

Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Stiw Harrison Herrera Taipe

**Modelagem computacional do escoamento bifásico em um meio poroso
aquecido por ondas eletromagnéticas**

Juiz de Fora

2018

Stiw Harrison Herrera Taipe

**Modelagem computacional do escoamento bifásico em um meio poroso
aquecido por ondas eletromagnéticas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Taipe, Stiw Harrison Herrera .

Modelagem computacional do escoamento bifásico em um meio poroso aquecido por ondas eletromagnéticas / Stiw Harrison Herrera Taipe. – 2018. 79 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Dissertação (Mestrado acadêmico) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2018.

1. Escoamento em Meios Porosos. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Leis de Conservação. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Igreja, Iury Higor Aguiar da, coorient, III. Título.

Stiw Harrison Herrera Taipe

**Modelagem computacional do escoamento bifásico em um meio poroso
aquecido por ondas eletromagnéticas.**

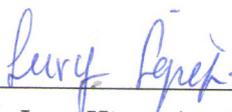
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 26 de Janeiro de 2018.

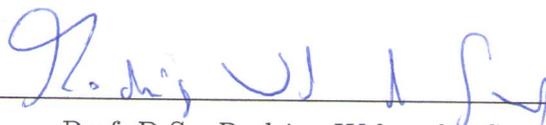
BANCA EXAMINADORA



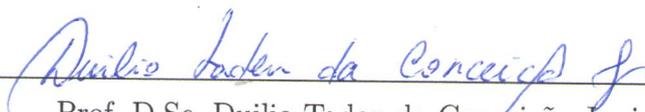
Prof. D.Sc. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Iury Higor Aguiar da Igreja - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Rodrigo Weber dos Santos
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Duilio Tadeu da Conceição Junior
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho a toda minha família, especialmente para meu filho Matthew Steve Herrera Peceros a maior benção que Deus me deu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos na minha vida, a minha família, meus amigos mais próximos e as pessoas maravilhosas que conheci nesta experiência da Pós-graduação. Agradeço: ao meu orientador Dr. Grigori Chapiro pela paciência e confiança no desenvolvimento desta dissertação; ao meu coorientador Dr. Iury Igreja pela disponibilidade, interesse em colaborar sugerindo melhorias neste trabalho; ao Dr. Vitor Matos da Universidade do Porto pela paciência e disposição em responder as perguntas decorrentes do trabalho; ao professor Abimael Fernando Dourado Loula pelos seus conhecimentos brindados; aos demais professores do programa de pós-graduação da UFJF com os quais interagi e aprendi durante o tempo de mestrado; aos colegas da Pós-graduação pelo privilégio de poder conviver e aprender ideais assim como pelos momentos compartilhados; em especial ao colega do projeto de pesquisa Pavel Zenon Sejas Paz pela disposição, ajuda e assessoria na investigação. Preciso agradecer a motivação que recebi desde a minha infância por parte da minha mãe, Carmen Taipe Campos pelo seu amor, dedicação e por todo seu apoio na minha vida; meu pai, Heber Jesús Herrera Perez pela motivação a seguir estudando; aos meus tios Carlos Herrera, Amador Rojas, Cristina Herrera, Gloria Herrera por sempre acreditarem em mim; agradeço aos membros da banca pela rigorosidade, ideias e sugestões que contribuíram na melhoria deste trabalho. À Capes pela bolsa concedida durante o curso de mestrado.

‘ A natureza está escrita em linguagem matemática. ’
Galileo Galilei.

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados em estudar, mediante simulações computacionais, se o aquecimento eletromagnético é capaz de melhorar o deslocamento do óleo pela água. Nesta direção, nos baseamos nos resultados obtidos pela equipe da TU Delft da Holanda, que desenvolveu experimentos de laboratório que demonstravam a distribuição da temperatura em um meio poroso, onde o óleo está sendo deslocado pela injeção de água, gerada por aquecimento eletromagnético. Para tanto, definimos o modelo matemático que governa o problema em questão regido por equações diferenciais parciais das leis de conservação de massa e energia. Assim, partindo da caracterização do contínuo e estendendo a lei de Darcy para o caso multifásico, através da introdução do conceito de permeabilidades relativas dos fluidos, derivamos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis e termos não lineares formulados em função da velocidade de Darcy para o escoamento bifásico (água, óleo) aquecido por ondas eletromagnéticas. O modelo matemático é discretizado utilizando o método de diferenças finitas no tempo e no espaço e a técnica *Splitting*. Dessa forma dividimos o sistema de equações diferenciais parciais em dois subsistemas. O primeiro subsistema consiste em resolver a parte difusiva e reativa e o segundo subsistema tem por objetivo a resolução do termo convectivo. O método numérico desenvolvido é validado por simulações computacionais que visam a comparação com os resultados obtidos experimentalmente e com soluções semi-analíticas, para este problema, que foram derivadas pelo método do princípio de Duhamel. Além disso, o método proposto quando aplicado para o caso geral da simulação do escoamento bifásico com aquecimento eletromagnético demonstrou um ganho de 1.67%, se comparado ao método sem aquecimento.

Palavras-chave: Escoamento em Meios Porosos, Equações Diferenciais Parciais, Leis de Conservação, Escoamento Bifásico, Aquecimento Eletromagnético.

ABSTRACT

In this work we are interested in studying, through computational simulations, if the electromagnetic heating is able to improve the displacement of the oil by water. In this direction, we rely on the results obtained by the TU Delft team from the Netherlands, which developed laboratory experiments that demonstrated the temperature distribution in a porous medium where the oil is being displaced by the injection of water generated by electromagnetic heating. For this, we define the mathematical model that governs the problem in question governed by partial differential equations of the laws of conservation of mass and energy. Thus, starting from the characterization of the continuum and extending Darcy's law to the multiphase case, by introducing the concept of relative permeabilities of fluids, we derive a coupled system of partial differential equations with variable coefficients and non-linear terms formulated as a function of the velocity of Darcy for two-phase flow (water, oil) heated by electromagnetic waves. The mathematical model is discretized using the finite difference method in time and space and the *Splitting* technique. In this way we divide the system of partial differential equations into two subsystems. The first subsystem consists of solving the diffusive and reactive part and the second subsystem aims to solve the convective term. The numerical method developed is validated by computational simulations aimed at the comparison with the results obtained experimentally and with semi-analytical solutions, for this problem, which were derived by the Duhamel principle method. In addition, the proposed method when applied to the general case of simulation of the biphasic flow with electromagnetic heating demonstrated a gain of 1.67%, when compared to the non-heating method.

Keywords: Porous Media, Partial Differential Equation, Conservation Laws, Biphasic Flow, Electromagnetic Heating.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Experimento construído pela equipe da TU Delft.	19
Figura 2 – Caixa de faraday	20
Figura 3 – Guia de ondas eletromagnéticas	20
Figura 4 – Gerador de ondas eletromagnéticas	21
Figura 5 – Sensor acoplado ao meio poroso	21
Figura 6 – Incremento da temperatura para os experimentos 1, 2 e 3	22
Figura 7 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 4	23
Figura 8 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 6	24
Figura 9 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 7	25
Figura 10 – Produção de óleo	25
Figura 11 – Fator de recuperação do óleo	26
Figura 12 – Esquema geométrico representando o meio poroso.	27
Figura 13 – Figura ilustrativa do meio poroso com as fases: água e óleo	28
Figura 14 – Calor específico total do sistema (C_{tot}) em função da saturação e da temperatura	37
Figura 15 – Calor específico total do líquido (C_{liq}) em função da temperatura saturação	37
Figura 16 – Calor específico total do líquido (C_{liq}) em função da temperatura. . . .	37
Figura 17 – Comportamento da condutividade térmica do sistema(K_{tot}) que depende da saturação e da temperatura.	38
Figura 18 – Função de fluxo fracionário com a temperatura e saturação.	39
Figura 19 – Variação da função de fluxo fracionário com a temperatura.	39
Figura 20 – Permeabilidades relativas da água e óleo	40
Figura 21 – Comportamento da absorção para diferentes saturações	41
Figura 22 – Estêncil do método de Crank-Nicolson	45
Figura 23 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica do experimento 1.	53
Figura 24 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica sem perdas térmicas. . . .	54
Figura 25 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica com perdas térmicas. . . .	54
Figura 26 – Simulação numérica Vs Solução analítica do escoamento bifásico. . . .	55
Figura 27 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha continua) do experimento 1.	57
Figura 28 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha continua) do experimento 4 sem perdas térmicas.	59
Figura 29 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha continua) do experimento 4 com perdas térmicas.	60
Figura 30 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha continua) do experimento 4 sem perdas térmicas.	61
Figura 31 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha continua) do experimento 4 com perdas térmicas	62

Figura 32 – Saturação da água antes do <i>Breakthrough</i>	63
Figura 33 – Saturação da água no momento do <i>Breakthrough</i>	63
Figura 34 – Saturação da água no tempo 1 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 35 – Saturação da água no tempo 2 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 36 – Saturação da água no tempo 3 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 37 – Saturação da água no tempo 4 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 38 – Saturação da água no tempo 5 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 39 – Saturação da água no tempo 6 PV sem aquecimento EM.	64
Figura 40 – Fator de recuperação do experimento 5	65
Figura 41 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica(linha contínua) do experi- mento 7	66
Figura 42 – Saturação da água antes do <i>Breakthrough</i>	67
Figura 43 – Saturação da água no momento do <i>Breakthrough</i>	67
Figura 44 – Saturação da água no tempo 1 PV com aquecimento EM	67
Figura 45 – Saturação da água no tempo 2 PV com aquecimento EM.	67
Figura 46 – Saturação da água no tempo 3 PV com aquecimento EM.	68
Figura 47 – Saturação da água no tempo 4 PV com aquecimento EM.	68
Figura 48 – Saturação da água no tempo 5 PV com aquecimento EM.	68
Figura 49 – Saturação da água no tempo 6 PV com aquecimento EM.	68
Figura 50 – Comparação do fator de recuperação dos experimentos 7 e 5.	69
Figura 51 – Saturação no tempo 1PV	69
Figura 52 – Saturação no tempo 6 PV	69
Figura 53 – Curva de fluxo Buckley-Leverett	76
Figura 54 – C_{tot}	78
Figura 55 – C_{liq}	78
Figura 56 – K_{tot}	78
Figura 57 – f_w	78
Figura 58 – Variação dos coeficientes	78
Figura 59 – Distribuição da saturação para duas viscosidades diferentes	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros	42
Tabela 2 – Porcentagem do método térmico.	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EOR	Enhanced Oil Recovery.
EDP	Equação Diferencial Parcial.
EM	Electromagnético.
GHz	Gigahercio.
MW	Microondas(em termos de comprimento de onda).
PV	Volume Poroso.

LISTA DE SÍMBOLOS

c_w	Calor específico da fase água.
c_o	Calor específico da fase óleo.
c_s	Calor específico do sólido.
K_w	Condutividade térmica da água.
K_o	Condutividade térmica do óleo.
K_s	Condutividade térmica do sólido.
ρ_w	Densidade da água.
ρ_o	Densidade do óleo.
ρ_s	Densidade do sólido.
n_w	Expoente para a permeabilidade relativa da água.
n_o	Expoente para a permeabilidade relativa do óleo.
f_w	Função de fluxo fracional.
k_{rw}	Permeabilidade relativa da água.
k_{ro}	Permeabilidade relativa do óleo.
k_{rw}^o	Permeabilidade relativa final da água.
k_{ro}^o	Permeabilidade relativa final do óleo.
λ_w	Mobilidade da água.
λ_o	Mobilidade do óleo.
λ_t	Mobilidade total.
\mathbb{K}	Coefficiente de permeabilidade intrínseca.
S_w	Saturação da água.
S_o	Saturação do óleo.
S_{wc}	Saturação da água conata.
S_{or}	Saturação do óleo residual.
θ	Temperatura.

μ_w	Viscosidade da água.
μ_o	Viscosidade do óleo.
V_{Dw}	Velocidade de Darcy da fase água.
V_{Do}	Velocidade de Darcy da fase óleo.
V_{Dt}	Velocidade de Darcy total.
W	Vetor coluna contendo as informações da temperatura e saturação.
\bar{W}	Vetor no tempo $(n + 1)$.
ℓ	iteração do método de linearização ℓ .
\bar{W}^ℓ	Vetor no tempo $(n + 1)$ na iteração ℓ .
C_{tot}	Calor específico total do sistema.
C_{liq}	Calor específico total do líquido.
K_{tot}	Condutividade térmica total.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Contexto Científico	17
1.2	Proposta da Dissertação	18
1.3	Estrutura da Dissertação	18
2	EXPERIMENTOS DE LABORATÓRIO	19
2.1	Descrição dos Experimentos Laboratoriais	19
2.1.1	<i>Materiais Utilizados</i>	19
2.2	Resultados Experimentais no Laboratório	22
2.2.1	<i>Experimentos 1, 2 e 3: Aquecimento sem Fluxo</i>	22
2.2.2	<i>Experimento 4: Fluxo sem Aquecimento</i>	22
2.2.3	<i>Experimento 5: Injeção da Água sem Aquecimento</i>	23
2.2.4	<i>Experimento 6: Injeção da Água com Aquecimento a uma Potência</i> <i>$P=114 W$</i>	23
2.2.5	<i>Experimento 7: Injeção da água com Aquecimento a uma Potência</i> <i>$P=150 W$</i>	24
3	DERIVAÇÃO DO PROBLEMA MODELO	27
3.1	Conservação da Massa	27
3.2	Conservação de Energia	31
3.3	Modelo Acoplado	35
3.4	Interpretação Física dos Parâmetros	36
3.4.1	<i>Calor Específico Total $C_{tot}(S_w)$</i> :	36
3.4.2	<i>Calor Específico Total do Líquido $C_{liq}(\theta, S_w)$</i>	37
3.4.3	<i>Condutividade Térmica Total $K_{tot}(S_w)$</i>	38
3.4.4	<i>Função de Fluxo Fracionário $f_w(\theta, S_w)$</i> :	38
3.4.5	<i>Permeabilidades Relativas: $k_{rw}(S_w), k_{ro}(S_w)$</i> :	39
3.4.6	<i>Absorção de Energia Eletromagnética</i>	40
4	MÉTODO NUMÉRICO	43
4.1	Splitting para Sistema de Equações Diferenciais Parciais	43
4.2	Método Numérico Para o Subsistema 1	44
4.2.1	<i>Método de Crank-Nicolson</i>	44
4.2.2	<i>Processo de Linearização</i>	46
4.2.3	<i>Matriz em Blocos</i>	49
4.3	Método Numérico Para o Subsistema 2	50

4.4	Condições de Contorno	51
5	VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO PROPOSTO COM A SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA	52
5.1	Validação do Experimento 1	53
5.2	Validação do Experimento 4	53
5.3	Validação do Experimento 5	54
6	RESULTADOS DO MÉTODO NUMÉRICO	56
6.1	Discretização do Domínio	56
6.2	Simulação Numérica do Experimento 1	56
6.3	Simulação Numérica do Experimento 4	58
6.4	Simulação Numérica do Experimento 5	62
6.5	Simulação Numérica do Experimento 7	65
6.6	Melhoria do Método Térmico em Porcentagem	69
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE BUCKLEY-LEVERETT	75
	APÊNDICE B – ANÁLISE DOS COEFICIENTES	77

1 INTRODUÇÃO

Os reservatórios de petróleo são meios porosos naturais constituídos por rochas sedimentares, onde encontramos os hidrocarbonetos em estado líquido ou gasoso. A modelagem e simulação destes meios são complexos devido a incertezas geológicas e heterogeneidades, que podem gerar incertezas nas propriedades dos fluidos e da rocha, que dificultam a determinação de propriedades como viscosidade, permeabilidades relativas, saturações residuais de água e óleo entre outras. Os modelos matemáticos na área do petróleo são formulados em função das leis físicas como conservação de massa e energia, complementado por leis constitutivas como equações de estado (KARAM; ALMEIDA, 2003) ou relações empíricas verificadas experimentalmente, que são válidas sobre certas hipóteses.

A extração de petróleo é classificada em 3 tipos de recuperação. A *recuperação primária*, que consiste na extração através dos mecanismos naturais do meio, onde o óleo é deslocado devido à diferença de pressão subterrânea. Todavia chega um momento em que a diferença de pressão subterrânea é insuficiente para deslocar o óleo, nesse momento começa a *recuperação secundário*, cuja finalidade é manter essa diferença de pressão mediante a injeção de fluidos. Por último, temos a *recuperação terciária ou recuperação aprimorada de petróleo*, cuja finalidade é aumentar a mobilidade do óleo. Alguns métodos térmicos são utilizados como: estimulação de vapor e combustão in-situ (CHAPIRO; MARCHESIN; SCHECTER, 2014), (CHAPIRO; BRUINING, 2015) que tentam reduzir a viscosidade dos fluidos para facilitar a extração (KERMEN, 2011), (HOLLMANN et al., 2014), (PAZ et al., 2017). Além disso, também temos os métodos químicos que consistem na injeção de componentes como: soluções cáusticas, polímeros, misturas químicas e injeção de espuma (FARAJZADEH et al., 2012), (FEJOLI; ROMERO, 2014). Uma forma de decidir a melhor estratégia de extração é simular o comportamento do reservatório. Assim as simulações tornam-se a principal ferramenta na tomada de decisões na engenharia de reservatórios (PEACEMAN, 1977).

Entre os métodos de *Enhanced Oil Recovery* (EOR) ou *recuperação avançada de petróleo* destacamos os métodos térmicos que são aplicáveis em reservatórios de óleo pesado (BERA; BABADAGLI, 2015). Em particular, o aquecimento por ondas eletromagnéticas é uma técnica térmica não convencional baseada na transformação de energia elétrica em energia térmica através da interação entre o campo eletromagnético e as partículas do meio (HAMMACK; RYAN; ZIECH, 2012), (HOLLMANN et al., 2014).

Este trabalho está focado na modelagem matemática e numérica do escoamento bifásico com aquecimento eletromagnético (EM) de alta frequência dielétrica ou de micro-ondas que trabalham em uma frequência de 2.45 GHz (PAZ et al., 2017). Devido ao fato da água ser um bom material dielétrico, a utilização desta metodologia em reservatório

surge como uma opção viável, pois em frequências de microondas as moléculas de água vibram de acordo com a frequência de radiação gerando calor (SAHNI et al., 2000), este processo é chamado de aquecimento dielétrico.

No escoamento bifásico, representado pela percolação de fluidos imiscíveis em um meio poroso, o deslocamento do óleo é influenciado pela injeção de água. Assim, a energia eletromagnética absorvida pela água será transferido ao óleo através do processo de condução térmica, aumentando as mobilidades e melhorando a extração (KERMEN, 2011). Para descrever matematicamente o deslocamento do óleo induzido pela água e influenciado pelo aquecimento por ondas eletromagnéticas, utilizamos leis de conservação da massa (MURAD, 2007) e da energia (KAVIANY, 2012). Assim, partindo da caracterização do contínuo (PONTES; MANGIACCHI, 2016), e estendendo a lei de Darcy para o caso multifásico, através da introdução do conceito de permeabilidades relativas dos fluidos (CHEN; G., 2006), derivamos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis e termos não lineares.

Entre os métodos numéricos para a aproximação de equações diferenciais parciais não lineares existem os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos entre outros, neste trabalho adotaremos os métodos de diferenças finitas associados a técnica *Splitting* (HOLDEN, 2010) com o intuitivo de dividir o sistema de equações diferenciais parciais em dois subsistemas. O primeiro subsistema consistirá em resolver a parte que envolve a difusão e reação pelo esquema de Crank-Nicolson, utilizando as sugestões para a linearização de (CHAPIRO, 2009). O segundo sub-sistema consistirá em resolver a parte que envolve o termo convectivo.

Neste contexto, propomos uma discretização por diferenças finitas para a simulação do escoamento bifásico em um meio poroso aquecido por ondas eletromagnéticas, que será aplicado na simulação numérica dos experimentos laboratoriais desenvolvidos por (HOLLMANN et al., 2014) e validado através da comparação com as soluções semi analíticas derivadas por (PAZ, 2015) utilizando o método do princípio de Duhamel. Além disso, um estudo numérico é realizado para comprovar a eficácia desta abordagem na recuperação de petróleo e o resultado obtido garante um ganho de 1.67% se comparado a técnica sem aquecimento.

1.1 Contexto Científico

No contexto da metodologia de aquecimento de reservatórios, um dos trabalhos pioneiros foi desenvolvido por (PERRY; WARNER, 1865) que se refere à introdução de calor nos reservatórios com a finalidade de acelerar a extração através da redução da viscosidade. Nesse contexto, experimentos em escala de laboratório foram desenvolvidos pela equipe de Delft (HOLLMANN et al., 2014). No trabalho em questão são apresentados 8 experimentos de laboratório que reproduzem a física pertinente ao escoamento em um

meio poroso aquecido por ondas eletromagnéticas. Baseado nos experimentos realizados e nas soluções semi-analíticas propostas por (PAZ et al., 2017) para alguns casos particulares destes experimentos, validamos o método numérico proposto. Em particular, reproduzimos os experimentos 1, 2, 3, 4, 5 e 7 do trabalho (HOLLMANN et al., 2014), onde os experimentos 1, 2 e 3 tem como objetivo testar a absorção de calor devido ao aquecimento eletromagnético, o experimento 4 avalia o transporte de calor devido à injeção de água, o experimento 5 tem como objetivo calcular a produção do óleo devido à injeção de água sem aquecimento e os experimentos 6 e 7 tem por finalidade calcular a produção de óleo devido ao aquecimento eletromagnético. Estes dados obtidos pelos experimentos de laboratório e as soluções semi-analíticas derivadas para casos particulares destes experimentos são usados como base do desenvolvimento desta dissertação, tanto na validação do método numérico proposto quanto na utilização de dados nas simulações numéricas.

1.2 Proposta da Dissertação

Tendo em vista os trabalhos mencionados, a proposta da dissertação consiste em mostrar, mediante simulações computacionais, que a injeção de água num meio poroso saturado de óleo e aquecido por ondas eletromagnéticas melhora a produção de petróleo.

1.3 Estrutura da Dissertação

Este trabalho é disposto da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos a introdução, no Capítulo 2 descrevemos os experimentos físicos em escala de laboratório desenvolvidos pela equipe da TU Delft da Holanda, no Capítulo 3 derivamos o sistema de equações diferenciais parciais que descreve os experimentos de laboratório, partindo da modelagem em sistemas contínuos usando leis de conservação chegando na modelagem clássica do escoamento bifásico e da conservação de energia em um meio poroso, no Capítulo 4 é dedicado ao método numérico, no Capítulo 5 validamos os resultados numéricos com a solução semi-analítica, no Capítulo 6 apresentamos as simulações numéricas dos experimentos comparando com os dados dos sensores, no Capítulo 7 apresentamos as conclusões e trabalhos futuros.

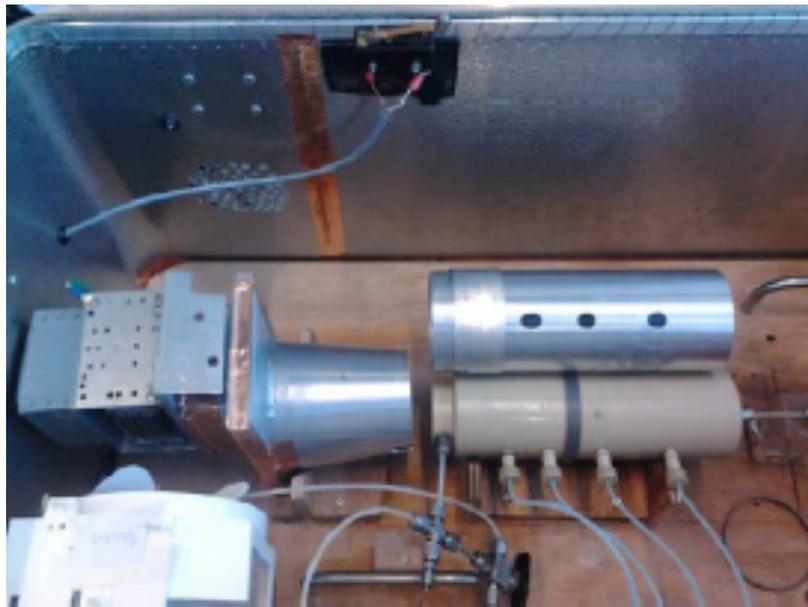
2 EXPERIMENTOS DE LABORATÓRIO

Experimentos em escala reduzida, realizados em laboratórios são de grande importância para a compreensão dos fenômenos físicos em escala real. Experimentos em escala de laboratório foram desenvolvidos pela equipe de pesquisadores da TU Delft, descritos em (HOLLMANN et al., 2014). Nesta seção, apresentamos um breve resumo destes experimentos em escala de laboratório.

2.1 Descrição dos Experimentos Laboratoriais

Com a finalidade de mostrar que o aquecimento eletromagnético melhora o deslocamento do óleo influenciado pela água, foi construído um modelo em escala de laboratório por (HOLLMANN et al., 2014).

Figura 1 – Experimento construído pela equipe da TU Delft.



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

A Figura 1, ilustra a configuração do experimento dentro da caixa de alumínio, dentre os materiais utilizados, destaca-se o meio poroso, sensores, gerador de ondas eletromagnéticas e os dutos de injeção da água e extração de petróleo.

2.1.1 *Materiais Utilizados*

Para a construção do experimento descrito na Figura 1, foi elaborada uma caixa de Faraday feita de alumínio, cuja finalidade foi evitar fugas de microondas para o ambiente do laboratório e proteger-se do perigo da radiação eletromagnética.

Figura 2 – Caixa de faraday



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

A Figura 2, ilustra a caixa de alumínio utilizada no experimento, nesta caixa foram colocadas todos os equipamentos. Também foi elaborado uma seção cônica para guiar as ondas eletromagnéticas e evitar fugas.

Figura 3 – Guia de ondas eletromagnéticas



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Na Figura 3 podemos ver a guia de ondas eletromagnéticas que está composto por uma seção cônica com diâmetros 8.0 e 7.0, 20.0 cm de comprimento e um cilindro oco que foi cuidadosamente concebido para conduzir a radiação proveniente do gerador de ondas eletromagnéticas para o meio poroso.

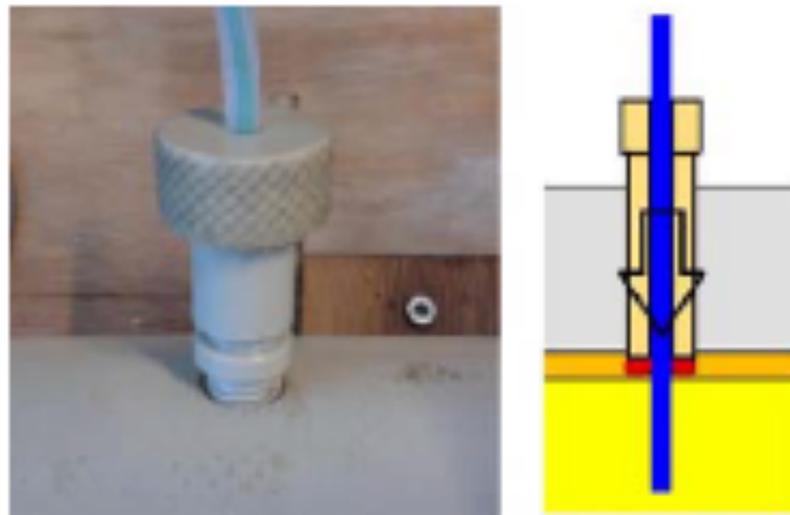
Figura 4 – Gerador de ondas eletromagnéticas



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Na Figura 4 apresentamos o gerador de ondas eletromagnéticas que foi obtida a partir de um forno de microondas doméstico que opera a uma frequência de 2,45 GHz correspondente ao comprimento de onda de aproximadamente 12,24 cm (LANDAU; LIFSHITZ., 1984). Para poder monitorar a distribuição da temperatura no meio poroso devido ao aquecimento eletromagnético, foram utilizados sensores ópticos.

Figura 5 – Sensor acoplado ao meio poroso



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Na Figura 5 são apresentados os sensores utilizados para monitorar a distribuição da temperatura. Estes sensores ópticos penetraram $1,7 \pm 0,1$ cm no meio poroso e foram

colocados a uma distância de 2, 5, 9 e $14 \pm 0,1$ cm a partir da entrada central para medir a variação da temperatura.

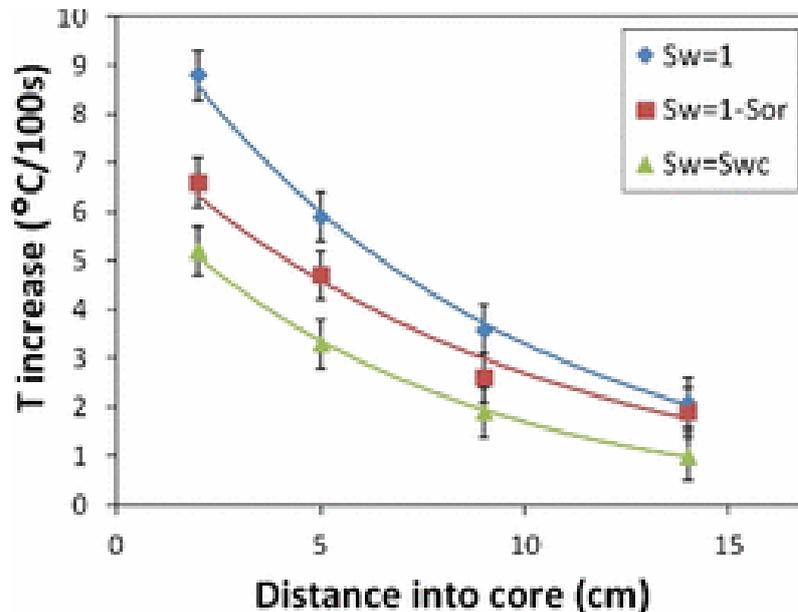
2.2 Resultados Experimentais no Laboratório

Foram apresentados 8 experimentos em escala de laboratório em (HOLLMANN et al., 2014) e os perfis de temperatura foram utilizados para validar as soluções semi-analítica desenvolvidas por (PAZ, 2015). Abaixo detalhamos os objetivos de cada experimento.

2.2.1 Experimentos 1, 2 e 3: Aquecimento sem Fluxo

O objetivo destes três experimentos foi testar a absorção de calor usando aquecimento eletromagnético a uma potência de $P = 300$ Watts sem injeção de água. O experimento 1 testa a absorção de calor considerando o meio poroso completamente saturado ($s_w = 1$), o experimento 2 testa a absorção de calor considerando saturação ($s_w = 1 - s_{or}$) e o experimento 3 testa a absorção de calor considerando o meio poroso contendo saturação de água conata ($s_w = s_{wc}$).

Figura 6 – Incremento da temperatura para os experimentos 1, 2 e 3



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

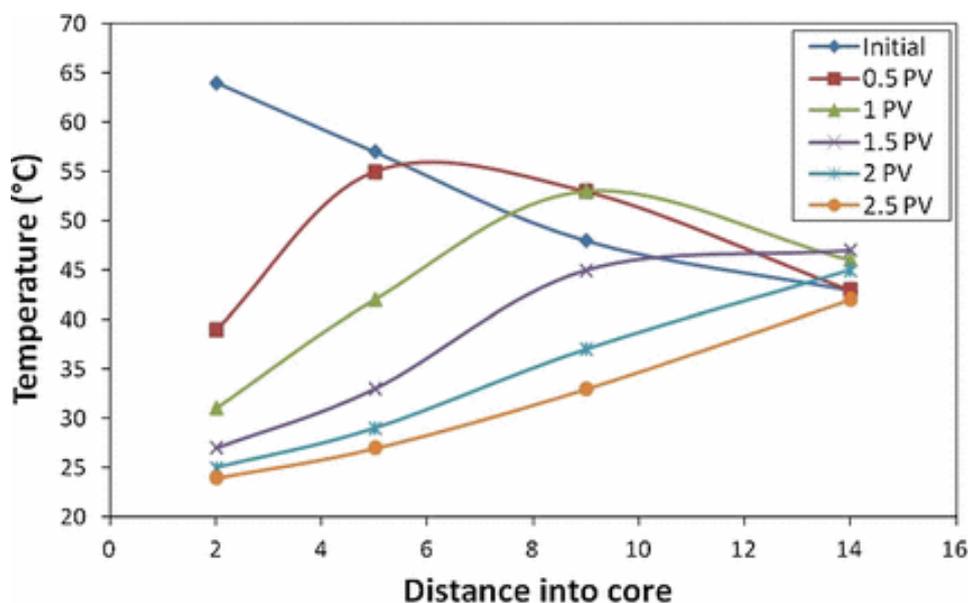
O aumento do perfil de temperatura como resultado da absorção de ondas eletromagnéticas é ilustrado na Figura 6.

2.2.2 Experimento 4: Fluxo sem Aquecimento

Este experimento tem por objetivo testar a transporte de calor. Para conseguir isso o meio poroso foi completamente saturado de água e aquecido por ondas eletromagnéticas

a uma potencia de 300 W, logo depois o gerador de ondas eletromagnéticas foi desligado para assim iniciar a injeção da água a temperatura ambiente a um fluxo de 20 ml/min. Os perfis de temperatura foram medidos em tempos de volume poroso (PV), onde o perfil de temperaturas apresento uma variação entre 20°C e 65°C.

Figura 7 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 4



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Os perfis de temperatura obtidos pelos sensores nas posições 2, 5, 9, 14 cm, onde foram colocadas os sensores é ilustrada na Figura 7, podemos observar que conforme passa o tempo o calor é transportado devido à injeção da água.

2.2.3 Experimento 5: Injeção da Água sem Aquecimento

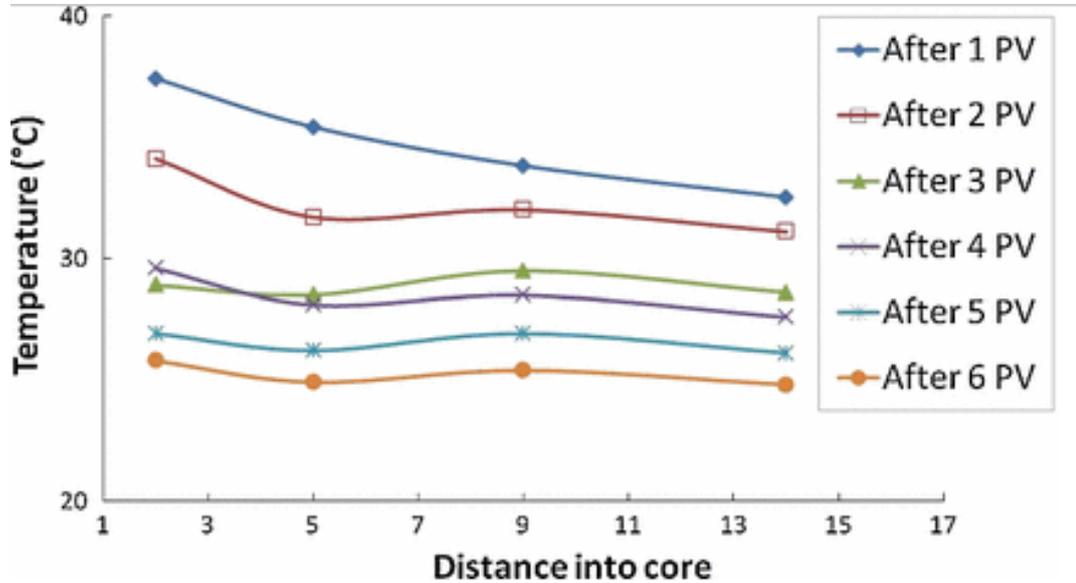
O objetivo deste experimento foi medir o fator de recuperação do petróleo sem aquecimento. Este experimento foi realizados duas vezes, experimentos (5A e 5B) com a finalidade de verificar a sua reprodutibilidade considerando exatamente as mesmas condições. Assim as taxas de produção da água e do óleo obtidos foram utilizados para calcular os fatores de recuperação.

2.2.4 Experimento 6: Injeção da Água com Aquecimento a uma Potência $P=114$ W

O objetivo deste experimento é mostrar que a injeção de água juntamente com o aquecimento por ondas eletromagnéticas a uma potência de $P=114$ W gera um aumento de temperatura no meio poroso, reduzindo a viscosidade do óleo e aumentando a produção. Inicialmente o gerador de energia eletromagnética(EM) está desligado, a temperatura do

meio poroso está em torno de medida a 20°C. Posteriormente começam a injeção de água e o aquecimento eletromagnético.

Figura 8 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 6



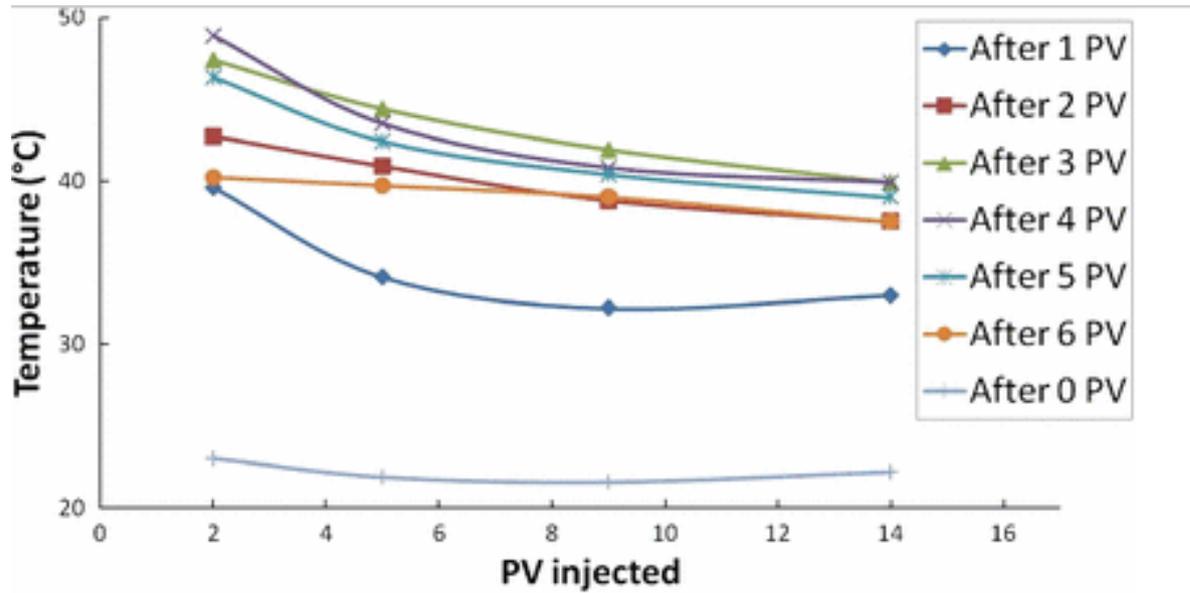
Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Devido a que o gerador de ondas eletromagnéticas encontra-se próximo da posição $x = 0$ cm, podemos observar na Figura 8, que os perfis da temperatura aumentam perto do gerador de ondas eletromagnéticas.

2.2.5 Experimento 7: Injeção da água com Aquecimento a uma Potência $P=150$ W

O objetivo deste experimento é mostrar que um aquecimento maior melhora o deslocamento do óleo, considerando injeção de água juntamente com o aquecimento. Inicialmente o gerador de energia eletromagnética(EM) está desligado, a temperatura inicial do meio poroso esta em torno de 20°C e posteriormente começam a injeção de água e aquecimento eletromagnético a uma potência de $P=150$ W.

Figura 9 – Perfis de temperatura dos sensores do experimento 7

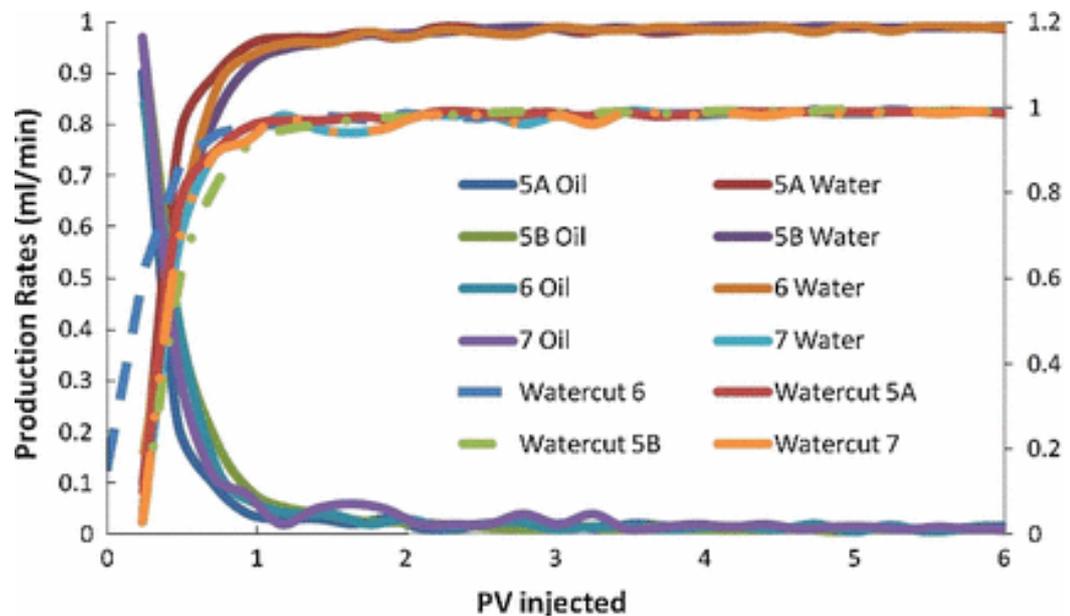


Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

Um maior aquecimento no meio poroso é possível observar na Figura 9, mostrando que a temperatura do experimento 7 varia entre 20° C e 50°C, em comparação com o experimento 6, onde a variação da temperatura é de 20°C a 40°C.

• Produção Acumulada de Óleo

Figura 10 – Produção de óleo

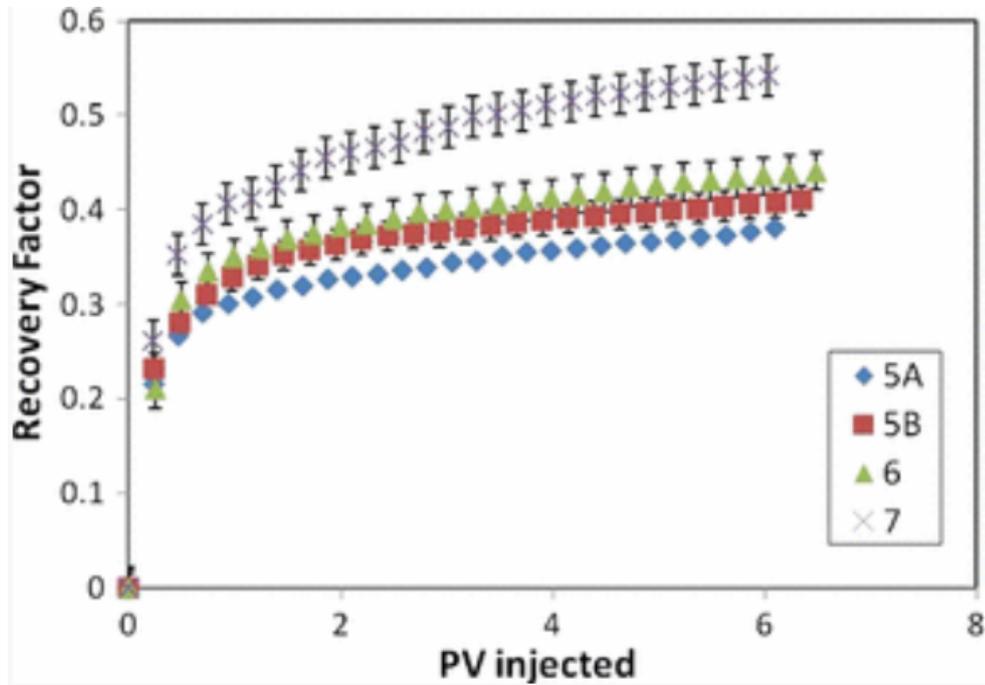


Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

A Figura 10, ilustra as taxas de produção que foram medidas experimentalmente em ml/min nos tempos de 0PV a 6PV.

- **Fator de Recuperação Experimental**

Figura 11 – Fator de recuperação do óleo



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

A Figura 11, ilustra o fator de recuperação para os experimentos 5, 6 e 7 mostrando maior produção de óleo conforme o aquecimento aumenta medidos nos tempos de 0PV a 6PV.

3 DERIVAÇÃO DO PROBLEMA MODELO

O problema em escala de laboratório apresentado no **Capítulo 2** trata-se de um sistema multifásico. Assim, para derivar o conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos em um meio poroso aquecido por ondas eletromagnéticas a modelagem matemática será feita usando leis de conservação de massa (MURAD, 2007) e energia (KAVIANY, 2012),(CROWELL, 2013). Para o caso multifásico o cálculo diferencial e integral é aplicado considerando a hipótese do contínuo (LANDAU; LIFSHITZ., 1987), assim as propriedades são tomadas como tendo um valor médio em um elemento de volume considerado de dimensão infinitamente pequena.

3.1 Conservação da Massa

Considerando a hipótese do contínuo o princípio de conservação de massa para o caso multifásico é aplicado a um volume finito fixo no espaço que conduz a uma equação integral e essa equação é transformada em uma equação diferencial aplicável a cada ponto do meio contínuo. Assim, consideremos um volume de controle V_T , através do qual definimos a massa específica aparente ρ_β^a , sendo v_β a velocidade de escoamento e seja Γ a superfície externa que delimita o volume e \mathbf{n} um vetor unitário perpendicular à fronteira do domínio.

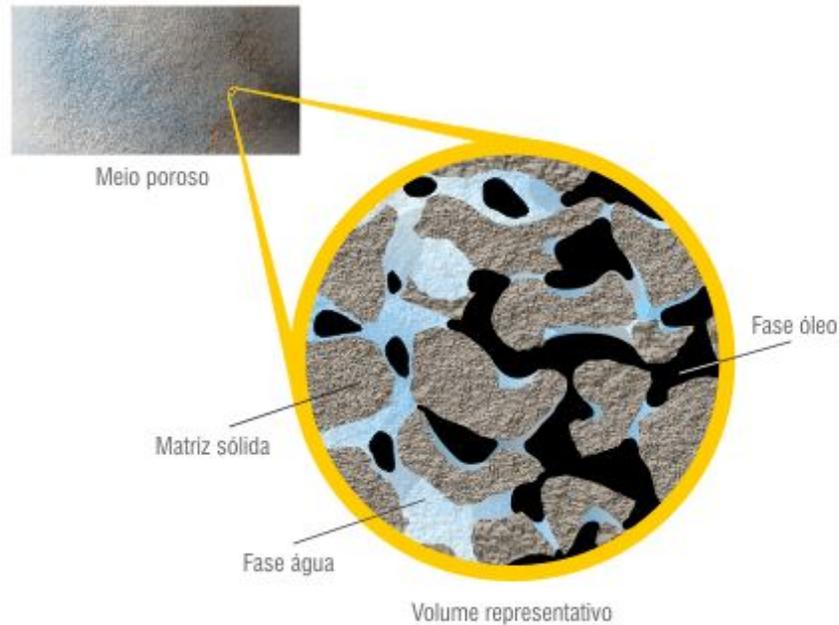
Figura 12 – Esquema geométrico representando o meio poroso.



Fonte: <http://www.sinmec.ufsc.br>

A região de estudo é ilustrado na Figura 12, onde em forma intuitiva acontece a injeção de água pela esquerda e obtenção de óleo pela direita. De acordo com (BEAR; BACHMAT, 1990) o meio poroso é definido como uma matéria bifásica composta pela fase sólida e por vazios. Estes vazios são chamados de poros e podem ser preenchidos por um ou vários fluidos. Assim, o meio poroso contendo as fases água, óleo e a matriz sólida é ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Figura ilustrativa do meio poroso com as fases: água e óleo



Fonte: <http://www.sinmec.ufsc.br>

Partindo da caracterização do contínuo para o caso multifásico, derivaremos o conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos em um meio poroso, considerando as seguintes hipóteses:

- Fluidos incompressíveis.
- Meio poroso rígido e saturado.
- Ausência de troca de massa e de fontes externas.
- Pressão capilar nula, devido ao coeficiente de permeabilidade intrínseca da rocha.

A lei de conservação de massa garante que a variação de massa em Ω , em um intervalo de tempo, somada ao fluxo de massa através da fronteira Γ é igual a zero (LOPES, 2012), podemos escrever como:

$$\underbrace{\frac{dM}{dt}}_{\text{taxa de variação da massa dentro de } \Omega} + \underbrace{\dot{m}}_{\text{vazão mássica } \Omega} = 0, \quad (3.1)$$

onde M representa a massa em Ω , \dot{m} representa a vazão mássica ou fluxo de massa que atravessa a fronteira Γ . Expressemos de forma matemática a igualdade (3.1). Assim, a

taxa de variação da massa dentro de Ω pode ser expressado como a integral sobre todo o volume da variação da quantidade de massa em cada ponto, como segue:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dm, \quad (3.2)$$

Sendo dm a quantidade infinitesimal de massa que é expressado como $dm = \rho_{\beta}^{\alpha} d\Omega$. Substituindo na Equação (3.2), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} dm = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\beta}^{\alpha} d\Omega. \quad (3.3)$$

A vazão mássica ou fluxo de massa que atravessa a fronteira por unidade de tempo, pode ser expressado como a integral sobre todo o contorno, como segue:

$$\dot{m} = \int_{\Gamma} d\dot{m} d\Gamma, \quad (3.4)$$

sendo $d\dot{m}$ o fluxo mássico através da fronteira da quantidade infinitesimal que é expressado como $d\dot{m} = \rho_{\beta}^{\alpha} dQ$, dQ mede a quantidade de volume que atravessa $d\Gamma$ no tempo dt , \mathbf{n}_{β} o vetor unitário perpendicular à fronteira do domínio. Substituindo na Equação (3.4), obtemos:

$$\int_{\Gamma} d\dot{m} d\Gamma = \int_{\Gamma} \rho_{\beta}^{\alpha} \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{n}_{\beta} d\Gamma. \quad (3.5)$$

Assim, chegamos na forma integral de conservação de massa para o caso multifásico:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\beta}^{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_{\beta}^{\alpha} \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{n}_{\beta} d\Gamma = 0, \quad (3.6)$$

Reescrevendo (3.6) em função da fração volumétrica que é definido como a relação entre volume da fase β (V_{β}) e o volume total (V_T) $\varphi_{\beta} = \frac{V_{\beta}}{V_T}$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\beta}^r \varphi_{\beta} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_{\beta}^r \varphi_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{n}_{\beta} d\Gamma = 0, \quad (3.7)$$

onde β representa uma fase arbitrária, podendo ser $\beta = (\text{água}, \text{óleo}, \text{sólido})$, ρ_{β}^r representa à densidade real, \mathbf{v}_{β} representa a velocidade, \mathbf{n}_{β} a normal unitária da fase arbitrária β . Assumindo regularidade dos campos e utilizando o teorema da divergência (MURAD, 2007), obtemos:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\beta}^r \varphi_{\beta}) + \text{div}(\rho_{\beta}^r \varphi_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) \right] d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Como essa equação deve ser válida para quaisquer volumes de controle, devemos ter para um volume infinitesimal (PONTES; MANGIAVACCHI, 2016). Chegamos na forma pontual que nos fornece a EDP que governa a conservação da massa para cada fase:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\beta}^r \varphi_{\beta}) + \text{div}(\rho_{\beta}^r \varphi_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) = 0. \quad (3.9)$$

Pela hipóteses não temos variação da matriz sólida, pois o meio poroso é rígido. Assim, podemos escrever a Equação (3.9) somente para os fluidos. Seja α a representação

arbitrária de uma fase fluida, onde $\alpha = (\text{água}, \text{óleo})$. Obtemos a equação diferencial parcial para cada fluido, como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha^r \varphi_\alpha) + \text{div}(\rho_\alpha^r \varphi_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0. \quad (3.10)$$

Introduzindo o conceito de permeabilidades relativas a velocidade de Darcy (DARCY, 1856) pode ser estendida para o caso multifásico. Segundo (CHEN; G., 2006) esta velocidade é dada pela seguinte relação: $\mathbf{V}_{\mathbf{D}\alpha} = \varphi_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Dessa forma podemos escrever as equações diferenciais parciais em função da velocidade de Darcy:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{D}\alpha} = -\mathbb{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla P_\alpha, = -\mathbb{K} \lambda_\alpha \nabla P_\alpha. \quad (3.11)$$

A velocidade de Darcy contém informações importantes, como: o tensor de segunda ordem (\mathbb{K}) que representa a facilidade que tem um fluido de percolar em um meio poroso, também chamado de coeficiente de permeabilidade intrínseca. Este tensor tem informações da estrutura interna do sólido. A influência que um fluido exerce sobre o movimento do outro é definido como $k_{r\alpha}$, chamada de permeabilidade relativa cujo domínio de existência está entre $0 \leq k_{r\alpha} \leq 1$, μ_α representa viscosidade da fase α e P_α é a pressão da fase α . A facilidade com que um fluido α pode percorrer o meio poroso é representado por λ_α , definido como mobilidade da fase α . A soma de todas as mobilidades relativas é definido como $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o$ e mede a facilidade com que a mistura de fluidos percorrem o meio poroso. Assumindo o mesmo campo de pressão para todos os fluidos $P = P_\alpha$, podemos definir a velocidade total da mistura $\mathbf{V}_{\mathbf{D}t}$, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{D}t} &= \mathbf{V}_{\mathbf{D}w} + \mathbf{V}_{\mathbf{D}o}, \\ &= -\mathbb{K} \lambda_w \nabla P_w - \mathbb{K} \lambda_o \nabla P_o, \\ &= -\mathbb{K} \lambda_t \nabla P. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Podemos escrever a velocidade de Darcy da fase α em função da velocidade de Darcy total $\mathbf{V}_{\mathbf{D}t}$ e do fluxo fracionário f_α , como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{D}\alpha} &= \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_t} \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}, \\ &= \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha \lambda_t} \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}, \\ &= f_\alpha \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função fluxo fracionário representa a taxa de fluxo da fase α que passa por qualquer ponto da rocha (PAZ, 2015). A partir destas definições podemos reescrever **(3.10)** como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha^r S_\alpha \phi) + \text{div}(\rho_\alpha^r \mathbf{V}_{\mathbf{D}\alpha}) = 0. \quad (3.14)$$

Utilizando a Equação **(3.14)**, podemos escrever as equações diferenciais parciais para as fases água e óleo, como:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_w) + \text{div}(\mathbf{V}_{\mathbf{D}w}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_o) + \operatorname{div}(\mathbf{V}_{\mathbf{D}o}) = 0. \quad (3.16)$$

Como o meio poroso está completamente saturado temos a seguinte relação:

$$S_w + S_o = 1. \quad (3.17)$$

Somando (3.15) com (3.16) e utilizando (3.17) podemos concluir que $\operatorname{div}(\mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = 0$, também conhecido como condição para fluidos incompressíveis. Finalmente obtemos a EDP que representa a equação que rege o deslocamento do óleo pela água:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_w) + \operatorname{div}(f_w \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{D}t} = -\mathbb{K} \lambda_t \nabla P, \quad (3.19)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = 0. \quad (3.20)$$

3.2 Conservação de Energia

O modelo em questão sofre a influência das ondas eletromagnéticas, por conta disso devemos levar em consideração a conservação de energia para cada fase. Para um sistema multifásico composto por β -fases, o procedimento para derivar a equação da energia total de um sistema é semelhante ao procedimento das equações de continuidade sobre a hipóteses do contínuo. Dessa, forma consideramos um volume de controle fixo no espaço, igualamos a taxa de variação da energia em Ω com o balanço dos diversos fatores que contribuem para que a energia total contida dentro do volumem varie. Segue da primeira lei da termodinâmica (KAVIANY, 2012):

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}, \quad (3.21)$$

onde :

E_β = Energia que pode ser adicionada ou extraída de um corpo através de calor e trabalho,

\dot{Q} = taxa de calor,

\dot{W} = potência .

Como estamos considerando um sistema multifásico, onde as fases são incompressíveis então temos $\dot{W} = 0$ (MURAD, 2007), dessa forma obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}. \quad (3.22)$$

A energia específica é definido, como: $e = \frac{E}{M}$, sendo M a massa do sistema, então $\frac{dE}{dt}$ representa a variação da energia E em Ω , somado ao fluxo de E através da fronteira,

denotando como ρ_β^a a densidade aparente da fase β . Escrevemos em termos de integrais para o caso multifásico, como segue:

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_\beta^a e_\beta d\Omega}_{\text{Variação em } \Omega} + \underbrace{\int_{\Gamma} \rho_\beta^a e_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{n}_\beta d\Gamma}_{\text{Fluxo através da Fronteira}} \quad (3.23)$$

A taxa de calor \dot{Q} , somente consideraremos contribuições do fluxo de calor, somado com a taxa de geração de calor, sendo \mathbf{q}_β^a o fluxo aparente da fase β . Escrevendo em termos de integrais, obtemos:

$$\dot{Q} = \underbrace{- \int_{\Gamma} \mathbf{q}_\beta^a \cdot \mathbf{n}_\beta d\Gamma}_{\text{fluxo de calor da fase } \beta} + \underbrace{\int_{\Omega} W_\beta^a d\Omega}_{\text{taxa de geração de calor da fase } \beta}, \quad (3.24)$$

Reescrevendo em termos de integrais a igualdade (3.22), podemos escrever matematicamente a conservação de energia da fase β , como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_\beta^a e_\beta d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_\beta^a e_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{n}_\beta d\Gamma = - \int_{\Gamma} \mathbf{q}_\beta^a \cdot \mathbf{n}_\beta d\Gamma + \int_{\Omega} W_\beta^a d\Omega, \quad (3.25)$$

Utilizando o teorema da divergência e associando os termos obtemos:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\beta^a e_\beta) + \text{div}(\rho_\beta^a e_\beta \mathbf{v}_\beta) + \text{div}(\mathbf{q}_\beta^a) - W_\beta^a \right) d\Omega = 0. \quad (3.26)$$

A equação integral (3.26) é válida para volumes de qualquer tamanho, então é válida para um volume infinitesimal (PONTES; MANGIAVACCHI, 2016), obtendo:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\beta^a e_\beta)}_{\text{I}} + \underbrace{\text{div}(\rho_\beta^a e_\beta \mathbf{v}_\beta)}_{\text{II}} + \underbrace{\text{div}(\mathbf{q}_\beta^a)}_{\text{III}} - \underbrace{W_\beta^a}_{\text{IV}} = 0, \quad (3.27)$$

Ou ainda,

$$\underbrace{e_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\beta^a) + \rho_\beta^a \frac{\partial}{\partial t} (e_\beta)}_{\text{I}} + \underbrace{e_\beta \text{div}(\rho_\beta^a \mathbf{v}_\beta) + \rho_\beta^a \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla e_\beta}_{\text{II}} + \underbrace{\text{div}(\mathbf{q}_\beta^a)}_{\text{III}} - \underbrace{W_\beta^a}_{\text{IV}} = 0. \quad (3.28)$$

Organizando adequadamente os termos:

$$e_\beta \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\beta^a) + \text{div}(\rho_\beta^a \mathbf{v}_\beta) \right)}_{\text{I}} + \rho_\beta^a \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} (e_\beta) + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla e_\beta \right)}_{\text{II}} + \underbrace{\text{div}(\mathbf{q}_\beta^a)}_{\text{III}} - \underbrace{W_\beta^a}_{\text{IV}} = 0. \quad (3.29)$$

Por conservação de massa ($\mathbf{I}=0$), ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\beta^a) + \text{div}(\rho_\beta^a \mathbf{v}_\beta) = 0. \quad (3.30)$$

Da definição de derivada material:

$$\frac{D}{Dt} e_\beta = \frac{\partial}{\partial t} (e_\beta) + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla e_\beta. \quad (3.31)$$

Segue de (3.29):

$$\rho_\beta^a \frac{D}{Dt} e_\beta + \text{div}(\mathbf{q}_\beta^a) - W_\beta^a = 0. \quad (3.32)$$

O fluxo de calor \mathbf{q}_β^r será substituído por sua expressão, dada pela lei de Fourier, sendo K_β a condutividade térmica e c_β o calor específico. Cada fase tem seu próprio campo de temperaturas θ_β , assumindo que a energia e_β depende somente da temperatura θ_β , derivamos:

$$\begin{cases} e_\beta = e_\beta(\theta_\beta), \\ c_\beta = \frac{de_\beta}{d\theta_\beta}, \\ \mathbf{q}_\beta^a = \mathbf{q}_\beta^r \varphi_\beta, \\ \mathbf{q}_\beta^r = -K_\beta \nabla \theta_\beta. \end{cases}$$

Substituindo as relações acima em (3.32), obtemos:

$$\rho_\beta^a \underbrace{\left(\frac{d}{dt} e_\beta \right)} + \text{div}(\mathbf{q}_\beta^r \varphi_\beta) - W_\beta^a = 0, \quad (3.33)$$

$$\rho_\beta^a \underbrace{\left(\frac{de_\beta}{d\theta_\beta} \frac{d}{dt} \theta_\beta \right)} + \text{div}(-K_\beta \nabla \theta_\beta \varphi_\beta) - W_\beta^a = 0, \quad (3.34)$$

$$\rho_\beta^a c_\beta \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \theta_\beta \right)} - \text{div}(K_\beta \nabla \theta_\beta \varphi_\beta) - W_\beta^a = 0, \quad (3.35)$$

$$\rho_\beta^a c_\beta \left(\frac{\partial}{\partial t} (\theta_\beta) + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \theta_\beta \right) - \text{div}(K_\beta \nabla \theta_\beta \varphi_\beta) - W_\beta^a = 0. \quad (3.36)$$

Dessa forma, derivamos a equação de conservação de energia para um sistema multifásico:

$$\rho_\beta^a c_\beta \left(\frac{\partial}{\partial t} (\theta_\beta) + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \theta_\beta \right) = \text{div}(K_\beta \nabla \theta_\beta \varphi_\beta) + W_\beta^r \varphi_\beta. \quad (3.37)$$

Neste contexto, podemos definir o campo de temperatura para as 3 fases: sólida, água e óleo, assim a Equação (3.37) pode ser escrita como segue :

$$\rho_w^a c_w \left(\frac{\partial}{\partial t} (\theta_w) + \mathbf{v}_w \cdot \nabla \theta_w \right) = \text{div}(K_w \nabla \theta_w \varphi_w) + W_w^r \varphi_w; \quad (3.38)$$

$$\rho_o^a c_o \left(\frac{\partial}{\partial t} (\theta_o) + \mathbf{v}_o \cdot \nabla \theta_o \right) = \text{div}(K_o \nabla \theta_o \varphi_o) + W_o^r \varphi_o; \quad (3.39)$$

$$\rho_s^a c_s \frac{\partial}{\partial t} (\theta_s) = \text{div}(K_s \nabla \theta_s \varphi_s) + W_s^r \varphi_s; \quad (3.40)$$

A conservação de energia para o sistema é dado pelo somatório de todas as fases, assumindo equilíbrio térmico local: $\theta_w = \theta_o = \theta_s = \theta$, geramos:

$$\underbrace{(\rho_w^a c_w + \rho_o^a c_o + \rho_s^a c_s)}_* \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{(\rho_w^a c_w \mathbf{v}_w + \rho_o^a c_o \mathbf{v}_o)}_{**} \cdot \nabla \theta = \text{div} \left(\underbrace{(K_w \varphi_w + K_o \varphi_o + K_s \varphi_s)}_{***} \nabla \theta \right) + \underbrace{(W_w^r \varphi_w + W_o^r \varphi_o + W_s^r \varphi_s)}_{****}.$$

Para sistemas multifásicos a densidade aparente é igual ao produto entre a densidade real e fração volumétrica, ou seja $\rho_\beta^a = \rho_\beta^r \varphi_\beta$, logo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\rho_w^r \varphi_w c_w + \rho_o^r \varphi_o c_o + \rho_s^r \varphi_s c_s)}_* \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{(\rho_w^r \varphi_w c_w \mathbf{v}_w + \rho_o^r \varphi_o c_o \mathbf{v}_o)}_{**} \cdot \nabla \theta = \\ & \operatorname{div} \left(\underbrace{(K_w \varphi_w + K_o \varphi_o + K_s \varphi_s)}_{***} \cdot \nabla \theta \right) + \underbrace{(W_w^r \varphi_w + W_o^r \varphi_o + W_s^r \varphi_s)}_{****}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação da velocidade de Darcy: $\mathbf{V}_{D\alpha} = \varphi_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, com $\alpha = (w, o)$. Chegamos na equação diferencial parcial para o sistema em função da velocidade de Darcy:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\rho_w^r \varphi_w c_w + \rho_o^r \varphi_o c_o + \rho_s^r \varphi_s c_s)}_* \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{(\rho_w^r c_w \mathbf{V}_{Dw} + \rho_o^r c_o \mathbf{V}_{Do})}_{**} \cdot \nabla \theta = \\ & \operatorname{div} \left(\underbrace{(K_w \varphi_w + K_o \varphi_o + K_s \varphi_s)}_{***} \cdot \nabla \theta \right) + \underbrace{(W_w^r \varphi_w + W_o^r \varphi_o + W_s^r \varphi_s)}_{****}. \end{aligned}$$

Seguindo (HOLLMAN, 2013) e (PAZ, 2015), definimos $C_{tot}(Sw)$ como o calor específico total do sistema, $C_{liq}(Sw, \theta)$ como calor específico total dos fluidos e K_{tot} como condutividade térmica total do sistema, que são dependentes da temperatura e saturação. Para encontrar a relação dos coeficientes mencionados, utilizamos a relação da fração volumétrica é a saturação, $\varphi_\alpha = \frac{V_\alpha V_p}{V_p V_T} = \phi S_\alpha$, podemos reescrever (*) como:

$$\begin{aligned} (\rho_w^r \varphi_w c_w + \rho_o^r \varphi_o c_o + \rho_s^r \varphi_s c_s) &= (\rho_w^r S_w \phi c_w + \rho_o^r \phi S_o c_o + \rho_s^r c_s (1 - \phi)), \\ &= (\rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi (\rho_w^r S_w c_w + \rho_o^r c_o (1 - S_w))), \\ &= (\rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi (\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) S_w)), \\ &= C_{tot}(S_w). \end{aligned}$$

Utilizando a relação $\mathbf{V}_{D\alpha} = f_\alpha \mathbf{V}_{Dt}$, reescrevemos (**), como:

$$\begin{aligned} (\rho_w^r c_w \mathbf{V}_{Dw} + \rho_o^r c_o \mathbf{V}_{Do}) &= (\rho_w^r c_w f_w \mathbf{V}_{Dt} + \rho_o^r c_o f_o \mathbf{V}_{Dt}), \\ &= (\rho_w^r c_w f_w + \rho_o^r c_o f_o) \mathbf{V}_{Dt}, \\ &= (\rho_w^r c_w f_w + \rho_o^r c_o (1 - f_w)) \mathbf{V}_{Dt}, \\ &= (\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) f_w) \mathbf{V}_{Dt}, \\ &= \underbrace{(\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) f_w)}_{C_{liq}(Sw, \theta)} \mathbf{V}_{Dt}. \end{aligned}$$

O mesmo procedimento é aplicado em (***) . Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} K_{tot}(S_w) &= (K_w \varphi_w + K_o \varphi_o + K_s \varphi_s), \\ &= (K_w S_w \phi + K_o S_o \phi + K_s (1 - \phi)), \\ &= (K_w S_w \phi + K_o (1 - S_w) \phi + K_s (1 - \phi)), \\ &= (K_s (1 - \phi) + \phi (K_o + (K_w - K_o) S_w)). \end{aligned}$$

Definindo W_{em}^v como o termo fonte total de todas as contribuições de energia de cada fase água, óleo e sólido.

$$W_{em}^v = (W_w^r \varphi_w + W_o^r \varphi_o + W_s^r \varphi_s). \quad (3.41)$$

A partir das simplificações realizadas, chegamos na equação diferencial parcial da conservação de energia que modela o transporte de calor do sistema.

$$(C_{tot}(Sw)) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (C_{liq}(Sw, \theta)) \mathbf{V}_{\mathbf{D}t} \cdot \nabla \theta = \text{div}((K_{tot}(Sw)) \cdot \nabla \theta) + W_{em}^v. \quad (3.42)$$

Podemos reescrever **(3.42)**, como segue:

$$(C_{tot}(Sw)) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (C_{liq}(Sw, \theta)) \text{div}(\theta \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = \text{div}((K_{tot}(Sw)) \nabla \theta) + W_{em}^v. \quad (3.43)$$

Além disso, como os experimentos de laboratório apresentam vazamentos de calor (PAZ, 2015). Assim, estes efeitos são incorporados ao sistema através de um termo reativo que computa as perdas térmicas para o meio. A partir dessas considerações podemos reescrever **(3.43)** como:

$$(C_{tot}(Sw)) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (C_{liq}(Sw, \theta)) \text{div}(\theta \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = \text{div}((K_{tot}(Sw)) \nabla \theta) + C_{ter}(\theta - \theta_0) + W_{em}^v. \quad (3.44)$$

O coeficiente de perdas C_{ter} apresentado na Equação **(3.44)** não foi medido no laboratório. Assim, um dos trabalhos importantes de (PAZ, 2015) foi obter este coeficiente. Nesta dissertação, vamos estimar o coeficiente de perdas térmicas comparando as simulações numéricas com os dados experimentais, obtendo o coeficiente de perdas térmicas C_{ter} através da minimização fazendo $\min \|\theta_{experimento} - \theta_{numérico}\|_2$, que consiste em minimizar na norma euclidiana a diferença de temperatura obtida experimentalmente com a temperatura obtida numericamente.

3.3 Modelo Acoplado

O modelo matemático que descreve o deslocamento do óleo pela água em um meio poroso aquecido por ondas eletromagnéticas, pode ser representado pelo seguinte sistema acoplado sob a hipótese de que toda energia eletromagnética é absorvida pela água.

Problema Acoplado: Dado o tensor de condutividade hidráulica \mathbb{K} a mobilidade total da mistura fluida λ_t , encontrar a pressão $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, a velocidade de Darcy da mistura $\mathbf{V}_{\mathbf{D}t} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, o campo de temperaturas $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $S_w : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{cases} C_{tot}(Sw) \frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{liq}(Sw, \theta) \text{div}(\theta \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = \text{div}(K_{tot} \nabla \theta) + C_{ter}(\theta - \theta_0) + W_{em}^v(x, Sw), \\ \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \text{div}(f_w \mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = 0, \\ \mathbf{V}_{\mathbf{D}t} = -\mathbb{K} \lambda_t \nabla P, \\ \text{div}(\mathbf{V}_{\mathbf{D}t}) = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Suplementado pelas condições iniciais:

$$\theta(\mathbf{x}, t = 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T), \quad (3.46)$$

$$S_w(\mathbf{x}, t = 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T), \quad (3.47)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T). \quad (3.48)$$

onde θ_0, S_0, p_0 são funções conhecidas, sendo Γ_e a fronteira na esquerda e Γ_d a fronteira na direita e as condições de contorno:

$$\theta(\mathbf{x} = 0, t) = g_D \quad \text{sobre } \Gamma_e \times (0, T), \quad (3.49)$$

$$\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{sobre } \Gamma_d \times (0, T), \quad (3.50)$$

$$S_w(\mathbf{x} = 0, t) = 1 - S_{or} \quad \text{sobre } \Gamma_e \times (0, T), \quad (3.51)$$

$$\nabla S_w \cdot \mathbf{n} = q_t \quad \text{sobre } \Gamma_d \times (0, T). \quad (3.52)$$

onde g_D, g_N, q_t representam as condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e fluxo total, respetivamente. Os coeficientes $C_{tot}(S_w), C_{liq}(\theta, S_w), K_{tot}(S_w)$ são funções que dependem da saturação e temperatura definidos como:

$$C_{tot}(S_w) = \rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi(\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) S_w), \quad (3.53)$$

$$C_{liq}(\theta, S_w) = \rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) f_w, \quad (3.54)$$

$$K_{tot}(S_w) = K_s (1 - \phi) + \phi(K_o + (K_w - K_o) S_w). \quad (3.55)$$

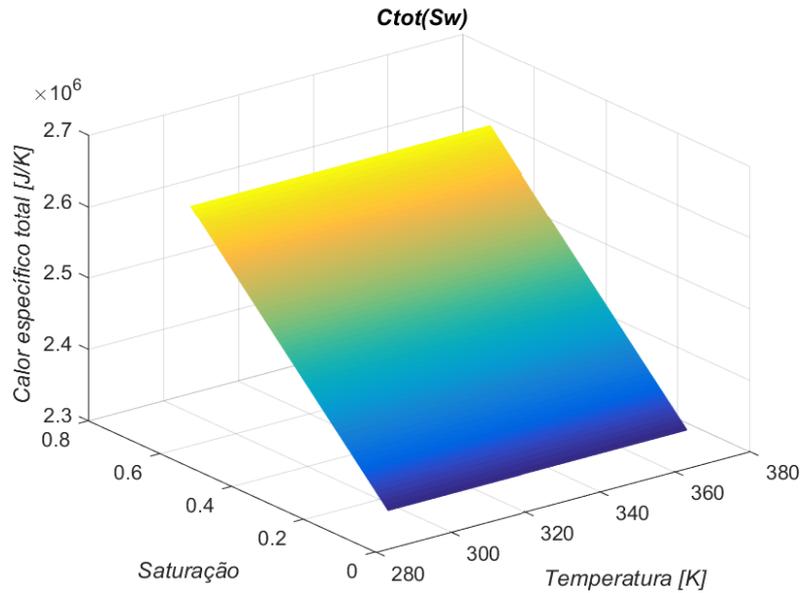
3.4 Interpretação Física dos Parâmetros

O sistema de equações diferenciais parciais da Equação **(3.45)**, apresenta coeficientes como: $C_{tot}, C_{liq}, K_{tot}$, que contém informações importantes. Assim apresentaremos uma breve descrição destes parâmetros como também das funções $f_w, k_{rw}, k_{ro}, W_{em}$.

3.4.1 Calor Específico Total $C_{tot}(S_w)$:

De acordo com a Equação **(3.53)**, esta função representa a capacidade que tem o sistema de armazenar energia, depende das combinações entre densidades, capacidades caloríficas da água, óleo e do sólido, porosidade e saturação.

Figura 14 – Calor específico total do sistema (C_{tot}) em função da saturação e da temperatura



Podemos deduzir o comportamento da função C_{tot} visualizando na Figura 14, mostrando que o calor específico total do sistema mudará conforme a saturação de água cresce.

3.4.2 Calor Específico Total do Líquido $C_{liq}(\theta, S_w)$

De acordo com a definição (3.54), esta função representa a capacidade que tem os fluidos de armazenar energia e depende das combinações de densidades, capacidades caloríficas, e da função de fluxo fracionário.

Figura 15 – Calor específico total do líquido (C_{liq}) em função da temperatura saturação

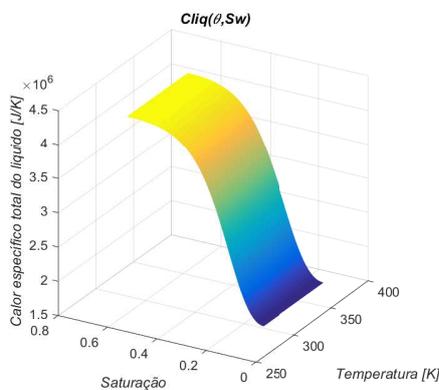
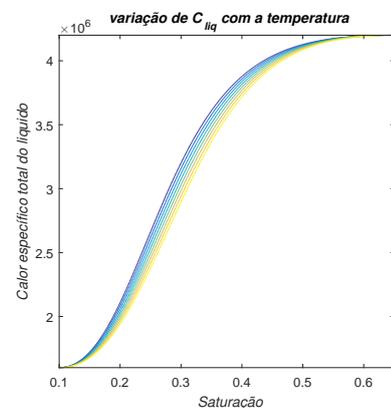


Figura 16 – Calor específico total do líquido (C_{liq}) em função da temperatura.



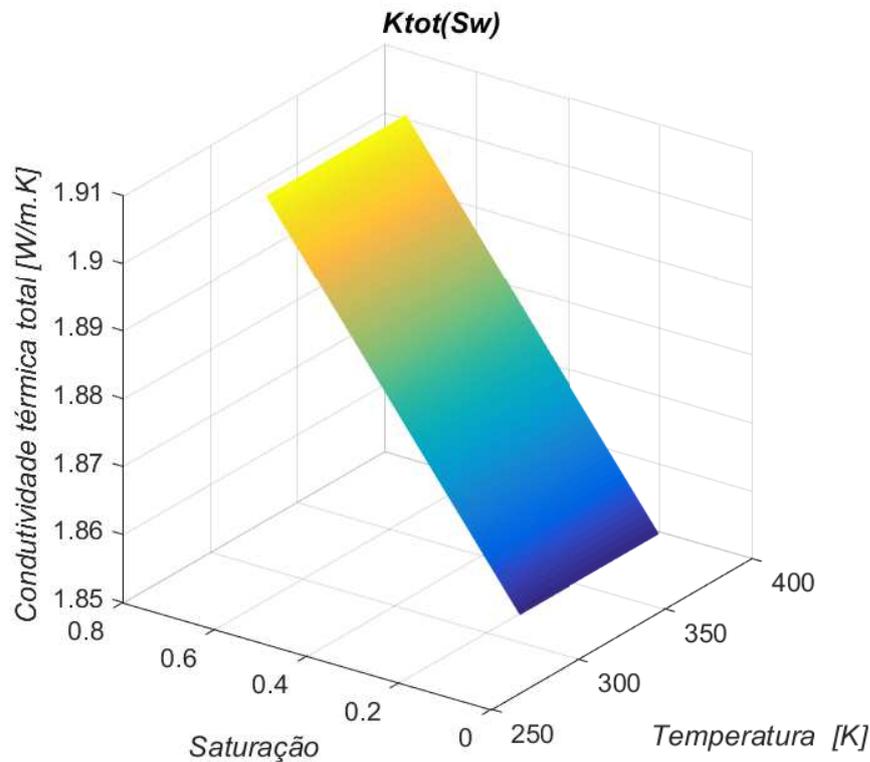
A função calor específico total do líquido (C_{liq}) depende da quantidade de água no meio

poroso e da temperatura, esta função varia proporcionalmente ao valor da função de fluxo fracionário como é ilustrado na Figura 15. Para poder visualizar melhor a variação desta função com a temperatura é ilustrado na Figura 16.

3.4.3 Condutividade Térmica Total $K_{tot}(S_w)$

De acordo com a definição (3.55), esta função quantifica a capacidade do sistema de conduzir energia térmica e depende das combinações das condutividades térmicas, porosidade e saturação.

Figura 17 – Comportamento da condutividade térmica do sistema (K_{tot}) que depende da saturação e da temperatura.



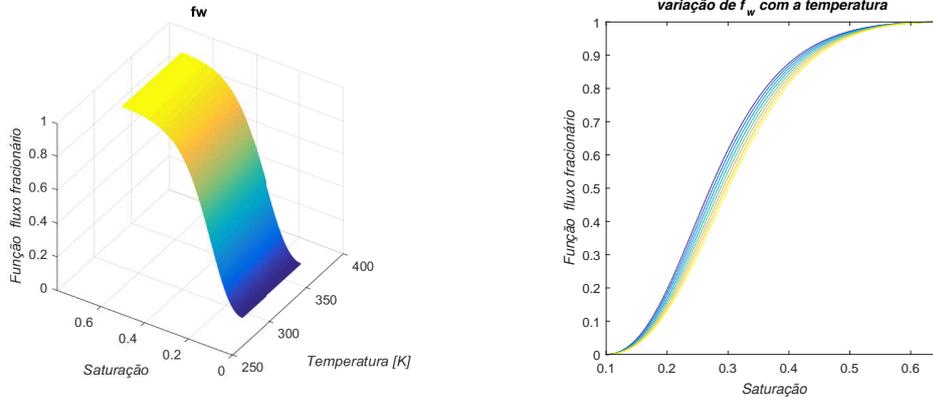
Na Figura 17 ilustramos o comportamento da condutividade térmica do sistema que depende da saturação e temperatura, esta função também está relacionada com a quantidade de água no meio poroso e este valor varia proporcionalmente ao valor da saturação.

3.4.4 Função de Fluxo Fracionário $f_w(\theta, S_w)$:

A facilidade com que a água pode percorrer o meio poroso é representado por λ_w e a facilidade com que o óleo pode percorrer o meio poroso é representado por λ_o . A soma de todas as mobilidades relativas é definido como $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o$ e mede a facilidade com que a mistura percorre o meio poroso. A função de fluxo fracionário representa a razão

entre a mobilidade da água e a mobilidade total e representa a taxa de fluxo da água que passa por um ponto da rocha ((PAZ, 2015)).

Figura 18 – Função de fluxo fracionário com a temperatura e saturação. Figura 19 – Variação da função de fluxo fracionário com a temperatura.



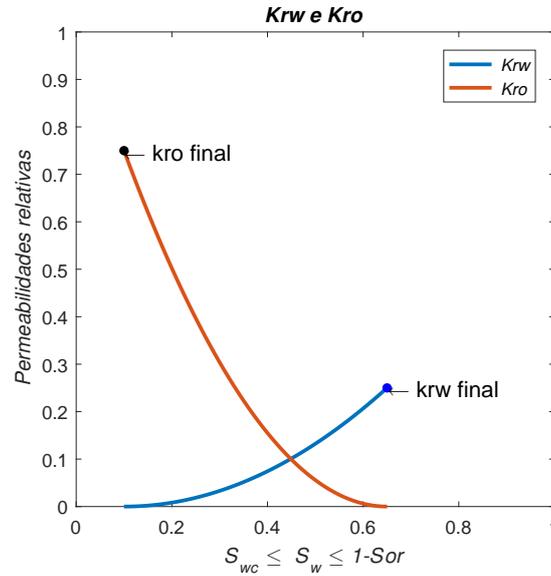
A influencia da temperatura na redução da viscosidade é obtida através da função fluxo fracionário e é ilustrado na Figura 18. Para visualizar melhor a variação desta função com a temperatura é ilustrado na Figura 19.

3.4.5 Permeabilidades Relativas: $k_{rw}(S_w), k_{ro}(S_w)$:

Em escoamentos multifásicos, cada fase fluida exerce uma resistência sobre o movimento do outro. Para poder quantificar essa resistência é utilizado o conceito de permeabilidades relativas, onde k_{rw} corresponde à fase água e k_{ro} à fase óleo, sendo constantes as permeabilidades finais k_{rw}^o e k_{ro}^o do tipo Corey (BROOKS; COREY, 1964), S_{wc} representa a saturação da água conata e S_{or} representa a saturação de óleo residual e n_w e n_o são os expoente para a permeabilidade relativa da água e óleo, definidas como segue:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rw}^o (S)^{n_w}, \\ k_{ro} &= k_{ro}^o (S)^{n_o}, \\ S &= \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}. \end{aligned}$$

Figura 20 – Permeabilidades relativas da água e óleo



Conforme a saturação de água cresce a permeabilidades relativa do óleo diminuirá, este resultado é possível interpretar observando a Figura 20, neste trabalho adotou-se $n_w = n_o = 2$.

3.4.6 Absorção de Energia Eletromagnética

Aquelas ondas que estão próximos de 2.45 GHz ou Micro-ondas possuem a propriedade de ser absorvidas pela água, isso devido à frequência natural da água. Isto ocorre devido à bipolaridade da água, que possui carga positiva pelo átomo de hidrogeno e negativa pelo átomo de oxigeno (HOLLMAN, 2013). A geração de calor é devido à rápida variação da direção do campo eletromagnético associado às ondas sendo aproximadamente de 2400 milhões de vezes por segundo (HAMMACK; RYAN; ZIECH, 2012), dessa forma as moléculas de água tentaram alinhar-se com o campo eletromagnético da radiação. Este procedimento gera uma grande agitação molecular e essa agitação da como resultado o calor. A relação entre a potência e o coeficiente de absorção de ondas eletromagnéticas é calculado assumindo a propagação da radiação na direção de $+x$ (ABERNETHY et al., 1976) e (BERA; BABADAGLI, 2015), como segue:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\alpha_{abs}\psi. \quad (3.56)$$

Onde $\psi(x)$ é a densidade de potência, α_{abs} é o coeficiente de absorção. A partir da integração da relação (3.56), podemos derivar uma expressão para a absorção de cada fase, gerando:

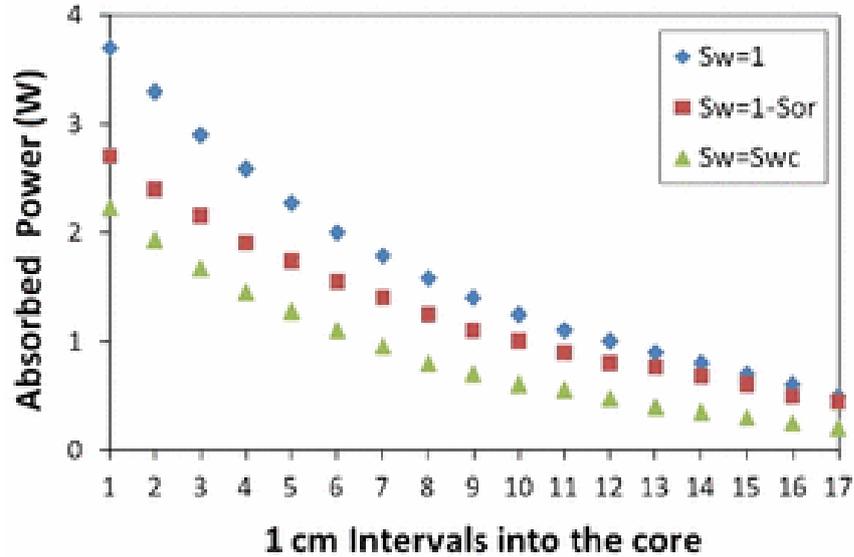
$$W_{em}^r = k_w^{em} e^{-\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)} + k_o^{em} e^{-\left(\frac{y}{\bar{y}}\right)}. \quad (3.57)$$

Os coeficientes de energia gerado pela água e óleo são definidos como: k_w^{em} , k_o^{em} , o parâmetro \bar{x} , \bar{y} depende do comprimento da onda. No desenvolvimento deste trabalho consideramos

$k_o^{em} = 0$, que são as considerações nos trabalhos de (HOLLMAN, 2013) e (PAZ, 2015), obtendo:

$$W_{em}^r = k_w^{em} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)}. \quad (3.58)$$

Figura 21 – Comportamento da absorção para diferentes saturações



Fonte: (HOLLMANN et al., 2014)

A Figura 21, ilustra a absorção de energia eletromagnética pela água, observando um decaimento exponencial, considerando as seguintes saturações $S_w = 1$, $S_w = 1 - S_{or}$ e $S_w = S_{wc}$. Dessa forma, a absorção de calor será proporcional à quantidade da água presente no meio poroso.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros

<i>Simbolo</i>	<i>Grandeza Física</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade(SI)</i>
ϕ	Porosidade	0.21	-
k_{rw}^o	permeabilidade relativa final da água	0.25	-
k_{rw}^0	permeabilidade relativa final do óleo	0.75	-
S_{wc}	Saturação da água conata	0.10	-
S_{or}	Saturação do óleo residual	0.35	-
μ_w	Viscosidade da água	0.001	[Pa.s]
μ_0	Viscosidade do óleo a temperatura ambiente	0.015	[Pa.s]
\mathbf{V}_{Dt}	Velocidade de Darcy	2.94e-04	[m/s]
ρ_s^r	Densidade do meio poroso	2.65e3	[Kg/m ³]
ρ_w^r	Densidade da água	1e3	[Kg/m ³]
ρ_o^r	Densidade do óleo	0.8e3	[Kg/m ³]
c_s	Calor específico do meio poroso	0.92e3	[J/Kg.K]
c_w	Calor específico da água	4.20e3	[J/Kg.K]
c_o	Calor específico do óleo	2.00e3	[J/Kg.K]
K_s	Condutividade térmica do meio poroso	2.30	[W/m.K]
K_w	Condutividade térmica da água	0.58	[W/m.K]
K_o	Condutividade térmica do óleo	0.14	[W/m.K]
L	Comprimento do meio poroso	0.17	[m]
r	Raio do meio poroso	0.019	[m]
A	Área da seção transversal	0.00113	[m]
θ_0	Temperatura inicial	293	[K]
W_{em}	Termo de absorção de energia eletromagnética	-	[J/s]
k_w^{em}	Coefficiente de absorção de energia EM dá água	931.4	[J/m ³ .s]
\bar{x}	distância(Depende do comprimento da onda)	0.1224	[m]

Os Parâmetros utilizados no desenvolvimento das simulações são apresentados na Tabela 1, obtidos de (PAZ et al., 2017).

4 MÉTODO NUMÉRICO

Entre os métodos numéricos para a aproximação de equações diferenciais parciais não lineares existem os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos entre outros. Neste trabalho adotaremos o esquema de diferenças finitas e a forma de linearizar de (CHAPIRO, 2009), que permite concentrar todas as informações da discretização num sistema tridiagonal por blocos. Computacionalmente e em termos de armazenamento de informação é de grande importância, pois as escalas dos reservatórios são de quilômetros e os tempos medidos em anos (PEACEMAN, 1977). Adotaremos os métodos de diferenças finitas em conjunto com a técnica *Splitting*, a ideia principal desta técnica é dividir o sistema geral em subsistemas, desse modo podemos utilizar diferentes esquemas numérico em cada subsistema sendo que o método numérico geral será a composição de todos os esquemas utilizados no desenvolvimento de cada subsistema (STRIKWERDA, 2004), (HOLDEN, 2010).

4.1 Splitting para Sistema de Equações Diferenciais Parciais

O sistema acoplado (3.45), considerando velocidade constante pode ser escrito como:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial G(W)}{\partial x} = B(W) \frac{\partial}{\partial x} (H(W) \frac{\partial W}{\partial x}) + \Psi(W), \quad (4.1)$$

onde:

$$W = \begin{bmatrix} \theta \\ S_w \end{bmatrix}, A(W) = \begin{bmatrix} \frac{C_{iq}(\theta, S_w)}{C_{tot}(S_w)} \mathbf{V}_{D_t} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{V}_{D_t}}{\phi} \end{bmatrix}, G(W) = \begin{bmatrix} \theta \\ f_w \end{bmatrix},$$

$$B(W) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{tot}(S_w)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H(W) = \begin{bmatrix} K_{tot}(S_w) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Psi(W) = \begin{bmatrix} \frac{C_{ter}(\theta - \theta_0) + W_{em}^v(x, S_w)}{C_{tot}(S_w)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dividiremos o Problema (4.1) em dois subsistemas, o primeiro subsistema consistirá em resolver a parte difusiva e reativa do problema transiente, e o segundo sub-sistema consistirá em resolver somente a parte de convecção do problema transiente.

1. **Subsistema 1:** resolver:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B(W) \frac{\partial}{\partial x} (H(W) \frac{\partial W}{\partial x}) + \Psi(W), \quad (4.2)$$

Suplementada pelas condições iniciais:

$$W(x, 0) = W_0 \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

e condições de contorno:

$$W(0, t) = W_e \quad \text{sobre } \Gamma_e \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\nabla W \cdot \mathbf{n} = W_d \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T). \quad (4.5)$$

A condição de Dirichlet fixa um valor no ponto da fronteira para todo instante de tempo e a condição de Neumann está associado ao fluxo.

2. **Subsistema 2:** Encontrado a solução intermediária denotado por \widetilde{W} do Subsistema (4.2), usaremos \widetilde{W} como condição inicial para o segundo Subsistema, Assim a formulação do problema consistirá em resolver:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A(W) \frac{\partial G(W)}{\partial x}, \quad (4.6)$$

Suplementada pelas condições iniciais:

$$W(x, 0) = \widetilde{W} \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T), \quad (4.7)$$

e condições de contorno:

$$W(0, t) = W_e \quad \text{sobre } \Gamma_e \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\nabla W \cdot \mathbf{n} = W_d \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T). \quad (4.9)$$

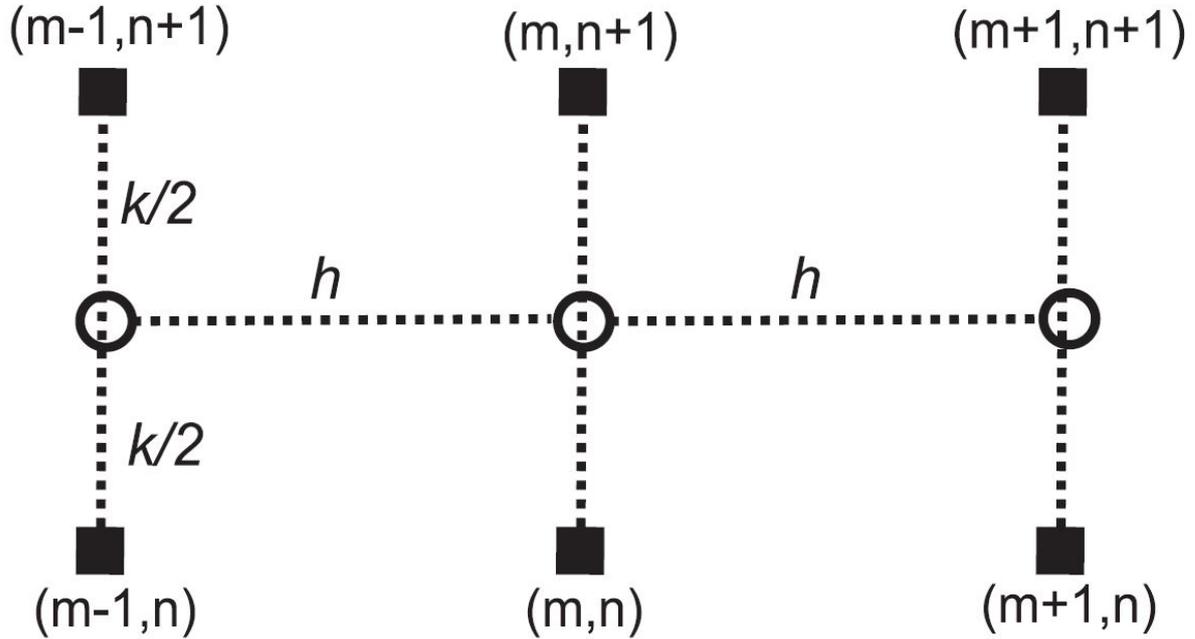
4.2 Método Numérico Para o Subsistema 1

A Equação (4.2) está escrita na forma vetorial e matricial. O vetor W contém as informações da temperatura e saturação, assim para resolver a cada passo de tempo do sistema acoplado a discretização será aplicada no vetor W . Empregaremos o método de Crank Nicolson para resolver o Subsistema (4.2) e encontrar a solução intermediária denotada por \widetilde{W} , esta solução intermediária será utilizada como condição inicial para o Subsistema 2.

4.2.1 Método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson é um esquema de diferenças finitas implícito, aproxima um ponto utilizando a informação dos 6 pontos próximos (STRIKWERDA, 2004). Abaixo apresentamos o estêncil do método:

Figura 22 – Estêncil do método de Crank-Nicolson



Fonte: (CHAPIRO, 2009)

O estêncil deste método é apresentado na Figura 22, sendo m o índice que corresponde ao espaço e n ao tempo, h e k são os respectivos espaçamentos.

$$\left[W_m^{n+\frac{1}{2}} \right]_t = B_m^{n+\frac{1}{2}} \left[(HW_x)_m^{n+\frac{1}{2}} \right]_x + \left[\Psi_m^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.10)$$

Para encurtar a notação representaremos W_m^{n+1} por \bar{W}_m , $B(\bar{W}_m)$ por \bar{B}_m , $H(\bar{W}_m)$ por \bar{H}_m , $\Psi(\bar{W}_m)$ por $\bar{\Psi}_m$. No Subsistema (4.10), a discretização pelo método de Crank-Nicolson do termo temporal, com a notação definida anteriormente é:

$$\left[W_m^{n+\frac{1}{2}} \right]_t = \frac{\bar{W}_m - W_m}{k}. \quad (4.11)$$

Neste contexto, a discretização espacial do termo difusivo nos passos de tempo n e $n+1$ para o termo difusivo é dado por:

$$\begin{aligned} & B_m^{n+\frac{1}{2}} \left[(HW_x)_m^{n+\frac{1}{2}} \right]_x \\ &= \frac{1}{2h^2} B_m^{n+\frac{1}{2}} \left[H_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} (W_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} - W_m^{n+\frac{1}{2}}) + H_m^{n+\frac{1}{2}} (W_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2W_m^{n+\frac{1}{2}} + W_{m-1}^{n+\frac{1}{2}}) - H_{m-1}^{n+\frac{1}{2}} (W_m^{n+\frac{1}{2}} - W_{m-1}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \\ &= \\ & \frac{1}{4h^2} \bar{B}_m \left[\bar{H}_{m+1} (\bar{W}_{m+1} - \bar{W}_m) + \bar{H}_m (\bar{W}_{m+1} - 2\bar{W}_m + \bar{W}_{m-1}) - \bar{H}_{m-1} (\bar{W}_m - \bar{W}_{m-1}) \right] \\ &+ \\ & \frac{1}{4h^2} B_m \left[H_{m+1} (W_{m+1} - W_m) + H_m (W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}) - H_{m-1} (W_m - W_{m-1}) \right]. \end{aligned}$$

A aproximação no ponto $(x_m, t_{n+\frac{1}{2}})$ para o termo reativo $\Psi(W)$ é:

$$\left[\Psi_m^{n+\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_m + \Psi_m). \quad (4.12)$$

Definindo os parâmetros auxiliares $\nu = \frac{k}{4h^2}$, $\eta = \frac{k}{2h}$ e escrevemos do lado esquerdo os termos correspondentes ao tempo $n + 1$ e do lado direito os termos correspondentes ao tempo n , assim:

$$\begin{aligned} & \bar{W}_m - \nu \bar{B}_m [\bar{H}_{m+1}(\bar{W}_{m+1} - \bar{W}_m) + \bar{H}_m(\bar{W}_{m+1} - 2\bar{W}_m + \\ & \bar{W}_{m-1}) - \bar{H}_{m-1}(\bar{W}_m - \bar{W}_{m-1})] - \eta \bar{\Psi}_m = LD(W_{m-1}, W_m, W_{m+1}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

Onde:

$$\begin{aligned} LD(W_{m-1}, W_m, W_{m+1}) = & W_m + \eta \Psi_m \\ & + \nu B_m [H_{m+1}(W_{m+1} - W_m) + H_m(W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}) \\ & - H_{m-1}(W_m - W_{m-1})]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2.2 Processo de Linearização

Com a finalidade de obter um sistema tridiagonal por blocos, utilizaremos a forma de linearizar de (CHAPIRO, 2009) no Sistema (4.13) obtido pelo método Crank-Nicolson.

Observação 4.1. *Seja \mathbf{p} um vetor em \mathbb{R}^d e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de varias variáveis diferenciável em \mathbf{p} . Para \mathbf{x} perto de \mathbf{p} , obtemos uma aproximação:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}). \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ é uma matriz de dimensão $d \times d$ e representa o jacobiano de \mathbf{F} .

Observação 4.2. *Seja \mathbf{p} um vetor em \mathbb{R}^d e $\mathbf{H} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função matricial diferenciável em \mathbf{p} . Para \mathbf{x} perto de \mathbf{p} , obtemos uma aproximação:*

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}). \quad (4.16)$$

onde $\mathbf{J}_{\mathbf{H}}$ é um tensor de dimensão $d \times d \times d$ e representa o jacobiano da matriz \mathbf{H} .

Por simplicidade escreveremos D_W para denotar o jacobiano da Observação 4.1 ou 4.2. O vetor W contém as informações do campo de temperaturas e da saturação, então $\Psi(W)$ e $H(W)$ dependem de W , tem suas derivadas em função de W dadas por:

$$W = \begin{bmatrix} \theta \\ S_w \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}, \quad D_W \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial S_w} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial S_w} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Sendo $D_W \Psi$ uma matriz e $D_W H$ um tensor que obtemos ao derivar a função matricial H em função de W , definida como:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad D_W H = \begin{bmatrix} \nabla H_{11} & \nabla H_{12} \\ \nabla H_{21} & \nabla H_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2 \times 2}. \quad (4.18)$$

Dessa forma, $\nabla H_{11} = [\frac{\partial H_{11}}{\partial \theta} \frac{\partial H_{11}}{\partial S_w}]$ representa o operador gradiente na direção z . A dimensão de $D_W H$ é $2 \times 2 \times 2$ que corresponde a um tensor de terceira ordem. Seguindo (CHAPIRO, 2009) usaremos a seguinte notação [$\ll \dots; \bullet; \dots \gg$] para definir ao produto na segunda componente de um tensor de terceira ordem por um vetor, definido como segue:

Definição 4.1. *Seja \mathbf{T} um tensor de terceira ordem de dimensão $d \times d \times d$ e os vetores W e G de dimensão d . As coordenadas i de [$\ll \mathbf{T}, W, G \gg$] que obtemos ao multiplicar o tensor pelos vetores é definido como [$\ll \mathbf{T}, W, G \gg$] $_i = \sum_{jk} T_{ijk} W_j G_k$. Desta forma ($\ll \mathbf{T}; \bullet; G \gg$) representa a matriz de índices i, j com entradas:*

$$[\ll \mathbf{T}; \bullet; G \gg]_{ij} = \sum_k T_{ijk} G_k.$$

A Definição 4.1 será usada no processo de linearização quando for necessário. As matrizes e vetores G, B, H, Ψ definidas em (4.2) são funções não lineares que dependem de W . Para encurtar a notação representaremos W_m^{n+1} por \bar{W}_m , $A(\bar{W}_m)$ por \bar{A}_m , $G(\bar{W}_m)$ por \bar{G}_m , $B(\bar{W}_m)$ por \bar{B}_m , $H(\bar{W}_m)$ por \bar{H}_m , $\Psi(\bar{W}_m)$ por $\bar{\Psi}_m$, e as derivadas em W das funções vetoriais e matriciais no ponto \bar{W}_m , serão denotadas por $D_W \bar{A}_m, D_W \bar{B}_m, D_W \bar{G}_m, D_W \bar{B}_m, D_W \bar{H}_m, D_W \bar{\Psi}_m$, com as definições apresentadas podemos abstrair a sistema discretizado (4.13), como:

$$R(\bar{W}) = \bar{W}_m - \nu \bar{B}_m [\bar{H}_{m+1}(\bar{W}_{m+1} - \bar{W}_m) + \bar{H}_m(\bar{W}_{m+1} - 2\bar{W}_m + \bar{W}_{m-1}) - \bar{H}_{m-1}(\bar{W}_m - \bar{W}_{m-1})] - \eta \bar{\Psi}_m - LD(W_{m-1}, W_m, W_{m+1}) = 0, \quad (4.19)$$

O Sistema discretizado 4.19 é simplificado a $R(\bar{W}) = 0$, quer dizer que esta função depende do vetor W no tempo $n + 1$, assim como das posições $m - 1, m, m + 1$. Sendo ℓ a iteração do método, \bar{W}^ℓ representará as informações do vetor W no tempo $n + 1$ na iteração ℓ . Assim, definindo $\bar{W}^{\ell+1} = \bar{W}^\ell + \Delta \bar{W}^\ell$, podemos aplicar a Observação 4.1, fazendo $\mathbf{x} = \bar{W}^{\ell+1}$ e $\mathbf{p} = \bar{W}^\ell$, apresentado na seguinte formulação: A linearização do termo \bar{W}_m em 4.19 é:

$$\bar{W}_m^{\ell+1} = \bar{W}_m^\ell + \Delta \bar{W}_m^\ell. \quad (4.20)$$

A linearização da discretização do termo difusivo no tempo $n + 1$ será:

$$\begin{aligned} &= \nu \bar{B}_m^{(\ell+1)} [\bar{H}_{m+1}^{(\ell+1)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell+1)} - \bar{W}_m^{(\ell+1)}) + \bar{H}_m^{(\ell+1)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell+1)} - 2\bar{W}_m^{(\ell+1)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell+1)}) - \bar{H}_{m-1}^{(\ell+1)} (\bar{W}_m^{(\ell+1)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell+1)})] \\ &= \\ &\quad \underbrace{\nu \bar{B}_m^{(\ell+1)} [\bar{H}_{m+1}^{(\ell+1)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell+1)} - \bar{W}_m^{(\ell+1)})]}_{(*)} + \\ &\quad \underbrace{\nu \bar{B}_m^{(\ell+1)} [\bar{H}_m^{(\ell+1)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell+1)} - 2\bar{W}_m^{(\ell+1)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell+1)})]}_{(**)} - \\ &\quad \underbrace{\nu \bar{B}_m^{(\ell+1)} [\bar{H}_{m-1}^{(\ell+1)} (\bar{W}_m^{(\ell+1)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell+1)})]}_{(***)}. \end{aligned}$$

Este procedimento será dividido em 3 partes. Assim, na linearização de (*) utilizamos a Definição 4.1 para pôr em evidência ΔW_m e ΔW_{m+1} , correspondentes às linearizações das matrizes B , H , como segue:

$$\begin{aligned}
&= \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)} + \Delta W_{m+1} - \Delta W_m)] + \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [(\ll (D_W \bar{H})_{m+1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_{m+1} + \\
&\quad \nu [(\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \\
&= \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)})] + \\
&\quad [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m+1}^{(\ell)}] \Delta W_{m+1} - [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m+1}^{(\ell)}] \Delta W_m + \\
&\quad [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_{m+1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_{m+1} + \\
&\quad [\nu (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Na linearização de (**), utilizamos a definição 4.1 da mesma forma para pôr em evidência ΔW_{m-1} , ΔW_m , ΔW_{m+1} , correspondentes às linearizações das matrizes B , H , como segue:

$$\begin{aligned}
&= \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)} + \Delta W_{m+1} - 2\Delta W_m + \Delta W_{m-1})] + \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [(\ll (D_W \bar{H})_m^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m + \\
&\quad \nu [(\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \\
&= \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)})] + [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)}] \Delta W_{m+1} - \\
&\quad [2\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)}] \Delta W_m + [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)}] \Delta W_{m-1} + \\
&\quad [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_m^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m + \\
&\quad [\nu (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

O mesmo procedimento será feito para linearizar (***). Utilizamos a Definição 4.1 para pôr em evidência ΔW_{m-1} , ΔW_m , correspondentes às linearizações das matrizes B , H , como segue:

$$\begin{aligned}
&= \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)} + \Delta W_m - \Delta W_{m-1})] + \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [(\ll (D_W \bar{H})_{m-1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_{m-1} + \\
&\quad \nu [(\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \\
&= \\
&\quad \nu \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)})] + [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m-1}^{(\ell)}] \Delta W_m - [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m-1}^{(\ell)}] \Delta W_{m-1} + \\
&\quad [\nu \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_{m-1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_{m-1} + \\
&\quad [\nu (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \Delta W_m. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Por último, segue a linearização do termo reativo Ψ :

$$\eta_1 \bar{\Psi}_m^{(\ell+1)} = \eta_1 \bar{\Psi}_m^{(\ell)} + [\eta_1 (D_W \bar{\Psi})_m^{(\ell)}] \Delta W_m. \quad (4.24)$$

4.2.3 Matriz em Blocos

Para construir a matriz por blocos, é necessário juntar as Equações (4.20) até (4.24) e substituir na Equação 4.19, logo pôr em evidencia os vetores ΔW_{m-1} , ΔW_m , ΔW_{m+1} . Denotamos L_m a matriz por blocos da diagonal inferior, D_m a matriz por blocos da diagonal principal e por U_m a matriz por blocos da diagonal superior:

$$L_m \Delta W_{m-1} + D_m \Delta W_m + U_m \Delta W_{m+1} + \bar{R}_m^{(\ell)}(W) - LD(W_m) = 0. \quad (4.25)$$

A Equação 4.25, pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{W} + \mathbf{b} = 0. \quad (4.26)$$

Para M pontos da discretização, a matriz \mathbf{J} construída tem dimensão $(M-2) \times (M-2)$. Apresentamos a forma estendida da matriz \mathbf{J} como matriz tridiagonal por blocos:

$$\begin{bmatrix} D_2 & U_2 & & & 0_{2 \times 2} \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & L_m & D_m & U_m & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0_{2 \times 2} & & & L_{M-1} & D_{M-1} \end{bmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} \begin{pmatrix} \Delta W_2 \\ \vdots \\ \Delta W_m \\ \vdots \\ \Delta W_{M-1} \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} = - \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)}$$

A matriz diagonal inferior por blocos será:

$$L_m = \left[-[\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)}] - [\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m-1}^{(\ell)}] + \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_{m-1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg) \right] \Delta W_{m-1}.$$

A matriz diagonal por blocos será definida como:

$$\begin{aligned} D_m = & [I_W + \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m+1}^{(\ell)} + [2\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)} \\ & - \nu_1 (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg) \\ & - [\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_m^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \\ & - [\nu_1 (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] \\ & + [\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m-1}^{(\ell)}] + [\nu_1 (\ll (D_W \bar{B})_m^{(\ell)}; \bullet; \bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)}) \gg)] - \\ & [\eta_1 (D_W \bar{\Psi})_m^{(\ell)}] \Delta W_m. \end{aligned}$$

A matriz diagonal superior por blocos será:

$$U_m = \left[-\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_{m+1}^{(\ell)} - \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} (\ll (D_W \bar{H})_{m+1}^{(\ell)}; \bullet; (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)}) \gg) - [\nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} \bar{H}_m^{(\ell)}] \right] \Delta W_{m+1}.$$

O vetor R_m^ℓ será:

$$R_m^\ell = \left[\bar{W}_m^{(\ell)} - \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m+1}^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - \bar{W}_m^{(\ell)})] \right. \\ \left. - \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_m^{(\ell)} (\bar{W}_{m+1}^{(\ell)} - 2\bar{W}_m^{(\ell)} + \bar{W}_{m-1}^{(\ell)})] + \nu_1 \bar{B}_m^{(\ell)} [\bar{H}_{m-1}^{(\ell)} (\bar{W}_m^{(\ell)} - \bar{W}_{m-1}^{(\ell)})] - \eta_1 \bar{\Psi}_m^{(\ell)} \right].$$

A matriz \mathbf{J} de dimensão $(M-2) \times (M-2)$ contém as matrizes por blocos L_m, D_m, Um de dimensão 2×2 , os correspondentes vetores $\Delta \mathbf{W}, \mathbf{b}$ possuem dimensão $(M-2) \times 1$. Dessa forma utilizando como condição inicial $\bar{\mathbf{W}}^{\ell=0} = \mathbf{W}_0$, resolvemos o sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{W} &= -\mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{W}}^{\ell+1} &= \bar{\mathbf{W}}^\ell + \Delta \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na parte do processo iterativo foi considerado uma tolerância de $1e-05$ e 12 como número máximo de passos da iteração.

4.3 Método Numérico Para o Subsistema 2

O Subsistema (4.6), consiste em resolver a equação diferencial parcial utilizando como condição inicial a solução \tilde{W} do subsistema (4.2). Com a finalidade de obter taxa quadrática $O(h^2)$, o termo convectivo foi discretizado e resolvido aplicando o método de Crank-Nicolson porém este esquema apresentou oscilações perto da fronteira. Segundo (RODRIGUES, 2015) o esquema de diferenças possui taxa quadrática quando o deslocamento do óleo influenciado pela água estiver longe da fronteira e podendo aparecer oscilações perto da fronteira. Do ponto de vista prático este método pode ser empregado em regiões distantes da fronteira. Com todas estas observações e devido ao fato de que precisamos aproximar o Buckley-Leverett na fronteira adotamos para o termo convectivo uma discretização pelo esquema explícito de diferenças, este esquema resultou numa boa aproximação para a equação Buckley-Leverett obtendo taxa linear $O(h)$ sob a restrição da condição de CFL. A abordagem do problema será resolver:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A(W) \frac{\partial G(W)}{\partial x}, \quad (4.28)$$

Suplementada pela condição inicial:

$$W(x, 0) = \tilde{W} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (4.29)$$

e condições de contorno:

$$W(0, t) = W_e \quad \text{em } \Gamma_e \times (0, T), \quad (4.30)$$

$$\nabla W \cdot \mathbf{n} = W_d \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T), \quad (4.31)$$

Para resolver este subsistema adotaremos um esquema upwind de primeira ordem:

$$\bar{W} = W_m - \frac{k}{h} A_m (G_m - G_{m-1}). \quad (4.32)$$

4.4 Condições de Contorno

Dentre as condições de contorno podemos mencionar condição de contorno do tipo Dirichlet que fixa um valor na fronteira, a condição de Neumann associado ao fluxo, a condição de Robin que é uma condição mista composta pela combinação das condições de Dirichlet e Neumann.

- **Condição de Contorno Dirichlet:** Para esta condição temos que impor um valor fixo no ponto da fronteira para todo instante de tempo. Assim para o ponto $m = 1$, temos:

$$W(x_1, t) = W_D = \begin{bmatrix} \theta(x_1, t) \\ S_w(x_1, t) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

- **Condição de Contorno Neumann:** Esta condição esta associado ao fluxo na fronteira, para aproximar o fluxo se introduz o ponto fantasma, dessa forma para aproximar a derivada no ponto $m = M$, será usando o esquema centrado de segunda ordem para o Subsistema (4.2) e um esquema de primeira ordem para o Subsistema (4.6), dessa forma a aproximação é:

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x_M, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_M, t) \\ \frac{\partial S_w}{\partial x}(x_M, t) \end{bmatrix} = W_N. \quad (4.34)$$

5 VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO PROPOSTO COM A SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA

Nesta seção, resumimos o trabalho de (PAZ et al., 2017), onde soluções semi-analíticas foram encontradas usando o princípio de Duhamel. Com a finalidade de validar faremos comparações com o método numérico implementado em MATLAB utilizando os mesmos parâmetros e hipóteses empregadas nestes trabalhos. Assim, a equação diferencial parcial que descreve o modelo físico em estudo, com as respectivas condições iniciais e de contorno pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + a \nabla \theta = b \Delta \theta + c \theta + W, \quad (5.1)$$

$$\theta(x, 0) = T_0, \quad (5.2)$$

$$\theta(0, t) = T_2. \quad (5.3)$$

Note que não temos condição de contorno na direita, pois é uma solução na semi-reta $[0, \infty]$. Os parâmetros a , b , c são calculados usando as informações da Tabela 1, como segue:

$$a = \frac{C_{liq} \phi^2}{C_{tot}}, \quad b = \frac{K_{tot}}{L \mathbf{V}_{Dt} C_{tot}}, \quad c = \frac{L C_{ter} \phi}{\mathbf{V}_{Dt} C_{tot}}. \quad (5.4)$$

A solução semi-analítica encontrada para a temperatura é apresentada por (PAZ et al., 2017), como segue:

$$\theta(x, t) = e^{(\beta t + \alpha x)} \left(\int_0^\infty G(x, y, t) e^{(-\alpha y)} T_0 dy + \int_0^t H(x, t-s) e^{(-\beta s)} T_2 ds + \int_0^t \int_0^\infty G(x, y, t-s) e^{[-(\beta s + \alpha y)]} W(y, s) dy ds \right), \quad (5.5)$$

onde os parâmetros são $\alpha = \frac{a}{2b}$ e $\beta = c - \frac{a^2}{4b}$ e dependendo da condição de fronteira as funções núcleo de calor G , H , são calculados como:

- **Dirichlet:**

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4bt} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4bt} \right] \right\} \quad (5.6)$$

$$H(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi bt^{3/2}}} \exp \left(-\frac{x^2}{4bt} \right). \quad (5.7)$$

- **Neumann:**

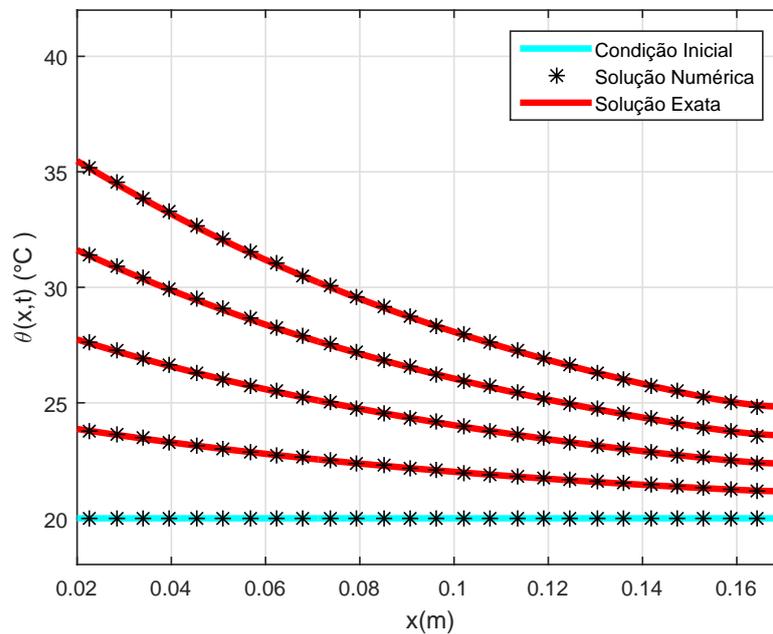
$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4bt} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4bt} \right] \right\} \quad (5.8)$$

$$G(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi bt}} \exp \left(-\frac{x^2}{4bt} \right). \quad (5.9)$$

5.1 Validação do Experimento 1

Para validar o experimento 1, utilizaremos os seguintes parâmetros $a = 0$, $b = 8.09712e - 07$, $c = 0$, detalhados em (PAZ et al., 2017). A solução semi-analítica para a Equação (5.1) foi encontrada por (PAZ, 2015) usando o princípio de Duhamel. Para o método numérico consideramos o domínio unidimensional $\Omega = [0, L]$, onde $L = 0.17m$, sendo $h = 0.0034$ e o tempo foi simulado até 120 segundos com um $k = 0.5$ segundos, como condições de contorno tipo Neumann igual a zero em $x = 0$ e $x = L$.

Figura 23 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica do experimento 1.



As comparações da solução numérica com a solução semi-analítica são apresentado na Figura 23 para os tempos $t = 0, 30, 60, 90, 120$ segundos. Na posição $x = 0.02m$ encontra-se o primeiro sensor que mede a variação da temperatura, a solução semi-analítica esta no domínio $\Omega = [0.02, L]$. Dessa forma, as simulações numéricas também serão apresentados neste domínio.

5.2 Validação do Experimento 4

Para validar o experimento 4, utilizaremos os parâmetros apresentados em (PAZ et al., 2017), sendo $a = 2.08729e - 04$, $b = 8.09712e - 07$, $c = 0$, $W = 0$ para o experimento sem considerar perdas térmicas e os parâmetros $a = 0$, $b = 8.09712e - 07$, $c = -1.5e - 4$, $W = 0$ para o experimento considerando as perdas térmicas, estes parâmetros são utilizados para resolver a Equação (5.1). As simulações correspondem a um domínio unidimensional de malha uniforme cujo domínio $\Omega = [0, L]$, onde $L = 0.17$ m, sendo $h = 0.0034$ e $k = 0.5$

segundos. Como condições de contorno foi utilizado Dirichlet = 20°C em $x = 0$ e Neumann nulo em $x = L$.

Figura 24 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica sem perdas térmicas.

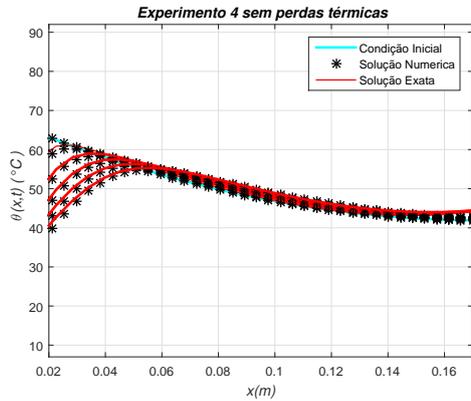
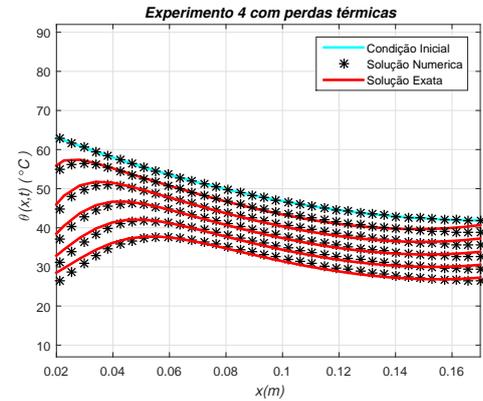


Figura 25 – Simulação numérica Vs Solução semi-analítica com perdas térmicas.

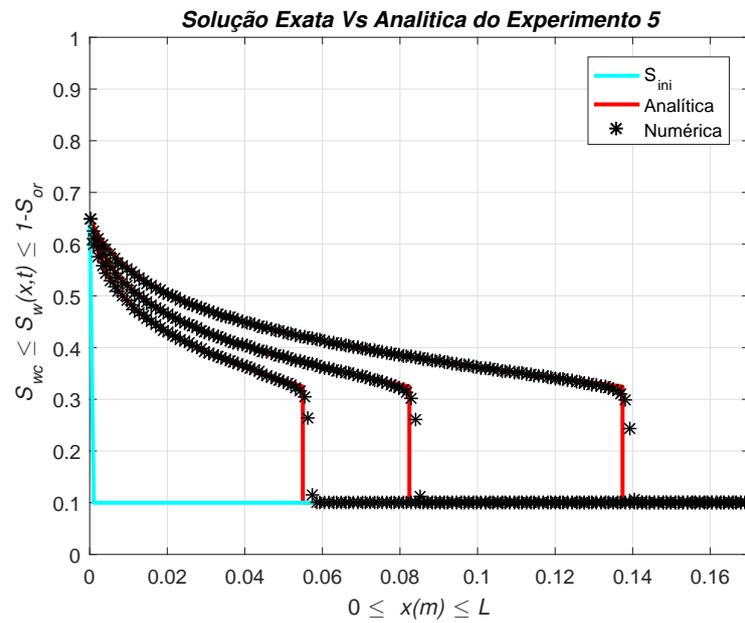


Com a finalidade de comparar com a solução semi-analítica os resultados serão ilustrados no domínio $\Omega = [0.02, L]$. Assim, a comparação da solução semi-analítica encontrada por (PAZ, 2015) com a solução numérica sem considerar as perdas térmicas é apresentado na Figura 24. Na Figura 25 apresentamos as comparações para este experimento considerando perdas térmicas, para os tempos $t = 0$ PV até 2.5 PV.

5.3 Validação do Experimento 5

O experimento 5, descrito no **Capítulo 2**, consiste em resolver a clássica equação de Buckley-Leverett. Esta equação descreve o deslocamento do óleo influenciado pela injeção da água. A formulação é apresentado no **Capítulo 3** e a solução analítica apresentada no **Apêndice A**. Consideramos permeabilidades tipo Corey (BROOKS; COREY, 1964) e o meio poroso homogêneo. As simulações correspondem a um domínio unidimensional de malha uniforme (x_m, t_n) de domínio $\Omega = [0, L]$, onde $L = 0.17$ m, com espaçamentos $h = 0.001$, $k = 0.005$ segundos, e uma $\mathbf{V}_{Dt} = 4.6e - 03$ como condições de contorno foi utilizado Dirichlet em $x = 0$ e Neumann igual a zero em $x = L$.

Figura 26 – Simulação numérica Vs Solução analítica do escoamento bifásico.



A Equação de Buckley-Leverett descreve o deslocamento do óleo influenciado pela água. Na Figura 26 ilustramos o comportamento da solução analítica com a solução exata para este problema.

6 RESULTADOS DO MÉTODO NUMÉRICO

Nesta seção, apresentaremos as simulações numéricas para os experimentos 1, 4, 5 e 7 descritos no **Capítulo 2**, os resultados numéricos serão comparados com os dados obtidos pelos sensores. Cada experimento tem sua respectiva equação diferencial parcial que o descreve e seu próprio objetivo, dessa forma nós obteremos informações importantes para concluir a melhoria do método térmico. O experimento 1, consiste em resolver o problema evolutivo com termos difusivo e reativo. O experimento 4, consiste em resolver o problema evolutivo com termos convectivo e difusivo. O experimento 5, a clássica equação de Buckley-Leverett e o experimento 7 consiste em resolver o problema evolutivo com termos convecção difusão e reação de um problema acoplado. Os resultados serão apresentados em graus centígrados, com a finalidade de comparar os dados experimentais. Em todos os resultados as simulações numéricas serão apresentados por uma linha continua para cada instante de tempo e o perfil de temperatura obtida pelos sensores será apresentada por pontos nas posições 2, 5, 9 e 14 cm, que representam as posições onde foram colocados os sensores.

6.1 Discretização do Domínio

Para as simulações numéricas definimos um conjunto de pontos sobre $\Omega = [0, L]$ dado por: $x_1 = 0$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h \dots$, $x_M = L$ e um conjunto de pontos sobre $I = [0, T]$ dado por: $t_1 = 0$, $t_2 = t_1 + k$, $t_3 = t_2 + k \dots$, $t_N = T$, onde h e k , são os respectivos espaçamentos, Γ_e é a fronteira na esquerda e Γ_d é a fronteira na direita. A malha é composta pelo conjunto de pontos discretos $\Omega \times I$ e esta malha será utilizada em todas as simulações.

6.2 Simulação Numérica do Experimento 1

O experimento 1, detalhado no **Capítulo 2** tem por objetivo testar a absorção de calor gerado pelo aquecimento eletromagnético a uma potência de 300W, considerando o meio poroso completamente saturado da água. No desenvolvimento desta simulação é feita pelo método de Crank-Nicolson, considerando $h = 0.0034$, $k = 0.5$ e $T = 120$ segundos. A condição inicial da temperatura é considerada 293 K e condição de fronteira do tipo Neumann em $x = 0$ e $x = L$. Os parâmetros são definidos na Tabela. **1** e a equação diferencial parcial que governa este experimento é apresentada na seguinte formulação.

Problema Modelo: Dados os parâmetros C_{tot} e K_{tot} , encontrar o campo de

temperatura $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$C_{tot} \frac{\partial \theta}{\partial t} = K_{tot} \Delta \theta + W_{em}^v(x, S_w), \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.1)$$

Suplementada pela condição inicial:

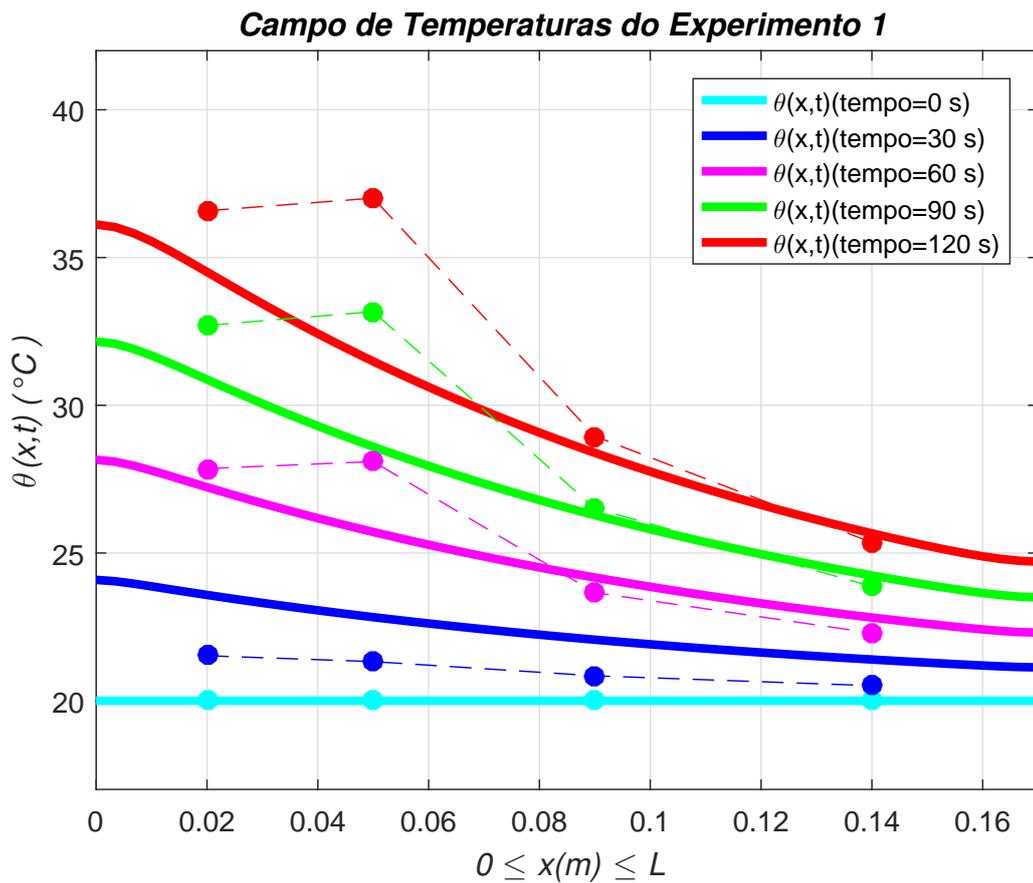
$$\theta(\mathbf{x}, t = 0) = \theta_0(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

e condições de contorno:

$$\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } (\Gamma_e \cup \Gamma_d) \times (0, T). \quad (6.3)$$

- **Resultados das simulações com os dados obtidos dos sensores:**

Figura 27 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha contínua) do experimento 1.



Observando a Figura 27, os perfis de temperatura obtida pelos sensores mostram um maior aquecimento na esquerda e um menor aquecimento na direita, os resultados numéricos mostram que conforme passa o tempo o perfil de temperatura também apresenta um maior aquecimento na direita e menor na esquerda.

6.3 Simulação Numérica do Experimento 4

O experimento 4, detalhado no **Capítulo 2**, trata-se de um escoamento monofásico que tem por objetivo testar o transporte do calor. Este experimento é composto de duas etapas, a primeira etapa consiste em aquecer o meio poroso a uma potência de 300 W, logo após 120 segundos o gerador de ondas eletromagnéticas é desligado. A segunda etapa consiste na injeção de água a um fluxo de 20 ml/min que corresponde a uma injeção de $Q_{inj} = 3.3e - 07 \text{ m}^3/s$, utilizando os dados da Tabela. **1** obtemos a velocidade de Darcy da água $\mathbf{V}_{Dw} = \frac{Q_{inj}}{A} = 2.94e - 04$. Para este experimento utilizamos $h = 0.0034$ e $k = 0.5$. A condição inicial será o perfil de temperaturas do experimento 1 no tempo 120 segundos e como condição de contorno aplicamos Dirichlet igual a 293 K em $x = 0$ e tipo Neumann em $x = L$. A equação diferencial parcial que governa este experimento é apresentada na seguinte formulação.

Problema Modelo: Dados os parâmetros $C_{tot}, C_{liq}, K_{tot}, C_{ter}$ e a velocidade de Darcy \mathbf{V}_{Dw} , encontrar o campo de temperatura $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$C_{tot} \frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{liq} \mathbf{V}_{Dw} \nabla \theta = K_{tot} \Delta \theta + C_{ter} (\theta - \theta_0) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.4)$$

Suplementada pela condição inicial:

$$\theta(\mathbf{x}, t = 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.5)$$

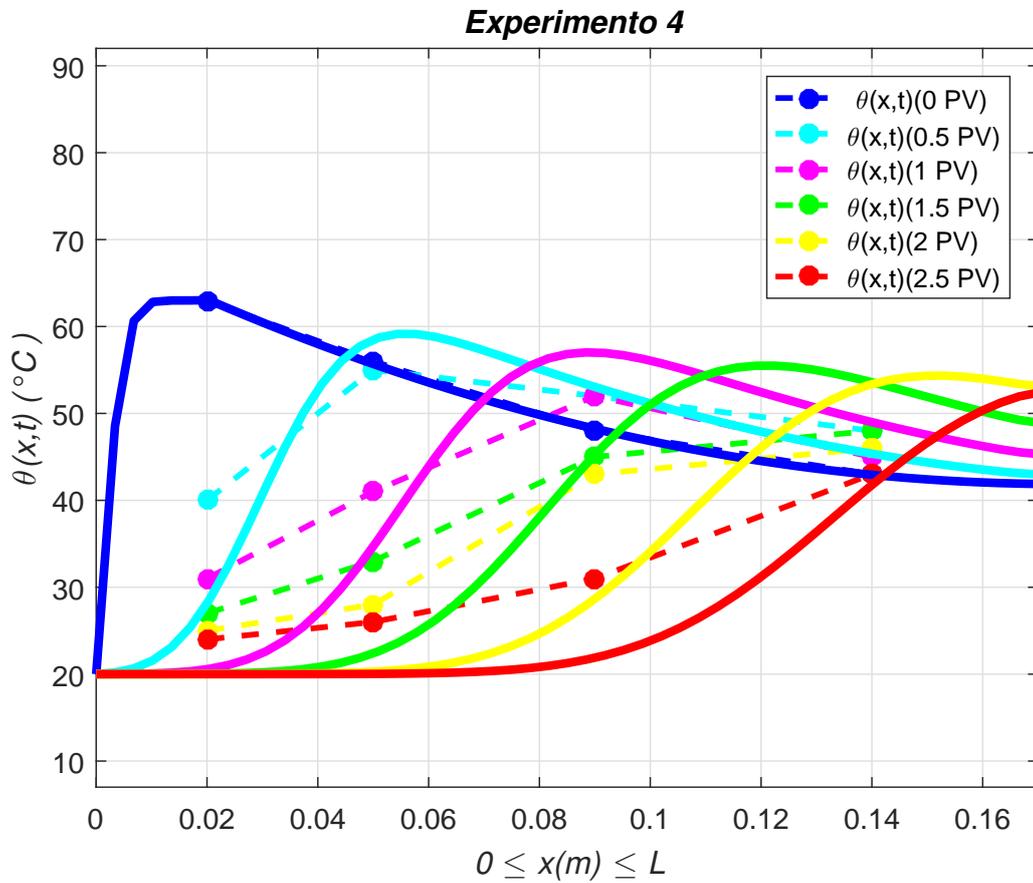
e condições de contorno:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = 293 \text{ K} \quad \text{em } \Gamma_e \times (0, T), \quad (6.6)$$

$$\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T). \quad (6.7)$$

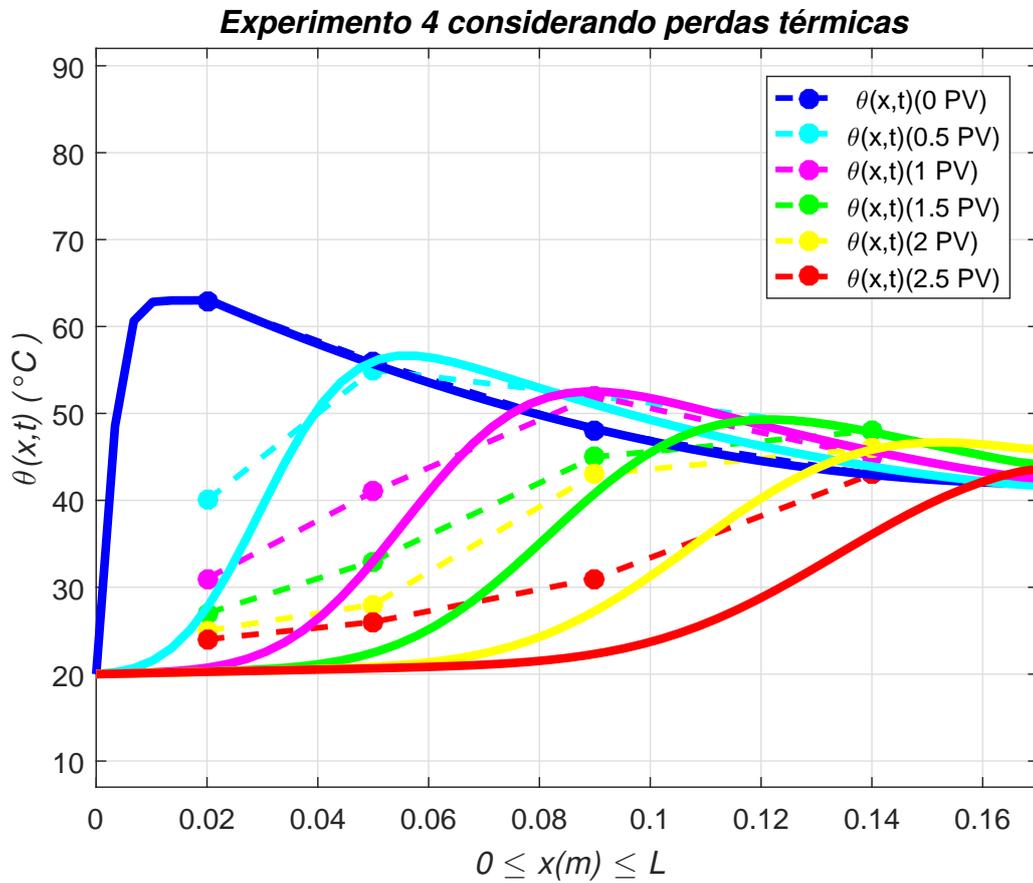
- **Resultados das simulações com os dados experimentais:**

Figura 28 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha contínua) do experimento 4 sem perdas térmicas.



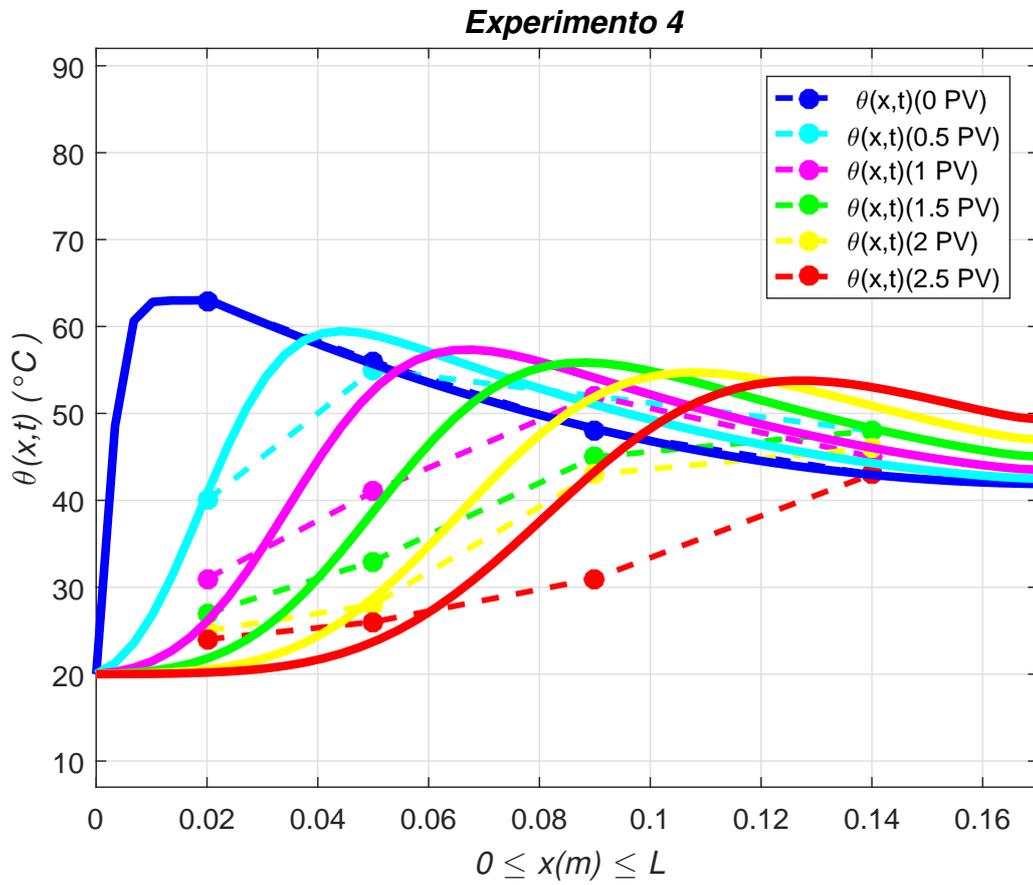
A condição inicial do perfil de temperatura é representada pela linha azul contínua na Figura 28, nesse instante a injeção de água acontece no meio poroso, observamos que conforme passa o tempo este perfil inicial está sendo transportado. Comparando com o perfil de temperatura obtida pelos sensores, a simulação numérica mostra um maior deslocamento. Neste experimento os coeficientes foram avaliados em $S_w = 1$.

Figura 29 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha contínua) do experimento 4 com perdas térmicas.



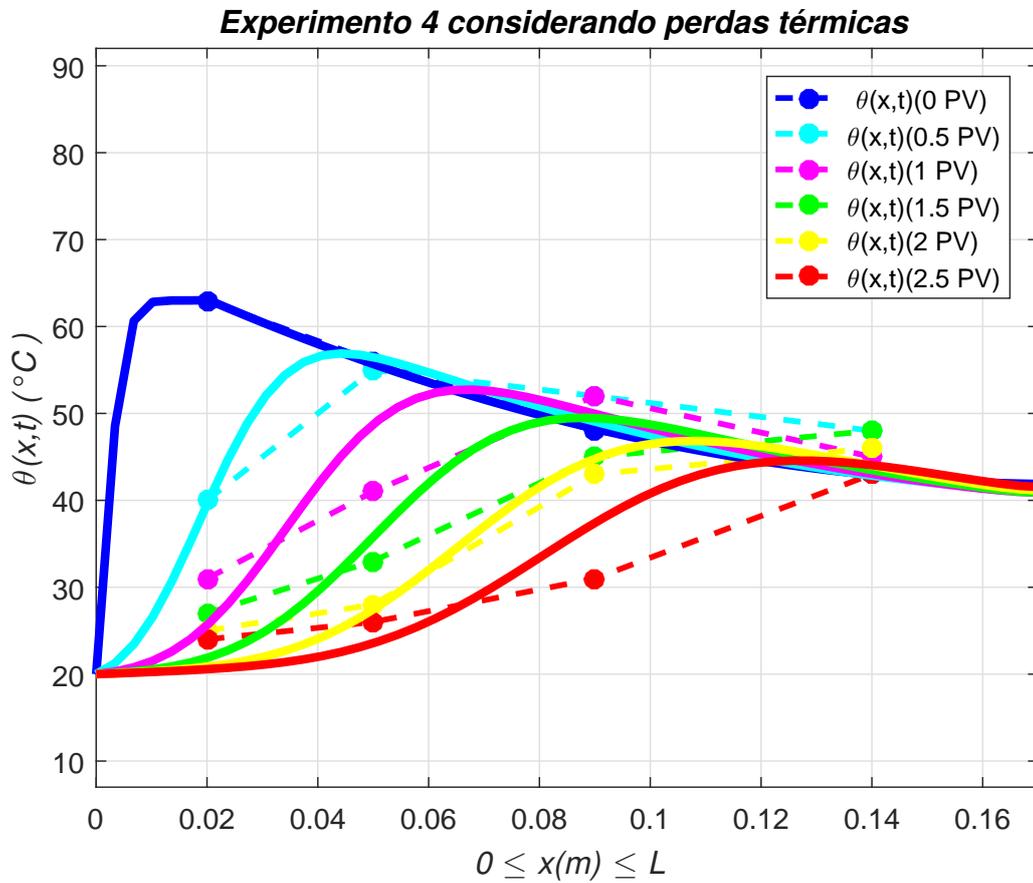
Na Figura 29 apresentamos o campo de temperatura considerando as perdas térmicas, onde $C_{ter} = -3200$. Os coeficientes C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} foram avaliados em $S_w = 1$ e os resultados numéricos mostram uma melhoria na aproximação da temperatura perto da fronteira direita, porém o transporte do perfil inicial ainda está sendo deslocado rapidamente em comparação com os dados dos sensores, uma possível explicação está relacionado à variação das funções C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} com a saturação, veja **Apêndice B**. Dessa forma mostramos os resultados no seguinte gráfico:

Figura 30 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha contínua) do experimento 4 sem perdas térmicas.



Como as funções C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} mudam de valor com a saturação, podemos diminuir o rápido deslocamento avaliando estas funções em $S_w = 0.5$. Assim, a função C_{liq} relacionada com a velocidade influirá diretamente no deslocamento, ilustramos os resultados na Figura 30.

Figura 31 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica (linha contínua) do experimento 4 com perdas térmicas



A Figura 31, ilustra o campo de temperatura dos sensores com os resultados numéricos considerando as perdas térmicas, onde $C_{ter} = -3000$. Neste procedimento os coeficientes C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} foram avaliados em $S_w = 0.5$ e o coeficiente de perdas térmicas foi encontrado como é explicado no **Capítulo 3**.

6.4 Simulação Numérica do Experimento 5

O experimento 5, detalhado no **Capítulo 2** tem por objetivo calcular a produção do óleo utilizando injeção de água sem aquecimento eletromagnético, desta forma este experimento consiste em resolver a clássica equação de Buckley-Leverett. A viscosidade do óleo a temperatura ambiente é igual a $\mu_0 = 0.015[Pa.s]$. A velocidade de Darcy é calculada utilizando a relação $\mathbf{V}_{Dt} = -\mathbb{K}\lambda_t \nabla P$, onde a informação do campo de pressão para este experimento estão detalhadas em (HOLLMANN et al., 2014). O Método numérico neste experimento é o *Splitting*, onde $h = 0.0017$, $k = 0.25$ e condição de CFL=0.206.

Problema Modelo: Dada a velocidade de Darcy \mathbf{V}_{Dt} , encontrar a Saturação da

água $S_w : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_w) + \text{div}(f_w \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \quad (6.8)$$

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{k_{ro}}{k_{rw}}}. \quad (6.9)$$

Suplementada pela condição inicial:

$$S_w(\mathbf{x}, t = 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.10)$$

e condição de contorno:

$$S_w(\mathbf{x}, t) = 1 - S_{or} \quad \text{em } \Gamma_e \times (0, T), \quad (6.11)$$

$$\nabla S_w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T). \quad (6.12)$$

- Resultados das simulações: Deslocamento do óleo sem aquecimento

Figura 32 – Saturação da água antes do *Breakthrough*.

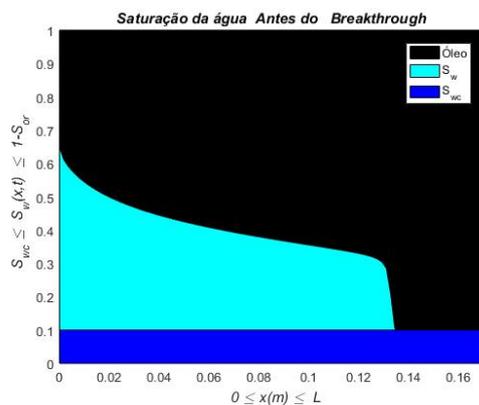
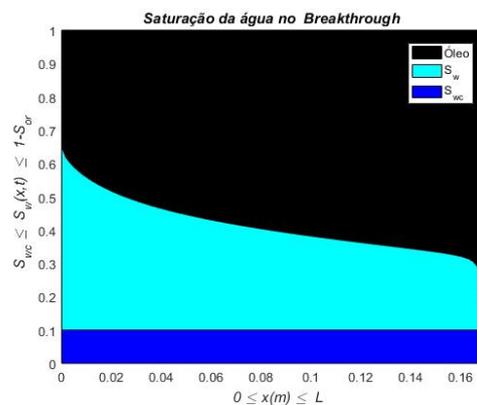


Figura 33 – Saturação da água no momento do *Breakthrough*.



A Figura 32, ilustra o deslocamento do óleo devido à injeção de água antes do *Breakthrough*. A Figura 33, ilustra o deslocamento do óleo devido à injeção de água no momento do *Breakthrough*.

Figura 34 – Saturação da água no tempo 1 PV sem aquecimento EM.

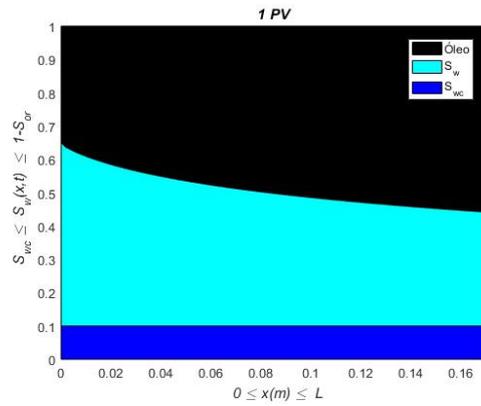


Figura 35 – Saturação da água no tempo 2 PV sem aquecimento EM.

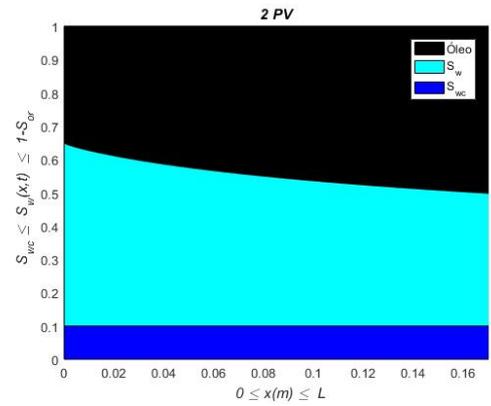


Figura 36 – Saturação da água no tempo 3 PV sem aquecimento EM.

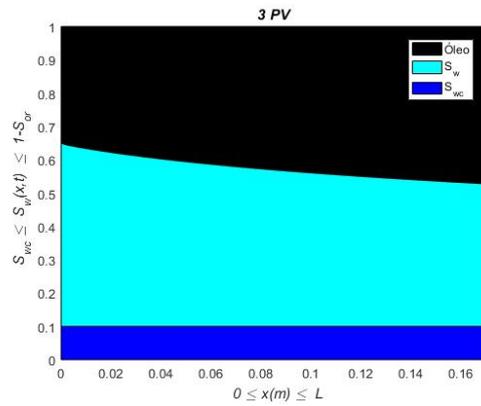


Figura 37 – Saturação da água no tempo 4 PV sem aquecimento EM.

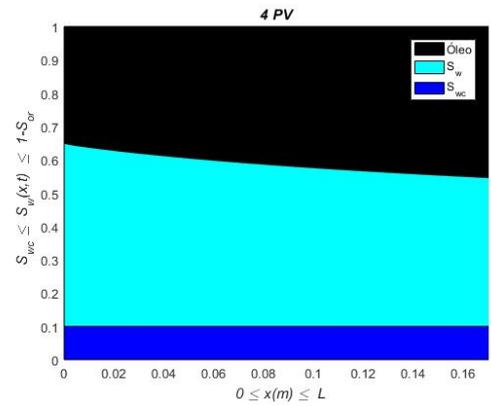


Figura 38 – Saturação da água no tempo 5 PV sem aquecimento EM.

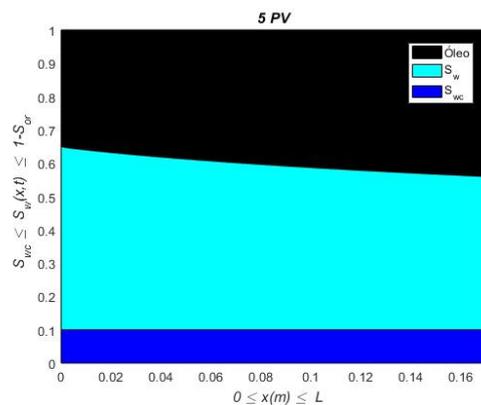
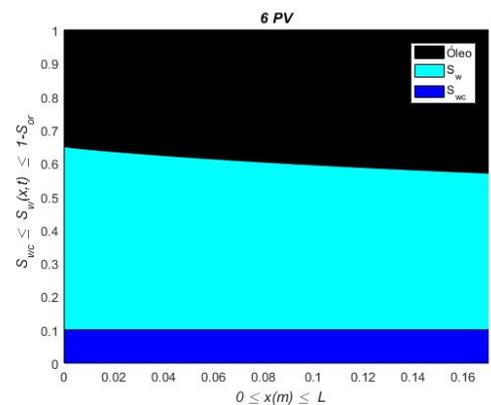


Figura 39 – Saturação da água no tempo 6 PV sem aquecimento EM.

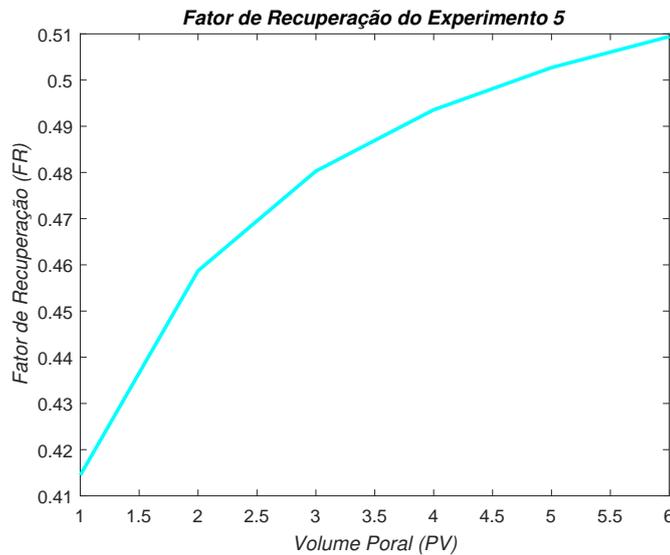


Os deslocamentos do óleo devido à injeção de água são apresentados nas Figuras 34 à 39,

os tempos foram medidos em volumes porosos.

- **Fator de Recuperação:** O fator de recuperação é a quantidade de óleo extraído para diferentes instantes de tempo.

Figura 40 – Fator de recuperação do experimento 5



A Figura 40, ilustra o fator de recuperação do óleo de 1PV até 6PV.

6.5 Simulação Numérica do Experimento 7

O experimento 7, detalhado no **Capítulo 2**, tem por objetivo calcular a melhoria na produção do óleo devido ao aquecimento eletromagnético. Neste experimento o gerador de ondas eletromagnéticas é ligado a uma potência de $P = 150$ W, seguidamente da injeção de água. Consideramos um decaimento exponencial $\mu_o(\theta) = \mu_0 e^{-\frac{\theta}{\theta_0}}$ para a relação da viscosidade do óleo com a temperatura apresentada pela primeira vez por (REYNOLDS, 1886), os parâmetros estão definidos na Tabela. 1. A técnica numérica para resolver este problema acoplado é o chamado *Splitting*, onde $h = 0.0017$, $k = 0.25$ e condição de CFL=0.206. Apresentamos abaixo a formulação do problema acoplado.

Problema Modelo: Dada a velocidade de Darcy total \mathbf{V}_{Dt} , encontrar o campo de temperatura $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e saturação $S_w : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ do problema acoplado, tais que:

$$\begin{cases} C_{tot} \frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{liq} \text{div}(\theta \mathbf{V}_{Dt}) = \text{div}(K_{tot} \nabla \theta) + C_{ter}(\theta - \theta_0) + W_{em}(x, S_w), \\ \phi \frac{\partial}{\partial t}(S_w) + \text{div}(f_w \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \end{cases} \quad (6.13)$$

Suplementada pelas condições iniciais:

$$\theta(\mathbf{x}, t = 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.14)$$

$$S_w(\mathbf{x}, t = 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (6.15)$$

e condições de contorno:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = 293^\circ K \quad \text{em } \Gamma_e \times (0, T), \quad (6.16)$$

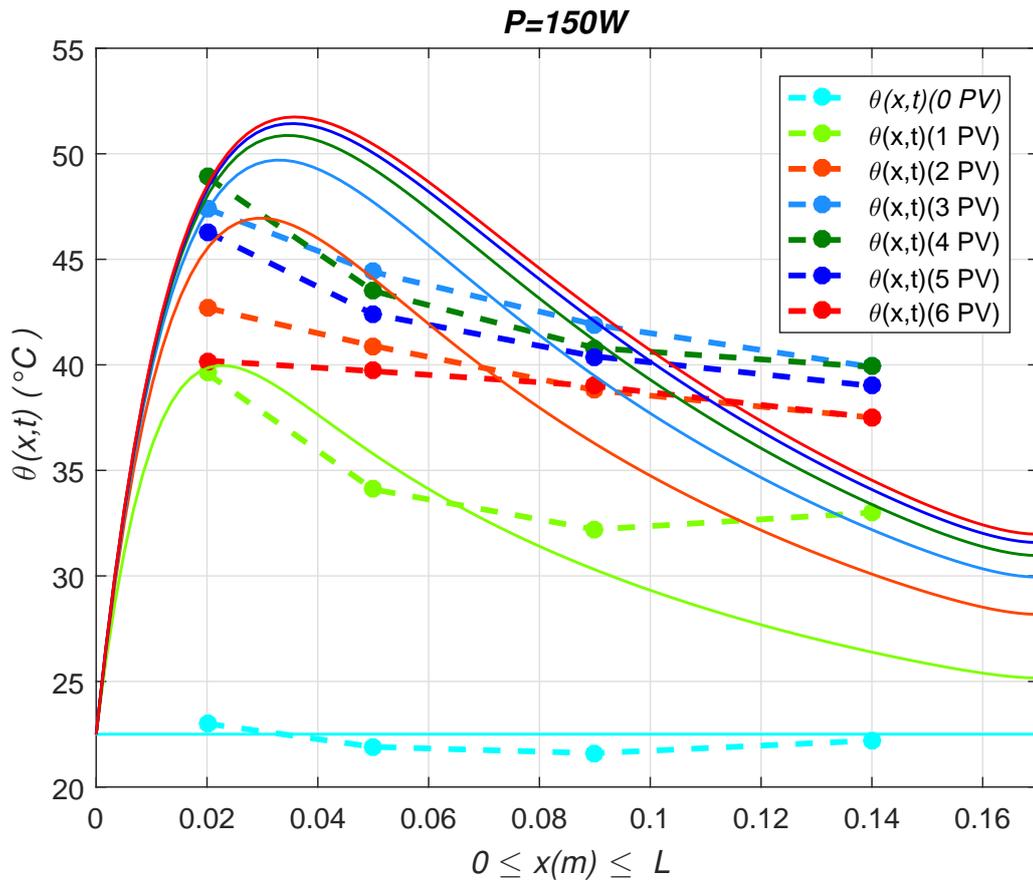
$$\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T), \quad (6.17)$$

$$S_w(\mathbf{x}, t) = 1 - S_{or} \quad \text{em } \Gamma_e \times (0, T), \quad (6.18)$$

$$\nabla S_w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T). \quad (6.19)$$

• **Resultados das simulações numéricas para a temperatura:**

Figura 41 – Sensores (pontos) Vs Simulação numérica(linha contínua) do experimento 7



Os resultados das simulações numéricas do aquecimento eletromagnético é ilustrado na Figura 41, observamos que conforme passa o tempo o aquecimento vai aumentando.

- Resultados das simulações numéricas do deslocamento do óleo com aquecimento eletromagnético:

Figura 42 – Saturação da água antes do *Breakthrough*.

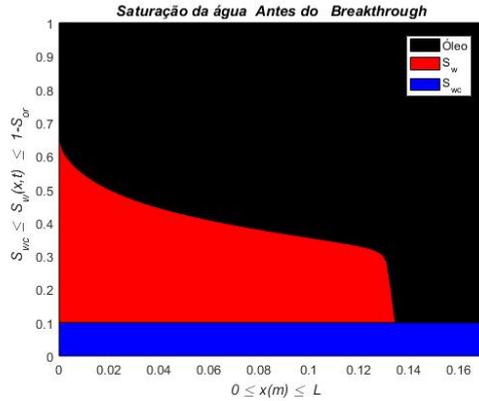
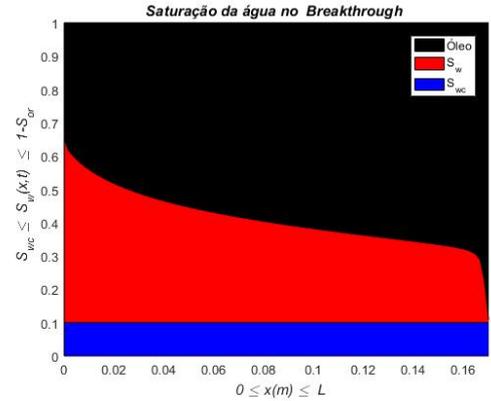


Figura 43 – Saturação da água no momento do *Breakthrough*.



Os resultados do deslocamento do óleo influenciado pela água juntamente com o aquecimento eletromagnético são ilustrados nas Figuras 42, 43 antes do *Breakthrough* e no momento do *Breakthrough* respectivamente.

Figura 44 – Saturação da água no tempo 1 PV com aquecimento EM

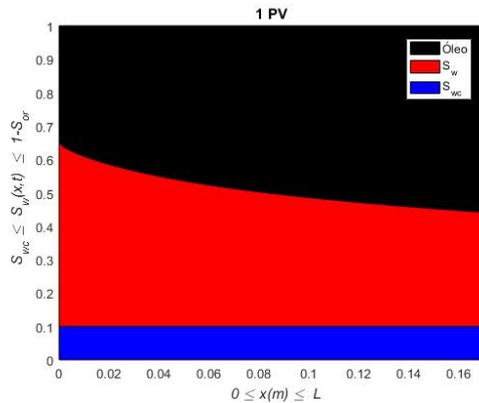


Figura 45 – Saturação da água no tempo 2 PV com aquecimento EM.

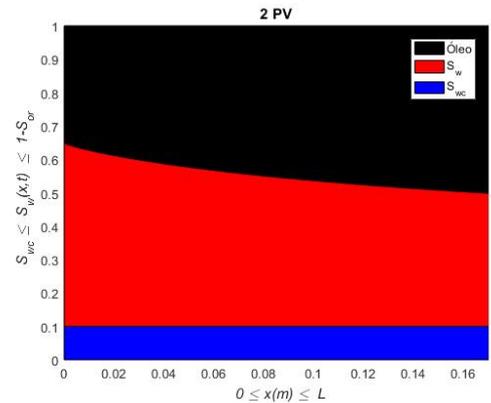


Figura 46 – Saturação da água no tempo 3 PV com aquecimento EM.

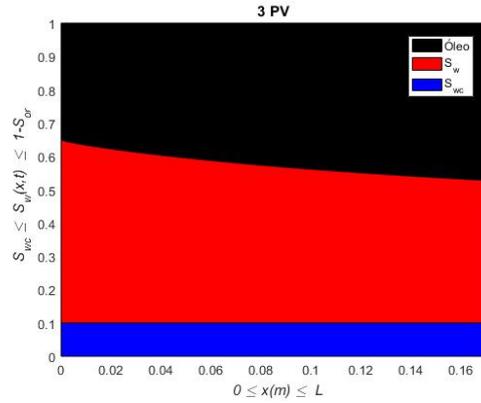


Figura 47 – Saturação da água no tempo 4 PV com aquecimento EM.

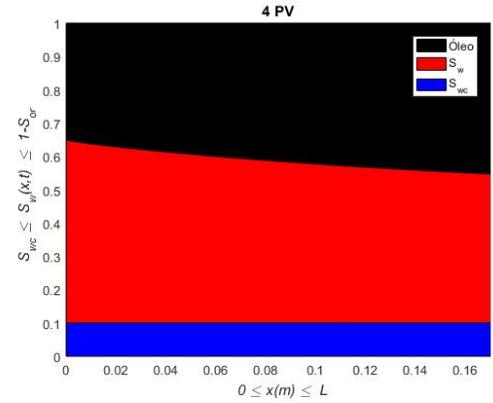


Figura 48 – Saturação da água no tempo 5 PV com aquecimento EM.

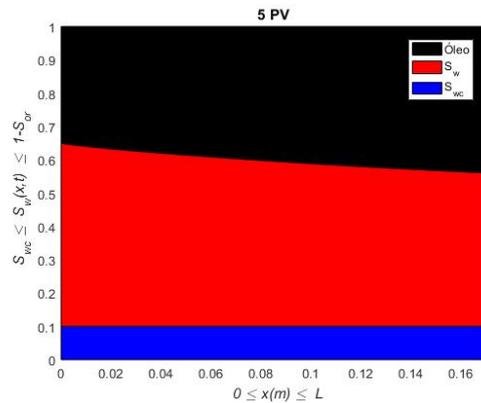
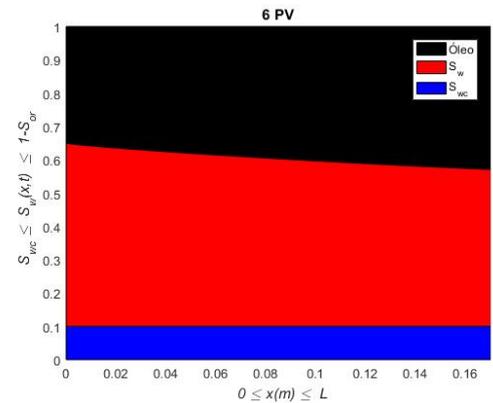
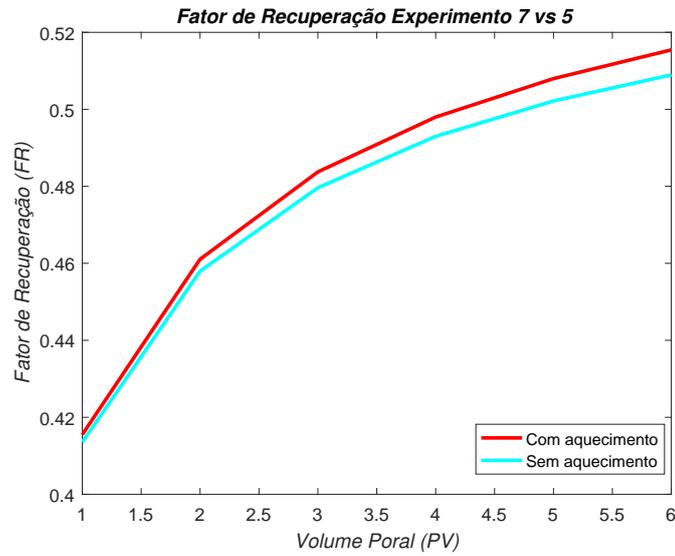


Figura 49 – Saturação da água no tempo 6 PV com aquecimento EM.



Os resultados do deslocamento do óleo devido à injeção de água com aquecimento eletromagnético depois do *Breakthrough*, são ilustrados nas Figuras 44 - 49, os tempos foram medidos em volumes porosos.

Figura 50 – Comparação do fator de recuperação dos experimentos 7 e 5.



A Figura 50, ilustra a comparação do fator de recuperação entre os experimentos 7 e 5, observamos que conforme passa o tempo a produção de óleo aumentará.

6.6 Melhoria do Método Térmico em Porcentagem

Para conhecer a melhoria do deslocamento do óleo com aquecimento eletromagnético, faremos comparações do experimento 7 com o experimento 5.

Figura 51 – Saturação no tempo 1PV

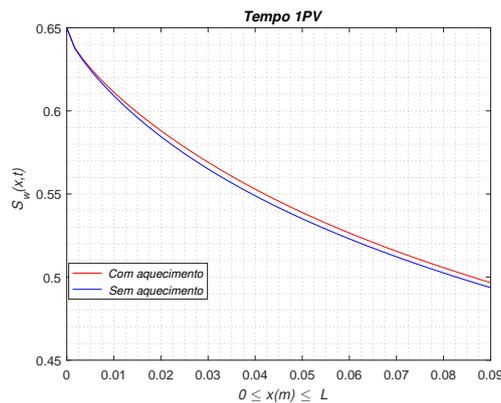
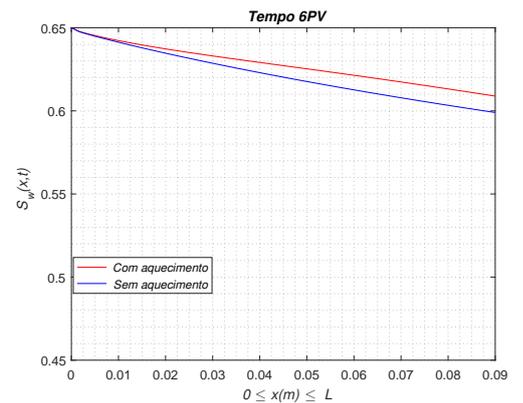


Figura 52 – Saturação no tempo 6 PV



Nas Figuras 51 e 52 ilustramos a comparação do deslocamento do óleo com aquecimento eletromagnético e sem aquecimento, mostrando que conforme passa o tempo a viscosidade do óleo diminui e aumenta a produção em comparação ao experimento 5. Para saber a

porcentagem de melhoria do método térmico, utilizaremos a seguinte formula:

$$\% = \frac{A_{Exp7} - A_{Exp5}}{A_{Exp5}} \times 100\%. \quad (6.20)$$

Onde A_{Exp7} , A_{Exp5} , são as áreas baixo a curva de cada experimento.

Tabela 2 – Porcentagem do método térmico.

Tempo	1PV	2PV	3PV	4PV	5PV	6PV
%	1.316	1.368	1.409	1.5056	1.586	1.67

De acordo com os resultados da Tabela **2**, que o aquecimento do meio poroso induzido por ondas eletromagnéticas foi capaz de aumentar a produção de óleo em até 1.67%, se comparado ao método sem aquecimento.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com a finalidade de mostrar que o aquecimento por ondas eletromagnéticas melhora o deslocamento do óleo influenciado pela água em um meio poroso, foi apresentada a modelagem física e matemática utilizando leis de conservação que dão origem a um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. O modelo matemático derivado foi discretizado pelo método de diferenças finitas em conjunto com uma técnica *Splitting* com o intuito de dividir o sistema em dois subsistemas. Para o primeiro subsistema foi empregado o método de Crank-Nicolson e o segundo subsistema foi abordado de forma explícita. Além disso, o problema foi linearizado utilizando as sugestões de (CHAPIRO, 2009). O método numérico obtido foi validado por soluções semi-analíticas desenvolvidas por (PAZ, 2015) e aplicada na simulação numérica dos experimentos apresentados em (HOLLMANN et al., 2014). Assim, cada experimento apresentado neste trabalho teve uma finalidade. Dessa forma, o experimento 1, serviu para concluir que o termo fonte adotado aquece o meio poroso seguindo a mesma distribuição do campo de temperatura obtida pelos sensores. O experimento 4, serviu para verificar que o campo de temperaturas está sendo transportado devido à injeção de água. O experimento 5, serviu para obter a produção de óleo sem aquecimento. Por último, O experimento 7, serviu para obter a produção de óleo devido ao aquecimento eletromagnético, os resultados numéricos mostram uma melhoria de um 1.67% quando foi comparado com o experimento 5. Nos experimentos de laboratório (HOLLMANN et al., 2014) a produção de óleo foi medido para diferentes tempos, apresentando uma melhoria de 37% pelo aquecimento eletromagnético. Essa diferença é devida à escolha da função viscosidade do óleo com a temperatura, pois neste trabalho foi usado um modelo mais simples. Assim, a escolha de outros modelos mais modernos podem melhorar os resultados.

Para trabalhos futuros, propomos:

- Considerar outra função para viscosidade do óleo que possa capturar melhor a variação com a temperatura.
- Considerar campos de permeabilidades e porosidades heterogêneas.
- Considerar outro W_{em} que capture melhor a absorção de ondas eletromagnéticas
- Melhorar a modelagem da hidrodinâmica para obter a influencia da temperatura e saturações nas velocidades.
- Considerar coordenadas cilíndricas por ser mais próximo ao experimento.
- Realizar simulações bidimensionais e tridimensionais.
- Realizar simulações em escala de reservatório.

REFERÊNCIAS

- ABERNETHY, E. et al. **Production increase of heavy oils by electromagnetic heating.** *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Petroleum Society of Canada, v. 15, n. 03, p. 91, 1976.
- BEAR, J.; BACHMAT, Y. **Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media.** Netherlands: Springer, 1990.
- BERA, A.; BABADAGLI, T. **Status of electromagnetic heating for enhanced heavy oil/bitumen recovery and future prospects: A review.** *Applied Energy*, Elsevier, v. 151, p. 206–226, 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261915004869>>.
- BROOKS, R.; COREY, T. **Hydraulic Properties Of Porous Media.** *Colorado State University, Hydrology Paper*, v. 3, p. 27, 1964.
- CHAPIRO, G. **Gas-solid combustion in insulated porous media.** Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, RJ, Brasil, 2009.
- CHAPIRO, G.; BRUINING, J. **Combustion enhance recovery of shale gas.** *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 127, p. 179–189, 2015.
- CHAPIRO, G.; MARCHESIN, D.; SCHECTER, S. **Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam.** *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, World Scientific, v. 11, n. 02, p. 295–328, 2014.
- CHEN, Z. **Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery.** Philadelphia: SIAM/Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- CHEN, Z.; G., M. Y. H. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media.** Philadelphia: SIAM/Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- CROWELL, B. **Simple Nature: an Introduction to Physics for Engineering and Physical Science Students.** Fullerton, California: Light and Matter, 2013.
- DARCY, H. **Les Fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau, etc.** Paris: Victor Dalmont, Libraire des Corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, 1856.
- DUIJN, C. van. **An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow.** The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 2003.
- FARAJZADEH, R. et al. **Foam–oil interaction in porous media: implications for foam assisted enhanced oil recovery.** *Advances in colloid and interface science*, Elsevier, v. 183, p. 1–13, 2012.
- FEJOLI, R. F.; ROMERO, O. J. **Modelagem computacional da injeção de espumas em reservatórios de petróleo.** *Latin American Journal of Energy Research*, v. 1, n. 1, p. 1–9, 2014.

- HAMMACK, B.; RYAN, P.; ZIECH, N. *Eight Amazing Engineering Stories: Using the Elements to Create Extraordinary Technologies*. Urbana, Illinois: Articulate Noise Books, 2012.
- HOLDEN, H. *Splitting methods for partial differential equations with rough solutions: Analysis and MATLAB programs*. Zürich: European Mathematical Society, 2010.
- HOLLMAN, T. *Electromagnetic stimulation on water flooding in heavy oil recovery*. Dissertação (Mestrado) — Tu Delft, The Netherlands, 2013.
- HOLLMANN, T. et al. **EM stimulated water flooding in heavy oil recovery**. *Proceedings of the 2014 World Heavy Oil Congress*, New Orleans, USA, p. 5–7, 2014.
- KARAM, F.; ALMEIDA, R. *Introdução à Modelagem Matemática. Apostila do Curso-LNCC*, Petrópolis, RJ, 2003.
- KAVIANY, M. *Principles of heat transfer in porous media*. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- KERMEN, E. *Thermal Enhancement of Water-flooding in Medium-Heavy Oil Recovery*. Dissertação (Mestrado) — Tu Delft, The Netherlands, 2011.
- LANDAU; LIFSHITZ. *Course of Theoretical Physics: Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford; New York: Pergamon Press, 1984. v. 8.
- LANDAU; LIFSHITZ. *Fluid Mechanics*. Oxford; New York: Pergamon Press, 1987. v. 6.
- LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Boston, Berlin: Birkhauser, 1992.
- LOPES, T. *Simulação Numérica tridimensional de escoamento em reservatórios de petróleo Heterogêneos*. Dissertação (Mestrado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2012.
- MURAD, M. *Modelagem em sistemas contínuos. Apostila do Curso-LNCC*, Petrópolis, RJ, 2007.
- PAZ, P. Z. *Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em um meio poroso contendo óleo*. Dissertação (Mestrado) — UFJF, MG, 2015.
- PAZ, P. Z. S. et al. **EM Heating-Stimulated Water Flooding for Medium-Heavy Oil Recovery**. *Transport in Porous Media*, v. 119, n. 1, p. 57–75, Aug 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11242-017-0873-5>>.
- PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Amsterdam; New York: Elsevier, 1977.
- PERRY, G.; WARNER, W. **Heating Oil Wells by Electricity**. *U.S. Patent N° 45584*. Jul 4., 1865.

PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência-Com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

REYNOLDS, O. **On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil.** *Proceedings of the Royal Society of London*, The Royal Society, v. 40, n. 242-245, p. 191–203, 1886.

RODRIGUES, J. R. P. *Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos*. Petrópolis, RJ, 2015. Disponível em: <<http://www.lncc.br/prh50/cursoespecifico.html>>.

SAHNI, A. et al. **Electromagnetic heating methods for heavy oil reservoirs.** *SPE/AAPG Western Regional*, Society of Petroleum Engineers, Long Beach, California, USA, p. 19–23, 2000.

STRIKWERDA, J. C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Philadelphia: SIAM, 2004.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE BUCKLEY-LEVERETT

A equação diferencial parcial que governa o deslocamento do óleo influenciado pela água num meio poroso é formulada usando leis de conservação (CHEN; G., 2006). No caso unidimensional considerando velocidade constante pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_w + \frac{\mathbf{V}_{Dt}}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (f_w) = 0, \quad (\text{A.1})$$

Suplementada pelas condições iniciais:

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} S_w^e = 1 - S_{or} & x \leq 0 \\ S_w^d = S_{wc} & x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Onde f_w representa a função de fluxo Buckley-Leverett considerando permeabilidades tipo Corey (BROOKS; COREY, 1964).

$$f_w(S_w) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w k_{ro}}{\mu_o k_{rw}}}, \quad k_{rw} = k_{rw}^0 (S)^{n_w}, \quad k_{ro} = k_{ro}^0 (1 - S)^{n_o}, \quad S = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}.$$

Este problema é geralmente chamado de problema de Riemann segundo (LEVEQUE, 1992), a solução analítica deste problema contém ondas de choque e rarefação. Como a função de fluxo fracionário depende da saturação $f_w = f_w(S_w)$ podemos escrever a Equação (A.1) derivando f_w em função da saturação resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_w + \frac{\mathbf{V}_{Dt}}{\phi} f_w' \frac{\partial}{\partial x} S_w = 0; \quad (\text{A.3})$$

Pelo método das características (DUIJN, 2003) a solução é $S_w(x, t) = S_0(x - vt)$, sendo v a velocidade ao longo das características, obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) \equiv \frac{\mathbf{V}_{Dt}}{\phi} \frac{df_w(S_w)}{dS_w} = \frac{\mathbf{V}_{Dt}}{\phi} f_w'. \quad (\text{A.4})$$

Seja A a secção transversal, podemos definir a produção do líquido (CHEN, 2007) como:

$$\mathbf{V}(t) = A \int_0^t \mathbf{V}_{Dt} dt. \quad (\text{A.5})$$

Integrando A.4 ao longo da característica $x(t)$ obtemos:

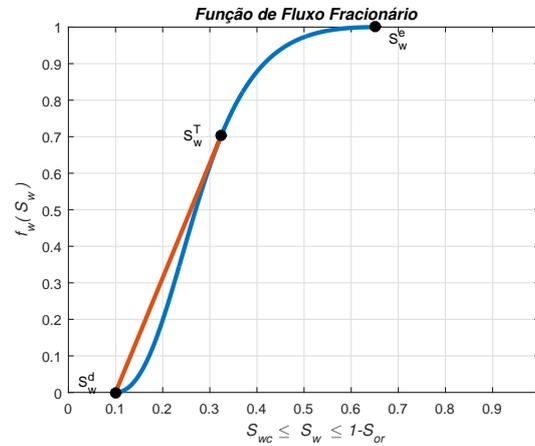
$$\int_0^t dx = \frac{f_w'}{\phi} \int_0^t \mathbf{V}_{Dt} dt. \quad (\text{A.6})$$

usando A.5 podemos encontrar a saturação antes do *Breakthrough*, segue:

$$x(S_w, t) = \frac{f_w'}{\phi A} \mathbf{V}(t). \quad (\text{A.7})$$

Para saber qual é o ponto de saturação onde temos que avaliar a derivada do fluxo fracionário f'_{S_w} , temos que encontrar o ponto de tangência S_w^T a partir do estado S_w^d , ilustramos no seguinte gráfico:

Figura 53 – Curva de fluxo Buckley-Leverett



Segundo a teoria das leis de conservação, o estado S_w^T tem que satisfazer a relação conhecida como condição de *Rankine-Hugoniot* (DUIJN, 2003).

$$f(S_w^T) - f(S_w^d) = f'(S_w^T)(S_w^T - S_w^d). \quad (\text{A.8})$$

pelo fato da função f_w ser convexa no intervalo $[S_w^d, S_w^T]$, teremos uma onda choque. Logo no intervalo $[S_w^T, S_w^e]$ a função é côncava, gerando uma onda de rarefação (DUIJN, 2003). Desta forma encontramos o ponto S_w^T .

APÊNDICE B – ANÁLISE DOS COEFICIENTES

Nesta seção vamos analisar as variações que acontecem com as funções C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} , f_w com relação às variações da saturação e temperatura, estas funções estão definidas como:

- **Caso Monofásico:**

$$C_{tot}(S_w) = \rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi \rho_w^r c_w S_w. \quad (\text{B.1})$$

$$C_{liq}(S_w) = \rho_w^r c_w S_w. \quad (\text{B.2})$$

$$K_{tot}(S_w) = K_s (1 - \phi) + \phi K_w S_w. \quad (\text{B.3})$$

- **Caso Bifásico:**

$$C_{tot}(S_w) = \rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi (\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) S_w). \quad (\text{B.4})$$

$$C_{liq}(\theta, S_w) = \rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) f_w. \quad (\text{B.5})$$

$$K_{tot}(S_w) = K_s (1 - \phi) + \phi (K_o + (K_w - K_o) S_w). \quad (\text{B.6})$$

- **Caso Bifásico, assumindo deslocamento linear $f_w = S_w$:**

$$C_{tot}(S_w) = \rho_s^r c_s (1 - \phi) + \phi (\rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) S_w). \quad (\text{B.7})$$

$$C_{liq}(S_w) = \rho_o^r c_o + (\rho_w^r c_w - \rho_o^r c_o) S_w. \quad (\text{B.8})$$

$$K_{tot}(S_w) = K_s (1 - \phi) + \phi (K_o + (K_w - K_o) S_w). \quad (\text{B.9})$$

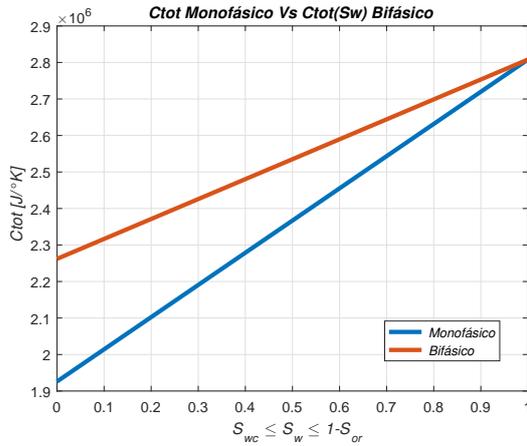
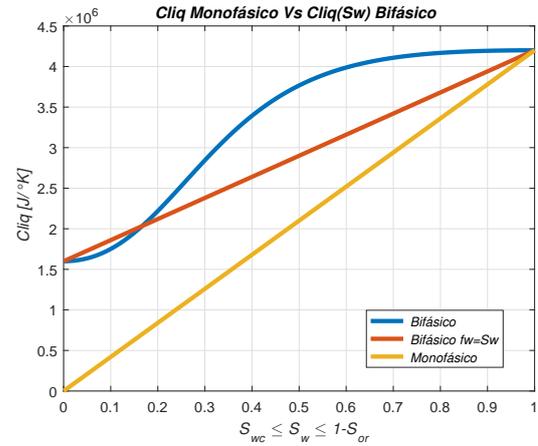
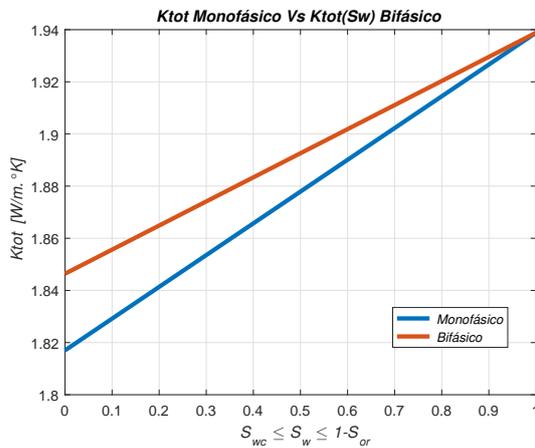
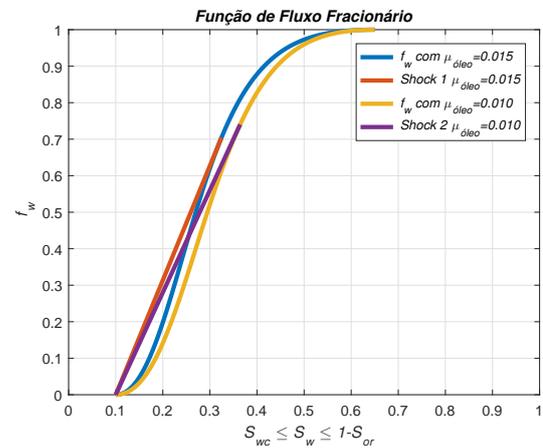
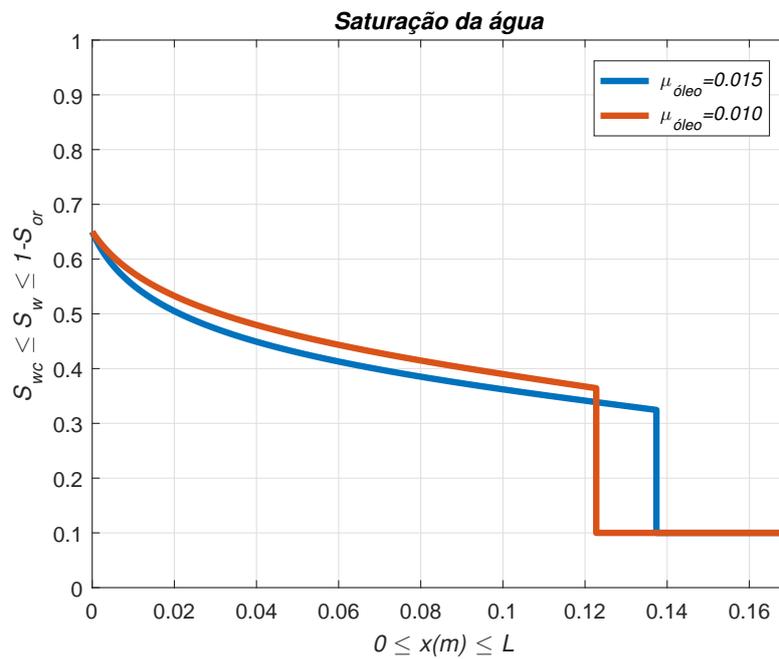
Figura 54 – C_{tot} Figura 55 – C_{liq} Figura 56 – K_{tot} Figura 57 – f_w 

Figura 58 – Variação dos coeficientes

O comportamento dos coeficientes C_{tot} , C_{liq} , K_{tot} , f_w em função da saturação são ilustrados na Figura 58. Nas Figuras 54, 55 e 56 ilustramos a comparação entre os valores do caso monofásico e bifásico, observando que a função C_{liq} é o parâmetro com maior variação, quer dizer quando maior é a quantidade da água no reservatório maior será este parâmetro influenciando assim diretamente na velocidade aumentando o deslocamento do perfil de temperatura. Finalmente na Figura 57 ilustramos a função de fluxo fracionário calculado com dois tipos de viscosidade $\mu_o = 0.015$, $\mu_o = 0.010$, mostrando ponto de maior choque quando a viscosidade diminui.

Figura 59 – Distribuição da saturação para duas viscosidades diferentes



O comportamento da saturação para dois tipos de viscosidades é ilustrado na Figura 59, observando que quando consideramos viscosidade $\mu_o = 0.010$ desloca mas óleo em comparação com $\mu_o = 0.015$, dessa forma o aquecimento reduz a viscosidade porém aumenta a produção de óleo.