Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Anderson Corrêa Porto

Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch

Juiz de Fora

2018

Anderson Corrêa Porto

Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro

Coorientador: Frederico Sercio Feitosa

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Porto, Anderson Corrêa.
Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch / Anderson Corrêa Porto. – 2018.
69 f.

Orientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro
Coorientador: Frederico Sercio Feitosa
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Geometria Algébrica. 2. Divisores. 3. Riemann-Roch. I. Ribeiro, Beatriz Casulari da Motta, orient. II. Feitosa, Frederico Sercio, coorient. III. Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch .

Anderson Corrêa Porto

Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Drª. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Drª. Juliana Coelho Chaves
Universidade Federal Fluminense

Prof. Drª. Flaviana Andréa Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora

Aos meus pais, José Murilo Porto e Maria das Dores Corrêa Porto, pelo exemplo de vida, perseverança e dedicação para que esse sonho pudesse ser alcançado.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, José Murilo Porto e Maria das Dores Corrêa Porto, pelo exemplo de vida e perseverança e dedicação para que esse sonho pudesse ser alcançado.

À minha orientadora, Beatriz Casulari Motta Ribeiro, e ao meu coorientador, Frederico Sercio Feitosa, por terem acreditado em mim desde o início, pela oportunidade do convívio no trabalho do dia a dia e pelo crescimento pessoal e profissional que me proporcionaram. Agradeço ainda pela paciência e compreensão que sempre estiveram presentes ao longo desta jornada.

Aos amigos da graduação da Universidade Federal de Viçosa. Em especial, ao Serginei do Carmo Liberato, Luiz Henrique, Aline Vilela Andrade e Filipe Augusto. Cada um a seu modo e possibilidade, serviu de apoio para que a caminhada nesses dois anos fosse mais tranquila.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática pelos ensinamentos matemáticos da graduação. Em especial, aos professores Rogério Carvalho Picanço, Laerte Dias de Carvalho, Braz Moura e a professora Margareth da Silva Alves. O apoio de cada um foi importante para a conclusão dessa etapa.

Aos membros da banca pelas sugestões, observações e comentários.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Matemática da UFJF. Em especial as professoras Flaviana Andrea Ribeiro, Joana Darc Antonia Santos da Cruz, Laura Senos Lacerda Fernandez e aos professores Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos e Alexei Anatolevich Deriglazov pelos ensinamentos. Ao professor Kennedy Martins Pedroso pelos conselhos na maneira de estudar. A secretária Paula, pelo apoio burocrático necessário.

À agência de formento CAPES pela disponibilidade da bolsa.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é o estudo de conceitos básicos da Geometria Algébrica sob o ponto de vista clássico. O foco central do trabalho é o estudo do Teorema de Riemann-Roch e algumas de suas aplicações. Esse teorema constitui uma importante ferramenta no estudo da Geometria Algébrica clássica uma vez que possibilita, por exemplo, o cáculo do gênero de uma curva projetiva não singular no espaço projetivo de dimensão dois. Para o desenvolvimento do estudo do Teorema de Riemann-Roch e suas aplicações serão estudados conceitos tais como: variedades, dimensão, diferenciais de Weil, divisores, divisores sobre curvas e o anel topológico Adèle.

Palavras-chave: Geometria Algébrica. Divisores. Riemann-Roch.

ABSTRACT

The goal of this work is the study of basic concepts of Algebraic Geometry from the classical point of view. The central focus of the paper is the study of Riemann-Roch Theorem and some of its applications. This theorem constitutes an important tool in the study of classical Algebraic Geometry since it allows, for example, the calculation of the genus of a non-singular projective curve in the projective space of dimension two. For the development of the study of the Riemann-Roch Theorem and its applications we will study concepts such as: varieties, dimension, Weil differentials, divisors, divisors on curves and the Adèle topological ring.

Key-words: Algebraic Geometry. Divisors. Riemann-Roch Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nessa dissertação abordaremos o estudo de divisores, tendo como objetivo a prova do Teorema de Riemann-Roch no contexto de curvas algébricas projetivas não singulares. Inicialmente, em 1857, Riemann provou um resultado que ficou conhecido como desigualdade de Riemann. A mesma estabelece que para uma superfície de Riemann compacta X de gênero g e D um divisor sobre X, temos

$$\ell(D) \geq \deg(D) - g + 1,$$

onde $\ell(D)$ é a dimensão do espaço associado ao divisor D.

O Teorema de Riemann-Roch tomou a forma como é conhecido atualmente após o trabalho de um aluno de Riemann, Gustav Roch em 1865, que identificou precisamente a diferença na desigualdade transformando-a em uma igualdade. O Teorema de Riemann-Roch para uma superfície de Riemann compacta de gênero g e com divisor canônico K estabelece que:

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g + 1,$$

onde $\ell(K - D)$ é o termo de correção (ou especialidade) identificado por Roch.

Algumas generalizações deste resultado foram provadas. Em 1931, Friedrich Karl Schmidt provou o teorema para curvas algébricas, inicialmente trabalhando com corpos perfeitos de característica finita. Uma generalização n-dimensional, o Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch, foi descoberta e provada por Friedrich Hirzebruch, como uma aplicação de classes características em Topologia Algébrica. Alexander Grothendieck provou uma generalização em 1957, hoje conhecida como Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. Seu trabalho reinterpreta Riemann-Roch não como um teorema sobre variedades, mas sobre um morfismo entre duas variedades, os detalhes desta prova foram publicados por Borel-Serre em 1958.

Usando métodos modernos de Geometria Algébrica, que incluem a noção de esquema, feixes e cohomologia, o teorema de Riemann-Roch pode ser provado utilizando a conhecida Dualidade de Serre. Em oposição a esta abordagem, é possível a sua demonstração utilizando métodos da Geometria Algébrica Clássica que incluem os conceitos básicos de divisores, do espaço vetorial associado a estes divisores, do estudo de diferenciais (de Weil) e de distribuições (ou equivalentemente anéis de Adele). Esta última abordagem será nosso foco.

Para o entendimento desse teorema no contexto de curvas algébricas projetivas não-sigulares, estudaremos no capítulo 2 alguns conceitos básicos da Geometria Algébrica Clássica tais como: variedades, corpo de funções racionais, dimensão de variedades, espaços tangentes. No capítulo 3 estudaremos os divisores de Weil e de Cartier sobre variedades e também vamos particularizar alguns resultados no contexto de curvas algébricas. Finalmente no capítulo 4 estudaremos diferenciais de Weil, distribuições (ou anel de Adele) e o espaços de Riemann-Roch culminando na demonstração do Teorema de Riemann-Roch, além de algumas aplicações deste resultado. Sempre que possível provaremos os resultados no contexto mais geral de variedades de dimensão qualquer, não necessariamente para curvas (ou variedades de dimensão 1).

2 CONCEITOS BÁSICOS

Para o desenvolvimento desse trabalho consideraremos K um corpo algebricamente fechado, $K[T_1, ..., T_n]$ o anel de polinômios nas variáveis $T_1, ..., T_n$ com coeficientes em K e $K^h[T_0, ..., T_n]$ o anel de polinômios homogêneos nas variáveis $T_0, ..., T_n$ com coeficientes em K.

2.1 VARIEDADES AFINS

Definição 2.1. *O **espaço afim** $n-$**dimensional**, denotado por $\mathbb{A}^n$, é definido por*

$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in K \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Definição 2.2. *Considere $S \subset K[T_1, T_2, ..., T_n]$ um subconjunto de polinômios nas indeterminadas $T_1, T_2, ..., T_n$. Definimos o **conjunto dos zeros de** S, como sendo*

$$V(S) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n : F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ \forall F \in S\}.$$

Definição 2.3. *Um subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n$ é chamado **conjunto algébrico afim** se existir um conjunto de polinômios $S \subset K[T_1, T_2, ..., T_n]$ tal que $V = V(S)$, isto é,*

$$V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n : F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ \forall F \in S\}.$$

Lema 2.4. *Sejam $S \subset K[T_1, ..., T_n]$ e $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S em $K[T_1, ..., T_n]$. Então $V(S) = V(\langle S \rangle)$.*

Demonstração. Seja $P \in V(S)$. Então, $F(P) = 0$ para todo $F \in S$. Como todo elemento de $\langle S \rangle$ é uma combinação linear de elementos de S, temos que $G(P) = 0$ para todo $G \in \langle S \rangle$. Logo, $V(S) \subset V(\langle S \rangle)$. Por outro lado, se $Q \in V(\langle S \rangle)$, então $F(Q)$ para todo $F \in \langle S \rangle$. Como $S \subset \langle S \rangle$, segue que $F(Q) = 0$ para todo $F \in S$, isto é, $Q \in V(S)$. Logo, $V(\langle S \rangle) \subset V(S)$. Portanto, $V(\langle S \rangle) = V(S)$. $\square$

Lema 2.5. *Os conjuntos algébricos afins têm as seguintes propriedades:*

i) $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ *e* $V(K[T_1, T_2, ..., T_n]) = \emptyset$.

ii) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, *onde I e J são ideais arbitrários.*

iii) $\bigcap_{i \in \Lambda} V(I_i) = V\left(\bigcup_{i \in \Lambda} I_i\right)$, *onde $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma família arbitrária de ideais.*

iv) Se $I \subseteq J$, então $V(I) \supseteq V(J)$, onde I e J são ideais arbitrários.

Demonstração.

i) Temos que todo elemento de $\mathbb{A}^n$ é zero do polinômio nulo. Assim, $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n$. Agora, $V(c) = \emptyset$, para todo $c \in K^*$, o que acarreta

$$V(K[T_1, T_2, ..., T_n]) = \emptyset.$$

ii) Seja $P \in V(I) \cup V(J)$, ou seja, $P \in V(I)$ ou $P \in V(J)$. Daí, $F(P) = 0$, para todo $F \in V(I)$ ou $F(P) = 0$, para todo $F \in V(J)$. Logo, $(F.G)(P) = 0$, para todo $F \in I$ e $G \in J$. Assim, $P \in V(I.J)$ o que acarreta $V(I) \cup V(J) \subset V(I.J)$. Por outro lado, suponhamos que para $P \in V(I.J)$ ocorra $P \notin V(I)$, então, existe $F \in I$ tal que $F(P) \neq 0$. Como para todo $G \in J$ temos que $(F.G)(P) = 0$ e $F(P) \neq 0$, segue que $P \in V(J)$. Daí, $P \in V(I) \cup V(J)$. Logo, $V(I.J) \subset V(I) \cup V(J)$. Portanto, $V(I.J) = V(I) \cup V(J)$.

iii) Seja $P \in V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} I_i\right)$, isto é, $F(P) = 0$ para todo $F \in \bigcup_{i\in\Lambda} I_i$, ou seja, $F(P) = 0$, para todo $F \in I_i$ para todo $i \in \Lambda$. Daí $P \in V(I_i)$ para todo $i \in \Lambda$. Logo, $P \in \bigcap_{i\in\Lambda} V(I_i)$. Agora, seja $Q \in \bigcap_{i\in\Lambda} V(I_i)$. Dessa forma, $P \in V(I_i)$, para todo $i \in \Lambda$, o que acarreta, $F(P) = 0$ para todo $F \in I_i$ para todo $i \in \Lambda$, ou seja, $F(P) = 0$ para todo $F \in \bigcup_{i\in\Lambda} I_i$. Daí, $Q \in V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} I_i\right)$. Portanto, $\bigcap_{i\in\Lambda} V(I_i) = V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} I_i\right)$.

iv) Seja $P \in V(J)$, isto é, $f(P) = 0$, para todo f em J. Como $I \subseteq J$, em particular, $f(P) = 0$, para todo f em I. Logo, $P \in V(I)$. Portanto, $V(J) \subseteq V(I)$.

$\square$

Definição 2.6. *Utilizando o Lema 2.5, podemos definir sobre $\mathbb{A}^n$ uma topologia, denominada **Topologia de Zariski**, na qual os fechados são os conjuntos algébricos afins.*

Definição 2.7. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto qualquer. Definimos o **ideal** de X como sendo*

$$I(X) = \{F \in K[T_1, ..., T_n] : F(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Observe que $I(X)$ é um ideal de $K[T_1, ..., T_n]$.

Proposição 2.8. *Sejam $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Então: $I(X) \supseteq I(Y)$.*

Demonstração. Seja $f \in I(Y)$, isto é, $f(P) = 0$, para todo $P \in Y$. Como $X \subseteq Y$, em particular, $f(P) = 0$, para todo $P \in X$. Logo, $f \in I(X)$. Portanto, $I(Y) \subseteq I(X)$. $\square$

Definição 2.9. *Seja $I \subset K[T_1, ..., T_n]$ um ideal. Definimos o **radical de I**, denotado por $Rad\,(I)$, como sendo o seguinte conjunto*

$$Rad\,(I) = \{F \in K[T_1, ..., T_n] : F^n \in I, para\ algum\ n > 0\}.$$

*Caso $I = Rad\,(I)$, dizemos que I é um **ideal radical**.*

Teorema 2.10 (Zeros de Hilbert)**.** *Se $I \subset K[T_1, ..., T_n]$, então $I\,(V\,(I)) = Rad\,(I)$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [4], página 20. □

Proposição 2.11 (Zeros de Hilbert Fraco)**.** *Todo ideal maximal $I \subset K[T_1, ..., T_n]$ é da forma $I = \langle x - a_1, x - a_2, \cdots, x - a_n \rangle$ para algum ponto $P = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [7], páginas 24 e 25 □

Definição 2.12. *Um conjunto algébrico afim X é dito **redutível** se $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 e X_2 são conjuntos algébricos afins de $\mathbb{A}^n$ com $X_1 \subsetneq X$ e $X_2 \subsetneq X$. Caso contrário, X é dito **irredutível**.*

Definição 2.13. *Um conjunto algébrico afim irredutível é dito **variedade afim**.*

Definição 2.14. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$. O **fecho** de X, denotado por $\overline{X}$, é o menor fechado de $\mathbb{A}^n$ contendo X, com relação a topologia de Zariski.*

Proposição 2.15. *Um conjunto algébrico $X \subset \mathbb{A}^n$ é irredutível se, e somente se, $I\,(X)$ é um ideal primo. Em particular, X é irredutível se, e somente se, $\overline{X}$ é irredutível.*

Demonstração. Suponhamos que o ideal $I\,(X)$ não seja um ideal primo. Sejam $F_1, F_2 \in K[T_1, T_2, ..., T_n] \setminus I\,(X)$ tais que $F_1.F_2 \in I\,(X)$.
Afirmação: $X = (X \cap V\,(F_1)) \cup (X \cap V\,(F_2))$, com $X \cap V\,(F_1) \subsetneq X$ e $X \cap V\,(F_2) \subsetneq X$.
De fato, como $X \cap V\,(F_1) \subset X$ e $X \cap V\,(F_2) \subset X$, temos $(X \cap V\,(F_1)) \cup (X \cap V\,(F_2)) \subset X$.
Agora, dado $P \in X$, $(F_1.F_2)\,(P) = F_1\,(P)\,.F_2\,(P) = 0$, ou seja, $F_1\,(P) = 0$ ou $F_1\,(P) = 0$.
Se $F_1\,(P) = 0$, então $P \in X \cap V\,(F_1)$. Caso $F_2\,(P) = 0$, então $X \cap V\,(F_2)$. Assim, $X \subset (X \cap V\,(F_1)) \cap (X \cap V\,(F_2))$, donde $X = (X \cap V\,(F_1)) \cap (X \cap V\,(F_2))$. Além disso, se $X \cap V\,(F_i) = X$, para algum $i \in \{1, 2\}$, então $X \subset V\,(F_i)$, donde $\{F_i\} \subset I\,(V\,(F_i)) \subset I\,(X)$.
Assim, $F_i \in I\,(X)$, uma contradição com a escolha de F_1 e F_2. Daí, $X \cap V\,(F_i) \subsetneq X$.
Portanto, X é irredutível.
Reciprocamente, suponhamos que X seja redutível. Então, existem conjuntos algébricos afins V_1 e V_2 tais que $X = V_1 \cup V_2$ com $V_1 \subsetneq X$ e $V_2 \subsetneq X$. Dessa forma, $I\,(X) \subsetneq I\,(V_1)$ e $I\,(X) \subsetneq I\,(V_2)$. Sejam $F_i \in I\,(V_i) \setminus I\,(X)$ para $i \in \{1, 2\}$.
Afirmação: $F_1.F_2 \in I\,(X)$.
De fato, se $P \in X$, então $P \in V_1$ ou $P \in V_2$. Se $P \in V_1$ então $F_1\,(P) = 0$. Daí, $F_1\,(P)\,.F_2\,(P) = 0$, isto é, $F_1.F_2 \in I\,(X)$. De maneira análoga, temos que se $P \in V_2$, então

$F_1.F_2 \in I(X)$. Portanto, $I(X)$ não é um ideal primo. O caso particular segue do fato que para espaços topológicos temos a propriedade $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ □

Definição 2.16. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$. Uma função $f : X \longrightarrow K$ é dita* ***regular*** *se existe um polinômio $F \in K[T_1, ..., T_n]$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$. O conjunto de funções regulares de X em K será denotado por $\mathscr{J}(X, K)$.*

Definição 2.17. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Definimos o* ***anel de coordenadas de*** *X, denotado por $K[X]$, como*

$$K[X] = \frac{K[T_1, T_2, ..., T_n]}{I(X)}.$$

Pela Proposição 2.15, se X é irredutível, então $I(X)$ é um ideal primo, donde $K[X]$ é um domínio de integridade.

Definição 2.18. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico afim e $Y \subset X$ um subconjunto algébrico afim de X. Definimos o* ***ideal de*** *Y* ***em*** *X, denotado por $I_X(Y)$, como sendo o seguinte conjunto*

$$I_X(Y) = \{h \in K[X] : h(y) = 0, \forall y \in Y\}.$$

Observe que, dessa forma, podemos escrever o seguinte

$$I_X(Y) \cong \frac{I(Y)}{I(X)}.$$

Proposição 2.19. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico afim e $Y \subset X$ um subconjunto algébrico afim de X. Então*

$$K[Y] \cong \frac{K[X]}{I_X(Y)}$$

Demonstração. Por propriedades de anéis quocientes, temos

$$K[Y] = \frac{K[T_1, T_2, ..., T_n]}{I(Y)} \cong \frac{\dfrac{K[T_1, T_2, ..., T_n]}{I(X)}}{\dfrac{I(Y)}{I(X)}} \cong \frac{K[X]}{I_X(Y)}$$

□

Proposição 2.20. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico afim e $Y \subset X$ um subconjunto algébrico afim irredutível de X. Então $I_X(Y)$ é um ideal primo.*

Demonstração. Se Y é irredutível, então, pela Proposição 2.15, $I(Y)$ é um ideal primo. Assim, $K[Y]$ é um domínio de integridade. Pela Proposição 2.19, temos que $K[Y] \cong \dfrac{K[X]}{I_X(Y)}$. Logo, $\dfrac{K[X]}{I_X(Y)}$ é um domínio de integridade. Portanto, $I_X(Y)$ é um ideal primo. □

Proposição 2.21. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto algébrico afim. A aplicação*

$$\phi : K[T_1, T_2, ..., T_n] \longrightarrow \mathscr{I}(X, K)$$

tal que $\phi(F) = f$ com $F(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$ para todo $(x_1, ..., x_n) \in X$ é um homomorfismo de anéis cujo núcleo é dado por $I(X)$.

Demonstração. Observe que:

i) ϕ está bem definida.
De fato, sejam $F, G \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ tais que $F = G$ como polinômios. Dessa forma, temos

$$F(x_1, ..., x_n) = G(x_1, ..., x_n) \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in X.$$

Assim, $\phi(F) = \phi(G)$.

ii) ϕ é um homomorfismo.
De fato, dados $F, G \in K[T_1, ..., T_n]$ com $f = \phi(F)$ e $g = \phi(G)$ temos então que

$$\begin{aligned} \phi(F+G) &= (f+g)(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= f(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= \phi(F) + \phi(G) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi(F.G) &= (f.g)(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= f(x_1, x_2, ..., x_n) . g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= \phi(F) . \phi(G) \end{aligned}$$

Por fim, $\ker \phi = \{F \in K[T_1, ..., T_n] : \phi(F) = 0\} = I(X)$. □

Considerando X uma variedade afim, a função ϕ, definida na Proposição 2.21, é sobrejetora. De fato, para cada função $f \in \mathscr{I}(X, K)$, existe $F \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ tal que $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$. Dessa forma, pelo Teorema do Isomorfismo, temos que

$$K[X] = \frac{K[T_1, ..., T_n]}{I(X)} \cong \mathscr{I}(X, K),$$

ou seja, cada função regular pode ser identificada com um polinômio.

Proposição 2.22. *Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto algébrico afim e $f \in K[X]$ não constante. O conjunto*

$$X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

*é um aberto de $\mathbb{A}^n$, denominado **aberto principal** de f.*

Demonstração. Considere $F \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ tal que $F(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Seja o conjunto $V(S) = V(F)$. Observe que $V(S)$ é um fechado na Topologia de Zariski. Assim, $X \setminus V(S) = X_f$ é aberto. $\square$

Definição 2.23. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ conjuntos algébricos afins. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita um morfismo se existirem $f_1, f_2, ..., f_m \in K[X]$ tais que*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$$

para todo $x \in X$.

Definição 2.24. *Um **isomorfismo** entre conjuntos algébricos afins $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ tal que existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ com $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$. Nesse caso, dizemos que X e Y são **isomorfos** e denotamos por $X \simeq Y$.*

Proposição 2.25. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto algébrico afim e seja $f \in K[X]$. Considere o aberto principal $X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Então*

$$K[X_f] \cong K[X][1/f] = K[X]_f := \left\{ \frac{g}{f^m} : g \in K[X], m \geq 0 \right\}.$$

Demonstração. Suponhamos que $I(X) = \langle G_1, ..., G_s \rangle$, com $G_i \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ para todo $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Definamos $W = V(G_1, ..., G_s, FT_{n+1} - 1)$ onde $f = F + I(X)$. O morfismo $\psi : \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n$ definido por $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$ é tal que $\psi(W) = X_f$ e sua inversa $\psi^{-1} : W \to X_f$ definida por $\phi(x_1, ..., x_n) = \left(x_1, ..., x_n, \dfrac{1}{f(x_1, ..., x_n)} \right)$ é um morfismo pois, $\dfrac{1}{f}$ é regular em X_f. Assim, $X_f \simeq W$ o que acarreta $K[W] \cong K[X_f]$. Mas,

$$K[X_f] \cong K[W] \cong \frac{K[T_1, ..., T_n]}{\langle G_1, ..., G_s, T_{n+1} - 1 \rangle} \cong \frac{K[X][T_{n+1}]}{\langle fT_{n+1} - 1 \rangle} \cong K[X]_f$$

Portanto, $K[X_f] \cong K[X]_f$. $\square$

Definição 2.26. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. O **corpo de funções racionais de** X é o corpo de frações de $K[X]$, isto é,*

$$K(X) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in K[X], g \neq 0 \right\} \diagup \sim$$

*onde $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{f'}{g'}$ se $f'g = g'f$. Os elementos de $K(X)$ são denominados **funções racionais**. Dado $x \in X$, dizemos que $\phi = \dfrac{f}{g}$ é regular em x quando $g(x) \neq 0$. O conjunto dos pontos $x \in X$ tal que $\phi = \dfrac{f}{g}$ é regular é denominado **domínio** da ϕ.*

Observe que $K \subset K(X)$, ou seja, $K(X)$ é uma extensão do corpo K.

Proposição 2.27. *Sejam X uma variedade afim e $\phi \in K(X)$. O conjunto dos pontos $x \in X$ em que ϕ é regular é um aberto denso.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], páginas 36 e 37 $\square$

Definição 2.28. *Sejam $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ funções racionais definidas em abertos $U_1, U_2, ..., U_n$ em uma variedade afim X. Seja $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. As funções $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ estão bem definidas sobre U e logo definem um mapa $\phi := (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n) : U \longrightarrow \mathbb{A}^m$. Dizemos que ϕ é um **mapa racional de X em $\mathbb{A}^n$**, denotado por $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{A}^n$. O aberto U é o **domínio de definição** de ϕ. Se $Y \subset \mathbb{A}^m$ é tal que $\phi(x)$ para todo $x \in U$, então podemos escrever $\phi : X \dashrightarrow Y$ e, nesse caso, dizemos que ϕ é um **mapa racional de X em Y**. Além disso, a **imagem** de ϕ é definida por $\phi(X) := \phi(U)$.*

Definição 2.29. *Um **mapa birracional** entre variedades afins X e Y é um mapa racional $\phi : X \dashrightarrow Y$ com $\phi(X)$ denso em Y, tal que existe um mapa racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ de tal modo que as composições são identidades onde estão definidas. Dizemos que X e Y são **birracionalmente equivalentes** e denotamos por $X \overset{birr}{\simeq} Y$.*

Proposição 2.30. *Sejam X e Y variedades afins. X é birracionalmente equivalente a Y se, e somente se, $K(X)$ é isomorfo a $K(Y)$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [4], página 98. $\square$

Sejam $X \subset A^n$ uma variedade afim e $x \in X$. Consideremos o ideal

$$I_X(x) = \{f \in K[X] : f(x) = 0\}.$$

Como $\{x\}$ é irredutível, pela Proposição 2.20, segue que $I_X(x)$ é um ideal primo. Dessa forma o conjunto $S = K[X] \diagdown I_X(x)$ é multiplicativo. Definimos o **anel local de X em x**, como a localização

$$\mathscr{O}_{X,x} := S^{-1}K[X] = K[X]_{I_X(x)} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : g(x) \neq 0 \right\}.$$

Proposição 2.31. *Sejam $\mathscr{O}_{X,x}$ e*

$$\mathfrak{m}_{X,x} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathscr{O}_{X,x} : f, g \in K[X]; g(x) \neq 0, f(x) = 0 \right\} \subset \mathscr{O}_{X,x}.$$

Então, $\mathfrak{m}_{X,x}$ é um ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$.

Demonstração. Consideremos o homomorfismo sobrejetor $\phi : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow K$ dado por $\phi(f) = f(x)$. O núcleo de ϕ é $Ker\,\phi = \mathfrak{m}_{X,x}$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo de Anéis, temos que $\dfrac{\mathscr{O}_{X,x}}{\mathfrak{m}_{X,x}} \cong K$. Como K é um corpo, segue que $\mathfrak{m}_{X,x}$ é um ideal maximal. $\square$

Agora, sendo $Y \subset X$ uma subvariedade da variedade afim X, temos que $I_X(Y)$ é um ideal primo de $K[X]$. Da mesma forma, podemos definir a localização de $K[X]$ em $I_X(Y)$ como sendo

$$\mathscr{O}_{X,Y} = K[X]_{I_X(Y)} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : g(y) \neq 0, \forall y \in Y \right\}.$$

2.2 VARIEDADES PROJETIVAS

Definição 2.32. *O* ***espaço projetivo de dimensão*** n *é dado por*

$$\mathbb{P}^n := \frac{K^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

onde $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \sim (y_0 : y_1 : ... : y_n) \Longleftrightarrow x_i = \lambda y_i$ *para algum* $\lambda \in K^*$.

Consideramos o subconjunto $\mathbb{A}_0^n$ de $\mathbb{P}^n$ dado por

$$\mathbb{A}_0^n = \{(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_0 \neq 0\}.$$

A aplicação $\phi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}_0^n$ definida por

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = (1 : x_1 : x_2 : ... : x_n)$$

é injetora e sobrejetora. Além disso, podemos considerar a aplicação $\psi : \mathbb{A}_0^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ definida por

$$\psi(x_0 : x_1, ..., x_n) = \psi\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : ... : \frac{x_n}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Observamos que $\psi \circ \phi = id_{\mathbb{A}^n}$ e $\phi \circ \psi = id_{\mathbb{A}_0^n}$. Assim, $\mathbb{A}^n$ pode ser identificado com o subconjunto $\mathbb{A}_0^n$. De maneira análoga, podemos fazer a identificação de $\mathbb{A}^n$ com o conjunto

$$\mathbb{A}_i^n = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_i : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$$

para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Dados $F \in K[T_0, T_1, ..., T_n]$ e $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Se $F(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \in K^*$, então escrevemos $F(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$.

Proposição 2.33. *Seja* $F \in K[T_0, T_1, ..., T_n]$. *Podemos escrever* $F = F^{(0)} + F^{(1)} + ... + F^{(d)}$ *com cada* $F^{(i)}$ *homogêneo de grau* i. *Dado* $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n$, *se* $F(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$, *então* $F^{(i)}(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$ *para todo* $i \in \{0, 1, ..., d\}$.

Demonstração. Observemos que $F(x_0 : x_1 : ... : x_n) = F(\lambda x_0 : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n) = 0$, onde $\lambda \in K^*$. Logo,

$$F^{(0)}(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n) + F^{(1)}(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n) + ... + F^{(d)}(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n) = 0.$$

Como cada $F^{(i)}$ é homogêneo de grau i, temos que

$$F^{(0)}\left(x_0 : ... : x_n\right) + \lambda^1 F^{(1)}\left(x_0 : ... : x_n\right) + ... + \lambda^d F^{(d)}\left(x_0 : ... : x_n\right) = 0. \tag{2.1}$$

Dessa forma, em (2.1), obtemos um polinômio de grau d que tem raiz λ para todo $\lambda \in K$. Para que esse polinômio não possua infinitas raízes, devemos ter $F^{(i)}\left(x_0 : x_1 : ... : x_n\right) = 0$ para todo $i \in \{0, 1, ..., d\}$. $\square$

Definição 2.34. *$X \subset \mathbb{P}^n$ é dito um **conjunto algébrico projetivo** se é o conjunto de zeros de um subconjunto $S \subset K^h[T_0, ..., T_n]$ de polinômios homogêneos, isto é,*

$$X = V_p\left(S\right) = \left\{P \in \mathbb{P}^n : F\left(P\right) = 0 \ \forall F \in S\right\}.$$

Definição 2.35. *Uma **hipersuperfície de grau** d é o conjunto X dos zeros de um polinômio homogêneo $F \in K[T_0, ..., T_n]$ de grau d. Uma hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^2$ de grau 1 é denominada de **reta**.*

A demonstração do Lema a seguir é completamente análoga à do Lema 2.5

Lema 2.36. *Os conjuntos algébricos projetivos têm as seguintes propriedades:*

i) $V_p\left(\{0\}\right) = \mathbb{P}^n$ *e* $V_p\left(K[T_0, T_2, ..., T_n]\right) = \emptyset$.

ii) $V_p\left(I\right) \cup V_p\left(J\right) = V_p\left(IJ\right)$.

iii) $\displaystyle\bigcap_{i \in \Lambda} V_p\left(I_i\right) = V_p\left(\bigcup_{i \in \Lambda} I_i\right)$, *onde* $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$ *é uma família arbitrária de ideais homogêneos.*

Definição 2.37. *Usando o Lema 2.36, podemos definir sobre $\mathbb{P}^n$ uma topologia, denominada **Topologia de Zariski**, onde os fechados são os conjuntos algébricos projetivos.*

Temos que $\mathbb{A}^n_0$ é um aberto de $\mathbb{P}^n$. Assim, como $\mathbb{A}^n$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n_0$, podemos considerar $\mathbb{A}^n$ como um aberto de $\mathbb{P}^n$.

A demonstração da Proposição a seguir é análoga à do Lema 2.4.

Proposição 2.38. *Sejam $S \subset K[T_0, T_2, ..., T_n]$ e $I = \langle S \rangle$, então $V_p\left(S\right) = V_p\left(I\right)$.*

Definição 2.39. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$. Definimos o **ideal de** X como*

$$I_p\left(X\right) = \left\{F \in K^h[T_0, T_1, ..., T_n] : F\left(P\right) = 0 \ \forall P \in X\right\}.$$

Definição 2.40. *Seja $I \subset K[T_0, T_1, ..., T_n]$ um ideal. Dizemos que I é um **ideal homogêneo** se para cada $F \in I$, com $F = F^{(0)} + F^{(1)} + ... + F^{(d)}$ e cada $F^{(i)}$ homogêneo de grau i, temos $F^{(i)} \in I$.*

Proposição 2.41. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$. O ideal $I_p\left(X\right)$ é um ideal homogêneo.*

Demonstração. Seja $F \in I_p(X)$ com $F = F^{(0)} + F^{(1)} + ... + F^{(d)}$. Assim, para cada $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in X$, temos $F(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$. Pela Proposição 2.33, temos que $F^{(i)}(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$ para todo $i \in \{0, 1, ..., d\}$, o que acarreta $F^{(i)} \in I_p(X)$. Portanto, $I_p(X)$ é homogêneo. □

Definição 2.42. *Dado um conjunto algébrico projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$, definimos o* ***cone sobre*** *X, como o conjunto*

$$C(X) = \Big\{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} : (x_0 : x_1 : ... : x_n) \in X\Big\} \cup \{(0, ..., 0)\}.$$

Proposição 2.43. *Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico projetivo. Então*

i) $I(C(X)) = I_p(X)$.

ii) Se $I \subset K[T_0, ..., T_n]$ é um ideal homogêneo com $V_p(I) \neq \emptyset$, então $C(V_p(I)) = V(I)$.

Demonstração. i) Dado $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in X$, então $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(X)$. Assim, se $F \in I_p(X)$, segue que $F(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ para todo $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(X)$. Dessa forma, $F \in I(C(X))$, o que acarreta, $I_p(X) \subset I(C(X))$. Por outro lado, se $G \in I(C(X))$, então $G(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ para todo $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(X)$. Como $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(X)$, temos que $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in X$ ou $x_i = 0$ para todo i. Daí, $G(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$, o que acarreta $G \in I_p(X)$. Além disso, todo polinômio homogêneo se anula em $(0, \ldots, 0)$. Logo, $I(C(X)) \subset I_p(X)$. Portanto, $I_p(X) = I(C(X))$.

ii) Seja $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(V_p(I))$, ou seja, $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in V_p(I)$ ou $x_i = 0$ para todo i. Dado $f \in I$, temos que, para cada ponto $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in V_p(I)$, $f(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$, isto é, $(x_0, x_1, ..., x_n) \in V(I)$. Caso $(x_0, x_1, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$, dado $f \in I$, podemos escrevê-lo como $f = f^{(0)} + f^{(1)} + ... + f^{(d)}$ onde cada $f^{(i)}$ é homogêneo de grau i e $f^{(i)} \in I$. Se $f^{(0)} \neq 0$, então $I = K[T_0, T_1, ..., T_n]$, implicando em $V_p(I) = \emptyset$, o que contradiz a hipótese. Então, $f = f^{(1)} + f^{(2)} + ... + f^{(d)}$, donde $f(0, \ldots, 0) = 0$. Logo, $C(V_p(I)) \subset V(I)$. Por outro lado, se $(x_0, x_1, ..., x_n) \in V(I)$, então $f(x_0, x_1, ..., x_n) = 0, \forall f \in I$. Se $x_i = 0$, para todo $i \in \{0, 1, ..., n\}$ então $(x_0, x_1, ..., x_n) \in C(V_p(I))$. Caso $(x_0, x_1, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, tomando $f \in I$, podemos escrever $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + ... + f^{(d)}$, onde cada $f^{(i)}$ é homogêneo de grau i. Como $(x_0, x_1 : ..., x_n) \in V(I)$, temos $f^{(0)}(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ e daí $f^{(0)} = 0$. Além disso $f^{(i)}(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., d\}$. Dessa forma, $f(x_0 : x_1 : ... : x_n) = 0$. Logo $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in C(V_p(I))$ e, portanto, $C(V_p(I)) = V(I)$.

□

Proposição 2.44. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico e $F \in K^h[T_0, ..., T_n]$. Então, o conjunto $X_F = \{x \in X : F(x) \neq 0\}$ é um aberto afim, isto é, complementar de um fechado na topologia de Zariski, denominado **aberto principal**.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [2], páginas 34 e 35. □

Note que os abertos principais formam uma cobertura de X, isto é, temos

$$X = \bigcup_{F \in K[T_0, T_1, ..., T_n]} X_F$$

Dizemos que X tem uma cobertura por abertos afins, isto é, abertos em X que são conjuntos afins

Definição 2.45. *Um conjunto algébrico projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito **redutível** se é do tipo $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 e X_2 são conjuntos algébricos projetivos em $\mathbb{P}^n$ com $X_i \subsetneq X$ e $X_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2\}$. Caso contrário, X é dito **irredutível**.*

Definição 2.46. *Seja $F \in K^h[T_0, ..., T_n]$. Definimos a **desomogenizacão** de F com respeito à variável T_0 como o polinômio $F_* \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ definido por $F_* = F(1, T_2, .., T_n)$.*

Definição 2.47. *Seja $F \in K[T_1, ..., T_n]$ um polinômio de grau d. Podemos escrever*

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_d\,,$$

*onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i e $F_d \neq 0$. Definimos a **homogenização** de F com respeito à variável T_0 como sendo o polinômio $F^* \in K[T_0, ..., T_n]$ dado por*

$$F^* = \sum_{i=0}^{d} F_i T_0^{d-i}.$$

Definição 2.48. *Seja $X \in \mathbb{P}^n$ um fechado. Identificando $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_0^n$, consideramos o conjunto dos pontos finitos de X, isto é, a interseção $X \cap \mathbb{A}^n$. O ideal de $X \cap \mathbb{A}^n$ é o ideal gerado pelas desomogenizações de todos os polinômios de $I_p(X)$.*

*Sejam $Y \subset \mathbb{A}^n$ um fechado e J o ideal de $K[T_0, ..., T_n]$ gerado pelas homogenizações de todos os polinômios de $I(Y)$. O **fecho projetivo** de Y é o fechado $\overline{Y} = V_p(J)$.*

Observe que o fecho projetivo de $Y \subset \mathbb{A}^n$ é de fato o fecho de Y em $\mathbb{P}^n$. No caso particular em que Y é uma hipersuperfície, ou seja, $Y = V(F) \subset \mathbb{A}^n$ com $F \in K[T_1, ..., T_n]$, vemos facilmente que $\overline{Y} = V_p(F^*)$.

Proposição 2.49.

i) Dados ideais $I \subset J \subset K[T_0, ..., T_n]$, então $V_p(J) \subset V_p(I)$.

ii) Se $X \subset \mathbb{P}^n$, então $X \subset V_p(I_p(X))$.

Demonstração.

i) Seja $P \in V_p\left(J\right)$, ou seja, $F\left(P\right) = 0$ para todo $F \in J$. Como $J \subset I$, temos $F\left(P\right) = 0$ para todo $F \in I$. Daí, $P \in V_p\left(I\right)$. Portanto, $V_p\left(J\right) \subset V_p\left(I\right)$.

ii) Seja $P \in X$. Por definição $f\left(P\right) = 0$, para todo $f \in I_p\left(X\right)$. Como $X \subset \mathbb{P}^n$, temos então que $P \in V_p\left(I_p\left(X\right)\right)$. Portanto, $X \subset V_p\left(I_p\left(X\right)\right)$.

$\square$

Proposição 2.50.

i) Se $X \subset Y \subset \mathbb{P}^n$, então $I_p\left(Y\right) \subset I_p\left(X\right)$.

ii) Seja S um conjunto de polinômios homogêneos, então $S \subset I_p\left(V_p\left(S\right)\right)$.

Demonstração.

i) Seja $F \in I_p\left(Y\right)$, isto é, $F\left(P\right) = 0$ para todo $P \in Y$. Como $X \subset Y$, temos $F\left(P\right) = 0$, para todo $P \in X$. Daí, $F \in I_p\left(X\right)$. Portanto, $I_p\left(Y\right) \subset I_p\left(X\right)$.

ii) Seja $F \in S$. Então, $F\left(P\right) = 0$ para todo $P \in V_p\left(S\right)$. Dessa forma, $F \in I_p\left(V_p\left(S\right)\right)$. Portanto, $S \subset I_p\left(V_p\left(S\right)\right)$.

$\square$

Proposição 2.51. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$, então $\overline{X} = V_p\left(I_p\left(X\right)\right)$.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$. Temos que $V_p\left(I_p\left(X\right)\right)$ é um fechado que contém X. Seja $W \subset \mathbb{P}^n$ outro fechado tal que $X \subset W$. Seja $S \subset K^h[T_0, T_1, ..., T_n]$ tal que $W = V\left(S\right)$. Como $X \subset W$, temos que $I_p\left(W\right) \subset I_p\left(X\right)$. Além disso, $S \subset I_p\left(W\right) \subset I_p\left(X\right)$, o que implica $V_p\left(I_p\left(X\right)\right) \subset V_p\left(I_p\left(W\right)\right) \subset V_p\left(S\right) = W$. $\square$

A demonstração do resultado a seguir é análoga a da Proposição 2.15. Ainda, essas duas Proposições juntas com a 2.43 implicam em: um conjunto algébrico $X \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se e somente se seu cone $C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ é irredutível.

Proposição 2.52. *O conjunto algébrico projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $I_p\left(X\right)$ é um ideal primo. Em particular, X é irredutível se, e somente se, $\overline{X}$ é irredutível.*

Definição 2.53. *Uma **variedade projetiva** $X \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico projetivo irredutível.*

Teorema 2.54 (Zeros de Hilbert Projetivo)**.** *Seja I um ideal homogêneo em $K[T_0, ..., T_n]$. Se $X = V_p\left(I\right) \neq \emptyset$, então $I_p\left(X\right) = Rad\left(I\right)$.*

Demonstração. Seja I um ideal homogêneo em $K[T_0, ..., T_n]$ tal que $X = V_p(I) \neq \emptyset$. Então, pelo Teorema 2.43, temos

$$I_p(X) = I(C(X)) = I(V(I)) = Rad(I).$$

$\square$

Teorema 2.55 (Zeros de Hilbert Projetivo Fraco)**.** *Seja I um ideal homogêneo em $K[T_0, ..., T_n]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $V_p(I) = \emptyset$.

ii) $\sqrt{I} = \langle T_0, T_1, ..., T_n \rangle$ *ou* $\sqrt{I} = K[T_0, ..., T_n]$.

iii) $T_0^r, T_1^r, ..., T_n^r \in I$ *para algum* $r \geq 0$.

iv) Existe $d \geq 0$ tal que todo polinômio homogêneo de grau d está contido em I.

Demonstração.

i) $\Rightarrow$ ii) Se $V_p(I) = \emptyset$, então pelo Teorema dos Zeros Projetivo, temos que

$$Rad(I) = I_p(V_p(I)) = I_p(\emptyset) = K[T_0, ..., T_n]$$

Assim, segue ii).

ii) $\Rightarrow$ iii) Se $\sqrt{I} = \langle T_0, T_1, ..., T_n \rangle$, existem $r_i \in \mathbb{N}$ tais que $T_i^{r_i} \in I$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Escolhendo então $r = \prod r_i$, temos o resultado. De maneira análoga, provamos o caso em que $\sqrt{I} = K[T_0, ..., T_n]$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Basta escolher $d = r$ obtido em iii).

iv) $\Rightarrow$ i) Por hipótese, $T_0^d, \ldots, T_n^d \in I$, donde $\left\langle T_0^d, \ldots, T_n^d \right\rangle \subset I$. Logo

$$\emptyset = V_p(\left\langle T_0^d, \ldots, T_n^d \right\rangle) \supset V_P(I)$$

$\square$

2.3 VARIEDADES QUASI-PROJETIVAS

Definição 2.56. *Um **conjunto algébrico quasi-projetivo** X é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ que é a interserção de um aberto com um fechado de $\mathbb{P}^n$.*

Proposição 2.57. *Um conjunto algébrico quasi-projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$ é dado por uma das seguintes definições equivalentes:*

i) X é um subconjunto aberto de um fechado $\mathbb{P}^n$.

ii) X é um subconjunto fechado de um aberto de $\mathbb{P}^n$.

iii) X é um subconjunto aberto de seu fecho.

Demonstração. Inicialmente, observe que se X é um conjunto algébrico quasi-projetivo, então $X = A \cap F$, onde A é um aberto de $\mathbb{P}^n$ e F é um fechado de $\mathbb{P}^n$. Assim, segue que X é um subconjunto aberto de um fechado F de $\mathbb{P}^n$. Por outro lado, se X é um aberto de um fechado, temos que $X = A \cap F$, onde A é um aberto de $\mathbb{P}^n$ e F é um fechado de $\mathbb{P}^n$. Assim, X é a interseção de um fechado e um aberto de $\mathbb{P}^n$. Agora, temos o seguinte:

i) $\Rightarrow$ ii) Suponhamos que X seja um subconjunto aberto de um fechado F de $\mathbb{P}^n$, isto é, $X = A \cap F$, para algum aberto A de $\mathbb{P}^n$. Dessa forma, X é um aberto de um fechado de $\mathbb{P}^n$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Suponhamos que X seja um aberto de um fechado de $\mathbb{P}^n$, isto é, $X = A \cap F$, onde A é um aberto de $\mathbb{P}^n$. Em particular, $X = A \cap \overline{X}$, onde $\overline{X}$ é um fechado de $\mathbb{P}^n$

iii) $\Rightarrow$ i) Suponhamos que X seja um aberto do seu fecho, ou seja, $X = A \cap \overline{X}$. Logo, X é um aberto de um fechado de $\mathbb{P}^n$ □

A noção de quasi-projetivo é a noção mais geral que trabalharemos, já que engloba as noções de afim e projetivo, conforme veremos nas próximas proposições.

Proposição 2.58. *Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico projetivo, então X é um conjunto algébrico quasi-projetivo.*

Demonstração. Temos que $X = X \cap \mathbb{P}^n$. Assim, segue que X é um conjunto algébrico quasi-projetivo. □

Proposição 2.59. *Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto algébrico afim, então X é um conjunto algébrico quasi-projetivo.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$. Como $\mathbb{A}^n$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n_0$, podemos considerar que $X \subset \mathbb{P}^n$. Assim, como $\overline{X}$ é fechado em $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{A}^n_0$ é aberto em $\mathbb{P}^n$, temos então que X é um conjunto algébrico quasi-projetivo. □

Proposição 2.60. *Se Y é um aberto de um conjunto algébrico quasi-projetivo X, então Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo.*

Demonstração. Como Y é aberto de X, então $Y = Y_1 \cap X$, onde Y_1 é um aberto de $\mathbb{P}^n$. Agora, como X é quasi-projetivo, podemos considerá-lo como $X = X_1 \cap X_2$, onde X_1 fechado de $\mathbb{P}^n$ e X_2 é um aberto de $\mathbb{P}^n$. Dessa forma, $Y = Y_1 \cap (X_1 \cap X_2) = X_1 \cap (X_2 \cap Y_1)$. Sendo assim, Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo, pois X_1 é um fechado de $\mathbb{P}^n$ e $X_2 \cap Y_1$ um aberto de $\mathbb{P}^n$. □

Definição 2.61. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico quasi-projetivo e $f = \dfrac{P}{Q}$, onde $P, Q \in K^h[T_0, ..., T_n]$. Dizemos que f é **regular em um ponto** $x \in X$ se $Q\,(x) \neq 0$. f é dita **regular em** X se for regular em todos os pontos de X. As funções regulares em X formam uma K-álgebra denotada por $K[X]$ e denominada **anel das funções regulares de** X.*

Teorema 2.62. *Toda função regular em uma variedade projetiva X é constante.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 59. □

Da mesma maneira que no caso afim e no caso projetivo, podemos definir irredutibilidade de um conjunto algébrico quasi-projetivo. Chamaremos um conjunto algébrico quasi-projetivo irredutível de **variedade**. Este será o objeto mais geral que trabalharemos nesta dissertação.

Definição 2.63. *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Um **morfismo** é uma função $f : X \longrightarrow Y$ tal que para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $g \in K[V]$ temos:*

i) $f^{-1}\,(V)$ é um aberto em X;

ii) $g \circ f$ é uma função regular em $f^{-1}\,(V)$.

Teorema 2.64. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos. Se X é um fechado projetivo, então $f\,(X)$ é fechado em Y. Além disso, $f\,(X)$ é um fechado projetivo.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [2], página 41 □

Definição 2.65. *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Um **isomorfismo** entre X e Y é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ tal que existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ de modo que as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são identidades em X e Y, respectivamente. Neste caso X e Y são ditos **isomorfos**.*

Definição 2.66. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. O conjunto de **funções racionais em** X, é definido como*

$$K\,(X) := \{(f, U) : f \in K[U], U \subset X \text{ aberto denso}\} \diagup \sim$$

onde $(f,U) \sim (g,V)$ *quando* $f\mid_{U\cap V} = g\mid_{U\cap V}$. *O* ***domínio*** *de* $\psi \in K(X)$ *é o maior aberto de* X *de modo que* ψ *esteja bem definida.*

Definição 2.67. *Seja* X *um conjunto algébrico quasi-projetivo. Um* ***mapa racional*** $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ *é dado equivalentemente por:*

i) $f(x) = (f_0(x) : ... : f_m(x))$ *para todo* x *em um aberto denso* U *de* X, *onde* $f_0, f_1, ..., f_m \in K(X)$ *não têm zeros em comum em* U *e, se* U_i *é o domínio de definição de* f_i, *então* $U \subset U_i$, $\forall i \in \{0,1,2,...,m\}$.

ii) Um morfismo $f : U \longrightarrow \mathbb{P}^m$ *onde* U *é um aberto denso de* X *e tal que se* $g : V \longrightarrow \mathbb{P}^m$ *é um morfismo de um aberto denso* V *de* X *que coincide com* f *em* $U \cap V$, *então* f *e* g *definem o mesmo mapa racional.*

Se $Y \subset \mathbb{P}^m$ *é tal que* $f(X) := f(U) \subset Y$, *então podemos considerar* $f : X \dashrightarrow Y$.

Definição 2.68. *Sejam* X *e* Y *conjuntos algébricos quasi-projetivos e* $f : X \dashrightarrow Y$ *um mapa racional. Se* $g : X \dashrightarrow Y$ *é um mapa racional tal que* $f \circ g = id_Y$ *e* $g \circ f = id_X$ *onde estão definidas. Nesse caso, dizemos que* f *é* ***birracional*** *e* X *e* Y *são* ***birracionalmente equivalentes*** *e denotamos por* $X \overset{birr}{\simeq} Y$

2.4 ELEMENTOS INTEIROS

Definição 2.69. *Sejam* A *e* B *anéis comutativos com* $A \subset B$ *tais que* $1_A = 1_B$. *Dizemos que um elemento* $b \in B$ *é* ***inteiro sobre*** A *se* b *é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em* A, *isto é, se existem* $a_1, a_2, ..., a_r \in A$ *tais que*

$$b^r + a_1 b^{r-1} + ... + a_r b^0 = 0.$$

Dizemos que B *é* ***inteiro sobre*** A *se todo elemento de* B *é inteiro sobre* A.

O lema a seguir dá uma caracterização dos anéis inteiros sobre A.

Lema 2.70. *Sejam* $A \subset B$ *anéis comutativos e com identidade* $1_A = 1_B$. *Suponha que* B *é finitamente gerado como* A*-álgebra.* B *é inteiro sobre* A *se e somente se* B *é finitamente gerado como* A*-módulo.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [1], capítulo 5. □

Proposição 2.71. *Sejam* $A \subseteq B \subseteq C$ *anéis. Se* B *é inteiro sobre* A *e* C *é inteiro sobre* B *então* C *é inteiro sobre* A.

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [1] na página 67. □

Definição 2.72. *Sejam X e Y fechados afins e $f : X \to Y$ um morfismo. Dizemos que f é **dominante** se $f(X)$ for denso sobre Y, ou seja, $\overline{f(X)} = Y$.*

Proposição 2.73. *Se f é dominante, então a aplicação $f^* : K[Y] \to K[X]$ dada por $f^*(g) = g \circ f$ é injetora.*

Demonstração. Seja $g \in Ker f^*$, ou seja, $f^*(g) = 0$ $K[X]$, o que significa que $(g \circ f)(x) = 0$ para todo $x \in X$. Logo, $f(X) \subset V(g) \subset Y$. Como f é dominante e $V(g)$ é fechado, temos

$$\overline{f(X)} \subset V(g) = Y$$

Logo, $g = 0$ em $K[Y]$. Daí, $Ker f^* = \{0\}$, e portanto, f^* é injetora. □

Dessa forma, através de f^*, podemos considerar $K[Y]$ incluso em $K[X]$.

Definição 2.74. *A aplicação f^* definida na Proposição 2.73 é dita **pullback de** f.*

Teorema 2.75. *Sejam $f : V \to W$ e $g : W \to X$ morfismo entre variedades. Se f e g são dominantes então $g \circ f : V \to X$ é dominante.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [7] na página 55. □

Definição 2.76. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre fechados afins. Dizemos que f é **finito** se f é dominante e $K[X]$ é inteiro sobre $K[Y]$.*

Observe que pelo Teorema 2.75 e pela Proposição 2.71, podemos dizer que a composição de morfismo finito é finito.

Proposição 2.77. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre fechados afins. Então, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ tem no máximo um número finito de elementos.*

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e considere,

$$t_i = T_i + I(X), \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Como f é finito, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, t_i é inteiro sobre $K[Y]$, isto é, existem $a_1, ..., a_r \in K[Y]$ tais que

$$t_i^r + a_1 t_i^{r-1} + ... + a_r t_i^0 = 0, \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Assim, para cada $y \in Y$ e cada $x \in f^{-1}(y)$, temos

$$t_i^r(x) + a_1(y)\, t_i^{r-1}(x) + ... + a_r(y)\, t_i^0(x) = 0, \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Logo, $t_i(x)$ é raiz dos polinômios de coeficientes $a_j(y)$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Assim, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, há um número finito de valores de $t_i(x)$. Portanto, $f^{-1}(y)$ possui no máximo um número finito de elementos. □

Lema 2.78 (Nakayama)**.** *Seja A um anel comutativo e seja M um A-módulo finitamente gerado. Seja $J \subset A$ um ideal e considere o conjunto $1_A + J = \{1_A + b : b \in J\}$. Então a condição:*

$$\text{Para cada } a \in 1_A + J \text{ temos } aM = 0 \Rightarrow M = 0.$$

implica na condição

$$JM = M \Longrightarrow M = 0.$$

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 283. □

Corolário 2.79. *Sejam $A \subset B$ anéis comutativos tais que B é um A-módulo finitamente gerado. Seja $J \subset A$ um ideal. Então, $J \neq A$ implica $JB \neq B$.*

Demonstração. Considere o conjunto $1_A + J = \{1_A + b : b \in J\}$. Observe que $1_A \in B$. Dessa forma, $aB = 0$ apenas quando $a = 0$, e se $J \neq \langle 1 \rangle$ então $0 \notin 1_A + J$. Pelo Lema 2.78, temos $JB \neq B$.

□

Proposição 2.80. *Todo morfismo finito entre fechados afins é sobrejetor.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 62. □

Corolário 2.81. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo entre fechados afins e $Z \subset X$ um fechado em X. Se f é finito, então $f(Z)$ é fechado em Y.*

Demonstração. Seja $f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$. Observe que $f|_Z$ é dominante por definição. Como $f|_Z$ é dominante, o pullback $f^* : K[\overline{f(Z)}] \to K[Z]$ é injetor. Logo, podemos considerar $K[\overline{f(Z)}] \subset K[Z]$. Seja $W = \overline{f(Z)}$ e seja $\alpha \in K[Z]$. Como $Z \subset X$ é fechado, temos

$$K[Z] = K[X] \big/ I_X(Z).$$

Seja $\beta \in K[X]$ tal que a imagem de β no quociente $K[Z]$ seja α. Como $f : X \to Y$ é finito, temos $K[X]$ inteiro sobre $K[Y]$. Logo, existem $b_1, b_2, ..., b_n \in K[Y]$ tais que

$$\beta^n + b_1\beta^{n-1} + ... + b_n = 0. \tag{2.2}$$

Como $\overline{f(Z)} \subset Y$ é fechado, segue-se :

$$K[W] = \frac{K[Y]}{I_Y(W)}.$$

Seja $a_i \in K[W]$ a imagem de b_i no quociente, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Usando f^*, temos que $K[W] \subset K[Z]$, donde, considerando o quociente em (2.2), temos

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

Isto é, α é inteiro sobre $K[W]$. Assim, $K[Z]$ é inteiro sobre $K[W]$ e $f|_Z$ é finito. Como $f|_Z$ é finito, pela Proposição 2.80 segue que $f|_Z$ é sobrejetor. Dessa forma, $f(Z) = \overline{f(Z)}$, ou seja, $f(Z)$ é fechado. $\square$

Proposição 2.82. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre conjuntos algébricos afins. Suponhamos que para todo ponto $y \in Y$ existe aberto afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U := f^{-1}(V)$ é afim e $f : U \to V$ é um morfismo finito. Então f é finito.*

Demonstração. Como os abertos principais formam uma base da topologia de Zariski, podemos supor que V é principal, isto é,

$$V = Y_g = \{y \in Y : g(y) \neq 0\}$$

para $g \in K[Y]$ e definamos

$$U := f^{-1}(Y_g) = \{x_0 \in X : f(x_0) \in Y_g\} = \{x_0 \in X : g(f(x_0)) \neq 0\} = X_{f^*g}.$$

Como $K[Y_g] = K[Y][1/g]$ e $K[X][1/g] = K[X_{f^*g}]$ com $1/g \in K[Y_g] \subset K[X_{f^*g}]$, via f^*. Dessa forma, $K[Y][1/g] \subset K[X][1/g]$. Como $f : f^{-1}(Y_g) \to Y_g$ é finito, temos que $K[X][1/g]$ é inteiro sobre $K[Y][1/g]$. Daí, $K[X][1/g]$ é um $K[Y][1/g]$-módulo finitamente gerado com uma base $w_1, w_2, ..., w_r$. Note que podemos tomar os w_i em B, pois se tomarmos uma base da forma $\dfrac{w_i'}{g^k}$ com $w_i' \in B$ então os w_i' também formam uma base. Assim, para cada $b \in K[X] \subset K[X][1/g]$, temos

$$b = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{g^{n_i}} w_i \text{ com } a_i \in K[Y] \,\mathrm{e}\, n_i \geq 0. \tag{2.3}$$

Agora, Y pode ser coberto por um número finito de abertos principais Y_{g_α} e para cada um destes temos expressões do tipo (2.3), que podem ser escritas como:

$$b = \sum_{1}^{r_\alpha} \frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_{i,\alpha}}} w_{i,\alpha} = \sum_{1}^{r_\alpha} \frac{a'_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_\alpha}} w_{i,\alpha} \text{ com } a'_{i,\alpha} \in K[Y].$$

Considere $J =< g_\alpha^{n_\alpha} >$. Como Y é coberto pelos Y_{g_α}, para cada $y \in Y$, existe α tal que $g_\alpha(y) \neq 0$. Daí,

$$V(J) = \emptyset \Leftrightarrow J = K[Y] \Leftrightarrow 1_{K[Y]} \in J.$$

Assim, $1_{K[Y]} = \sum h_\alpha g_\alpha^{n_\alpha}$ com $h_\alpha \in K[Y]$. Desse modo, temos

$$b = b.1_{K[Y]} = \sum h_\alpha g_\alpha^{n_\alpha} = \sum_i \sum_\alpha a'_{i,\alpha} h_\alpha w_{i,\alpha}.$$

Logo, o conjunto $\{w_{\alpha,i}\}$ forma uma base finita de $K[X]$ como $K[Y]$-módulo finitamente gerado. Então, f é finito. $\square$

Definição 2.83. *Um morfismo $f : X \to Y$ entre conjuntos algébricos quasi-projetivos é dito **finito** se para cada $y \in Y$ existe uma vizinhança afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U := f^{-1}(V)$ é um aberto afim e $f|_U : U \to V$ é um morfismo finito de conjuntos algébricos afins.*

Definição 2.84. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado projetivo e E um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$, isto é um fechado de $\mathbb{P}^n$, definido por polinômios homogêneos de grau 1. Suponha que $X \cap E = \emptyset$. A* ***projeção com centro em*** *E é o mapa racional $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ dado por $\pi(x) = (L_0(x), L_1(x), ..., L_{n-d-1}(x))$, onde $L_0, L_1, ..., L_{n-d-1}$ são as equações linearmente independentes que definem E. Observe que ϕ é regular no aberto $\mathbb{P}^n \setminus E$ contendo X de $\mathbb{P}^n$.*

Teorema 2.85. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado e E um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ disjunto de X. Então, a projeção $\pi : X \to \pi(X)$ é um mapa finito.*

Demonstração. Suponhamos que E seja dado por equações $L_0, L_1, ..., L_{n-d-1}$. Sejam $y_0, ..., y_{n-d-1}$ as coordenadas de $\mathbb{P}^{n-d-1}$, então $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ é dada por $y_j = L_j(x)$, com $j \in \{0, 1, ..., n-d-1\}$. Agora,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\left(\mathbb{A}_i^{n-d-1}\right) &= \left\{(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n : \pi(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{A}_i^{n-d-1}\right\} \\ &= \left\{(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n : (L_0(x) : L_1(x) : ... : L_{n-d-1}(x)) \in \mathbb{A}_i^{n-d-1}\right\}\end{aligned}$$

Daí,

$$U_i := \pi^{-1}\left(\mathbb{A}_i^{n-d-1}\right) \cap X = X_{L_i} = \{x \in X : L_i(x) \neq 0\}$$

é um aberto principal. Agora, pela Proposição 2.82, é suficiente mostrar que a aplicação $\pi : U_i \to \mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)$ é um morfismo finito. Sabemos que

$$K[U_i] = K[X_{L_i}] = K[X]\left[\frac{1}{L_i}\right]$$

Vamos mostrar que $K[U_i]$ é inteiro sobre $K[\mathbb{A}^{n-d-1} \cap \pi(X)]$. Seja $g \in K[U_i]$. Temos que $g = \dfrac{g'}{L_i^m}$ com $g' \in K[X]$. Consideremos o mapa $\pi_1 : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d}$ definido por

$$\pi_1(x) = \left(L_0(x)^m : L_1(x)^m : ... : L_{n-d-1}(x)^m : g'(x)\right).$$

Temos que π_1 é um morfismo. Como X é um fechado projetivo, então $\pi_1(X)$ é um fechado projetivo em $\mathbb{P}^{n-d}$. Assim, podemos supor que $\pi_1(X) = V(F_1, F_2, ..., F_s)$ onde $F_1, F_2, ..., F_s \in K[S_0, S_1, ..., S_{n-d}]$. Como $E \cap X = \emptyset$, temos que $L_0, L_1, ..., L_{n-d-1}$ não possuem zeros comuns em X. Daí, $(0 : 0 : ... : 1) \in \mathbb{P}^{n-d}$ não está em $\pi_1(X)$. Isto siginifica que as equações $S_0 = S_1 = ... = S_{n-d-1} = F_1 = ... = F_s = 0$ não tem solução em $\mathbb{P}^{n-d}$. Seja $J = \langle S_0, ..., S_{n-d-1}, F_1, ..., F_s\rangle$ um ideal homogêneo de $K[S_0, ..., S_{n-d}]$. Pelo Teorema 2.55, existe $k \geq 0$ tal que

$$S_0^k, ..., S_{n-d}^k \in \langle S_0, S_1, ..., S_{n-d}, F_1, ..., F_s\rangle.$$

Então, temos a seguinte inclusão:

$$\left\langle S_0^k, ..., S_{n-d}^k\right\rangle \subset \langle S_0, ..., S_{n-d-1}, F_1, ..., F_s\rangle.$$

Assim, podemos escrever

$$S_{n-d}^{k}=\sum_{j=0}^{n-d-1}S_jH_j+\sum_{j=1}^{s}F_jP_j$$

com $H_j,P_j\in K[S_0,...,S_{n-d}]$. Como em $\pi_1\left(X\right), F_j=0$ para todo $j\in\{1,2,...,s\}$, temos

$$S_{n-d}^{k}=\sum_{0}^{n-d-1}S_jH_j.$$

Seja $H_j^{(l)}$ a componente homogênea de grau l de H_j. Então, o polinômio homogêneo de grau k

$$\phi\left(S_0,S_1,...,S_{n-d}\right):=S_{n-d}^{k}-\sum_{j=0}^{n-d-1}S_jH_j^{(k-1)}$$

é identicamente nulo em $\pi_1\left(X\right)$. Considerando S_{n-d}^{k} como variável, o polinômio ϕ pode ser escrito como:

$$\phi=S_{n-d}^{k}-\sum_{j=0}^{n-d-1}A_{k-j}\left(S_0,...,S_{n-d-1}\right)S_{n-d}^{j}$$

com A_{k-j} homogêneo de grau $k-j$. Substituindo $S_j=L_j^m$, com $j\in\{0,1,...,n-d-1\}$ e $S_{n-d}=g'$. Temos

$$\left(g'\right)^k-\sum_{j=0}^{n-d-1}A_{k-j}\left(L_0^m,...,L_{n-d-1}^m\right)\left(g'\right)^j=0.$$

Como A_{k-j} é homogêneo, dividindo por L_i^{mk}, obtemos:

$$g^k-\sum_{j=0}^{n-d-1}A_{k-j}\left(\frac{L_0^m}{L_i^m},...,\frac{L_{n-d-1}^m}{L_i^m}\right)g^j=0.$$

Como $\dfrac{L_j}{L_i}$ é regular em $\mathbb{A}_i^{n-d-1}\cap\pi\left(X\right)$, para cada j, temos que o elemento g é inteiro sobre $K[\mathbb{A}_i^{n-d-1}\cap\pi\left(X\right)]$. Logo, $\pi:U_i\to\mathbb{A}_i^{n-d-1}\cap\pi\left(X\right)$ é finito. □

Corolário 2.86. *Sejam $F_0,F_1,...,F_m\in K[T_0,T_1,...,T_m]$ polinômios homogêneos de mesmo grau sem zeros em comum em um fechado $X\subset\mathbb{P}^n$. Então, $\phi:X\to\phi\left(X\right)$ dada por $\phi\left(X\right)=\left(F_0\left(x\right),F_1\left(x\right),...,F_m\left(x\right)\right)$ define um morfismo finito.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 65. □

Teorema 2.87 (Normalização de Noether)**.** *Seja X um conjunto algébrico projetivo (respectivamente afim). Então, existe um morfismo finito $\phi:X\to\mathbb{P}^m$ (respectivamente $\phi:X\to\mathbb{A}^m$) para algum m.*

Demonstração. Seja $X\subset\mathbb{P}^n$ um fechado. Se $X=\mathbb{P}^n$, seja $\varphi=id$. Se $X\neq\mathbb{P}^n$ então existe $x\in\mathbb{P}^n-X$. Observe que $\{x=(a_0:a_1:...:a_n)\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ definido por equações da forma

$$a_iT_j-a_jT_i,\ i,j\in\{0,1,...,n\},\ i\neq j$$

Considere φ' a projeção com centro em x. Então φ' está definida em X e $\varphi' : X \to \varphi'(X)$ dada por

$$\varphi'(x) = (a_0 T_1 - a_1 T_0 : ... : a_1 T_n - a_n x_0).$$

Observe que todos

$$a_i T_j - a_j T_i,\ i \in \{0, 1, ..., n\},\ i \neq j$$

possuem o mesmo grau e não têm zeros em comuns. Pelo Teorema 2.85, $\varphi' :\to \varphi'(X)$ é finito. Pela observação feita após o Teorema 2.64, segue que $\varphi'(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é um fechado projetivo. Assim, se $\varphi'(X) \subsetneqq \mathbb{P}^{n-1}$, podemos repetir o argumento anterior. Como a composição de morfismos finitos é finito temos que $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ é finito para algum $m \leq n$. Agora, considere $X \subseteq \mathbb{A}^n$ fechado. Temos o seguinte

$$X \subseteq \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}_0^n \subset \mathbb{P}^n.$$

Consideremos $\overline{X}$, o fecho projetivo de X em $\mathbb{P}^n$. Seja $x \in \mathbb{P}^n \setminus \overline{X}$ um ponto no infinito, isto é, $x \notin \mathbb{A}_0^n$. Considere a projção $\varphi' : \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$ com centro em x. Como $x \notin \mathbb{A}_0^n$, o mesmo possui a seguinte forma $x = (0 : a_1 : a_2 : ... : a_n)$. Suponhamos $a_1 \neq 0$. Então $\{x\}$ pode ser visto como subespaço vetorial de $\mathbb{P}^n$, dado pelas equações

$$T_0, a_1 T_2 - a_2 T_1, ..., a_1 T_n - a_n T_1$$

Dessa forma, $\varphi'(x) = (x_0 : a_1 x_2 - a_2 x_1 : ... : a_1 x_n - a_n x_1)$. Logo, $\varphi'(\mathbb{A}_0^n) \subset \mathbb{A}_0^{n-1}$. Em particular, $\varphi'(X) \subseteq \mathbb{A}_0^{n-1}$. Se $\varphi'(X) = \mathbb{A}_0^{n-1}$, nada temos a fazer. Caso contrário, podemos repetir o processo até obter um morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ para algum m. □

Proposição 2.88. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito entre conjuntos algébricos afins. Então, $[K(X) : K(Y)] < \infty$.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, seja $t_i = T_i + I(X)$. Assim, $K(X) = K(t_1, ..., t_n)$. Como f é finito, temos $K[X]$ inteiro sobre $K[Y]$. Logo, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, t_i é inteiro sobre $K[Y]$, ou seja, algébrico sobre $K[Y]$. Dessa forma, $K(X) | K(Y)$ é uma extensão finita. □

Definição 2.89. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito entre conjuntos algébricos afins. Definimos o* ***grau de*** *f, denotado por* $\deg\ f$*, como o grau da extensão $K(X) | K(Y)$.*

Definição 2.90. *Um fechado afim X é dito* ***normal*** *se $K[X]$ é integralmente fechado, isto é, se $K[X]$ contém todo elemento de seu corpo de frações que é inteiro sobre $K[X]$.*

Proposição 2.91. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito de variedades afins com Y normal. Então para cada $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ tem no máximo* $\deg\ f$ *elementos.*

Demonstração. Sob as condições da hipótese, segue que $f^{-1}(y)$ tem no máximo um número finito de elementos. Considerando o pullback $f^* : K[Y] \longrightarrow K[X]$ e $i : K[Y] \hookrightarrow f^*(K[Y])$, podemos considerar $K[Y] \subset K[X]$. Suponhamos que $[K(X) : K(Y)] = n$. Como Y é normal, $K[Y]$ é integralmente fechado, isto é, $K[Y]$ contém todo elemento do seu corpo de frações que é inteiro sobre $K[Y]$. Como f é finito, $K[X]$ é inteiro sobre $K[Y]$. Dessa forma, $K[X]$ é um $K[Y]$-módulo finitamente gerado. Assim, para todo $a \in K[X]$, os coeficientes do polinômio mínimo de a sobre $K(X)$ estão em $K[Y]$. Agora, sejam $x_1, x_2, ..., x_m$ elementos de $f^{-1}(y)$. Seja $a \in K[X]$ tal que $a(x_j) \neq a(x_i)$ para $i \neq j$. Seja $F \in K[Y][T]$ o polinômio mínimo de a sobre $K(X)$. Então, deg $f \leq [K(X) : K(Y)] = n$. Seja $\overline{F}$ o polinômio obtido substituindo os coeficientes de F por seus valores em y. Então, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $a(x_i)$ é raiz de $\overline{F}$. Logo, segue que $m \leq \deg \overline{F} \leq \deg F \leq n$. Portanto, $f^{-1}(y)$ tem no máximo n elementos. □

Definição 2.92. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito de variedades afins com Y normal. Dizemos que um ponto $y \in Y$ é um **ponto de ramificação de** f se o número de elementos na pré-imagem de y é menor que o grau de f. Caso contrário y é dito **não ramificado**.*

2.5 DIMENSÃO

Definição 2.93. *Seja X uma variedade quasi-projetiva. Definimos a **dimensão de** X como sendo o grau de transcendência da extensão $K(X) : K$, denotada por*

$$\dim(X) = tr \ \deg(K(X) : K).$$

Adotaremos $\dim(\emptyset) = -1$.

Lema 2.94.

i) Seja X uma variedade quasi-projetiva. Dado U um aberto de X, temos que $\dim(X) = \dim(U)$.

ii) $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$.

iii) Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo finito entre variedades quasi-projetivas, então $\dim(X) = \dim(Y)$. *Em particular, se $X \simeq Y$, então* $\dim(X) = \dim(Y)$.

Demonstração.

i) Como $K(U) = K(X)$, temos o resultado.

ii) Pelo Teorema da Normalização de Noether, temos que $Id : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ é um morfismo finito. Dessa forma, $K[\mathbb{A}^n]$ é um módulo finitamente gerado. Considere $t_1, t_2, ..., t_n$ os elementos da base tais que $t_i = T_i + I(\mathbb{A}^n)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dessa forma, $K(\mathbb{A}^n) = K(t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$. Logo, $dim(\mathbb{A}^n) = n$. Agora, como $\mathbb{A}^n_0$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^n_0$ é um aberto de $\mathbb{P}^n$, pleo item (i), temos que $dim(\mathbb{P}^n) = n$

iii) Como f é finito, então a extensão de corpos $K(Y) \mid K(X)$ induzida por f é algébrica. Assim, $K \subset K(Y) \subset K(X)$ e

$$\dim(X) = trdeg\,(K(X) \mid K) = trdeg\,(K(Y) \mid K) = \dim(Y).$$

Como todo isomorfismo é um morfismo finito, se $X \simeq Y$ então $\dim(X) = \dim(Y)$.

$\square$

Proposição 2.95. *Sejam $Y \subset X$ variedades quasi-projetivas e Y fechado em X. Então* $\dim\ Y \leq \dim\ X$*. Além disso, se* $\dim\ Y = \dim\ X$*, então $Y = X$.*

Demonstração. Observe que X pode ser escrito como a união de abertos principais afins X_F onde $F \in K^h[T_0, ..., T_n]$ pois constituem uma base para a Topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$. Assim, podemos supor que $Y \subset X \subset \mathbb{A}^N$ são fechados irredutíveis. Seja $n = \dim\ X$. Sejam $t_i = T_i + I(X)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Então como $\dim\ X = n$, qualquer conjunto com $n+1$ elementos será algebricamente dependente em $K[X]$. Como Y é fechado em X, pela Proposição 2.19, segue que

$$K[Y] \simeq \frac{K[X]}{I_X(Y)}.$$

Então quaisquer $n+1$ (imagens) de t_i em $K[Y]$ são algebricamente dependentes. Assim, $\dim\ Y = tr\ \deg(K(Y) : K) \leq n$. Agora, suponha que $\dim\ X = \dim\ Y = n$. Podemos supor que $t_1, t_2, ..., t_n$ são algebricamente independentes em $K[X]$. Seja $u \in K[X]$ não nulo. Então $\{u, t_1, t_2, ..., t_n\}$ é algebricamente dependente e existe um polinômio $F(T_1, T_2, \cdots, T_n, U)$ com coeficientes em K tal que $F(t_1, t_2, ..., t_n, u) = 0$. Podemos escrever

$$0 = F(t_1, t_2, ..., t_n, u) = a_0(t_1, t_2, ..., t_n)\,u^k + ... + a_{k-1}(t_1, t_2, ..., t_n)\,u + a_k(t_1, t_2, ..., t_n).$$

Tomando F irredutível, temos que $a_k(T_1, T_2, T_3, ..., T_n)$ é não nulo. Suponha que a imagem de u é nula em Y, então temos

$$a_k(t_1, t_2, ..., t_n) = 0 \text{ em } Y$$

implicando que $t_1, t_2, ..., t_n$ são algebricamentes dependentes em $K[Y]$ o que contradiz o fato de que as imagens dos t_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, são algebricamente independentes em $K[Y]$. Logo, $u \neq 0$ em Y. Caso $X \neq Y$ existiria $u \in K[X]$ identicamente nulo em Y mas não em X, bastando tomar $u \in I_X(Y)$. Portanto, $X = Y$ $\square$

Definição 2.96. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo e seja $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ a decomposição de X em componentes irredutíveis. Definimos a* ***dimensão*** *de X como* $\dim(X) = máx_{1 \leq i \leq n}\ \dim(X_i)$.

Definição 2.97. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. No caso em que* $\dim X = 1$ *denominamos X uma* ***curva****.*

Definição 2.98. *Sejam $Y \subset X$ variedades quasi-projetivas e Y um fechado em X. Definimos a* ***codimensão*** *de Y em X, como* $\dim(Y) - \dim(X)$.

Teorema 2.99 (Ideal Principal de Krull - Versão Projetiva)**.** *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva e seja $F \in K[T_0, T_1, ..., T_N]$ um polinômio homogêneo não identicamente nulo em X. Considere $Y = X \cap V_p(F) = \{x \in X : F(x) = 0\}$. Então,* $\dim(Y) = \dim(X) - 1$.

Demonstração. Observe inicialmente que como F é não nulo em X, temos $Y \subset X$. Assim, pela Proposição 2.95, segue que $\dim\ Y < \dim\ X$. Seja $X^{(1)} = Y$. Escolha $F_1 \in K[T_0, T_2, ..., T_n]$ de mesmo grau de F que não seja nulo em nenhuma componente irredutível $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, ..., X_r^{(1)}$ de $X^{(1)}$. Seja $X^{(2)} = X^{(1)} \cap V_p(F_1)$. Então, $\dim\ X^{(2)} < \dim\ X^{(1)}$. Procedendo dessa forma, obtemos a cadeia

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset ...$$

onde $X^{(i)} = X^{(i-1)} \cap V_p(F_{i-1})$, com *dim* $X^{(i+1)} < \dim\ X^{(i)}$. Como $\dim\ X = n$, então $X^{(n+1)} = \emptyset$. Agora se $\dim\ X^{(1)} < n - 1$ então $X^{(n)} = \emptyset$. Além disso, observamos que

$$X^{(n)} = X \cap V_p(F) \cap V_p(F_1) \cap ... \cap V_p(F_{n-1})$$

onde $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ não tem zeros em comum em X. Como os $F_{i's}$ possuem o mesmo grau e sem zeros comuns, pelo corolário 2.86 segue que $\alpha : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ dada por $\alpha(x) = (F(x) : F_1(x) : F_2(x) : ... : F_{n-1}(x))$ é um morfismo finito. Então, $\dim\ X = n - 1$. Logo, $\dim\ X^{(1)} = \dim\ Y = n - 1$. $\square$

Corolário 2.100. *Seja X um conjunto algébrico projetivo.*

i) *Se X é irredutível, então* $\dim\ X = 1 + \max(\dim\ Y)$*, onde Y percorre os fechados próprios de X.*

ii) $\dim\ X$ *é o maior inteiro n para qual existe cadeia*

$$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_n = X$$

de subvariedades de X.

Demonstração.

i) Pelo Teorema 2.99 obtemos $\dim\ Y + 1 = \dim\ X$, onde $Y = X \cap V_p(F)$, para algum polinômio homogêneo F. Assim, ao considerarmos a possibilidade para todos os subconjuntos fechados próprios de X, temos

$$\dim\ X = 1 + \max(\dim\ Y)$$

ii) Pelo Teorema 2.99 obtemos a seguinte cadeia

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset ...$$

onde $X^{(i)} = X^{(i-1)} \cap V_p(F_{i-1})$, com dim $X^{(i+1)} <$ dim $X^{(i)}$. Como dim $X = n$, então $X^{n+1} = \emptyset$ Assim, dim $X = n$ é o maior inteiro positivo para qual existe a cadeia

$$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_n = X$$

de subvariedades de X.

□

Lema 2.101. *Seja $B = K[T_1, T_2, ..., T_n]$ e $A \supset B$ um domínio inteiro sobre B. Sejam $f = T_1$ e $R = P(T_2, ..., T_n) \neq 0$, onde $P(T_2, ..., T_n) \in K[T_2, ..., T_n]$. Para qualquer $Q \in A$ temos que, se f divide $(RQ)^l$ em A para algum $l > 0$, então f divide Q^s em A para algum $s > 0$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], páginas 74 e 75. □

Teorema 2.102. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva e $F \in K[T_0, T_1, ..., T_N]$ um polinômio homogêneo não nulo em X. Considere $Y = X \cap V_p(F) = \{x \in X : F(x) = 0\}$. Então toda componente irredutível de Y tem dimensão igual a* $\dim(X) - 1$*.*

Demonstração. Na prova do Teorema 2.99, obtemos a seguinte cadeia

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset ...$$

com dim $X^{(i+1)} <$ dim $X^{(i)}$ onde $X^{(i+1)} = X \cap V_p(F_i)$. Além disso, temos

$$X^{(n)} = X \cap V_p(F) \cap V_p(F_1) \cap ... \cap V_p(F_{n-1})$$

e $X^{(n+1)} = \emptyset$. Logo os polinômios $F = F_0, F_1, F_2, ..., F_n$ não tem zeros em comum em X e possuem o mesmo graus. Logo, pelo corolário 2.86, temos então que $\alpha : X \to \alpha(X)$ dada por $\alpha(x) = (F_0(x), F_2(x), ..., F_n(x))$ é um morfismo finito. Como X é fechado e α é um morfismo finito, então $\alpha(X)$ é fechado. Assim, $\alpha(X) = \cup X_{G_i}$, onde $G_i \in K[T_0, T_1, ..., T_n]$ são polinômios homogêneos para $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Daí $\dim(\alpha(X)) = \dim\ X = n$. Dessa forma, $\alpha(X) = \mathbb{P}^n$. Suponha que dim $X = n$ e $F = F_0$. Para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, temos $U_i = \alpha^{-1}(\mathbb{A}^n_i)$. Então pela Proposição 2.44, segue que $U_i = X_{F_i}$ é um aberto principal. Observe o seguinte $(X \cap V_p(F_0)) \cap U_0 = X \cap (V_p(F_0) \cap U_0) = \emptyset$, ou seja, $Y \cap U_0 = \emptyset$. Como $Y \cap U_i$ é aberto em Y, basta mostrar que cada componente irredutível de $Y \cap U_i$ tem dimensão $n - 1$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Agora, em U_i, $F = 0$ somente quando $f = 0$, onde $f = \frac{F}{F_i} \in K[U_i]$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dessa forma,

$$Y \cap U_i = (X \cap V_p(F)) \cap U_i = X \cap (V_p(F) \cap U_i) = V(f)$$

Agora, $\alpha_{|_{U_i}} : U_i \to \mathbb{A}_i^n \simeq \mathbb{A}^n$ é dada por n funções regulares $f_1, f_2, ..., f_n \in K[U_i]$ com $f = f_i$. Seja $P \in K[T_1, t_2, ..., t_n]$ e considere $R = P(f_1, f_2, ..., f_n) \in K[U_i]$. Seja $V(f) = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_r$. Suponha $R = 0$ em W_1. Seja Q polinômio anulando-se em $W_2 \cup W_3 \cup ... \cup W_r$ mas não em W_1. Daí $(RQ) = 0$ em $V(f)$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, temos

$$\exists\, l > 0 : (RQ)^l \in \langle f \rangle \Longrightarrow f \mid (RQ)^l$$

Pelo Lema 2.101, f divide $(Q)^s$, para algum $s > 0$, o que acarreta $Q \in \langle f \rangle$. Assim $Q = 0$ em $V(f)$ contrariando a escolha de Q. Logo $R \neq 0$ em W_1, mostrando que dim $W_1 = n-1$. Assim, cada componente de $V(f)$ tem dimensão $n - 1$. □

Teorema 2.103 (Ideal Principal de Krull - Versão Quasi-Projetiva)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasi-projetiva e F um polinômio não identicamente nulo em X. Seja $Y = X \cap V_p(F)$. Se $Y \neq \emptyset$ então toda componente irredutível de Y tem dimensão $n - 1$.*

Demonstração. Como X é variedade quasi-projetiva, X é um aberto em seu fecho. Como X é irredutível, temos $\overline{X}$ é irredutível e tem a mesma dimensão de X. Suponha que $\overline{X} \cap V_p(F) = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_r$. Então, pelo Teorema 2.102, temos dim $W_i =$ dim $X - 1$. Agora,

$$\begin{aligned} Y &= V_p(X) \cap X \\ &= \left(\overline{X} \cap V_p(X)\right) \cap X \\ &= (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_r) \cap X \\ &= (W_1 \cap X) \cup (W_2 \cap X) \cup ... \cup (W_r \cap X) \end{aligned}$$

é a decomposição de Y em componentes irredutíveis já que cada $W_i \cap X$, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$, é irredutível. Essa decomposição é única. Assim, cada $W_i \cap X$, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$ é vazio ou aberto de W_i, pois X é aberto de $\overline{X}$. Logo, dim $(W_i \cap X) =$ dim $W_i = \dim(X) - 1$. se $W_i \cap X \neq \emptyset$. □

2.6 FIBRAS

Definição 2.104. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo entre variedades quasi-projetivas e $y \in Y$. O conjunto $f^{-1}(y)$ é chamado de **fibra de** f **sobre** y.*

Teorema 2.105 (Dimensão das Fibras)**.** *Seja $f : X \to Y$ um morfismo sobrejetor entre variedades quasi-projetivas. Suponha que* dim $X = n$ *e* dim $Y = m$*. Então:*

i) $m \leq n$.

ii) dim $F \geq n - m$ *para toda componente irredutível F da fibra $f^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$.*

iii) Existe um aberto $\emptyset \neq U \subset Y$ tal que dim $f^{-1}(y) = n - m$ *para $y \in U$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], páginas 76 e 77. □

Corolário 2.106. *Seja Y uma variedade quasi-projetiva. Para cada k inteiro, o conjunto*

$$Y_k = \left\{ y \in Y : \dim \ f^{-1}(y) \geq k \right\}$$

é fechado em Y.

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9] na página 77. □

Teorema 2.107. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo sobrejetor entre conjuntos algébricos quasi-projetivos. Suponha que Y é irredutível e que, para todo $y \in Y$, as fibras $f^{-1}(y)$ são irredutíveis e de mesma dimensão k. Então X írredutível.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9] páginas 77 à 78. □

2.7 ESPAÇO TANGENTE

2.7.1 Série de potência e série de Taylor

Definição 2.108. *O anel de **séries de potências formais**, denotado por $K[[T]]$, onde $T = (T_1, ..., T_n)$, é um anel cujos elementos têm expressão infinita dada por*

$$\varphi = F^{(0)} + F^{(1)} + ... + F^{(n)} + ...$$

onde $F^{(i)} \in K[T_1, ..., T_n]$ são polinômios homogêneos de grau i. Dadas

$$\varphi = F^{(0)} + F^{(1)} + ... + F^{(n)} + ...$$

e

$$\psi = G^{(0)} + G^{(1)} + ... + G^{(n)} + ...,$$

as operações sobre $K[[T]]$ são dadas por

$$\varphi + \psi = \left(G^{(0)} + F^{(0)}\right) + \left(G^{(1)} + F^{(1)}\right) + \left(G^{(2)} + F^{(2)}\right) + ...$$

e

$$\varphi.\psi = H^{(0)} + H^{(1)} + ... + H^{(n)} + ...$$

com $H^{(i)} = \sum\limits_{i=j+\ell} G^{(j)}.F^{(\ell)}$.

Definição 2.109. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $x \in X$. A série de potências formal φ é denominada **série de Taylor** da função $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ se para todo inteiro positivo, têm-se*

$$f - S_k(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$$

onde $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} F^{(i)}$ e $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathscr{O}_{X,x}$ são os parâmetros locais de x.

Teorema 2.110. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $x \in X$. Toda função $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ possui série de Taylor. Se x é não singular, a série de Taylor é única.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 102. □

Teorema 2.111. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $x \in X$. A função $\tau : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow K[[T]]$ que associa cada função a sua série de Taylor é um isomorfismo de inlcusão do anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ no anel de séries de potências formais $K[[T]]$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 103. □

2.7.2 Espaço tangente e diferencial

Sejam $X \subset \mathbb{A}^N$ um fechado afim $x \in X$. Suponhamos que o sistema de coordenadas de $\mathbb{A}^N$ seja escolhido de tal modo que $x = (0, 0, ..., 0)$. As retas passando por x são da forma $L = \{at : t \in K\}$ com $a \in \mathbb{A}^N \setminus \{x\}$. Se X é dado por equações $F_1 = F_2 = ... = F_m = 0$, então os pontos de interseção $X \cap L$ são dados por

$$F_1(at) = F_2(at) = ... = F_m(at) = 0.$$

Seja $f(t)$ o máximo divisor comum de $F_1(at), F_2(at), ..., F_m(at)$. Temos que, como $x \in X \cap L$ e x é dado por $t = 0$, então $t = 0$ é a raiz de $f(t)$. A **multiplicidade de interseção** da reta L com X em x é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $f(t)$. Observamos que a multiplicidade de interseção é independente da escolha das expressões $F_1, F_2, ..., F_m$. De fato, temos

$$f(t) = \mathrm{mdc}\{F(at) : F \in I(X)\}.$$

Dizemos que a reta L é **tangente** a X em x se a multiplicidade de interseção de L com X em x for maior ou igual a 2. O **espaço tangente** a X em x é o lugar geométrico de todos os pontos de $\mathbb{A}^N$ que estão em alguma reta tangente a X em x e é denotado por T_xX. Agora, consideramos as decomposições de cada F_i em componentes homogêneas

$$F_i = F_i^{(0)} + F_i^{(1)} + ... + F_i^{(r_i)},$$

onde cada $F_i^{(j)}$ é homogêneo de grau j. Como $x = (0, 0, ..., 0)$ é raiz de F_i então $F_i^{(0)} = 0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} F_i(at) &= F_i^{(1)}(at) + F_i^{(2)}(at) + ... + F_i^{(r_i)}(at) \\ &= tF_i^{(1)}(a) + t^2\left(F_i^{(2)}(a) + ... + t^{r_i-2}F_i^{(r_i)}(a)\right). \end{aligned}$$

Deste modo, $t = 0$ tem multiplicidade maior ou igual a 2 como raiz de $F_i(at)$ se, e somente se, $F_i^{(1)}(a) = 0$. Assim, a reta L é tangente a X se, e somente se,

$$F_1^{(1)}(a) = F_2^{(1)}(a) = ... = F_m^{(1)}(a) = 0.$$

Mas a reta L pode ser determinada por qualquer um de seus pontos fora da origem, e, portanto, o espaço tangente a X em x é definido pelas equações

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = ... = F_m^{(1)}(a) = 0.$$

Notamos que

$$F^{(1)}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i).$$

Definição 2.112. *Sejam* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n$ *e* $F \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ *um polinômio não nulo. Consideramos a série de Taylor de* F *em* x*, dada por*

$$F(T) = F^{(0)}(T) + F^{(1)}(T) + ... + F^{(r)}(T)$$

com $T = (T_1 - x_1, T_2 - x_2, ..., T_n - x_n)$ *e cada* $F^{(j)}(T)$ *é homogêneo de grau* j *nas variáveis* $T_i - x_i$*, com* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*. A* ***diferencial de*** F ***em*** x *é definida por:*

$$d_x F = F^{(1)}(T).$$

Agora, como $F^{(1)}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i)$, podemos escrever

$$d_x F = F^{(1)}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i).$$

Proposição 2.113. *Dados* $F, G \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$*, seguem as seguintes propriedades:*

i) $d_x(F + G) = d_x(F) + d_x(G)$

ii) $d_x(aF) = ad_x(F)$, $\forall a \in K$

iii) $d_x(F \cdot G) = F \cdot d_x(G) + G \cdot d_x(F)$

Demonstração.

i)

$$\begin{aligned} d_x(F+G) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(F+G)}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) \\ &= d_x(F) + d_x(G) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} d_x(aF) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(aF)}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) \\ &= a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) \\ &= ad_x(F) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
F \cdot d_x(G) + G \cdot d_x(F) &= G(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) + F(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)(T_i - x_i) \\
&= G(x) \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x)(T_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)(T_n - x_n) \right) \\
&+ F(x) \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(x)(T_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial G}{\partial x_n}(x)(T_n - x_n) \right) \\
&= \left(G(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(x)(T_1 - x_1) + F(x) \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1}(x)(T_1 - x_1) \right) \\
&+ \cdots \\
&+ \left(G(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)(T_n - x_n) + F(x) \cdot \frac{\partial G}{\partial x_n}(x)(T_n - x_n) \right) \\
&= d_x(F \cdot G)
\end{aligned}$$

□

Definição 2.114. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade, com $X = V(F)$. Definimos o **espaço tangente a** X **em** $x = (x_1, ..., x_n)$ como sendo o conjunto*

$$T_x X = \left\{ (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{A}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}(t_i - x_i) = 0 \right\}.$$

Sejam $X = V(F_1, F_2, ..., F_m) \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e $x \in X$. Então as equações do espaço tangente são:

$$d_x F_1 = d_x F_1 = ... = d_x F_m = 0$$

onde $d_x F_i = F_i^{(1)}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Supomos agora que $I(X) = \langle F_1, ..., F_m \rangle$ e seja $g \in K[X]$. Sejam G e H em $K[T_1, ..., T_n]$ tais que $H \mid_X = g = G \mid_X$, isto é, $(H - G) \mid_X = 0$. Então, $F = H - G \in I(X)$. Como $I(X) = \langle F_1, ..., F_m \rangle$, temos que existem $A_i \in K[T_1, T_2, ..., T_n]$ tais que $F = \sum_{i=1}^{m} A_i F_i$. Assim, para $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
d_x F &= (A_1(x) d_x F_1 + F_1(x) d_x A_1 + ... + A_m(x) d_x F_m + F_m(x) d_x A_m) \\
&= (A_1(x) d_x F_1 + ... + A_m(x) d_x F_m)
\end{aligned}$$

pois para todo $x \in X$, temos que $F_i(x) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Como as equações de $T_x X$ são dadas por:

$$d_x F_1 = d_x F_2 = ... = d_x F_m = 0,$$

temos $d_x F \mid_{T_x X} = 0$. Como $F = H - G$, temos

$$d_x F = d_x H - d_x G \Rightarrow d_x H \mid_{T_x X} = d_x G \mid_{T_x X}.$$

Assim, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.115. *Seja $g \in K[X]$. Definimos a* ***diferencial de*** *g* ***em*** *x como sendo $d_x g = d_x G \mid_{T_x X}$, onde $G \in K[T_1, T_2, \cdots, T_n]$ é tal que $G \mid_X = g$*

Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $x \in X$. Consideramos o conjunto

$$TX = \{(p, x) \in \mathbb{A}^n \times X : p \in T_x X\}.$$

Observamos que TX é um fechado de $\mathbb{A}^n \times X$. Consideramos $\phi : TX \longrightarrow X$ dada por $\pi(p, x) = x$. Dessa forma, $\pi(TX) = X$. Pelo Teorema da Dimensão das Fibras, existe $s \geq 0$ tal que $\dim_K (\pi^{-1}(x)) \geq s$, para todo $x \in X$. Agora

$$\pi^{-1}(x) = \{(p, x) : p \in T_x X\} \cong T_x X\,.$$

Assim, podemos definir o seguinte

Definição 2.116. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto* ***não singular*** *quando $\dim_K (T_x X) = s$. Caso $\dim_K (T_x X) > s$, x é denominado* ***ponto singular****. Dizemos que X é* ***não singular*** *se todo ponto $x \in X$ é não singular.*

Proposição 2.117. *Sejam X uma variedade afim e $x \in X$ um ponto não singular. O anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 108. □

Teorema 2.118. *Sejam X uma variedade e $x \in X$ um ponto não singular. Então,*

$$\dim T_x X = \dim X\,.$$

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 93. □

2.8 EQUAÇÕES LOCAIS

Definição 2.119. *Sejam X um fechado afim e $x \in X$. Dizemos que $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathscr{O}_{X,x}$ são* ***equações locais*** *de um fechado afim $Y \subset X$ em uma vizinhança de x se existe uma vizinhança afim U de x em X tal que $f_1, f_2, ..., f_m$ são regulares em U e*

$$I_U(Y \cap U) = \langle f_1, f_2, ..., f_m \rangle \ \text{ em } K[U]\,.$$

Proposição 2.120. *Sejam X um fechado afim e Y um fechado de X. Seja $x \in X$. As funções $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathscr{O}_{X,x}$ são equações locais de Y numa vizinhança de x se e somente se $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle f_1, f_2, ..., f_m \rangle$.*

Demonstração. Suponhamos que $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathscr{O}_{X,x}$ são equações locais de x em um fechado $Y \subset X$, isto é, existe uma vizinhança afim U de x tal que as funções $f_1, f_2, ..., f_m$

são regulares em U e $I_U\left(Y\cap U\right)=\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle$ em $K[U]$. Observamos que $\mathscr{O}_{X,x}=\mathscr{O}_{U,x}$. Daí,

$$\mathfrak{m}_{Y,x}=\left\{\frac{u}{v}\in\mathscr{O}_{U,x}:u,v\in K\left[U\right],u\in I_U\left(Y\cap U\right),v\left(x\right)\neq 0\right\}.$$

Logo, $\mathfrak{m}_{Y,x}=\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle=I_U\left(Y\cap U\right)$.

Agora, suponhamos que $\mathfrak{m}_{Y,x}=\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle$. Sejam $g_1,g_2,...,g_s\in K[X]$ os geradores de $I_X\left(Y\right)$. Para cada $i\in\{1,2,...,s\}$, temos

$$g_i\in\mathfrak{m}_{Y,x}\Rightarrow g_i=\sum_{j=1}^{m}h_{ij}f_i, \tag{2.4}$$

onde $h_{ij}\in\mathscr{O}_{X,x}$. Seja U o aberto principal onde as funções f_i e h_{ij} são todas regulares. Temos que $x\in U$. Suponhamos que $U=X_g$, onde $g\in K[X]$. Pela Proposição 2.25, temos que

$$K[U]=K[X_g]=\left\{\frac{f}{g^m}:f\in K[X],m\geq 0\right\}.$$

Por (2.4), segue que:

$$\langle g_1,g_2,\cdots,g_s\rangle=I_X\left(Y\right)K[U]\subset\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle \tag{2.5}$$

Afirmação: $I_X\left(Y\right)K[U]=I_U\left(Y\cap U\right)$.

De fato, seja $v\in I_U\left(Y\cap U\right)$, então

$$v\in K[U]\ \ e\ \ v\left(y'\right)=0,\ \forall y'\in Y\cap U$$

Como $K[U]=K[X_g]$, temos que $v=\dfrac{u}{g^r}$, para algum $r\geq 0$ e $u\in K[X]$. Logo, $u=v.g^r\in I_X(Y)$, pois $u\left(y\right)=v\left(y\right).g^r\left(y\right)=0$ para todo $y\in Y$. Como $1/g^r\in K[U]$, segue que $v=\dfrac{u}{g^r}\in I_X\left(Y\right)K[U]$. Logo,

$$I_U\left(Y\cap U\right)\subset I_X\left(Y\right)K[U].$$

Por outro lado, temos que

$$I_X\left(Y\right)K[U]\subset I_U\left(Y\cap U\right).$$

Portanto,

$$I_X\left(Y\right)K[U]=I_U\left(Y\cap U\right).$$

Como (2.5) ocorre, segue que

$$I_U\left(Y\cap U\right)\subset\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle.$$

Por outro lado, para cada $i\in\{1,2,...,m\}$, temos $f_i\in I_U\left(Y\cap U\right)$, pois f_i é regular em U e se anula em $Y\cap U$. Dessa forma, $I_U\left(Y\cap U\right)=\langle f_1,f_2,...,f_m\rangle$. $\square$

Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos tais que $Y \subset X$. Seja $x \in X$. Consideramos o seguinte ideal de $\mathscr{O}_{X,x}$

$$\mathfrak{m}_{Y,x} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathscr{O}_{X,x} : u, v \in K[X], u \in I_X(Y), v(x) \neq 0 \right\}.$$

Vamos considerar os seguintes casos:

i) Sejam $x \in Y$ e $\frac{u}{v} \in \mathfrak{m}_{Y,x}$. Como $u \in I_X(Y)$, temos que $u(y) = 0$, $\forall y \in Y$. Dessa forma,
$$\mathfrak{m}_{Y,x} \subset \mathfrak{m}_x = \left\{ \frac{u}{v} \in K(X) : u(x) = 0 \; e \; v(x) \neq 0 \right\}.$$

ii) Suponhamos que $x \in X \setminus Y$. Se $\frac{u}{v} \in \mathfrak{m}_{Y,x}$, como $x \notin Y$, temos que $u(x) \neq 0$. Dessa forma, $\frac{u}{v}$ é uma unidade de $\mathscr{O}_{X,x}$. Assim, $\mathfrak{m}_{Y,x} = \mathscr{O}_{X,x}$.

Portanto,
$$\begin{cases} \mathfrak{m}_{Y,x} = \mathscr{O}_{X,x}, & \text{se} \quad x \notin Y. \\ \mathfrak{m}_{Y,x} \subset \mathfrak{m}_x, & \text{se} \quad x \in Y. \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.121. *Sejam X um fechado afim e $x \in X$ ponto não singular. Seja $Y \subset X$ uma variedade tal que* $\dim(Y) = \dim(X) - 1$. *Então, Y tem uma equação local numa vizinhança afim de x.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Vamos considerar os seguintes casos:

(i) $x \notin Y$.
Por (2.6), temos que $\mathfrak{m}_{Y,x} = \mathscr{O}_{X,x} = \langle 1 \rangle$. Logo $1 \in \mathscr{O}_{X,x}$ é uma equação local de Y em uma vizinhança de x.

(ii) $x \in Y$.
Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ uma função que se anula em Y. Pela Proposição 2.117, temos que $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única, donde f pode ser fatorado como um produto de fatores irredutíveis. Sendo Y irredutível, algum fator de f, digamos g, deve se anular em Y.

Afirmação: g é a equação local de Y em x.
De fato, substituindo X por uma vizinhança aberta afim de x, podemos supor que g é regular em X. Como $Y \subset V(g) \subset X$ e as dimensões de Y e $V(g)$ são iguais, segue que Y é uma componente irredutível de $V(g)$. Logo, $V(g) = Y \cup Y'$. Observe que $x \notin Y'$, pois, caso contrário, existiriam h e $h' \in K[X]$ satisfazendo:

$$\begin{cases} h \in I_X(Y) & \text{com } h \notin \mathfrak{m}_{Y',x} \\ h' \in I_X(Y') & \text{com } h' \notin \mathfrak{m}_{Y,x} \end{cases}$$

Agora, temos $h.h' = 0$ em $V(g)$. Dessa forma, g divide $(h.h')^r$ em $K[X]$ para algum $r \geq 0$. Logo, g divide $(h.h')^r$ em $\mathscr{O}_{X,x}$. Como $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única, segue-se g divide h ou g divide h' em $\mathscr{O}_{X,x}$. Assim, h ou h' anulam-se em uma vizinhança de x em $V(g)$. Diminuindo X, se necessário podemos supor que h ou h' anula-se em $V(g)$, implicando em $h \in \mathfrak{m}_{Y',x}$ ou $h' \in \mathfrak{m}_{Y',x}$. Contradição, logo $x \notin Y'$. Como $x \notin Y'$, substituindo X por uma vizinhança de x, podemos supor que $V(g) = Y$. Agora, se $u \in K[X]$ anula-se em Y então g divide u^s em $K[X]$ para algum $s > 0$. Consequentemente g divide u^s em $\mathscr{O}_{X,x}$. Como $\mathscr{O}_{X,x}$ é domínio de fatoração única, g divide u em $\mathscr{O}_{X,x}$. Portanto, $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle g \rangle$.

□

Definição 2.122. *Seja $x \in X$ um ponto não singular de uma variedade X, com* dim $X = n$. *Dizemos que funções $f_1, ..., f_n$ são **parâmetros locais em** x se $f_i \in \mathfrak{m}_x$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e as imagens de $f_1, ..., f_n$ formam uma base do espaço vetorial $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.*

Proposição 2.123. *Seja $x \in X$ um ponto não singular de uma variedade X, com* dim $X = n$. *Os parâmetros locais de x geram o ideal maximal $\mathfrak{m}_x$.*

Demonstração. Sejam $f_1, ..., f_n$ parâmetros locais de x. Considere o ideal $I = \langle f_1, ..., f_n \rangle \subset \mathfrak{m}_x$. Como, $f_1, ..., f_n$ são parâmetros locais em x, segue da definição que $f_1, ..., f_n$ geram $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ como um $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-módulo (equivalentemente um espaço vetorial sobre o corpo $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$). Então

$$I + \mathfrak{m}_x^2 = \mathfrak{m}_x + \mathfrak{m}_x^2 \Longrightarrow \frac{I + \mathfrak{m}_x^2}{I} = \frac{\mathfrak{m}_x + \mathfrak{m}_x^2}{I} \Longrightarrow \mathfrak{m}_x \left(\frac{\mathfrak{m}_x}{I} \right) = \frac{\mathfrak{m}_x}{I}$$

onde $\dfrac{I}{I} = \{0\}$ e $\mathfrak{m}_x + \mathfrak{m}_x^2 = \mathfrak{m}_x$. Pelo Lema de Nakayama, temos que $M = \dfrac{\mathfrak{m}_x}{I}$ é um módulo nulo, então $\mathfrak{m}_x = I$. □

Proposição 2.124. *Sejam X um fechado afim e $x \in X$. Então d_x define um isomorfismo de K-espaço vetoriais*

$$T_x X \cong \left(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \right)^*$$

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [7], páginas 104 a 106. □

3 DIVISORES

3.1 DIVISORES DE WEIL

Nessa seção, uma variedade X será uma variedade quasi-projetiva, a menos quando explicitado diferente.

Definição 3.1. *Seja X uma variedade. Uma coleção de subvariedades $C_1, C_2, ..., C_r$ de codimensão 1 em X com multiplicidades inteiras atribuídas $k_1, k_2, ..., k_r$ é chamada de* ***divisor (de Weil) de*** *X. Representamos um tal divisor como*

$$D = \sum_{i=1}^{r} k_i C_i.$$

Se $k_i \geq 0$ para todo i e $k_i > 0$ para algum i, então escrevemos $D > 0$ e dizemos que D é um ***divisor efetivo****. Caso $k_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, 2, ..., r\}$, então $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_r$ é chamado de* ***suporte de*** *D e denotado por $Supp\,(D)$. O conjunto dos divisores (de Weil) de X é denotado por $Div\,(X)$.*

Definição 3.2. *Sejam $D = \sum k_i C_i$ e $D' = \sum k'_i C_i$ divisores sobre uma variedade X. Dizemos que $D \geq D'$ se e somente se $k_i \geq k'_i$ para todo i. Em particular, dizemos que $D = \sum k_i C_i \geq 0$ quando $k_i \geq 0$ para todo i.*

Definição 3.3. *Uma subvariedade C de codimensão 1 em X e com multiplicidade 1 é chamada de* ***divisor primo****.*

Dados dois divisores $D = \sum_{i=1}^{r} k_i C_i$ e $D' = \sum_{i=1}^{r} k'_i C_i$ sobre uma variedade X, podemos definir o **divisor soma** através do mesmo conjunto de subvariedades como

$$D + D' = \sum_{i=1}^{r} (k_i + k'_i)\, C_i.$$

Proposição 3.4. *Sejam A um anel Noetheriano e $M \subset A$ um ideal tal que todo elemento $1 + M$ é invertível em A. Então*

$$\bigcap_{n>0} (I + M^n) = I$$

para todo ideal I de A.

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9] na página 284. □

Observamos que tomando $I = 0$ na Proposição 3.4 e aplicando o Lema 2.78, obtemos

$$\bigcap_{n>0} M^n = \{0\}.$$

Este resultado é conhecido como Teorema da Interseção de Krull.

Proposição 3.5. *Sejam X uma variedade e $Y \subset X$ uma subvariedade de codimensão* 1*. Então Y tem uma equação local em todo ponto não singular $x \in X$.*

Demonstração. Como o resultado é de natureza local, podemos supor X uma variedade afim. Assim, pelo Teorema 2.121, segue o resultado. $\square$

Seja $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão 1 em uma variedade X não singular. Pela Proposição 3.5, C tem uma equação local $\pi \in \mathscr{O}_{C,x}$ para todo $x \in C$. Logo, existe U tal que

$$I_U\left(C \cap U\right) = \langle \pi \rangle$$

em $K[U]$, onde π regular em U.

Proposição 3.6. *Sejam C uma subvariedade de codimensão* 1 *em uma variedade não singular X e π uma equação local de C, isto é, $I_U\left(C \cap U\right) = \langle \pi \rangle$ para algum aberto afim U de C. Se $f \in K[U] \setminus \{0\}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \left\langle \pi^k \right\rangle$ e $f \notin \left\langle \pi^{k+1} \right\rangle$.*

Demonstração. Se $f \in \left\langle \pi^k \right\rangle$ para todo $k \geq 0$, segue que $f \in \bigcap \left\langle \pi^k \right\rangle$. Observamos que $1 + \langle \pi \rangle$ é invertível em $K[U]$. De fato, como π é uma equação local para $X \cap U$, temos que $\pi(x) = 0$ para todo $x \in X \cap U$. Assim, $(1+\pi)(x) = 1 + \pi(x) = 1$ para todo $x \in X \cap U$. Logo, pela observação feita após a Proposição 3.4, temos que $\bigcap \left\langle \pi^k \right\rangle = \{0\}$, o que implica $f = 0$. Isso contradiz o fato de $f \neq 0$. $\square$

Assim, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 3.7. *Sejam C uma subvariedade de codimensão 1 em uma variedade não singular X e π uma equação local de C, isto é, $I_U\left(C \cap U\right) = \langle \pi \rangle$ para algum aberto afim U de C. Seja $f \in K[U] \setminus \{0\}$. O menor inteiro $k \geq 0$ tal que $f \in \left\langle \pi^k \right\rangle$ e $f \notin \left\langle \pi^{k+1} \right\rangle$ é a* ***valorização de f em*** *C. Denotamos por $v_C\left(f\right) = k$.*

Proposição 3.8. *Com as hipóteses da Definição 3.7, a valorização de f em C, $v_C\left(f\right)$, independe da escolha do aberto U.*

Demonstração. Para mostrarmos que $v_C\left(f\right)$ independe da escolha do aberto U, basta mostrar que $v_C\left(f\right)$ assume o mesmo valor para $V \subset U$ aberto afim com $V \cap C \neq \emptyset$. Seja $V \subset U$ um aberto afim com $V \cap C \neq \emptyset$ e $I_V\left(Y_0'\right) = \langle \pi \rangle$ onde $Y_0' = V \cap C$. Dessa forma, $I_V\left(Y_0'\right) = I_U\left(C \cap U\right)$ o que implica $v_C^U\left(f\right) = v_C^V\left(f\right)$. Suponhamos que V seja um aberto qualquer satisfazendo as condições de U. Então, $U \cap C$ e $V \cap C$ são abertos não vazios de C. Seja W uma vizinhança afim em $U \cap V$ para algum ponto $x \in U \cap V \cap C$. Da mesma forma feita anteriormente, $v_C^U\left(f\right) = v_C^W\left(f\right)$ e $v_C^V\left(f\right) = v_C^W\left(f\right)$. Logo, $v_C^U\left(f\right) = v_C^V\left(f\right)$. $\square$

Proposição 3.9. *Sejam X uma variedade e $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão* 1*. Sejam f_1 e $f_2 \in K\left(X\right)$ com $f_1 \neq 0$ e $f_2 \neq 0$. São válidas as seguintes propriedades:*

i) $v_C(f_1+f_2) \geq min\{v_C(f_1), v_C(f_2)\}$ *desde que* $f_1+f_2 \neq 0$

ii) $v_C(f_1.f_2) = v_C(f_1) + v_C(f_2)$

Demonstração. i) Suponhamos que $\pi \in \mathscr{O}_{C,x}$ seja uma equação local do fechado C, isto é, $I(C \cap U) = \langle \pi \rangle$ para algum aberto afim U. Sejam $k_1 = v_C(f_1)$ e $k_2 = v_C(f_2)$. Dessa forma, temos $f_1 \in \left\langle \pi^{k_1} \right\rangle$ e $f_1 \notin \left\langle \pi^{k_1+1} \right\rangle$, o que acarreta $f_1 = \pi^{k_1}.g_1$, para algum $g_1 \in K(X)$ e $g_1 \notin \langle \pi \rangle$. Da mesma forma $f_2 \in \left\langle \pi^{k_2} \right\rangle$ e $f_2 \notin \left\langle \pi^{k_2+1} \right\rangle$, donde $f_2 = \pi^{k_2}.g_2$, para algum $g_2 \in K(X)$ e $g_2 \notin \langle \pi \rangle$. Observemos que

$$f_1 + f_2 = \pi^{k_1} g_1 + \pi^{k_2} g_2.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_1 \leq k_2$. Dessa forma,

$$f_1 + f_2 = \pi^{k_1} \left(g_1 + \pi^{k_2 - k_1} g_2 \right).$$

Então, $f_1 + f_2 \notin \left\langle \pi^{k_1+1} \right\rangle$. Logo, $v_C(f_1+f_2) \geq min\{k_1, k_2\}$. Ocorre a igualdade quando $k_1 = k_2$.

ii) Suponhamos que $\pi \in \mathscr{O}_{C,x}$ seja uma equação local do fechado C, isto é, existe um aberto afim U tal que $I(C \cap U) = \langle \pi \rangle$. Sejam $k_1 = v_C(f_1)$ e $k_2 = v_C(f_2)$. Dessa forma, temos $f_1 \in \left\langle \pi^{k_1} \right\rangle$, o que acarreta $f_1 = \pi^{k_1}.g_1$, para algum $g_1 \in K(X)$, e $f_2 \in \left\langle \pi^{k_2} \right\rangle$, donde $f_2 = \pi^{k_2}.g_2$, para algum $g_2 \in K(X)$. Daí, temos

$$f_1.f_2 = \left(\pi^{k_1}.g_1 \right).\left(\pi^{k_2}.g_2 \right) = \left(\pi^{k_1+k_2} \right) g_1.g_2\,,$$

o que implica $f_1.f_2 \in \left\langle \pi^{k_1+k_2} \right\rangle$.
Agora, como $f_1 \notin \left\langle \pi^{k_1+1} \right\rangle$, segue que $f_1.f_2 \notin \left\langle \pi^{k_1+k_2+1} \right\rangle$. Logo, $v_C(f_1, f_2) = k_1 + k_2$.

□

Sejam $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão 1 em uma variedade não singular X e π uma equação local de C, isto é, $I_U(C \cap U) = \langle \pi \rangle$ para algum aberto afim U de X. Seja $f \in K(X)$. Então, f pode ser escrito como $f = \dfrac{g}{h}$ com $g, h \in K[U]$. Pela Proposição 3.9, temos

$$v_C(f) = v_C\left(\frac{g}{h}\right) = v_C\left(g.h^{-1}\right) = v_C(g) + v_C\left(h^{-1}\right) = v_C(g) - v_C(h)\,.$$

Essa forma de expressar $v_C(f)$ não depende da escolha dos representantes de f. De fato, consideremos válido ainda $f = \dfrac{g'}{h'}$. Daí, $\dfrac{g'}{h'} = \dfrac{g}{h}$, o que acarreta, $g'.h = g.h'$. Assim, $v_C(g'.h) = v_C(g.h')$. Logo, pela Proposição 3.9 temos $v_C(g') + v_C(h) = v_C(g) + v_C(h')$. Assim, $v_C(g') - v_C(h') = v_C(g) - v_C(h)$. Dessa forma, segue que $v_C\left(g'.\dfrac{1}{h'}\right) = v_C\left(g.\dfrac{1}{h}\right)$, o que acarreta $v_C\left(\dfrac{g'}{h'}\right) = v_C\left(\dfrac{g}{h}\right)$.

Definição 3.10. *Sejam X uma variedade e $f \in K(X)$. Se $v_C(f) = k > 0$, dizemos que f tem um* ***zero de ordem*** *k ao longo de C. Caso, $v_C(f) = -k < 0$, dizemos que f tem um* ***polo de ordem*** *k ao longo de C.*

Definição 3.11. *Sejam X uma variedade e $f \in K(X)$. O divisor D tal que $D = \sum v_C(f)\, C$, onde a soma é feita sobre toda subvariedade de codimensão 1 na qual $v_C(f)$ é não nulo, é denominado* ***divisor principal*** *de f, e denotamos por $div(f)$.*

Observemos que, como $v_C(f_1.f_2) = v_C(f_1) + v_C(f_2)$, temos que

$$div(f_1.f_2) = div(f_1) + div(f_2).$$

Além disso, temos que $div(f) = 0$, se $f \in K$ e, $div(f) \geq 0$ se $f \in K[X]$.

Definição 3.12. *Sejam X uma variedade e D e D' divisores sobre X. Dizemos que D é* ***equivalente*** *a D', e denotamos por $D \sim D'$, quando existe $f \in K(X)$ tal que $D' = D + div(f)$.*

Definição 3.13. *Sejam X uma variedade e $f \in K(x)$. Se $div(f) = \sum k_i C_i$, então os divisores*

$$div_0(f) = \sum_{\{i \,|\, k_i > 0\}} k_i C_i \qquad e \ div_\infty(f) = \sum_{\{i \,|\, k_i < 0\}} -k_i C_i$$

são denominados, respectivamente, ***divisor de zeros*** *e* ***divisor de polos*** *de f.*

Temos que $div_0(f) \geq 0$ e $div_\infty(f) \geq 0$. Além disso, podemos escrever

$$div(f) = div_0(f) - div_\infty(f) = \sum_{\{i \,|\, k_i > 0\}} k_i C_i - \sum_{\{i \,|\, k_i < 0\}} k_i C_i.$$

Definição 3.14. *Seja $D = \sum_{i=1}^{n} k_i C_i$ um divisor sobre uma variedade X. Definimos o* ***grau de*** *D como sendo o número inteiro*

$$\deg\ D = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Exemplo 3.15. *Sejam $X = \mathbb{P}^n$ e $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão 1. Então, existe um polinômio homogêneo não nulo $G \in I_p(C)$. Como C é irredutível, algum fator H de G deve ser nulo em C. Seja $Y = V_p(H)$. Observamos que $Y = X \cap V_p(H)$. Pelo Teorema 2.99, temos que* $\dim\ Y = \dim\ X - 1$. *Assim,* $\dim\ Y = \dim\ C$. *Pela Proposição 2.94, segue que $C = Y$. Assim, podemos dizer que qualquer subvariedade de codimensão 1 é definida por uma única equação homogênea F e, além disso, se F tiver grau r no aberto afim U_i, temos que $I(C \cap U_i) = \left\langle \dfrac{F}{T_i^{-r}} \right\rangle$. Com esse fato, obtemos um método de contrução do divisor principal de uma função $f \in K(\mathbb{P}^n)$. Um representante para f é dado* *por* $\dfrac{F}{G}$ *onde* F *e* G *são polinômios homogêneos de mesmo grau. Supondo* $F = \prod H_i^{l_i}$ *e* $G = \prod L_j^{m_j}$, *temos que*

$$div\,(f) = \sum l_i C_i \;-\; \sum m_j D_j$$

onde C_i *e* D_j *são hipersuperfícies irredutíveis definidas respectivamentes por* $H_i = 0$ *e* $L_j = 0$ *para todo* i *e todo* j.

Teorema 3.16. *Sejam* X *uma variedade projetiva não singular e* $f \in K\,(X)$. *Se* $div\,(f) \geq 0$, *então* f *é regular.*

Demonstração. Suponhamos que $div\,(f) \geq 0$ e que f não seja regular em um ponto $x \in X$. Então, $f = \dfrac{g}{h}$ com $g, h \in \mathscr{O}_{X,x}$, mas $\dfrac{g}{h} \notin \mathscr{O}_{X,x}$. Como $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única podemos escolher g e h sem fatores em comum. Seja $\pi \in \mathscr{O}_{X,x}$ um elemento primo tal que π divide h e π não divide g. Assim, $g \notin \langle \pi \rangle$. Em alguma vizinhança U do ponto x_0, $V\,(\pi)$ será irredutível de codimensão 1. Considerando C como o fecho de $V\,(\pi)$ temos $v_C\,(f) = v_C\left(\dfrac{g}{h}\right) = v_C\,(g) - v_C\,(h) = -v_C\,(h)$. Como $h \in \langle \pi \rangle$, temos $v_C\,(h) > 0$. Assim, $v_c\,(f) < 0$ o que contradiz o fato de $div\,(f) \geq 0$. □

Teorema 3.17. *Para qualquer divisor* D *em uma variedade não singular* X *e qualquer número finito de pontos* $x_1, x_2, ..., x_m$ *em* X *existe um divisor* D' *com* $D \backsim D'$ *tal que* $x_i \notin Supp\,(D')$ *para* $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9], página 158. □

3.2 DIVISORES E APLICAÇÕES RACIONAIS

O objetivo dessa seção é estabelecer um critério para a determinação da regularidade de uma aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\varphi\,(x) = (f_0\,(x) : f_1\,(x) : ... : f_n\,(x))$ com $f_i \in K\,(X)$ em termos de divisores.

Definição 3.18. *Dados os divisores* $D_i = \sum k_{ij} C_j$ *para* $i \in \{1, ..., n\}$. *Define-se o* ***máximo divisor comum*** *como sendo*

$$mdc\,\{D_1, D_2, ..., D_n\} = \sum l_j C_j$$

onde $l_j = \min_i \{k_{ij}\}$.

Seja X uma variedade não singular. Consideramos a aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\varphi\,(x) = (f_0\,(x) : f_1\,(x) : ... : f_n\,(x))$ com $f_i \in K\,(X)$. Vamos assumir que f_i é não nula em X para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Suponhamos que, para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, temos

$$div\,(f_i) = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} C_j \text{ e } f_i = \left(\prod \pi_j^{k_{ij}}\right) u_i\,,$$

onde $u_i \in \mathscr{O}_{X,x}$ com $u_i(x) \neq 0$ e, para cada $j \in \{0,1,2,...,m\}$, π_j é uma equação local de C_j para algum aberto afim U_j de C_j. Como $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única, existe o máximo divisor comum dos elementos $f_0, f_1, ..., f_n$. Seja $d = \operatorname{mdc}\{f_0, f_1, ..., f_n\}$. Então

i) d divide f_i para todo $i \in \{0,1,..,n\}$. Assim, $f_i = dq_i$, com $q_i \in \mathscr{O}_{X,x}$ para cada $i \in \{0,1,2,...,n\}$. Consequentemente, $\dfrac{f_i}{d} \in \mathscr{O}_{X,x}$ para cada $i \in \{0,1,...,n\}$.

ii) Se $d_1 \in K(X)$ é tal que d_1 divide f_i para cada $i \in \{0,1,...,n\}$, então d_1 divide d, o que acarreta $d = d_1.g$, com $g \in \mathscr{O}_{X,x}$. Dessa forma, $\dfrac{d}{d_1} \in \mathscr{O}_{X,x}$.

Além disso, como $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única, cada π_j é um elemento primo, logo podemos escrever $d = \prod \pi_j^{l_j}$ onde $l_j = \min\limits_i\{k_{ij}\}$ para $j \in \{0,1,...,n\}$. Como φ é regular em x, existe uma função $g \in K(X)$ tal que $\dfrac{f_i}{g} \in \mathscr{O}_{X,x}$ para todo $i \in \{0,1,...,n\}$ e podemos escolher $\dfrac{f_i}{g}$ de tal modo que $\left(\dfrac{f_i}{g}\right)(x)$ é não nulo. Agora, temos que $\dfrac{f_i}{g} \in \mathscr{O}_{X,x}$ implica $f_i = g.r_i$ para algum $r_i \in \mathscr{O}_{X,x}$. Como $d = \operatorname{mdc}\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ temos que g divide d, isto é, existe $h \in \mathscr{O}_{X,x}$ tal que $d = gh$.

Afirmação: $h(x) \neq 0$

De fato, suponhamos $h(x) = 0$. Como $d = gh$, temos $h = \dfrac{d}{g}$. Agora, para cada $i \in \{0,1,...,n\}$, $f_i = ds_i$ para algum $s_i \in K(X)$. Daí $f_i = ghs_i$ o que acarreta $\dfrac{f_i}{g} = s_i h$ para todo $i \in \{0,1,...,n\}$. Como $h(x) = 0$, temos que $\dfrac{f_i}{g}(x) = 0$, o que contradiz o fato de φ ser regular. Logo, $h(x) \neq 0$.

Assim, segue que

$$\frac{f_i}{g} = \left(\frac{f_i}{gh}\right)h = \left(\frac{f_i}{d}\right)h \quad \forall i \in \{0,1,...,n\}$$

Logo,

$$\frac{f_i}{g} = \left(\frac{\prod \pi_j^{k_{ij}}}{\prod \pi_j^{l_j}}\right)u_i h = \left(\prod \pi_j^{k_{ij}-l_{ij}}\right)u_i h$$

Portanto, φ é regular em x quando nem todas as funções $\prod\limits_j \pi_j^{k_{ij}-l_{ij}}$ são não nulas em x, para cada $i \in \{0,1,..,n\}$, ou seja, quando para algum i, temos que $k_{ij} = l_{ij}$.

Agora, seja $D_i = \sum k_{ij}C_j$, onde cada C_j é um divisor primo. Pela Definição 3.18, podemos afirmar que

$$D_i' := D_i - \operatorname{mdc}\{D_1, D_2, ..., D_n\} \geq 0\,.$$

Em particular, se $D = \operatorname{mdc}\{div(f_0), ..., div(f_n)\}$, então $D_i' = div(f_i) - D$. Em uma vizinhança de x, temos $D_i' = div\left(\prod \pi_j^{k_{ij}-l_j}\right)$. Assim, podemos dizer que φ é regular em

x quando $x \notin Supp\,(D_i')$, para algum i, ou equivalentemente, $x \notin \bigcap\limits_i Supp\,(D_i')$. Dessa forma, fica provado o seguinte resultado:

Teorema 3.19. *A aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ com $\varphi = (f_0, f_1, ..., f_n)$ deixa de ser regular nos pontos x de $\bigcap Supp\,(D_i')$ onde $D_i' = D_i - mdc\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ para todo $i \in \{1, 2, .., n\}$.*

3.3 DIVISORES DE CARTIER

Definição 3.20. *Seja X uma variedade. Um divisor de* ***Cartier*** *ou* ***localmente principal*** *é uma coleção de pares $D = \left\{(U_i, f_i)_{i \in I}\right\}$, em que*

- $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$, *com cada U_i aberto;*
- $f_i \in K\,(U_i) \setminus \{0\}, \forall\, i \in I$;
- $\dfrac{f_i}{f_j}$ *e* $\dfrac{f_j}{f_i}$, *são regulares em $U_i \cap U_j$.*

A coleção de pares $\left\{(U_i, f_i)_{i \in I}\right\}$ é denominado ***sistema compatível****. O conjunto dos divisores de Cartier é denotado por $C_a D\,(X)$.*

Definição 3.21. *Dado $f \in K\,(X) \setminus \{0\}$ um* ***divisor principal de Cartier*** *é o par $div\,(f) = \{(X, f)\}$.*

Teorema 3.22. *Seja X uma variedade não singular. Existe uma correspondência biunívoca*

$$\phi : C_a D\,(X) \longrightarrow Div\,(X)$$

entre os divisores de Cartier e de Weil.

Demonstração. Sejam $D = \sum k_i C_i$ um divisor de Weil sobre X e $x \in X$. Cada C_i é definido em uma vizinhança U_i de x por uma equação π_i. Dessa forma $D = div\,(f)$ em $U = \cap U_i$ onde $f = \prod \pi_i^{k_i}$. Logo, cada $x \in X$ possui uma vizinhança tal que D é principal. Dentre todas estas vizinhanças podemos escolher um recobrimento finito $X = \cup U_i$ tal que $D = div(f_i)$ em U_i. Além disso se $div(f_i) = div(f_j)$ em $U_i \cap U_j$, então f_i/f_j é regular em $U_i \cap U_j$. Logo, $D' = \{(U_i, f_i)\}$ define um divisor de Cartier sobre X.

Reciprocamente, consideramos $D = \left\{(U_i, f_i)_{i \in I}\right\}$ um divisor de Cartier sobre X. Seja $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão 1. Se $C \cap U_i \neq \emptyset$, então definimos $k_i := v_C\,(f_i)$. Se j é outro índice tal que $C \cap U_j \neq \emptyset$, então como f_i/f_j é regular em $U_i \cap U_j$, temos que $v_C\,(f_i/f_j) = 0$ e, consequentemente, $v_C\,(f_i) = v_C\,(f_j)$ Assim, podemos definir o divisor de Weil sobre X dado por $D' = \sum k_i C$. $\square$

Definição 3.23. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre variedades. Seja $D = \{(U_i, f_i)_i\}$ um divisor de Cartier sobre Y tal que $\varphi(X) \nsubseteq Supp(D)$. Definimos o* ***divisor do pullback*** *$\varphi^*(D)$, como sendo o seguinte conjunto*

$$\varphi^*(D) = \left\{ \left(\varphi^{-1}(U_i), \varphi^*(f_i) \right)_i \right\},$$

onde $\varphi^*(f_i) = f \circ \varphi$ está definida em $V_i = \varphi^{-1}(U_i)$.

3.4 DIVISORES SOBRE CURVAS

Definição 3.24. *Seja X uma curva projetiva não singular. Um* ***divisor*** *D sobre X é uma soma formal do tipo $\sum k_i x_i$, com $x_i \in X$ e $k_i \in \mathbb{Z}$. O* ***grau de*** *D é dado por* $\deg\ D = \sum k_i$.

Teorema 3.25. *Se $f : X \to Y$ é um morfismo entre duas curvas projetivas não singulares tal que $f(X) = Y$, então $\deg(f) = \deg(f^*(y))$ para todo ponto $y \in Y$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9] pág 168 a 170. □

Corolário 3.26. *Seja X uma curva projetiva não singular. O grau de um divisor principal sobre X é 0.*

Demonstração. Seja $f \in K(X) \backslash K$. Como toda função racional entre curvas projetivas é um morfismo, temos que f define um morfismo $f : X \to \mathbb{P}^1$ da seguinte forma: se $f = \dfrac{g}{h}$ com $g, h \in K[X]$ de mesmo grau então o morfismo $f : X \to \mathbb{P}^1$ é dado por $f(x) = (g(x), h(x))$. Observamos que $div_0(f) = f^*(0)$ e que $div_\infty(f) = f^*(\infty)$. Pelo Teorema 3.25, temos

$$\begin{aligned} \deg(div\ (f)) &= \deg(div_0(f) - div_\infty(f)) \\ &= \deg(div_0(f)) - \deg(div_\infty(f)) \\ &= \deg(f^*(0)) - \deg(f^*(\infty)) \\ &= \deg f - \deg f = 0. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.27. *Seja X uma curva projetiva não singular. Então,*

$$v_x(f) \geq 0 \Longleftrightarrow f \in \mathscr{O}_{X,x}, \forall\ x \in X.$$

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [3] na página 176. □

Proposição 3.28. *Seja X uma curva projetiva não singular. Dada uma função $f \in K(X)$, existe apenas um número finito de pontos $x \in X$ tais que $v_x(f) \neq 0$.*

Demonstração. Seja U um aberto na Topologia de Zariski tal que $f, f^{-1} \in \mathscr{O}(U)$. Para todo $x \in U$, pela Proposição 3.27, temos $v_x(f) \geq 0$ e $v_x(f^{-1}) \geq 0$. Agora,

$$v_x(f) = -v_x\left(f^{-1}\right) \geq 0\,.$$

Logo, $v_x(f) = 0$. Como os abertos na topologia de Zariski são densos, temos que $X \setminus U$ é um conjunto finito. Portanto, segue o resultado. □

Proposição 3.29. *Seja $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ uma hipersuperfície irredutível $n-$dimensional definida por $F = 0$ com $\deg F = k$. Considere $\mathscr{L}(X, mE)$ o espaço vetorial de formas de grau m módulo o subespaço de formas mútiplas de F de grau $m-k$, em que $E = div(x_0)$, x_0 um ponto no infinito. Então,*

i) Se $m < k$ então $\ell(mE) = \binom{n+1}{m}$

ii) Se $m \geq k$ então $\ell(mE) = \binom{n+1}{m} - \binom{n+1}{m-k}$

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [9] nas páginas 163 e 164. □

4 TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

4.1 ESPAÇO DE RIEMANN-ROCH

Definição 4.1. *Seja D um divisor em uma variedade projetiva não singular X. Definimos o **espaço de Riemann-Roch de** D como o conjunto*

$$\mathscr{L}(D) = \{f \in K(X) : div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Proposição 4.2. *Seja D um divisor em uma variedade projetiva não singular X. Temos que $\mathscr{L}(D) \neq \{0\}$ se somente se D é equivalente a algum $D' \geq 0$.*

Demonstração. Se $f \in \mathscr{L}(D)$ é não nulo, então $div(f) \geq -D$. Definindo $D' = D + div\, f$, temos que $D \sim D'$. Reciprocamente, se $D \sim D' \geq 0$, então $-D \leq D' - D = div(f)$, para algum $f \in K(X) \setminus \{0\}$, isto é $\mathscr{L}(D) \neq \{0\}$. □

Proposição 4.3. *Sejam $D = \sum k_i C_i$ e $D' = \sum k_i' C_i$ divisores sobre uma variedade projetiva não singular. Se $D \leq D'$, então $\mathscr{L}(D) \subset \mathscr{L}(D')$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{L}(D) \setminus \{0\}$. Primeiro, observamos que como $div(f) + D \geq 0$, então $div(f) \geq -D$. Assim, se $-D \leq div(f) = \sum v_{C_i}(f) C_i$, segue que $v_{C_i}(f) \geq -k_i$. Agora, como $D \leq D'$, temos $k_i \leq k_i'$. Daí

$$v_C(f) \geq -k_i \geq -k_i' \Rightarrow div(f) \geq -D' \Rightarrow div(f) + D' \geq 0$$

Dessa forma, $f \in \mathscr{L}(D') \setminus \{0\}$. □

Proposição 4.4. *Seja $D = \sum k_i C_i$ um divisor sobre uma variedade projetiva não singlar. Então, $\mathscr{L}(D)$ é um K-espaço vetorial.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(D)$. Observamos que:

- $v_{C_i}(f_1 + f_2) \geq \min\{vC_i(f_1), vC_i(f_2)\} \geq -k_i$, o que implica $f_1 + f_2 \in \mathscr{L}(D)$.
- Para $\lambda \in K^*$, temos que

  $$v_{C_i}(\lambda f_1) = v_{C_i}(\lambda) + v_{C_i}(f_1) = v_{C_i}(f_1) \geq -k_i,$$

  donde segue que $\lambda f_1 \in \mathscr{L}(D)$.

Assim, segue que $\mathscr{L}(D)$ é um K-espaço vetorial. □

Definição 4.5. *A dimensão de $\mathscr{L}(D)$ como K-espaço vetorial será denotada por $\ell(D)$, sendo denominada **dimensão** de D.*

Proposição 4.6. *Sejam X um curva projetiva irredutível não singular e $D = \sum n_i x_i$ um divisor sobre X. Então:*

i) $\mathscr{L}(0) = K$.

ii) Se $\deg(D) < 0$ *então* $\mathscr{L}(D) = \{0\}$.

iii) $\mathscr{L}(D)$ *é um K-espaço vetorial de dimensão finita.*

Demonstração.

i) Observamos que

$$\mathscr{L}(0) = \{f \in K(X) : div(f) + 0 \geq 0\} \ .$$

Como $div(f) \geq 0$, pelo Teorema 3.16, segue que f é regular. Como X é curva projetiva irredutível, pelo Teorema 2.62, segue que $K[X] = K$. Assim,

$$\mathscr{L}(0) = \{f \in K(X) : div(f) + 0 \geq 0\} = K(X) \cap K[X] = K[X] = K.$$

ii) Suponhamos que $\deg(D) < 0$ e que $\mathscr{L}(D) \neq \{0\}$. Seja $f \in \mathscr{L}(D)$ tal que $f \neq 0$. Dessa forma, $div(f) + D$ é um divisor efetivo. Observe que $\deg(div(f) + D) = \deg(D) < 0$, pois, pelo Corolário 3.26, segue que $\deg(div(f)) = 0$. Isso contradiz o fato do divisor $div(f) + D$ ser efetivo.

iii) Seja $D = D_1 - D_2$ um divisor sobre X com $D_1, D_2 \geq 0$. Como $D < D_1$, temos que $\mathscr{L}(D) \subset \mathscr{L}(D_1)$. Se $f \in \mathscr{L}(D)$, então $\overline{D} := div(f) + D_1 - D_2 \geq 0$. Como $D_2 \geq 0$, segue que $div(f) + D_1 = D_2 + \overline{D} \geq 0$, isto é, $f \in \mathscr{L}(D_1)$. Logo, podemos supor que D é efetivo. Seja t um parâmetro local de $x \in X$. Observamos que

$$v_x(f) + n_i \geq 0 \Longrightarrow v_x(t^{n_i} f) \geq 0 \Longrightarrow t^{n_i} f \in \mathscr{O}_{X,x}.$$

Pelo Teorema 2.111, temos que $\mathscr{O}_{X,x} \subset K[[T]]$. Assim, considerando a expansão em série de potências de f, podemos escrever

$$f = T^{-n_i} \left(\sum_{i}^{\infty} a_i T^i \right) \tag{4.1}$$

no corpo de frações $K((T))$ de $K[[T]]$. Assim, a correspondência dada por

$$\psi : \mathscr{L}(D) \to \bigoplus_{x_i \in X} T^{-n_i} K[[T]]$$

associa cada elemento de $\mathscr{L}(D)$ a um elemento do espaço soma direta $\bigoplus\limits_{x_i \in X} T^{-n_i} K[[T]]$, onde cada parcela é feita como em (4.1) e os x_i são os pontos de X tais que $v_{x_i}(f) = n_i \neq 0$. No quociente

$$\frac{\bigoplus\limits_{x_i \in X} T^{-n_i} K[[T]]}{K[[T]]}$$

esta correspondência terá um número finito de parcelas da forma

$$T^{-n_i}[a_0 + ... + a_{n_i-1}T^{n_i-1}]$$

que correspondem a pontos de K^{n_i} da forma $(a_0, ..., a_{n_i-1})$. Além disso,

$$\ker\, \psi = \{f \in \mathscr{L}(D) : v_x(f) \geq 0 \ \forall x \in X\}$$

isto é, os elementos de ker ψ são funções regulares sobre X. Como X é uma curva projetiva irredutível não singular, pelo Teorema 2.62 segue que ker $\psi = K$. Assim, $\dfrac{\mathscr{L}(D)}{\ker\, \psi}$ é isomorfo a um K-espaço vetorial de dimensão finita. Portanto, $\mathscr{L}(D)$ tem dimensão finita. □

Observação 4.7. *O resultado e a demonstração do item iii) da Proposição 4.6 continuam válidos para X uma variedade não singular arbitrária.*

Teorema 4.8. *Sejam X um curva projetiva irredutível não singular e D um divisor sobre X. Então, $\mathscr{L}(D) \simeq \mathscr{L}(D + div(f))$ para todo $f \in K(X) \backslash \{0\}$.*

Demonstração. Consideremos $g \in \mathscr{L}(D + div(f))$, então

$$div(g) + D + div(f) \geq 0 \Leftrightarrow div(f.g) + D \geq 0\,.$$

Assim, podemos definir a aplicação $\varphi : \mathscr{L}(D + div(f)) \to \mathscr{L}(D)$ dada por $\varphi(g) = f.g$. Observamos que $\varphi(g + g_1) = \varphi(g) + \varphi(g_1)$ e $\varphi(kg) = k\varphi(g)$, para todo $k \in K$. Logo, φ é uma transformação linear. Seja $g \in$ ker φ , isto é, $\varphi(g) = 0$. Como $f \neq 0$, para que $\varphi(g) = fg = 0$, devemos ter $g = 0$. Daí, ker $\varphi = \{0\}$, donde concluimos que φ é injetora. Seja $h \in \mathscr{L}(D)$. Como $f \neq 0$, podemos considerar $g = \dfrac{h}{f}$. Observamos que

$$div(g) + D + div(f) = div(h) - div(f) + D + div(f) = div(h) + D \geq 0$$

pois $h \in \mathscr{L}(D)$. Assim, $g \in \mathscr{L}(D + div(f))$. Além disso, temos que $\varphi(g) = f\dfrac{h}{f} = h$, o que mostra que φ é sobrejetora.
Portanto, $\mathscr{L}(D) \simeq \mathscr{L}(D + div(f))$ para todo $f \in K(X) \backslash \{0\}$. □

Observamos que, pelo Teorema 4.8, espaços de Riemann-Roch associados a divisores equivalentes possuem a mesma dimensão.

Definição 4.9. *Um divisor D define um **sistema linear completo**, dado por*

$$|D| = \{D' \in Div(X) : D' \geq 0 \ e\ D' \sim D\}\,.$$

Definição 4.10. *O **espaço projetivo** $\mathbb{P}(V)$ associado a um espaço vetorial V é conjunto de subespaços vetoriais de V de dimensão 1.*

Proposição 4.11. *Sejam X uma curva projetiva não singular e D um divisor sobre X. Existe uma bijeção natural entre $|D|$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathscr{L}(D))$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{L}(D)$, $f \neq 0$. Definamos $D_f := div(f) + D \geq 0$. Observemos que, dessa forma, D_f é linearmente equivalente a D. Logo, temos que a aplicação $\psi : \mathbb{P}(\mathscr{L}(D)) \to |D|$ dada por $\psi(f) = D_f$ está bem definida. Seja $D' \in |D|$, isto é, $D' \geq 0$ e $D' \sim D$. Dessa forma,

$$D' - D = div(f), \text{para algum } f \in K(X) \setminus \{0\}.$$

Sendo $D' > 0$, temos $div\ f + D = D' > 0$, ou seja, $f \in \mathscr{L}(D)$. Logo, ψ é sobrejetora. Agora, sejam $f, g \in K(X)$ tais que $div(f) = div(g)$. Então $\frac{f}{g}$ é regular em todos os pontos, pelo Teorema 2.62, segue que $\frac{f}{g} = \lambda$, $\lambda \in K^*$. Consequentemente, $f = \lambda g$, isto é, ψ é injetora. Portanto, ψ é bijetora. □

4.2 TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

Ao longo desta seção vamos considerar X como sendo uma curva projetiva irredutível não singular. Além disso, consideramos V^* o espaço dual do espaço vetorial V, $V^\perp$ como complemento ortogonal do espaço vetorial V e V° como o anulador do espaço vetorial V.

Definição 4.12. *Uma **distribuição** (ou **adele**) r sobre X é uma função que associa a cada $x \in X$ uma função racional $r_x \in K(X)$ com a condição que $v_x(r_x) < 0$ para no máximo uma quantidade finita de pontos, isto é, $v_x(r_x) \geq 0$ para quase todo ponto. O conjunto de distribuições será denotado por $\mathscr{R}$.*

Consideremos distribuições r e s sobre X, ou seja, $v_x(r_x) \geq 0$ e $v_x(s_x) \geq 0$, exceto possivelmente para um número finito de pontos. Lembremos que

$$v_x(r_x + s_x) \geq \min\{v_x(r_x), v_x(s_x)\} \text{ e } v_x(kr_x) = v_x(r_x) \text{ para todo } k \in K.$$

Dessa forma, podemos definir as distribuições $r + s$ e kr como $(r+s)_x = r_x + s_x$ e $(kr_x) = kr_x$. Estas operações definem uma estrutura em $\mathscr{R}$ de espaço vetorial sobre K.

Agora, considerando um divisor $D = \sum n_i x_i$ com $x_i \in X$, definimos o seguinte conjunto

$$\mathscr{R}(D) = \{r \in \mathscr{R} : v_{x_i}(r_{x_i}) + n_i \geq 0 \text{ e } v_x(r_x) \geq 0 \text{ para } x \neq x_i\, \forall i\}.$$

Proposição 4.13. *Sejam X uma curva projetiva irredutível não singular e $D = \sum n_i x_i$ um divisor sobre X. Temos que $\mathscr{R}(D)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{R}$.*

Demonstração. Observamos que $\mathscr{R}(D) \subset \mathscr{R}$ por construção. Sejam $r, s \in \mathscr{R}(D)$. Assim, $v_{x_i}(r_{x_i} + s_{x_i}) \geq \min\{v_{x_i}(r_{x_i}), v_{x_i}(s_{x_i})\} + n_i \geq 0$, o que implica $r + s \in \mathscr{R}(D)$. Agora, para $k \in K$, temos $v_{x_i}(kr_{x_i}) + n_i = v_{x_i}(r_{x_i}) + n_i \geq 0$, o que implica $kr \in \mathscr{R}(D)$. □

Proposição 4.14. *Seja X uma curva projetiva irredutível não singular. Sejam $D = \sum n_i x_i$ e $D' = \sum m_i x_i$ divisores sobre X. Se $D \leq D'$, então $\mathscr{R}(D) \subset \mathscr{R}(D')$.*

Demonstração. Como $D \leq D'$, temos $m_i - n_i \geq 0$. Seja $r \in \mathscr{R}(D)$. Então, temos que $v_{x_i}(r_{x_i}) + n_i \geq 0$. Daí

$$0 \leq (v_{x_i}(r_{x_i}) + n_i) + m_i - n_i = v_{x_i}(r_{x_i}) + m_i\,,$$

o que acarreta $r \in \mathscr{R}(D')$. □

Observemos que $K(X)$ pode ser identificado como uma cópia de um subconjunto de $\mathscr{R}$. Para isso, basta que para cada $f \in K(X)$, associemos uma distribuição r com $r_x = f$, para todo $x \in X$. Assim, $K(X)$ pode ser visto como um K-subespaço vetorial de $\mathscr{R}$. Com isso, podemos considerar o subespaço soma $\mathscr{R}(D) + K(X)$ de $\mathscr{R}$.

Proposição 4.15. *Sejam X uma curva projetiva irredutível não singular e $D = \sum n_i x_i$ um divisor sobre X. Então, $\mathscr{R}(D) \cap K(X) = \mathscr{L}(D)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{L}(D)$, ou seja, $div(f) + D \geq 0$. Sendo $div(f) = \sum v_x(f)\,x$, temos $v_{x_i}(f) + n_i \geq 0$ para todo i e $v_x(f) \geq 0$ para todo $x \neq x_i$. Logo, $f \in \mathscr{R}(D) \cap K(X)$. Agora, seja $f \in \mathscr{R}(D) \cap K(X)$, isto é, $v_{x_i}(r_{x_i}) + n_i \geq 0$, onde $r_x = f$, para todo $x \in X$. Daí, $div(f) + D \geq 0$, o que acarreta $f \in \mathscr{R}(D)$. Portanto, $\mathscr{R}(D) \cap K(X) = \mathscr{L}(D)$. □

Teorema 4.16. *Sejam D e D' dois divisores sobre uma curva projetiva não singular X. Se $D \leq D'$ então, $\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{R}(D)} \right) = \deg(D') - \deg(D)$.*

Demonstração. Sejam $D = \sum n(x)\,x$ e $D' = \sum n'(x)\,x$, com $x \in X$. Suponhamos que $D' - D = \sum m(x)\,x$ com $m(x) = n'(x) - n(x)$. Como $D \leq D'$, temos $\mathscr{R}(D) \subset \mathscr{R}(D')$. Seja $r \in \mathscr{R}(D')$. A condição $v_x(r_x) + n'(x) \geq 0$ nos indica que $t^{n'(x)} r_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ onde t é um parâmetro local em uma vizinhança de x. Pelo Teorema 2.111, temos que $\mathscr{O}_{X,x} \subset K[[T]]$. Assim, considerando a expansão em série de potências de r_x, podemos escrever

$$r_x = T^{-n'(x)}(a_0 + a_1 T + ...) \tag{4.2}$$

Para elementos $s \in \mathscr{R}(D)$, temos que garantir que $v_x(s_x) + n(x) \geq 0$, ou seja, $t^{n(x)} s_x \in \mathscr{O}_{X,x}$. Assim, da mesma forma, podemos considerar a expressão em série de potências

$$s_x = T^{-n(x)}(b_0 + b_1 T + ...) \tag{4.3}$$

Portanto

$$\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{R}(D)} \cong \bigoplus_{x \in X} \frac{T^{-n'(x)} K[[T]]}{T^{-n(x)} K[[T]]} \cong \bigoplus_{x \in X} K^{n(x) - n'(x)}\,.$$

Logo,

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{R}(D)} \right) = \sum m(x) = \deg(D') - \deg(D)$$

□

Lema 4.17. *Sejam $D \leq D'$ dois divisores sobre uma curva projetiva não singular X. Então*

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)} \right) = (\deg(D') - \ell(D')) - (\deg(D) - \ell(D)).$$

Demonstração. Considere o homomorfismo canônico $\psi : \mathscr{R}(D') \longrightarrow \dfrac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}$ tal que $\psi(r) = r + (\mathscr{R}(D) + K(X))$. Observe que dado $\overline{r} \in \dfrac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}$, basta tomar $r \in \mathscr{R}(D')$ tal que $\psi(r) = \overline{r}$, isto é ψ é sobrejetora. Agora, para que $r \in \mathscr{R}(D) + K(X)$, devemos ter $r \in \mathscr{R}(D') \cap (\mathscr{R}(D) + K(X)) = (\mathscr{R}(D') \cap K(X)) + \mathscr{R}(D) = \mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)$. Assim, ker $\psi = \mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)$. Pelo primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)} \simeq \frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}.$$

Mas sabemos que,

$$\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)} \simeq \frac{\mathscr{R}(D') / \mathscr{R}(D)}{(\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)) / \mathscr{R}(D)}.$$

Além disso,

$$\frac{\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)}{\mathscr{R}(D)} \simeq \frac{\mathscr{L}(D')}{\mathscr{R}(D) \cap \mathscr{L}(D')}.$$

Como $\mathscr{L}(D') = \mathscr{R}(D') \cap K(X)$, temos que

$$\frac{\mathscr{R}(D) + \mathscr{L}(D')}{\mathscr{R}(D)} \simeq \frac{\mathscr{L}(D')}{\mathscr{R}(D) \cap K(X)} = \frac{\mathscr{L}(D')}{\mathscr{L}(D)}.$$

Daí, $\dim_K \left(\dfrac{\mathscr{R}(D) + \mathscr{L}(D')}{\mathscr{R}(D)} \right) = \dim_K \left(\dfrac{\mathscr{L}(D')}{\mathscr{L}(D)} \right) = \ell(D') - \ell(D)$. Como $\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D) = \mathscr{R}(D') \cap (\mathscr{R}(D) + K(X))$, temos $\mathscr{R}(D) \subset \mathscr{R}(D) + \mathscr{L}(D') \subset \mathscr{R}(D')$.

Logo,

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{R}(D) + \mathscr{L}(D')} \right) = \dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D')}{\mathscr{R}(D)} \right) - \dim_K \left(\frac{\mathscr{L}(D') + \mathscr{R}(D)}{\mathscr{R}(D)} \right)$$

Portanto,

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)} \right) = (\deg(D') - \ell(D')) - (\deg(D) - \ell(D)).$$

□

Corolário 4.18. *Seja X um curva projetiva irredutível não singular e sejam D e D' divisores sobre X tais que $D' \leq D$. Então $\mathscr{L}(D') \subset \mathscr{L}(D)$ e*

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{L}(D)}{\mathscr{L}(D')} \right) \leq \deg D - \deg D'.$$

Demonstração. A inclusão dos espaços já foi provada na Proposição 4.3. Como

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)} \right) \geq 0,$$

o resultado segue diretamente do Lema 4.17. □

Proposição 4.19 (Desigualdade de Riemann)**.** *Se X é uma curva projetiva irredutível não singular, então existe uma constante $\gamma = \gamma(X)$ tal que*

$$l(D) \geq \deg(D) - \gamma,$$

para todo divisor D sobre X.

Demonstração. Seja $f \in K(X)$ uma função racional não constante. A mesma define $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ uma função racional como $f(x) = (f(x) : 1)$. Consideraremos $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ e $t \in \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$. Temos que $D_\infty = f^*(\infty)$ e que $u = t^{-1}$ é um parâmetro local de $\mathbb{P}^1$ em ∞. Vamos provar o resultado inicialmente para divisores da forma rD_∞ em que r é muito grande.

Supondo $D_\infty = \sum n_i x_i$, então

$$n = \sum n_i = \deg f = [K(X) : K(t)],$$

considerando a inclusão $f^* : K(t) \hookrightarrow K(X)$ para identificar t com $f^*(t) = f \in K(X)$. Seja $w_1, ..., w_n$ uma base de $K(X)$ sobre $K(t)$. Se w_j tem polo em algum ponto $x \notin Supp\, D_\infty$, logo $f(x) = \alpha$ e $v_x\left((t-\alpha)^\ell w_j\right) \geq 0$ para ℓ suficientemente grande. Assim, multiplicando cada w_j por um polinômio apropriado obtemos uma nova base $u_1, \ldots, u_n$ de $K(X)$ sobre $K(t)$ tal que os polos de u_j estão todos concentrados em $Supp\,(D_\infty)$. Seja $v_{x_i}(u_j) = -m_{ij}$ para cada i e cada j. Dessa forma, para cada polinômio p em t:

$$v_{x_i}(pu_j) = v_{x_i}(p) + v_{x_i}(u_j) = -kn_i - m_{ij}\,,$$

onde $k = \deg p$. Agora, segue que $p\, u_j \in \mathscr{L}(rD_\infty)$ desde que

$$rn_i \geq n_i k + m_{ij}\,,$$

ou seja, desde que

$$k + \frac{m_{ij}}{n_i} \leq r\,.$$

Seja $m = \max\left\{\dfrac{m_{ij}}{n_i}\right\}$. Então, $\sum p_j u_j \in \mathscr{L}(rD_\infty)$ para todo $p_j \in K[t]$ com $\deg\, p_j \leq r - m$ com $j = 1, \ldots, n$. Como o espaço vetorial dos polinômios de uma variável de grau $r - m$ tem $r - m + 1$ elementos na base, esse subespaço de $\mathscr{L}(rD_\infty)$ tem dimensão $n(r - m + 1) = rn - (m - 1)n$. Assim, para os divisores da forma rD_∞, fazendo $\gamma = (m-1)\,n$, temos o resultado.

Seja $D = \sum k_i y_i$ um divisor arbitrário sobre X. Para $y_i \notin Supp\,(D_\infty)$ com $k_i > 0$, suponhamos que $t\,(y_i) - \alpha_i$. Seja $u = \prod (t - \alpha_i)^{k_i}$, onde o produto é percorrido para todo i tal que $y_i \notin Supp\,(D_\infty)$, com $k_i > 0$. Então, $D' = D - div\,(u)$ é um divisor equivalente a D e $v_{y_i}\,(D') \leq 0$, para todo $y_i \notin Supp\,(D_\infty)$. Assim, para r suficientemente grande, teremos $D' < rD_\infty$. Pelo Corolário 4.18 temos que,

$$\ell\,(rD_\infty) \leq \ell\,(D') + \deg\,(rD_\infty - D')\ ,$$

ou seja,

$$\ell\,(D') \geq \deg\,(D') + \ell\,(rD_\infty) - \deg\,(rD_\infty) \geq \deg\,(D') - \gamma$$

Como $\ell\,(D') = \ell\,(D)$ e $\deg\,(D) = \deg\,(D')$, a desigualdade é verificada. □

Observamos que a Desigualdade de Riemann garante que a diferença $\deg D - \ell(D)$ é limitada superiormente qualquer que seja o divisor D sobre X.

Corolário 4.20. *Se X é uma curva projetiva irredutível não singular, então existe um inteiro $c = c(X)$ tal que $l\,(D) = \deg\,(D) - \gamma$ para todo divisor D sobre X com $\deg D \geq c$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.19 existe um divisor D' sobre X tal que $l\,(D') = \deg\,(D') - \gamma$. Seja $c := \deg D' + \gamma + 1$. Se $\deg D \geq c$, então

$$\begin{aligned} \ell(D - D') &\geq \deg(D - D') - \gamma \\ &\geq c - \deg D' - \gamma \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, existe $0 \neq z \in \mathscr{L}(D - D')$, isto é, $div(z) + D \geq D'$. Considere $D'' := D + div(z) \geq D'$. Como $D \sim D''$ temos que,

$$\begin{aligned} \deg D - \ell(D) &= \deg D'' - \ell(D'') \\ &\geq \deg D' - \ell(D') \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Portanto, $\ell(D) \leq \deg D - \gamma$. □

Lema 4.21. *Sejam X uma curva projetiva não singular e D um divisor sobre X tal que $\ell(D) = \deg D - \gamma$. Então $\mathscr{R} = \mathscr{R}(D) + K(X)$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.18, para todo divisor $D' \geq D$ temos que $\mathscr{L}(D') \subset \mathscr{L}(D)$ e $\dim_K \left(\dfrac{\mathscr{L}(D)}{\mathscr{L}(D')}\right) \leq \deg D - \deg D'$.
Assim, temos que $\ell(D) - \ell(D') \leq \deg D - \deg D'$, implicando em

$$\begin{aligned} \ell(D') &\leq \ell(D) - \deg D + \deg D' \\ &= \deg D - \gamma - \deg D + \deg D'. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Riemann temos que $\ell(D') \geq \deg D' - \gamma$. Logo, $\ell(D') = \deg D' - \gamma$ para todo divisor $D' \geq D$.
Seja agora $r \in \mathscr{R}$. É fácil ver que $r \in \mathscr{R}(D')$ para algum $D' \geq D$ (Basta tomar $D' = \sum n'(x)x$ onde $n'(x) \geq \max\{n(x), -v_x(r_x)\}$). Pelo Lema 4.17 temos que

$$\begin{aligned}
\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}\right) &= (\deg D' - \ell(D')) - (\deg D - \ell(D)) \\
&= (\deg D' - \deg D' - \gamma) - (\deg D - \deg D - \gamma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathscr{R}(D) + K(X) \subset \mathscr{R}(D') + K(X)$, e, consequentemente $r \in \mathscr{R}(D) + K(X)$. □

Teorema 4.22. *Seja X uma curva projetiva não singular. Para qualquer divisor D sobre X, temos*

$$\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D) + K(X)}\right) < \infty.$$

Demonstração. Seja D' um divisor sobre X tal que $D \leq D'$ e $\ell(D') = \deg D' - \gamma$ (sua existência é garantida pelo Corolário 4.20). Pelo Lema 4.21 temos que $\mathscr{R} = \mathscr{R}(D') + K(X)$. Dessa forma temos que

$$\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D) + K(X)} \simeq \frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}.$$

Suponha que $\dim_K \left(\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D) + K(X)}\right)$ seja infinita. Então, $\frac{\mathscr{R}(D') + K(X)}{\mathscr{R}(D) + K(X)}$ não tem dimensão finita, o que contradiz a desigualdade de Riemann. □

Agora, considere $H(D') := \frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D') + K(X)}$, para algum divisor D' sobre uma curva projetiva irredutível não singular X. Seja D um divisor de X tal que $D \geq D'$. Daí

$$\mathscr{R}(D') + K(X) \subset \mathscr{R}(D) + K(X) \subset \mathscr{R}.$$

Como $\dim_K H(D') = \dim_K \left(\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D') + K(X)}\right) < \infty$, temos

$$\dim_K H(D') = \dim_K H(D) + (\deg(D) - \ell(D)) - (\deg(D') - \ell(D'))$$

Tomando $D' = 0$, obtemos $g := \dim_K H(0) = \dim_K \left(\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(0) + K(X)}\right)$. Logo,

$$\ell(D) = \deg(D) + \dim_K H(D) - g + 1. \tag{4.4}$$

uma vez que $\deg(0) - \ell(0) = 0 - 1 = -1$.

Definição 4.23. *O número $g = \dim_K H(0)$ é dito **gênero da cuva** X.*

Definição 4.24. *Um **diferencial de Weil** é um funcional linear $\omega : \mathscr{R} \longrightarrow K$ que se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$, para algum divisor D sobre X. O conjunto de diferenciais de Weil será denotado por $\Omega(X)$.*

Proposição 4.25. *Seja X uma curva projetiva não singular. Então $\Omega(X)$ é um $K(X)$-espaço vetorial.*

Demonstração. Sejam ω, $\omega_1 \in \Omega(X)$, isto é ω_1 se anula em $\mathscr{R}(D_1) + K(X)$ e ω se anula em algum $\mathscr{R}(D) + K(X)$, onde D_1 e D são divisores sobre X. Assim, $\omega + \omega_1$ se anula em $\mathscr{R}(D_2) + K(X)$ com $D_2 \leq D$ e $D_2 \leq D_1$. Agora, dado $\phi \in K(X)$, temos $\phi\omega$ se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. As propriedades de espaço vetorial seguem das propriedades de funcionais lineares. $\square$

Proposição 4.26. *Seja X uma curva projetiva não singular e seja D um divisor sobre X. O conjunto*

$$\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(X) : \omega \textit{ se anula em} \mathscr{R}(D) + K(X)\}$$

é um subespaço vetorial de $\Omega(X)$.

Demonstração. Por definição $\Omega(D) \subset \Omega(X)$ e $\Omega(D) \neq \emptyset$. Sejam ω_1 e $\omega_2 \in \Omega(D)$, isto é, ω_1 e ω_2 se anulam em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. Logo, $\omega_1 + \omega_2$ se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. Seja $\phi \in K(X)$ então $\phi\omega_1$ se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. $\square$

Observamos que $H(D)$ é isomorfo ao complemento ortogonal $(\mathscr{R}(D) + K(X))^{\perp}$ e $H(D)$ é isomorfo ao seu dual $H(D)^*$, então temos que $H(D)^* \simeq (\mathscr{R}(D) + K(X))^{\perp}$. De maneira natural temos ainda que $\Omega(D) \simeq (\mathscr{R}(D) + K(X))^{\perp}$, logo $\Omega(D) \simeq H(D)^*$. Assim, um elemento $\omega \in \Omega(D)$ pode ser visto como um elemento de $H(D)^*$.

Agora, seja $\omega \in \Omega(X)$ não nulo. Considere o conjunto

$$M(\omega) = \{D \in Div\ X : \omega \in (\mathscr{R}(D) + K(X))^{\circ}\},$$

onde $(\mathscr{R}(D) + K(X))^{\circ}$ é o anulador de $(\mathscr{R}(D) + K(X))$. Observamos que, pela própria definição do funcional $\omega : \mathscr{R} \to K$, segue que $M(\omega)$ não é vazio. Seja $D \in M(\omega)$. Considere D' um divisor em X e $\phi \in \mathscr{L}(D')$, ou seja, $D' + div(\phi) \geq 0$. Daí, segue que $D + div(\phi) \geq D - D'$. Assim, $\mathscr{R}(D - D') \subset \mathscr{R}((D) + div(\phi))$. Sejam $n = \ell(D')$ e $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ elementos linearmente independentes de $\mathscr{L}(D')$. Como $\omega : \mathscr{R} \to K$ se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$ e $\mathscr{R}(D - D') \subset \mathscr{R}(D)$, temos que $\phi_1\omega, \phi_2\omega, ..., \phi_n\omega$ se anulam em $\mathscr{R}(D - D') + K(X)$ e são linearmente independentes sobre K. Caso contrário, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ seriam linearmente dependentes em $\mathscr{L}(D')$. Logo, podemos dizer que

$$\dim_k H(D - D') = \dim_K \left(\frac{\mathscr{R}}{\mathscr{R}(D - D') + K(X)} \right) \geq \ell(D'),$$

pois pelo menos $\phi_i \omega \in H(D - D')$, para todo $i \in \{1, 2, .., n\}$. Usando a equação (4.4), dada por

$$\ell(D) = \deg(D) + \dim_K H(D) - g + 1,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\ell(D - D') &= \deg(D - D') + \dim_K H(D - D') - g + 1 \\
&\geq \deg(D - D') - g + 1 + \ell(D') \\
&= \deg(D) - \deg(D') + 1 - g + \deg(D') + \dim_K H(D') - g + 1 \\
&= \deg(D) - 2g + 2 + \dim_K H(D') \\
&\geq \deg(D) - 2g + 2
\end{aligned}$$

Assim, se D' é tal que $\deg(D') > \deg(D)$, temos $\deg(D - D') < 0$, daí pela Proposição 4.6, segue que $\mathscr{L}(D - D') = 0$, o que acarreta $\ell(D - D') = 0$. Dessa forma, obtemos $\deg(D) \leq 2g - 2$. Como $2g - 2$ é um número inteiro podemos escolher $D_1 \in M(\omega)$ tal que D_1 seja o de maior grau possível. Assim, fica provado o seguinte resultado:

Proposição 4.27. *Seja X uma curva projetiva não singular e seja $\omega \in \Omega(X)$ não nulo. Então, existe um divisor $D \in M(\omega)$ tal que $A \leq D$, para todo $A \in M(\omega)$.*

Teorema 4.28. *Seja X uma curva projetiva não singular irredutível. Então*

$$\dim_{K(X)} \Omega(X) = 1.$$

Demonstração. Consideramos ω e $\omega' \in \Omega(X)$ formas linearmente independentes. Seja n um inteiro positivo. Sejam $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ dois subconjuntos de $K(X)$, ambos linearmente independentes sobre K. Temos que

$$a_1\omega, a_2\omega, ..., a_n\omega, b_1\omega', b_2\omega', ..., b_n\omega'$$

são linearmente independentes sobre K.

Seja D um divisor sobre X tal que ω e ω' estão em $\Omega(D)$. Dado D' um divisor sobre X, temos que

$$D \leq D + D' + div(\phi) \ \forall \phi \in \mathscr{L}(D').$$

Dessa forma,

$$\mathscr{R}(D - D') \subset \mathscr{R}(D + div(\phi)) \ \forall \phi \in \mathscr{L}(D').$$

Escolhendo $n = \ell(D')$ e duas bases $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ de $\mathscr{L}(D')$, temos que

$$a_1\omega, a_2\omega, ..., a_n\omega, b_1\omega', b_2\omega', ..., b_n\omega'$$

são linearmente independentes sobre K. Agora, ω, ω' se anulam em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. Além disso, $\mathscr{R}(D - D') \subset \mathscr{R}(D)$, logo temos que

$$a_1\omega, a_2\omega, ..., a_n\omega, b_1\omega', b_2\omega', ..., b_n\omega'$$

se anulam em $\mathscr{R}(D - D') + K(X)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\dim_K H(D - D') &\geq 2n \\
&= 2\,\ell(D') \\
&= 2(\deg D' + 1 - g + \dim_K H(D')) \quad \text{(Pela equação 4.4)} \\
&\geq 2(\deg D' + 1 - g).
\end{aligned}$$

Usando a equação (4.4) para o divisor $D - D'$, segue que

$$\begin{aligned}
\ell(D - D') &= \dim_K H(D - D') + \deg(D - D') + 1 - g \\
&= \dim_K H(D - D') + \deg D - \deg D' + 1 - g \\
&\geq 2(\deg D' + 1 - g) + \deg D - \deg D' + 1 - g \\
&= \deg D' + \deg D + 3 - 3g.
\end{aligned}$$

Considerando D' tal que $D' > D$ e $\deg(D') > 3g - 3 - \deg(D)$, temos

$$0 \geq \deg D' + \deg D + 3 - 3g > 0,$$

que é uma contradição. □

Observamos que, como $D \in M(\omega)$, então ω se anula em $\mathscr{R}(D) + K(X)$. Como $\Omega(D) \simeq H(D)^*$, temos que $\omega \in H(D)^*$.

Definição 4.29. *Seja X uma curva projetiva não singular. Para todo $\omega \in \Omega(X)$ definimos o* ***divisor de*** *ω como sendo o divisor de maior grau D tal que $\omega \in H(D)^*$. O mesmo será denotado por $div(\omega)$*

Seja $div(\omega)$. Se $\omega' \in \Omega(X)$, como $\Omega(X)$ é um $K(X)$-espaço vetorial de dimensão 1, temos que $\omega' = \phi\omega$, para algum $\phi \in K(X)$. Dessa forma,

$$div(\omega') = div(\phi\omega) = div(\phi) + div(\omega)$$

Desta forma, $div(\omega')$ e $div(\omega)$ são equivalentes . Assim, os divisores de $\omega \in \Omega(X)$ definem uma classe de divisores, denominado **divisores canônicos**.

Teorema 4.30 (Riemann-Roch)**.** *Sejam D um divisor sobre X e $\mathscr{K} = div(\omega)$ um divisor canônico. Então*

$$\ell(D) = \deg(D) + \ell(\mathscr{K} - D) + 1 - g.$$

com $g = \dim_K H(0)$

Demonstração. Pela equação (4.4), temos que

$$\ell(D) = \deg(D) + \dim_K H(D) - g + 1.$$

Assim, é suficiente provar que

$$dim_K H(D) = \ell(\mathscr{K} - D),$$

ou de maneira equivalente,

$$dim_K H(\mathscr{K} - D) = \ell(D).$$

Considere $\phi \in \mathscr{L}(D)$. Então

$$div(\phi\omega) = div(\omega) + div\,\phi \geq div(\omega) - D$$

pois $\phi \in \mathscr{L}(D)$, ou seja, $div(\phi) \geq -D$. Então, $\phi\omega : \mathscr{R} \longrightarrow K$ se anula em $\mathscr{R}(\mathscr{K} - D) + K(X)$, e dessa forma, temos que $\phi\omega \in H(\mathscr{K} - D)$. Como $H(\mathscr{K} - D) \simeq H(\mathscr{K} - D)^*$, podemos dizer que $\phi\omega \in H(\mathscr{K} - D)^*$. Assim, fica bem definida a seguinte função:

$$\alpha : \mathscr{L}(D) \longrightarrow H(\mathscr{K} - D)^*$$

tal que $\alpha(\phi) = \phi\omega$. Agora, seja $\beta \in H(\mathscr{K} - D)^*$ e $\mathscr{K}' = div(\beta)$. Um vez que $\mathscr{K}'$ é o maior divisor tal que β se anula em $\mathscr{R}(\mathscr{K}')$, temos $\mathscr{K}' \geq \mathscr{K} - D$. Como $\Omega(X)$ é um $K(X)$ espaço vetorial de dimensão 1, temos $\beta = \phi\omega$ para algum $\phi \in K(X)$. Então

$$-D \leq \mathscr{K}' - \mathscr{K} = div(\beta) - div(\omega) = div(\phi)$$

o que implica $\phi \in \mathscr{L}(D)$. Logo, fica bem definida a função

$$\psi : H(\mathscr{K} - D)^* \longrightarrow \mathscr{L}(D)$$

dada por $\psi(\beta) = \phi$. Observe que, pela construção de ψ e α, temos que $\alpha \circ \psi = id$ e $\psi \circ \alpha = id$. Portanto, está provado o teorema. □

Corolário 4.31. *Seja X uma curva projetiva irredutível não singular. Se $\mathscr{K}$ é o divisor canônico sobre X então $g = \ell(\mathscr{K})$.*

Demonstração. Considerando $D = 0$ no Teorema de Riemann-Roch, temos

$$\ell(0) = \deg(0) + \ell(\mathscr{K}) + 1 - g.$$

Como $\ell(0) = 1$ e $\deg(0) = 0$, temos que $g = \ell(\mathscr{K})$. □

Observamos que, dessa forma, o gênero depende somente da não singularidade da curva e do corpo de funções. Logo, curvas birracionalmente equivalentes têm o mesmo gênero.

Corolário 4.32. *Seja X uma curva projetiva não singular de gênero g. O grau de um divisor canônico sobre X é $2g - 2$.*

Demonstração. Se $D = \mathscr{K}$ então, pelo Teorema de Riemann-Roch, segue que

$$\ell(\mathscr{K}) = \deg(\mathscr{K}) + \ell(0) + 1 + g$$

Como $\ell(\mathscr{K}) = g$ e $\ell(0) = 1$, temos

$$g = \deg(\mathscr{K}) + 1 + 1 - g \Rightarrow \deg(\mathscr{K}) = 2g - 2$$

□

Corolário 4.33. *Sejam X uma curva projetiva não singular de gênero g e D um divisor sobre X. Se $\deg(D) > 2g - 2$, então $\ell(D) = 1 - g + \deg\ D$.*

Demonstração. Suponha que $\deg(D) > 2g - 2$. Pelo corolário 4.32, segue que $\deg(\mathscr{K}) = 2g - 2$. Dessa forma, $\deg(\mathscr{K} - D) < 0$, o que acarreta, $\mathscr{L}(\mathscr{K} - D) = \{0\}$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, temos que

$$\ell(D) - \ell(\mathscr{K} - D) = 1 - g + \deg(D).$$

Como $\mathscr{L}(\mathscr{K} - D) = \{0\}$, temos então que $\ell(\mathscr{K} - D) = 0$. Daí,

$$\ell(D) - 0 = 1 - g + \deg(D) \Longrightarrow \ell(D) = \deg(D) - g + 1$$

□

Corolário 4.34. *Seja X uma curva projetiva não singular. Se $g(X) = 0$ então $X \cong \mathbb{P}^1$.*

Demonstração. Seja D um divisor qualquer sobre X. Pelo Teorema de Riemann-Roch, temos

$$\ell(D) \geq \deg(D) + 1.$$

Em particular, tomando $D = 1.x$, para $x \in X$, temos $\deg(D) = 1$ e $\ell(D) = 2$. Dessa forma, existe $\phi \in \mathscr{L}(D)$ não constante tal que $div_\infty(\phi) = x$. Considere a aplicação finita $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Observemos que $\phi^{-1}(\infty) = \{x\}$. Então $\deg(\phi) = \deg(\phi^*(x)) = 1$, pois $\phi(\infty)$ possui somente um elemento. Logo, $1 = \deg(f) = [K(X) : K(\mathbb{P}^1)]$. Portanto, $X \cong \mathbb{P}^1$ □

Corolário 4.35. *Seja X uma curva não singular. Se $g = 1$ então X é isomorfo a uma cúbica em $\mathbb{P}^2$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada em [3], página 189 a 190. □

Teorema 4.36. *Seja $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, onde $F \in K[T_0, T_1, T_2]$ uma curva plana não singular de grau d. Então:*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Demonstração. Seja $H \cap X = \{x_1, x_2, ..., x_d\}$ onde H é uma reta que intercepta X em um número finito de pontos. Por uma mudança de coordenadas, podemos considerar H como sendo a reta infinita $V(T_0)$. Seja $D = \sum(-x_i)$ um divisor sobre X. Considere o espaço $\mathscr{L}(nD)$ com $n > 2g-2$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, temos

$$\ell(nD) = nd - g + 1.$$

Agora, seja $\varphi \in \mathscr{L}(nD)$, ou seja,

$$div(\varphi) + nD \geq 0 \Longrightarrow div(\varphi) \geq -nD > 0.$$

Assim, φ é uma função regular em $U = X \cap (\mathbb{P}^2 \setminus V(T_0))$. Observe que φ é um elemento do anel $\dfrac{K[T_1, T_2]}{< F(T_1, T_2) >}$, onde $X = V(F)$. Assim, existe um polinômio $P(T_1, T_2)$ tal que $P = F$ em U. Considere $T = (T_1, T_2)$. Podemos representar P da seguinte forma

$$P(T) = P^{(0)}(T) + P^{(1)}(T) + ... + P^{(n)}(T),$$

onde cada $P^{(i)}$ é um polinômio homogêneo de grau i. A dimensão do espaço de polinômios de grau n é dada por

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Agora, a dimensão do subespaço dos polinômios P de grau n módulo $< F >$ é dado por:

$$\frac{(n-d+1)(n-d+2)}{2}.$$

Como cada função $\varphi \in \mathscr{L}(nD)$ está em $\dfrac{K[T]}{< F(T) >}$, pela Proposição 3.29, segue que

$$\ell(nD) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-d+1)(n-d+2)}{2} = 1 + nd - \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Portanto

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

□

REFERÊNCIAS

[1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1969.

[2] Coelho, J. *Introdução à Geometria Algébrica (versão 1.0)*. UFF, Niterói, 2009. Disponível em http://www.professores.uff.br/jcoelho/wp-content/uploads/sites/122/2017/09/IntroGAv1-1.pdf (Acessado em 21/02/0218).

[3] Dolgachev, Igor V. *Introduction to Algebraic Geometry*. Ann arbor. 2013. Disponível em http://www.math.lsa.umich.edu/ idolga/631.pdf (Acessado em 21/02/2018).

[4] Fulton, W. *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*. 2008. Disponível em http://www.math.lsa.umich.edu/ wfulton/CurveBook.pdf (Acessado em 21/02/2018).

[5] Gray, Jeremy J. *The Riemann-Roch Theorem and Geometry,1854-1914*. Doc. Math. J. DMV. (Extra volume ICM 1998 III) 811-822.

[6] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. New York: Springer-Velarg, 1977.

[7] Hulek K. *Elementary Algebraic Geometry*. Providence: AMS, Student Mathematical Library Vol.20, 2003.

[8] Milne, J. S. *Algebraic Geometry (versão 6.02)*. 2015. Disponível em http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf (Acessado em 21/02/2018).

[9] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1: varieties in projective space*. Third Edition. New Yoirk: Springer, 2013.

[10] Sutherland, A. *18.782 Introduction to Arithmetic Geometry. Fall 2013.* MIT OpenCourseWare. Disponível em https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-782-introduction-to-arithmetic-geometry-fall-2013/ (Acessado em 21/02/2018).