

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

João Daniel Madureira Yamim

**Um modelo de seleção de carteiras de ações baseado
em otimização convexa *online***

Juiz de Fora

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

João Daniel Madureira Yamim

**Um modelo de seleção de carteiras de ações baseado
em otimização convexa *online***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Carlos Cristiano Hasenclever
Borges

Coorientador: Raul Fonseca Neto

Juiz de Fora

2018

João Daniel Madureira Yamim

**Um modelo de seleção de carteiras de ações baseado em
otimização convexa *online***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Aprovada em 23 de Fevereiro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. D.Sc Carlos Cristiano Hasenclever Borges - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. D.Sc Raul Fonseca Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. D.Sc Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. D.Sc. Fabrízio Condé de Oliveira
Universidade Salgado de Oliveira

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Daniel Madureira Yamim, João.

Um modelo de seleção de carteiras de ações baseado em otimização convexa online / João Daniel Madureira Yamim. -- 2018. 75 f.

Orientador: Carlos Cristiano Hasenclever Borges

Coorientador: Raul Fonseca Neto

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, 2018.

1. Seleção de Portfólio. 2. Otimização Online. 3. Alocação dinâmica. I. Cristiano Hasenclever Borges, Carlos, orient. II. Fonseca Neto, Raul, coorient. III. Título.

*A Deus em primeiro lugar. Aos
meus pais, namorada e amigos
pelo apoio incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa de Pós-graduação em Ciências da Computação, a Universidade Federal de Juiz de Fora, aos professores, servidores e colegas, por este período de grande aprendizagem e compartilhamento de experiências. Em especial, agradeço aos meus orientadores e amigos Professor Carlos Cristiano Hasenclever Borges e Professor Raul Fonseca Neto pela paciência e ensinamentos que me auxiliaram a dar um grande passo na vida acadêmica.

Aos membros da banca, Professor Fabrízio Condé de Oliveira e Professora Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli, por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições que certamente enriquecerão este trabalho.

Aos meus pais, Cristina e David e minha irmã Nívea, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À minha irmã Clara, agradeço por todo zelo, incentivo, carinho, paciência e pela ajuda desde os primeiros anos de escola.

À minha namorada Rayanne, que percorreu comigo cada passo dessa trajetória, incentivando, animando e demonstrando seu carinho todos os dias.

Aos meu grande amigo e irmão, Yuri Resende Fonseca, pelo aconselhamento constante, ensinamentos e por ser uma fonte de inspiração.

Acima de tudo agradeço a Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.

*"A humildade é o primeiro
degrau para a sabedoria"*
São Tomás de Aquino

RESUMO

Desde o trabalho seminal de Harry Markowitz, em 1952, que iniciou a moderna teoria de carteiras, as estratégias de alocação de portfólio foram intensamente discutidas na literatura. Com o desenvolvimento de técnicas de otimização *online*, os algoritmos de aprendizado dinâmico se mostraram uma abordagem efetiva para construir portfólios (COVER, 1991; ARGAWAL et al., 2006). No entanto, poucos trabalhos conectam a literatura tradicional, evoluída a partir do trabalho de Markowitz (1952) com a literatura de otimização *online*, que evoluiu a partir do trabalho de Cover (1991). O principal objetivo deste trabalho é implementar técnicas de otimização convexa *online* para: (i) executar estratégias de alocação de portfólio; (ii) conectar esses algoritmos com fatores risco usados em metodologias tradicionais. Dois métodos de algoritmos *online* foram implementados e adaptados, o *Online Gradient Descendent* (OGD) e o *Online Newton Step* (ONS). Além disso, duas novas versões para o algoritmo OGD são propostas para controlar o risco em carteiras. O primeiro, busca limitar o investimento máximo para ações e, o segundo, visa controlar o β das carteiras. Ambas as estratégias foram comparadas com o *Uniform Constant Rebalanced Portfolio* (UCRP) e o *Dow Jones Industrial Index* (DJIA). Foram utilizados dados do DJIA de março de 1987 até fevereiro de 2009 com observações semanais. O algoritmo OGD apresentou o maior retorno acumulado entre as estratégias testadas. Ambos os algoritmos (OGD e ONS) apresentaram melhor desempenho do que o UCRP e DJIA ao longo do período. Além disso, o mecanismo de controle de risco proposto provou ser uma ferramenta útil para melhorar os resultados relacionados ao valor em risco (VaR) e ao valor condicional em risco (CVaR) das carteiras.

Palavras-chave: Seleção de Portfólio. Otimização *online*. Alocação dinâmica.

ABSTRACT

Since the seminal work of Harry Markowitz (1952), which initiated the modern theory of portfolios, the strategies of portfolio allocation were extensively discussed in economic literature. With the development of online optimization techniques, dynamic learning algorithms emerged as an effective approach to develop investment portfolios (COVER, 1991; ARGAWAL et al., 2006). However, there are few attempts aiming to connect the traditional literature of portfolio investment, which evolved based on Markowitz (1952) work, with the recent online methods, developed from Cover (1991). The main objective of this work is to implement online convex optimization techniques to: (i) perform strategies of portfolio allocation; (ii) couple these algorithms with risk factors used in traditional models. Two methods of online algorithms were implemented and adapted, the Online Gradient Descent (OGD) and the Online Newton Step (ONS). Besides, two new versions for the OGD algorithm are proposed in order to control risk in portfolios. The first one, seeks to limit maximum investment for stocks and, the second, aims to keep control of the β of portfolios. Both strategies were compared with the Uniform Constant Re-Balanced Portfolio (UCRP) and the Dow Jones Industrial Index (DJIA). Data from weekly observations of DJIA from March 1987 until February 2009 are used. The OGD algorithm presented the best accumulated return among all strategies. Both algorithms (OGD and ONS) performed better than the UCRP and DJIA index. Furthermore, the risk control mechanism proposed proved to be an useful tool in order to improve results related to the Value at Risk (VaR) and Conditional Value at Risk (CVaR) of the portfolios.

Keywords: Portfolio Selection. Online Optimization. Dynamic Allocation.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Fronteira Eficiente de Markowitz	25
4.1	Retorno composto dos ativos.	54
4.2	Comparativo desempenho das carteiras.	55
4.3	Evolução carteira ONS	56
4.4	Evolução carteira OGD $\eta = 0.01$	56
4.5	Evolução carteira OGD $\eta = 0.001$	57
4.6	Evolução carteira OGD $\eta = 0.001$ com limite de 25% por ativo.	60
4.7	Exemplo β <i>Microsoft</i>	61
4.8	Exemplo para a ação <i>Microsoft</i> β variante no tempo.	62
4.9	Comparação do ajuste com β fixo e β variante.	63
4.10	Evolução carteira OGD com $0 \leq \beta \leq 1.7$	64
4.11	Evolução carteira OGD com $0.75 \leq \beta \leq 1.25$	64

LISTA DE TABELAS

4.1	Resumo retornos acumulados	55
4.2	Risco portfólio ONS, DJIA, UCRP e MSFT	58
4.3	Risco portfólio OGD $\eta = 0.01, \eta = 0.001$	58
4.4	Risco portfólio OGD limitado	60
4.5	Resumo retornos acumulados	60
4.6	Risco portfólio OGD limitado e CAPM $0 \leq \beta \leq 1.7$	63
4.7	Risco portfólio DJIA e CAPM $0.75 \leq \beta \leq 1.25$	65
4.8	Resumo retornos acumulados	65
A.1	Composição DJIA - Situação em 03 de Fevereiro de 2009	74

LISTA DE SÍMBOLOS

- β parâmetro do algoritmo ONS
- β_i constante que mede as alterações em R_i
- δ parâmetro do algoritmo ONS
- η parâmetro que controla o tamanho do passo dos algoritmos EG e OGD
- λ multiplicador de Lagrange
- \mathbf{A}_t matriz que contém informação de segunda ordem para o cálculo do ONS até o período de negociação t
- \mathbf{A}_t^{-1} inversa da matriz \mathbf{A}_t
- \mathbf{b} sequência de alocações de portfólio
- \mathbf{b}^* alocação do portfólio que maximiza a riqueza
- \mathbf{b}_t alocação do portfólio até o início do período t
- \mathbf{o}_t vetor que contém informações de primeira e segunda ordem para o cálculo do ONS até o período de negociação t
- \mathbf{r}_t vetor que contém os retornos de cada um dos i ativos
- \mathbf{w}_t vetor que contém cada um dos percentuais aplicado a cada um dos ativos i
- \mathfrak{B} conjunto de soluções viáveis do algoritmo
- \mathbf{b} vetor que contém a alocação do portfólio dentro do *simplex* \mathfrak{B}_n
- \mathbf{b}^* alocação ótima dentro do *simplex* \mathfrak{B}_n

\mathbf{b}_i^ω	alocação do portfólio do <i>expert</i> ω no ativo i
\mathfrak{B}_n	<i>simplex</i> com n variáveis de decisão
Ω	número de <i>experts</i>
ω	contador dos <i>experts</i>
σ_i^2	variância do ativo i
$\sigma_{i,j}$	covariância entre dois ativos i e j
τ	auxiliar de contagem para período
Θ_t^i	informação de primeira ordem do ativo i até o período de negociação t
$\Theta_t^{i,j}$	informação de segunda ordem do ativo i com o ativo j no período de negociação t
a_t^{-ij}	elemento da matriz \mathbf{A}_t^{-1}
a_t^{ij}	elemento da matriz \mathbf{A}_t
b_{it}	percentual do portfólio aplicado no ativo i até o período de tempo t e elemento de \mathbf{b}_t
i	contador ativos
j	contador
k	contador iterações
n	número de ações
O	notação que descreve o comportamento no limite conforme os dados crescem
o_{it}	elemento i do vetor \mathbf{o}_t
p_{it}	o preço do ativo i no tempo t
R_f	Taxa de retorno do ativo livre de risco
R_m	taxa de retorno do índice de mercado
R_p	retorno esperado de um portfólio

r_{it}	retorno linear de um ativo i no tempo t
T	número de períodos / horizonte de investimento
t	contador para o período de negociação / contador para o tempo instantâneo
W_0	riqueza inicial
w_i	é o percentual do portfólio aplicado em cada ativo i
W_T	riqueza terminal
W_t	riqueza no final do período de negociação t
x_t	retorno alcançado pelo portfólio durante o período de negociação t
Y_i^{inic}	quantidade de ações de cada ativo i no tempo $t = 0$
Y_{it}	quantidade de ações do ativo i até o tempo t , após o rebalanceamento
y_{it}	quantidade de ações i negociadas (compradas ou vendidas) no período t

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCRP	Best Constant Rebalanced Portfolios
BS	Best Stock
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
CRP	Constant Rebalanced Portfolio
DJIA	Dow Jones Industrial Average Index
EG	Exponential Gradiente Algorithm
ICB	Industry Classification Benchmark
FTW	Follow-the-Winner
MLA	Meta-Learning Algorithms
MIU	Modelo de Índice Único
MV	Modelo Média-Variância
ONS	Online Newton Step
OGD	Online Gradient Descent
OPS	Online Portfolio Selection
PSP	Problema de Seleção de Portfólios
PMA	Pattern-Matching Approaches
SP500	Standard & Poors 500 dataset
SCR	Successive Constant Rebalanced Algorithm
UCRP	Uniform Constant Rebalanced Portfolio

UP Universal Portfolios Algorithm

VL Value Line

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	TRABALHOS RELACIONADOS	17
1.2	MOTIVAÇÃO	18
1.3	OBJETIVOS	19
1.4	ORGANIZAÇÃO	20
2	MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO	21
2.1	MODELO MÉDIA-VARIÂNCIA	21
2.2	MODELO DE ÍNDICE ÚNICO E CAPM	26
2.3	MEDIDAS DE RISCO EM SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS	33
2.3.1	Medidas Coerentes de Risco	36
3	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS <i>ONLINE</i>	38
3.1	OTIMIZAÇÃO CONVEXA <i>ONLINE</i>	38
3.2	<i>CONSTANT REBALANCED PORTFOLIO</i>	40
3.3	DEFINIÇÃO FORMAL DO MODELO	42
3.4	APLICAÇÕES	43
3.4.1	<i>Universal Portfolios</i>	43
3.4.2	<i>Successive Constant Rebalanced Algorithm</i>	44
3.4.3	<i>Exponential Gradient Algorithm</i>	45
3.4.4	<i>Online Gradiente Descent</i>	46
3.4.5	<i>Online Newton Step</i>	48
4	ANÁLISE EXPERIMENTAL E RESULTADOS	51
4.1	DADOS UTILIZADOS	53
4.2	RESULTADOS	54
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	66
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICES	72

1 INTRODUÇÃO

O problema de seleção de portfólios (PSP) é um processo decisório no qual o investidor deve alocar uma quantidade de riqueza em um conjunto finito de ativos dentro de um horizonte de tempo. Para solucionar o problema, o investidor decide quanto de sua riqueza irá destinar para cada um dos ativos disponíveis no mercado. Cada ativo representa uma oportunidade de investimento distinta e a decisão realizada para uma alocação é um portfólio. Neste problema, o investidor busca alocar seu dinheiro em um mercado de ações de maneira a obter uma boa relação entre o retorno esperado e o risco. Em geral, carteiras com maior nível de retorno estão associadas a maiores riscos.

A escolha do portfólio ótimo é um problema tão antigo quanto o próprio mercado de ações. Entretanto, foi a partir do trabalho de Markowitz (1952) que esta questão se tornou um problema matemático. A moderna Teoria de Carteiras, introduzida por Markowitz, apresentou o risco e a diversificação do portfólio como fatores inerentes às decisões de investimento, em oposição ao senso comum da época, que era a concentração dos recursos no ativo de maior retorno esperado.

O problema de seleção de portfólios pode ser modelado através de diferentes tipos de funções objetivo, a depender do interesse do investidor. O enfoque pode ser minimização de risco, maximização de retornos ou ainda ajuste do risco em relação a alguma medida performance.

Tobin (1958) e Sharpe (1964) propuseram medidas para ajuste de performance considerando a alocação do portfólio como um problema de período único. É assumido um modelo estatístico para o preço dos ativos e uma função paramétrica é adotada como função objetivo, seja ela a riqueza do portfólio ou função de aversão a risco. Desta forma, baseando-se na informação disponível até o momento presente, estima-se os parâmetros necessários e a otimização é resolvida de modo *offline*.¹

Trabalhos como Mossin (1968); Fama (1970) e Hakansson (1974) consideram uma perspectiva multi-período, mas segundo Dochow (2016), tecnicamente, funcionam apenas

¹Classificamos como otimização *offline* um procedimento que opera sobre um conjunto de entrada que é previamente conhecido, ou seja, têm-se previamente a informação completa da instância sobre a qual o algoritmo irá operar. Em contrapartida, classificamos como otimização *online* procedimentos em que as entradas chegam uma a uma e a cada nova entrada o algoritmo deve tomar uma decisão sem saber quais serão as próximas, isto é, operam sobre um conjunto de entradas que não é previamente conhecido. Falaremos com mais detalhes sobre este tema no Capítulo 3.

como uma sequência de soluções para problemas de período único. Assim, as decisões ótimas para cada período de negociação diferem apenas devido à mudança na estimativa dos parâmetros que se baseiam em conjuntos de informação de tamanhos distintos.

De acordo com Li e Hoi (2015), nas últimas décadas, abordagens baseadas em técnicas de aprendizado de máquina têm sido intensamente aplicadas, tornando-se uma área de pesquisa importante e ativa, por oferecer a possibilidade de definir estratégias *online* de investimento que permitem maximizar a riqueza sem a utilização de pressupostos estatísticos sobre o preço dos ativos.

Os algoritmos de otimização *online* se baseiam no preço atual dos ativos para selecionar a alocação futura do portfólio, o que significa que as informações sobre o preço dos ativos chegam sequencialmente e a decisão de alocação é realizada de imediato.

1.1 TRABALHOS RELACIONADOS

O uso de aprendizado de máquina em problemas de seleção de portfólios se fundamenta em trabalhos como Kelly (1956); Bell e Cover (1980); Bell e Cover (1988) e Algoet e Cover (1988), estes mostraram que um portfólio constante reequilibrado para um alocação específica (*Constant Rebalancing Portfolio*), pode ser mais vantajoso do que selecionar uma carteira baseada em uma medida de desempenho e mantê-la durante todo período. Além disso, Cover (1991) demonstrou que existe uma estratégia de alocação constante que proporciona o maior crescimento da riqueza a longo prazo (*Best Constant Rebalancing Portfolio - BCRP*).

A maior parte dos algoritmos desenvolvidos na área de seleção de portfólios *online* buscam estratégias de investimentos que minimizem o a distância entre o portfólio atual e alguma estratégia de referência, tarefa realizada através da minimização de uma função de custo conhecida como função de arrependimento (*Regret*). Segundo Li e Hoi (2014), sob o prisma do aprendizado de máquina *online*, essas estratégias podem ser agrupadas dentro de três categorias, *Follow-the-Winner* (FTW), *Pattern-Matching Approaches* (PMA) e *Meta-Learning Algorithms* (MLA), de acordo com a abordagem utilizada.

Este trabalho se restringiu em analisar algoritmos baseados em estratégias classificadas como *Follow-the-Winner* pois segundo Hazan et al. (2016), estes são mais aplicáveis ao contexto de seleção de portfólios. Basicamente, os algoritmos que utilizam essa estratégia visam acompanhar o BCRP aumentando o peso dos ativos que concentram maior

retorno. Cover e Ordentlich (1996) propuseram o algoritmo *Weighted Universal Portfolio* que possui *Regret* $O(n \log T)$, e complexidade de tempo $O(T^n)$, onde n é a quantidade de ações e T o número de períodos analisados.

Helmholtz et al. (1998) introduziram o algoritmo *Exponential Gradient Algorithm*, uma variação do método de otimização pelas descidas do gradiente, que possui complexidade de processamento linear por ativo mas com *Regret* $O(\sqrt{T})$.

Com uma estratégia similar a utilizada por Cover (1991), o algoritmo *Successive Constant Rebalanced Algorithm* proposto por Gaivoronski e Stella (2000), discretiza o conjunto de soluções viáveis em um *simplex*² selecionando de maneira iterativa os melhores portfólios a cada período de negociação.

Zinkevich (2003) propuseram o *Online Gradient Descent* que utiliza informação de primeira ordem, ou seja, derivadas primeiras, e, portanto, tentam aproximar as funções através de funções lineares, alcançando *Regret* $O(G^2 n \sqrt{T})$. Agarwal et al. (2006) e Hazan (2012) utilizam informações de segunda ordem do retorno atual de cada um dos ativos explorando assim a curvatura das funções de recompensa. Esta informação adicional permite que o algoritmo *Online Newton Step* obtenha *Regret* $O(\log T)$.

1.2 MOTIVAÇÃO

O problema de seleção de portfólios pode ser modelado através de diferentes tipos de funções objetivo, dependendo do interesse do investidor. O enfoque pode ser minimização de risco, maximização de retornos ou ainda ajuste do risco em relação a alguma medida de desempenho.

Segundo Dochow (2016), existem duas comunidades que diferem, consideravelmente, sobre a modelagem deste problema, a saber: (i) a comunidade dos pesquisadores em finanças, influenciados, principalmente, pelo trabalho de Markowitz (1952), que se concentrou no estudo do risco de mercado, avaliando o desempenho através de ferramentas estatísticas; (ii) a comunidade dos pesquisadores em aprendizado de máquina, influenciados pelo trabalho de Cover (1991), baseados no conceito de análise competitiva, se concentram na maximização da riqueza no final do horizonte de investimento e evitam pressupostos estatísticos regulares.

²Um visão mais detalhada sobre a técnica de decomposição simplicial pode ser encontrada em Greenberg (2018).

Dochow (2016) classifica a interação entre as duas linhas, no que tange aos trabalhos na literatura, como baixa ou inexistente, e aponta esta falta de integração como a razão pela qual a análise da estrutura de risco em carteiras construídas através de algoritmos de otimização *online* ainda se encontrar como uma questão em aberto.

Neste sentido, este trabalho tem como motivação contribuir para uma visão mais ampla e geral das duas linhas, na medida em que propõe combinar características fortes do método de seleção de carteiras desenvolvidos pela comunidade de finanças, que consideram aspectos de risco, com métodos *online* que são por natureza não paramétricos, com alto poder de adaptação e eficientes computacionalmente.

Uma abordagem intuitiva seria incorporar uma medida de risco dentro função *Regret* de modo a considerá-lo na seleção do portfólio. No entanto, conforme demonstrado por Even-Dar et al. (2006), este tipo de modelagem não é possível no contexto de otimização *online*. Assim, a solução proposta é a de utilizar o procedimento padrão de minimizar a função de custo *Regret* em relação ao BCRP e aproveitar a etapa de projeção, normalmente usada em algoritmos *online*, para controlar o risco das carteiras construídas.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é a adaptação e utilização de métodos de otimização *online* em portfólios de ações, sendo descrito através de três etapas principais. Primeiramente, implementação de técnicas de otimização Convexa *Online* para executar estratégias de alocação de portfólio, testando os algoritmos *Online Gradient Descendent* (OGD) e *Online Newton Step* (ONS), conhecidos por serem computacionalmente eficientes.

Em uma segunda etapa, avaliar o desempenho das carteiras construídas com uso de técnicas de Otimização Convexa *Online*, comparando-as com o *Uniform Constant Rebalanced Portfolio* (UCRP), *Dow Jones Industrial Average Index* (DJIA) e *Best stock*.

Por último, propor e verificar a influência da inserção de restrições que sirvam para controlar a estrutura de risco do portfólio de forma a conectar a literatura de otimização *online* com a teoria tradicional de portfólios. Para isto, duas estratégias de incorporar risco na construção dos portfólios serão consideradas. A primeira, através de regras empíricas, como limite máximo de investimento por ação ou número mínimo de ações no portfólio. A segunda estratégia incorporando a composição do risco na carteira através do modelo CAPM (calculando o β) das carteiras, e limitando esse β a uma faixa pré-estabelecida de

valor

Essa última etapa será a principal contribuição desse trabalho para o desenvolvimento da área, visto que até o momento o autor desconhece artigos que tenham feito essa conexão.

1.4 ORGANIZAÇÃO

Essa dissertação está organizada em 5 capítulos. Após o capítulo de introdução, dada a característica multidisciplinar do trabalho, a fundamentação teórica dos modelos de seleção de portfólios é dividida entre os capítulos 2 e 3. No Capítulo 2 discute-se conceitos fundamentais da teoria de seleção de portfólio e medidas coerentes de risco. No Capítulo 3 conceitos de otimização convexa *online* são apresentados, a estratégia de investimento *Constant Rebalanced Portfolio* é definida e são apresentados algoritmos de otimização convexa *online* aplicáveis a seleção de carteiras. No Capítulo 4 o estudo experimental é realizado, as bases de dados do mercado americano de ações avaliadas, a performance das diferentes carteiras montadas pelos algoritmos é comparada com *benchmarks* utilizados no mercado de ações, avaliamos estrutura de risco dos portfólios montados pelo OGD utilizando as duas metodologias de projeção propostas no trabalho. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões do estudo, são realizadas algumas considerações finais e sugeridas diretrizes para o desenvolvimentos de trabalhos futuros.

2 MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

Nesta seção serão apresentados modelos bem estabelecidos para seleção de portfólio. O objetivo será introduzir conceitos iniciais da Teoria de Carteiras, os quais se baseiam em diferentes suposições sobre o comportamento dos investidores e sobre o mercado. Enfoque-se no detalhamento do modelo de Média-Variância e de Índice Único pois estes resumem os conceitos fundamentais de risco ajustado a performance. Maiores detalhamentos sobre o tema podem ser consultados nos trabalhos de Elton e Gruber (1997), Chapados (2011) e Meucci (2009).

2.1 MODELO MÉDIA-VARIÂNCIA

A diversificação de portfólio foi abordada, pela primeira vez, como um problema matemático pelo economista Harry Max Markowitz. Em seu artigo Markowitz (1952), propôs o modelo conhecido como Média-Variância (MV). Neste trabalho, Markowitz refuta a premissa de que o investidor busca somente maximizar a taxa de retorno do investimento, demonstrando que essa não era capaz de explicar o motivo pelo qual os investidores diversificam suas carteiras.

O modelo MV se baseia na hipótese de que as variáveis de interesse do investidor são o retorno esperado¹ e o risco (variância dos retornos esperados) sendo aquele um fator desejável e este um fator indesejável. Considerando que investidores estão dispostos a incorrer em um risco mais elevado quando os ganhos também forem maiores, o método permite a obtenção de carteiras com variância mínima para cada nível de retorno esperado.

Markowitz mostra que o risco de uma combinação de ativos não é uma simples média ponderada do risco de ativos individuais e que a variância da combinação de dois ativos pode ser menor do que a variância de qualquer um dos ativos isoladamente. Deste modo, é possível encontrar um portfólio com risco menor e um mesmo nível de retorno aplicando o princípio da diversificação dos investimentos.

O modelo de média e variância de Markowitz pode ser definido em termos de retornos lineares. O retorno linear de um ativo i no tempo t (r_{it}) pode ser calculado a partir de

¹Em Estatística, o Valor Esperado de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada evento da experiência multiplicada pelo seu valor. Se todos os eventos tiverem igual probabilidade o valor esperado é a média aritmética. O retorno esperado nada mais é do que a média aritmética dos retornos.

seus preços (p_{it}) como:

$$r_{it} = \frac{p_{it} - p_{i(t-1)}}{p_{i(t-1)}} \quad (2.1)$$

O retorno de um portfólio de investimento pode ser representado pela média ponderada do retorno de cada um dos ativos individuais. Para compor o portfólio existem diversos investimentos disponíveis, associa-se a cada um dos n investimentos um retorno esperado μ_i , calculado através da média dos retornos obtidos ao longo do tempo. A média de cada um dos ativos de um portfólio é representado pelo vetor:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

O peso aplicado a cada investimento i é a fração investida nesse ativo, denotada por w_i . A fração aplicada em cada um dos n ativos que compõe uma determinada carteira pode ser representada de maneira vetorial como:

$$\mathbf{w}_t = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Assim, o retorno R e o retorno esperado $E[R]$ de um portfólio com n ativos são dados, respectivamente, por:

$$R = \sum_{j=1}^n w_j r_j \quad (2.4)$$

$$R_p = E[R] = \sum_{j=1}^n w_j \mu_j = \mathbf{w}_t^\top \mu \quad (2.5)$$

No modelo de Markowitz, a avaliação do risco é dada pela variância² do portfólio σ^2 ,

²Do ponto de vista do modelo matemático, quando se deseja encontrar um portfólio de risco mínimo, analisar a variância ou sua raiz quadrada, o desvio padrão, levará ao mesmo portfólio.

que mede a variância do retorno esperado. Cada ativo contribui tanto para compor o retorno esperado quanto o risco total do portfólio.

Um dos principais pontos levantados por Markowitz é que a variância de um ativo isoladamente torna-se diferente quando este ativo é adicionado a uma carteira. Isso ocorre devido a existência de correlação entre as movimentações dos diversos ativos financeiros. Investimentos com elevado grau de correlação positiva oscilam da mesma forma diante de adversidades econômicas. Em contraste, ativos com correlação negativa terão movimentação oposta em cenários bons e ruins, de tal forma que a perda em um ativo é compensada pelo ganho em outro. Deste modo, busca-se a diversificação dos ativos no portfólio, com o objetivo de reduzir a dispersão obtida com o investimento em um dos ativos por si só.

A parcela do risco que pode ser eliminada através da diversificação é denominada risco próprio, ou não sistemático (idiossincrático), em oposição, a parcela do risco que se mantém inalterada, não importando o número de ativos que se inclua no portfólio, é chamada de risco de mercado ou não diversificável.

Em seu artigo seminal, Markowitz (1952) destacou a importância da diversificação de um portfólio e mostrou que, em portfólios envolvendo um grande número de ativos, a variância perde sua importância quando comparada com as covariâncias.

A covariância entre dois ativos i e j ($\sigma_{i,j}$) é uma medida de como os retornos destes dois ativos se movem em conjunto. Assim, para mensurar o risco de um portfólio é levado em consideração a variância (σ_i^2) de cada investimento e a covariância entre os pares de investimentos ($\sigma_{i,j}$), que são obtidos a partir da série histórica de retornos de cada ativo i . Assim, para cada ativo i , têm-se T observações históricas de retorno, onde t corresponde a medida de tempo utilizada na análise, a depender do tipo de dado disponível. A série histórica dos retornos r_{it} pode ser representada matricialmente como:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1T} & \cdots & r_{nT} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Com base na série histórica, podemos definir a covariância entre dois ativos que compõem o portfólio através da equação:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_1^T (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j) \quad (2.7)$$

Para um mesmo investimento, covariância é idêntica a variância:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_1^T (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j);$$

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i^2 \tag{2.8}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_1^T (r_{it} - \mu_i)^2$$

As variâncias e covariâncias dos n ativos podem ser reunidas em uma matriz Σ da seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Onde o elemento na posição i, i é a variância do ativo i e o elemento de posição i, j , para $i \neq j$, é a covariância entre o ativo i e j . A variância do portfólio é dada por:

$$\sigma^2 = Var[R] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j} \tag{2.10}$$

Dado o conjunto de todas as possíveis carteiras que podem ser formadas a partir de n ativos, a carteira que possui retorno máximo não é a de menor variância, assim o investidor deverá dispensar retornos mais elevados em prol de um menor risco ou incorrer em maior risco caso deseje maior retorno esperado. Desse modo, para cada nível de retorno esperado, calcula-se a carteira de menor variância, que pode ser encontrada resolvendo o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\{w_1, w_2, \dots, w_n\}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mu \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, é possível encontrar a fração a ser aplicada em cada ativo que fornece a carteira ótima.

$$\mathbf{w}^* = (\lambda \Sigma)^{-1} E[R] \quad (2.12)$$

Onde o fator λ é o multiplicador de Lagrange, que nos fornece o incremento no risco do portfólio que o investidor estaria disposto a aceitar dado o aumento marginal do retorno. Através dessa solução, variando os valores de R_p , é possível representar em um espaço bidimensional Variância x Retorno Esperado todas as carteiras geradas, que terá o formato de uma hipérbole. Na parte superior dessa hipérbole estão as carteiras com menor risco para cada nível de retorno exigido, essa linha é chamada de fronteira eficiente. A Figura 2.1 apresenta a Fronteira Eficiente de Markowitz:

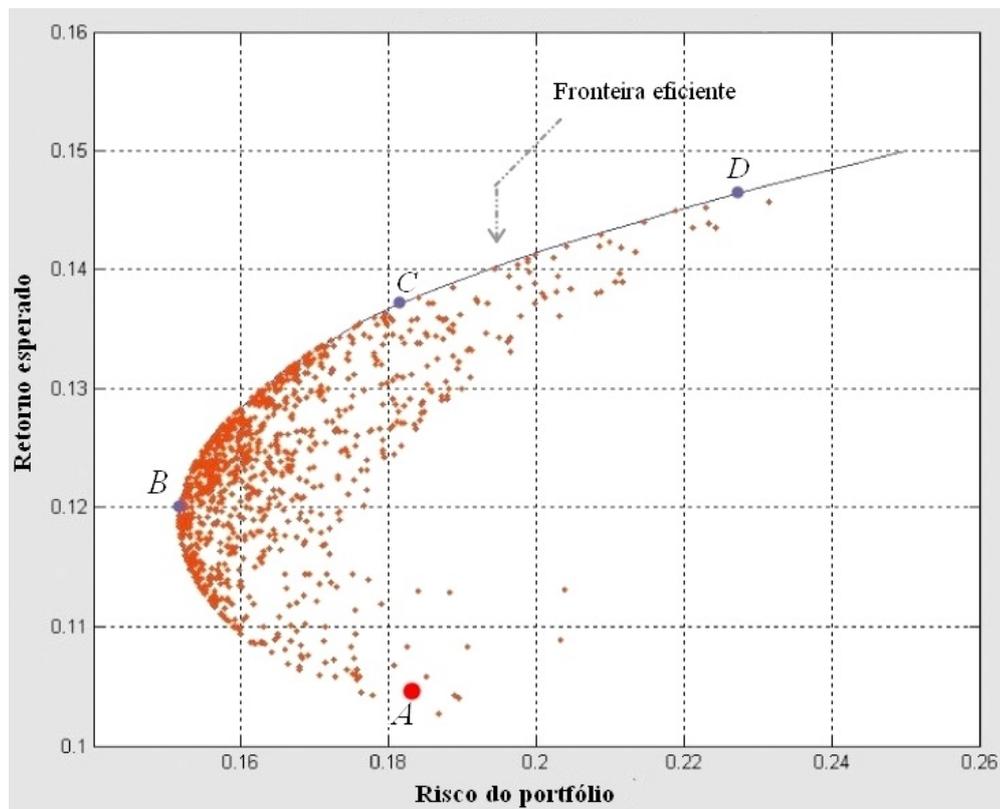


Figura 2.1: Fronteira Eficiente de Markowitz

Na figura 2.1, a fronteira eficiente está definida na curva que contém B, C e D, ou

seja, da carteira de variância mínima global até a carteira de máximo retorno. Toma-se como exemplo a comparação entre os portfólios A e C, embora estejam praticamente no mesmo nível de risco, o portfólio C apresenta uma performance consideravelmente superior. Desse modo, o portfólio A é dito ineficiente, pois existem carteiras que apresentam maior retorno para o mesmo nível de risco. De maneira análoga, portfólios que se encontram internamente à curva também são considerados ineficientes. O problema do portfólio eficiente é encontrar todas as carteiras situadas ao longo dessa fronteira.

Conforme já explicitado, para definir a fronteira eficiente é preciso determinar o retorno esperado $E[R]$ e a variância σ^2 de cada carteira. A equação 2.5 evidencia que para calcular R_p é preciso obter estimativa da variância σ_i^2 de cada um dos ativos a serem incluídos na carteira. Da equação 2.10 temos que além da estimativa da variância de cada ativo é preciso determinar estimativas da correlação entre cada possível par de ativos considerado. Se n é o número total de possíveis ativos analisados, devem ser calculadas então n variâncias e $(n(n-1)n)/2^3$ correlações. É necessário considerar também todas as possíveis composições de porcentagens de aplicações aplicada em cada ativo, o que tornou a implementação do modelo de Média-Variância inviável, tendo em vista que este foi apresentado em 1956. Nos anos que seguiram a publicação do artigo de Markowitz, foram desenvolvidos modelos que buscaram a simplificação da quantidade e do tipo de dados necessários para efetuar a análise, bem como a simplificação dos procedimentos computacionais necessários para o cálculo das carteiras ótimas. Um dos modelos apresentados na literatura, que teve o intuito de simplificar a metodologia proposta foi o modelo de Índice Único.

2.2 MODELO DE ÍNDICE ÚNICO E CAPM

Grande parte da pesquisa sobre otimização de carteiras concentrou-se no desenvolvimento de métodos de implementação da teoria proposta por Markowitz. Bernstein (1993) cita uma aplicação dessa teoria realizada por Sharpe (1962) na qual foi utilizado o melhor computador disponível na época, o IBM 7090, que necessitou de 33 minutos para realizar a otimização entre 100 ativos a um custo de US\$ 300, o que tornava economicamente inviável a realização de demais simulações.

³O número total de correlações distintas é $n(n-1)$, mas como a correlação de $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ consideramos $(n(n-1)n)/2$ correlações.

Embora esteja longe de ser uma limitação para os computadores disponíveis atualmente, as dificuldades de se implementar o modelo de Média-Variância por conta da tecnologia disponível naquela época levaram Sharpe (1963) a desenvolver um método simplificado, chamado Modelo de Índice Único (MIU). O modelo parte da observação empírica de que quando o mercado sobe, a maioria das ações tende a aumentar de preço e, quando o mercado cai, a maioria das ações vê seu preço diminuir. Sharpe propõe então que o retorno dos ativos não estariam correlacionados entre si, mas sim com um índice geral do mercado acionário. Elton e Gruber (1997) derivam o modelo de Sharpe tendo como ponto de partida a equação básica para o retorno de um ativo:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m \quad (2.13)$$

Onde a_i é a parte do ativo i que é independente do desempenho do mercado, considerada uma variável aleatória; R_m ⁴ é a taxa de retorno do índice de mercado, também considerada uma variável aleatória; β_i é a constante que mede as alterações em R_i dada uma mudança em R_m . A equação 2.13 decompõe o retorno de cada ativo i como a soma de dois termos, sendo uma parte determinada por movimentações do mercado e outra por características individuais do ativo, sendo portanto independente do mercado. Sharpe subdivide o componente que independe do mercado a_i entre seu valor esperado α_i e um componente aleatório e_i . A equação do retorno de cada ativo i pode então ser escrita como:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \quad (2.14)$$

No modelo de índice único, diferentes ativos se movimentam apenas através de uma resposta comum ao mercado. Para modelar o problema desta forma, Sharpe supõe que:

1. o componente e_i independente de e_j , para todos os pares de ativos $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, para todo $i \neq j$. Formalmente:

$$COV(e_i, e_j) = \frac{1}{T}(e_i e_j) = 0 \quad (2.15)$$

⁴Um índice de ações é um indicador do desempenho de uma carteira teórica de ações. Os índices têm por finalidade servirem como indicadores do comportamento médio do mercado ou de um segmento econômico específico, como é o caso dos índices restritos e setoriais. É o referencial que indica se o mercado está em alta ou em baixa. Cada bolsa monta os seus próprios índices, formados por um conjunto de ativos. Os dois mais importantes índices nos mercados de ações global são o índice *Dow Jones* e o S&P 500.

2. as variáveis aleatórias R_m e e_i são não correlacionadas, de modo formal isso significa que:

$$COV(e_i, R_m) = \frac{1}{T}(e_i)(R_m - \mu_m) = 0 \quad (2.16)$$

3. o termo e_i tem valor esperado zero.

A partir destas simplificações, Sharpe (1963) deriva as equações⁵ do retorno esperado, variância do retorno e covariância entre ativos i e j , que são dadas respectivamente por:

$$E(R_i) = \mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_m \quad (2.17)$$

onde μ_m é o retorno esperado do mercado.

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2 \quad (2.18)$$

onde σ_m^2 é a variância do mercado.

$$COV_{i,j} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \quad (2.19)$$

A partir das expressões derivadas por Sharpe e retomando-se a equação fundamental do retorno esperado de qualquer carteira (Equação (2.5), substituindo-se a expressão (2.17) em (2.5) obtemos:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i + \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \mu_m \quad (2.20)$$

De maneira análoga, retomando-se a equação fundamental para variância de qualquer portfólio (Equação (2.10) e substituindo-se pelas expressões (2.18) e (2.19), teremos:

$$\sigma^2 = Var[R_p] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{e_i}^2 \quad (2.21)$$

Desta forma, o retorno esperado e o risco de uma carteira podem ser calculados desde que se tenha uma estimativa de β_i , α_i e σ_{e_i} para cada um dos ativos, além de estimativas

⁵Uma demonstração mais aprofundada dessas expressões pode ser encontrada nos trabalhos Fama (1968) e Elton e Gruber (1977).

do retorno esperado (μ_m) e da variância (σ_m^2) do mercado. Assim, não há necessidade de que sejam realizadas estimativas diretas da movimentação conjunta dos ativos, mas sim de cada ativo com o índice de mercado. Portanto, o número de estimativas necessárias é de $3n + 2$, o que representa uma redução significativa de estimações quando comparamos com o modelo de Média-Variância.

Elton et al. (2009) definem o beta β_P e o alfa α_P de um portfólio como uma média ponderada dos β_i e α_i de cada ativo individual. Assim:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$$

$$\alpha_P = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$$

Assim, as equações (2.20) e (2.21) podem ser escritas da seguinte maneira, respectivamente:

$$E[R_p] = \alpha_P + \beta_P \mu_m \quad (2.22)$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{e_i}^2 \quad (2.23)$$

De maneira trivial, uma carteira pode ser diversificada simplesmente escolhendo uma quantidade de ativos n suficientemente grande e dividindo o capital de maneira uniforme entre os ativos, ou seja, fazendo:

$$w_i = \frac{1}{n}, \forall_i$$

O risco dessa carteira seria escrito como:

$$\sigma_p^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_{e_i}^2 \right) \quad (2.24)$$

Formalmente, quando o limite de $n \rightarrow \infty$ a importância da parcela proveniente dos riscos próprios dos ativos tende a zero. Por outro lado, constata-se que existe uma parcela remanescente de risco que não pode ser eliminada pela diversificação, pois está ligada ao

índice de mercado β_i ⁶. Essa parcela do risco que não pode ser diversificada é denominada risco sistemático (EVANS; ARCHER, 1968).

Das equações do modelo de índice único mostradas anteriormente, é importante notar que tanto a covariância dos ativos quando o próprio nível de risco das carteiras, é simplesmente combinações lineares ou produtos dos β individuais. Tal propriedade será fundamental na elaboração de algoritmos *Online* que considerem o risco em sua formulação. Essas propriedades serão exploradas na etapa de metodologia do trabalho.

O *Capital Asset Price Model* (CAPM) de Sharpe (1964) e Lintner (1965) é equivalente ao modelo de índice único quando supõem-se que o fator comum aos ativos financeiros são os excessos de retorno (ou perdas) do mercado em relação a taxa livre de risco. O intercepto do modelo é simplesmente a taxa livre de risco. Sob essas hipóteses e as hipóteses econométricas do modelo de índice único, temos então o modelo CAPM.

De maneira analítica, dado um portfólio c e supondo um portfólio p com w_f aplicado na taxa livre de risco e $w_c = 1 - w_f$ aplicado no portfólio c , teremos:

$$E[R_p] = w_f R_f + (1 - w_f)E(R_c) \quad (2.25)$$

$$\sigma_p = (1 - w_f)\sigma_c \quad (2.26)$$

Onde $E[R_p]$ e σ_p representam, respectivamente, o retorno esperado e o desvio-padrão do portfólio. Através das equações 2.25 e 2.26, podemos escrever a relação linear entre o retorno esperado da carteira e o risco a ela associado como:

$$E[R_p] = R_f + \left(\frac{E(R_c) - R_f}{\sigma_c} \right) \sigma_p \quad (2.27)$$

$$E[R_i] - R_f = \beta_i (E(R_m) - R_f) \quad (2.28)$$

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} \quad (2.29)$$

Onde $E(R_m)$ é o retorno esperado da carteira de mercado e R_f é a taxa de retorno do ativo livre de risco.

⁶Medida de sensibilidade do ativo i a movimentos do mercado

Para estimar então o β de determinado ativo, basta que o econometrista proceda com uma regressão entre os retornos de determinado ativo, utilize a taxa livre de risco, normalmente o *yield* de um ano para o mercado americano, e observe os retornos que aproximam o mercado, sendo o S&P500 normalmente utilizado. Naturalmente existem críticas ao modelo, sendo a que merece maior destaque a sensibilidade do β em relação ao período de estimação. É razoável supor que o risco de determinada empresa mude ao longo do tempo, e que essa percepção dos investidores seja muito difícil de prever.

Para incorporar esse aspecto, alguns autores propõem o uso de modelos estruturais com o β sendo uma variável latente no tempo. Isto é, não sendo observado diretamente e precisando ser estimado (CARMONA, 2014). Para estimar modelos estruturais desse tipo, uma ferramenta amplamente utilizada é a de filtros de Kalman, onde sob certas hipóteses de normalidade das observações é possível propor uma estrutura para a dinâmica do β dos ativos e extrai-la com algoritmos de otimização (DURBIN; KOOPMAN, 2012). O procedimento está descrito na metodologia do trabalho.

A principal razão por considerar risco nesse trabalho, é que os algoritmos de otimização *online* olham somente para o retorno das carteiras, mas naturalmente a decisão de investimento em um ativo não está relacionada somente ao retorno total obtido, há de se avaliar o risco a ele relacionado, um vez que, é a combinação desses dois fatores que exercem efeito sobre o valor do ativo.

Essa relação entre o retorno alcançado *versus* risco incorrido pode ser estendida para avaliação do desempenho de carteiras. Para analisar o seu desempenho, torna-se necessário comparar a carteira em questão com outras alternativas disponibilizadas no mercado. Até meados de 1950, o consenso era o de que o desempenho deveria ser avaliado pelo retorno obtido em um período, sem que houvesse um ajuste pelo risco. Estudos sobre a relação risco e retorno nos anos de 1960 contribuíram para o desenvolvimento do *Capital Asset Price Model* (CAPM), proposto por Sharpe (1964), e em artigos relacionados por Treynor (1965), Lintner (1965) e Mossin (1966).

A relação entre o retorno e o risco no CAPM, existente na relação entre o retorno de mercado e o do ativo objeto no cálculo do beta (β), construiu a base que estruturou a teoria de análise de investimentos e, mais especificamente, os métodos de avaliação de desempenho.

Sharpe (1966) propôs um indicador de desempenho de portfólios denominado Índice

de Sharpe (IS), que ajusta o retorno ao risco. O IS é calculado pela razão entre prêmio pelo risco do portfólio e o seu desvio padrão, refletindo então o excesso de retorno por unidade de risco total. Geometricamente, considerando um plano bidimensional, onde o desvio padrão do portfólio (σ_p) é representado no eixo das abscissas e seus retornos (R_p) no eixo das ordenadas, o IS é igual à inclinação da reta que liga a posição do portfólio à taxa livre de risco⁷. O índice de Sharpe é definido como:

$$IS = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (2.30)$$

Onde R_p é o Retorno do portfólio, R_f é a taxa livre de risco e σ_p é o desvio padrão do portfólio.

O IS indica qual a remuneração da carteira por unidade de risco assumido, deste modo, quanto maior o índice calculado, maior é a eficiência. Mantidos os mesmos critérios de análise entre diferentes carteiras, como período de tempo e número de dados, o IS é utilizado como ferramenta de apoio na tomada de decisão de investimento entre diferentes carteiras, sendo amplamente utilizado na avaliação de fundos de investimento dado sua facilidade de implementação e simplicidade.

Apesar da larga utilização do modelo proposto por Sharpe, este apresenta algumas restrições que devem ser consideradas em sua aplicação seja para seleção ou classificação de investimentos. A primeira restrição deriva do fato de que cálculo do IS não incorpora informações da correlação entre os ativos, não sendo sua utilização indicada quando se deseja analisar a inclusão ou exclusão de novos ativos em portfólios nos quais já foram incorporados ativos com risco.

O modelo IS se baseia no retorno e risco esperados (*ex-ante*) e retorno não-realizado (*ex-post*). Tendo em vista as dificuldades de se estimar os valores esperados de maneira confiável, surge então uma segunda restrição, de origem estatística, razão pela muitas implementações utilizam estatísticas passadas para avaliar o IS. Nesse caso, o especialista deve determinar o tamanho da série utilizada de maneira a obter certo nível de confiança na estimação.

Segundo Sharpe (1994), seu índice serve como ferramenta para avaliação de uma es-

⁷Sharpe (1964) define a taxa livre de risco apenas como “preço do tempo, ou taxa pura de juros”. Silveira et al. (2002) definem o conceito teórico de ativo livre de risco como aquele em que o investidor sabe exatamente o valor que receberá ao final do prazo de investimento, sem possibilidades de não pagamento (*default*). Ainda segundo Silveira et al. (2002), na prática, no mercado brasileiro, uma possível aproximação para a taxa livre de risco seria o Certificado de Depósito Interbancário (CDI).

tratégia de investimento zero, correspondente ao retorno da arbitragem entre algum *benchmark* e o portfólio que está sendo avaliado. Assim, o IS pode ser interpretado como a arbitragem entre a taxa de juros livre de risco e o portfólio avaliado.

2.3 MEDIDAS DE RISCO EM SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS

Uma das questões centrais no processo de seleção de portfólio é a escolha de uma *medida de risco* adequada para mensurar a variabilidade associada a uma carteira. Essa medida, portanto, deve ser capaz de capturar os efeitos dos diversos fatores que induzem risco à posição do investidor, tarefa que nem sempre pode ser realizada pela análise da dispersão da distribuição dos retornos.

A importância da medida de risco no problema de seleção de portfólios torna necessário, neste momento, uma breve conceituação. Artzner et al. (1999) definem *risco* como um conceito relacionado com a variação do valor futuro de uma carteira, um vez que apenas valores no futuro estão sujeitos a incertezas relacionadas a oscilações do mercado. A medida de risco deve ser capaz de capturar a variabilidade associada ao valor futuro de um portfólio mantido pelo investidor em um período qualquer e não deve servir somente para que o investidor determine o nível máximo de risco que deseja ocorrer (ARTZNER et al., 1999).

Neste sentido, retornando ao modelo de Média-Variância, algumas restrições podem ser identificadas. Fabozzi et al. (2007) destacam que o uso de uma medida de dispersão simétrica em torno de um valor fixado penaliza da mesma forma desvios positivos e negativos em relação a este valor, acarretando na punição tanto de retornos abaixo do valor esperado, que não são desejados pelo investidor, quanto aqueles acima desse valor, que certamente são objeto de interesse. Nesta mesma linha, Jobson e Korkie (1981) enumeram dois pontos onde o modelo pode falhar:

1. Não propõe uma forma segura de estimação para a média e a variância do retorno dos ativos; e
2. As previsões da média e variância do retorno da carteira não são realizadas de forma segura.

O risco sobre o retorno pode ser tratado como uma variável aleatória, Markowitz utiliza o segundo momento da distribuição, a variância do retorno, como indicador para

definir o grau de exposição ao qual o ativo está submetido. Jondeau e Rockinger (2006) afirmam que somente quando se está trabalhando com funções de utilidade particulares e pouco aderentes à realidade é que os momentos de alta ordem da distribuição podem ser desconsiderados. Samuelson (1970) e Rubinstein (1973) afirmam que para considerar a simplificação dos momentos de ordem superior na seleção de carteiras, pelo menos uma das condições abaixo deve ser obedecida:

1. Os retornos seguem uma distribuição normal ou a função de utilidade do investidor é quadrática;
2. A derivada da função de utilidade é zero após o segundo momento; e
3. A variância da distribuição é zero.

Paralelamente, Fishburn (1977) propõe um modelo que considera somente o perfil da cauda esquerda da distribuição para o cálculo dos momentos, assim somente retornos inferiores ao valor esperado são empregados no cálculo do risco. Nessa mesma linha, outra medida de risco amplamente utilizada pelo setor financeiro é o VaR (*Value at Risk*). O VaR é a avaliação da potencial máxima perda que um investidor estaria exposto em um dado horizonte de tempo, para um intervalo de confiança especificado (α nível de confiança), ou seja, tenta resumir em apenas um número a perda máxima esperada dentro de um horizonte de tempo, para um certo grau de confiança estatística. O VaR pode ser interpretado como a quantia em que as perdas não irão exceder em $(1 - \alpha)\%$ dos cenários. Em linhas gerais, o VaR de um portfólio representa um quantil superior da perda estimada da carteira (ou, um quantil inferior do retorno). Segundo Acerbi e Tasche (2002), a definição formal de VaR remete à definição de quantis: se X é a variável aleatória que representa os retornos de um portfólio, o $VaR_\alpha(X)$, $X \in (0, 1)$ é escrito como:

$$VaR_\alpha(X) = -Q^\alpha(X) = -\sup\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X) \leq \alpha\} = -\inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} \quad (2.31)$$

onde $Q^\alpha(X)$ é o α -quantil superior de X .

Se denotarmos a função de distribuição de probabilidade de X como $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, teremos:

$$VaR_\alpha(X) = -F^{\leftarrow}(\alpha) \quad (2.32)$$

onde $F^{\leftarrow}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\}$ é a função inversa generalizada da função de distribuição F .

De acordo com Hull (2006), a larga utilização do VaR se deve ao fato de que este é de simples interpretação e pode ser aplicado em uma vasta gama de ativos financeiros, servindo como uma base de comparação para diferentes tipos de carteiras. Fabozzi et al. (2007) e Ghaoui et al. (2003) aplicaram o VaR em problemas de seleção de portfólios gerando modelos que procuram otimizar a relação entre o retorno esperado de uma carteira e o seu VaR.

Embora o VaR seja uma medida amplamente utilizada no mercado financeiro, ele sofre algumas críticas no mundo acadêmico. Segundo Krokmal et al. (2002), existem dificuldades para implementá-lo por modelos de programação matemática uma vez que o VaR não possui propriedades desejáveis, como diferenciabilidade e convexidade. Outra crítica é o fato de não apresentar a propriedade de subaditividade, isto é, o VaR de uma combinação de variáveis aleatórias pode ser maior do que a soma de cada uma delas individualmente, fazendo com que o VaR não seja uma medida de risco dita coerente.

A dificuldade para implementação de um modelo computacional do VaR e as desvantagens inerentes às propriedades que este apresenta quando utilizado como métrica para mensuração do risco de portfólios fizeram com que o Rockafellar e Uryasev (2000) realizassem algumas adaptações. A partir do trabalho desses autores surgiu, então, o CVaR (*Conditional Value at Risk*), uma medida de risco que busca corrigir as deficiências apresentadas pelo VaR e que dificultam sua aplicação em alguns contextos.

O CVaR é uma medida que indica a perda média que excede o VaR, ou seja, dada uma probabilidade α , o CVaR é definido como a média dos retornos menores que o quantil $(1 - \alpha)$ da distribuição dos retornos. Se todos os cenários tem a mesma probabilidade de ocorrência, o CVaR é computado como o retorno esperado dos $(1 - \alpha)\%$ piores cenários. O CVaR de nível α pode ser formalizado como (ACERBI; TASCHE, 2002):

$$CVaR_{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}(\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{(-\infty, Q^{\alpha}(X))}] + Q^{\alpha}(X)(\alpha - \mathbb{P}(X \leq Q^{\alpha}(X)))) \quad (2.33)$$

Se $F(X)$ é uma função contínua, então $\mathbb{P}(X \leq Q^{\alpha}(X)) = \alpha$, e a expressão pode ser escrita como:

$$CVaR_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}(\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{(-\infty, Q^{\alpha}(X))}]) \quad (2.34)$$

Para um melhor entendimento das vantagens e desvantagens do CVaR em relação ao VaR, é necessário apresentar o conceito de *coerência* de uma medida de risco.

2.3.1 MEDIDAS COERENTES DE RISCO

Existem diversas metodologias para estimação do risco de um portfólio, cada uma delas possui características e propriedades particulares, e nem todas são capazes de capturar os diversos fatores de risco envolvidos na posição de um investidor. Na seção 2.3 descrevemos, por exemplo, as limitações da variância como medida de risco, uma vez que penaliza da mesma forma retornos acima e abaixo do retorno esperado, o que viola um dos princípios básicos do processo decisório de um investidor racional.

Neste contexto, Artzner et al. (1999) define algumas propriedades básicas que qualquer medida de risco deve possuir, afim de que obedçam os princípios que norteiam o processo de decisão de quaisquer investidores. Esses princípios são definidos em um conjunto de axiomas que caracterizam uma medida de risco coerente, os quais são apresentados a seguir:

1. Monotonicidade: $X \in \mathcal{M}(m), X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$

O axioma da monotonicidade indica que quando não há risco de perda ($X \geq 0$), a medida de risco não pode ser maior que zero.

2. Sub-aditividade: $X, Y, X + Y \in \mathcal{M}(m) \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

A sub-aditividade garante que o risco de um portfólio seja sempre menor ou igual ao risco da soma individual de cada um dos ativos que o compõe. Em outras palavras, a diversificação tem a capacidade de reduzir o risco de um portfólio.

3. Homogeneidade positiva: $X \in \mathcal{M}(m), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Este axioma determina que um aumento da quantidade de capital investida em um portfólio resultará em um aumento do risco na mesma proporção do aporte, ou seja, multiplicar a posição do portfólio por um escalar irá multiplicar o risco por este mesmo escalar.

4. Invariância à translação: $X \in \mathcal{M}(m), k \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + k) = \rho(X) - k$

A invariância à translação significa que adicionando ou subtraindo uma quantidade certa k à variável aleatória X , a medida de de risco aumenta ou diminui em k unidades.

As propriedades postuladas por Artzner et al. (1999) refletem teoremas e princípios fundamentais de Finanças e Estatística, sendo assim, a utilização uma métrica que não atenda alguma das propriedades postuladas poderá acarretar em consequências indesejadas ao processo de seleção de portfólios e gestão de riscos.

Sob o prisma desses axiomas, Artzner et al. (1999) demonstraram que a estimação do risco através da variância falha ao infringir a propriedade da monotonicidade, um vez que as distribuições são comparadas somente em termos da dispersão que cada retorno apresenta relativamente às respectivas médias, mostrando-se assim conceitualmente inadequada para uso prático. Do mesmo modo, Artzner et al. (1999) demonstraram através de exemplos práticos que o VaR embora seja invariante por translação, positivamente homogêneo e monotônico, não apresenta sub-aditividade, pois, em alguns casos, a medida leva a resultados em que a diversificação aumentaria o risco, mostrando-se inapropriado para gestão do risco de carteiras de investimento.

Assim, conforme mencionado na seção 2.3, Rockafellar e Uryasev (2000) propuseram uma métrica para corrigir as deficiências do VaR, o CVaR, que, por definição, corresponde ao valor esperado da distribuição da perda da carteira, condicionado ao fato de que a perda seja superior àquela implícita no VaR da carteira para um dado nível de confiança $(1 - \alpha)$. Em seu trabalho, Rockafellar e Uryasev (2000) demonstraram que o CVaR é uma medida de risco coerente, uma vez que obedece aos quatro axiomas postulados por Artzner et al. (1999).

3 OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS *ONLINE*

Objetiva-se neste capítulo apresentar estratégias que podem ser utilizadas visando a resolução dos modelos de determinação de carteira ótima. Na seção 3.1, faremos uma breve contextualização sobre otimização convexa *online* e definimos a função de custo *Regret*. Em seguida, na seção 3.2, descrevemos uma estratégia de investimento chamada de *Constant Rebalanced Portfolio* (CRP). Na seção 3.3 apresentamos a formalização do modelo de otimização de portfólios. Então, na seção 3.4 apresentamos alguns procedimentos utilizados para otimização online, restringindo nossa análise aos algoritmos *Universal Portfolios*, *Successive Constant Rebalanced Algorithm*, *Exponential Gradient Algorithm*, *Online Gradient Descent* e *Online Newton Step*.

3.1 OTIMIZAÇÃO CONVEXA *ONLINE*

Otimização é o processo de, dado um espaço de busca, restrito ou não, encontrar de forma sistemática o ótimo da chamada função objetivo de interesse. Em geral, este processo é conduzido de maneira automatizada através de algoritmos que possibilitam encontrar a solução ótima sem a necessidade de uma busca exaustiva da região factível. Encontrar o ótimo global de uma função objetivo não convexa pode ser um problema de difícil solução. Na prática, não há garantias de que, com algoritmos eficientes, o ótimo global de qualquer classe de problema será encontrado, sendo esta a razão pela qual se torna tão importante o estudo da otimização convexa, um vez que, problemas que podem ser formulados como um problema de otimização convexa podem ser solucionados de maneira eficiente.

Um conjunto C é convexo se um segmento reta definido por qualquer par de pontos pertencentes a C reside em C , isto é, para qualquer $x_1, x_2 \in C$ e qualquer θ variando no intervalo $0 \leq \theta \leq 1$, teremos:

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C.$$

Para um conjunto convexo C uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se para qualquer x_1

$x_2 \in C$ e $\theta \in [0, 1]$, tenhamos:

$$\theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2) \geq f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2)$$

Um problema de otimização convexa pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min f_t(x) \quad & t = 1, \dots, T \\ \text{s.a} \quad & g_k(x) \geq 0, k = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde f_0 é a função objetivo convexa, g_k são funções de restrição de desigualdade e h_i são funções de restrição de igualdade.

Pode-se definir o problema de otimização convexa *online* como sendo uma sequência de funções convexas $f_1, f_2, f_3, \dots, f_t$ onde para cada período $t = 1, 2, \dots, T$ adota-se uma estratégia x_t pertencente a um espaço de solução convexo $S_n \subseteq \mathbb{R}^n$ e S_n é formado pela interseção do conjunto de restrições de igualdade e desigualdade tal que g_k sejam funções convexas e h_i sejam transformações afim na forma $a_i^T x - b_i$.

Para definir a estratégia x_t observa-se $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_{t-1}(x_{t-1})$ e após selecionar x_t observa-se $f_t(x_t)$. Vale ressaltar que as funções objetivo podem variar a medida que t varia, desde que se mantenham convexas. Assim, não podemos esperar que o algoritmo escolha o vetor x_t tal que f_t seja mínimo pois a função f_t ainda não foi revelada. Os algoritmos *online* não buscam por uma solução ótima global e sim por certos objetivos, neste caso a minimização da função custo denominada *Regret* é definida na forma:

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^T f_t(x_t) - \min_{x \in S_n} \sum_{t=1}^T f_t(x) \tag{3.2}$$

O *Regret* pode ser entendido como a diferença entre o custo do algoritmo *online* e o custo da estratégia utilizada como referência, como por exemplo, um algoritmo *offline*. O termo $\sum_{t=1}^T f_t(x_t)$ é a estratégia que o algoritmo *online* utiliza em cada iteração t e o termo $\min_{x \in S_n} \sum_{t=1}^T f_t(x)$ é o custo da solução estática de referência $x \in S_n$ até T .

Os algoritmos de otimização *online* que tentam minimizar o *Regret* para o problema de carteira ótima utilizam como referência uma estratégia de investimento denominada *Constant Rebalanced Portfolio* (CRP) que será descrita com maiores detalhes na seção

seguinte.

3.2 CONSTANT REBALANCED PORTFOLIO

Encontrar o portfólio de máxima riqueza absoluta dentro do mercado é uma tarefa bastante ambiciosa (HAZAN; ARORA, 2006), assim, o que buscamos é minimizar a distância entre o portfólio escolhido pelo algoritmo *online* e o *Constant Rebalanced Portfolio* (CRP) tal como proposto por Cover (1991).

Devido as movimentações diárias do mercado financeiro, o portfólio apresentará uma alocação diferente da alocação de ativos original. O CRP é uma estratégia de investimentos na qual o portfólio é rebalanceado de tal forma que a proporção destinada a cada um dos ativos na carteira original é preservada.

Dochow (2016) constrói a formalização do CRP de maneira bastante didática. Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ¹ o conjunto de todos os ativos presentes em um portfólio, Y_i^{inic} a quantidade inicial de ações de cada ativo i , Y_{it} a quantidade de ações do ativo i no tempo t , p_{it} o preço do ativo i no tempo t , a riqueza W , no tempo t , pode ser obtida através da seguinte equação:

$$W_t = \sum_{i=1}^n p_{it} Y_{it} \quad (3.3)$$

A quantidade de ações em cada ativo i no tempo t pode ser calculada por:

$$Y_{it} = Y_{i(t-1)} + y_{it} \quad (3.4)$$

Onde y_{it} é a quantidade de ações i negociadas em t . Se $y_{it} > 0$ então ações de i foram compradas, se $y_{it} < 0$ ações de i foram vendidas e se $y_{it} = 0$ não houveram transações.

Considerando um horizonte de tempo $\tau = 1, \dots, T$, o número de ações do ativo i presente no portfólio será dado por:

$$Y_{iT} = Y_i^{inic} + \sum_{t=0}^T y_{it} \quad (3.5)$$

¹Considera-se um mercado com n ativos homogêneos e perfeitamente divisíveis.

Então, a riqueza no final do horizonte de tempo T poderá ser calculada como:

$$W_T = \sum_{i=1}^n p_{iT} \left(Y_i^{inic} + \sum_{t=0}^T y_{it} \right) \quad (3.6)$$

O percentual b_{it} do portfólio mantido em cada ativo i no tempo t é definido como:

$$b_{it} = \frac{Y_{i(t-1)} p_{i(t-1)}}{W_{(t-1)}} \quad (3.7)$$

Onde $\sum_{i=1}^n b_{it} = 1$. Combinando as equações 3.5 e 3.7, a proporção destinada a cada ativo $b_{i\tau}$ no instante τ , para o horizonte de tempo $\tau = 1, \dots, T$, pode a ser escrita como:

$$b_{i\tau} = \frac{(Y_i^{inic} + \sum_{t=0}^{\tau-1} y_{it}) p_{i(\tau-1)}}{W_{(\tau-1)}} \quad (3.8)$$

Em um portfólio CRP, a cada período de tempo t são realizadas operações de compra e venda de ativos de forma que o percentual de riqueza $b_{it} = b_{i(t+1)}$ para todo instante de tempo t e todo ativo i pertencente ao portfólio, isto é, o percentual da riqueza W_τ destinado a cada ativo permanece constante ao longo do tempo. Então,

$$\frac{(Y_i^{inic} + \sum_{t=1}^{\tau} y_{it}) p_{i\tau}}{W_\tau} = \frac{(Y_i^{inic} + \sum_{t=0}^{\tau-1} y_{it}) p_{i(\tau-1)}}{W_{(\tau-1)}} \quad (3.9)$$

Li e Hoi (2015) mostram que uma estratégia baseada no CRP pode ser representada por um vetor $\mathbf{b}_1^n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, assim, a riqueza final de um portfólio CRP pode ser calculada como:

$$f_t(CRP(\mathbf{b})) = \prod_{t=1}^T \mathbf{b}^\top \mathbf{r}_t \quad (3.10)$$

Onde \mathbf{r}_t é o vetor que contém o retorno de cada um dos ativos i no tempo t . Assim, o CRP ótimo *offline* é definido de maneira formal por:

$$\mathbf{b}^* = \arg \max_{\mathbf{b}^T \in \mathbb{S}_n} f_t(CRP(\mathbf{b})) = \arg \max_{\mathbf{b} \in \mathbb{S}_n} \prod_{t=1}^T (\mathbf{b}^\top \mathbf{r}_t) \quad (3.11)$$

A função que se deseja maximizar é convexa, podendo então ser resolvida de maneira eficiente. O vetor \mathbf{b}^* é chamado *Best Constant Rebalanced Portfolios* (BCRPs). Cover (1991) demonstrou que o BCRP é a melhor estratégia em um mercado independente e identicamente distribuído (i.i.d), superando estratégias como *Uniform Constant Rebalan-*

ced Portfolio (UCRP), *Best Stock* (BS), *Dow Jones Industrial Average Index* (DJIA) e *Value Line* (VL).

3.3 DEFINIÇÃO FORMAL DO MODELO

A formalização do modelo apresentado nesta seção foi baseada no trabalho de Hazan e Arora (2006).

O problema de seleção de portfólios online procura uma estratégia de investimentos que permita a um investidor maximizar sua riqueza, distribuindo-a em um conjunto de ativos financeiros, sem conhecimento sobre os retornos futuros ou utilização de pressupostos estatísticos sobre o comportamento dos ativos.

Os primeiros estudos sobre esse tipo de modelo começaram na década de 1950 com (KELLY, 1956) seguido por (BELL; COVER, 1980) e (BELL; COVER, 1988) (ALGOET; COVER, 1988).

Assim como exposto na seção 3.1, os algoritmos de otimização *online* não buscam por soluções ótimas e sim por certos objetivos, como por exemplo, minimizar a função de custo *Regret*, que pode ser entendida como a diferença entre o custo do algoritmo *online* e o custo de alguma estratégia utilizada como referência. No caso do problema de seleção de portfólio a estratégia de referência é o CRP como definido em Cover (1991).

Em cada período de negociação t , para $t = 1, \dots, T$, um investidor observa um vetor de retornos \mathbf{r}_t , onde cada componente r_{it} é o retorno da ação i no tempo t com preço de fechamento até $t - 1$. O vetor \mathbf{b}_t contém a proporção aplicada em cada um dos n ativos. A riqueza de um portfólio aplicado em \mathbf{b}_t , considerando somente um período, pode ser calculada pelo produto interno $\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t$. Após T períodos a riqueza acumulada é dada pelo $\prod_{t=1}^T (\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t)$. Tomando o logaritmo da evolução da riqueza têm-se a taxa de crescimento $\sum_{t=1}^T \log(\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t)$. Da mesma forma, tomando-se o logaritmo da riqueza de um portfólio que utiliza a estratégia de investimento CRP, com $\mathbf{b} \in \mathbb{S}_n$, tem-se a taxa de crescimento logarítmico $\sum_{t=1}^T \log(\mathbf{b}^\top \mathbf{r}_t)$.

O CRP ótimo *offline*, que já foi definido na seção anterior como o argumento \mathbf{b}^* que maximiza a riqueza, pode ser escrito então como:

$$\mathbf{b}^* \in \arg \max_{\mathbf{b} \in \mathbb{S}_n} \sum_{t=1}^T \log(\mathbf{b}^\top \mathbf{r}_t) \quad (3.12)$$

O *Regret* de um algoritmo *online* que seleciona os portfólios \mathbf{b}_t para $t = 1, \dots, T$, é dado então por:

$$\text{Regret}(\text{Alg}) = \sum_{t=1}^T \log((\mathbf{b}^*)^\top \mathbf{r}_t) - \sum_{t=1}^T \log(\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t) \quad (3.13)$$

Desta forma, o algoritmo *online* tenta minimizar a distância entre o portfólio \mathbf{b}_t e o CRP ótimo ou BCRP. Segundo Hazan e Arora (2006), espera-se de um portfólio selecionado por um algoritmo com baixo *Regret* o mesmo comportamento assintótico do BCRP. Cover (1991) propôs um algoritmo para seleção de portfólio com *Regret* $O(n \log T)$ mas que com tempo de execução exponencial, calculando o portfólio \mathbf{b}_t em $\Omega(T^n)$. Helmbold et al. (1998) propuseram um algoritmo com tempo de processamento linear $O(n)$, mas com *Regret* sub-ótimo de $O(\sqrt{T \log n})$. Hazan et al. (2006) apresentaram um algoritmo computável em tempo quadrático $O(n^2)$ com *Regret* logarítmico $O(n \log T)$.

3.4 APLICAÇÕES

Na literatura atual existem diversas abordagens para adaptar algoritmos de otimização *online* para solucionar problemas de alocação de portfólio. O ponto em comum são que as informações sobre os retornos passados são utilizadas na tomada de decisão para alocação do período seguinte ($\mathbf{b}_{(t+1)}$). Este trabalho restringiu sua análise aos algoritmos cuja estratégia de alocação é classificada como *Follow-the-Winner*. De acordo com Hazan et al. (2016), estes são mais aplicáveis ao contexto de seleção de portfólios, além de possuírem demonstração matemática formal do *Regret* alcançado.

3.4.1 UNIVERSAL PORTFOLIOS

O *expert* pode ser entendido como um investidor fictício que participa do mercado com uma estratégia arbitrária e riqueza inicial $W_0 = 1$. Assuma que existem $\omega = 1, \dots, \Omega$ *experts* e cada um utiliza sua estratégia. Deixe a riqueza do período de negociações t ser denotada por W_t^ω . Se o *expert* está usando como estratégia um portfólio rebalanceado com uma estratégia de alocação fixa \mathbf{b}^ω , então a riqueza do portfólio do *expert* no tempo t é denotada como $W_t(\mathbf{b}^\omega)$.

Tendo em vista o grande número de possibilidades de portfólios constantes que podem ser construídos, na prática, o que ocorre é a discretização do domínio que passa a ser

representado, de forma aproximada, por uma reunião de um número finito Ω de portfólios, cada portfólio \mathbf{b}^ω neste domínio é chamado então de *expert*. Durante todo horizonte de investimento cada portfólio \mathbf{b}^ω mantém sua estratégia de alocação \mathbf{b} constante e precisa ser escolhido dentro de um *simplex* de tal forma que:

$$\mathfrak{B}_n = \left(\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{b}_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i = 1 \right) \quad (3.14)$$

Para determinar a proporção de riqueza que será destinada ao ativo i o UP leva em consideração a riqueza corrente no período de cada um dos *experts* W_t^ω e a fração de i no portfólio \mathbf{b}^ω . A ideia é que se uma ação é mais benéfica do que outras, então os *experts* que tem maior percentual de seu portfólio aplicado nessas ações poderiam gerar, na média, maior riqueza no período do que os *experts* que aplicaram menor percentual de seu portfólio nessas ações.

Formalmente, em um *simplex* contínuo \mathfrak{B}_n o UP seria dado por:

$$\mathbf{b}_{(t+1)}^{UP} = \frac{\int \mathbf{b} W_t(\mathbf{b}) d\mathbf{b}}{\int W_t(\mathbf{b}) d\mathbf{b}} \quad (3.15)$$

Se o *simplex* é discreto, tal que existem Ω *experts*, então a proporção do UP para o ativo i com $i = 1, \dots, n$ é dado por:

$$b_{i(t+1)}^{UP} = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} \mathbf{b}_i^\omega W_t(\mathbf{b}^\omega)}{\sum_{\omega=1}^{\Omega} W_t(\mathbf{b}^\omega)} \quad (3.16)$$

O algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo do UP para o caso discreto

3.4.2 SUCCESSIVE CONSTANT REBALANCED ALGORITHM

O algoritmo *Successive Constant Rebalanced Algorithm* (SCR) foi introduzido Gaivoronski e Stella (2000). Assim como o algoritmo UP, o conjunto de soluções viáveis é discretizado e que passa a ser representado por uma reunião de um número finito Ω de portfólios possíveis, cada portfólio \mathbf{b}^ω neste conjunto é chamado de *expert*. A estratégia de cada um dos *experts* \mathbf{b}^ω mantém uma alocação \mathbf{b} constante e é selecionada dentro de um *simplex*. Baseado em uma estratégia do tipo *Follow-the-Winner*, o algoritmo escolhe sempre o melhor *expert* até o período de negociação t . Formalmente, a alocação do portfólio é

Algoritmo 1: Algoritmo *Universal Portfolio*

```

1 início
2    $sum \leftarrow 0$ 
3   para  $\omega = 1$  até  $\Omega$  faça
4      $sum \leftarrow sum + W_t(\mathbf{b}^\omega)$ ;
5   fim para
6   para  $i = 1$  até  $n$  faça
7      $\omega Sum \leftarrow 0$ ;
8     para  $\omega = 1$  até  $\Omega$  faça
9        $\omega Sum \leftarrow \omega Sum + \mathbf{b}_i^\omega W_t(\mathbf{b}^\omega)$ ;
10    fim para
11     $\mathbf{b}_{i(t+1)} \leftarrow \frac{\omega Sum}{sum}$ 
12  fim para
13  retorna  $\mathbf{b}_{(t+1)}$ 
14 fim

```

definida como:

$$\mathbf{b}_{t+1}^{SCR} = \arg \max_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_n} W_t(\mathbf{b}) \quad (3.17)$$

O pseudocódigo do algoritmo SCR é representado pelo 2 e é baseado na representação fornecida por Dochow (2016).

Algoritmo 2: Algoritmo *Successive Constant Rebalanced Algorithm*

```

1 início
2    $\omega Best \leftarrow 1$ ;
3    $W Best \leftarrow 0$ ;
4   para  $\omega = 1$  até  $\Omega$  faça
5     se  $W_t(\mathbf{b}^\omega) > W Best$  então
6        $\omega Best \leftarrow \omega$ 
7        $W Best \leftarrow W_t(\mathbf{b}^\omega)$ 
8     fim se
9   fim para
10   $\mathbf{b}_{t+1} \leftarrow \mathbf{b}^{\omega Best}$ 
11  retorna  $\mathbf{b}_{(t+1)}$ 
12 fim

```

3.4.3 EXPONENTIAL GRADIENT ALGORITHM

Helmbold et al. (1998) propuseram o *Exponential Gradient Algorithm* (EG) que possui complexidade de tempo linear por ativo. Ao contrário dos *Universal Portfólios* e *Follow-*

the-Leader, que se baseiam na informação do *expert*, o EG se baseia em informações de primeira ordem.

O retorno obtido por um portfólio em cada período pode ser calculado como:

$$x_t = \frac{W_t}{W_{(t-1)}} = \sum_{i=1}^n r_{it} b_{it} \quad (3.18)$$

Onde x_t pode ser interpretado como o acréscimo ou decréscimo da riqueza em cada um dos períodos de negociação. A informação de primeira ordem será dada então por:

$$\Theta_t^i = \frac{\partial \ln x_t}{\partial b_{it}} = \frac{r_{it}}{x_t} \quad (3.19)$$

Um valor $\Theta_t^i > 1$ indica que a performance do ativo i durante o período t foi melhor do que a alocação corrente do portfólio \mathbf{b}_t . Do mesmo modo, $\Theta_t^i < 1$ indica que a performance do do ativo i foi pior do que a alocação \mathbf{b}_t .

Partindo de uma alocação arbitrária $\mathbf{b}_t \in \mathfrak{B}_n$, a alocação para $\mathbf{b}_{(t+1)}$ é baseada na alocação corrente \mathbf{b}_t , calculando as informações de primeira ordem. A ideia do EG é, se o retorno do ativo i no período de negociação t é maior do que mudança da riqueza, calculada pela equação 3.18, então a proporção do portfólio destinada ao ativo i para $t+1$ deve ser aumentada. A taxa de aprendizagem η regula a intensidade dessa mudança de posição no portfólio. Dessa forma, Dochow (2016) define o EG como:

$$b_{i(t+1)}^{EG} = \frac{b_{it} \exp(\eta \Theta_t^i)}{\sum_{i=1}^n b_{it} \exp(\eta \Theta_t^i)} \quad (3.20)$$

para $i = 1, \dots, n$. No caso extremo em que $\eta = 0$, a proporção definida em $t = 1$ se mantém constante para os períodos subsequentes. O Algoritmo 3 apresenta o pseudocódigo do EG, baseado em Dochow (2016).

3.4.4 ONLINE GRADIENTE DESCENT

Introduzido por Zinkevich (2003), assim como o algoritmo EG, o *Online Gradient Descent* (OGD) utiliza informação de primeira ordem. Zinkevich (2003) enumera que existem duas vantagens para utilização deste algoritmo. A primeira é que a descida gradiente talvez seja o algoritmo mais simples adaptado para otimização convexa *online*, sendo de fácil entendimento e interpretação. Em segundo lugar, é mais geral do que a configuração

Algoritmo 3: Algoritmo *Exponential Gradient*

Entrada: EG(η)

```

1 início
2    $sum \leftarrow 0$ 
3   para  $i = 1$  até  $n$  faça
4      $isum(i) \leftarrow \exp\left(\frac{\eta rit}{x_t}\right)$ 
5      $sum \leftarrow sum + isum(i)$ 
6   fim para
7   para  $i = 1$  até  $n$  faça
8      $b_{i(t+1)} \leftarrow \frac{isum(i)}{sum}$ 
9   fim para
10  retorna  $\mathbf{b}_{(t+1)}$ 
11 fim

```

dos algoritmos baseados nos *experts*, na medida em que pode lidar com uma sequência arbitrária de funções, apresentando, em geral, melhor desempenho do que os algoritmos baseados nos *experts*. Baseado no método de otimização pela descida do gradiente padrão, a cada iteração, o ponto escolhido pelo algoritmo é o ponto $t - 1$ mais um múltiplo do gradiente da função de custo $t - 1$.

$$b_t = \Pi_S(b_{t-1} + \eta \nabla f_{t-1}(b_{t-1}))$$

Com Π_S sendo a estratégia adequada de projeção. Adicionar um múltiplo do gradiente anterior pode levar a uma solução que esteja fora do conjunto de soluções viáveis. Nesses casos, a projeção Π_S leva o ponto de volta para o conjunto convexo mais próximo, minimizando a norma euclidiana $\Pi_S(y) = \arg \min_{x \in S_n} \|x - y\|$.

Apesar do fato de que a próxima função de custo pode ser completamente diferente de todas as que ocorreram até o momento, o *Regret* alcançado pelo algoritmo é sublinear, como demonstrado no seguinte teorema enunciado por Zinkevich (2003).

Theorem 3.1 (Zinkevich, 2003, p.3). *O algoritmo Online Gradient Descent com tamanho do passo $\eta_t = \frac{G}{D\sqrt{t}}$ tem o seguinte regret bound, para todo $T \geq 1$:*

$$\text{Regret}_T(\text{OGD}) = \sum_{t=1}^T f_t(x_t) - \min_{x \in S_n} \sum_{t=1}^T f_t(x) \leq 3GD\sqrt{T}$$

O algoritmo 4 apresenta o pseudocódigo do OGD.

Algoritmo 4: Algoritmo *Online Gradient Descent*

Entrada: OGD(η)

```

1 início
2    $\mathbf{b}_1 \leftarrow \frac{1}{n}$ 
3   para  $t = 2$  até  $T$  faça
4      $b_t = \Pi_S(b_{t-1} + \eta \frac{1}{(b_{t-1}^\top r_{(t-1)})} r_{(t-1)}(b_{t-1}))$ 
5   fim para
6   Onde  $\Pi_S(y) = \arg \min_{x \in S} \|x - y\|$ 
7   retorna  $\mathbf{b}_{(t+1)}$ 
8 fim
```

3.4.5 ONLINE NEWTON STEP

Comparado ao algoritmo EG, o *Online Newton Step* (ONS), proposto por Agarwal et al. (2006), leva em conta adicionalmente informações de segunda ordem. Partindo da equação 3.18, a informação de segunda ordem é dada por

$$\Theta_t^{ij} = \frac{\partial^2 \ln x_t}{\partial b_{it} \partial b_{jt}} = -\frac{r_{it} r_{jt}}{x_t^2} \quad (3.21)$$

e pode ser interpretada como a combinação da variação de preços dos ativos i e j para $i, j = 1, \dots, n$ em relação ao quadrado do retorno obtido pelo portfólio no período t . Um valor $\Theta_t^{ij} < 1$ indica que uma carteira igualmente ponderada contendo somente os ativos i e A_j apresenta melhor desempenho do que o portfólio selecionado para o período corrente \mathbf{b}_t .

Ao combinar as informações de primeira e segunda ordem, o algoritmo se comporta de forma similar ao método de Newton-Raphson, levando para a estratégia ótima de forma mais rápida, uma vez que computa a informação de segunda ordem na atualização da posição da carteira.

Conforme exposto por Hazan e Arora (2006), no problema de alocação de portfólio, é necessário computar a informação de primeira ordem de forma acumulada do período $\tau = 1, \dots, t$ onde cada gradiente é dado pela expressão 3.19. Após isso é necessário construir a matriz \mathbf{A}_t dada por:

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 - \sum_{\tau=1}^t \Theta_t^{11} & \dots & 0 - \sum_{\tau=1}^t \Theta_t^{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 - \sum_{\tau=1}^t \Theta_t^{n1} & \dots & 1 - \sum_{\tau=1}^t \Theta_t^{nn} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A alocação ótima para o tempo t é dada então pela inversa da matriz A_t pré multiplicada pelo gradiente acumulado conforme a equação de atualização a seguir:

$$\mathbf{o}_t = \begin{pmatrix} \delta(1 + \frac{1}{\beta}) \sum_{j=1}^n a_t^{-1j} \sum_{\tau=1}^t \Theta_\tau^j \\ \vdots \\ \delta(1 + \frac{1}{\beta}) \sum_{j=1}^n a_t^{-nj} \sum_{\tau=1}^t \Theta_\tau^j \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Onde β e δ são parâmetros do algoritmo, descritos com maiores detalhes por Li e Hoi (2014)². Vale ressaltar também, que ao contrário do EG, não temos garantia de que a nova estratégia de alocação irá respeitar o espaço de soluções viáveis \mathfrak{B}_n , e portanto é necessário realizar a projeção da mesma maneira que no algoritmo OGD. A diferença é que nesse caso a norma utilizada é induzida pela matriz A . Esse problema está formulado da seguinte maneira:

$$\mathbf{b}_{(t+1)}^{ONS} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_n} (\mathbf{o}_t - \mathbf{b})^\top \mathbf{A}_t (\mathbf{o}_t - \mathbf{b}) \quad (3.24)$$

Hazan e Arora (2006) demonstraram que o algoritmo acima possui *Regret* sublinear, com o seguinte *bound* superior:

Theorem 3.2 (Hazan e Arora,2006,p.11). *O algoritmo Online Newton Step tem o seguinte regret bound:*

$$Regret(ONS) \leq 5 \left(\frac{1}{\alpha} + GD \right) n \log T$$

²Este β é um parâmetro de ajuste do algoritmo ONS e não deve ser confundido com o β_i , que é a constante que mede as alterações em R_i .

O algoritmo 5 apresenta o pseudocódigo do ONS.

Algoritmo 5: Algoritmo *Online Newton Step*

Entrada: $\text{ONS}(\beta, \delta)$

```

1 início
2   para  $i = 1$  até  $n$  faça
3     para  $j = 1$  até  $n$  faça
4       Calcule  $a_t^{ij}$ 
5     fim para
6   fim para
7   Calcule  $\mathbf{A}_t^{-1}$ 
8   para  $i = 1$  até  $n$  faça
9     Calcule  $o_{it}$ 
10  fim para
11   $\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_n} \left( \sum_{i=1}^n a_t^{ii} (o_{it} - \mathbf{b}_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_t^{ij} (o_{it} - \mathbf{b}_i)(o_{jt} - \mathbf{b}_j) \right)$ 
12  retorna  $\mathbf{b}_{(t+1)} = \mathbf{b}$ 
13 fim

```

Segundo Hazan et al. (2016), os algoritmos OGD e ONS são o estado da arte no contexto de seleção de portfólios *online*, pois ambos são eficientes computacionalmente e possuem garantias formais de *Regret* sublinear. Entretanto, tal como destacado anteriormente, a abordagem atual não leva em consideração a estrutura de risco do portfólio construído e apesar do bom desempenho em termos de retorno, muitas vezes o portfólio assumido apresenta uma tendência de concentração em poucos ativos, o que, em geral, representa uma maior exposição ao risco.

Na próxima seção apresentaremos duas diferentes alternativas para que o risco seja considerado na construção dos portfólios. Na primeira delas, o risco será incorporado através da imposição de um limite máximo de investimento por ação ou número mínimo de ações no portfólio. A segunda se dará através da composição do risco da carteira utilizando o modelo CAPM (calculando o β) das carteiras, e limitando esse β a uma faixa pré-estabelecida de valor.

4 ANÁLISE EXPERIMENTAL E RESULTADOS

Nesse trabalho foram implementados os algoritmos *Online Gradient Descendent* (4) e *Online Newton Step* (5), além disso o método *Online Gradient Descendent* foi modificado durante a etapa de projeção do algoritmo para serem considerados fatores de risco importantes na composição da carteira. Todos os métodos foram comparados com o *Uniform Constant Rebalanced Portfolio* e o Índice *Dow Jones* (DJIA).

Para a etapa de atualização dos algoritmos, foi necessário calcular o gradiente e Hessiana da função *Regret* proposta por Cover (1991) e utilizada em Agarwal et al. (2006). Como $f_t = -\log(\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t)$, as expressões são analíticas e o gradiente e a hessiana em relação a p_t serão dados respectivamente por:

$$\nabla f_t = \frac{1}{(\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t)} \mathbf{r}_t \quad (4.1)$$

$$\nabla^2 f_t = \frac{-1}{(\mathbf{b}_t^\top \mathbf{r}_t)^2} \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^\top \quad (4.2)$$

No algoritmo OGD, η é o passo do algoritmo, e a etapa da projeção pode ser feita de maneira eficiente utilizando algoritmos de programação quadrática se o conjunto viável for convexo.

O parâmetro δ pode ser visto como um parâmetro de ajuste, e β um parâmetro necessário para validações teóricas. Como esses parâmetros estão intrinsecamente ligados a hipóteses necessárias para construção da teoria, optou-se por testar apenas a influência da variação de η no algoritmo OGD, e os parâmetros do algoritmo ONS foram mantidos os mesmos que em Agarwal et al. (2006), onde $\delta = 1/8$ e $\beta = 1$. Maiores detalhamentos sobre a construção e sensibilidade dos parâmetros podem ser vistas em Li e Hoi (2014).

Tanto para o OGD quanto para o ONS, foram considerados pertencentes ao conjunto de soluções possíveis todas as posições da carteira maiores ou iguais a zero, de tal forma que o portfólio não pode assumir posições vendidas¹, como somatório de todas as posições devem ser menor ou igual a um, não está sendo permitida alavancagem da carteira.

O domínio é definido por um conjunto de restrições lineares do tipo $Ax \leq b$, sendo

¹Estar vendido significa ter uma posição em que o investidor opera com um empréstimo de ações. Em inglês esta operação é conhecida como *short*.

portanto um polítopo convexo. Dessa forma, a projeção necessária nos dois algoritmos pode ser resolvida sem maiores problemas com programação quadrática. Para ambos os algoritmos, o conjunto viável S_n é definido como um polítopo, onde não é possível assumir posições vendidas e nem é permitido alavancagem, portanto $\|b\|_1 = 1$ e $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, sendo n o número de ativos.

Para considerar os aspectos de risco, o conjunto de soluções viáveis do algoritmo OGD foi modificado. Primeiramente considerou-se o cenário em que nenhuma posição poderia ser superior a 25% da aplicação total, evitando a concentração da carteira em poucas ações. Posições vendidas e alavancagem não foram permitidas. Para essa estratégia foi dado o nome *Online Gradient Descedent Restrito* (OGD restrito). Nessa estratégia, o conjunto viável continua do tipo $Ax \leq b$ e portanto convexo.

Para o segundo algoritmo, foram utilizadas restrições no $\beta - CAPM$ da carteira do investidor. Como o β da carteira é representado pela soma ponderada do β dos ativos individuais que compõem a carteira, é possível estabelecer limites superiores e inferiores ainda da forma $Ax \leq b$, mantendo a convexidade do espaço de soluções. Para essa última estratégia, foram considerados duas possibilidades distintas de β da carteira, em uma delas é permitido assumir uma posição de maior risco, na medida em que permitimos um β consideravelmente superior a 1, com $0 \leq \beta \leq 1.7$ a segunda possui um perfil de risco mais conservador, com $0.75 \leq \beta \leq 1.25$.

Em todos os casos foi utilizado para etapa de projeção de algoritmos o pacote *quadprogXT* disponível no *software R* para resolver o problema de otimização quadrática em x com restrições do tipo $Ax \leq b$.

Conforme exposto por Meucci (2009) e mencionado na seção 2.2, o modelo CAPM possui diversas críticas em relação a suas hipóteses e aplicações empíricas. Portanto, neste trabalho foi utilizado o modelo CAPM com β variante no tempo de forma ajustar os dados sem hipóteses tão fortes quanto no modelo CAPM tradicional (CARMONA, 2014).

Para o ajuste do modelo CAPM com β variante no tempo, foi utilizado um modelo estrutural com choques aleatórios no β de cada ativo. Matematicamente temos então que:

$$R_{j,t} = \beta_{j,t}R_t^m + r_t + \epsilon_{j,t} \quad (4.3)$$

$$\beta_{j,t+1} = \beta_{j,t} + \eta_{j,t}$$

Onde r_t representa a taxa livre de risco, R^m o retorno do mercado, j um ativo específico, η e ϵ variáveis normais independentes. Dessa forma verifica-se que o β de cada ativo varia no tempo como um passeio aleatório, indicando que o risco subjacente de determinada ação varia no tempo e sem conhecimento prévio do investidor se a empresa irá se tornar mais ou menos arriscada em um momento posterior, definindo-se assim um Martingale para o β de cada ativo já que seus incrementos são independentes. Em tempo contínuo, o análogo a esse modelo seria um movimento browniano para o β de cada ativo. Dessa forma podemos representar os dados de maneira mais realista Carmona (2014). A estimação do modelo é feita por máxima verossimilhança derivando-se as equações do filtro de Kalman conforme exposto em Durbin e Koopman (2012). A implementação foi feita utilizando-se o pacote *KFAS* disponível na biblioteca do *software R*.

4.1 DADOS UTILIZADOS

Para comparar o desempenho das duas implementações, foram utilizados dados do mercado americano de ações, coletados no repositório do *Yahoo Finance* e disponibilizados pelo pacote *rugarch* para o *software R*. As observações são compostas de 30 empresas pertencentes ao DJIA de 16 de março de 1987 até 03 de fevereiro de 2009 e não leva em conta a entrada da *Kraft Foods* no índice em 22 de setembro de 2008. Os dados disponibilizados estão na forma de log-retornos diários e foram transformados para retornos absolutos semanais. Foi utilizado também o pacote *Quandl* para obtenção do índice DJIA para o mesmo período. Para cálculo do modelo CAPM com β variante no tempo foi utilizado como índice de mercado os retornos do S&P500 e para taxa livre de risco o *yield* americano de um ano.

A Figura 4.1 apresenta o retorno composto histórico dos 30 ativos durante as 1125 semanas analisadas. No Apêndice A apresentamos uma tabela completa com o nome de cada uma das 30 empresas que compunham² o DJIA fevereiro de 2009, e ramo de atividade

²A composição do índice DJIA é, ocasionalmente, substituída com a intenção de acompanhar as

de acordo com o Industry Classification Benchmark³ (ICB).

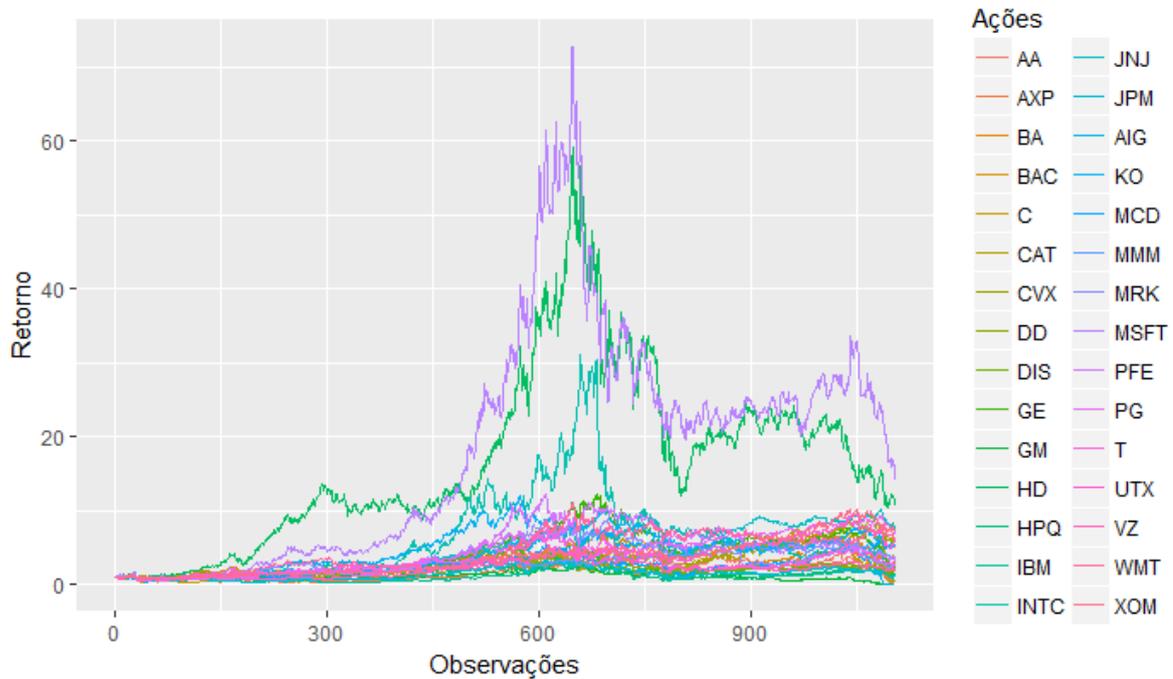


Figura 4.1: Retorno composto dos ativos.

4.2 RESULTADOS

Nessa seção apresentamos o desempenho alcançado pelas carteiras para cada um dos métodos utilizados. No caso do OGD, dois valores para o parâmetro η foram testados afim de verificar a sensibilidade das estratégias em relação ao parâmetro do algoritmo. Primeiramente o algoritmo OGD $\eta = 0.01$ e 0.001 e ONS foram comparados com o DJIA, com a melhor ação do período (utilizada como *proxy* para a melhor estratégia em *hindsight*) e com o UCRP. Na Figura 4.2 estão demonstradas as performances de cada uma das estratégias citadas em função do horizonte de investimento.

Na Figura 4.1 pode-se verificar a comparação entre o retorno acumulado das estratégias. Conforme esperado, o algoritmo OGD com uma taxa de aprendizado maior $\eta = 0.01$, teve performance superior aos demais algoritmos devido a sua capacidade alterar mais rápido a alocação entre períodos. O algoritmo ONS e o UCRP apresentaram rendimentos similares e todas as estratégias superaram o *benchmarking* (índice *Dow Jones*).

mudanças do mercado. Quando a composição da carteira é alterada, um fator de escala é utilizado para ajustar os valores do índice de modo que este não seja diretamente afetados pela alteração.

³O ICB é uma de normatização criada pela *Dow Jones* para classificar cada uma das empresas que compõe o índice de acordo com o ramo de atividade na indústria.

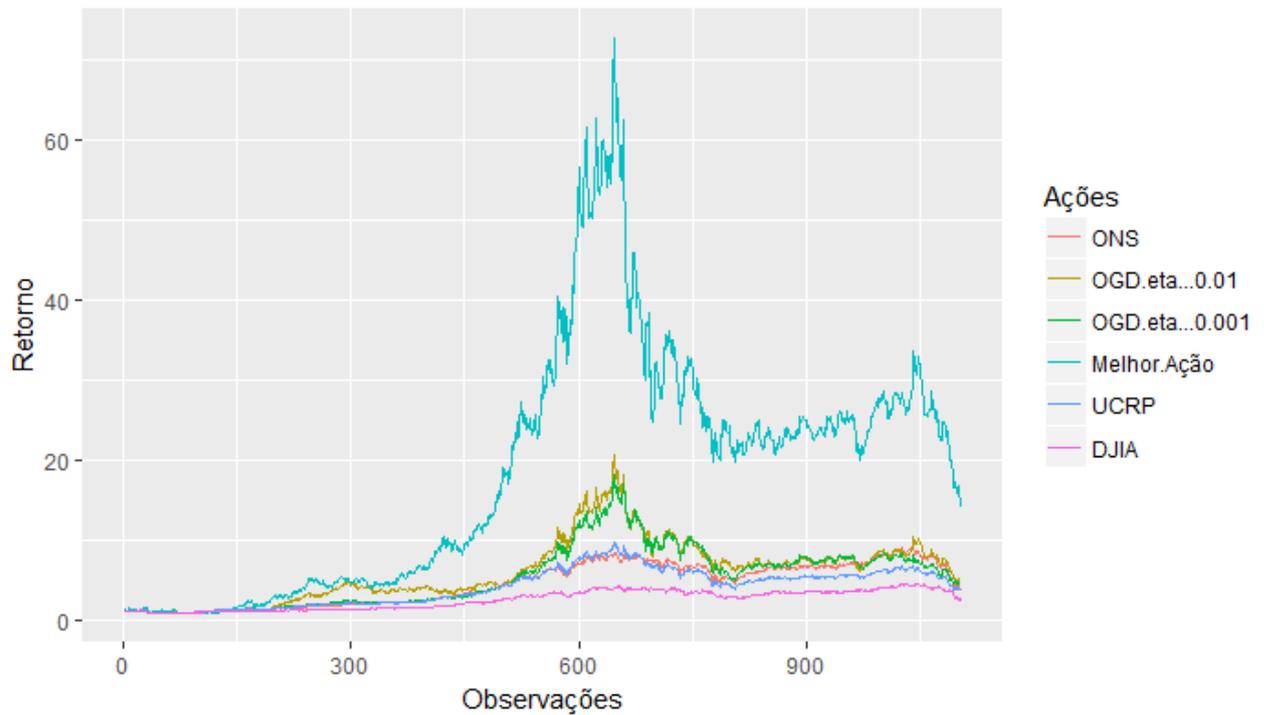


Figura 4.2: Comparativo desempenho das carteiras.

Tabela 4.1: Resumo retornos acumulados

Estratégia	Retorno
OGD $\eta = 0.01$	4.44
OGD $\eta = 0.001$	4.16
ONS	3.66
UCRP	3.45
DJIA	2.69

Além da comparação entre os retornos acumulados dos portfólios, verificou-se também a evolução das estratégias de alocação dos ativos. Verifica-se na Figura 4.3 que o algoritmo ONS possui uma resposta relativamente rápida para as variações nos retornos iniciais, e após aproximadamente 4 anos (200 observações), as alterações nas estratégias de alocação são relativamente sutis. Embora o portfólio continue com participações em todas as ações do DJIA, a proporção relativa entre os investimentos é distinta da inicial. Como consequência observada, o retorno dessa estratégia ficou ligeiramente superior ao retorno do UCRP, que manteve alocação constante em todos os ativos no período.

Para o algoritmo OGD com $\eta = 0.01$, a estratégia de alocação varia de forma significativa e é muito sensível aos retornos individuais dos ativos, observa-se pela Figura 4.4 que em aproximadamente 4/5 do período a carteira esteve concentrada em um ou dois ativos,

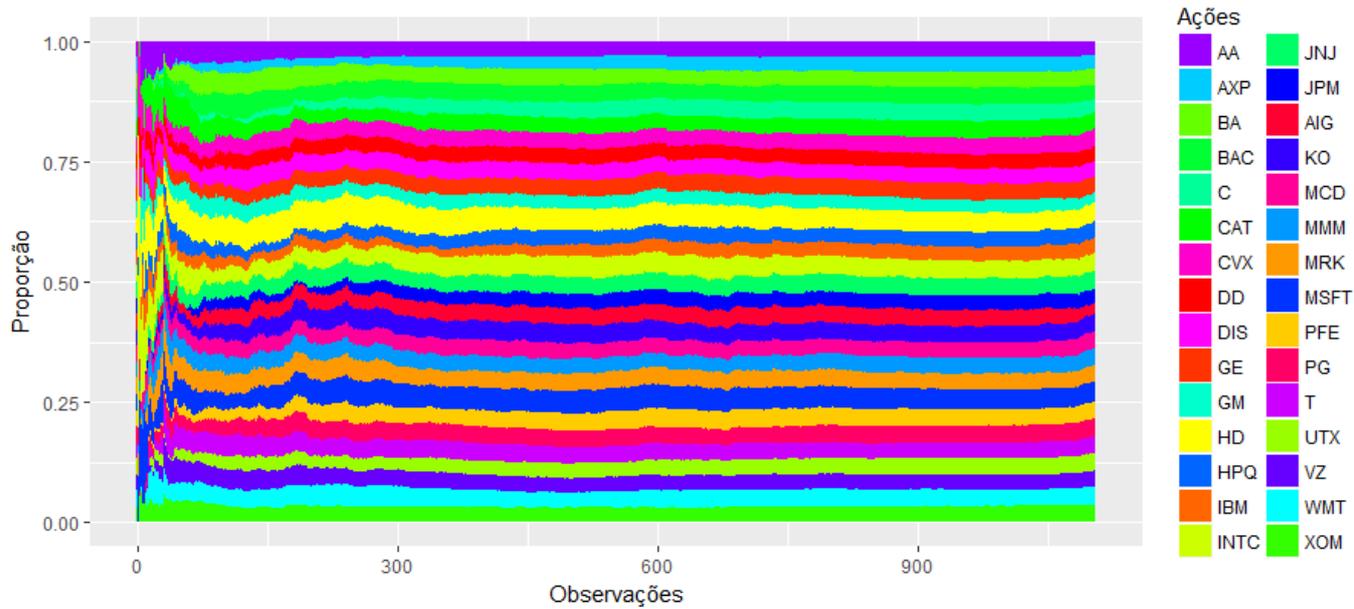


Figura 4.3: Evolução carteira ONS

terminando com toda sua aplicação na empresa *Microsoft*. Esse comportamento agressivo de alocação em poucas empresas com retornos recentes altos, refletiu nos maiores retornos acumulados observados para essa estratégia.

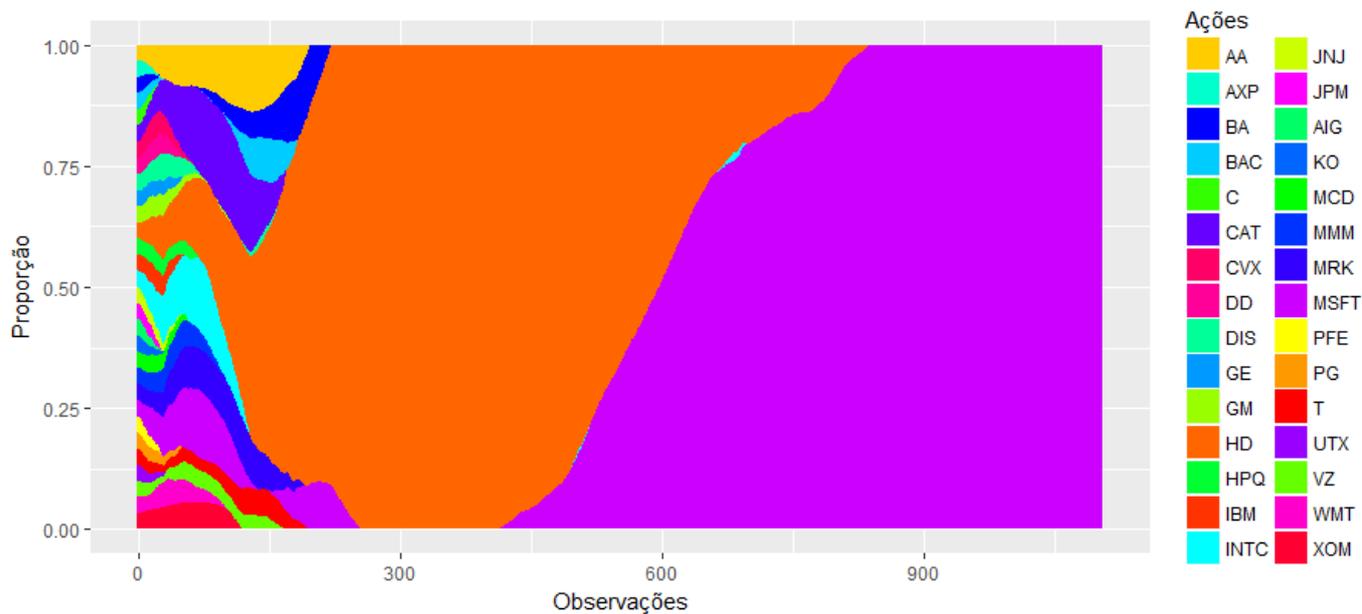


Figura 4.4: Evolução carteira OGD $\eta = 0.01$.

Com o parâmetro de atualização $\eta = 0.001$, espera-se uma diminuição da sensibilidade do algoritmo OGD em atualizar as posições do portfólio, o que de fato é observado. A carteira termina com ações da *Microsoft* e *Home Depot*, mas verifica-se na Figura 4.5

que essa transição é mais suave em relação ao OGD com parâmetro $\eta = 0.01$. De fato, a melhor ação para o período analisado é a *Microsoft*, e se esperamos que as estratégias implementadas possuam *Regret* sublinear, deseja-se que essa ação esteja presente na carteira de investimentos.

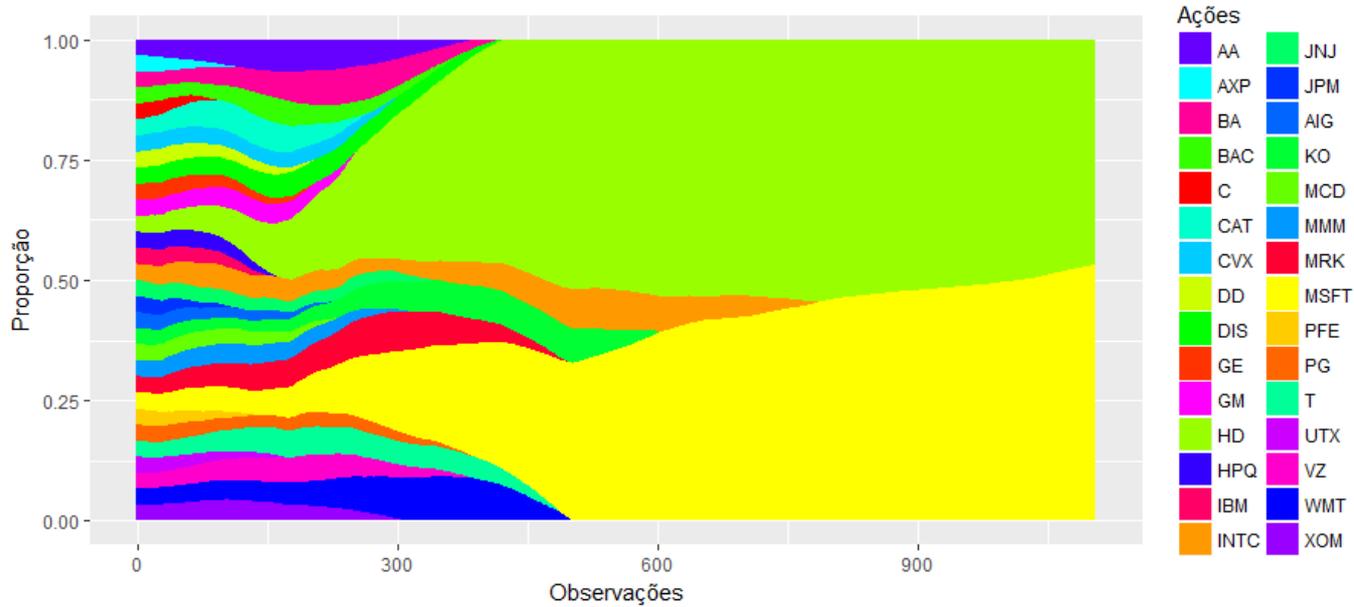


Figura 4.5: Evolução carteira OGD $\eta = 0.001$.

Outro fator relevante para a seleção de portfólios é o risco da carteira. Possivelmente, o melhor desempenho do algoritmo OGD ($\eta = 0.01$) em relação aos demais foi sua capacidade em identificar as melhores ações em períodos específicos e alocar quase todo recurso da carteira nesses ativos. A consequência desse tipo de estratégia de investimento é o aumento considerável do risco, uma vez que riscos não sistemáticos não estão diversificados.

De forma a avaliar esse aspecto, o *Value at Risk* empírico (VaR) e *Conditional Value at Risk* empírico (CVaR) foram utilizados. O VaR e CVaR podem ser definidos da seguinte forma (MEUCCI, 2009):

$$VaR_{\alpha}(c) = Q_{\psi_c}(\alpha) \quad (4.4)$$

Onde α é o nível de risco, ψ é a distribuição dos retornos seguindo a estratégia de alocação c , e Q é a função *quantile* calculada empiricamente.

$$CVaR_{\alpha}(c) = \mathbb{E}[x|x < \alpha] \quad (4.5)$$

Onde x é variável aleatória que representa o retorno da estratégia de alocação c . O VaR pode ser interpretado como a perda máxima ocorrida em $1 - \alpha$ vezes. O CVaR pode ser interpretado como o valor esperado da perda dado que estamos no α – *percentile* pior caso.

O VaR e o CVaR para 1% e 5% foram calculados e comparados com o risco empírico do DJIA. Os resultados obtidos estão expostos na Tabela 4.2 e Tabela 4.3.

Tabela 4.2: Risco portfólio ONS, DJIA, UCRP e MSFT

	ONS		DJIA		UCRP		MSFT	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.076	-0.040	-0.064	-0.039	-0.084	-0.039	-0.131	-0.070
CVaR	-0.116	-0.065	-0.099	-0.058	-0.112	-0.064	-0.184	-0.112

Tabela 4.3: Risco portfólio OGD $\eta = 0.01, \eta = 0.001$

	OGD $\eta = 0.01$		OGD $\eta = 0.001$	
	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.118	-0.062	-0.101	-0.054
CVaR	-0.149	-0.095	-0.140	-0.085

Como é possível verificar, nas Tabelas 4.2 e 4.3, os portfólios construídos com os algoritmos propostos possuem perfis de riscos bastante diferentes, o que reflete a diferença em seus retornos acumulados e a grande diferença na maneira com que os portfólios foram atualizados ao longo do tempo. O algoritmo ONS, por possuir transições suaves de investimento, e participação em todas as empresas do DJIA apesar da mudança da proporção relativa entre as mesmas, possui um perfil de risco similar ao obtido pelo DJIA mas com um valor final de carteira superior. De fato, um investidor deseja para o mesmo perfil de risco, aquela estratégia que oferece o melhor retorno. Portanto, entre um investimento no mercado (representado pelo DJIA) e um investimento na estratégia proposta com o algoritmo ONS, esse último seria a melhor escolha.

Além disso, as atualizações suaves propostas pelo algoritmo ONS, foram suficientes não só para superar o UCRP (estratégia constante) em termos de retorno, mas também para diminuir o risco total da carteira, o que acaba sendo um resultado surpreendente. Uma possível explicação para esse fato que não era esperado, é que ações com ganhos consistentes no longo prazo possuem menos volatilidade que a média das ações do índice, fazendo com que o ONS pudesse ser composto por um percentual de empresas com baixo risco e maior rendimento maior em relação a uma distribuição constante dos investimentos.

Para o caso do OGD, o desempenho superior da carteira ao concentrar recursos na *Microsoft* permitiu retornos elevados, mas que, no entanto, refletiram em um aumento substancial de risco. Ao alocar a carteira em um ou dois ativos, o algoritmo OGD com $\eta = 0.01$ este exposto tanto ao risco sistemático quanto ao risco não sistemático desses ativos. Como consequência não foi possível observar os benefícios da diversificação tal como no ONS ou UCRP. Evidentemente trata-se de um problema de preferência do investidor, onde para obter um maior retorno acumulado, o portfólio esteve exposto a um risco substancialmente maior, concentrado em um ou dois ativos, como pode ser visto na Figura 4.4.

Um padrão similar foi observado para o OGD $\eta = 0.001$, mas nesse caso, uma sensibilidade menor para mudanças fez com que por um período ligeiramente maior a carteira fosse concentrada em um número maior de ativos e nunca em somente um único investimento, como pode ser visto na Figura 4.5.

De forma a abordar a questão do risco nas preferências do investidor, foi proposta uma modelagem distinta do conjunto de soluções viáveis para o algoritmo OGD. Assim, um quarto modelo para obtenção de portfólio foi proposto utilizando o OGD com $\eta = 0.001$ adotando a restrição da posição máxima em um ativo específico em até 25% da composição total da carteira. O subespaço gerado continua sendo convexo, facilitando a projeção necessária durante as atualizações da carteira.

Na Figura 4.6 verifica-se a evolução para essa nova estratégia que limita o investimento máximo por ativo. De fato o risco empírico ao limitar em no máximo 25% da carteira por ativo diminuiu substancialmente o VaR e CVaR para o OGD como pode ser observado na Tabela 4.4. É interessante notar que o algoritmo chegou em seu limite máximo nas mesmas duas ações desejadas anteriormente *Microsoft* e *Home Depot*, que são empresas mundialmente reconhecidas por seu sucesso financeiro, mas que ao atingir esse limite de investimento precisou alocar o percentual restante (50%) em outras ações como a *Intel Corporation* (22%), *Proctor & Gamble*, *Coca-Cola* e *Johnson & Johnson*. Para esses últimos ativos não parece existir uma dominância preferencial, pois nenhum outro atingiu o limite de investimento de 25%. A consequência natural desse portfólio mais diverso foi a diminuição das duas medidas de risco e também uma redução do retorno acumulado.

Um comparativo dos retornos totais de cada estratégia pode ser verificado na Tabela 4.5, mostrando que a diminuição do risco refletiu em uma leve perda de rentabilidade.

	OGD $\eta = 0.001$		OGD restrito	
	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.101	-0.054	-0.087	-0.049
CVaR	-0.140	-0.085	-0.117	-0.074

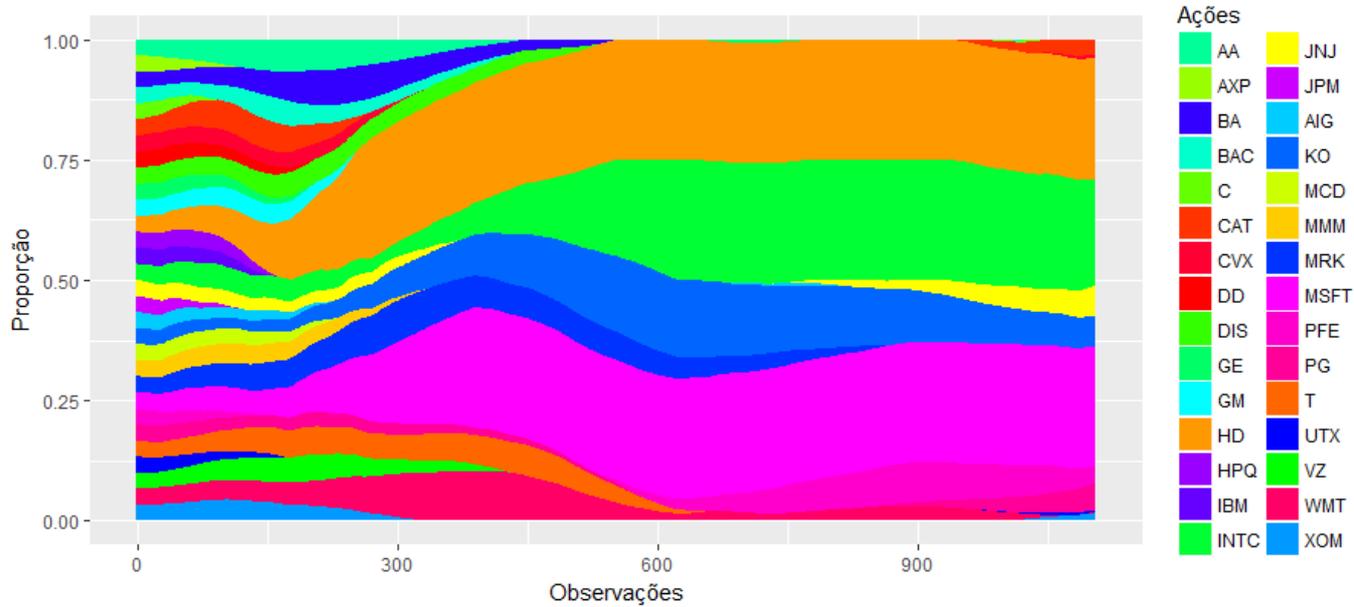


Figura 4.6: Evolução carteira OGD $\eta = 0.001$ com limite de 25% por ativo.

Estratégia	Retorno
OGD $\eta = 0.01$	4.44
OGD $\eta = 0.001$	4.16
OGD restrito	3.98
ONS	3.66
UCRP	3.45
DJIA	2.69

Simplesmente definir um limite superior de investimento em cada ativo pode não necessariamente diminuir o risco da carteira de investimentos. Como o algoritmo trabalha simplesmente com distâncias do passo de atualização em relação a um vetor de investimentos específicos no conjunto de opções viáveis, limitar o investimento máximo em um ativo necessariamente implica em investimentos em uma quantidade maior de ações, mas nada impede que as demais ações escolhidas sejam por exemplo do mesmo setor. Dessa forma, apesar de termos visto empiricamente uma redução do risco, essa redução não é garantida pelo algoritmo.

Uma outra modificação observada foi a inclusão de um algoritmo que considera o β

da carteira resultante e que pré-determine limites superiores e inferiores para esse valor. Dessa forma, o novo algoritmo proposto irá considerar não só suas atualizações em termos de retorno mas também qual combinação de ativos é a mais eficiente para manter o β do portfólio dentro de determinado intervalo.

Conforme explicado na seção anterior, os β dos ativos foram modelados como processos martingais, utilizando-se filtro de Kalman para extrair a componente latente (não-observada) de forma a maximizar a verossimilhança no modelo. A Figura 4.7 mostra a dificuldade em estimar um único β para todo o período de dados observados. Os dados representados são os retornos da *Microsoft* em função do retorno observado para o índice S&P500. Para os dados observados, um β fixo seria estimado em 0,42 para a *Microsoft*. Sugerindo que a empresa possui correlação direta com o mercado e metade do risco do S&P500.

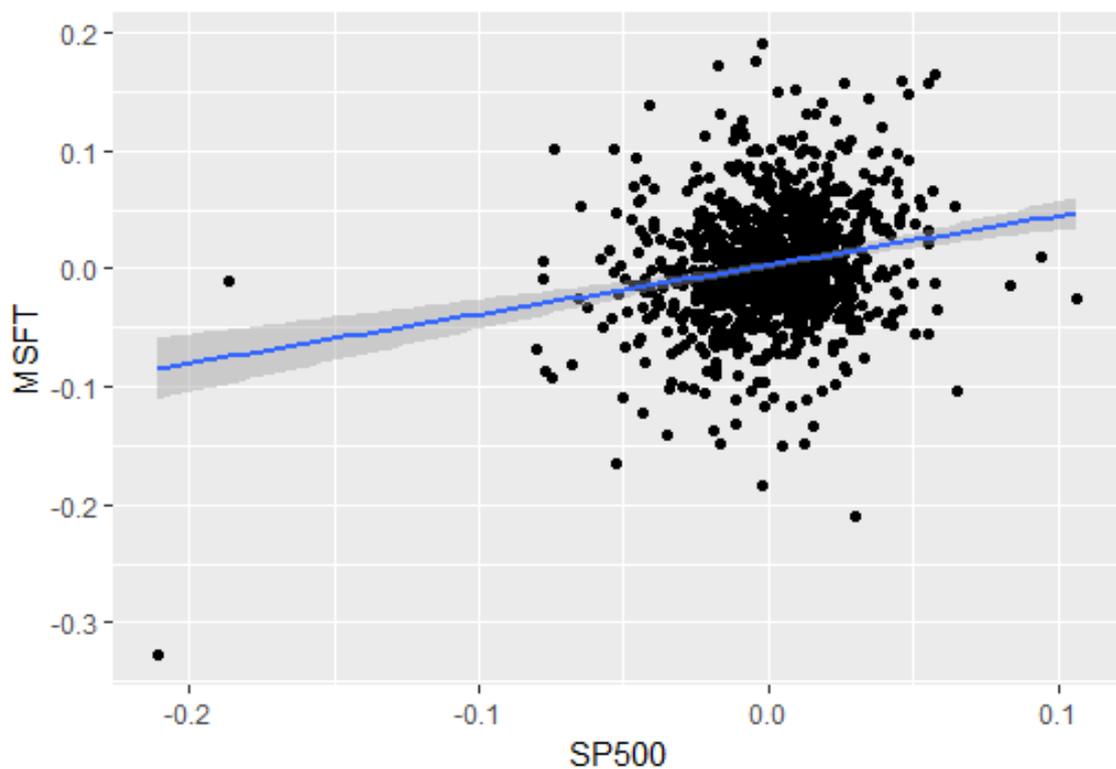


Figura 4.7: Exemplo β *Microsoft*.

A Figura 4.8 mostra a importância da modificação do perfil de risco do ativo ao longo do tempo. Nesse caso, vemos a alteração do risco da *Microsoft* em relação ao índice S&P500. Indo de um ativo considerado de risco maior que o mercado ($\beta > 1$) para um ativo praticamente descorrelacionado com o mercado ($\beta \sim 0$). Na Figura 4.8 mostra-se também a região de confiança de 95% para o β do ativo.

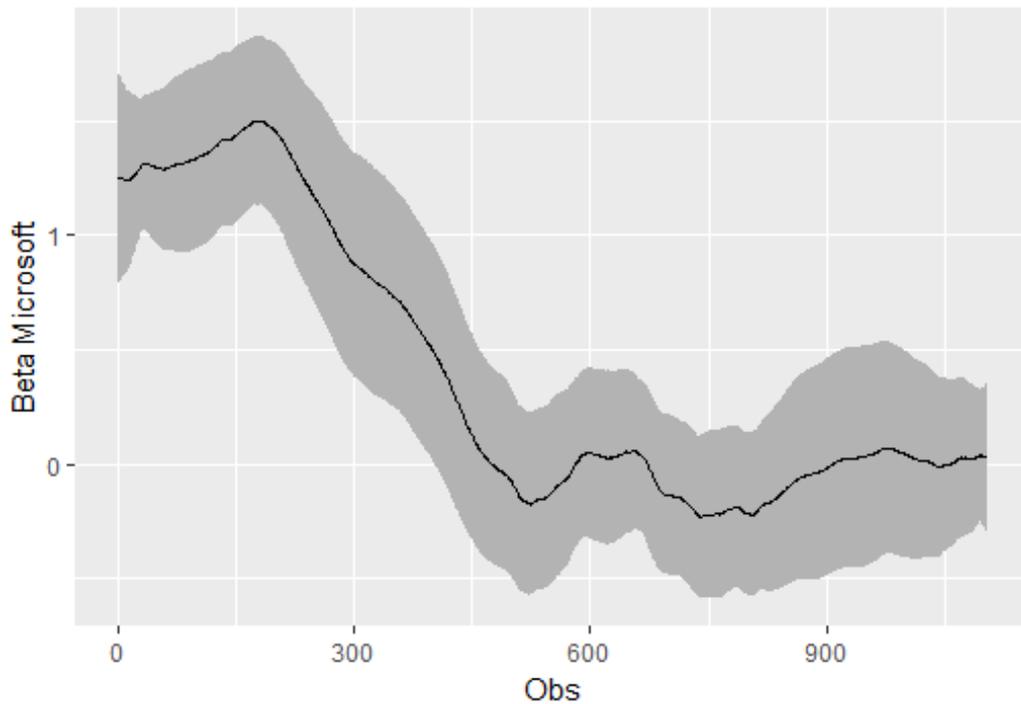


Figura 4.8: Exemplo para a ação *Microsoft* β variante no tempo.

Ainda para verificarmos a importância de considerar o β variante no tempo, a Figura 4.9 mostra um *scatter plot* considerando o β variante no tempo (observações em azul) e considerando o β fixo (cruzes vermelhas) contra as observações reais dos retornos da *Microsoft*. Uma linha $y = x$ foi traçada para ilustrar que de fato os ajustes com β variante no tempo se situam melhor espalhados em relação a linha teórica ótima.

Após verificar a importância de considerar o β variante no tempo, o algoritmo OGD foi modificado para incorporar restrições para composição do β da carteira do investidor. Como o β da carteira é simplesmente a ponderação dos β 's dos ativos, basta então para cada etapa do algoritmo, adicionarmos a estimação dos β 's de cada ativo utilizando o filtro de Kalman e usar o último valor suavizado como os novos β 's extraídos do mercado. As restrições adicionadas continuam sendo da forma $Ax \leq b$ e portanto podemos proceder com a projeção da mesma forma feita limitando o investimento máximo por ativo. Naturalmente se existir uma exigência de β muito rigorosa, o algoritmo pode ter o conjunto de soluções viáveis identicamente nulo, não sendo possível atualizar a estratégia. Exemplificando, claramente não existe nenhuma combinação das trinta empresas do *Dow Jones* com investimentos maiores do que zero e menores do que 1 tal que o β da carteira fique entre 3 e 4, sendo portanto necessário tomar cuidado ao escolher as restrições de risco.

Foram investigadas duas possibilidades de β para o investidor. Uma estratégia que

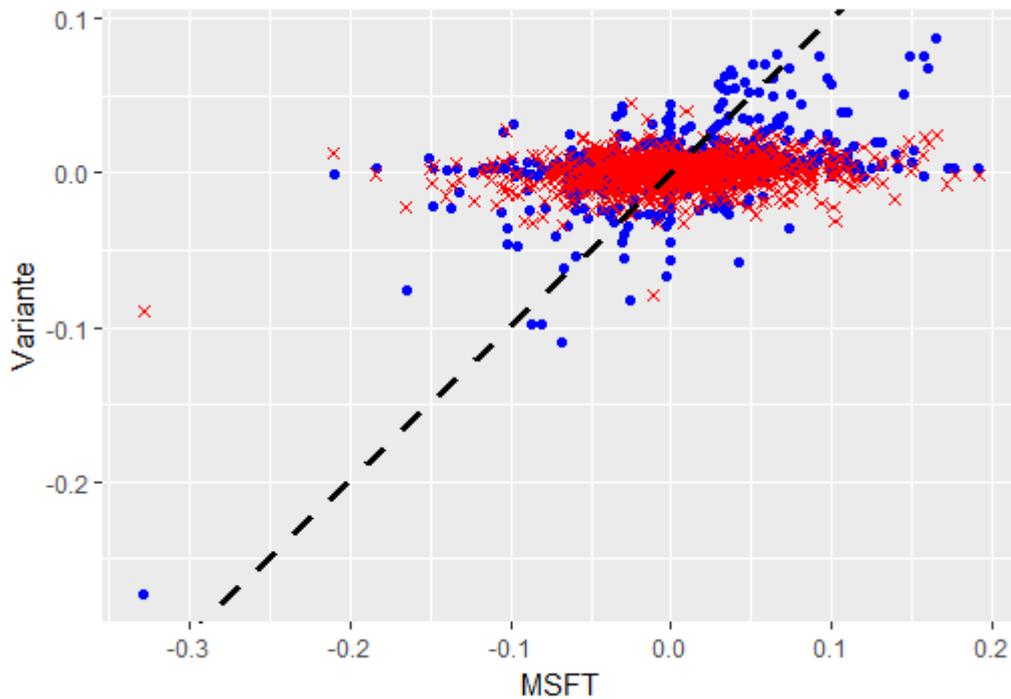


Figura 4.9: Comparação do ajuste com β fixo e β variante.

permite maior tomada de risco, com $0 \leq \beta \leq 1.7$ e outra correlacionada com o mercado, com $0.75 \leq \beta \leq 1,25$. A Figura 4.10 mostra a evolução do portfólio para $0 \leq \beta \leq 1.7$. É importante notar que como os β 's podemos mudar substancialmente em um curto período de tempo, a carteira possui bastante instabilidade, alternando significativamente a posição de investimentos. Tal fato ocorre pela mudança abrupta da solução ótima da etapa de projeção do algoritmo uma vez que a matriz de restrições em $Ax \leq b$ é diferente a cada período.

Como estamos permitindo a formação de carteiras de alto risco, com β podendo chegar em mais de 1.5 vezes o mercado, é natural esperar um aumento das medidas de risco VaR e CVaR. Tal resultado pode ser visto na Tabela 4.6. De fato a última estratégia apresentou risco empírico superior ao OGD com restrição de número de ativos e ao algoritmo OGD com $\eta = 0.001$.

Tabela 4.6: Risco portfólio OGD limitado e CAPM $0 \leq \beta \leq 1.7$

	OGD $\eta = 0.001$		OGD restrito		OGD CAPM	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.101	-0.054	-0.087	-0.049	-0.136	-0.063
CVaR	-0.140	-0.085	-0.117	-0.074	0.190	0.114

Para a carteira com $0.75 \leq \beta \leq 1.25$ as posições são mais concentradas e as mudanças

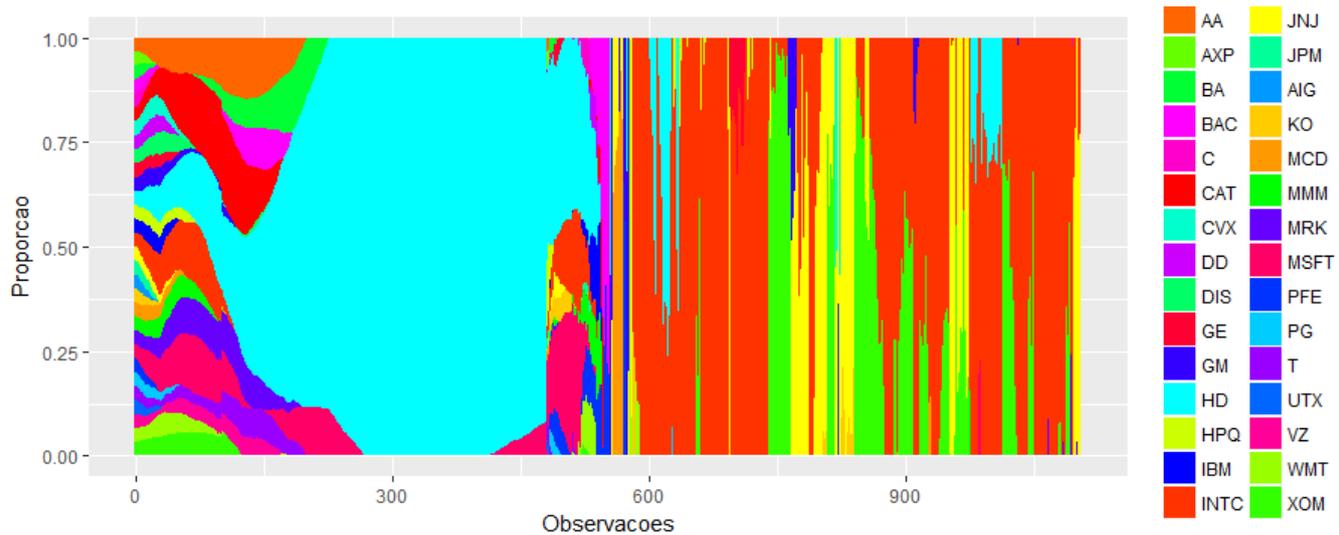


Figura 4.10: Evolução carteira OGD com $0 \leq \beta \leq 1.7$.

mais suaves. Na maior parte do período a carteira fica concentrada nos ativos HD e JPM. É interessante notar na Tabela 4.7 que de fato forçar carteiras com β próximo ao mercado, fez com que o risco empírico da carteira fosse muito similar ao observado pelo *Dow Jones*. Esse resultado era esperado, uma vez que a correlação entre *Dow Jones* e S&P500 é alta.

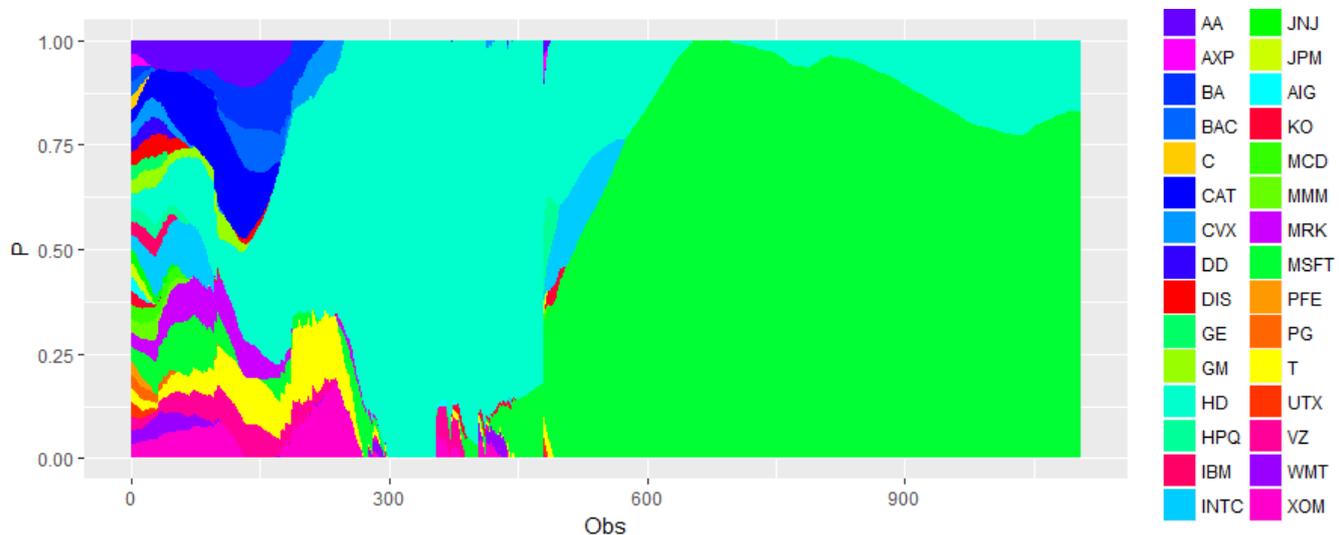


Figura 4.11: Evolução carteira OGD com $0.75 \leq \beta \leq 1.25$.

A Tabela 4.8 mostra um comparativo entre todas as estratégias implementadas e alguns *benchmarks*. Verificou-se que restringir um β próximo de 1 fez com que não só o risco da carteira mas também o retorno da mesma fosse muito similar ao DJIA. Permitir riscos mais elevados foi fundamental para que o algoritmo conseguisse concentrar a alocação em ativos

Tabela 4.7: Risco portfólio DJIA e CAPM $0.75 \leq \beta \leq 1.25$

	DJIA		OGD CAPM	
	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.064	-0.039	- 0.059	-0.042
CVaR	-0.099	-0.058	-0.103	-0.061

Tabela 4.8: Resumo retornos acumulados

Estratégia	Retorno
OGD $\eta = 0.01$	4.44
OGD $\eta = 0.001$	4.16
OGD CAPM $0 \leq \beta \leq 1.7$	4.05
OGD restrito	3.98
ONS	3.66
UCRP	3.45
DJIA	2.69
OGD CAPM $0.75 \leq \beta \leq 1.25$	2.68

com alto potencial de retorno, como consequência vemos o grande retorno acumulado das estratégias OGD convencionais e com β podendo chegar até 1.7. Estabelecer um número mínimo de ativos para a carteira também mostrou-se uma estratégia válida tanto para diminuir o risco empírico da carteira quanto para buscar altos retornos utilizando o OGD. De uma maneira geral, o algoritmo ONS apresentou baixo risco devido a estabilidade das posições mas mudanças consistentes nos pesos de forma a exceder o retorno do UCRP.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou uma abordagem baseada em otimização convexa *online* para seleção de portfólios de ações, propondo duas novas formas de incorporação de medidas risco na etapa de projeção dos algoritmos.

Todas as estratégias implementadas cumpriram sua proposta em termos de performance de carteira. Os algoritmos OGD e ONS tiveram sucesso em superar o retorno acumulado do índice de referência (DJIA) e da carteira de comparação UCRP. O algoritmo ONS mostrou-se o mais estável em relação a composição da carteira, no entanto mesmo as mudanças suaves foram suficientes para sua performance superar o UCRP sem aumentar o risco empírico.

Verificou-se que a performance do algoritmo OGD está intimamente ligada com o parâmetro de aprendizado η , que de certa forma regula a resposta do algoritmo. Tal parâmetro acaba influenciando diretamente o risco da carteira pois regula indiretamente a quantidade de ações investidas.

Neste trabalho foram propostas duas novas estratégias capazes de incorporar o risco na construção de portfólios *online*. Foi possível demonstrar que a inclusão de restrições relacionadas ao risco no conjunto de portfólios viáveis é uma maneira eficiente de combinar a teoria de aprendizado *online* com aspectos tradicionais da gestão de portfólios. A simples heurística de limitar o percentual máximo da carteira investida em um único ativo obteve um grande sucesso em termos de retorno e risco para a base de dados analisada.

Outra maneira de controlar o risco sem aumentar significativamente a complexidade dos algoritmos implementados, que também se mostrou bastante eficiente, foi através do controle do β das carteiras. Nesse caso, trabalhar com β 's variantes no tempo foi fundamental e através de restrições de limites inferiores e superiores foi possível replicar o retorno e risco do DJIA ou permitir portfólios mais arriscados.

Como sugestão de trabalhos futuros, uma verificação natural seria testar os algoritmos propostos para outros mercados, como por exemplo o mercado brasileiro. Uma investigação do desempenho dos algoritmos ao aumentar o número de ações viáveis, por exemplo das 30 ações do *Dow Jones* para centenas de ações do S&P500 é também uma investigação que merece atenção.

Outra questão bastante relevante e, de grande influência na qualidade do portfólio obtido, é a estratégia de projeção a ser utilizada. Entende-se que novas técnicas de projeções podem trazer retornos e riscos com padrões obtidos neste estudo. Em relação aos aspectos de risco, uma vez que o CVaR é considerado uma medida de risco coerente, seria interessante encontrar uma maneira de incluir a própria medida na etapa de projeção do algoritmo OGD, de tal forma que o conjunto de restrições continue convexo. Nesse trabalho foram utilizadas heurísticas como investimento máximo e controle pelo β da carteira, no entanto modelos mais robustos e com menos hipóteses que o modelo CAPM podem ser testados.

Por fim, alterações no próprio computo do gradiente do algoritmo OGD podem ser modificados, por exemplo medidas históricas do gradiente podem ser levados em consideração para executar a atualização no próximo passo, conectando ainda mais a teoria de aprendizado *online* com evoluções paramétricas nos modelos tradicionais de média variância e econometria financeira.

REFERÊNCIAS

- ACERBI, C.; TASCHE, D. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. **Economic notes**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 379–388, 2002.
- AGARWAL, A.; HAZAN, E.; KALE, S.; SCHAPIRE, R. E. Algorithms for portfolio management based on the newton method. In: ACM. **Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning**, 2006. p. 9–16.
- ALGOET, P. H.; COVER, T. M. Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. **The Annals of Probability**, JSTOR, p. 876–898, 1988.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.
- BELL, R.; COVER, T. M. Game-theoretic optimal portfolios. **Management Science**, INFORMS, v. 34, n. 6, p. 724–733, 1988.
- BELL, R. M.; COVER, T. M. Competitive optimality of logarithmic investment. **Mathematics of Operations Research**, INFORMS, v. 5, n. 2, p. 161–166, 1980.
- BERNSTEIN, P. L. **Capital ideas: the improbable origins of modern Wall Street**, 1993.
- CARMONA, R. **Statistical analysis of financial data in R**, 2014.
- CHAPADOS, N. **Portfolio choice problems: An introductory survey of single and multiperiod models**, 2011.
- COVER, T. M. Universal portfolios. **Mathematical finance**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 1–29, 1991.
- COVER, T. M.; ORDENTLICH, E. Universal portfolios with side information. **IEEE Transactions on Information Theory**, IEEE, v. 42, n. 2, p. 348–363, 1996.
- DOCHOW, R. **Online algorithms for the portfolio selection problem**, 2016.

- DURBIN, J.; KOOPMAN, S. J. **Time series analysis by state space methods**, 2012.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Risk reduction and portfolio size: An analytical solution. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 50, n. 4, p. 415–437, 1977.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Modern portfolio theory, 1950 to date. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 21, n. 11, p. 1743–1759, 1997.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Modern portfolio theory and investment analysis**, 2009.
- EVANS, J. L.; ARCHER, S. H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 23, n. 5, p. 761–767, 1968.
- EVEN-DAR, E.; KEARNS, M.; WORTMAN, J. Risk-sensitive online learning. In: SPRINGER. **ALT**, 2006. p. 199–213.
- FABOZZI, F. J.; KOLM, P. N.; PACHAMANOVA, D. A.; FOCARDI, S. M. **Robust portfolio optimization and management**, 2007.
- FAMA, E. F. Risk, return and equilibrium: some clarifying comments. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 23, n. 1, p. 29–40, 1968.
- FAMA, E. F. Multiperiod consumption-investment decisions. **The American Economic Review**, JSTOR, p. 163–174, 1970.
- FISHBURN, P. C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. **The American Economic Review**, JSTOR, v. 67, n. 2, p. 116–126, 1977.
- GAIIVORONSKI, A. A.; STELLA, F. Stochastic nonstationary optimization for finding universal portfolios. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 100, n. 1, p. 165–188, 2000.
- GHAOUI, L. E.; OKS, M.; OUSTRY, F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. **Operations research**, INFORMS, v. 51, n. 4, p. 543–556, 2003.
- GREENBERG, M. J. **Algebraic topology: a first course**, 2018.

- HAKANSSON, N. H. Convergence to isoelastic utility and policy in multiperiod portfolio choice. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 1, n. 3, p. 201–224, 1974.
- HAZAN, E. 10 the convex optimization approach to regret minimization. **Optimization for machine learning**, MIT press, p. 287, 2012.
- HAZAN, E.; ARORA, S. **Efficient algorithms for online convex optimization and their applications**, 2006.
- HAZAN, E.; KALAI, A.; KALE, S.; AGARWAL, A. Logarithmic regret algorithms for online convex optimization. In: SPRINGER. **COLT**, 2006. v. 4005, p. 499–513.
- HAZAN, E. et al. Introduction to online convex optimization. **Foundations and Trends® in Optimization**, Now Publishers, Inc., v. 2, n. 3-4, p. 157–325, 2016.
- HELMBOLD, D. P.; SCHAPIRE, R. E.; SINGER, Y.; WARMUTH, M. K. On-line portfolio selection using multiplicative updates. **Mathematical Finance**, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 325–347, 1998.
- HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**, 2006.
- JOBSON, J. D.; KORKIE, R. M. Putting markowitz theory to work. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals, v. 7, n. 4, p. 70–74, 1981.
- JONDEAU, E.; ROCKINGER, M. Optimal portfolio allocation under higher moments. **European Financial Management**, Wiley Online Library, v. 12, n. 1, p. 29–55, 2006.
- KELLY, J. L. A new interpretation of information rate. **Bell Labs Technical Journal**, Wiley Online Library, v. 35, n. 4, p. 917–926, 1956.
- KROKHMAL, P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. **Journal of risk**, Citeseer, v. 4, p. 43–68, 2002.
- LI, B.; HOI, S. C. Online portfolio selection: A survey. **ACM Computing Surveys (CSUR)**, ACM, v. 46, n. 3, p. 35, 2014.
- LI, B.; HOI, S. C. H. **Online Portfolio Selection: Principles and Algorithms**, 2015.

- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The review of economics and statistics**, JSTOR, p. 13–37, 1965.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MEUCCI, A. **Risk and asset allocation**, 2009.
- MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica: Journal of the econometric society**, JSTOR, p. 768–783, 1966.
- MOSSIN, J. Optimal multiperiod portfolio policies. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 41, n. 2, p. 215–229, 1968.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of risk**, v. 2, p. 21–42, 2000.
- RUBINSTEIN, M. E. The fundamental theorem of parameter-preference security valuation. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge Univ Press, v. 8, n. 01, p. 61–69, 1973.
- SAMUELSON, P. A. The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. **The Review of Economic Studies**, JSTOR, v. 37, n. 4, p. 537–542, 1970.
- SHARPE, W. Quadratic-programming as a technique for portfolio selection. In: BLACKWELL PUBL LTD 108 COWLEY RD, OXFORD OX4 1JF, OXON, ENGLAND. **ECONOMETRICA**, 1962. v. 31, n. 3, p. 595–596.
- SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. **Management science**, INFORMS, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- SHARPE, W. F. Mutual fund performance. **The Journal of business**, JSTOR, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

- SHARPE, W. F. The sharpe ratio. **The journal of portfolio management**, Institutional Investor Journals, v. 21, n. 1, p. 49–58, 1994.
- SILVEIRA, H. P. da; FAMÁ, R.; BARROS, L. A. B. de C. Conceito de taxa livre de risco e sua aplicação no capital asset pricing model-um estudo exploratório para o mercado brasileiro. In: **II Encontro Brasileiro de Finanças**, 2002.
- TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958.
- TREYNOR, J. L. How to rate management of investment funds. **Harvard business review**, HARVARD BUSINESS SCHOOL PUBLISHING CORPORATION 60 HARVARD WAY, BOSTON, MA 02163, v. 43, n. 1, p. 63–75, 1965.
- ZINKEVICH, M. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent. In: **Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning (ICML-03)**, 2003. p. 928–936.

Apêndice A - COMPOSIÇÃO DJIA

Tabela A.1: Composição DJIA - Situação em 03 de Fevereiro de 2009

Sigla	Empresa	Setor segundo o ICB
AA	<i>Alcoa Inc.</i>	Mineração e siderurgia
AXP	<i>American Express</i>	Serviços financeiros
BA	<i>Boeing</i>	Aeroespacial e defesa
BAC	<i>Bank of America Corp</i>	Serviços financeiros
C	<i>Citigroup Inc.</i>	Serviços financeiros
CAT	<i>Caterpillar</i>	Engenharia industrial
CVX	<i>Chevron</i>	Produção de petróleo e gás
DD	<i>E.I. duPont de Nemours and Co.</i>	Indústria química
DIS	<i>Disney</i>	Entretenimento
GE	<i>General Electric</i>	Indústria geral
GM	<i>General Motors</i>	Produção de motores e automóveis
HD	<i>Home Depot</i>	Varejista construção civil
HPQ	<i>Hewlett-Packard Co.</i>	Hardware & equipamento de alta tecnologia
IBM	<i>IBM</i>	Hardware & equipamento de alta tecnologia
INTC	<i>Intel</i>	Hardware & equipamento de alta tecnologia
JNJ	<i>Johnson & Johnson</i>	Farmacêuticas e biotecnologia
JPM	<i>JPMorgan Chase</i>	Serviços financeiros
AIG	<i>American International Group</i>	Seguros e serviços financeiros
KO	<i>Coca-Cola</i>	Bebidas
MCD	<i>McDonald's</i>	Alimentação / restaurantes
MMM	<i>3M</i>	Indústrias gerais
MRK	<i>Merck & Co., Inc.</i>	Indústria farmacêutica
MSFT	<i>Microsoft</i>	Hardware/Software/Jogos/Entretenimento
PFE	<i>Pfizer</i>	Farmacêuticas e biotecnologia
PG	<i>Procter & Gamble</i>	Bens de uso pessoal
T	<i>AT&T Inc. Stock Chart</i>	Telecomunicações
UTX	<i>United Technologies</i>	Aeroespacial e defesa
VZ	<i>Verizon Communications</i>	Telecomunicações
WMT	<i>Wal-Mart</i>	Varejo geral/Hipermercado
XOM	<i>Exxon Mobil</i>	Produção de petróleo e gás