \to \infty$.
Como $(u_n,\alpha_n) \in epi(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f(u_n) \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ e pela continuidade de f obtemos $f(u) \leq \alpha$.
Portanto $(u,\alpha) \in epi(f)$, e assim o epígrafo de f é fechado. Logo, pela Proposição 2.3, parte (i), f é s.c.i.
Além disso, f é uma função convexa.

No que segue, apresentamos a relação entre um problema de otimização e uma função convexa s.c.i.

Seja V um espaço de Banach reflexivo e $K \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e fechado de V. Tomamos uma função F de K em $\mathbb{R}$ e assumimos que F é convexa, s.c.i., e própria. Estamos interessados no seguinte problema de minimização.

Encontrar $u \in K$ tal que

$$F(u) = \inf_{v \in K} F(v). \tag{2.2}$$

Em certos casos, é preferível substituir o Problema 2.2 por um problema de minimização ao longo do espaço V, para isso utilizamos a função indicadora.
Seja $\widehat{F} : V \to \overline{\mathbb{R}}$, definido como $\widehat{F}(u) = F(u) + \mathcal{I}_K(u)$. Então

$$\widehat{F}(u)) = \begin{cases} F(u), & \text{se } u \in K, \\ +\infty, & \text{se } u \notin K. \end{cases}$$

Nota-se que $\widehat{F}$ é convexa e s.c.i., além disso, o problema

$$\widehat{F}(u) = \inf_{v \in V} \widehat{F}(v) \tag{2.3}$$

é idêntico com o Problema 2.2: o ínfimo é o mesmo assim como o conjunto de soluções.

Teorema 2.4. Seja F uma função convexa, s.c.i. e própria. Além disso, vamos supor que o conjunto K é limitado ou que a função F é coerciva sobre K, isto é, $F(u) \to +\infty$, quando $\|u\| \to +\infty$. Então o Problema 2.2 possui pelo menos uma solução. Além disso, se F é estritamente convexo sobre K então o Problema 2.2 possui solução única.

A demonstração pode ser encontrada em [9].

2.1 FUNÇÃO CONJUGADA

Antes de definir uma função conjugada precissamos da seguinte definição.

Definição 2.5. Um espaço vetorial topológico V é chamado um espaço localmente convexo se a origem possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas.

Como um caso particular temos os espaços normados: é suficiente tomar o conjunto de vizinhanças formado pelas bolas centradas na origem.
Seja V um espaço real localmente convexo. As funções contínuas afins são do tipo $u \mapsto l(u) + \alpha$, onde l é uma função linear contínua sobre V e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.6. O conjunto de funções $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ que são supremos pontuais de uma família de funções contínuas afins é denotado por $\Gamma(V)$.

Nota-se que se $F \in \Gamma(V)$ então F é convexa e s.c.i.
No que segue, V designará um espaço vetorial em dualidade com seu espaço dual topológico V^*. Lembrar que $\langle .,. \rangle_{V^* \times V}$ denota o produto de dualidade entre V^* e V; isto é, para um funcional $u^* \in V^*$ escrevemos $\langle u^*, v \rangle_{V^* \times V}$ em vez de $u^*(v)$.

Seja F uma função de V em $\overline{\mathbb{R}}$. Se $u^* \in V^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a função contínua afim $u \mapsto \langle u^*, u \rangle_{V^* \times V} - \alpha$ é menor que F em todas partes se, e somente se

$$\forall\, u \in V, \qquad \alpha \geq \langle u^*, u \rangle_{V^* \times V} - F(u),$$

ou tabém

$$\alpha \geq F^*(u^*),$$

se coincidir

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \left\{ \langle u^*, u \rangle_{V^* \times V} - F(u) \right\}, \tag{2.4}$$

A consideração dos minorantes contínuos afins de F leva-nos portanto, a definir de (2.4) a função $F^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.7. Seja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$, a função $F^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por (2.4) é chamado função conjugada (ou polar) de F.

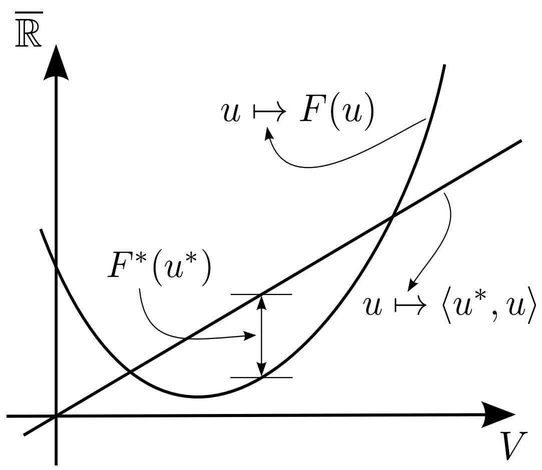

Figura 2.2: Interpretação geométrica da função conjugada

Podemos limitar em (2.4) para $u \in dom(F)$; isto é,

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in dom(F)} \left\{ \langle u^*, u \rangle_{V^* \times V} - F(u) \right\},$$

o que nos permite ver que F^* é o supremo pontual de uma família de funções contínuas afins $\langle \cdot, u \rangle_{V^* \times V} - F(u)$, para $u \in dom(F)$, de V^* em $\overline{\mathbb{R}}$. Portanto pode-se concluir que

$F^* \in \Gamma(V^*)$, em particular F^* é uma função convexa e s.c.i.

Propriedades da Função Conjugada

i. $F^*(0) = -\inf_{u\in V} F(u)$.

ii. Se $F \leq G$ então $F^* \geq G^*$.

iii. Para cada família $(F_i)_{i\in I}$ de funções sobre V tem-se

$$\big(\inf_{i\in I} F_i\big)^* = \sup_{i\in I} F_i^* \qquad \text{e} \qquad \big(\sup_{i\in I} F_i\big)^* \leq \inf_{i\in I} F_i^*.$$

iv. Para cada $\lambda > 0$;

$$(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*\left(u^*/\lambda\right).$$

v. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$(F+\alpha)^* = F^* - \alpha.$$

vi. Para cada $a \in V$, se denotamos por F_a a função traslação $F_a(v) = F(v-a)$. Então

$$(F_a^*)(u^*) = F^*(u^*) + \langle u^*, a\rangle_{V^*\times V}$$

2.2 A SUBDIFERENCIAL

Em áreas aplicadas, frequentemente surgem problemas de otimização cuja função objetivo não é diferenciável, mas tem a propriedade de ser convexa. Isto inviabiliza a aplicação de uma ampla classe de algorítmos. Contudo, para muitas funções, o subdiferencial está definido em pontos onde a derivada não existe. Esta característica e o fato de poder ser definido em espaços de dimensão infinita fazem do subdiferencial uma ferramenta fundamental em otimização convexa.

Sejam V um espaço localmente convexo, V^* seu dual topológico, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*\times V}$ o produto de dualidade sobre $V^*\times V$ e F uma aplicação de V em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que $u^* \in V^*$ é um subgradiente de F em u se

$$F(v) - F(u) \geq \langle u^*, v-u\rangle_{V^*\times V}, \quad \forall\, v \in V.$$

A interpretação geométrica é dada na figura (2.3): a função $v \mapsto F(u)+\langle u^*, v-u\rangle_{V^*\times V}$ determina um hiperplano não vertical que suporta o gráfico de F no ponto $\big(u, F(u)\big)$.

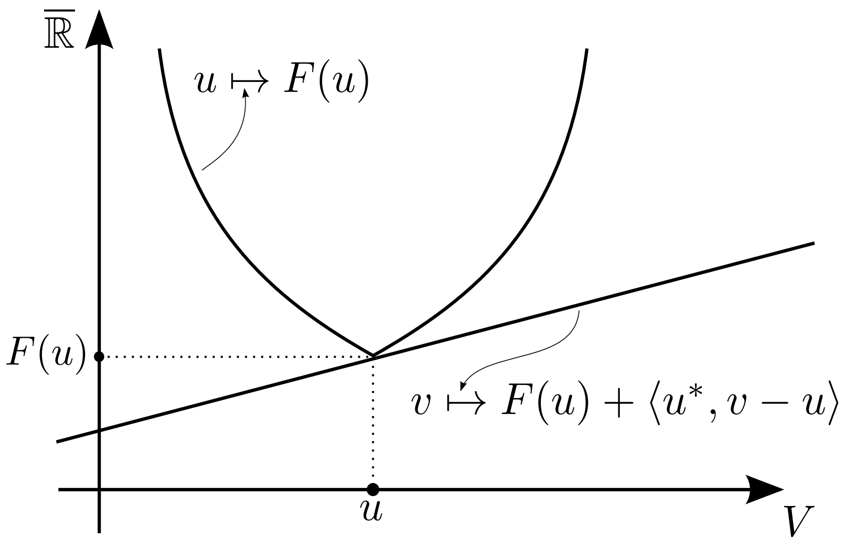

Figura 2.3: Interpretação geométrica do subgradiente

Definição 2.8. Se $u \in dom(F)$, definimos a subdiferencial de F em u como o subconjunto de V^*

$$\partial F(u) = \big\{w^* \in V^* : F(v) - F(u) \geq \langle w^*, v-u\rangle_{V^*\times V}, \quad \forall\, v \in V\big\}, \tag{2.5}$$

e dizemos que F é subdiferenciável em u se $\partial F(u) \neq \emptyset$.
Se $u \notin dom(F)$, então $\partial F(u) = \emptyset$. Neste caso dizemos que F é não subdiferenciável em u.

Nota-se que $\partial F(u)$ é o conjunto de todos os subgradientes de F em $u \in dom(F)$.

Exemplo 2.3. A subdiferencial da função indicadora $\mathcal{I}_K$, dada em (2.1), no ponto u é:

$$\partial \mathcal{I}_K(u) = \begin{cases} \big\{w^* \in V^* : \langle w^*, v-u\rangle_{V^*\times V} \leq 0,\ \forall\, v \in K\big\}, & \text{se } u \in K \\ \emptyset \hfill , & \text{se } u \notin K. \end{cases}$$

Com efeito:
Por definição da subdiferencial temos

$$\partial \mathcal{I}_K(u) = \begin{cases} \big\{w^* \in V^* : \mathcal{I}_K(v) - \mathcal{I}_K(u) \geq \langle w^*, v-u\rangle_{V^*\times V},\ \forall\, v \in K\big\}, & \text{se } u \in K. \\ \emptyset \hfill , & \text{se } u \notin K. \end{cases}$$

Agora, para $u \in K$ temos $\mathcal{I}_K(u) = 0$. Além disso,

- Se $v \notin K$, então $\mathcal{I}_K(v) = +\infty > \langle w^*, v-u\rangle_{V^*\times V}$, e esta desigualdade é sempre cumprida.

- Se $v \in K$, então $\mathcal{I}_K(v) = 0 \geq \langle w^*, v-u\rangle_{V^*\times V}$.

Observação 2.4. Se V é um espaço de Hilbert, então podemos identificar, pelo teorema de Riez-Fréchet, V com seu dual V^*, obtendo que a subdiferencial de F no ponto u é:

$$\partial F(u) = \big\{ w \in V : F(v) - F(u) \geq \big(w, v-u\big)_V,\ \forall\, v \in V \big\}$$

onde w é o representante de w^* em V.

No Exemplo 2.3, suponhamos agora que a função indicadora $\mathcal{I}_K$ está definida sobre $V = H$, onde H é um espaço de Hilbert. Então, da observação temos que

$$\partial \mathcal{I}_K(u) = \begin{cases} \big\{ w \in H : \big(w, v-u\big)_V \leq 0,\ \forall\, v \in K \big\}, & \text{se } \ u \in K \\ \emptyset \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & \text{se } \ u \notin K. \end{cases}$$

onde w é o representante de w^* em H.
A proposição a seguir mostra a relação entre a subdiferencial e um problema de otimização.

Proposição 2.9. Um elemento $\bar{u} \in V$ é um mínimo global de F (isto é, $F(\bar{u}) \leq F(u)$, $\forall\, u \in V$) se, e somente se, $0 \in \partial F(\bar{u})$

A proposição dada acima é uma consequência direta da definição da subdiferencial. Agora vamos introduzir a função conjugada para ter uma caracterização de um subgradiente da subdiferencial.

Proposição 2.10. Seja F uma função de V em $\overline{\mathbb{R}}$ e F^* seu conjugado. Então $u^* \in \partial F(u)$ se, e somente se,

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle_{V^* \times V}.$$

Corolário 2.11. O conjunto $\partial F(u)$, (possivelmente vazio) é convexo e fechado em V^*.

Corolário 2.12. Para cada função F de V em $\mathbb{R}$, temos

$$u^* \in \partial F(u) \Longrightarrow u \in \partial F^*(u^*).$$

Se além disso, $F \in \Gamma(V)$; isto é, F é convexa e s.c.i., então

$$u^* \in \partial F(u) \Longleftrightarrow u \in \partial F^*(u^*).$$

As demonstrações podem-se encontrar em [9].

Apresentemos agora algumas propriedades da subdiferencial.

i. Seja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda > 0$. Para cada $u \in V$, temos

$$\partial(\lambda F) = \lambda \partial F(u).$$

ii. Sejam $F_1, F_2 : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Para cada $u \in V$, temos

$$\partial F_1(u) + \partial F_2(u) \subset \partial(F_1 + F_2)(u). \tag{2.6}$$

A proposição a seguir, estabelece para quais condições (2.6) satisfaz a igualdade.

Proposição 2.13. Se $F_1, F_2 \in \Gamma(V)$, e além disso, existir um ponto $\bar{u} \in dom(F_1) \cap dom(F_2)$, onde F_1 é contínua, então

$$\partial(F_1 + F_2)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u), \quad \forall\, u \in V.$$

A demonstração pode ser encontrada em [9].
Para fechar esta seção apresentamos alguns resultados da diferencial de Gâteaux e Fréchet, e a relação com a subdiferencial.

2.3 DIFERENCIAL DE GÂTEAUX E FRÉCHET

A teoria da diferenciação em espaços de dimenção infinita tem seu início em 1887 com V. Volterra quando considerou as derivadas variacionais de funções de $C\big([a,b]\big)$ em $\mathbb{R}$.

Uma das motivações mais importantes para o desevolvimento do cálculo diferencial em espaços de dimensão infinita vem da teoria classica do cálculo das variações. Hadamard J. foi um dos primeiros a ver a necessidade de desenvolver uma teoria da diferenciação em espaços de dimensão infinita e esta tarefa foi iniciada por seus discípulos M. Fréchet e M.R. Gâteaux.

A finalidade deste seção é apresentar alguns resultados da diferencial de Gâteaux e Fréchet, e conhecer a relação con a subdiferencial.

DIFERENCIAL DE GÂTEAUX

Definição 2.14. Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função, onde U é um aberto em V. O limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

se existir, será chamado derivada de Gâteaux de F em u_0 na direção $h \in V$ e será denotada por $F'(u_0, h)$.

Como o limite de uma função, se existir, é unico, então uma função pode ter só uma derivada de Gâteaux em u_0 na direção h.

Observação 2.5. O valor de $F'(u_0, h)$ é a derivada direcional de F em u_0 na direção $h \in V$ e portanto, a derivada de Gâteaux pode ser considerada uma generalização das derivadas direcionais do cálculo diferencial em varias variáveis.

Pode acontecer que exista $F'(u_0, h)$ para todo $h \in V$, ou em outras palavras que a aplicação $h \mapsto F'(u_0, h)$ tenha por domínio todo V. Em este caso, se a aplicação

$$h \mapsto F'(u_0, h)$$

é linear e contínua (isto é, se pertence ao dual topológico V^*) dizemos que F é diferenciável no sentido de Gâteaux, ou Gâteaux diferenciável, em u_0. Para se referir esta aplicação utilizaremos a notação

$$\begin{array}{rcl} F'(u_0) : V & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & F'(u_0)(h) = F'(u_0, h) \end{array}$$

e será chamado a diferencial de Gâteaux.

Exemplo 2.4. Sejam V um espaço normado e $F : V \to \mathbb{R}$ definida por $F(u) = \|u\|_V^2$. Para $u_0 = 0$, e para qualquer $h \in V$ temos

$$F'(0, h) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \|h\|_V^2}{t} = 0.$$

Portanto F é diferenciável no sentido de Gâteaux em $u_0 = 0$ e além disso, sua diferencial de Gâteaux é a aplicação nula.

Exemplo 2.5. Sejam V um espaço normado e $F : V \to \mathbb{R}$ definida por $F(u) = \|u\|_V$. Para $u_0 = 0$, e para qualquer $h \in V$ temos

$$F'(0, h) = \lim_{t \to 0} \frac{|t| \|h\|_V}{t} = 0.$$

Como o limite não existe, por tanto o funcional não tem derivada de Gâteaux em $u_0 = 0$ para nenhuma direção.

A proposição a seguir mostra o caso da diferencial de Gâteaux é o mesmo que a unicidade do subgradiente.

Proposição 2.15. Seja F una função convexa de V em $\overline{\mathbb{R}}$. Se F é Gâteaux diferenciável em $u \in V$, então F é subdiferenciável em $u \in V$ e além disso, vale $\partial F(u) = \{F'(u)\}$. Reciprocamente, se F é contínua e finita em $u \in V$ e tem só um subgradiente, então F é Gâteaux diferenciável em u e $\partial F(u) = \{F'(u)\}$.

A demonstração pode ser encontrada em [9].

Exemplo 2.6. Sejam H um espaço de Hilbert real e $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função definida como $f(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|_H^2$. Então f é diferenciável no sentido de Gâteaux para qualquer $u \in H$.
Com efeito: Seja $h \in H$ qualquer, então

$$\begin{aligned} F'(u,h) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(t\|h\|_H^2 + 2(u,h)_H\right) = (u,h)_H. \end{aligned}$$

Por ser H um espaço de Hilbert, pelo teorema de Riesz-Fréchet, existe um unico $u^* \in H^*$ tal que

$$F'(u,h) = (u,h)_H = \langle u^*, h\rangle_{H^*\times H}, \quad \forall\, h \in H,$$

o que implica que f é diferenciável no sentido de Gâteaux em $u \in H$ e portanto f é subdiferenciável en $u \in H$ e além disso vale

$$\partial f(u) = \{u^*\} = \{f'(u)\}.$$

Agora, pela Observação 2.4 temos que

$$\partial f(u) = \{u\},$$

onde u é o representante de u^* em H.

A convexidade de uma função Gâteaux diferenciável pode ser caracterizada na seguinte proposição.

Proposição 2.16. Sejam $K \subset V$ um conjunto convexo e $F : K \to \mathbb{R}$ uma função Gâteaux diferenciável. Então:

i. F é convexo sobre K se, e somente se,

$$F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u\rangle_{V^*\times V}, \quad \forall\, v, u \in K.$$

ii. F é estritamente convexo sobre K se, e somente se,

$$F(v) > F(u) + \langle F'(u), v - u\rangle_{V^*\times V}, \quad \forall\, v, u \in K, v \neq u.$$

A demonstração pode ser encontrada em [9].

DIFERENCIAL DE FRÉCHET

Definição 2.17. Diz-se que F é diferenciável em u_0 no sentido de Fréchet ou Fréchet diferenciável em u_0 se existir uma aplicação linear contínua $L : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(u_0+h)-F(u_0)-L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Proposição 2.18. A aplicação linear e contínua L que satisfaz a definição acima, se existir, então é única.

Chamamos diferencial de Fréchet da função F no ponto u_0 à única aplicação linear contínua L que satisfaz a definição (2.17) e será denotado por $DF(u_0)$.

Exemplo 2.7. Sejam V um espaço normado e $F : V \to \mathbb{R}$ definida por $F(u) = \|u\|_V^2$. Temos que F é Fréchet diferenciável na origen, com diferencial $DF(0) = \circleddash$ (onde $\circleddash$ denota a aplicação linear nula sobre V).
De fato:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(0+h)-F(0)-\circleddash(0)}{\|h\|_V} = \lim_{h\to 0} \frac{\|h\|_V^2}{\|h\|} = 0$$

Observação 2.6. Se V tem dimensão finita, a diferencial de Fréchet de uma função é a diferencial ordinaria e reciprocamente já que, toda aplicação linear em espaços de dimensão finita é contínua.

Teorema 2.19. Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto. Se a função F é Fréchet diferenciável em $u_0 \in U$, então F é contínua nesse ponto.

Se $F_1, F_2 : U \to \mathbb{R}$ são Fréchet diferenciáveis em u_0 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha F_1 + \beta F_2$ é Fréchet diferenciável em u_0 e além disso,

$$D(\alpha F_1 + \beta F_2)(u_0) = \alpha DF_1(u_0) + \beta DF_2(u_0).$$

RELAÇÃO ENTRE AS DUAS DIFERENCIAIS

Proposição 2.20. Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no sentido de Fréchet em u_0, então F é diferenciável no sentido de Gâteaux nesse ponto e além disso, $DF(u_0) = F'(u_0)$.

Proposição 2.21. Seja $F : U \to \mathbb{R}$. Se a diferencial de Gâteaux $F'(u_0)$ existir em algum entorno de $u_0 \in U$ e é contínua em u_0, então F é Fréchet diferenciável em u_0 e além disso, $DF(u_0) = F'(u_0)$.

As demonstrações poden ser encontradas em [17].

3 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

O estudo das inequações variacionais, ou também chamadas desigualdades variacionais, é uma teoría que foi desemvolvida no inicio dos anos sessenta na Italia pelos professores Guido Stampacchia e Fichera. Stampacchia, motivado pela teoría do potencial, enquanto Fichera motivado pelos problemas da mecânica (elasticidades com restrições unilaterais). Na atualidade, a teoría das desigualdades variacionais estimulou na matemática novos resultados das equações diferenciais parciais não lineares. Além disso, as desigualdades variacionais têm respondido a muitas questões de macânica, física, otimização e controle ótimo, programação matemática, etc, sendo agora considerada como uma ferramenta em várias áreas da matemática aplicada.

Nesta seção abordaremos alguns espectos das inequações variacionais. Mas, para saber o que é uma inequação variacional, apresentaremos alguns exemplos que dão origem a estas inequações.

Exemplo 3.1. Seja $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciavel e seja $x_0 \in I$ o ponto onde f atinge seu mínimo, isto é,

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Então, podem acontecer 3 casos:

- Caso 1. Se $x_0 = a$, então $f'(x_0) \geq 0$.
- Caso 2. Se $a < x_0 < b$, então $f'(x_0) = 0$.
- Caso 3. Se $x_0 = b$, então $f'(x_0) \leq 0$.

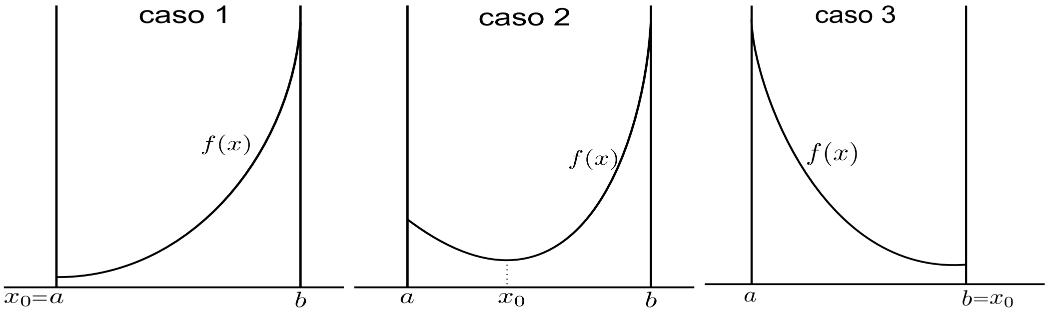

Figura 3.1: Representação dos mínimos de f nos casos do Exemplo 3.1

Estas condições podem ser resumidas com o problema de encontrar $x_0 \in I$ tal que:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0\,, \quad \forall\, x \in I. \tag{3.1}$$

Esta desigualdade é chamada inequação variacional.

Exemplo 3.2. Seja agora uma função real de classe C^1 definida num conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ fechado e convexo. Se existe algum $x_0 \in K$ tal que

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x), \tag{3.2}$$

então x_0 satisfaz

$$x_0 \in K\,, \qquad \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0\,, \quad \forall\, x \in K. \tag{3.3}$$

Com efeito:
Como K é convexo, então para todo $x \in K$ o segmento de reta $(1-t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0)\,,\ 0 \leq t \leq 1$ pertence a K. Observe que a função

$$\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

atinge seu mínimo em $t = 0$; assim, do Exemplo 3.1 temos

$$\phi'(0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0\,, \quad \forall\, x \in K.$$

Consequentemente, o ponto x_0 satisfaz a equação variacional (3.3).

Sendo K fechado e convexo, quando ele for limitado, então a existência de pelo menos um x_0 é imediata, pois uma função contínua num compacto atinge seu mínimo y seu máximo.

Observação 3.1. Em geral, uma solução de (3.3) não é solução de (3.2) a menos que f seja convexo.

De fato: sendo f convexo temos que $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)\,, \forall\, x \in K$, e como $\nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0$, temos que $f(x_0) \leq f(x)\;, \forall\, x \in K$.

Os dois exemplos considerados podem ser resolvidos por meio do cálculo. O seguinte exemplo é similar aos problemas do cálculo de variações, já que estas funções se encontram em espaços de dimensão infinita.

Exemplo 3.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um dominio limitado com fronteira $\partial\Omega$ e seja ψ uma função dada sobre $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ satisfazendo

$$\max_{\Omega} \psi \geq 0 \quad \text{e} \quad \psi \leq 0\,, \text{sobre }\; \partial\Omega.$$

Defina

$$K = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v \geq \psi \text{ em } \Omega \text{ e } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

um conjunto de funções convexas, que assumimos não vazio. Se existe $u \in K$ tal que,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,,$$

então u satisfaz,

$$u \in K \;\; : \;\; \int_{\Omega} \nabla u . \nabla (v - u) \geq 0\,, \quad \forall\, v \in K.$$

Com efeito: Analogamente ao Exemplo 3.2, como K é convexo então $\forall\, v \in K$, $u + t(v - u) \in K\;, \;\forall\, t \in [0, 1]$, Observe que a função real

$$\phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla u + t(v - u)|^2\,, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

atinge seu mínimo em $t = 0$. Assím, pelo Exemplo 3.1 temos $\phi'(0) \geq 0$. Como

$$\begin{aligned} |\nabla u + t(v - u)|^2 &= |\nabla u + t\nabla(v - u)|^2 \\ &= |\nabla u|^2 + 2t\nabla u.\nabla(v - u) + t^2|\nabla(v - u)|^2 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} &= \lim_{t \to 0}(2 \int_{\Omega} \nabla u.\nabla(v - u) + t \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2) \\ &= 2 \int_{\Omega} \nabla u.\nabla(v - u). \end{aligned}$$

Assím;

$$u \in K \;\; : \;\; \int_{\Omega} \nabla u . \nabla (v - u) \geq 0\,, \quad \forall\, v \in K.$$

Depois dos exemplos apresentados acima, vejamos agora alguns resultados da teoria das inequações variacionais.

3.1 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, estudaremos as inequações variacionais num espaço de dimenssão finita, mas precisamos de alguns outros resultados.

3.1.1 Ponto fixo

Muitos problemas da análise não linear podem ser resolvidos por meio dos teoremas de ponto fixo.
Seja uma aplicação $F : A \to A$. Un ponto $x \in A$ é chamado ponto fixo de F se $F(x) = x$. Em outras palavras, os pontos fixos de F são soluções da equação $F(x) = x$.

No que segue, enunciamos o teorema de ponto fixo de Banach (chamado também teorema da contração), mas precissamos da seguinte definição.

Definição 3.1. Seja S um espaço métrico com a métrica d. Uma aplicação $F : S \to S$ é chamada uma contração, se existe $\alpha \in [0, 1)$, tal que,

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)\,, \quad \forall\, x, y \in S.$$

Observação 3.2. Observe que, se F é uma contração, então é uniformemente continua, como uma aplicação de S em S.

Observe também que o escalar α é estritamente menor que 1. No caso em que a aplicação F não é uma contração, mas satisfaz a desigualdade

$$d(F(x), F(y)) \leq d(x, y)\,, \quad \forall\, x, y \in S,$$

então F é chamado não expansiva.

Teorema 3.2. (Ponto fixo de Banach) Seja S um espaço métrico completo e seja $F : S \to S$ uma aplicação contração. Então existe um único ponto fixo de F.

A demostração do teorema pode ser encontrada em [12].
Outro teorema fundamental é o teorema de ponto fixo de Brouwer.

Teorema 3.3. (Ponto fixo de Brouwer) Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada e $F : B \to B$ uma aplicação contínua, então existe $x \in B$ tal que $F(x) = x$; isto é, F admite pelo menos um ponto fixo.

A demostração do teorema pode ser encontrada em [12].

Observação 3.3. Como um homomorfismo preserva as propriedades topológicas, então o teorema de ponto fixo de Brouwer se cumpre para qualquer conjunto K homeomorfo à bola fechada $B \subset \mathbb{R}^n$.
Com efeito:
Seja $F : K \to K$ uma função contínua e $g : K \to B$ um homeomorfismo, então a aplicação $h := g \circ F \circ g^{-1} : B \to B$ é contínua. Pelo teorema de ponto fixo de Brouwer existe $x \in B$ tal que $h(x) = x$. Logo $y = g^{-1}(x)$ é ponto fixo de F.

Da obsevação, temos que o teorema de ponto fixo de Brouwer também é verdadeiro para qualquer conjunto compacto e convexo de um espaço normado de dimensão finita. O objetivo da seção seguinte é apresentar essa extensão.

3.1.2 Caracterização da projeção sobre um conjunto convexo

Nesta seção consideramos a projeção sobre um conjunto convexo em um espaço de Hilbert H, já que neste contexto será útil no que segue.

Lema 3.4. Seja $K \neq \emptyset$ um conjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Então, para cada $x \in H$, existe um único $y \in K$ tal que,

$$\|x - y\| = dist(x, K) = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|. \tag{3.4}$$

O ponto $y \in K$ que satisfaz (3.4) é chamado projeção de x sobre K e escrevemos $y = P_K x$.
Note que

$$P_K x = x, \quad \text{para todo} \quad x \in K.$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [12].

O teorema seguinte nos fornece uma caracterização para o operador projeção.

Teorema 3.5. (Caracterização da Projeção) Seja K um conjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Então $y = P_K x$ é a projeção de x sobre K, se e somente se,

$$y \in K \ : \quad \big(x - y, \eta - y\big)_H \leq 0\,, \quad \forall\, \eta \in K. \tag{3.5}$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [12].

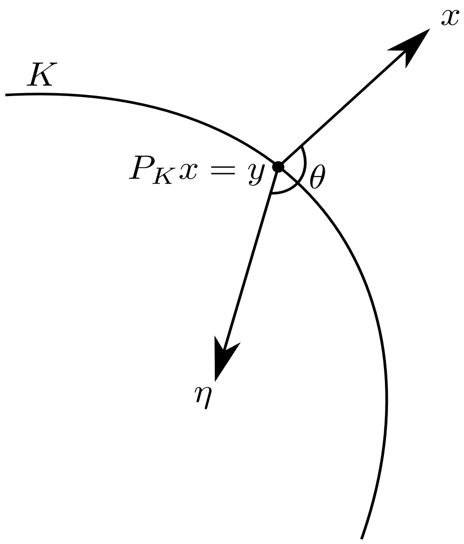

Figura 3.2: Interpretação geométrica da projeção.

Como pode-se observar na figura, a razão da desigualdade no teorema dado acima, é que o ângulo θ que formam os vetores é obtuso.

Corolário 3.6. Seja K um conjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Então o operador $P_K : H \to K$ é não expansivo; isto é,

$$\|P_K x - P_K x'\|_H \leq \|x - x'\|_H\,, \quad \forall\, x, x' \in H. \tag{3.6}$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [12].

Observação 3.4. Do Corolário 3.6 tem-se que o operador P_K é contínuo.

Um teorema muito importante que temos que lembrar é o teorema de **Moreau**, já que este caracteriza as projeções para cones convexos fechados em espaços de Hilbert. Um subconjunto $K \neq \emptyset$ de um espaço de Hilbert H é um cone convexo se K é fechado sob adição e fechado sob multiplicação por escalares positivos. Consideremos que K é um cone centrado na origem; iste é, o elemento $0 \in K$.

Definição 3.7. Seja $K \subset H$ um cone covexo fechado centrado na origem. O subconjunto do espaço de Hilbert H

$$K^{\perp} = \{y \in H : \big(x, y\big)_H \leq 0, \quad \forall\, x \in K\},$$

é chamado **cone polar** de K.

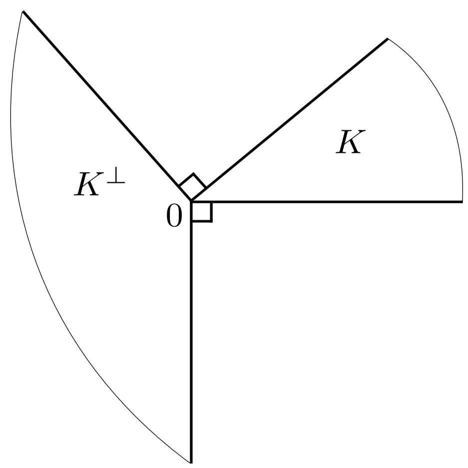

Figura 3.3: Interpretação geométrica do cone polar.

Teorema 3.8. (Teorema de Moreau) Se $K \subset H$ é um cone fechado convexo, H um espaço de Hilbert e $K^{\perp}$ seu cone polar. Então para $x, y, z \in H$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i). $z = x + y, \quad x \in K, \quad y \in K^{\perp} \quad$ e $\quad \big(x, y\big)_H = 0.$

(ii). $x = P_K z \quad$ e $\quad y = P_{K^{\perp}} z$

Demonstração:
Suponha que acontece (i), então para todo $p \in K$ temos

$$\big(z - x, p - x\big)_H = \big(y, p - x\big)_H = \big(y, p\big)_H - \big(y, x\big)_H = \big(y, p\big)_H \leq 0.$$

Pelo Teorema 3.5 temos $x = P_K z$. Analogamente, $\forall\, q \in K^{\perp}$

$$\big(z - y, q - y\big)_H = \big(x, q - y\big)_H = \big(x, q\big)_H - \big(x, y\big)_H = \big(x, q\big)_H \leq 0.$$

Pelo Teorema 3.5 temos $y = P_{K^{\perp}} z$.
Reciprocamente, suponha que (ii) é válido; isto é, $x = P_K z \quad$ e $\quad y = P_{K^{\perp}} z$. Pelo Teorema 3.5 temos

$$\big(z - x, p - x\big)_H \leq 0, \quad \forall\, p \in K,$$

em particular:

$$\text{se,} \quad p = 0 \quad \text{temos} \quad \big(z - x, x\big)_H \geq 0,$$

$$\text{se,} \quad p = 2x \quad \text{temos} \quad \big(z - x, x\big)_H \leq 0,$$

e assim $\big(z - x, x\big)_H = 0$.
Denotar $u = z - x$; então $\big(x, u\big)_H = \big(u, x\big)_H = 0$.
Só resta mostrar que $u = y$.
Primeiro vamos mostrar que $u \in K^\perp \iff \big(u, p\big)_H \leq 0, \quad \forall p \in K$.

$$\begin{aligned} \big(u, p\big)_H = \big(u, p\big)_H - 0 &= \big(u, p\big)_H - \big(u, x\big)_H, \\ &= \big(u, p - x\big)_H, \\ &= \big(z - x, p - x\big)_H. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.5 temos que $\big(u, p\big)_H = \big(z - x, p - x\big)_H \leq 0, \ \forall p \in K$. Logo $u \in K^\perp$ e assim para todo $q \in K^\perp$, obtemos

$$\big(z - u, q - u\big)_H = \big(x, q - u\big)_H = \big(x, q\big)_H - \big(x, u\big)_H = \big(x, q\big)_H \leq 0.$$

Então pelo Teorema 3.5 temos $u = P_{K^\perp} z$ e pela unicidade da projeção temos $u = y$. ■

Outro resultado da projeção sobre um cone convexo num espaço de Hilbert é o seguinte:

Teorema 3.9. Sejam K um cone fechado convexo num espaço de Hilbert H, P_K a projeção de H sobre K e $x, y \in H$. Então:

i. $P_K^2 = P_K$.

ii. $P_K(\alpha x) = \alpha P_K(x)$, para $\alpha \geq 0$.

iii. $P_K(x + y) = P_K(x) + P_K(y)$ se, e somente se

$$\big(P_K(x), y\big)_H = \big(P_K(x), P_K(y)\big)_H = \big(x, P_K(y)\big)_H.$$

iv. $\big(x - P_K(x), P_K(y)\big)_H \leq 0$.

v. $\big(x - P_K(x), P_K(x)\big)_H = 0$.

Teorema 3.10. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e convexo e seja $F : K \to K$ uma aplicação contínua. Então F admite pelo menos um ponto fixo.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [12].

3.1.3 Um primeiro teorema sobre inequações variacionais

No estudo das inequações variacionais, estamos interesados frequentemente com uma aplicação F de um espaço linear X ou um subconjunto convexo $K \subset X$, em seu dual X^*. Lembrar que o espaço dual topológico $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$ é o espaço de todas as formas lineares contínuas

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle a, x\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{3.7}$$

definidas sobre $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, pelo teorema de Riesz, podemos sempre identificar $(\mathbb{R}^n)^*$ com $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, podemos identificar $a \in (\mathbb{R}^n)^*$ com o elemento $\pi a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle a, x\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} = (\pi a, x)_{\mathbb{R}^n},$$

onde $\pi : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ é a identificação e $(.,.)$ é o produto escalar sobre $\mathbb{R}^n$.
Finalmente, a função

$$F : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*,$$

é contínua se cada uma das funções $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ determinada pela relação

$$\langle F(x), y\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} = (\pi F(x), y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_j F_j(x)y_j\,,$$

é contínua.

Teorema 3.11. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e convexo e $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ uma aplicação contínua. Então existe um $x \in K$ tal que

$$\langle F(x), y - x\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K. \tag{3.8}$$

Demonstração: Como a aplicação π é contínua, pois é um isomorfismo isométrico que identifica $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$, então a aplicação

$$P_K(I - \pi F) : K \to K, \tag{3.9}$$

é contínua, já que $Ix = x$ é também contínua.
Portanto, pelo Teorema 3.10 $P_K(I-\pi F)$ admite um ponto $x \in K$ tal que $P_K(I-\pi F)x = x$, assim $x = P_K(x-\pi F(x))$. Por conseguinte, pelo Teorema 3.5, $\big((x-\pi F(x))-x, y-x\big)_{\mathbb{R}^n} \leq 0\,,\ \forall\, y \in K$, e assim $\big(\pi F(x), y - x\big)_{\mathbb{R}^n} \geq 0\,,\ \forall\, y \in K$.
Logo

$$\langle F(x), y - x\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K.$$

■

A seguinte figura mostra a interpretação geométrica do teorema.

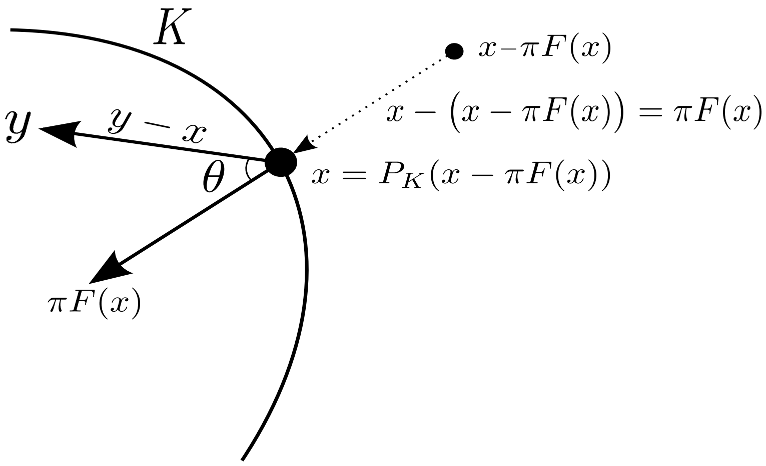

Figura 3.4: Interpretação geométrica do Teorema 3.11

No Teorema 3.11 temos que, por ser K fechado, $x \in \overset{\circ}{K}$ ou $x \in \partial K$. O seguinte Corolário mostra o caso quando x pertence ao interior de K no Teorema 3.11.

Corolário 3.12. Seja x uma solução de (3.8) e suponha que $x \in \overset{\circ}{K}$. Então $F(x) = 0$

Demonstração: Se $x \in \overset{\circ}{K}$, então os pontos $y - x$ descrevem uma vizinhança do origem; isto é, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, existe um $\epsilon \geq 0$ e $y \in K$ tal que $\xi = \epsilon(y - x)$. Assím, de (3.8) temos,

$$\langle F(x), \xi \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = \epsilon \langle F(x), y - x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Por outro lado, para $-\xi \in \mathbb{R}^n$, existe $\overline{\epsilon} \geq 0$ e $\overline{y} \in K$ tal que $-\xi = \overline{\epsilon}(\overline{y} - x)$. Logo, de (3.8) temos,

$$\langle F(x), -\xi \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = \overline{\epsilon} \langle F(x), \overline{y} - x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \tag{3.11}$$

então de (3.10) e (3.11) segue,

$$\big(\pi F(x), \xi\big)_{\mathbb{R}^n} = \langle F(x), \xi \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = 0\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular para $\xi = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ tem-se $\big(\pi F(x), \beta_i\big)_{\mathbb{R}^n} = 0$, onde $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Como $\pi F(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$ então,

$$0 = \big(\pi F(x), \beta_i\big)_{\mathbb{R}^n} = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j, \beta_i) = \beta_i\,, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Logo, $\pi F(x) = 0$ e por tanto $F(x) = 0$. ■

No que segue, enunciamos o caso quando x pertence à fronteira de K, mas precissamos da seguinte definição.

Definição 3.13. Seja K um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \partial K$. Um hiperplano

$$\langle a, y - x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = 0\,, \quad a \in (\mathbb{R}^n)^* \diagdown \{0\},$$

é chamado um hiperplano suporte de K se,

$$\langle a, y - x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = 0\,, \quad \forall\, y \in K$$

A seguinte figura mostra a interpretação geométrica da definição acima.

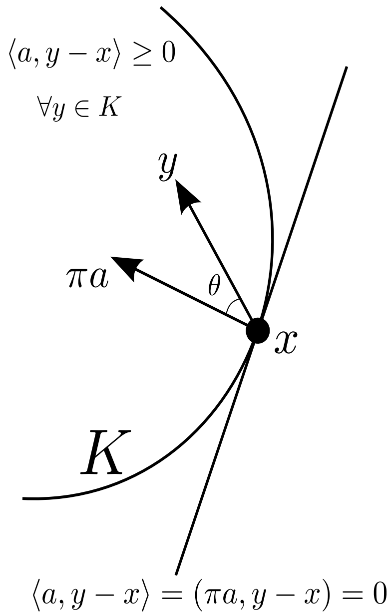

Figura 3.5: Interpretação geométrica do hiperplano

Corolário 3.14. Seja x uma solução de (3.8) e suponha que $x \in \partial K$. Então $F(x)$ determina um hiperplano suporte para K, sempre que $F(x) \neq 0$.

Dadas as ferramentas, agora estudemos o problema de inequação variacional em $\mathbb{R}^n$.

3.1.4 Inequações variacionais

Considere o seguinte problema:

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e convexo, e $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ uma aplicação contínua, encontrar

$$x \in K \ : \quad \langle F(x), y - x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K. \tag{3.12}$$

Note que, se K é limitado, então pelo Teorema 3.11 o Problema (3.12) tem solução. Mas até agora não temos resultado algum quando o conjunto K é só fechado e convexo. Para garantir a solução do problema dado precisamos definir um novo conjunto, para depois enunciar o teorema que estabelece uma condição necessaria e suficiente para a existência de soluções do Problema (3.12).

Dado um conjunto convexo K, definamos o conjunto $K_R = K \cap B_R$, onde $B_R \subset \mathbb{R}^n$ é a bola fechada de raio R e centro no origem. Note que K_R é limitado, pois $K_R \subset B_R$, e já que a interseção de uma família qualquer de fechados é fechado. Então retornando a nosso $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$, notamos que o Teorema 3.11 garante pelo menos uma solução para o Problema (3.12) em K_R; isto é, existe

$$x_R \in K_R : \quad \langle F(x_R), y - x_R \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K_R. \tag{3.13}$$

sempre que $K_R \neq \emptyset$.

Teorema 3.15. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto fechado e convexo, e seja $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ uma aplicação contínua. O Problema (3.12) tem solução se, e somente se, existe um $R > 0$ tal que a solução $x_R \in K_R$ de (3.13) satisfaz

$$\|x_R\|_{\mathbb{R}^n} < R. \tag{3.14}$$

Demonstração: Primeiro mostraremos que se o Problema (3.12) tem solução, então existe $R > 0$ tal que a solução $x_R \in K_R$ de (3.13) satisfaz $\|x_R\| < R$.
Com efeito: Seja $\widetilde{x}$ solução do Problema (3.12), então

$$\widetilde{x} \in K : \quad \langle F(\widetilde{x}), y - \widetilde{x} \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tomar $R = \|\widetilde{x}\| + \epsilon$, então $\|\widetilde{x}\| < R$. Por tanto $\widetilde{x} \in K_R = K \cap B_R$, obtendo assim que $\widetilde{x}$ é solução de (3.13).
Reciprocamente, suponha que existe $R > 0$ tal que a solução $x_R \in K_R$ de (3.13) satisfaz (3.14). Já que $\|x_R\| < R$, então para $\epsilon \geq 0$ suficientemente pequeno $w = x_R + \epsilon(y - x_R) \in K_R$, $\forall\, y \in K$. Por conseguinte,

$$x_R \in K_R \subset K : \quad 0 \leq \langle F(x_R), w - x_R \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} = \epsilon \langle F(x_R), y - x_R \rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n}\,, \quad \forall\, y \in K,$$

o que significa que x_R é uma solução do Problema (3.12). ■

Deste teorema apresentamos, no seguinte Corolário, uma condição suficiente para a existência de solução do Problema (3.12) na qual é útil e apresenta a noção de coercividade.

Corolário 3.16. Seja $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ que satisfaz

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} \to +\infty\,, \text{ quando } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty\,,\ \forall\, x \in K \tag{3.15}$$

para algum $x_0 \in K$. Então existe uma solução do Problema (3.12).

Demonstração: Por definição de limite temos que $\forall\, M$, $\exists R > 0$ tal que

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} > M\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}\,, \quad \forall\, x \in K\,,\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} > R. \tag{3.16}$$

Como $x_0 \in K$ é fixo. Escolher $M > \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}$, então existe $R > 0$ que satisfaz (3.16). Pela lei da tricotomia temos

$$\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} > R \qquad \text{ou} \qquad \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} = R \qquad \text{ou} \qquad \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} < R\,,$$

mas $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \not> R$, pois se $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} > R$ então de (3.16) teríamos $0 > 0$ o que é absurdo. De (3.16) temos

$$\begin{aligned}
\langle F(x), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} &> M\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \langle F(x_0), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n}\\
&\geq M\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} - \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}\\
&= \big(M - \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\big)\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}\\
&\geq \big(M - \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\big)\big(\|x\|_{\mathbb{R}^n} - \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}\big),\ \forall\, x \in K\,,\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} > R. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Se $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} = R$, então de (3.17)

$$\langle F(x), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} > \big(M - \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\big)\big(\|x\|_{\mathbb{R}^n} - R\big) > 0. \tag{3.18}$$

Note também que (3.18) satisfaz para $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = R$.
Seja $x_R \in K_R = K \cap B_R \subset K$ solução de (3.13). Se $\|x_R\|_{\mathbb{R}^n} = R$, então de (3.18)

$$\langle F(x_R), x_R - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} > 0 \tag{3.19}$$

mas, como $x_R \in K_R$ é solução de (3.13), então

$$\langle F(x_R), y - x_R\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K_R,$$

em particular para $y = x_0$, pois $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} = R$, temos

$$\langle F(x_R), x_0 - x_R\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \geq 0.$$

Logo,

$$\langle F(x_R), x_R - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} = -\langle F(x_R), x_0 - x_R\rangle_{(\mathbb{R}^n)^*\times\mathbb{R}^n} \leq 0,$$

o que contradiz (3.19). Por tanto $\|x_R\|_{\mathbb{R}^n} < R$. Agora, pelo Teorema 3.15, o Problema (3.12) tem solução.
Se $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} < R$, então de (3.17)

$$\langle F(x), x - x_0\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} > \big(M - \|F(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\big)\big(\|x\|_{\mathbb{R}^n} - \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}\big) > 0\,, \text{ para } \|x\| = R$$

Seguindo um procedimento análogo desde (3.18) em diante temos que o Problema (3.12) tem solução. ■

As condições do Corolário 3.16 e as que implican unicidade são úteis no estudo de um problema de inequação variacional. Geralmente, a solução para um problema de inequação variacional não é única. Porém, existe uma condição de monoticidade a qual garante a unicidade da solução. No que segue, apresentamos definições (de coercividade e monoticidade) e logo o teorema que garante a unicidade para um problema de inequação variacional.

Definição 3.17. A condição (3.15) do Corolário 3.16 é uma condição de coercividade.

Definição 3.18. Seja uma aplicação $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$. Chamamos F uma aplicação monótona se

$$\langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, x, x' \in K. \tag{3.20}$$

F é chamada estritamente monótona se satisfaz a igualdade só quando $x = x'$; isto é,

$$\langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} > 0\,, \quad \forall\, x, x' \in K\,,\ x \neq x'. \tag{3.21}$$

Teorema 3.19. (Unicidade) Seja $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ uma aplicação estritamente monótona sobre K. Se existe solução para o Problema (3.12), então a solução é única.

Demonstração: Suponha que x e x' são soluções distintas para o Problema (3.12). Então

$$x \in K \ : \qquad \langle F(x), y - x\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K, \tag{3.22}$$

$$x' \in K \ : \qquad \langle F(x'), y - x'\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \geq 0\,, \quad \forall\, y \in K. \tag{3.23}$$

Substituindo $y = x'$ em (3.22), $y = x$ em (3.23) e somando as duas desigualdades obtemos

$$\langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle_{(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n} \leq 0,$$

contradizendo a definição de uma aplicação estritamente monotona. Por tanto, $x = x'$. ■

3.1.5 Alguns problemas que levam às inequações variacionais

Nesta seção, vamos tocar levemente em alguns problemas associados às inequações variacionais. Além disso, discutirenos a conexão entre as funções convexas e operadores monótonos.

Sejam $f \in C^1(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado convexo e $f(x) = grad\, f(x) = \nabla f(x)$.
Neste momento não fazemos a distinção entre $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$.
Um problema de otimização é caraterizado pela sua função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada, dependendo do problema. A função objetivo inclue expressões que representam custos, participação do mercado, etc. Problemas de otimização irrestrita e restrita podem ser formulados como problemas de inequação variacional.
As seguintes duas proposições identificam a relação entre um problema de otimização e um problema de inequação variacional.

Teorema 3.20. Suponha que existe um $x \in K$ tal que

$$f(x) = \min_{y \in K} f(y).$$

Então x é a solução do problema de inequação varicional

$$x \in K \;:\quad \big(F(x), y - x\big) \geq 0, \quad \forall\, y \in K.$$

A demonstração foi feita no Exemplo 3.2.
A recíproca é verdadeira desde que f é convexa.

Teorema 3.21. Suponha que f é convexo e x satisfaz

$$x \in K \;:\quad \big(F(x), y - x\big) \geq 0, \quad \forall\, y \in K.$$

Então

$$f(x) = \min_{y \in K} f(y).$$

Demonstração: Ver Observação 3. ■

Proposição 3.22. Seja $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, uma função convexa (estritamente convexa) continuamente diferenciável. Então $F(x) = \nabla f(x)$ é monótona (estritamente monótona).

Demonstração: Dado $x, x' \in E$, então

$$f(x) = f(x') + \big(F(x'), x - x'\big) \tag{3.24}$$

e

$$f(x') = f(x) + \big(F(x), x' - x)\big) \tag{3.25}$$

Somando (3.24) e (3.25) obtemos

$$\big(F(x') - F(x), x' - x)\big) \geq 0, \quad \forall\, x, x' \in E.$$

Portanto F é monótona. ∎

Para concluir este capítulo mencionamos um problema de programação matemática que pode ser levado a um problema de inequação variacional.

Seja

$$\mathbb{R}^n_+ = \big\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\big\}$$

o cone fechado convexo de $\mathbb{R}^n$ e seja $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$.

Encontrar $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$F(x_0) \in \mathbb{R}^n_+ \qquad \text{e} \qquad \big(F(x_0), x_0)\big) = 0$$

O problema dado acima é chamado **Problema de Complementariedade**.

Para dar solução este problema consideremos o seguinte resultado.

Teorema 3.23. O ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ é uma solução do problema de complementariedade se, e somente se,

$$x_0 \in \mathbb{R}^n_+ \ : \quad \big(F(x_0), y - x_0\big) \geq 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.26}$$

Demonstração: Note que, se x_0 é solução do problema de complementariedade, então $\big(F(x_0), y)\big) \geq 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}^n_+$, e assim

$$\big(F(x_0), y - x_0\big) = \big(F(x_0), y)\big) - \big(F(x_0), x_0)\big) = \big(F(x_0), y)\big) \geq 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n_+.$$

Reciprocamente, se x_0 é solução da inequação variacional, então satisfaz (3.26). Em particular, para $y = x_0 + e_i \in \mathbb{R}^n_+$, obtemos

$$0 \leq \big(F(x_0), x_0 + e_i - x_0\big) = \big(F(x_0), e_i\big) = F_i(x_0),$$

ou $F(x_0) \in \mathbb{R}^n_+$. Portanto, tomando $y = 0$, obtemos de (3.26) que $\big(F(x_0), x_0\big) \leq 0$, mas como $x_0, F(x_0) \in \mathbb{R}^n_+$, então $\big(F(x_0), x_0\big) \geq 0$, o que implica $\big(F(x_0), x_0\big) = 0$. ∎

O próximo passo a mostrar é a existência e unicidade da solução de um problema de inequação variacional definida num espaço de Hilbert real de dimensão infinita.

3.2 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM ESPAÇOS DE HILBERT

Muitas questões interessantes na teoria das desigualdades variacionais podem ser formulados em termos ds formas bilineares sobre espaços de Hilbert. Isto é uma generalização da teoria variacional de problemas de valor na fronteira para equações lineares elípticas. Seja H um espaço de Hilbert real de dimensão infinita com produto interno $\big(u,v\big)_H$ e norma $\|u\|_H^2 = \big(u,u\big)_H$. Denotemos por H^* o espaço dual de H, e a relação entre H^* e H dada por

$$\begin{array}{rcl} H^* \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f, x & \longmapsto & \langle f, x\rangle_{H^*\times H} \end{array}$$

chamada o producto de dualidade entre H^* e H.
Seja

$$\begin{array}{rcl} a : H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u, v & \longmapsto & a(u,v) \end{array}$$

dizemos que:

- $a(u,v)$ é uma forma bilinear real em H, quando é linear em cada variável.
- $a(u,v)$ é contínua, se existir $\beta > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall\, u,v \in H.$$

- $a(u,v)$ é coerciva, se existir $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2$, $\forall\, v \in H$.
- $a(u,v)$ é simétrica, quando $a(u,v) = a(v,u)$, $\forall\, u,v \in H$.

Observemos que se $a(u,v)$ é uma forma bilinear, contínua coerciva e simétrica, então $a(u,v)$ induz um produto interno. Além disso

$$\alpha \|v\|_H^2 \leq a(u,v) \leq \beta \|u\|_H^2, \quad \forall\, v \in H,$$

isso mostra que $\big[a(u,v)\big]^{1/2}$ é uma norma em H.
Consideremos agora o seguinte problema de inequação variacional:
Sejam $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva, $K \subset H$ um conjunto fechado e convexo e $f \in H^*$. Encontrar

$$u \in K \ : \quad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle_{H^*\times H}, \quad \forall\, v \in K. \tag{3.27}$$

Observemos que uma aplicação $A : H \to H^*$ linear e contínua define uma forma bilinear se consideramos

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle_{H^*\times H}.$$

Reciprocamente, uma forma bilinear $a(u, v)$ define uma aplicação linear e contínua $A : H \to H^*$ se considerarmos

$$v \to a(u, v), \quad \text{para cada } v \in H.$$

Portanto, é possível reescrever o Problema 3.27 da forma seguinte:

Encontrar

$$u \in K \ : \quad \langle Au - f, v - u\rangle_{H^*\times H}, \quad \forall\, v \in K.$$

O teorema a seguir garante a existência e unicidade do Problema 3.27.

Teorema 3.24. Sejam H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ um conjunto não vazio fechado e convexo, $f \in H^*$ e $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então existe uma unica solução para o Problema (3.27). Além disso, a aplicação $f \to u$ é Lipschitz; isto é, se u_1, u_2 são soluções do Problema (3.27) correspondentes a $f_1, f_2 \in H^*$, então

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq (\frac{1}{\alpha})\|f_1 - f_2\|_H^*. \tag{3.28}$$

Observe-se que a aplicação $f \to u$ é linear se K é um subespaço de H.

Demonstração: Primeiro mostraremos a desigualdade (3.28). Suponha que existem $u_1, u_2 \in H$ soluções do Problema (3.27), então

$$u_i \in K \ : \quad a(u_i, v - u_i) \geq \langle f_i, v - u_i\rangle_{H^*\times H}, \quad \forall\, v \in K,\ i = 1, 2.$$

Fazendo $v = u_2$ na inequação variacional para u_1 e $v = u_1$ para u_2, obtemos mediante adição

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_{H^*\times H}.$$

Pela coercividade de a, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_H^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_{H^*\times H} \leq \|f_1 - f_2\|_{H^*}^2\|u_1 - u_2\|_H,$$

e assim

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq (\frac{1}{\alpha})\|f_1 - f_2\|_{H^*}.$$

Só resta mostrar a existência de u no qual será feita em dois casos.

CASO I: Suponha que $a(u, v)$ é simétrica Defina o funcional

$$J(u) = a(u, v) - 2\langle f, u\rangle_{H^* \times H}, \quad u \in H.$$

Já que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \alpha\|u\|_H^2 - 2\|f\|_{H^*}\|u\|_H \\ &\geq \alpha\|u\|_H^2 - \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^*}^2 - \alpha\|u\|_H^2 \\ &= -\frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^*}^2 \end{aligned}$$

então J é um funcional limitado inferiormente, então

$$d = \inf_K J(u) \geq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^*}^2 > -\infty.$$

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante de J em K tal que

$$\big\{u_n \in K : d \leq J(u_n) \leq d + \frac{1}{n}\big\}.$$

Aplicando a lei do paralelogramo e pela convexidade de K obtemos

$$\begin{aligned} \alpha\|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\big(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)\big). \end{aligned}$$

Como

$$4\langle f, u_n\rangle_{H^* \times H} + 4\langle f, u_m\rangle_{H^* \times H} - 8\langle f, \frac{1}{2}(u_n + u_m)\rangle_{H^* \times H} = 0,$$

então

$$\begin{aligned} \alpha\|u_n - u_m\|^2 &\leq 2J(u_n) + 2J(u_m) - 4J\big(\frac{1}{2}(u_n + u_m)\big) \\ &\leq 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}). \end{aligned}$$

Portanto $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e como H é um espaço de Hilbert, então existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \to u_0$ em H, quando $n \to \infty$. Já que K é um conjunto fechado temos $u_0 \in K$ e pela continuidade de J obtemos $J(u_n) \to J(u_0)$. Assim, pela unicidade do limite $J(u_0) = d$.

Agora, pela convexidade de K, para todo $v \in K$, $u_0 + \varepsilon(v - u_0) \in K$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ e $J(u_0 + \varepsilon(v - u_0)) \geq J(u_0)$. Então $\frac{d}{d\varepsilon}J(u_0 + \varepsilon(v - u_0))|_{\varepsilon=0} \geq 0$. Em outra palavras

$$2\varepsilon a(u_0, v - u_0) + \varepsilon^2 a(v - u_0, v - u_0) - 2\varepsilon\langle f, v - u_0\rangle_{H^* \times H} \geq 0,$$

ou

$$a(u_0, v - u_0) \geq \langle f, v - u_0 \rangle_{H^* \times H} - \frac{1}{2}\varepsilon a(v - u_0, v - u_0), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Fixando $\varepsilon = 0$, obtemos

$$a(u_0, v - u_0) \geq \langle f, v - u_0 \rangle_{H^* \times H}, \quad \forall v \in K.$$

Portanto u_0 é solução do Problema (3.27).

CASO II: Suponha que $a(u, v)$ não é simétrica.

Dado uma forma bilinear $a(u, v)$, existe uma aplicação $A : H \longrightarrow H^*$ linear e contínua se considerarmos $a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{H^* \times H}$. Assim

$$\langle Au, v - u \rangle_{H^* \times H} = a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_{H^* \times H}, \quad \forall v \in K,$$

o que equivale a

$$\langle \rho(Au - f), v - u \rangle_{H^* \times H} \geq 0, \quad \forall v \in K, \text{ e } \rho > 0. \tag{3.29}$$

Sejam

$$\begin{aligned} I : H &\rightarrow H^* \\ u &\mapsto Iu \ : H \rightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad v \mapsto \langle Iu, v \rangle_{H^* \times H} = \big(u, v\big)_H \end{aligned}$$

o isomorfismo canônico e $J = I^{-1} : H^* \rightarrow H$.

Então (3.29) pode ser equivalente a

$$\big(u - J(Iu - \rho(Au - f)), v - u\big)_H \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Defina o operador

$$\begin{aligned} T_p : K &\rightarrow H^* \\ v &\mapsto T_p v = Iv - \rho(Av - f). \end{aligned}$$

Então

$$\big(u - J(T_p u), v - u\big)_H \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{3.30}$$

Logo, pelo Teorema 3.5, a desigualdade (3.30) acontece se, e somente se, u é a projeção de $J(T_p u)$ sobre K; isto é,

$$u = P_K\big(J(T_p u)\big) = P_K \circ J \circ T_p(u),$$

o que equivale dizer que u é ponto fixo de $P_K \circ J \circ T_p$. Portanto, tudo leva mostrar a existência do ponto fixo u.

Pelo teorema de ponto fixo de Banach, u é um ponto fixo de $P_K \circ J \circ T_p$ se, e somente se,

$P_K \circ J \circ T_p$ é uma contração.

Sabemos que $S_p = P_K \circ J \circ T_p : K \to K$. Então vamos mostrar que S_p é uma contração. Com efeito: dados $v, w \in K$, temos pelo Corolário 3.6

$$\begin{aligned}
\|s_p v - S_p w\|_H^2 &= \|P_K(J \circ T_p(v)) - P_K(J \circ T_p(w))\|_H^2 \\
&\leq \|J(T_p(v)) - J(T_p(w))\|_H^2 \\
&= \big(J(T_p(v)) - J(T_p(w)), J(T_p(v)) - J(T_p(w))\big)_H \\
&= \big(v - w - \rho J(Av - Aw), v - w - \rho J(Av - Aw)\big)_H \\
&= \|v - w\|_H^2 - 2\rho\big(J(Av - Aw), v - w\big)_H + \rho^2 \|J(Av - Aw)\|_H^2
\end{aligned}$$

Como $I : H \to H^*$ é uma isometría, então $J = I^{-1}$ também é uma isometría, e portanto $\|J(Av - Au)\|_H = \|Av - Au\|_H$.

Além disso, como $\langle Iu, v\rangle_{H^* \times H} = \big(u, v\big)_H$, então para $Jg \in H$, $g \in H^*$, tem-se

$$\langle I(Jg), v\rangle_{H^* \times H} = \big(Jg, v\big)_H,$$

e assim $\langle g, v\rangle_{H^* \times H} = \big(Jg, v\big)_H$. Logo

$$\|s_p v - S_p w\|_H^2 \leq \|v - w\|_H^2 - 2\rho\langle Av - Aw, v - w\rangle_{H^* \times H} + \rho^2 \|Av - Aw\|_H^2.$$

Mas, como $a(u, v)$ é coercivo e A é contínuo

- $\langle Av - Aw, v - u\rangle_{H^* \times H} = \langle A(v - w), v - w\rangle_{H^* \times H} = a(v - w, v - w) \geq \alpha\|v - w\|_H^2$.
- $\|Av - Aw\|_H = \|A(v - w)\|_H \leq c\|v - w\|_H$, para algum $c > 0$,

o que implica

$$\begin{aligned}
\|s_p v - S_p w\|_H^2 &\leq \|v - w\|_H^2 - 2\rho\alpha\|v - w\|_H^2 + \rho^2 c^2 \|v - w\|_H^2 \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2)\|v - w\|_H^2.
\end{aligned}$$

Note que, se $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 < 1$, então $\rho < \dfrac{2\alpha}{c^2}$.

Logo, para $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{c^2}$, $S_p : K \to K$ é uma contração, e portanto possui ponto fixo, isto é, existe u tal que $u = S_p u = P_K \circ J \circ T_p(u)$, onde u é solução do Problema (3.27). ∎

4 ESTUDO DO PROBLEMA DE PLASMA CONFINADO

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade do Problema (1). O jeito é formular um problema equivalente e mostrar que para algumas condições estabelecidas existe solução para este novo problema. A unicidade da solução será obtida utilizando os primeiros autovalores do problema de autovalor para o laplaciano o qual será apresentado na segunda seção; veja [6].

4.1 EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO

Seja o seguinte problema com valor na fronteira. Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ com valor real tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K(u)\,, \quad \text{em}\,\Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \theta\varphi\,, \quad \theta \in \mathbb{R} \ \text{ não conhecido} \\ \displaystyle\int_\Omega P_K(u)\psi = \frac{I}{\lambda}\,, \quad I > 0 \ \text{ é prescrito.} \end{cases} \tag{4.1}$$

onde:

- Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$.
- $\lambda \neq 0$ é um parâmetro real.
- K é um conjunto fechado convexo de $L^2(\Omega)$ é P_K é o operador projeção sobre K.
- $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\varphi \neq 0$, e $\psi \in H^1(\Omega)$ é a extensão harmônica a Ω da função φ (isto é, $\Delta\psi = 0$ em Ω e $\psi = \varphi$ sobre $\partial\Omega$). Para mais detalhes sobre o espaço $H^{1/2}(\partial\Omega)$, veja [1], Cápitulo VII.

Então a questão que temos que fazer é a seguinte: para que função $u \in H^1(\Omega)$ e θ o problema

$$-\Delta u = \lambda P_K(u), \quad \text{em}\, \Omega$$
$$u = \theta\varphi, \quad \text{sobre}\, \partial\Omega$$

tem solução e além disso, a integral $\displaystyle\int_\Omega P_K(u)\psi = \frac{I}{\lambda}$ existe?

Como $P_K(u) \in K$, então uma condição para que a integral exista é

$$\inf_{v\in K}\int_\Omega v\psi \quad \leq \quad \frac{I}{\lambda} \quad \leq \quad \sup_{v\in K}\int_\Omega v\psi \tag{4.2}$$

Para dar solução ao Problema (4.1) estudaremos um problema equivalente que será apresentado posteriomente, mas precisamos primeiro definir um novo conjunto.
Definamos

$$K_\lambda = K \cap \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v\psi = \frac{I}{\lambda} \right\},$$

então K_λ é um conjunto convexo e fechado de $L^2(\Omega)$.
Nota-se que se $K_\lambda \neq \emptyset$, então se verifica (4.2).
De fato:
Seja $v \in K_\lambda$ qualquer, então $\displaystyle\int_\Omega v\psi = \frac{I}{\lambda}$. Logo

$$\inf_{v\in K_\lambda}\int_\Omega v\psi = \frac{I}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sup_{v\in K_\lambda}\int_\Omega v\psi = \frac{I}{\lambda}. \tag{4.3}$$

Como $K_\lambda \subset K$, então

$$\inf_{v\in K}\int_\Omega v\psi \leq \inf_{v\in K_\lambda}\int_\Omega v\psi \quad \text{e} \quad \sup_{v\in K_\lambda}\int_\Omega v\psi \leq \sup_{v\in K}\int_\Omega v\psi.$$

Logo, de (4.3) obtemos

$$\inf_{v\in K}\int_\Omega v\psi \;\leq\; \frac{I}{\lambda} \;\leq\; \sup_{v\in K}\int_\Omega v\psi.$$

Assim, uma condição para a existência da solução de (4.1) é

$$K_\lambda \neq \emptyset \tag{4.4}$$

Agora, para todo $\lambda \neq 0$ satisfazendo (4.4) consideremos o seguinte problema. Buscar $(w, \theta) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda P_{K_\lambda}(w)\,, & \text{em } \Omega, \\ w = 0\,, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5a}$$

$$\int_\Omega P_K(w+\theta\psi)\psi = \frac{I}{\lambda}. \tag{4.5b}$$

O problema apresentado, é um problema equivalente ao Problema (4.1), portanto, mostrando a solução do Problema (4.5), vamos obter também a solução do Problema (4.1). Mas, para garantir a equivalência dos Problemas (4.1) e (4.5) apresentamos o seguinte resultado.

Lema 4.1. O Problema (4.1) tem uma solução $u \in H^1(\Omega)$ se, e somente se:

i. $K_\lambda \neq \emptyset$.

ii. O Problema (4.5) tem uma solução $(w,\theta) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ e estas soluções estão relacionadas por

$$\begin{cases} u = w + \theta\psi \\ P_K(u) = P_{K_\lambda}(w). \end{cases} \tag{4.6}$$

Demonstração:
Seja u solução do Problema (4.1), então

$$\int_\Omega P_K(u)\psi = \frac{I}{\lambda}. \tag{4.7}$$

Como $P_K(u) \in K \subset L^2(\Omega)$ e satisfaz (4.7), então $P_K(u) \in K_\lambda$ e assim $K_\lambda \neq \emptyset$.
Seja $w = u - \theta\psi$, é possível fazer isso já que conhecemos u e ψ, então $w \in H_0^1(\Omega)$, pois $w|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} - \theta\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Note que

$$\int_\Omega P_K(w+\theta\psi)\psi = \int_\Omega P_K(u)\psi = \frac{I}{\lambda},$$

obtendo assim (4.5b).
Agora, pelo Teorema 3.5

$$\int_\Omega (u - P_K(u))(v - P_K(u)) \leq 0\,, \quad \forall\, v \in K, \tag{4.8}$$

$$\int_\Omega (w - P_{K_\lambda}(w))(v - P_{K_\lambda}(w)) \leq 0\,, \quad \forall\, v \in K_\lambda. \tag{4.9}$$

Fazendo $v = P_{K_\lambda}(w)$ em (4.8) e $v = P_K(u)$ em (4.9) e somando temos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u - P_K(u))(P_{K_\lambda}(w) - P_K(u)) + \int_\Omega (w - P_{K_\lambda}(w))(P_K(u) - P_{K_\lambda}(w)) &\leq 0 \\
\int_\Omega (P_{K_\lambda}(w) - P_K(u))[u - w + P_{K_\lambda}(w) - P_K(u)] &\leq 0 \\
\int_\Omega (P_{K_\lambda}(w) - P_K(u))^2 + \theta \int_\Omega (P_{K_\lambda}(w) - P_K(u))\psi &\leq 0 \\
\|P_{K_\lambda}(w) - P_K(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \theta(\int_\Omega P_{K_\lambda}(w)\psi - \int_\Omega P_K(u)\psi) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Como $P_{K_\lambda}(w) \in K_\lambda = K \cap \left\{ v \in L^2 : \int_\Omega v\psi = \dfrac{I}{\lambda} \right\}$, então $\int_\Omega P_{K_\lambda}(w)\psi = \dfrac{I}{\lambda}$, e assim $\|P_{K_\lambda}(w) - P_K(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$, o que implica

$$P_K(u) = P_{K_\lambda}(w). \tag{4.10}$$

Por outro lado, como ψ é harmônica, então w satisfaz (4.5a), pois

$$\Delta w = \Delta u - \theta \Delta \psi = \Delta u = -\lambda P_K(u) = -\lambda P_{K_\lambda}(w)$$

e além disso, $w = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Portanto, $(w, \theta) \in H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$ é solução de (4.5) e as duas soluções estão relacionadas por

$$\begin{cases} u = w + \theta\psi \\ P_K(u) = P_{K_\lambda}(w). \end{cases}$$

Reciprocamente, suponha que $K_\lambda \neq \emptyset$ e $(w, \theta) \in H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$ é solução do Problema (4.5) tal que $u = w + \theta\psi$ e $P_K(u) = P_{K_\lambda}(w)$.

Como ψ é harmônica e $w = 0$ sobre $\partial\Omega$ temos:

- $\Delta u = \Delta w - \theta \Delta \psi = \Delta u = -\lambda P_{K_\lambda}(w) = -\lambda P_K(u)$ em Ω.
- $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} + \theta\psi|_{\partial\Omega} = \theta\psi|_{\partial\Omega} = \theta\varphi$.

Além disso,

$$\int_\Omega P_K(u)\psi = \int_\Omega P_K(w + \theta\psi)\psi = \frac{I}{\lambda}.$$

Assim, u é solução do Problema (4.1) ■

Mostrado já a equivalência dos Problemas (4.1) e (4.5), nosso problema agora é saber para quais condições o Problema (4.5) tem solução.

4.1.1 Teorema de existência

Nesta seção apresentamos o teorema que garante a solução do Problema (4.5), mas precisamos das seguintes condições:
Consideremos que

$$l_1 = \inf_{v \in K} \int_\Omega v\psi < \sup_{v \in K} \int_\Omega v\psi = l_2.$$

Além disso, dizemos que o conjunto K verifica a condição (HE) se:
$\forall\, l \in]l_1, l_2[$, o conjunto $\{v \in K : \int_\Omega v\psi = l\}$ é limitado em $L^1(\Omega)$.
Seja $\bigwedge = \{\lambda \neq 0 : l_1 < \frac{I}{\lambda} < l_2\}$.

Teorema 4.2. (Teorema de Existência)
Se K verifica a condição (HE) então o Problema (4.5) admite pelo menos uma solução $(w, \theta) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, para todo $\lambda \in \bigwedge$.

Para mostrar o teorema acima precisamos do seguinte resultado geral.

Lema 4.3. Seja H um espaço real de Hilbert e $K \subset H$ um subconjunto fechado e convexo. Então:

a. O funcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \big(v - \frac{1}{2}P_K v; P_K v\big)_H$$

é convexo e Fréchet diferenciável em H, com diferencial $J' = P_K$.

b. Para todo $u, \psi \in H$, a função real

$$\tau_u(\theta) = \big(P_K(u + \theta\psi); \psi\big)_H,$$

é Lipschitz e crescente em $\mathbb{R}$. Além disso, a função satisfaz

$$\lim_{\theta \to -\infty} \tau_u(\theta) = \inf_{v \in K} \big(v; \psi\big)_H \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta \to +\infty} \tau_u(\theta) = \sup_{v \in K} \big(v; \psi\big)_H.$$

Demonstração:
Parte a:
Considere o seguinte funcional convexo e semicontínuo inferiormente

$$\begin{array}{rcl} j : H & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ v & \longmapsto & j(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \mathcal{I}_K(v), \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_K : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\\ v &\longmapsto \mathcal{I}_K(v) = \begin{cases} 0\,, & \text{se}\,, v \in K \\ +\infty\,, & \text{caso contrário}\end{cases}\end{aligned}$$

é o funcional indicador de K.
O funcional conjugado convexo de j, $j^* : H^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, está definido por

$$j^*(v^*) = \sup_{v \in H} \left\{ \langle v^*; v\rangle_{H^* \times H} - j(v) \right\}, \tag{4.11}$$

Seja $\overline{v} \in H$ onde o supremo em (4.11) é atingido, então pela definição de supremo tem-se

$$\langle v^*; v\rangle_{H^* \times H} - j(v) \leq j^*(v^*) = \langle v^*; \overline{v}\rangle_{H^* \times H} - j(\overline{v})\,, \quad \forall\, v \in H,$$

então

$$j(v) - j(\overline{v}) \geq \langle v^*; v - \overline{v}\rangle_{H^* \times H}\,, \quad \forall\, v \in H,$$

e assim

$$v^* \in \partial j(\overline{v}). \tag{4.12}$$

Já que, os funcionais $f : H \to \mathbb{R}$, definido por $f(v) = \dfrac{1}{2}\|v\|_H^2$ e $\mathcal{I}_K$ são convexos, semicontínuos inferiormente e além disso, como existe $\bar{u} \in \{dom(f) \cap dom(\mathcal{I}_K)\}$ onde f é contínua, então pela Proposição 2.13 temos que

$$\partial(f + \mathcal{I}_K)(v) = \partial f(v) + \partial \mathcal{I}_K(v)\,, \quad \forall\, v \in H,$$

e assim de (4.12) temos

$$v^* \in \partial j(\overline{v}) = \partial f(\overline{v}) + \partial \mathcal{I}_K(\overline{v}).$$

Já que, pelo Exemplo 2.6, $\partial f(\overline{v}) = \{\overline{v}^*\} = \{\overline{v}\}$, onde $\overline{v}$ é o representante de $\overline{v}^*$ em H, então

$$v^* \in \left(\{\overline{v}^*\} + \partial \mathcal{I}_K(\overline{v})\right),$$

o que implica

$$v^* - \overline{v}^* \in \partial \mathcal{I}_K(\overline{v}).$$

Portanto, pelo Exemplo 2.3, temos

$$\langle v^* - \overline{v}^*, y - \overline{v}\rangle_{H^* \times H} \leq 0, \quad \forall\, y \in K,$$

e assim

$$\langle v^*, y - \overline{v}\rangle_{H^* \times H} - \langle \overline{v}^*, y - \overline{v}\rangle_{H^* \times H} \leq 0, \quad \forall\, y \in K.$$

Pelo teorema de Riesz-Fréchet temos

$$\big(v_0, y - \overline{v}\big)_H - \big(\overline{v}, y - \overline{v}\big)_H \leq 0, \quad \forall\, y \in K,$$

onde v_0 é representante de v^* em H. Então

$$\big(v_0 - \overline{v}, y - \overline{v}\big)_H \leq 0, \quad \forall\, y \in K,$$

o que implica do Teorema 3.5 que

$$\overline{v} = P_K(v_0).$$

Logo

$$\begin{aligned} j^*(v^*) &= \langle v^*, \overline{v}\rangle_{H^*\times H} - j(\overline{v}) \\ &= \big(v_0, \overline{v}\big)_H - \frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2 \\ &= \big(v_0 - \frac{1}{2}\overline{v}, \overline{v}\big)_H \\ &= \big(v_0 - \frac{1}{2}P_K(v_0), P_K(v_0)\big)_H = J(v_0) \\ &= J(v^*). \end{aligned}$$

Como j é convexo e s.c.i., pois f e $\mathcal{I}_K$ o são, temos pelo Corolário 2.12

$$v^* \in \partial j(\overline{v}) \ \text{ se, e somente se, } \ \overline{v} \in \partial j^*(v^*),$$

e assim

$$\partial J(v^*) = \partial j^*(v^*) = \{\overline{v}\} = \{P_K(v^*)\}.$$

Já que, j^* é um funcional convexo, s.c.i. e além disso, $v^* \in H^*$ é qualquer, então J é também um funcional convexo e s.c.i. Agora, como a subdiferencial do funcional J no ponto v^* está composto por um único elemento, então J é Gâteaux diferenciável em H no ponto v^*, com $J' = P_K$.

Além disso, como P_K é um operador contínuo, então J é Fréchet diferenciável.

Parte b:

A demonstração será feita em 3 partes:

i. $\boldsymbol{\tau_u}$ é Lipschitziana

Sendo P_K um operador não expansivo e pela desigualdade de Cauchy Schwartz temos

$$\begin{aligned}
|\tau_u(\theta_1)-\tau_u(\theta_2)| &= |\big(P_K(u+\theta_1\psi),\psi\big)_H-\big(P_K(u+\theta_2\psi),\psi\big)_H| \\
&= |\big(P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi),\psi\big)_H| \\
&\leq \|P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi)\|_H\|\psi\|_H \\
&\leq \|\theta_1\psi-\theta_2\psi\|_H\|\psi\|_H \\
&= \|\psi\|_H|\theta_1-\theta_2|,
\end{aligned}$$

e assim τ_u é Lipschitz.

ii. $\boldsymbol{\tau_u}$ é Crescente

Como

$$\tau_u(\theta_1)-\tau_u(\theta_2)=\big(P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi),\psi\big)_H,$$

então para $\theta_1>\theta_2$ temos, pelo Teorema 3.5,

$$\begin{aligned}
(\theta_1-\theta_2)\big(\tau_u(\theta_1)-\tau_u(\theta_2)\big) &= \big(P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi),(\theta_1-\theta_2)\psi\big)_H \\
&= \big(P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi),(u+\theta_1\psi)-(u+\theta_2\psi)\big)_H \\
&\geq \|P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi)\|_H^2\geq 0
\end{aligned}$$

Portanto a função τ_u é crescente.

iii. Só resta mostrar que τ_u possui limite laterais no infinito

Como τ_u é Lipschitziana e crescente, então existem

$$l_1'=\lim_{\theta\to-\infty}\tau_u(\theta) \qquad \text{e} \qquad l_2'=\lim_{\theta\to+\infty}\tau_u(\theta)$$

Temos que mostrar que

$$l_1'=\inf_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H \qquad \text{e} \qquad l_2'=\sup_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H$$

Com efeito:

Seja uma sequência $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qualquer tal que $\theta_n\to+\infty$, e seja também $v\in K$ um elemento arbitrário fixo. Logo, pelo Teorema 3.5 tem-se

$$\big((u+\theta_n\psi)-P_K(u+\theta_n\psi),v-P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H\leq 0.$$

Agrupando convenientemente temos

$$\big(u-P_K(u+\theta_n\psi),v-P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H+\big(\theta_n\psi,v-P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H\leq 0$$

e assim

$$
\begin{aligned}
\theta_n\big[\big(\psi,v\big)_H-\big(\psi,P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H\big] &\leq -\big(u-P_K(u+\theta_n\psi),v-P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H,\\
&= \big(u+v,P_K(u+\theta_n\psi)\big)_H-\|P_K(u+\theta_n\psi)\|_H^2-\big(u,v\big)_H,\\
&= -\|\frac{1}{2}(u+v)-P_K(u+\theta_n\psi)\|_H^2+\frac{1}{4}\|u+v\|_H^2-\big(u,v\big)_H,\\
&\leq \frac{1}{4}\|u+v\|_H^2-\big(u,v\big)_H.
\end{aligned}
$$

Como os limites dos dois lados das desigualdades existem, então fazendo $n\to\infty$ obtemos

$$\big(v,\psi\big)_H\leq\lim_{n\to\infty}\tau_u(\theta_n)=l_2'\,,\quad \forall\, v\in K,$$

e assim

$$l_2=\sup_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H\leq l_2'.$$

Por outro lado, como

$$\langle v,\psi\rangle\leq\sup_{v\in K}\langle v,\psi\rangle\,,\quad \forall\, v\in K$$

então, em particular para $v_n=P_K(u+\theta_n\psi)$ satisfaz

$$\langle v_n,\psi\rangle\leq\sup_{v\in K}\langle v,\psi\rangle=l_2\,,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Fazendo $n\to\infty$ temos

$$l_2'\leq\sup_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H=l_2.$$

Portanto tem-se

$$\lim_{\theta\to+\infty}\tau_u(\theta)=l_2=\sup_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H.$$

Analogamente se mostra que

$$\lim_{\theta\to-\infty}\tau_u(\theta)=\inf_{v\in K}\big(v,\psi\big)_H.$$

■

Mostremos agora o Teorema 4.2 que será feito em duas partes. A primeira parte será mostrar que $K_\lambda\neq\emptyset$, já que o Problema (4.5) foi dado com essa condição. A segunda parte, será mostrar a existência da solução do Problema (4.5) e o jeito é definir um funcional para logo encontrar o ponto em que esta atinge seu mínimo, o qual também será solução para o problema dado. Para isso, vamos utilizar o funcional J dado no Lema 4.3, já que este é Fréchet diferenciável com diferencial $J'=P_K$.

Demonstração:

Primeira parte:

Já que $\lambda \in \bigwedge$ segue pelo Lema 4.3, parte (b), que $K_\lambda \neq \emptyset$; pois, para $u = 0$, existe θ_0 tal que

$$\tau_0(\theta_0) = \int_\Omega P_K(\theta_0\psi) = \frac{I}{\lambda}.$$

Portanto $P_K(\theta_0\psi) \in K_\lambda$.

Segunda parte:

Seja o funcional $e : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$e(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \lambda \int_\Omega (w - \frac{1}{2}P_{K_\lambda} w)P_{K_\lambda} w\,, \tag{4.13}$$

no qual é limitado inferiormente, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla w|^2 - c\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega) \tag{4.14}$$

Esta afirmação será demonstrada em dois casos.

Caso I: Quando $\lambda > 0$

De (4.13) tem-se

$$\begin{aligned} e(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \lambda \int_\Omega w P_{K_\lambda} w + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |P_{K_\lambda} w|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \lambda \int_\Omega |w P_{K_\lambda} w| + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$e(w) \geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \lambda \|w\|_{L^p}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}} + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2,$$

para $p, p^* > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$.

Pela Observação 1.5, do Teorema 1.29, quando $p = q = \dfrac{2n}{n-2}$ se $n > 2$ e $p = q > 2$ se $n = 2$ obtemos

$$\|w\|_{L^p} \leq c_1 \|\nabla w\|_{L^2}\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \tag{4.15}$$

Portanto, fazendo $c_2 = \lambda c_1$ temos

$$\begin{aligned} e(w) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2\|\nabla w\|_{L^2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}} + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \big(\frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2} - c_2\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}}\big)^2 - c_2^2\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}}^2 + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2^2\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}}^2 + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Note que

- Se $p = \dfrac{2n}{n-2}$ quando $n > 2$, então $p^* = \dfrac{2n}{n+2} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{n}}$, e assim $1 < p^* < 2$.

- Se $p > 2$ quando $n = 2$, então $\dfrac{1}{p^*} = 1 - \dfrac{1}{p} > 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, e assim $1 < p^* < 2$.

Seja $\alpha = 1 - \dfrac{2}{p}$, então

- Se $p = \dfrac{2n}{n-2}$ quando $n > 2$, então $\alpha = \dfrac{2}{n}$, e assim $\alpha \in (0,1)$.

- Se $p > 2$ quando $n = 2$, então $\alpha \in (0,1)$, pois

$$\frac{2}{p} < 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha = 1 - \frac{2}{p} = \frac{p-2}{p} < 1$$
$$0 < 1 - \frac{2}{p} = \alpha$$

Já que, $P_{K_\lambda} w \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, pelo teorema da desigualdade de interpolação

$$\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}} \leq \|P_{K_\lambda} w\|_{L^1}^{\alpha} \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^{1-\alpha}$$

com $\dfrac{1}{p^*} = \alpha + \dfrac{1-\alpha}{2}$.
Se $s = 1 - \alpha = \dfrac{2}{p}$, então $s \in (0,1)$ quando $p = \dfrac{2n}{n-2}$ se $n > 2$ e $p > 2$ se $n = 2$, e além disso,

$$\|P_{K_\lambda} w\|_{L^{p^*}} \leq \|P_{K_\lambda} w\|_{L^1}^{1-s} \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^{s},$$

com $\dfrac{1}{p^*} = 1 - s + \dfrac{s}{2}$.
Portanto,

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2^2 \|P_{K_\lambda} w\|_{L^1}^{2(1-s)} \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^{2s} + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2.$$

Como $P_{K_\lambda} w \in K_\lambda$, então $P_{K_\lambda} w \in K$ tal que $\displaystyle\int_\Omega P_{K_\lambda}(w)\psi = \frac{I}{\lambda}$, mais ainda, já que $\lambda \neq 0$, então

$$\int_\Omega P_{K_\lambda}(w)\psi = \frac{I}{\lambda} \in \left]l_1, l_2\right[.$$

Assim, desde que K satisfaz a condição (HE), existe $c_3 > 0$ tal que $\|P_{K_\lambda} w\|_{L_1} \leq c_3$.
Logo,

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2 - c_4 \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^{2s},$$

onde $c_4 = c_3 c_2^2$. Como $0 < s < 1$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = at - bt^s > C\,, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, para $a = \dfrac{\lambda}{2}$, $b = c_4$ e $t = \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2$, obtemos

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

Caso II: Quando $\lambda < 0$

Seja $g \in K_\lambda$ fixo qualquer, então pelo Teorema 3.5

$$\int_\Omega \big(w - P_{K_\lambda} w\big)\big(g - P_{K_\lambda} w\big) \leq 0\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$\int_\Omega \big(w - \frac{1}{2}P_{K_\lambda} w - \frac{1}{2}P_{K_\lambda} w\big) P_{K_\lambda} w \geq \int_\Omega \big(w - P_{K_\lambda} w\big) g,$$

e assim

$$\int_\Omega \big(w - \frac{1}{2}P_{K_\lambda} w\big) P_{K_\lambda} w \geq \frac{1}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \big(w - P_{K_\lambda} w\big) g. \tag{4.17}$$

De (4.13) temos

$$e(w) = \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + c_1 \int_\Omega (w - \frac{1}{2}P_{K_\lambda} w) P_{K_\lambda} w, \tag{4.18}$$

onde $c_1 = -\lambda$.

Portanto, de (4.17) e (4.18) obtemos

$$\begin{aligned} e(w) &= \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + c_1 \int_\Omega \big(w - P_{K_\lambda} w\big) g + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2, \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_1 \int_\Omega |wg| - c_1 \int_\Omega |P_{K_\lambda}(w) g| + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$e(w) \geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_1 \|w\|_{L^p}\|g\|_{L^{p^*}} - c_1 \|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}\|g\|_{L^2} + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda} w\|_{L^2}^2.$$

De forma análoga ao caso (I), fazendo $c_2 = c_1\tilde{c}_1$ temos,

$$
\begin{aligned}
e(w) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2\|\nabla w\|_{L^2}\|g\|_{L^{p^*}} - c_1\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2}\|g\|_{L^2} + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2}^2, \\
&= \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \big(\frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2} - c_2\|g\|_{L^{p^*}}\big)^2 - c_2^2\|g\|_{L^{p^*}}^2 - c_1\|g\|_{L^2}\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2}^2, \\
&\geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2^2\|g\|_{L^{p^*}}^2 - c_1\|g\|_{L^2}\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2} + \frac{c_1}{2}\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2}^2, \\
&= \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2^2\|g\|_{L^{p^*}}^2 - \frac{c_1}{2}\|g\|_{L^2}^2 + \frac{c_1}{2}\big(\|P_{K_\lambda}w\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}\big)^2, \\
&\geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c_2^2\|g\|_{L^{p^*}}^2 - \frac{c_1}{2}\|g\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Como $g \in K_\lambda$ é fixo, então

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega),$$

onde $c = c_2^2\|g\|_{L^{p^*}}^2 + \dfrac{c_1}{2}\|g\|_{L^2}^2$.
Portanto, dos casos (I) e (II), temos que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, c > 0$ tal que

$$e(w) \geq \frac{1}{4}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - c\,, \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, como $e(w)$ é convexa, s.c.i, coerciva e própria, então pelo Teorema 2.4 possui mínimo.
Seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante; isto é,

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad e(w_n) \longrightarrow A = \inf\big\{e(z) : z \in H_0^1(\Omega)\big\}. \tag{4.19}$$

Por definição de limite, dado $\varepsilon > 0$ qualquer

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \Longrightarrow |e(w_n) - A| < \varepsilon,$$

portanto

$$|e(w_n)| \leq |e(w_n) - A| + |A| < \varepsilon + |A|\,, \qquad \forall\, n \geq n_0. \tag{4.20}$$

Além disso, de (4.14) temos que

$$\frac{1}{4}\|w_n\|_{H_0^1}^2 = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 \leq e(w_n) + c\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Logo, de (4.20) e (4.21) obtemos

$$\|w_n\|_{H_0^1}^2 \leq 4(\varepsilon + |A| + c)\,, \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Tomar $m = \max\{|e(w_1)|, \ldots, |e(w_{n_0-1})|, 4(\varepsilon + |A| + c)\}$, então

$$\|w_n\|_{H_0^1} \leq m\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, pois é Hilbert, então pelo Teorema 1.7, existe uma subsequência $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$w_{n_k} \rightharpoonup w_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega) \tag{4.22}$$

Como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então

$$w_{n_k} \to w_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \tag{4.23}$$

De (4.22) temos, $(\|w_{n_k}\|_{H_0^1})$ é limitada e $\|w_0\|_{H_0^1} \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|w_{n_k}\|_{H_0^1}$, então

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_0|^2 = \frac{1}{2}\|w_0\|_{H_0^1}^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|w_{n_k}\|_{H_0^1}^2 = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2. \tag{4.24}$$

De (4.23) temos, pela continuidade do produto interno e de P_K

$$\begin{aligned} \left(w_0 - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_0, P_{K_\lambda}w_0\right)_{L_2} &= \lim_{k\to\infty} \left(w_{n_k} - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_{n_k}, P_{K_\lambda}w_{n_k}\right)_{L_2} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(w_{n_k} - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_{n_k}, P_{K_\lambda}w_{n_k}\right)_{L_2}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Logo, de (4.24) e (4.25) obtemos

$$\begin{aligned} e(w_0) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_0|^2 - \lambda \int_\Omega \big(w_0 - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_0\big)P_{K_\lambda}w_0 \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2 + \liminf_{k\to\infty}(-\lambda)\int_\Omega \big(w_{n_k} - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_{n_k}\big)P_{K_\lambda}w_{n_k} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2 - \lambda\int_\Omega \big(w_{n_k} - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}w_{n_k}\big)P_{K_\lambda}w_{n_k}\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} e(w_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} e(w_{n_k}) = \inf\{e(z) : z \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Já que $\inf\{e(z) : z \in H_0^1(\Omega)\} \leq e(w_0)$, tem-se

$$e(w_0) = \inf\{e(z) : z \in H_0^1(\Omega)\}$$

isto é, w_0 é solução para o problema de minimização dado em (4.19).
Note que $w_0 \neq 0$, caso contrario teremos $0 = \Delta w_0 = \lambda P_{K_\lambda}w_0$, $\lambda \neq 0$, o que implica $P_{K_\lambda}w_0 = 0 \in K_\lambda$. Mas isso é uma contradição pois $0 \notin K_\lambda$.

Lembrando o funcional J do Lema 4.3, nota-se

$$e(w) = G(w) - \lambda J(w)$$

onde $G(w) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2$.
Pelo Lema 4.3, $e(w)$ é Fréchet diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ e além disso,

$$\begin{aligned} e'(w).v &= G'(w).v - \lambda J'(w).v \\ &= \int_\Omega \nabla w.\nabla v - \lambda \int_\Omega P_{K_\lambda}(w)v \end{aligned}$$

Como w_0 é um ponto onde $e(w)$ atinge seu mínimo, então

$$0 = e'(w_0).v = \int_\Omega \nabla w_0.\nabla v - \lambda \int_\Omega P_{K_\lambda}(w_0)v.$$

Portanto, w_0 é solução no sentido fraco do problema

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = \lambda P_{K_\lambda}, & \text{em } \Omega, \\ w_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, como $\lambda \in \bigwedge$ então $\lambda \neq 0$ e $l_1 < \dfrac{I}{\lambda} < l_2$. Logo pelo Lema 4.3, parte (b), para w_0 existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega P_K(w_0 + \theta_0\psi)\psi = \big(P_K(w_0 + \theta_0\psi), \psi\big)_{L^2} = \tau_{w_0}(\theta_0) = \frac{I}{\lambda}.$$

Portanto (w_0, θ_0) é solução do Problema (4.5). ■

Observação 4.1. Quando K é um cone centrado na origem, então θ pode ser calculado explicitamente como uma função de w.

De fato: Como K é um cone fechado convexo e $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então, pelo Teorema 3.8, para cada $u \in L^2(\Omega)$ tem-se

$$u = P_K(u) + P_{K^\perp}(u), \quad \text{com } P_K u.P_{K^\perp} u = 0,$$

onde $K^\perp$ é o cone polar de K. Além disso, esta decomposicião é única, já que a projeção de um elemento sobre K é única. Então para $u = w + \theta\psi$, onde $(w, \theta) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ é solução do Problema (4.5), temos

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\Omega P_K(u) P_{K^\perp}(u) &= \int_\Omega P_K(u)\big(u - P_K(u)\big) \\
&= \int_\Omega P_K(u)\big(w + \theta\psi - P_K(u)\big) \\
&= \int_\Omega \big(w - P_K(u)\big) P_K(u) + \theta \int_\Omega \psi P_K(u) \\
&= \int_\Omega \big(w - P_K(u)\big) P_K(u) + \theta \int_\Omega P_K(w + \theta\psi)\psi \\
&= \int_\Omega \big(w - P_{K_\lambda} w\big) P_{K_\lambda} w + \theta \frac{I}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\theta = \frac{\lambda}{I} \int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w - w\big) P_{K_\lambda} w.
$$

Observação 4.2. No caso limite; isto é, $\dfrac{I}{\lambda} = l_1$ ou $\dfrac{I}{\lambda} = l_2$, não podemos garantir, em general, a existência da solução.

4.2 UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Antes de apresentar o teorema que garante a unicidade do problema faremos um estudo de um problema de autovalor para o laplaciano relacionado com o Problema (4.5) só tem solução única para alguns valores de λ.

Nesta seção assumiremos que φ tem sinal constante.

Sejam λ_1 e λ_2 os dois primeiros autovalores do problema de Dirichlet homogêneo para o laplaciano; isto é,

$$
\begin{cases}
\Delta v = \lambda v\,, & \text{em } \Omega \\
v = 0\,, & \text{sobre } \partial\Omega
\end{cases}
$$

e Φ_1 e Φ_2 suas correspondentes autofuncões.

Lema 4.4. Os autovalores λ_i^* para o problema

$$
\begin{cases}
-\Delta u = \lambda u\,, & \text{em}\, \Omega \\
u|_{\partial\Omega} = \theta\varphi\,, & \theta \in \mathbb{R} \ \text{ não conhecido} \\
-\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi d\Gamma = 0.
\end{cases}
\tag{4.26}
$$

são todos positivos. Mais especificamente

$$0 \leq \lambda_1^* < \lambda_2^* \leq \lambda_3^* \leq \cdots$$

Além disso;

i. $0 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_1$.

ii. $\lambda_1^* = 0$ se, e somente se, φ é constante. Neste caso $\lambda_1 < \lambda_2^* \leq \lambda_2$.

Demonstração: Definamos o conjunto

$$W = \big\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \theta\varphi,\ \theta \in \mathbb{R} \ \text{ livre} \big\},$$

onde o Problema (4.26) tem solução.
Seja L o operador definido da forma

$$\begin{array}{rcl} L : L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \longmapsto & Lf = u \end{array}$$

onde u é a única solução de

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv\,, \quad \forall\, v \in W. \tag{4.27}$$

Observe que, (4.27) é originado, utilizando uma das identidades de Green, pelo seguinte problema com valor na fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f\,, & \text{em}\,\Omega \\ u = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Assim L é um operador que associa para cada $f \in L^2(\Omega)$ uma única solução para o Problema (4.28) no sentido fraco.
Note que L é um operador linear, compacto, autoadjunto e estritamente positivo.
Com efeito:

- **L é linear**
  De fato, sejam $f, g \in L^2(\Omega)$, então $Lf = u_f$ e $Lg = u_g$ são soluções únicas dos problemas

$$\int_\Omega \nabla u_f.\nabla v + \int_\Omega u_f v = \int_\Omega fv\,, \quad \forall\, v \in W \tag{4.29}$$

$$\int_\Omega \nabla u_g.\nabla v + \int_\Omega u_g v = \int_\Omega g v\,, \quad \forall\, v \in W \tag{4.30}$$

respectivamente. Somando as duas igualdades temos

$$\int_\Omega \nabla(u_f + u_g).\nabla v + \int_\Omega (u_f + u_g)v = \int_\Omega (f+g)v\,, \quad \forall\, v \in W. \tag{4.31}$$

Como $f + g \in L^2(\Omega)$, então $L(f+g) = u_f + u_g$ é única solução de (4.31). Por tanto

$$L(f+g) = u_f + u_g = Lf + Lg.$$

Por outro lado, $\alpha Lf = \alpha u_f$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. De (4.29) temos

$$\int_\Omega \nabla(\alpha u_f).\nabla v + \int_\Omega (\alpha u_f)v = \int_\Omega (\alpha f)v\,, \quad \forall\, v \in W, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

Como $\alpha f \in L^2(\Omega)$, então $L(\alpha f) = \alpha u_f$ é única solução de (4.32) e assim

$$L(\alpha f) = \alpha u_f = \lambda Lf.$$

Portanto L é linear.

- **L é autoadjunto**

  Fazendo $v = u_g$ em (4.29) e $v = u_f$ em (4.30) obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_f.\nabla u_g + \int_\Omega u_f u_g = \int_\Omega f\nabla u_g$$

$$\int_\Omega \nabla u_g.\nabla u_f + \int_\Omega u_g u_f = \int_\Omega g\nabla u_f.$$

  Logo

$$\big(Lf, g\big)_{L^2} = \big(u_f, g\big)_{L^2} = \int_\Omega g u_f = \int_\Omega f u_g = \big(f, u_g\big)_{L^2} = \big(f, Lg\big).$$

  Portanto L é autoadjunto.

- **L é estritamente positivo**

  Seja $f \neq 0$ tal que $Lf = u$ é única solução para o problema

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv\,, \quad \forall\, v \in W.$$

  Em particular para $v = u$ obtemos

$$\big(Lf, f\big)_{L^2} = \big(u, f\big)_{L^2} = \int_\Omega fu = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 = \|u\|_{H^1} > 0\,, \quad \forall\, u \neq 0.$$

Sejam $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots$ os valores característicos do operador L. Note que $\mu_1 < \mu_2$

pois φ tem sinal constante. (Ver [10], pag. 44). Logo, para cada valor característico μ_i, existe $v_i \in L^2(\Omega)$, $v_i \neq 0$, tal que $v_i = \mu_i L v_i$ e pela linearidade de L obtemos $v_i = L(\mu_i v_i)$. Como $\mu_i v_i \in L^2(\Omega)$ então v_i é única solução de (4.27), e além disso satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta v_i + v_i = f\,, \quad \text{em}\,\Omega \\ v_i = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre}\;\; \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial \eta}\varphi = 0. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{cases} -\Delta v_i = (\mu_i - 1)v_i\,, \quad \text{em}\,\Omega \\ v_i = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre}\;\; \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial \eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.33}$$

Portanto, λ_i^* é um autovalor do Problema (4.26) se, e somente se,

$$\lambda_i^* = \mu_i - 1. \tag{4.34}$$

Multiplicando por v_i na primeira igualdade de (4.33) e utilizando uma das identidades de Green obtemos:

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla v_i|^2 = (\mu_i - 1)\int_\Omega v_i^2$$

o que implica $\mu_i \geq 1$, e por (4.34) temos $\lambda_i^* \geq 0\,, \quad \forall\, i.$

Como L é um operador autoadjunto, compacto e estritamente positivo então todos seus autovalores $\dfrac{1}{\mu_i}$ são simples. Portanto $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots$, e assim

$$0 \leq \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* < \cdots$$

Além disso, afirmamos que

$$\lambda_1^* = \inf_{\substack{u\in W \\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}, \cdots, \lambda_i^* = \inf_{\substack{u\in W \\ \int_\Omega u u_j = 0 \\ j=1,\ldots,i-1}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}, \tag{4.35}$$

onde u_j é uma autofunção correspondente a λ_j^*, $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

Para mostrar (4.35), notamos que, sendo $\dfrac{1}{\mu_i}$ o $i - esimo$ autovalor de L, temos

$$\frac{1}{\mu_1} = \|L\| = \sup_{\substack{f\in L^2(\Omega) \\ f\neq 0}} \frac{\big(Lf, f\big)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2} = \sup_{\substack{f\in L^2(\Omega) \\ \|f\|_{L^2}=1}} \big(Lf, f\big)_{L^2} \tag{4.36}$$

$$\frac{1}{\mu_i} = \sup_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ (f, v_j)_{L^2} = 0}} \frac{\big(Lf, f\big)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2}, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, i-1, \tag{4.37}$$

onde v_j é a autofunção correspondente a $\dfrac{1}{\mu_j}$.
Primeiro mostraremos para o autovalor λ_1^*.
Defina

$$\sigma = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in W, \|u\|_{L^2}^2 = 1\right\}.$$

Vamos mostrar que $\sigma = \lambda_1^*$.
Com efeito:
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ uma sequência minimizante com $\|u_n\|_{L^2}^2 = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned} W &= \big\{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \theta\varphi\big\} \\ &= \big\{v \in H^1(\Omega) : w = v - \theta\psi \in H_0^1(\Omega)\big\} \end{aligned}$$

então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta_n \in \mathbb{R}$ tal que $u_n = w_n + \theta_n\psi$.
Como

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \to \sigma = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in W, \|u\|_{L^2}^2 = 1\right\},$$

então

$$\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq cte.$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &= \int_\Omega |\nabla w_n + \theta_n \psi|^2 \\ &= \int_\Omega |\nabla w_n|^2 + |\theta_n|^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \end{aligned} \tag{4.38}$$

já que $\displaystyle\int_\Omega \nabla w_n \nabla\psi = -\int_\Omega w_n \Delta\psi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} w_n = 0.$
Portanto,

$$\begin{aligned} &\|w_n\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \leq cte \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \\ &|\theta_n|^2 \leq cte, \end{aligned}$$

isto é, as duas sequências estão limitadas em $H_0^1(\Omega)$ e em $\mathbb{R}$ respectivamente. O que implica que:

- existe uma subsequência $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w_{n_k} \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$;

- existe uma subsequência $(\theta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\theta_{n_k} \to \theta_0$ em $\mathbb{R}$.

Como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então $w_{n_k} \to w_0$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, $\theta_{n_k}\psi \to \theta_0\psi$ em $L^2(\Omega)$, pois

$$\|\theta_{n_k}\psi - \theta_0\psi\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |\theta_{n_k}\psi - \theta_0\psi|^2 = |\theta_{n_k} - \theta_0| \int_\Omega \psi \to 0.$$

Portanto,

$$u_{n_k} = w_{n_k} + \theta_{n_k}\psi \to u_0 = w_0 + \theta_0\psi \quad \text{em} \;\; L^2(\Omega),$$

e pela continuidade da norma

$$\|u_{n_k}\|_{L^2} \to \|u_0\|_{L^2},$$

obtendo assim $\|u_0\|_{L^2}^2 = 1$, já que $\|u_{n_k}\|_{L^2} = 1$, e além disso

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \to \sigma = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in W, \|u\|_{L^2}^2 = 1\right\}.$$

Observação 4.3. Observe que, de forma geral, os indices k das subsequências $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\theta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ são distintos, mas podem ser considerados iguais.
Com efeito: Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada em $H_0^1(\Omega)$, então existe uma subsequência $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w_{n_k} \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Agora, para os $k \in \mathbb{N}_1$ temos $u_{n_k} = w_{n_k} + \theta_{n_k}\psi$. Mas, como $(\theta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_1}$ é também limitada, então existe uma subsequência $(\theta_{n_{k'}})_{k'\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\theta_{n_{k'}} \to \theta_0$ em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, já que $w_{n_k} \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$(\|w_{n_k}\|_{H_0^1}) \quad \text{é limitado e} \quad \|w_0\|_{H_0^1} \le \liminf_{k\to\infty} \|w_{n_k}\|_{H_0^1}.$$

Como $\|w_{n_k}\| \ge 0$ e é limitado $\forall\, k \in \mathbb{N}$, então

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^2 = \|w_0\|_{H_0^1}^2 \le \liminf_{k\to\infty} \|w_{n_k}\|_{H_0^1}^2,$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_0|^2 + \theta^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \;&\le\; \liminf_{k\to\infty} \|w_{n_k}\|_{H_0^1}^2 + \lim_{k\to\infty} \theta_{n_k}^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \\
&=\; \liminf_{k\to\infty} \|w_{n_k}\|_{H_0^1}^2 + \liminf_{k\to\infty} \theta_{n_k}^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \\
&\le\; \liminf_{k\to\infty} \left(\|w_{n_k}\|_{H_0^1}^2 + \theta_{n_k}^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2\right) \\
&=\; \liminf_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2 + \theta_{n_k}^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2\right).
\end{aligned}$$

Assim, por (4.38) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 = \sigma. \tag{4.39}$$

Mas como $\sigma \leq \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$, $\forall\, u \in W$ com $\|u\|_{L^2}^2 = 1$, então para $u = u_0$ tem-se

$$\sigma \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2. \tag{4.40}$$

Portanto, de (4.39) e (4.40) obtemos

$$\sigma = \int_\Omega |\nabla u_0|^2.$$

Além disso, como a aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : W & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & F(v) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \end{array}$$

é Fréchet diferenciável, temos

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \sigma \int_\Omega uv\,, \quad \forall\, u, v \in W$$

o que equivale pelas identidades de Green

$$\begin{cases} -\Delta u = \sigma u\,, \quad \text{em } \Omega \\ u = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

Logo, dos Problemas (4.33) e (4.41) obtem-se $\sigma = \mu_i - 1$. Por tanto

$$Lu = \frac{1}{\mu_i}u = \frac{1}{1+\sigma}u. \tag{4.42}$$

Agora, de (4.36) temos

$$\frac{1}{\mu_1} = \sup_{\substack{f\in L^2(\Omega)\\ \|f\|_{L^2}=1}} \big(Lf, f\big)_{L^2} \geq \big(Lf, f\big)_{L^2}, \quad \forall\, f \in L^2(\Omega) \quad \text{com} \quad \|f\|_{L^2} = 1 \tag{4.43}$$

e como $u_0 \in W \subset H^1 \subset L^2(\Omega)$ com $\|u_0\|_{L^2} = 1$, então para $f = u_0$ obtemos de (4.42) e

(4.43) que

$$\frac{1}{1+\sigma} = \big(Lu_0, u_0\big)_{L^2} \le \sup_{\substack{f\in L^2(\Omega)\\ \|f\|_{L^2}=1}} \big(Lf, f\big)_{L^2} = \|L\| = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{1+\lambda_1^*},$$

e assim $\sigma \ge \lambda_1^*$.

Para mostrar que $\sigma \le \lambda_1^*$, é suficiente lembrar que se u_1 é uma autofunção do Problema (4.26) associado a λ_1^* e satisfazendo $\displaystyle\int_\Omega |u_1|^2 = 1$, temos $\dfrac{1}{\mu_1} = \big(Lu_1, u_1\big)$ e

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 = \mu_1 u\,, \quad \text{em}\,\Omega \\ u_1 = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre}\;\; \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Multiplicando na primeira igualdade de (4.44) por u_1, e utilizando uma das identidades de Green temos:

$$\sigma \le \int_\Omega |\nabla u_1|^2 = (\mu_1 - 1)\int_\Omega u^2 = \mu_1 - 1 = \lambda_1^*.$$

Portanto $\sigma = \lambda_1^*$.

De um modo análogo mostra-se que

$$\lambda_i^* = \inf_{\substack{u\in W\\ u\neq 0\\ \int_\Omega uv_j = 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} = \inf_{\substack{u\in W\\ \|u\|_{L^2}=1\\ \int_\Omega uv_j=0}} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Agora, mostremos a segunda parte do lema.

i. Como $H_0^1(\Omega) \subset W$ então

$$\lambda_1^* = \inf_{\substack{u\in W\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \le \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda_1.$$

Portanto $\quad 0 \le \lambda_1^* \le \lambda_1$.

ii. Se φ é constante, então $\lambda_1^* = 0$ é um autovalor do Problema (4.26).

De fato: como

$$0 \le \lambda_1^* = \inf_{\substack{u\in W\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} \le \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}, \quad \forall\, u\in W,$$

então, como $u = \theta\varphi$, para $\varphi = cte$ temos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0$. Portanto, $\lambda_1^* = 0$.

Reciprocamente, se $\lambda_1^* = 0$, então $\mu_1 = 1$, pois $\lambda_1^* = \mu_1 - 1$. Assim para $\mu_1 = 1$, existe

$v \in L^2(\Omega)$, $v \neq 0$, tal que $Lv = \dfrac{1}{\mu_1} v = v$ e além disso, v satisfaz (4.33); isto é,

$$\begin{cases} -\Delta v = 0\,, \quad \text{em}\, \Omega \\ v = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre } \ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.45}$$

Portanto, utilizando uma das formulas de Green obtemos

$$0 = -\int_\Omega \Delta v.v = \|\nabla v\|^2_{L^2},$$

o que implica $v = cte$ q.t.p. em Ω e assim $\varphi = cte$.

Só resta mostrar que se φ é constante então $\lambda_1 < \lambda_2^* \leq \lambda_2$.

A demonstração será feita em duas partes.

Parte I: Mostrar $\lambda_1 < \lambda_2^* = \mu_2 - 1$.

Suponha, por absurdo, que $\lambda_1 \geq \lambda_2^*$, então $1 < \mu_2 \leq \lambda_1 + 1$, pois $1 = \mu_1 < \mu_2$ ja que $\varphi = cte$. Logo, para μ_2, existe $v_2 \neq 0$ tal que $v_2 = \mu_2 L v_2 = L(\mu_2 v_2)$ e além disso, v_2 satisfaz (4.33), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta v_2 = (\mu_2 - 1)v_2\,, \quad \text{em}\, \Omega \\ v_2 = \theta\varphi\,, \quad \text{sobre } \ \partial\Omega, \text{ com } \varphi = cte \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_2}{\partial \eta}\varphi = 0. \end{cases} \tag{4.46}$$

Como $v_2 \in W$ e $\theta\psi \in W$, pois $\theta\psi|_{\partial\Omega} = \theta\varphi$, então $v_2 - \theta\psi \in W$. Logo, da primeira igualadade de (4.46) obtemos

$$-\int_\Omega \Delta v_2.(v_2 - \theta\psi) = (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_2(v_2 - \theta\psi).$$

Seja $v_0 = v_2 - \theta\psi$, então $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Como $\Delta v_2 = \Delta v_0$, então

$$-\int_\Omega \Delta v_0.v_0 = (\mu_2 - 1)\int_\Omega (v_0 + \theta\psi)v_0.$$

Notar que

$$-\int_\Omega \Delta v_0.v_0 = \int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \eta} v_0 = \int_\Omega |\nabla v_0|^2,$$

e

$$\begin{aligned}(\mu_2 - 1)\int_\Omega (v_0 + \theta\psi)v_0 &= (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0^2 + (\mu_2 - 1)\theta\psi\int_\Omega v_0\\ &= (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0^2 + (\mu_2 - 1)\theta\psi\int_\Omega (v_2 - \theta\psi)\\ &= (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0^2 + \theta\psi\int_\Omega (\mu_2 - 1)v_2 - (\mu_2 - 1)\theta^2\psi^2|\Omega|\\ &= (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0^2 + \theta\psi\int_\Omega \Delta v_2 - (\mu_2 - 1)\theta^2\psi^2|\Omega|.\end{aligned}$$

Usando uma das formulas de Green, sendo $v_2 = \theta\psi$ sobre $\partial\Omega$ com $\varphi = cte$, temos

$$\int_\Omega \Delta v_2 = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v_2}{\partial\eta} = 0,$$

e assim

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 = (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0^2 - (\mu_2 - 1)\theta^2\psi^2|\Omega|,$$

mas $\mu_2 - 1 \leq \lambda_1$, portanto

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 \leq \lambda_1\int_\Omega v_0^2 - (\mu_2 - 1)\theta^2\psi^2|\Omega| \tag{4.47}$$

Como λ_1 é um autovalor do problema de Dirichlet homogêneo, então o autovalor principal λ_1 é dado por

$$\lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\Phi_1|^2}{\displaystyle\int_\Omega |\Phi_1|^2} = \min_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}\,, \quad \forall\, u\in H_0^1(\Omega)\,,\ \ u\neq 0.$$

Em particular para $u = v_0$, pois $v_0 \neq 0$, temos

$$\lambda_1\int_\Omega v_0^2 \leq \int_\Omega |\nabla v_0|^2, \tag{4.48}$$

e assim de (4.47) e (4.48) obtemos

$$\theta^2\psi^2(\mu_2 - 1)|\Omega| \leq 0\,, \quad \forall\theta\in\mathbb{R},$$

o que implica que $\theta = 0$. Neste caso $v_0 = v_2$, e além disso de (4.47) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 \leq \lambda_1\int_\Omega v_0^2,$$

e assim

$$\lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\displaystyle\int_\Omega v_0^2},$$

o que implica que v_0 é autofunção de λ_1. Logo de (4.46) tem-se $\mu_2 - 1 = \lambda_1$ e $v_0 = c\Phi_1$ para algum $c \neq 0$. Mas como Φ_1 tem sinal definido, isto é uma contradição, pois,

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = (\mu_2 - 1)\int_\Omega v_0.$$

Portanto $\lambda_1 < \lambda_2^*$.

Parte II: Agora vai-se mostrar que $\lambda_2^* \leq \lambda_2$.

De (4.35) temos

$$\lambda_2^* = \inf_{\substack{u \in W \\ \int_\Omega u u_1 = 0 \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2},$$

portanto

$$\lambda_2^* \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall\, u \in W\,, \text{ com } \int_\Omega u = 0. \tag{4.49}$$

Seja $w = \phi_1 + t\phi_2$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são as autofunções correspondentes a λ_1 e λ_2 dadas ao inicio da seção, com $t = -\dfrac{\displaystyle\int_\Omega \phi_2}{\displaystyle\int_\Omega \phi_1}$. Logo $\displaystyle\int_\Omega w = 0$ e como $w \in W$,já que $\Phi_1, \Phi_2 \in W$, então de (4.49) segue

$$\lambda_2^* \int_\Omega w^2 \leq \int_\Omega |\nabla w|^2\,. \tag{4.50}$$

Mas, como $\displaystyle\int_\Omega \phi_1\phi_2 = 0$, ja que ϕ_1 e ϕ_2 são autofunções ortogonais em $L^2(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega w^2 = t^2 \int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega \phi_2^2,$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w|^2 &= t^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 + \int_\Omega |\nabla \phi_2|^2 + 2t \int_\Omega \nabla\phi_1.\nabla\phi_2 \\
&= t^2\lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 + \lambda_2 \int_\Omega \phi_2^2 + 2t\lambda_1 \int_\Omega \phi_1\phi_2 \\
&= t^2\lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 + \lambda_2 \int_\Omega \phi_2^2.
\end{aligned}$$

Logo, de (4.50) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_2^* t^2 \int_\Omega \phi_1^2 + \lambda_2^* \int_\Omega \phi_2^2 &\leq t^2 \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 + \lambda_2 \int_\Omega \phi_2^2 \\ &\leq t^2 \lambda_2^* \int_\Omega \phi_1^2 + \lambda_2 \int_\Omega \phi_2^2,\end{aligned}$$

pois $\lambda_1 < \lambda_2^*$, o que implica $\lambda_2^* \leq \lambda_2$. ■

Mostrado já o lema anterior, apresentamos agora o teorema que garante a unicidade para o problema dado.

4.2.1 Teorema de unicidade

Teorema 4.5. (Teorema de Unicidade)
Se K verifica a condição (HE), então o Problema (4.5a) admite solução única para todo $\lambda \in \bigwedge$ tal que $\lambda < \lambda_1$. Além disso, se φ é uma constante, então o Problema (4.5a) admite solução única se $\lambda < \lambda_2^*$.

Demonstração: Como a existência da solução está garantido pela condição (HE), então so resta mostrar a unicidade. A primeira parte do teorema será mostrado em dois casos.
Caso I: Quando $\lambda < 0$
Lembar que o funcional

$$e(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \lambda \int_\Omega (w - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} w) P_{K_\lambda} w$$

definido na demonstração do Teorema 4.2 possui mínimo, e este é solução para o Problema (4.5). Mas como $e(w)$ é estritamente convexo, pelo Teorema 2.4 a solução é única.
Caso II: Se $0 < \lambda < \lambda_1$, $\lambda \in \bigwedge$
Sejam $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ duas soluções para o Problema (4.5a) tal que $w_1 - w_2 \neq 0$. Já que λ_1 é um autovalor principal do problema de Dirichlet homogêneo, então

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2}{\displaystyle\int_\Omega |v|^2} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2}{\displaystyle\int_\Omega |v|^2}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{com} \quad v \neq 0.$$

Como $w_1 - w_2 \in H_0^1(\Omega)$, então para $v = w_1 - w_2$ temos

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Omega |w_1 - w_2|^2 &\leq \int_\Omega |\nabla (w_1 - w_2)|^2 \\ &= -\int_\Omega \Delta(w_1 - w_2).(w_1 - w_2),\end{aligned}$$

e como $-\Delta w_i = \lambda P_{K_\lambda} w_i$, $i = 1, 2$, então

$$\lambda_1 \int_\Omega |w_1 - w_2|^2 \le \lambda \int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\big)(w_1 - w_2).$$

Pela desigualdade de Hölder e a propriedade de ser P_{K_λ} não expansiva obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 = \lambda_1 \int_\Omega |w_1 - w_2|^2 &\le \lambda \|P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\|_{L^2} \|w_1 - w_2\|_{L^2} \\ &\le \lambda \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

o que implica

$$(\lambda_1 - \lambda)\|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 \le 0,$$

mas isto é uma contradição, pois $\lambda < \lambda_1$ e $w_1 - w_2 \neq 0$. Portanto $w_1 = w_2$.

Agora vai-se mostrar a segunda parte:

Suponha que $\varphi = cte \neq 0$ e $\lambda \in \bigwedge$ tal que $0 < \lambda < \lambda_2^*$.

Sejam $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ soluções para o Problema (4.5a) e sejam $v_i = w_i - t_i$ com $t_i = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega w_i$, $i = 1, 2$.

Note que $v_i|_{\partial\Omega} = w_i|_{\partial\Omega} - t_i = -t_i = \theta\varphi$, onde $\theta = -\dfrac{t_i}{\varphi}$, então $v_i \in W$.

Como $v_1, v_2 \in W_0 = \left\{ v \in W : \displaystyle\int_\Omega v = 0 \right\}$, temos que $v_1 - v_2 \in W_0$. Assim de (4.49) temos para $u = v_1 - v_2$

$$\lambda_2^* \|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 = \lambda_2^* \int_\Omega |v_1 - v_2|^2 \le \int_\Omega |\nabla(v_1 - v_2)|^2.$$

Como $\nabla v_i = \nabla w_i$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} \lambda_2^* \|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 &\le \int_\Omega |\nabla(w_1 - w_2)|^2 \\ &= -\int_\Omega \Delta(w_1 - w_2).(w_1 - w_2) + \int_\Omega \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial\eta}(w_1 - w_2) \\ &= \int_\Omega \big(-\Delta w_1 + \Delta w_2\big)\big(v_1 + t_1 - v_2 - t_2\big) \\ &= \lambda \int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\big)(v_1 - v_2) + (t_1 - t_2)\lambda \int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\big). \end{aligned}$$

Como $P_{K_\lambda} w_i \in K_\lambda$, então da definição de K_λ temos

$$\int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\big) = \int_\Omega P_{K_\lambda} w_1 - \int_\Omega P_{K_\lambda} w_2 = \frac{I}{\lambda\psi} - \frac{I}{\lambda\psi} = 0\,, \quad \text{já que} \quad \psi = cte \neq 0,$$

e assim

$$\lambda_2^* \|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 \le \int_\Omega |\nabla(w_1 - w_2)|^2 = \lambda \int_\Omega \big(P_{K_\lambda} w_1 - P_{K_\lambda} w_2\big)(v_1 - v_2). \tag{4.51}$$

Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\lambda_2^*\|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 \leq \lambda\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|_{L^2}\|v_1 - v_2\|_{L^2},$$

e como $v_1 \neq v_2$, então

$$\|v_1 - v_2\|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{\lambda_2^*}\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|_{L^2}. \tag{4.52}$$

Agora, observe que de (4.51) e (4.52) obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\nabla(w_1 - w_2)|^2 = \lambda \int_\Omega \big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big)(v_1 - v_2), \\ &\leq \lambda\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|_{L^2}\|v_1 - v_2\|_{L^2}, \\ &\leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*}\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Por outro lado, para w_1 e w_2 temos pelo Teorema 3.5

$$\int_\Omega \big(w_1 - P_{K_\lambda}w_1\big)\big(z - P_{K_\lambda}w_1\big) \leq 0, \tag{4.54}$$

$$\int_\Omega \big(w_2 - P_{K_\lambda}w_2\big)\big(z - P_{K_\lambda}w_2\big) \leq 0, \tag{4.55}$$

para todo $z \in K_\lambda$.

Em particular, fazendo $z = P_{K_\lambda}w_2$ em (4.54) e $z = P_{K_\lambda}w_1$ em (4.55) obtemos

$$\int_\Omega \big(w_1 - P_{K_\lambda}w_1\big)\big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big) \geq 0,$$

$$\int_\Omega \big(P_{K_\lambda}w_2 - w_2\big)\big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big) \geq 0.$$

Logo, somando as duas últimas desigualdades obtemos

$$\int_\Omega \big(w_1 - w_2 - P_{K_\lambda}w_1 + P_{K_\lambda}w_2\big)\big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big) \geq 0,$$

e assim

$$\int_\Omega \big(w_1 - w_2\big)\big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big) \geq \|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|_{L^2}^2. \tag{4.56}$$

Como

$$\begin{aligned} \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\nabla(w_1 - w_2)|^2 \\ &= \int_\Omega \big(-\Delta w_1 + \Delta w_2\big)\big(w_1 - w_2\big) \\ &= \lambda\int_\Omega \big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big)\big(w_1 - w_2\big), \end{aligned}$$

então, utilizando (4.53) e (4.56) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|^2_{L^2} &\leq \lambda\int_\Omega \big(w_1-w_2\big)\big(P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\big)\\ &= \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|^2_{L^2}\\ &\leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*}\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\big(1-\frac{\lambda}{\lambda_2^*}\big)\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|^2_{L^2} \leq 0,$$

já que por hipótese $0<\lambda<\lambda_2^*$, então $0<\dfrac{\lambda}{\lambda_2^*}<1$ e portanto

$$\|P_{K_\lambda}w_1 - P_{K_\lambda}w_2\|^2_{L^2} = 0,$$

o que implica que $P_{K_\lambda}w_1 = P_{K_\lambda}w_2$ e assim

$$\Delta w_1 = \Delta w_2.$$

Portanto, pelo princípio do máximo, obtemos que $w_1 = w_2$. ■

Note que o Teorema 4.5 só garante a unicidade do Problema (4.5a). Portanto, para obter a unicidade do Problema (4.1), pelo Lema 4.1, precissamos também a unicidade de θ.

Observação 4.4. Da Observação 4.1 note que da unicidade de w obemos a unicidade de θ. Portanto, quando K é um cone centrado na origem, o Problema (4.1) tem solução única se satisfaz as hipótesis do Teorema 4.5.

Num caso mais geral, quando K é um conjunto fechado convexo, para poder garantir a unicidade do Problema 4.5, é necessário impor condições sobre K para poder garantir a unicidade de θ.

Um conjunto K fechado e convexo num espaço de Hilbert H satisfaz a condição (HU) relativamente a ψ se, para todo $u \in H$, a função

$$\tau_u(\theta) = \big(P_K(u+\theta\psi),\psi\big)_H = \int_\Omega P_K(u+\theta\psi)\psi$$

é estritamente crescente no conjunto

$$\big]L_1(u),L_2(u)\big[\setminus\{\theta:\tau_u(\theta)=0\} = \{\theta\in\mathbb{R}: l_1<\tau_u(\theta)<l_2 \ \text{ e } \ \tau_u(\theta)\neq 0\},$$

onde

$$L_1(u) = \inf\{\theta : l_1 < \tau_u(\theta)\}$$

é menor que

$$L_2(u) = \{\tau_u(\theta) < l_2\}.$$

Lema 4.6. Seja K um cone fechado centrado na origem num espaço de Hilbert H. Então K satisfaz a condição (HU) relativamente a ψ, para todo $u \in H$.

Demonstração: Como $\tau_u(\theta)$ é uma função crescente para todo $u \in H$, então é suficiente mostrar que:
Se $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = l$, com $l \neq 0$. então $\theta_1 = \theta_2$.
Com efeito: Suponha $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = l \neq 0$, para θ_1 e θ_2 qualquer, então

$$\big(P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi), \psi\big)_H = 0 \tag{4.57}$$

Pelo Teorema 3.5 temos

$$\big(u+\theta_1\psi - P_K(u+\theta_1\psi), g - P_K(u+\theta_1\psi)\big)_H \leq 0, \quad \forall\, g \in K \tag{4.58}$$

$$\big(u+\theta_2\psi - P_K(u+\theta_1\psi), g - P_K(u+\theta_2\psi)\big)_H \leq 0, \quad \forall\, g \in K \tag{4.59}$$

Fazendo $g = P_K(u+\theta_2\psi$ em (4.58) e $g = P_K(u+\theta_1\psi$ em (4.59) e somando obtemos

$$\big((\theta_2-\theta_1)\psi + P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi), P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)\big)_H \leq 0,$$

e assim

$$\big(\theta_2-\theta_1\big)\big(\psi, P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)\big)_H + \|P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)\|_H^2 \leq 0.$$

Portanto, utilizando (4.57) obtemos

$$P_K(u+\theta_1\psi) = P_K(u+\theta_2\psi). \tag{4.60}$$

Como K é um cone num espaço de Hilbert H, então pelo Teorema 3.9, parte (v), temos

$$\big(v, P_K v\big)_H = \|P_K v\|_H^2, \quad \forall\, v \in H,$$

e portanto

$$\big(u+\theta_i\psi, P_K(u+\theta_i\psi)\big)_H = \|P_K(u+\theta_i\psi)\|_H^2, \quad i = 1, 2. \tag{4.61}$$

Logo de (4.60) e (4.61) obtemos

$$\big(u+\theta_1\psi, P_K(u+\theta_1\psi)\big)_H = \big(u+\theta_2\psi, P_K(u+\theta_2\psi)\big)_H,$$

e assim

$$(\theta_1-\theta_2)l = 0.$$

Portanto $\theta_1 = \theta_2$, pois $l \neq 0$. ■

Com a condição (HU) imposta sobre o conjunto K, apresentamos agora o seguinte resultado geral de unicidade para o Problema (4.1).

Corolário 4.7. Se K satisfaz a condição (HU) relativamente a ψ, então, sob a hipótese do Teorema 4.5 o Problema (4.1) possui uma única solução $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $(w_1, \theta_1), (w_2, \theta_2) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ soluções do Problema (4.5). Agora pelo Lema 4.1 estas soluções devem satisfazer

$$u_1 = w_1 + \theta_1 \psi \qquad \text{e} \qquad u_2 = w_2 + \theta_2 \psi,$$

onde u_1 e u_2 são soluções do Problema (4.1). Assim

$$\tau_{w_1}(\theta_1) = \int_\Omega P_K(w_1 + \theta_1 \psi)\psi = \int_\Omega P_K(u_1)\psi = \frac{I}{\lambda}$$

$$\tau_{w_2}(\theta_2) = \int_\Omega P_K(w_2 + \theta_2 \psi)\psi = \int_\Omega P_K(u_2)\psi = \frac{I}{\lambda}$$

o que implica $\tau_w(\theta_1) = \tau_{w_1}(\theta_1) = \tau_{w_2}(\theta_2) = \tau_w(\theta_2)$, pois $w = w_1 = w_2$ pelas hipótese do Teorema 4.5.

Agora, como K satisfaz a condição (HU), então τ_w é estritamente crescente e portanto τ_w é injetor, o que implica $\theta_1 = \theta_2$.

Logo, a solução do Problema (4.5) é única e portanto, a solução do Problema (4.1) também é única. ■

4.3 OBSERVAÇÕES SOBRE A REGULARIDADE DA SOLUÇÃO

Observe que neste trabalho o objetivo principal é mostrar que o Problema (4.1) com certas condições impostas tem solução num sentido fraco e além disso, ela é única. Para obter uma solução no sentido forte é necessário condições de regularidade que vai ser dada no que segue, mas como este não era o propósito do trabalho não faremos um estudo detalhado desta parte.

Observe que se w é solução do Problema (4.5) então

$$w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Portanto, se u é solução de (4.1) temos

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\psi.$$

Se $\varphi \in H^{3/2}(\Omega)$, então $\psi \in H^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$.

Este resultado não pode ser melhorado sem ter hipótese de regularidade sobre K. Isto é o que vamos fazer a seguir.

Suponhamos que K satisfaz a seguinte hipótese de regularidade (HR):
Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $P_K(u) \in W^{1,p}(\Omega)$, para todo p, $1 \leq q < +\infty$.
Con esta hipótese sobre K temos o seguinte resultado:

Teorema 4.8. Seja Ω um aberto, limitado e regular de $\mathbb{R}^n$ (com $n = 2$ ou $n = 3$, Ω satisfazendo a condição de lipschitz local), e $\varphi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$. Se K satisfaz a hipótese (HR) e (w, θ) é uma solução de (4.5), então

$$w \in W^{3,q}(\Omega)$$

para todo q, $1 \leq q \leq 6$ se $n = 3$, $1 \leq q < +\infty$ se $n = 2$. Portanto

$$w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

para todo α, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ se $n = 3$, $0 \leq \alpha < 1$ se $n = 2$.

Demonstração: Seja (w, θ) solução de (4.5), então $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Além disso, como $\varphi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$, temos que $\psi \in H^3(\Omega) \subset H^2(\Omega)$. Portanto

$$u = w + \theta\psi \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega),$$

e pela hipótese (HR)

$$P_K(u) \in H^1(\Omega).$$

Pelo Lema 4.1 temos $P_{K_\lambda}(u) = P_K(u) \in H^1(\Omega)$,
obtendo assim

$$w \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega),$$

deste modo $u \in H^3(\Omega)$.
Pelos Corolários 1.31 e 1.32 temos que

$$H^3(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{1,q}(\Omega),$$

para todo q tal que $1 \leq q \leq 6$ se $n = 3$, $1 \leq q < +\infty$ se $n = 2$.
Novamente, pela hipótese (HR) temos

$$P_{K_\lambda}(u) = P_K(u) \in W^{1,q}(\Omega),$$

e asim

$$w \in W^{3,q}(\Omega).$$

Pelos teoremas de imersão de Sobolev

$$W^{3,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{2,\alpha}(\Omega),$$

com $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ se $n = 3$ ou $0 \leq \alpha < 1$ se $n = 2$.
Portanto $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. ∎

5 CONCLUSÕES

Este trabalho tem como objetivo de provar que o problema dado por (4.1) tem solução única. Para esta finalidade foi tomado o seguinte caminho: formular um problema equivalente e estabelecer condições para que este problema possua solução e além disso seja única.

A abordagem do problema foi muito interessante, pois permitiu relacionar conceitos como inequações variacionais, subdiferencial, diferencial de Gâteaux e Fréchet. Com todos estes conceitos se consegue mostrar que o problema de inequação variacional associado ao problema equivalente possui solução num sentido fraco e além disso esta solução esta dada por meio de um problema de minimização.

O estudo do problema de autovalor, feito na Seção (4.2), foi necessário pois restringiu os valores para λ, possibilitando assim concluir que a solução para o Problema (4.5a) é única só para alguns valores de λ e não para qualquer valor real.

Também devo salientar a importância de estabelecer condições para a existência e unicidade, (HE) e (HU) respectivamente, porque sem eles não teriam conseguido o objetivo deste trabalho.

O modelo dado em (4.1) permitiu o estudo de problemas que de alguma forma generalizam um problema de plasma confinado.

A solução do problema (4.1) só foi garantida para $l_1 < \dfrac{I}{\lambda} < l_2$. No caso limite; isto é, $\dfrac{I}{\lambda} = l_1$ ou $\dfrac{I}{\lambda} = l_2$, não podemos garantir em geral a existência da solução.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] BARTLE, R. G. *The elements of integration an lebesgue measure*. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[3] BERESTYCKI, H.; BRÉZIS, H. On a free boundary problem arising in plasma physics. *Nonlinear Anal th. Meth.* Appl. 4, 2006, 415-436.

[4] BRÉZIS, H. *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A, Madrid, 1984.

[5] CIPOLATTI, R. *Considerations sur un probleme non lineaire: l'equilibre d'un plasma confiné.* These Docteur 3e cycle, Université de Paris XI, 1982.

[6] CIPOLATTI. On a non-linear boundary value problem; the equilibrium of a confined plasma. *Physica*, vol 13, 1984, p. 181-194.

[7] CIPOLATTI, R.; LÓPEZ, J. *Iniciação à física matemática. Modelagem de processos e métodos de solução.* Impa, Rio de Janeiro, 2009.

[8] DE MAGALHÃES, I.V; IÓRIO, J.R. *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Projeto Euclides, 1988.

[9] EKELAND, I.; TÉMAM, R. *Convex analysis and variational problems.* Siam, Philadelphia, 1999.

[10] FIGUEIREDO, D.G.; HÖNING, C.S. *Diferential equations.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[11] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 1998.

[12] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. *An Introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press, New York, 1980.

[13] KREYSZIG, E. *Functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[14] PUEL, J. A free boundary nonlinear eigenvalue problem. *Proc.of the Int, Symposium on Cont. Mech. and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro, G. M. de la Penha and L. A. Medeiros, eds.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[15] TEMAM, R. A nonlinear eigenvalue problem-the shape at equilibrium of a confined plasma. *Arch. Rat. Met. Anal.*, 60, 1976.

[16] TEMAM, R. Remarks on a free boundary value problem in plasma phisics. *comm. in P.D.E. 2*. 1977, 563.

[17] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications. Vol III, Variational methods and optimization*. Springer-Verlag, New York, 1984.