Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Giovanna Arelis Baldeón Penao

Sobre Folheações Projetivas Sem Soluções Algébricas

Juiz de Fora

2018

Giovanna Arelis Baldeón Penao

Sobre Folheações Projetivas Sem Soluções Algébricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Coorientadora: Flaviana Andréa Ribeiro

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Giovanna Arelis Baldeón Penao .
Sobre Folheações Projetivas Sem Soluções Algébricas / Giovanna Arelis Baldeón Penao . – 2018.
93 f. : il.

Orientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Coorientadora: Flaviana Andréa Ribeiro
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Espaco Tangente . 2.1-Formas Diferenciais . 3.Bases de Gröbner . 4.Folheação no Plano Projetivo I. Santos da Cruz, Joana Darc Antonia, II. Andréa Ribeiro, Flaviana, III. Título .

Giovanna Arelis Baldeón Penao

Sobre Folheações Projetivas Sem Soluções Algébricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Flaviana Andréa Ribeiro - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro -
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Artur Afonso Guedes Rossini -
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais - Campus Juiz de Fora

Dedico este trabalho na memoria de meu avô, Tomas Baldeón Salome a quem sempre levarei em meu coração e aos meus sobrinhos, Nicolle, Marcos, Gonzalo, Valentín e Jair que com amor e alegria sempre me incentivaram a continuar melhorando em todos os aspectos da vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força nestes dois anos de mestrado.

Aos meus pais, Marcela Penao e Vicente Baldeón, pela paciência, amor, conselhos e amor incondicional.

Aos meus sobrinhos, Ana Nicolle, Marcos Antonio, Gonzalo, Valentin e Jair, por simplesmente existirem em minha vida e por serem um dos motivos para sempre querer melhorar como ser humano e como profissional.

Aos meus irmãos Luis, Antonio e Paúl.

Ao meu namorado Cristian Loli, pela paciência, cuidado e acompanhamento nestes dois anos de mestrado, ainda morando muito longe de mim sempre esteve presente, passando-me serenidade nos momentos em que eu mais precisei.

A todos os meus familiares que sempre acreditaram em mim.

A todos os meus amigos que me ajudaram, em especial, aos amigos Júlio Lanazca que sempre me compreendeu e me apoiou, mais ainda nos últimos dias de luta, e Naamã Galdino que me mostrou que com perseverança e dedicação podemos colher bons frutos.

Aos meus amigos Pablo, Factor e Nelsón pelos conhecimentos computacionais compartilhados e pelos momentos de amizade.

Às amigas Rosmery, pela amizade e apoio incondicional, e Ana Cuvaca, pelos conselhos e amizade durante o ano em que moramos juntas.

Aos meus amigos Heber Cristina, Marcela Nascimento, Mauro Junior, Eli Érisson e Sarah, Daniel Pereira, Danilo, Mariana, Edinéia, Sebástian, Camilo, Sergio, Edinaílton, William, Guillerme, Alejandro, Dante e Marco, pela alegria e otimismo.

Um agradecimento especial às minhas orientadoras Profª. Drª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz e Profª. Drª. Flaviana Andréa Ribeiro que aceitaram me orientar, pela paciência para tirar minhas dúvidas e também pela amizade que demonstraram.

Aos Prof. Dr. Artur Afonso Guedes Rossini e Profª. Drª Beatriz Casulari da Motta Ribeiro por aceitarem participar da minha banca.

Aos professores Dr. Frederico Sercio Feitosa, Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, Dr. Alfonso Perez Salvatierra, Dr. Aliaga Llanos (UNMSM), pelos ensinamentos.

Ao coordenador do Mestrado Grigori Chapiro e à secretária do Mestrado Paula Reis.

À CAPES, pelo importante apoio financeiro concedido ao longo de todo o curso.

“A matemática não conhece nenhuma raça ou limites geográficos. Para a matemática, o mundo cultural é um país.”- David Hilbert.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar um método, apresentado em [6], que nos permite determinar se uma folheação no plano projetivo possui ou não soluções algébricas, usando apenas métodos de computação algébrica. Mais especificamente usando bases de Gröbner. Com este método é possível procurar por outros exemplos de folheações sem soluções algébricas.

Palavras-chave: Variedades Projetivas. Campos Vectoriais. 1-Formas Diferenciais. Folheação no Plano Projetivo.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a method, given by S. C. Coutinho and Bruno F. M. Ribeiro in [6], to check whether certain holomorphic foliations on the complex projective plane have algebraic solutions, using only methods of algebraic computing or more precisely, using Gröbner bases. This algorithm is then used to produce examples of foliations without algebraic solutions.

Key words: Projective Varieties. Vector Fields. 1-Differential Forms. Holomorphic Foliations on the Projective Plane.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial racional no plano complexo é uma equação diferencial da forma $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, onde $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. As curvas obtidas pelo prolongamento das soluções locais de uma equação diferencial deste tipo definem no plano uma folheação por curvas (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções). De forma simplificada, uma folheação do plano complexo é uma decomposição deste em curvas não singulares que são localmente associadas a equações diferenciais.

Um estudo sobre soluções algébricas de uma equação diferencial racional no plano complexo foi feito por J. G. Darboux em 1878. Um dos pesquisadores que contribuíram muito neste estudo foi H. Poincaré. Em um artigo publicado no ano de 1891, ver [11], onde são apresentados alguns resultados sobre a existência de soluções algébricas para equações polinomiais em $\mathbb{C}^2$, Poincaré fez a seguinte afirmação:

"Para determinarmos se uma equação de primeira ordem e de primeiro grau é algebricamente integrável, basta encontrarmos um limite superior para o grau de suas integrais primeiras, tendo isso precisamos fazer apenas alguns cálculos algébricos."

Atualmente o problema de limitar o grau de uma solução algébrica de uma equação diferencial polinomial, em termos do grau da equação diferencial, é conhecido como "Problema de Poincaré".

Já se sabe que este limite não existe se consideramos apenas o grau da equação diferencial, veja o Exemplo 3.18 em [12] . Entretanto, se considerarmos outros parâmetros, a resposta a este problema passa a ser afirmativa.

Em 1979, J. P. Jouanolou provou que o conjunto das folheações holomórficas de $\mathbb{P}^2$ que não tem solução algébrica é denso no espaço que parametriza as folheações. Para a prova deste fato Jouanolou construiu uma folheação algébrica em $\mathbb{P}^2$ sem soluções algébricas.

Em 1994, Carnicer em [4] encontrou a mesma cota que Cerveau e Lins Neto encontraram em [5] para o grau de uma curva invariante que não contém nenhuma singularidade dicrítica da folheação. Em 1997, Campillo e Carnicer, [3], apresentaram cotas que dependem da resolução de singularidades da curva invariante. Outras cotas podem ser encontradas em [16] e [15].

A prova dada por Jouanolou, e outras provas mais recentes, dependem de propriedades muito especiais. Mais ainda, todos os exemplos explícitos de folheações de $\mathbb{P}^2$ sem soluções algébricas são pequenas variações do exemplo construído por Jouanolou.

O objetivo deste trabalho é estudar um método, apresentado em [6], que nos permite determinar se uma folheação possui ou não soluções algébricas usando apenas métodos de computação algébrica, mais especificamente, bases de Gröbner. Com este método é possível procurar por exemplos de folheações sem soluções algébricas.

A estratégia usada pelos autores foi a sugerida por Poincaré, ou seja, foram consideradas folheações algébricas com um limite superior para o grau de suas possíveis soluções algébricas. Especificamente, folheações sem expoentes racionais positivos, pois neste caso uma tal cota superior é conhecida.

Portanto, precisamos inicialmente de um método para testarmos se uma folheação tem ou não expoentes racionais positivos e em seguida outra maneira de testarmos se existe ou não solução algébrica.

Este trabalho será apresentado na ordem seguinte.

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos de variedades afins e projetivas.

No Capítulo 3, estudamos espaços tangentes à variedades afins e projetivas e os relacionamos com o conjunto das k-derivações.

No Capítulo 4 e 5, trabalhamos com os campos vetoriais no plano projetivo e as 1-formas diferenciais.

No Capítulo 6, apresentamos dois algoritmos: um para determinar se uma dada folheação de $\mathbb{P}^2$ tem expoentes racionais positivos e o outro para determinar se uma folheação de $\mathbb{P}^2$ tem soluções algébricas. Os fundamentos matemáticos que justificam os algoritmos são apresentados também neste capítulo.

No Apêndice, apresentamos a definição e alguns resultados sobre bases de Gröbner.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 VARIEDADES ALGÉBRICAS AFINS

Seja k um corpo algebricamente fechado. Denotamos por $\mathbb{A}^n(k)$, ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$, o espaço afim de dimensão n sobre o corpo k, ou seja,

$$\mathbb{A}^n(k) = \{\, p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\,;\; p_1, \ldots, p_n \in k\}.$$

Denotamos o anel de polinômios em n variáveis sobre k por $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Definição 2.1. Seja $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é dito um zero de F se $F(p) = 0$.

Definição 2.2. Seja $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio não constante. Definimos o conjunto dos zeros de F como sendo $Z(F) = \{p \in \mathbb{A}^n\,;\; F(p) = 0\}$. Este conjunto é chamado de hipersuperfície.

Quando $n = 2$ uma hipersuperfície é chamada de curva. Uma curva dada por um polinômio F de grau 1 é dita reta.

Exemplo 2.3. Se $F(x, y) = y - x^2$, então o conjunto dos zeros de F é

$$Z(F) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{A}^2;\; p_2 = {p_1}^2\}.$$

Podemos generalizar a Definição 2.2 para um conjunto de polinômios em $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definição 2.4. Seja S um subconjunto não vazio de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Definimos o conjunto dos zeros de S por

$$Z(S) = \{p \in \mathbb{A}^n\,;\; F(p) = 0, \forall\, F \in S\}.$$

Definição 2.5. Um subconjunto V de $\mathbb{A}^n$ é dito um conjunto algébrico (afim) se $V = Z(S)$, para algum subconjunto $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

Lema 2.6. Os conjuntos algébricos satisfazem as seguintes propriedades:

1. $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ e $Z(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$.

2. Se $S_1, S_2 \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ e $S_1 \subset S_2$, então $Z(S_2) \subset Z(S_1)$.

3. Dada uma coleção $\{S_\lambda\}_\lambda \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, então $\cap_\lambda Z(S_\lambda) = Z(\cup_\lambda S_\lambda)$.

4. Se $S_1, S_2 \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ e $S_1 \,.\, S_2 := \{f_1.f_2\,;\; f_i \in S_i,\; i = 1,\, 2\}$, então

$$Z(S_1 \,.\, S_2) = Z(S_1) \cup Z(S_2).$$

Demonstração. Segue direto das definições. $\square$

Exemplo 2.7. Seja $F = y^2 - x^2y \in k[x,y]$. Então o conjunto algébrico $Z(F)$ é

$$\begin{aligned} Z(F) &= \{(x,y) \in \mathbb{A}^2;\ y(y-x^2) = 0\} = \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{A}^2;\ y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2;\ (y-x^2) = 0\} = \\ &= Z(y) \cup Z(y-x^2). \end{aligned}$$

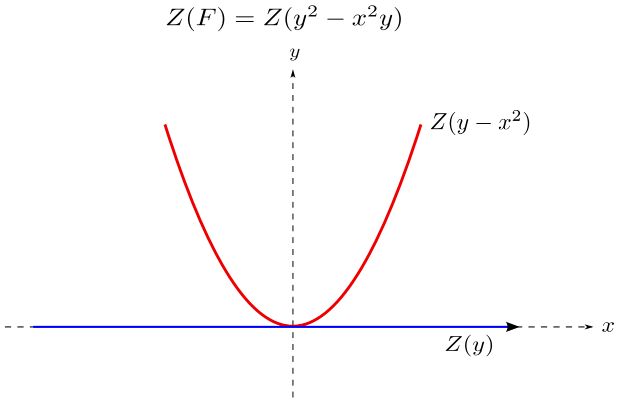

Figura 1 – Exemplo 2.7

Definição 2.8. Os conjuntos algébricos de $\mathbb{A}^n$ são ditos conjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$. Os subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ que são complementares de conjuntos fechados são ditos abertos de $\mathbb{A}^n$.

Como consequência do Lema 2.6, temos que $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ são conjuntos abertos, a união arbitraria de abertos é um aberto e interseção finita de abertos é um aberto. Portanto os conjuntos abertos de $\mathbb{A}^n$ formam uma topologia chamada a topologia de Zariski.

Definição 2.9. Um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{A}^n$ é dito redutível se $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{A}^n$ e $V_i \subsetneq V$, $i = 1, 2$. Caso contrario V é dito irredutível.

Definição 2.10. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$. Definimos o ideal de V como sendo o ideal

$$\mathcal{I}(V) = \{F \in k[x_1, \ldots, x_n]\,;\ F(p) = 0,\ \forall\, p \in V\}.$$

Proposição 2.11. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. V é irredutível, se somente se, $\mathcal{I}(V)$ é ideal primo em $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Demonstração. Veja [13], página 35. □

Exemplo 2.12. Se $F \in k[X_1, X_2, \ldots, x_n]$ é um polinômio irredutível, então $\langle F \rangle$ é um ideal primo e portanto $V = Z(F) \subset \mathbb{A}^n$ é irredutível.

Exemplo 2.13. No Exemplo 2.7 vimos que $V = Z(y^2 - x^2y)$ é uma curva redutível, com componentes $V_1 = Z(y)$ e $V_2 = Z(y-x^2)$, que são irredutíveis pelo Exemplo 2.12.

Definição 2.14. Um conjunto V algébrico e irredutível de $\mathbb{A}^n$ é dito uma variedade afim.

2.2 ANEL DE COORDENADAS DE UMA VARIEDADE

Definição 2.15. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico não vazio. Definimos o anel de coordenadas de V, denotado por $K[V]$, como sendo

$$K[V] = \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}. \tag{2.1}$$

Pela Definição 2.15, se $f \in K[V]$ então $f = \overline{F}$, onde $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Os elementos do anel de coordenadas de V são classes de equivalências de polinômios

$$\overline{F} = \{G \in k[x_1, \ldots, x_n]\,;\; G - F \in \mathcal{I}(V)\}.$$

Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto não vazio, consideramos o conjunto

$$\mathfrak{F}(X, k) = \{f : X \longrightarrow k;\; f \text{ é função}\}.$$

Observação 2.16. $(\mathfrak{F}(X, k), +, \,.\,)$ com as operações

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$;

(b) $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$, $\forall x \in X$.

é um anel comutativo, com unidade. Podemos ainda identificar k com o subanel de $\mathfrak{F}(X, k)$ das funções constantes.

Definição 2.17. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Uma função $f \in \mathfrak{F}(V, k)$ é chamada função polinomial sobre V se existe um polinômio $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f(p) = F(p), \forall\, p \in V$. Neste caso denotamos f por $F|_V$.

Observação 2.18. O conjunto das funções polinomiais é um subanel de $\mathfrak{F}(V, k)$ que contém k.

Note que cada polinômio $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ define uma função polinomial em V. Além disso, dois polinômios $F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ definem a mesma função polinomial f se e somente se $F(p) = f(p) = G(p),\ \forall\, p \in V$. Portanto $F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ definem a mesma função polinomial em V se somente se $F - G \in \mathcal{I}(V)$.

Isto nos dá uma identificação de $K[V]$ com o anel das funções polinomiais de V em k.

$$\begin{array}{ccc} K[V] & \longleftrightarrow & \{f : V \longrightarrow k\,;\ \text{f é função polinomial}\} \\ \overline{F} & \longmapsto & f = F|_V \colon V \longrightarrow k \end{array}$$

Tal identificação nos permite enxergar os elementos de $K[V]$, os quais são classes de equivalências, como funções de V em k.

2.3 FUNÇÕES RACIONAIS E O CORPO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Se $V \subset \mathbb{A}^n$ é uma variedade, então $K[V]$ é um domínio de integridade, pois, pela Proposição 2.11, $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo.

Definição 2.19. Se V é uma variedade de $\mathbb{A}^n$, então o corpo de frações do anel de coordenadas de V é chamado corpo das funções racionais em V. Ele será denotado por $K\,(V)$, ou seja,

$$K\,(V) = \left\{ \frac{f}{g};\ f, g \in K[V], g \notin \mathcal{I}(V) \right\} \Big/ \sim. \tag{2.2}$$

A relação de equivalência $\sim$ em $K\,(V)$ dada em (2.2) é

$$\frac{f}{g} \sim \frac{h}{r} \text{ se e somente se } fr = gh.$$

Denotamos a classe de equivalência de um elemento f/g por $\overline{f/g}$, ou seja,

$$\overline{\left(\frac{f}{g}\right)} = \left\{ \frac{h}{r};\ \ h, r \in k[V],\ r \notin \mathcal{I}(V)\ \ e\ \ f\,r =\ g\,h \text{ em } V \right\}. \tag{2.3}$$

Definição 2.20. Uma função $\varphi \in K(V)$ é dita regular em um ponto $p \in V$ se pode ser escrita na forma $\varphi = \dfrac{f}{g}$, onde $f,\ g \in k[V]$ e $g(p) \neq 0$.

2.4 ANEL LOCAL DE UMA VARIEDADE EM UM PONTO

Definição 2.21. Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e $p \in V$. Definimos o anel local de V no ponto p por

$$\mathcal{O}_p(V) = \left\{ \frac{f}{g} \in K\,(V)\ ;\ g(p) \neq 0 \right\}.$$

Logo, $\mathcal{O}_p(V)$ é o subanel de $K(V)$ das funções que são regulares em p. Além disso, $\mathcal{O}_p(V)$ é subanel de $K(V)$ contendo $K[V]$. Portanto temos que

$$k \subset K[V] \subset \mathcal{O}_p(V) \subset K(V).$$

Sejam A um anel comutativo, P um ideal primo e

$$A \times (A - P) = \{\, (f, g)\,;\ f, g \in A\ e\ g \notin P\}.$$

Definimos a localização de A em P como o anel

$$A_P = \{A \times (A - P)\} / \sim$$

onde $(f, g) \sim (f', g')$ se existe $h \in A - P$ tal que $h(f\,g' - f'g) = 0$

Podemos ainda ver o anel local local de V em um ponto $p \in V$ como sendo a localização de $k[V]$ no ideal $m_p = \{f \in K[V];\ f(p) = 0\}$.

Baseando-nos neste fato definimos, para os subconjuntos algébricos afins, o anel local de V em p como sendo a localização de $k[V]$ em m_p, ou seja,

$$\mathcal{O}_p(V) = K[V]_{m_p}$$

O ideal $\mathfrak{M}_p(V) = \{f \in \mathcal{O}_p(V); f(p) = 0\}$ é o único ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_p(V)$.

2.5 MUDANÇA DE COORDENADAS AFINS

Seja $R :\ \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ uma aplicação polinomial definida por

$$R(x_1, \ldots, x_n) = (R_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, R_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

onde $R_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $\forall\, i = 1, \ldots, m$.

A aplicação R induz uma nova aplicação, que é um homomorfismo de anéis, $\widetilde{R}$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{R} :\ k[x_1, \ldots, x_m] & \longrightarrow & k[x_1, \ldots, x_n] \\ F & \mapsto & \widetilde{R}(F) := F \circ R. \end{array}$$

Denotamos a imagem de F por F^R, isto é, $F^R := \widetilde{R}(F) = F \circ R$.

Definição 2.22. Seja I um ideal de $k[x_1, \ldots, x_m]$. Definimos o ideal I^R em $k[x_1, \cdots, x_n]$ por $I^R = \langle \{F^R\ ;\ F \in I\} \rangle\ \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definição 2.23. Se V é um conjunto algébrico afim em $\mathbb{A}^m$, definimos um novo conjunto algébrico afim em $\mathbb{A}^n$ por $V^R = V(I^R)$, onde $I = I(V)$ é o ideal de V em $k[x_1, \ldots, x_m]$.

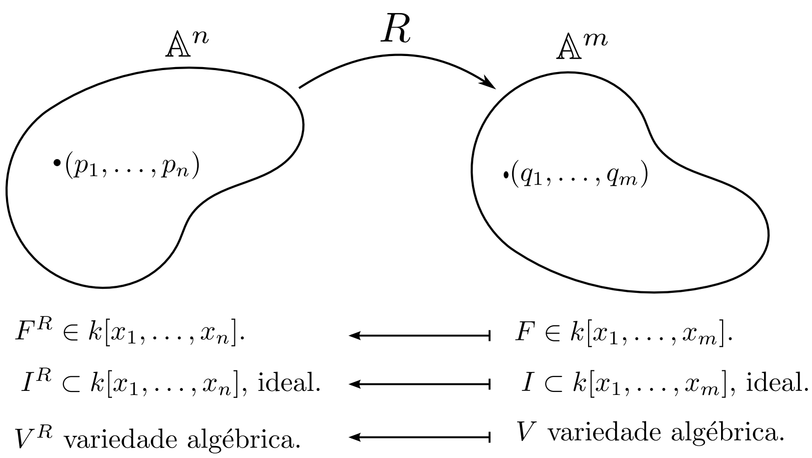

Figura 2 – Definições 2.22 e 2.23

Observação 2.24. Se uma aplicação polinomial $R :\ \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ é uma bijeção, então $R^{-1}(V) = V(I^R)$, para todo conjunto algébrico afim V de $\mathbb{A}^n$.

De fato, temos que

$$p \in R^{-1}(V) \iff R(p) \in V \iff (F \circ R)(p) = 0, \ \forall F \in I(V).$$

Como $F \circ R = F^R$, segue que

$$p \in R^{-1}(V) \iff F^R(p) = 0, \ \forall F \in I(V) \iff F^R(p) = 0, \ \forall F^R \in I(V)^R.$$

Portanto, $p \in R^{-1}(V) \iff p \in V(I^R)$.

Observação 2.25. Se $V = Z(F)$, onde F é um polinômio não constante, então $V^R = Z(F^R)$.

Definição 2.26. Uma mudança de coordenadas afins em $\mathbb{A}^n$ é uma aplicação polinomial bijetiva $R = (R_1, \ldots, R_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ tal que

$$R_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \, ; \, a_{ij} \in k, \, \forall i = 1, \ldots, n \text{ e } \forall j = 0, \ldots, n.$$

Observe que uma mudança de coordenadas R pode ser escrita na forma $R = R^{''} \circ R^{'}$, onde $R^{''}$ é uma translação e $R^{'}$ é uma aplicação linear. Descrevemos abaixo estas aplicações.

(a) $R^{'} = (R^{'}_1, \ldots, R^{'}_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$, onde

$$R^{'}_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n, \text{ para cada } i \in \{1, \cdots, n\}.$$

(b) $R^{''} = (R^{''}_1, \ldots, R^{''}_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$, onde $R^{''}_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i0} + x_i$.

Além disso, como R é uma bijeção, a aplicação $R^{'}$ é uma transformação linear invertível.

Lema 2.27. A composição de duas mudanças de coordenadas afins é uma mudança de coordenadas afins.

Demonstração. Sejam $R = (R_1, \ldots, R_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$, $S = (S_1, \ldots, S_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ e duas mudanças de coordenas afins, onde

$$R_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n.$$

$$S_i(x_1, \ldots, x_n) = b_{i0} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j, \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n.$$

Então $(S \circ R)(x_1, \ldots, x_n) =$

$$= (S_1 (R (x_1, \ldots, x_n)), \ldots, S_n (R (x_1, \ldots, x_n))) =$$

$$= (S_1 (R_1 (x_1, \ldots, x_n), \ldots, R_n (x_1, \ldots, x_n)), \ldots, S_n (R_1 (x_1, \ldots, x_n), \ldots, R_n (x_1, \ldots, x_n))) =$$

$$= \left(b_{10} + \sum_{j=1}^{n} b_{1j} R_j \left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, b_{n0} + \sum_{j=1}^{n} b_{nj} R_j \left(x_1, \ldots, x_n\right) \right) =$$

$$= \left(b_{10} + \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \left(a_{j0} + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right), \ldots, b_{n0} + \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \left(a_{j0} + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) \right) =$$

$$= \left(b_{10} + \sum_{j=1}^{n} b_{1j} a_{j0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{1j} a_{ji} x_i, \ldots, b_{n0} + \sum_{j=1}^{n} b_{nj} a_{j0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{nj} a_{ji} x_i \right) =$$

$$= \left(c_0 + \sum_{j=1}^{n} d_{0j} x_j, \ldots, c_n + \sum_{j=1}^{n} d_{nj} x_j \right), \text{ onde } c_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \text{ e } d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$$

Logo $S \circ R$ é a composição de uma translação com uma aplicação linear. □

Outra maneira de denotarmos uma mudança de coordenadas afins $R : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, é expressando R em forma matricial da seguinte forma:

$$R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \left[R^{'}\right]^T,$$

onde denotamos por $[R^{'}]$ a matriz associada à aplicação linear de R, isto é,

$$[R^{'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observamos que $\det([R'])$ é invertível pois a mudança de coordenadas é uma bijeção.

Se $S : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ é uma outra mudança de coordenadas afins, expressa matricialmente por

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{20} & \cdots & b_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \left[S^{'}\right]^T,$$

onde a matriz associada à aplicação linear de S é

$$[S^{'}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então $R(S(x_1, \ldots, x_n)) =$

$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{10} & b_{20} & \cdots & b_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \left[S^{'}\right]^T \right) \left[R^{'}\right]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{10} & b_{20} & \cdots & b_{n0} \end{bmatrix} \left[R'\right]^T + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \left[S'\right]^T \left[R'\right]^T.$$

Logo $[R \circ S] = [R'][S']$.

Observação 2.28. Se $R : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ é uma mudança de coordenadas afins, então a sua inversa $R^{-1} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ é uma mudança de coordenadas afins e

$$R^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (a_{10}, \ldots, a_{n0}) \left[R'\right]^{-1} + (x_1, x_2, \ldots, x_n) \left[R'\right]^{-1}.$$

Exemplo 2.29. Seja $R : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ uma mudança de coordenadas afins definida por

$$R(x_1, x_2) = (a_{10} + a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2,\ a_{20} + a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2).$$

Então, a transformação de R é

$$R(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \left[R'\right]^T, \text{ onde } [R'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se $d = det([R']) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, então

$$[R']^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{d} & \dfrac{-a_{12}}{d} \\ \dfrac{-a_{21}}{d} & \dfrac{a_{11}}{d} \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$R^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{d} (a_{12}a_{20} - a_{22}a_{10} + a_{22}x_1 - a_{12}x_2,\ a_{21}a_{10} - a_{11}a_{20} - a_{21}x_1 + a_{11}x_2).$$

Exemplo 2.30. Seja L a reta que passa por dois pontos $p, q \in \mathbb{A}^n$. Se R é uma mudança de coordenadas afins em $\mathbb{A}^n$, então $R(L)$ é a reta que passa por $R(p)$ e $R(q)$.

Seja $R = (R_1, \ldots, R_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ com

$$R_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Sejam $R_i'(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ \ \forall i = 1, \ldots, n,\ p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Então $L = \{(p_1 + t(q_1 - p_1), \ldots, p_n + t(q_n - p_n)),\ t \in k\}$ e

$$\begin{aligned} R_i(p + t(q - p)) &= a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_j + t(q_j - p_j)) \\ &= a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_j) + t\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q_j - p_j) \\ &= R_i(p_1, \ldots, p_n) + t\left[R_i'(q_1, \ldots, q_n) - R_i'(p_1, \ldots, p_n)\right]. \end{aligned}$$

Portanto, $R(L) = \{R(p) + t(R'(q) - R'(p))\}$.

Definição 2.31. Dizemos que uma propriedade "P" relativa a curvas (ou configurações planas tais como conjunto de pontos, retas, etc) é uma propriedade invariante por mudança de coordenadas, se para cada mudança de coordenadas afins R, uma curva satisfaz a propriedade "P", se somente se, a imagem da curva por R satisfaz a propriedade "P".

Exemplo 2.32. O grau de uma curva é uma propriedade invariante.

Exemplo 2.33. A propriedade de 3 retas serem concorrentes é uma propriedade invariante.

Exemplo 2.34. Um ponto pertencer a uma curva é também uma propriedade invariante.

2.6 MULTIPLICIDADE DE INTERSEÇÃO

2.6.1 Invariância do Índice de Interseção

Sejam $C = Z(F) \subset \mathbb{A}^n$ uma hipersuperfície, onde $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$, e L uma reta em $\mathbb{A}^n$ que passa pelo ponto $p \in \mathbb{A}^n$, com direção dada por $v \in \mathbb{A}^n$. Então,

$$C \cap L = \{p + tv; F(p + tv) = 0\}$$

Obtemos assim que os pontos de interseção da reta L com a curva C estão em correspondência com as raízes do polinômio $\underset{L}{F}(t) := F(p + tv)$ em $k[t]$.

Observação 2.35.

(a) Se $L \cap C = \emptyset$, então $\underset{L}{F}(t)$ é um polinômio constante não nulo.

(b) Se L é uma componente de C, então $\underset{L}{F}(t)$ é identicamente nulo.

Sendo $k[t]$ um domínio de fatoração única (DFU), podemos decompor $\underset{L}{F}(t)$ de forma única como

$$\underset{L}{F}(t) = c \prod_{i=1}^{r} (t - \alpha_i)^{m_i},$$

onde m_i é a multiplicidade de α_i como zero de $\underset{L}{F}(t)$. Estes α_i se correspondem univocamente com os pontos de interseção da reta L com a curva C. Além disso $\sum_{i=1}^{r} m_i = d$, onde $d = \deg(\underset{L}{F}(t))$.

Lema 2.36. Os inteiros m_i independem de mudanças de coordenadas afim .

Demonstração. Seja $L = \{p + tv \in \mathbb{A}^n;\ t \in k\}$ a reta que passa por p com vetor diretor v. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} \psi : & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & k[t] \\ & F & \longmapsto & \underset{L}{F}(t) = F(p + tv) \end{array}$$

Observemos que para cada par $F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ cumprem-se:

- $\psi(\alpha F + G) = (\alpha F + G)(p + tv) = \alpha F(p + tv) + G(p + tv)) = \alpha\psi(F) + \psi(G)$.
- $\psi(FG) = (FG)(p + tv) = F(p + tv)G(p + tv) = \psi(F)\psi(G)$

Logo ψ é um homomorfismo de anéis. É fácil ver que ψ é sobrejetor.

Além disso, $Ker\,\psi = \mathcal{I}(L)$. De fato, $F \in ker(\psi)$, se somente se, $F(p + tv) = 0$. Logo, $F \in ker(\psi)$, se somente se, $F \in \mathcal{I}(L)$.

Portanto, concluímos que

$$\frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(L)} \cong k[t].$$

Além disso, por ser $k[t]$ DFU, então $\dfrac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(L)}$ é DFU. Se $\underset{L}{F}(t) \in k[t]$ tem decomposição $c\prod_{i=1}^{r}(t - \alpha_i)^{m_i}$, então a $F|_L$ corresponde uma decomposição com o mesmo número r de fatores irredutíveis distintos e a mesma quantidade m_i de vezes repetidas de cada fator irredutível.

Agora se $R : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ é uma mudança de coordenadas afins, sua inversa induz a seguinte aplicação polinomial:

$$\begin{aligned} \widetilde{R} : k[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n] \\ F &\longmapsto \widetilde{R}(F) = F \circ R^{-1}. \end{aligned}$$

Então, $\widetilde{R}$ induz um isomorfismo

$$\widetilde{R} : \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(L)} \longrightarrow \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(\widetilde{R}(L))}, \tag{2.4}$$

tal que $F|_L$ e $\widetilde{R}(F)|_{\widetilde{R}(L)}$ se correspondem, juntamente com as suas decomposições em fatores irredutíveis. $\square$

Definição 2.37. Sejam L uma reta em $\mathbb{A}^n$, $C = Z(F) \subset \mathbb{A}^n$ uma curva e $p \in C \cap L$. Se $\varphi(t) = p + tv$, $t \in k$, é uma parametrização de L, então $p = \varphi(0)$. A multiplicidade interseção (ou índice de interseção) de L com C no ponto p é a multiplicidade de $t = 0$ como um zero de $\underset{L}{F}(t)$.

Observação 2.38.

(a) Se $p \notin L \cap C$, então a multiplicidade de L com C no ponto p é 0.

(b) Se $p \in L \subset C$, então a multiplicidade de L com C no ponto p é ∞.

Exemplo 2.39. Sejam $F(x,y) = y - x^2$ e $L : y = ax + b$ curvas em $\mathbb{C}^2$. Se $a^2 + 4b = 0$, então C e L tem só uma interseção com multiplicidade 2. Se $a^2 + 4b \neq 0$, então elas tem duas interseções distintas com multiplicidade de interseção 1 em cada ponto.

De fato, como $\underset{L}{F}(x) = F(x, ax+b) = (ax+b) - x^2 \in \mathbb{C}[x]$, temos que se $a^2 + 4b = 0$, $\underset{L}{F}(x)$ tem só uma raiz repetida e se $a^2 + 4b \neq 0$, então $\underset{L}{F}(x)$ tem duas raízes distintas. Portanto, se $a^2 + 4b = 0$, então C e L tem só uma interseção com multiplicidade 2. Se $a^2 + 4b \neq 0$, C e L tem duas interseções distintas com multiplicidade de interseção 1 em cada ponto.

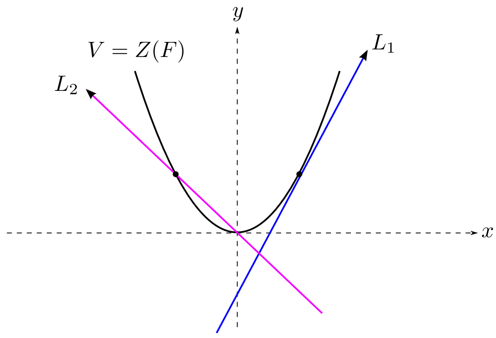

Figura 3 – Exemplo 2.39

2.7 VARIEDADES PROJETIVAS

Definimos, geometricamente, o espaço projetivo de dimensão n sobre k, denotado por $\mathbb{P}^n(k)$ ou simplesmente por $\mathbb{P}^n$, como sendo o conjunto de todas as retas de $\mathbb{A}^{n+1}$ que passam pela origem.

Um ponto $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \backslash \{0\}$ determina uma única reta passando pela origem, a saber, a reta

$$\{(\lambda p_0, \lambda p_1, \ldots, \lambda p_n)\, ; \lambda \in k\}.$$

A reta determinada por $p \in \mathbb{A}^{n+1}$ será denotada por $(p_0 : p_1 : \ldots : p_n)$.

Dois pontos $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ em $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ determinam a mesma reta se somente se existe $\lambda \in k \backslash \{0\}$, tal que $q_i = \lambda p_i$, para todo $i = 0, \ldots, n$.

Para definirmos o espaço projetivo em coordenadas homogêneas, definimos em $\mathbb{A}^{n+1} \backslash \{0\}$ a seguinte relação de equivalência.

$$(p_0, p_1, \ldots, p_n) \sim (q_0, q_1, \ldots, q_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \backslash \{0\}; q_i = \lambda p_i, \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Definição 2.40. O espaço projetivo de dimensão n sobre um corpo k é o conjunto

$$\mathbb{P}^n(k) = \left(\mathbb{A}^{n+1} \backslash \{0\}\right) / \sim .$$

Um ponto de $\mathbb{P}^n(k)$ é a classe de equivalência de um ponto

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}$$

e será de notado por $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$. Se um ponto $p \in \mathbb{P}^n(k)$ é determinado por $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}$, dizemos que $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ são as coordenadas homogêneas do ponto p. Assim,

$$\mathbb{P}^n = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n); (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}\}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto onde a ésima coordenada é não nulo e denotado por

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i \neq 0\}$$

está naturalmente em bijeção com os pontos de $\mathbb{A}^n$ e, por isso, seus pontos são chamados pontos finitos. De fato, as funções

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & U_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & (x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \psi_i : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & U_i \\ & (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \end{array}$$

são bijeções, uma inversa da outra. Por isso, identificamos $U_i = \mathbb{A}^n_i$.

Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, os pontos pertencentes ao conjunto

$$\mathbb{H}_\infty := \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i = 0\},$$

são chamados pontos no infinito. Além disso, H_∞ é dito hiperplano no infinito.

Podemos então escrever o espaço projetivo de dimensão n como a união disjunta destes dois conjuntos, isto é,

$$\mathbb{P}^n = U_i \cup \mathbb{H}_\infty,$$

ou ainda,

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Definição 2.41. Seja $F \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Dizemos que $x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ é zero do polinômio F, e escrevemos $F(x) = 0$, se F se anula para qualquer escolha de coordenadas homogêneas de x, isto é, se $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = 0$, para todo $\lambda \in k\backslash\{0\}$.

Definição 2.42. Seja $F \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio de grau d. F é chamado um polinômio homogêneo se

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \ldots, x_n), \forall\, \lambda \in k\backslash\{0\}.$$

Observação 2.43. Todo polinômio $F \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ de grau d se escreve da forma

$$F = F^{(0)} + F^{(1)} + \cdots + F^{(d)},$$

onde cada $F^{(i)}$ é a soma de todos os monômios de grau i de F. Os polinômios $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(d)}$ são chamados componentes homogêneas de F. Além disso,

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = F^{(0)}(x_0, x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda^d F^{(d)}(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

para todo $\lambda \in k \backslash \{0\}$.

Como k é um corpo infinito, temos que $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0$, para todo $\lambda \in k \backslash \{0\}$ se e somente se $F^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, para todo i. Ou seja, se um polinômio F se anula em um ponto $z \in \mathbb{P}^n$, todas as suas componentes homogêneas se anulam nesse ponto.

Definição 2.44. Seja $S \subset k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. O conjunto de zeros de S, denotado por $Z(S)$, é definido como sendo

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{P}^n; F(z) = 0, \ \forall \, F \in S\}.$$

Definição 2.45. Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é dito conjunto algébrico (projetivo), se $V = Z(S)$ para algum $S \subset k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ formado por polinômios homogêneos.

Definição 2.46. Os conjuntos algébricos projetivos de $\mathbb{P}^n$ são ditos fechados projetivos. Os complementares dos conjuntos fechados projetivos são chamados de abertos projetivos.

Definição 2.47. Os fechados projetivos definem em $\mathbb{P}^n$ uma topologia chamada Topologia de Zariski.

Exemplo 2.48. Seja $F \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo não constante. O conjunto $Z(F)$ é um fechado projetivo de $\mathbb{P}^n$, chamado uma hipersuperfície. Quando $n = 2$ uma hipersuperfície é chamada curva em $\mathbb{P}^2$.

Exemplo 2.49. Seja $F \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo. O conjunto

$$U_F := \mathbb{P}^n - Z(F)$$

é um aberto de $\mathbb{P}^n$, chamado um aberto principal.

Exemplo 2.50. Os conjuntos

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n; \ x_i \neq 0\},$$

para cada $i = 0, 1, \dots, n$, são abertos principais de $\mathbb{P}^n$, já que $U_i = \mathbb{P}^n - Z(x_i)$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definição 2.51. Um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ que é a interseção de um aberto com um fechado projetivo é chamado quasiprojetivo.

Observação 2.52. Para qualquer fechado projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$, o conjunto $X_i := X \cap \mathbb{A}_i^n$ é aberto em X. Portanto, é um quasiprojetivo.

Dado um fechado $V \subset \mathbb{A}^n \simeq U_0$, seja $\overline{V}$ a interseção de todos os fechados de $\mathbb{P}^n$ contendo V. Então, $\overline{V}$ é um fechado de $\mathbb{P}^n$, chamado fecho projetivo de V. Não é difícil ver que $\overline{V} = Z(S)$, onde

$$S = \left\{ x_0^{\deg(F)} F\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right);\ F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}(V) \right\}.$$

Definição 2.53. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ dois conjuntos quasiprojetivos. Uma função $\phi : X \to Y$ é um morfismo se, para cada $x \in X$, existem $F_0, F_1, \ldots, F_m \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, homogêneos de mesmo grau, tais que

$$\phi(x) = (F_0(x) : F_1(x) : \ldots : F_m(x)).$$

Um morfismo bijetor cuja inversa é também um morfismo é chamado um isomorfismo.

Definição 2.54. Um conjunto quasiprojetivo que é isomorfo a um fechado afim é chamado variedade afim.

Exemplo 2.55. Os conjuntos

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i \neq 0\},$$

para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, são variedades afins.

3 ESPAÇO TANGENTE À UMA VARIEDADE

Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica afim e $p \in V$ fixo. Desejamos definir a condição de tangência de uma reta passando por $p \in V$ com a variedade V no ponto p.

Suponhamos que o sistema de coordenadas de $\mathbb{A}^n$ é escolhido de modo que $p = 0$. Seja

$$L = \{ta; t \in k\} \text{ com } a \in \mathbb{A}^n - \{0\}$$

uma reta passando pelo ponto p e suponha que $\mathcal{I}(V)$ seja gerado pelos polinômios $F_1, \ldots, F_m$. O conjunto de interseção da reta L com a variedade V, denotado por $V \cap L$, é o conjunto solução do sistema $F_1(at) = F_2(at) = \cdots = F_m(at) = 0$. Além disso, os zeros comuns destes polinômios são os zeros do polinômio $f(t) = MDC\{F_1(at), F_2(at), \ldots, F_m(at)\}$ em $k[t]$.

Escrevendo $f(t)$ na forma

$$f(t) = c\prod_i (t - \alpha_i)^{m_i},\ \alpha_i \in k,\ m_i \in k,$$

observamos que $p = 0 \in V \cap L$, se somente se, $t = 0$ é raiz de $f(t)$.

Observação 3.1. Os valores $t = \alpha_i$ correspondem aos pontos de interseção de V com L.

Definição 3.2. A multiplicidade de interseção de V com L em p é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz do polinômio $f(t) = MDC\{F_1(at), F_2(at), \ldots, F_m(at)\}$, a qual denotamos por $\#(V, L, p)$.

Observação 3.3. A multiplicidade da interseção é a maior potência de t que divide $F_i(at)$, $\forall i = 1, 2, ..., m$.

Observação 3.4. Se $F_i(at)$ é identicamente nulo, $\forall i = 1, 2, ..., n.$, então a multiplicidade da interseção de V com L em 0 é considerada $+\infty$.(Nesse caso, $L \subset V$.

Observação 3.5. A multiplicidade da interseção de L com V é independente da escolha dos geradores de $\mathcal{I}(V)$.

De fato, suponhamos que $H_1, \ldots, H_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ são outros polinômios tais que $\mathcal{I}(V) = \langle H_1, \ldots, H_r \rangle$. Seja $h(t) = MDC\{H_1(at), \ldots, H_r(at)\}$. Podemos escrever cada H_i como

$$H_i = g_{i1}F_1 + ... + g_{im}F_m,\ \text{ onde } g_{i1}, \ldots, g_{im} \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

Logo

$$H_i(at) = g_{i1}(at)F_1(at) + \cdots + g_{im}(at)F_m(at).$$

Se $f(t) = MDC\{F_1(at), \ldots, F_m(at)\}$, então $f(t)|H_i(at)$, portanto $f(t)|h(t)$.

Analogamente mostra-se que $h(t)|f(t)$. Donde conclui-se que $h(t) = cf(t)$, para algum $c \in k$ não nulo.

Definição 3.6. A reta L é tangente a V em um ponto $p = 0$ se a multiplicidade de interseção de V com L em $p = 0$ é maior ou igual a 2.

Procuramos as condições para que $L = \{ta; t \in k\}$ seja tangente à V no ponto $p = 0$. Para isso escrevemos F_i na forma

$$F_i = F_i^{(0)} + F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + \cdots + F_i^{(d)},$$

onde $F_i^{(j)}$ é polinômio homogêneo de grau j, para $0 \leq j \leq d = \deg(F)$. Logo

$$F_i(ta) = tF_i^{(1)}(a) + t^2\left(F_i^{(2)}(a) + tF_i^{(3)}(a) + \cdots + F_i^{(d-2)}(a)\right),$$

onde $F_i^{(0)}(ta) = 0$, pois $t = 0$ é zero de $F_i(ta)$, já que $0 \in V \cap L$. Portanto, $F_i(ta)$ é divisível por t^2 se somente se $F_i^{(1)}(a) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Isto é, $t = 0$ é raiz de multiplicidade 2 de $F_i(ta)$ se e somente se

$$F_1^{(1)}(a) = F_2^{(1)}(a) = \ldots = F_m^{(1)}(a) = 0.$$

Portanto, a reta $L = \{ta; t \in k\}$ é tangente à V no ponto $p = 0$ se e somente se $a \in Z(F_1^{(1)}, \ldots, F_m^{(1)})$.

Definição 3.7. O lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{A}^n$ que estão em alguma reta tangente a V em p é chamado espaço tangente a V em p e é denotado por T_pV.

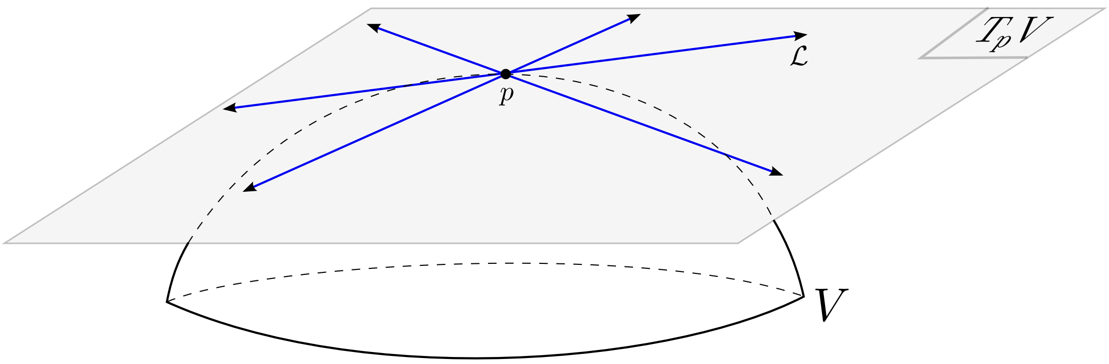

Figura 4 – Definição 3.7

Exemplo 3.8. Sejam $V = \mathbb{A}^n$ e $p \in \mathbb{A}^n$. Então $T_p\,\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$.

De fato, como $\mathcal{I}(V) = \langle 0 \rangle$, então a parte linear de F é $F^{(1)} = 0$. Portanto $T_p\mathbb{A}^n = Z(\langle F^1 \rangle) = \mathbb{A}^n$.

Exemplo 3.9. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ uma hipersuperficie, isto é, $V = Z(F)$, $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Observe que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Se $0 \in V$ e $F = L + G$, onde L denota o termo linear de F e G o termo de grau maior ou igual a dois de F, então T_0V é dada pela equação $L(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Se $L \neq 0$, então T_0V é um k espaço vetorial de dimensão $n-1$. Se $L = 0$ então $T_0V = Z(0) = \mathbb{A}^n$.

Exemplo 3.10. Sejam $C = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2\,;\, a_1^2 = a_2\}$. Como $C = Z(F)$, onde o polinômio $F(x,y) = y - x^2 \in k[x,y]$, $\mathcal{I}(C) = \langle F \rangle$ e $F^{(1)} = y$, então

$$T_0\,C = Z(y) = \{\,(x,y) \in \mathbb{A}^2;\ y = 0\} = L.$$

Até aqui o espaço tangente foi definido em termos das equações que definem uma variedade V em $\mathbb{A}^n$. É natural perguntarmos se dado um isomorfismo $f : V \longrightarrow W$, T_xV e $T_{f(x)}W$ serão isomorfos? Para responder esta pergunta reformulamos a noção de espaço tangente de modo que dependa somente do anel de coordenadas de V.

3.1 DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO REGULAR.

Definição 3.11. Sejam $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$. Definimos a diferencial de F em p como a parte linear da série de Taylor de F no ponto p, ou seja,

$$d_pF := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i).$$

Segue da definição acima que

$$\begin{aligned} d_p(F+G) &= d_p(F) + d_p(G); \\ d_p(FG) &= F(p)d_p(G) + G(p)d_p(F). \end{aligned}$$

Suponha que V é uma variedade afim tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ e $0 \in V$. Então podemos descrever o espaço tangente de V no ponto 0, como sendo dado por

$$d_0F_1 = d_0F_2 = \cdots = d_0F_m = 0, \text{ ou ainda por,}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(0)(T_i) = 0, \quad \forall\, j = 1, \dots, m.$$

Isso prova a proposição seguinte.

Proposição 3.12. Sejam p, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{A}^n$, $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$. Então

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in T_pV, \text{ se somente se, } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p)(v_i - p_i) = 0,\ \forall j = 1, \dots, m.$$

Observação 3.13. Da Proposição 3.12, vemos que

$$T_pV = Z\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i), \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i)\,\Big). \tag{3.1}$$

Logo T_pV é uma variedade algébrica.

Exemplo 3.14. Consideramos $V = Z(y^2 - yx^2) \subset \mathbb{A}^2$. Então

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2xy \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0) = 0.$$

Pela equação (3.1), temos que $T_0V = Z(\langle 0 \rangle) = \mathbb{A}^2$.

Sejam V uma variedade algébrica afim em $\mathbb{A}^n$ e $g \in k[V]$. Então, existe um polinômio $G \in k[x_1, \ldots, x_n]$, tal que $\overline{G} = g$ em $k[V]$, o qual denotamos por $G|_V = g$.

Seja $H \in k[x_1, \ldots, x_n]$ outro polinômio tal que $H|_V = G$, então $H - G \in \mathcal{I}(V)$. Se $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, escrevemos $H - G = g_1F_1 + \cdots + g_mF_m$, onde $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Neste caso,

$$\begin{aligned} d_p(H-G) &= d_p(g_1F_1 + \cdots + g_mF_m) \\ &= (g_1(p)d_pF_1 + F_1(p)d_pg_1) + \cdots + (g_m(p)d_pF_m + F_m(p)d_pg_m) \\ &= g_1(p)d_pF_1 + \cdots + g_m(p)d_pF_m. \end{aligned}$$

Daí,

$$d_p(H-G) \in \langle d_pF_1, \ldots, d_pF_m \rangle = \mathcal{I}(T_pV).$$

Assim $d_p(H - G) = 0$ em T_pV e $d_pH = d_pG$ em T_pV.

Definição 3.15. Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica, $p \in V$ e $f \in k[V]$. A diferencial de f no ponto p é definida por $d_pf = d_pG|_{T_pV}$, onde $G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ é tal que $G|_V = f$.

Para cada $p \in V$ fixo, podemos definir a função diferencial como sendo

$$\begin{aligned} d_p : k[V] &\longrightarrow (T_pV)^* \\ f &\longmapsto d_pf. \end{aligned}$$

Já que $d_p(\alpha) = 0,$ para cada $\alpha \in k$, podemos substituir o estudo desta função pelo da função $d_p : m_p \longrightarrow (T_pV)^*$, onde $m_p = \{f \in k[V]; f(p) = 0\}$.

3.1.1 Natureza Intrínseca do Espaço Tangente

Teorema 3.16. Sejam V uma variedade algébrica afim e $p \in V$. A função $d_p : m_p \longrightarrow (T_pV)^*$ induz um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\dfrac{m_p}{m_p^2}$ e $(T_pV)^*$.

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $p = 0$. Consideramos o ideal $m_p = \{f \in k[V]; f(p) = 0\}$ em $k[V]$. A restrição de d_p sobre m_p, isto é $d_p : m_p \longrightarrow (T_pV)^*$, é uma transformação linear. De fato, sejam f, $g \in k[V]$ e $a \in k$. Como $d_p(af + g) \in (T_pV)^*$, então

$$d_p(af + g)(v) = d_p(aF + G)(v) = ad_pF(v) + d_pG(v) = ad_pf(v) + d_pg(v),$$

onde $f = F|_V$, $g = G|_V$ e $F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Logo

$$d_p(af + g)(v) = ad_pf(v) + d_pg(v), \text{para cada } v \in T_pV.$$

Ou seja, d_p é uma transformação linear.

Provaremos agora que $d_p : m_p \longrightarrow (T_pV)^*$ é sobrejetor. Para isso escrevemos $\mathbb{A}^n = T_pV \oplus W$, onde W subespaço de $\mathbb{A}^n$ e $W \cap T_pV = \{0\}$. Desta forma todo elemento $z \in \mathbb{A}^n$ se escreve, de maneira única, como

$$z = z_1 + z_2, \text{ onde } z_1 \in T_pV \ e \ z_2 \in W.$$

Dado $\varphi \in (T_pV)^*$, definimos $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow k$ por $f(z) = f(z_1 + z_2) = \varphi(z_1)$. Então, f é claramente linear e $f|_{T_pV} = \varphi$. Além disso, como $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, onde $a_i \in k$, então $f \in m_p$. Obtemos que $d_pf = f|T_pV = \varphi$. Portanto d_p é sobrejetiva.

Resta provarmos que $ker(d_p) = m_p^2$.

Se $g \in m_p$ é tal que $g \in ker(d_p)$, então $d_pg = 0$, em $(T_pV)^*$. Logo se $g = G|_V$, onde $G \in k[T_1, ..., T_n]$, então $d_pG = 0$ em $(T_pV)^*$. Logo

$$d_pG \in \mathcal{I}(T_pV) = \langle d_pF_1, \ldots, d_pF_m \rangle,$$

onde $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$ e, portanto, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in k$ tais que

$$d_pG = \lambda_1 d_pF_1 + \cdots + \lambda_m d_pF_m.$$

O polinômio $G - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_m F_m \in k[T_1, ..., T_n]$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) não tem termo constante, pois

$$G(0) - \lambda_1 F_1(0) - \cdots - \lambda_m F_m(0) = 0;$$

(b) não tem termos de grau um;

(c) $d_p(G - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_m F_m) = 0$ em T_pV, pois

$$d_pG - \lambda_1 d_pF_1 - \cdots - \lambda_m d_pF_m = 0, \text{ em } T_pV.$$

De (a) e (b) concluímos que

$$G - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_m F_m \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle^2.$$

Como $G(p) - \lambda_1 F_1(p) - \cdots - \lambda_m F_m(p) = g(p)$, para todo $p \in V$, então temos que

$$g = (G - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_m F_m)|_V.$$

Portanto $g \in \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle^2$, onde $\varphi_i = T_i|_V$, com $1 \leq i \leq n$ e $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle = m_p$. Logo $ker(d_p) \subset m_p^2$.

Agora mostraremos que $m_p^2 \subset ker(d_p)$. Seja $f \in m_p^2 \subset m_p$. Então, $f = f_1.f_2$, onde $f_1, f_2 \in m_p$. Além disso, como

$$d_p f = d_p(f_1.f_2) = f_1(p)d_p f_2 + f_2(p)d_p f_1 = 0,$$

concluímos que $f \in ker(d_p)$. Logo, $ker(d_p) = m_p^2$. Portanto, obtemos que

$$\frac{m_p}{m_p^2} \simeq (T_pV)^* \;\; e \;\; \left(\frac{m_p}{m_p^2}\right)^* \simeq T_pV.$$

□

Definição 3.17. Se V é uma variedade afim e $p \in V$, dizemos que $\dfrac{m_p}{m_p^2}$ é o espaço cotangente de V em p.

Corolário 3.18. Sejam V e W variedades afins e $f : V \longrightarrow W$ um isomorfismo. Então, $T_pV \simeq T_{f(p)}W$. Em particular a dimensão do espaço tangente em um ponto é invariante por isomorfismo.

Demonstração. Consideremos a função Pullback

$$\begin{aligned} f^* : k[W] &\longrightarrow k[V] \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f. \end{aligned}$$

Como $f^*(m_{f(p)}) \subset m_p$ e $f^*(m_{f(p)}^2) \subset m_p^2$, então a função

$$f^* : \frac{m_{f(xp)}}{m_{f(p)}^2} \longrightarrow \frac{m_p}{m_p^2}$$

induz uma transformação linear entre espaços cotangentes. Como

$$\frac{m_p}{m_p^2} \simeq (T_pV)^* \text{ e } \frac{m_{f(p)}}{m_{f(p)}^2} \simeq (T_{f(p)}V)^*,$$

podemos obter uma transformação linear ainda denotada por f^* tal que

$$f^* : (T_{f(p)}W)^* \longrightarrow (T_pV)^*.$$

Considerando a transformação linear dual df^* obtemos uma transformação linear, a qual denotamos por d_pf, ou seja, $d_pf : T_pV \longrightarrow T_{f(p)}W$.

Notemos que se f é um isomorfismo, então o pullback f^* é um isomorfismo, portanto, d_pf é um isomorfismo. Assim, se $V \cong W$, então $T_pV \cong T_{f(p)}W$ e

$$dim(T_pV) = dim(T_{f(p)}W),$$

para cada $p \in V$. □

3.2 DERIVAÇÕES SOBRE R-ÁLGEBRAS

Nesta seção estudamos as relações entre derivações e vetores tangentes de uma variedade algébrica.

Definição 3.19. Sejam R um anel comutativo, A uma R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Uma função R-linear $D : A \longrightarrow M$, que cumpre a regra de Leibniz, isto é,

$$D(ab) = a\,D(b) + b\,D(a), \text{ para todo } a, b \in A,$$

é chamada uma R-derivação de A em M.

Se D é uma R-derivação de A em M, então D satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $D(1_A) = 0$.

De fato,

$$D(1_A) = D(1_A.1_A) = 1_A D(1_A) + 1_A D(1_A) = D(1_A) + D(1_A).$$

Assim, $D(1_A) = D(1_A) + D(1_A)$ e como M é um A-módulo $D(1_A) = 0$.

(b) $D(r) = 0$, para cada $r \in R$.

De fato, como A é uma R-álgebra, então

$$D(r) = D(1_A.r) = rD(1_A) = 0.$$

Exemplo 3.20. Se $R = k$, então $A = k[x_1, ..., x_n]$ é uma k-álgebra e $M = k[x_1, ...x_n]$ é um $k[x_1, ..., x_n]$-módulo. A derivada parcial com relação a j, isto é, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é uma k-derivação sobre $k[x_1, ..., x_n]$, para cada $j = 1, ..., n$.

Sejam R un anel comutativo, A uma R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Denotamos por $Der_R(A, M)$ o conjunto das R-derivações de A em M.

Para cada $D', D \in Der_R(A, M)$ e $b \in A$, definimos as seguintes operações:

(a) $(D + D')(a) = D(a) + D'(a), \ \forall\, a \in A$;

(b) $(bD)(a) = bD(a), \ \forall\, a \in A$.

Então, é fácil verificar que $Der_R(A, M)$ com estas operações é um A-módulo.

Quando $A = M$, denotamos $Der_R(A, A)$ por $Der_R(A)$.

Exemplo 3.21. Sejam $R = k$, $A = k[x_1, ..., x_n]$ e $M = k[x_1, ...x_n]$. Então, $Der_k(k[x_1, ..., x_n])$ é um $k[x_1, ..., x_n]$-módulo. Daí, para cada $G \in k[x_1, ..., x_n]$ e $D \in Der_k(k[x_1, ..., x_n])$ temos $GD \in Der_k(k[x_1, ..., x_n])$. Em particular $G\dfrac{\partial}{\partial x_j} \in Der_k(k[x_1, ..., x_n])$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Sejam A e B R-álgebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de R-álgebras. Se N é um B-módulo, definimos para cada $a \in A$ e cada $n \in N$, a multiplicação $a\, n := \varphi(a)\, n$. Desta forma N é um A-módulo.

Lema 3.22. Sejam $\varphi : A \to B$ um homomorfismo entre R-álgebras e $D \in Der_R(B, N)$, então $D \circ \varphi \in Der_R(A, N)$.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $r \in R$. Como

$$\begin{aligned} D \circ \varphi(a + rb) =& D(\varphi(a + rb)) = D(\varphi(a) + r\varphi(b)) = \ D(\varphi(a)) + D(r\varphi(b)) \\ =& D(\varphi(a)) + rD(\varphi(b)) = \ D \circ \varphi(a) + rD \circ \varphi(b), \end{aligned}$$

segue que $D \circ \varphi$ é uma função R-linear.

Além disso,

$$\begin{aligned} D o\varphi(a\, b) &= D(\varphi(a\, b)) = D(\varphi(a)\, \varphi(b)) = \\ &= \varphi(a)\, D(\varphi(b)) + \varphi(b)\, D(\varphi(a)) = a\, D(\varphi(b)) + b\, D(\varphi(a)). \end{aligned}$$

Portanto, $D \circ \varphi$ é uma R-derivação de A em N. $\square$

Proposição 3.23. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de R-álgebras, então a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : Der_R(B, N) &\to Der_R(A, N) \\ D &\longmapsto \phi(D) = D \circ \varphi \end{aligned}$$

é um homomorfismo de A-módulos com $ker\,(\phi) = Der_A(B, N)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "D \circ \varphi \in Der_R(A,N)"'] & B \arrow[d, "D \in Der_R(B,N)"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Figura 5 – Desenho da proposição 3.23

Demonstração. Pelo Lema 3.22, $\phi(D) \in Der_R(A, N)$, para todo $D \in Der_R(B, N)$.

Se $D, D' \in Der_R(B, N)$ e $a \in A$, então

(a) $\phi(D+D') = (D+D')\circ\varphi = D\circ\varphi + D'\circ\varphi = \phi(D)+\phi(D')$,

(b) $\phi(aD) = (aD)\circ\varphi = a(D\circ\varphi) = a\phi(D)$.

Portanto, ϕ é um homomorfismo de A-módulos.

Agora, mostraremos que $ker(\phi) = Der_A(B,N)$. Se $D \in ker(\phi)$, então $D \in Der_R(B,N)$ e $D(\varphi(a)) = 0$, para cada $a \in A$. Além disso, para todo $a \in A$ e $b \in B$,

$$D(a\,b) = D(\varphi(a)\,b) = \varphi(a)\,D(b) + b\,D(\varphi(a)) = \varphi(a)\,D(b) = a\,D(b),$$

Logo, D é A-linear, isto é, $D \in Der_A(B,N)$, ou ainda, $Ker(\phi) \subseteq Der_A(B,N)$. Além disso, Se $D \in Der_A(B,N)$ e $a \in A$, então

$$D(\varphi(a)) = D(\varphi(a)\,1_B) = D(a\,1_B) = a\,D(1_B) = 0.$$

Logo, $D\circ\phi = 0$, ou seja, $D \in ker(\phi)$. Portanto $Ker(\phi) = Der_A(B,N)$. $\square$

Lema 3.24. Sejam $A = k[x_1,\ldots,x_n]$, M um $k[x_1,\ldots,x_n]$-módulo e $D \in Der_k(A,M)$, então $D(F) = \sum_{j=1}^{n} D(x_j)\dfrac{\partial(F)}{\partial x_j}$, $\forall\, F \in A$.

Demonstração. Se $F = \sum_{\beta} a_\beta x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$, então

$$\begin{aligned}
D(F) &= \sum_\beta a_\beta D(x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}) = \\
&= \sum_\beta a_\beta[D(x_1^{\beta_1})x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} + x_1^{\beta_1}D(x_2^{\beta_2})x_3^{\beta_3}\ldots x_n^{\beta_n} + \cdots + x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_{n-1}^{\beta_{n}-1}D(x_n^{\beta_n})] = \\
&= \sum_\beta a_\beta D(x_1^{\beta_1})x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} + \sum_\beta a_\beta x_1^{\beta_1}D(x_2^{\beta_2})x_3^{\beta_3}\ldots x_n^{\beta_n} + \cdots + \sum_\beta a_\beta x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_{n-1}^{\beta_n-1}D(x_n^{\beta_n}) \\
&= \sum_\beta a_\beta \beta_1 D(x_1)x_1^{\beta_1-1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} + \cdots + \sum_\beta a_\beta\beta_n D(x_n)x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n-1} \\
&= D(x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + D(x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} D(x_j)\frac{\partial F}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

$\square$

3.3 RELAÇÃO ENTRE O CONJUNTO DAS DERIVAÇÕES E O ESPAÇO TANGENTE

Nosso objetivo é mostrar que existe uma identificação entre o espaço tangente de uma variedade algébrica afim T_pV e $Der_k(k[V], k)$.

Lema 3.25. Dado $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{A}^n$, a função $D_v : k[x_1, ...x_n] \to k[x_1, ...x_n]$, dada por $D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, é uma k-derivação sobre $k[x_1, ...x_n]$.

Demonstração. Sejam $a \in k$ e $F, G \in k[x_1, ...x_n]$. Temos que

$$\begin{aligned} D_v(aF+G) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(aF+G) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(a\frac{\partial}{\partial x_i}(F) + \frac{\partial}{\partial x_i}(G) \right) = \\ &= a\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(F) + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(G) = aD_v(F) + D_v(G). \end{aligned}$$

Logo, D_v é k-linear.

Além disso,

$$\begin{aligned} D_v(FG) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(FG) = \sum_{i=1}^{n} v_i (F\frac{\partial}{\partial x_i}(G) + G\frac{\partial}{\partial x_i}(F)) = \\ &= F\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(G) + G\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(F) = \\ &= FD_v(G) + GD_v(F). \end{aligned}$$

Logo, D_v cumpre a regra de Leibniz. Portanto, D_v é uma k-derivação sobre $k[x_1, ...x_n]$. □

Sejam F e G polinômios em $k[x_1, ...x_n]$ tais que $F|_V = f$ e $G|_V = f$. Temos que $F - G \in \mathcal{I}(V)$ e para todo $p \in V$, $(F - G)(p) = 0$. Portanto, $F(p) = G(p)$.

Isto nos permite fazer a definição seguinte.

Definição 3.26. Sejam k um corpo, V uma variedade algébrica de $\mathbb{A}^n$, $p \in V$ e $k[V]$ o anel de coordenadas de V. Definimos a função

$$\begin{array}{rccc} u: & k[V] \times k & \longrightarrow & k \\ & (f, a) & \longmapsto & aF(p) \end{array},$$

onde $F \in k[x_1, ...x_n]$ é um polinômio tal que $F|_V = f$.

Observação 3.27. Com a operação de multiplicação dada na Definição 3.26, o corpo k passa a ser um $k[V]$-módulo, que denotamos por k_p.

Proposição 3.28. Sejam $p \in V$ e $v \in T_pV$. A função

$$\begin{array}{rccc} D_v: & k[V] & \longrightarrow & k_p \\ & f & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \end{array}$$

é uma k-derivação de $k[V]$ em k_p.

Demonstração. D_v está bem definida. De fato, dados F, $G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $F|_V = G|_V = f$, temos $F - G \in \mathcal{I}(V)$, ou seja, $F - G = 0$ em V. Assim, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(F - G) = 0$, em V, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$. Donde segue que

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial G}{\partial x_j}(p) \quad \text{ e } \quad \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial G}{\partial x_j}(p).$$

Sejam f, $h \in k[V]$ e $a \in k$. Então existem $F, H \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $f = F|_V$ e $h = H|_V$. Da definição de D temos que

$$D(af + h) = D_v(aF + H)(p) = aD_v(F)(p) + D_v(H)(p) = aD(f) + D(g)$$

e portanto D é k-linear.

Além disso,

$$\begin{aligned} D(fh) = D_v(FH)(p) &= \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(FH)(p) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \left(F\frac{\partial H}{\partial x_j} + H\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)(p) = \\ &= F(p)D_v(H)(p) + H(p)D_v(F)(p) = \\ &= f(p)D(h) + h(p)D(f). \end{aligned}$$

Logo D é uma k-derivação de $k[V]$ em k_p. □

A Proposição 3.28 mostra que cada $v \in T_pV$ induz uma derivação D que depende de v e p. Agora queremos mostrar uma espécie de recíproca desta proposição: cada elemento $D \in Der_k(k[V], k_p)$ define um vetor tangente a V em p.

Proposição 3.29. Seja $D \in Der_k(k[V], k_p)$ então existe um vetor tangente $v \in T_pV$ tal que $D(f) = D_v(F)(p)$, para cada $f \in k[V]$, com $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f = F|_V$.

$$\begin{tikzcd} k[V] \arrow[r, "D"] & k_p \\ k[x_1, \ldots, x_n] \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\widetilde{D} = D \circ \pi"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 6 – Desenho da proposição 3.29

Demonstração. Seja $\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k[V]$, a projeção canônica, isto é, $\pi(F) = \bar{F}$. Observe que π é um homomorfismo de k-álgebras.

Se $D \in Der_k(k[V], k_p)$, então, pelo Lema 3.22, temos que $D \circ \pi \in Der_k(k[x_1, \ldots, x_n], k_p)$. Consideramos a função

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{D}: & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & k_p \\ & H & \longmapsto & D(\pi(H)). \end{array}$$

Então, se $f = F|_V$, pela definição $\widetilde{D}$ e pelo Lema 3.24, temos que

$$D(f) = D(\pi(F)) = \widetilde{D}(F) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{D}(x_j) \frac{\partial F}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Consideramos $v = \left(\widetilde{D}(x_1), \ldots, \widetilde{D}(x_n)\right) \in \mathbb{A}^n$. Afirmamos que $v \in T_pV$.

De fato, se $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{D}(x_j) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \widetilde{D}(F_i)(p) = D(\pi(F_i))(p) = D(0)(p) = 0,$$

para cada $i = 1 \ldots, r$. Portanto, $v = \left(\widetilde{D}(x_1), \ldots, \widetilde{D}(x_n)\right) \in T_pV$.

$\square$

As Proposições 3.28 e 3.29 nos indicam que para um ponto fixo $p \in V$, existe uma bijeção entre o espaço tangente T_pV e o conjunto das derivações $Der_k(k[V], k_p)$, o qual é um $k[V]$-módulo.

Seja ψ a aplicação entre esses espaços vetoriais definida por

$$\begin{array}{rccc} \psi: & T_pV & \longrightarrow & Der_k(k[V], k_p) \\ & v & \longmapsto & D_v \end{array} \tag{3.3}$$

Afirmamos que ψ é um isomorfismo de espacos vetoriais. Como ψ é bijetiva, resta apenas mostrar que ψ é uma aplicação linear.

Sejam $a \in k$, $v, w \in T_pV$ e seja $f \in k[V]$, com $F|_V = f$. Então

$$\begin{aligned} \psi(av + w)(f) =& D_{av+w}(F)(p) = \sum_{j=1}^{n} (av_j + w_j) \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = a \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) + \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \\ &= aD_v(F)(p) + D_w(F)(p) = a\psi(v)(f) + \psi(w)(f) = [a\psi(v) + \psi(w)]\,(f). \end{aligned}$$

Logo, $\psi(av + w) = a\psi(v) + \psi(w)$.

Observação 3.30. Sejam V uma variedade algébrica e $p \in V$. Pelo isomorfismo (3.3), o espaço tangente da variedade V no ponto p pode também ser definido como sendo

$$T_pV := Der_k(k[V], k_p).$$

Proposição 3.31. Para cada $p \in \mathbb{A}^n$, o espaço vetorial $T_p\mathbb{A}^n$ tem como base o conjunto $\beta := \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$, onde $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(F) := \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$, para cada $F \in k[x_1, ..., x_n]$.

Demonstração. Para cada derivação $D \in Der_k(k[x_1, \ldots, x_n], k_p)$, existe um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n$, tal que $D = D_v$. Pelo Lema 3.25, temos que

$$D_v(F) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p).$$

Logo β gera $T_p\mathbb{A}^n$. Além disso, se existirem $a_1, \ldots, a_n \in k$, tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = a_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Donde se segue que β é L.I.

□

3.4 ESPAÇO TANGENTE DE VARIEDADES PROJETIVAS

Definição 3.32. Seja $p \in \mathbb{P}^n$. Definimos o espaço tangente a $\mathbb{P}^n$ em p, denotado por $T_p\mathbb{P}^n$, como sendo $T_p\mathbb{A}_i^n$ se $p \in U_i = \mathbb{A}_i^n$.

Observação 3.33. A definição de espaço tangente a $\mathbb{P}^n$ em p independe do aberto U_i. De fato, se $p \in \mathbb{A}_i^n \cap \mathbb{A}_j^n$, e os abertos $U_i = \mathbb{A}_i^n$ e $U_j = \mathbb{A}_j^n$ são variedades afins isomorfas temos, pelo Corolário 3.18, que $T_p\mathbb{A}_i^n \cong T_p\mathbb{A}_j^n$.

Definição 3.34. Sejam V uma variedade quasiprojetiva irredutível e p um ponto de V. Definimos o espaço tangente a V em p por $T_pV := T_pU$, onde U é qualquer vizinhança afim de p.

Observação 3.35. Como a interseção de conjuntos afins é de novo um conjunto afim, temos que se U e W são abertos afins de V contendo p então, pelo Corolário 3.32,

$$T_pV := T_pU \cong T_p(U \cap W) \cong T_pW,$$

isto é, a definição independe da vizinhança afim contendo p.

Exemplo 3.36. Sejam $\mathbb{A}^3 = \{(z_0, z_1, z_2); z_i \in k, \forall\, i = 1, 2, 3\}$ e $U = \mathbb{A}^3 - V(z_0)$. Então, U é uma variedade quasiprojetiva (aberto de $\mathbb{P}^4$) isomorfa a um conjunto fechado de $V \subset \mathbb{A}^4$. De fato, se $V = \{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}^4;\ z_0z_4 - 1 = 0\}$, então $\phi : U \to V$ dada por $\phi(z_0, z_1, z_2) = \left(z_0, z_1, z_2, \frac{1}{z_0}\right)$ é um isomorfismo de variedades quasiprojetivas. Assim, pela Definição 3.34, para todo $p \in U \subset \mathbb{A}^3$, temos que $T_p\mathbb{A}^3 = T_pU$.

4 CAMPOS VETORIAIS NO PLANO PROJETIVO

4.1 EXPRESSÃO LOCAL DE UM CAMPO VETORIAL

Definição 4.1. Um campo vetorial em uma variedade V é uma função $\mathcal{X}$ que associa a cada ponto $p \in V$ um vetor $\mathcal{X}(p) \in T_pV$.

Exemplo 4.2. Considere $k = \mathbb{C}$. Dado $p \in U_0 \subset \mathbb{P}^2$ segue da Definição 3.32 que $T_p\mathbb{P}^2 = T_pU_0$. Também temos a relação

$$k[U_0] \simeq k[\mathbb{A}^2] = \frac{k[x_1, x_2]}{\mathcal{I}(\mathbb{A}^2)} = k[x_1, x_2],$$

pois $U_0 \simeq \mathbb{C}^2$. Além disso,

$$T_pU_0 = Der_k(k[U_0], k_p) = Der_k(k[x_1, x_2], k_p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p\,,\ \frac{\partial}{\partial x_2}|_p \rangle,$$

Logo,

$$T_p\mathbb{P}^2 = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p \rangle.$$

Assim, um campo de vetores $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ é tal que em U_0

$$\mathcal{X}(p) = a_1(p)\frac{\partial}{\partial x_1}|_p + a_2(p)\frac{\partial}{\partial x_2}|_p,$$

onde $a_1, a_2 : U_0 \to k$ são funções.

Observação 4.3. A expressão anterior descreve o campo vetorial $\mathcal{X}$ apenas no aberto $U_0 \subset \mathbb{P}^2$. Daqui para frente denotaremos $\mathcal{X}$ restrito a U_0 simplesmente por

$$\mathcal{X}_{U_0} = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{4.1}$$

Definição 4.4. Se as funções a_1 e a_2 dadas na expressão 4.1 são polinomiais o campo será chamado de campo vetorial polinomial.

Daqui para frente trabalharemos apenas com campos vetoriais polinomiais.

Observação 4.5. Os mesmos cálculos feitos anteriormente podem ser feitos para os abertos U_1 e U_2 de $\mathbb{P}^2$.

4.2 EXPRESSÃO GLOBAL DE UM CAMPO VETORIAL

Vimos que um ponto $p = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2$ corresponde a reta em $\mathbb{A}^3$ definida pela origem e pelo ponto $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{A}^3 - \{0\}$. Então faz sentido estudarmos a relação entre os espaços tangentes de $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{A}^3 - \{0\}$.

Seja U o aberto afim de $\mathbb{A}^3$ definido por

$$U = \{(z_0, z_1, z_2); z_0 \neq 0\} = \mathbb{A}^3 - Z(z_0)$$

e seja φ a aplicação definida por

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (z_0, z_1, z_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right) \end{array}$$

Como $k[U] = k\left[\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right]$ e $k[\mathbb{A}^2] = k[x_1, x_2]$, então $\varphi^* : k[\mathbb{A}^2] \to K[U]$, o pullback de φ, é dado por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Para $p = (z_0, z_1, z_2) \in U$, temos que

$$\varphi^*(f)(p) = f(\varphi(z_0, z_1, z_2)) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

Para cada $p \in U$, consideramos a diferencial de φ em p

$$\begin{array}{rccc} d_p\varphi : & T_pU = T_p\mathbb{A}^3 & \longrightarrow & T_{\varphi(p)}\mathbb{A}^2 \\ & D & \longmapsto & D \circ \varphi^* \end{array}$$

Então, d_p é uma transformação linear e, para todo $f \in k[x_1, x_2]$, vale

$$d_p\varphi(D)(f) = (D \circ \varphi^*)(f) = D(\varphi^*(f)).$$

Veremos a seguir como um campo vetorial em $\mathbb{A}^3$ induz um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$.

Seja $f(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$ um polinômio de grau d. Então

$$\varphi^*(f)(z_0, z_1, z_2) = f(\varphi(z_0, z_1, z_2)) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{F(z_0, z_1, z_2)}{z_0^d},$$

onde $F(z_0, z_1, z_2) \in k[z_0, z_1, z_2]$ é um polinômio homogêneo de grau d, chamado homogeneização de f.

Além disso, vale a seguinte relação, chamada relação de Euler:

$$z_0\frac{\partial F}{\partial z_0}(z_0, z_1, z_2) + z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_0, z_1, z_2) + z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}(z_0, z_1, z_2) = dF(z_0, z_1, z_2).$$

Para ver isso, observe que $F(z_0, z_1, z_2) = z_0^d f\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right)$ e portanto,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial z_0}(z_0, z_1, z_2) = dz_0^{d-1} f\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right) - z_0^{d-1}\left[\dfrac{z_1}{z_0}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right) + \dfrac{z_2}{z_0}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right)\right], \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z_1}(z_0, z_1, z_2) = z_0^{d-1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z_2}(z_0, z_1, z_2) = z_0^{d-1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right). \end{array}\right.$$

Por outro lado, dados $p=(p_0,p_1,p_2)\in \mathbb{A}^3-\{0\}$ e

$$D\in T_pU\cong T_p\mathbb{A}^3=\langle \frac{\partial}{\partial z_o}|_p, \frac{\partial}{\partial z_1}|_p, \frac{\partial}{\partial z_2}|_p\rangle,$$

existem $a_0,a_1,a_2\in k$ tais que

$$D=a_0\frac{\partial}{\partial z_0}|_p+a_1\frac{\partial}{\partial z_1}|_p+a_2\frac{\partial}{\partial z_2}|_p.$$

Se $\varphi^*(f)=f\circ\varphi\in k[U]$, temos que $D(\varphi^*(f))=D(f\circ\varphi)$ e que

$$\begin{aligned}
D(f\circ\varphi) = {} & a_0\,\frac{\partial}{\partial z_0}(f\circ\varphi)_{(p)}+a_1\,\frac{\partial}{\partial z_1}(f\circ\varphi)_{(p)}+a_2\,\frac{\partial}{\partial z_2}(f\circ\varphi)_{(p)}\\
= {} & a_0\,\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{F}{z_0^d}\right)(p)+a_1\,\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{F}{z_0^d}\right)(p)+a_2\,\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{F}{z_0^d}\right)(p)\\
= {} & a_0\left(-d\frac{F}{z_0^{d+1}}+\frac{1}{z_0^d}\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)(p)+a_1\left(\frac{1}{z_0^d}\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)(p)+a_2\left(\frac{1}{z_0^d}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(p)\\
= {} & \frac{1}{z_0^{d+1}}(p)\left[a_0\left(-d\,F+z_0\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)(p)+a_1\left(z_0\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)(p)+a_2\left(z_0\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(p)\right]\\
= {} & \frac{1}{z_0^d}(p)\left[a_0\left(\frac{z_1}{z_0}\frac{\partial F}{\partial z_1}-\frac{z_2}{z_0}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(p)+a_1\frac{\partial F}{\partial z_1}(p)+a_2\frac{\partial F}{\partial z_2}(p)\right]\\
= {} & \frac{1}{z_0}(p)\left[\left(a_1-a_0\frac{z_1}{z_0}\right)(p)\left(\frac{1}{z_0^{d-1}}\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)(p)+\left(a_2-a_0\frac{z_2}{z_0}\right)(p)\left(\frac{1}{z_0^{d-1}}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(p)\right]\\
= {} & \frac{1}{z_0}(p)\left[\left(a_1-a_0\frac{z_1}{z_0}\right)(p)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(p))+\left(a_2-\frac{z_2}{z_0}a_0\right)(p)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(p))\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$p_0\,D(\varphi^*)(f)=\left[a_1-\frac{z_1}{z_0}a_0\right](p)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(p))+\left[a_2-\frac{z_2}{z_0}a_0\right](p)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(p)),$$

ou ainda,

$$p_0\,d_p\varphi(D)(f)=[a_1-x_1a_0]\,(p)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}|_{\varphi(p)}+[a_2-x_2.a_0]\,(p)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}|_{\varphi(p)}.$$

Donde concluímos que

$$p_0d_p\varphi(D)=[a_1-x_1a_0]\,(p)\frac{\partial}{\partial x_1}|_{\varphi(p)}+[a_2-x_2.a_0]\,(p)\frac{\partial}{\partial x_2}|_{\varphi(p)}\in T_{\varphi(p)}\mathbb{P}^2. \tag{4.2}$$

Agora consideremos $F_0,F_1,F_2\in k[z_0,z_1,z_2]$ polinômios homogêneos de mesmo grau e o campo vetorial $\mathcal{X}$ de $\mathbb{A}^3$, dado por

$$\mathcal{X}(p) = F_0(p)\frac{\partial}{\partial z_0}|_p + F_1(p)\frac{\partial}{\partial z_1}|_p + F_2(p)\frac{\partial}{\partial z_2}|_p \in T_p\mathbb{C}^3,\ \forall\, p \in U.$$

Aplicando-se a diferencial $d_p\varphi$ a $\mathcal{X}(p) \in T_p\mathbb{C}^3 = Der_k(k[z_0, z_1, z_2], k_p)$, como na equação (4.2), temos que

$$p_0\, d_p\varphi(\mathcal{X}(p)) = (F_1 - x_1\, F_0)(p)\, \frac{\partial}{\partial x_1}|_{\varphi(p)} + (F_2 - x_2\, F_0)(p)\, \frac{\partial}{\partial x_2}|_{\varphi(p)}. \qquad (4.3)$$

Observe que se os polinômios F_0, F_1, F_2 tem grau d e $p = (z_0, z_1, z_2) \in U$, então

$$\begin{aligned}(F_1 - x_1 F_0)(p) \;&= F_1(z_0, z_1, z_2) - \frac{z_1}{z_0}F_0(z_0, z_1, z_2) = z_0^d\left(F_1(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_1}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)\\ &= z_0^d\left[F_1(1, x_1, x_2) - x_1 F_0(1, x_1, x_2)\right],\end{aligned}$$

pois $x_1 = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_0}$. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}(F_2 - x_1 F_0)(p) \;&= F_2(z_0, z_1, z_2) - \frac{z_1}{z_0}F_0(z_0, z_1, z_2) = z_0^d\left(F_2(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_1}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)\\ &= z_0^d\left[F_2(1, x_1, x_2) - x_1 F_0(1, x_1, x_2)\right].\end{aligned}$$

Como $z_0 \neq 0$ em U e só nos interessa a direção do campo, podemos escrever

$$d_p\varphi(\mathcal{X}(p)) = (f_1 - x_1\, f_0)(p)\, \frac{\partial}{\partial x_1}|_{\varphi(p)} + (f_2 - x_2\, f_0)(p)\, \frac{\partial}{\partial x_2}|_{\varphi(p)}, \qquad (4.4)$$

onde $f_i(x_1, x_2) = F_i(1, x_1, x_2)$, para todo $i = 0, 1, 2$.

Definição 4.6. Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$. Uma forma global de $\mathcal{X}$ é uma expressão da forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde $F_0, F_1, F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos do mesmo grau.

Definição 4.7. Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial cuja forma global é

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0, denotada por $\mathcal{X}_{U_0}$, é dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - x_1\, f_0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (f_2 - x_2\, f_0)\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad (4.5)$$

onde $x_1 = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_0}$ são as coordenadas locais em U_0 e $f_i = F_i(1, x_1, x_2),\ \forall\, i \in \{0, 1, 2\}$.

Da mesma forma podemos obter as expressões locais de $\mathcal{X}$ nos abertos U_1 e U_2.

- A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_1, denotada por $\mathcal{X}_{U_1}$, é dada por

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - x_1\, f_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (f_2 - x_2\, f_1)\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{4.6}$$

  onde $x_1 = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ são as coordenadas locais em U_1 e $f_i = F_i(x_1, 1, x_2)$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2\}$.

- A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_2, denotada por $\mathcal{X}_{U_2}$, é dada por

$$\mathcal{X}_{U_2} = (f_0 - x_1\, f_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (f_1 - x_2\, f_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{4.7}$$

  onde $x_1 = \dfrac{z_0}{z_2}$ e $x_2 = \dfrac{z_1}{z_2}$ são as coordenadas locais em U_2 e $f_i = F_i(x_1, x_2, 1)$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2\}$.

Lema 4.8. Seja $z = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2$, tal que $p \in U_i \cap U_j$. Se z anula a expressão local do campo vetorial

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

de grau d em U_i, então z anula a expressão local do campo $\mathcal{X}$ em U_j.

Demonstração. Suponha que $z \in U_0 \cap U_1$ e que p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0, dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - x_1\, f_0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (f_2 - x_2\, f_0)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde $x_1 = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_0}$ são as coordenadas locais em $\mathbb{C}^2$ e $f_i = F_i(1, x_1, x_2)$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2\}$. Então,

$$F_1(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_1}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = 0, \tag{4.8}$$

$$F_2(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = 0. \tag{4.9}$$

Multiplicando as expressões (4.8) e (4.9) por $-\dfrac{{z_0}^{d+1}}{{z_1}^{d+1}}$ e $\dfrac{{z_0}^{d+1}}{{z_1}^{d+1}}$, respectivamente, obtemos

$$-\frac{{z_0}^{d+1}}{{z_1}^{d+1}}\left[F_1(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_1}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right] = -\frac{z_0}{z_1}F_1(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) + F_0(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{{z_0}^{d+1}}{{z_1}^{d+1}}\left[F_2(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right] = \frac{z_0}{z_1}F_2(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) - \frac{z_2}{z_1}F_0(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) = 0. \tag{4.11}$$

De (4.10) temos a seguinte relação

$$F_0(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) = \frac{z_0}{z_1}F_1(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}). \tag{4.12}$$

Logo substituindo(4.12) em (4.11) temos

$$\frac{z_0}{z_1}F_2(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) - \frac{z_2}{z_1}\frac{z_0}{z_1}F_1(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) = 0, \tag{4.13}$$

ou ainda,

$$F_2(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) - \frac{z_2}{z_1}F_1(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{z_2}{z_1}) = 0. \tag{4.14}$$

Portanto de (4.12) e (4.14) obtemos que z anula

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - x_1\, f_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (f_1 - x_2\, f_1)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde $x_1 = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ são as coordenadas locais em U_1 e $f_i = F_i(x_1, 1, x_2)$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2\}$. $\square$

Definição 4.9. Um ponto $p \in U_i$ com $i \in \{0, 1, 2\}$, é dito uma singularidade do campo $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ se p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_i.

O Lema (4.8) nos garante a boa definição de ponto singular de um campo $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$.

5 1-FORMAS DIFERENCIAIS

5.1 1-FORMAS DIFERENCIAIS EM VARIEDADES AFINS

No capítulo anterior introduzimos a noção de diferencial de uma função regular de uma variedade algébrica afim V em um ponto p, a qual é a transformação linear $d_pf : T_pV \longrightarrow k$. Agora queremos entender como esta função depende do ponto p.

Dada uma variedade afim V consideramos o conjunto

$$\Phi[V] = \{\varphi \text{ uma função definida em V tal que } \varphi(p) \in (T_pV)^*\}.$$

Dados $\varphi, \psi \in \Phi[V]$, definimos a função $\varphi + \psi$ por

$$(\varphi + \psi)(p) = \varphi(p) + \psi(p).$$

Com esta operação é fácil verificar que $\Phi[V]$ é um grupo abeliano.

Além disso, se para cada $f \in k[V]$ e $\varphi \in \Phi[V]$, definimos $(\varphi. f)(p) = f(p)\varphi(p)$, então $\Phi[V]$ passa a ser um $k[V]$-módulo.

Se $f \in k[V]$, então definimos a função df em V por $df(p) = d_pf \in (T_pV)^*$. Desta forma temos que $df \in \Phi[V]$.

Definição 5.1. Seja V uma variedade afim. Uma função $\varphi \in \phi[V]$ é dita uma 1-forma diferencial regular em V, se para cada $p \in V$, existe U_p uma vizinhança afim de p, tal que $\varphi_{|U_p} \in \langle d_pf ; f \in k[U_p]\rangle$.

Denotaremos por $\Omega[V]$ o conjunto das 1-formas diferenciais regulares em V.

Observe que se $\varphi \in \Omega[V]$, então, para cada $p \in V$, podemos escrever $\varphi_{|U_p}$ na forma

$$\varphi_{|U_p} = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dg_i, \text{ onde } f_i,\, g_i \in k[U_p],\ \ i = 1, ..., n \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Agora definimos a função

$$\begin{array}{rccc} d: & k[V] & \longrightarrow & \Omega[V] \\ & f & \longmapsto & df, \end{array}$$

a qual satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $d(f + g) = df + dg$;

(b) $(fg) = f\,dg + g\,df$.

Observação 5.2. De (b) segue que,

$$d(f^m) = mf^{m-1}df,\ \forall\ f \in k[V] \text{ e } \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Além disso, se $F \in k[T_1, T_2]$ e $f_1, f_2, \in k[V]$, então

$$d\left(F(f_1, f_2)\right) = \frac{\partial F}{\partial T_1}(f_1, f_2)df_1 + \frac{\partial F}{\partial T_2}(f_1, f_2)df_2.$$

Proposição 5.3. Dados $F \in k[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m \in k[V]$,

$$d(F(f_1, f_2, \ldots, f_m)) = \sum \frac{\partial F}{\partial T_i}(f_1, \ldots, f_m)df_i \tag{5.1}$$

Demonstração. A prova segue utilizando a observação anterior e indução sobre n. □

Observação 5.4. Sejam $V = \mathbb{A}^n$ e $R = (R_1, \ldots, R_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ uma mudança de coordenadas afins. Dado um polinômio $F \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, queremos ver como fica sua diferencial nas novas coordenadas.

Suponha que $R_i \in k[x_1^{'}, \ldots, x_n^{'}]$, $\forall i \in \{i, \ldots, n\}$. Então

$$d(F^R) = d(F(R_1, \ldots, R_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(R_1, \ldots, R_n)dR_i.$$

Observe que usamos o fato que $k[\mathbb{A}^n] = k[x_1^{'}, \ldots, x_n^{'}]$.

Se $R_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j^{'}$, então $dR_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_j^{'}$ e

$$d(F(R_1, \ldots, R_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(R_1, \ldots, R_n)(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_j^{'}) = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) dx_j^{'}\right]. \tag{5.2}$$

Definição 5.5. Seja V uma variedade afim e seja f uma função racional de V. Se $f = \frac{P}{Q}\Big|_V$, com $P, Q \in k[x_1, \ldots, x_n]$, então definimos

$$d(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{P}{Q^2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right) dx_i.$$

Exemplo 5.6. Se $\varphi \in \Phi[\mathbb{A}^n]$ e $p \in \mathbb{A}^n$, então $\varphi(p) \in (T_p\mathbb{A}^n)^*$. Uma base de $(T_p\mathbb{A}^n)^*$ é dada por $\{d_px_1, d_px_2, \ldots, d_px_n\}$, onde

$$d_px_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \begin{cases} 1; & se\, j \neq i \\ 0; & se\, j = i \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Portanto, existem constantes $a_1(p), \ldots, a_n(p) \in k$, tais que

$$\varphi(p) = a_1(p)d_px_1 + a_2(p)d_px_2 + \cdots + a_n(p)d_px_n.$$

Seja $\psi_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow k$ a função definida por $\psi_i(p) = a_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(p) d_p x_i, \; \forall \, p \in \mathbb{A}^n$$

ou seja, $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i dx_i$.

Exemplo 5.7. Se $\varphi \in \Omega[\mathbb{A}^n]$ e $p \in \mathbb{A}^n$, então existe um aberto U_p de $\mathbb{A}^n$, que contém p, tal que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x) d_x g_i, \;\; \forall \, x \in U_p, \text{ com } f_i, \, g_i \in k[U_p] \text{ para cada } i = 1, \ldots, r.$$

Como cada g_i é regular em $x \in U_p$, então existem polinômios $P_{i,x}$, $Q_{i,x}$, tais que $Q_{i,x}(x) \neq 0$ e $g_i = P_{i,x}/Q_{i,x}$. Pela Definição 5.5, temos que

$$dg_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{Q_{i,x}} . \frac{\partial P_{i,x}}{\partial x_j} - \frac{P_{i,x}}{Q_{i,x}^2} \frac{\partial P_{i,x}}{\partial x_j} \right) dx_j. \tag{5.3}$$

Logo,

$$d_x g_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^x(x) d_x x_j, \text{ onde } h_{ij}^x = \frac{1}{Q_{i,x}} . \frac{\partial P_{i,x}}{\partial x_j} - \frac{P_{i,x}}{Q_{i,x}^2} \frac{\partial P_{i,x}}{\partial x_j}.$$

Portanto

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x) d_x g_i = \sum_{i=1}^{r} f_i(x) \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^x(x) d_x x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} f_i(x) h_{ij}^x(x) d_x x_j,$$

ou ainda $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j^x dx_j$, onde $\psi_j^x = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i h_{ij}^x$, com ψ_j^x sendo regular em todos os pontos de U_p.

Como $d_x x_1, \ldots, d_x x_n$ é base de $(T_x \mathbb{A}^n)^*$, segue da equação (5.7) que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ a função ψ_i do Exemplo 5.6 satisfaz $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) h_{ij}^x(x), \;\; \forall \, x \in U_p$.

Logo ψ_i é regular em cada $x \in \mathbb{A}^n$, ou seja, $\psi_i \in k[\mathbb{A}^n]$. Donde segue que

$$\Omega[\mathbb{A}^n] = \oplus k[\mathbb{A}^n] dx_i.$$

5.2 1-FORMAS NO PLANO PROJETIVO

5.2.1 Expressão Global de uma 1-Forma

Definição 5.8. Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é uma aplicação w que associa a cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$ um funcional linear $w(p) \in (T_p\mathbb{P}^2)^*$, isto é, uma transformação linear $w(p) : T_p\mathbb{P}^2 \longrightarrow k$.

Seja $p \in \mathbb{P}^2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $p \in U_0$. Então, o espaço tangente $T_p\mathbb{P}^2$ é dado por

$$T_p\mathbb{P}^2 = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p \rangle.$$

Sendo assim para cada $p \in U_0$ existem constantes $a_1(p)$ e $a_2(p)$ tais que

$$w(p) = a_1(p)d_p x_1 + a_2(p)d_p x_2.$$

Considerando-se as funções para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} a_i \ : \ U_0 &\longrightarrow k \\ p &\longmapsto a_i(p), \end{aligned}$$

podemos denotar a 1-forma w restrita sobre U_0 simplesmente por

$$w_0 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$$

Observação 5.9. Neste trabalho só consideraremos 1-formas em $\mathbb{P}^2$ para as quais a_1 e a_2 são funções polinomiais. Neste caso dizemos que as 1-formas são polinomiais.

Definição 5.10. Um ponto $p = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 \cap U_0$ é dito uma singularidade de $w_0 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ se as coordenadas locais de p em U_0 anulam simultaneamente a_1 e a_2. Denotamos ao conjunto de todos os pontos singulares de w_0 por $sing(w_0)$, isto é

$$sing(w_0) = \left\{ (z_0 : z_1 : z_2) \in U_0 \,;\, a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = 0 \right\}.$$

Exemplo 5.11. Sejam $U = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3; z_0 \neq 0\}$ e w uma 1-forma em U dada por $w = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$, com $d = \max\{\text{grau}(a_1), \text{grau}(a_2)\}$. Se $q \in \mathbb{C}^2$, então existe $p = (z_0, z_1, z_2) \in U$ tal que $q = \varphi(p)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
w(q) &= a_1(q)\, d_q x_1 + a_2(q)\, d_q x_2 \\
&= a_1(\,\varphi(p)\,) d_{\varphi(p)} x_1 + a_2(\,\varphi(p)\,) d_{\varphi(p)} x_2 \\
&= a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \left(\frac{1}{z_0} d_p z_1 - \frac{z_1}{z_0^2} d_p z_0 \right) + a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \left(\frac{1}{z_0} d_p z_2 - \frac{z_2}{z_0^2} d_p z_0 \right) \\
&= \left(-\frac{z_1}{z_0^2} a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0^2} a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \right) d_p z_0 \;+\; \frac{1}{z_0} a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) d_p z_1 \;+\; \frac{1}{z_0} a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) d_p z_2 \\
&= \frac{1}{z_0} \left(-\frac{z_1}{z_0} a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0} a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \right) d_p z_0 + \frac{1}{z_0} a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) d_p z_1 + \frac{1}{z_0} a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) d_p z_2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$w(\varphi(p)) = \frac{1}{z_0^{d+1}}[A_0(p)d_pz_0 + A_1(p)d_pz_1 + A_2(p)d_pz_2] \text{ e}$$

$$w = \frac{1}{z_0^{d+1}}[A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2],$$

onde os polinômios A_0, A_1 e A_2 são homogêneos de grau $d+1$ e satisfazem

$$\begin{cases} A_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d+1}\left[-\frac{z_1}{z_0^2}a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0^2}a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right], \\ \\ A_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^d a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \\ \\ A_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^d a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}). \end{cases}$$

Observe que os polinômios A_1 e A_2 são as homogenizações de a_1 e a_2, respectivamente, e que A_0 foi obtido usando-se a relação $z_0A_0 = -z_1A_1 - z_2A_2$.

Agora vamos estudar o grau de uma 1-forma Ω em $\mathbb{P}^2$ com relação ao grau de sua expressão local em U_0.

Seja $w_0 = a_1dx_1 + a_2dx_2$ a expressão local da 1-forma Ω restrita a U_0 e seja $d = \max\{\text{grau}(a_1), \text{grau}(a_2)\}$.

Suponhamos inicialmente que $\text{grau}(a_2) = d > \text{grau}(a_1)$. Expressando-se a_1 e a_2 em suas partes homogêneas, temos que

$$a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) = a_2^{(d)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + a_2^{(d-1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + \cdots + a_2^{(1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + a_2^{(0)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}),$$

com $a_2^{(d)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) \neq 0$, e

$$a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) = a_1^{(r)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + a_1^{(r-1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + \cdots + a_1^{(1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + a_1^{(0)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}),$$

onde $r \leq d-1$. Sendo assim obtemos

$$\begin{aligned} -z_1a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) = &- z_1a_1^{(d)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) + \left(-z_1a_1^{(d-1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2^{(d-1)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right) + \\ &+ \cdots + \left(-z_1a_1^{(0)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2^{(0)}(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right). \end{aligned}$$

Observe que, sendo $\text{grau}(a_2) \neq \text{grau}(a_1)$, então o polinômio

$$-x_1a_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_2a_2^{(d)}(x_1,x_2)$$

é não identicamente nulo. Além disso a expressão

$$-z_1a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})$$

é uma função racional com denominador ${z_0}^d$. Portanto, multiplicando por z_0^d, obtemos um polinômio em $k[z_0, z_1, z_2]$ homogêneo, de grau $d+1$, dado por

$$z_0\, z_0^d \left[-z_1 a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right] = z_1\, z_0\, {z_0}^d a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2\, z_0\, z_0^d a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$$

Os polinômios B_0, B_1 e B_2 são dados por

$$\begin{cases} B_0 = z_0^d \left[-z_1 a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right]. \\ \\ B_1 = z_0^{d+1} a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}), \\ \\ B_2 = z_0^{d+1} a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}), \end{cases} \tag{5.4}$$

são homogêneos de grau $d+1$ e satisfazem

$$z_0 B_0 = -z_1 B_1 - z_2 B_2.$$

Se consideramos a 1-forma

$$\Omega = B_0 dz_0 + B_1 dz_1 + B_2 dz_2,$$

então Ω restrita a U_0 será $w_0 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$.

Suponhamos agora que grau a_1 = grau $a_2 = d$. Neste caso temos que

$$\begin{aligned} -z_1 a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = &\left(-z_1 a_1^{(d)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2^{(d)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right) + \\ &+ \left(-z_1 a_1^{(d-1)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2^{(d-1)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right) + \\ &+ \cdots + \left(-z_1 a_1^{(0)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2^{(0)}(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right). \end{aligned}$$

Se

$$-x_1 a_1^{(d)}(x_1, x_2) - x_2 a_2^{(d)}(x_1, x_2) \equiv 0,$$

então podemos escrever a expressão anterior na forma

$$\begin{aligned} -z_1 a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = &\left(-z_1 a_1^{(d-1)}(z_1, z_2) - z_2 a_2^{(d-1)}(z_1, z_2)\right) \frac{1}{z_0^{(d-1)}} + \\ &+ \cdots + \left(-z_1 a_1^{(1)}(z_1, z_2) - z_2 a_2^{(1)}(z_1, z_2)\right) \frac{1}{z_0} \\ &+ \left(-z_1 a_1^{(0)}(z_1, z_2) - z_2 a_2^{(0)}(z_1, z_2)\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Multiplicando-se (5.5) por z_0^d obtemos o seguinte polinômio

$$z_0 \left(z_0^d \left[-z_1 a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right]\right) = -z_1 \left(z_0^d a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right) - z_2 \left(z_0^d a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right),$$

de grau d.

Logo os polinômios B_0, B_1 e B_2, dados por

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d-1}\left[-z_1a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right], \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d}a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d}a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \end{cases} \tag{5.6}$$

são homogêneos de grau d e satisfazem

$$z_0B_0 = -z_1B_1 - z_2B_2.$$

Definição 5.12. Seja Ω uma 1- forma em $\mathbb{P}^2$ dada localmente em U_0 por $w_0 = a_1dx_1 + a_2dx_2$, e $d = \max\{\text{grau}(a_1), \text{grau}(a_2)\}$. Definimos o grau de Ω em $\mathbb{P}^2$ por s, onde

$$s = \begin{cases} d \quad ; & \text{se } -x_1a_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_2a_2^{(d)}(x_1,x_2) \neq 0 \\ d-1\,; & \text{se } -x_1a_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_2a_2^{(d)}(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

onde $a_1^{(d)}$ e $a_2^{(d)}$ são as partes homogêneas de grau d de a_1 e a_2, respectivamente.

Além disso, dizemos que uma 1-forma global de w em $\mathbb{P}^2$ é uma expressão da forma

$$\Omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2$$

onde B_0, B_1 e $B_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos de grau $s+1$, dados por

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s}\left[-z_1a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right], \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s+1}a_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s+1}a_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}). \end{cases}$$

Além disso B_0, B_1 e B_2 satisfazem a relação $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$.

Definição 5.13. Um ponto $p \in \mathbb{P}^2$ é dito uma singularidade da 1-forma

$$\Omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2$$

se $B_0(p) = B_1(p) = B_2(p) = 0$. Denotaremos o conjunto de todos os ponto singulares de Ω em $\mathbb{P}^2$ por $Sing(\Omega)$.

Observação 5.14. Em geral, sempre se cumpre que $sing(w_0) \subseteq Sing(\Omega)$ e $Sing(\Omega) \neq \emptyset$.

Proposição 5.15. Sejam $\Omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ e $w_0 = a_1dx_1 + a_2dx_2$ a forma local de Ω em U_0. Se $Sing(\Omega) \cap \mathbb{L}_\infty = \emptyset$, então

$$sing(w_0) = Sing(\Omega), \text{ onde } \mathbb{L}_\infty = Z(z_0) \text{ é a reta no infinito.}$$

Demonstração. Seja $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in Sing(\Omega)$ com $p_0 \neq 0$, então

$$A_0(p) = A_1(p) = A_2(p) = 0.$$

Como $w_0 = a_1dx_1 + a_2dx_2$ é a forma local de Ω restrita U_0, pela Definição (5.12), temos que

$$A_1(z_0, z_1, z_2) = z_0^{s+1}a_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \text{ e } A_2(z_0, z_1, z_2) = z_0^{s+1}a_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}).$$

Portanto $a_1\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}\right) = a_2\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}\right) = 0.$

□

5.2.2 Relação entre Campos Vetoriais e 1- Formas

Seja $\mathcal{X}$ o campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ dado globalmente por

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde F_0, F_1 e $F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$, são polinômios homogêneo de grau r. Então a expressão local de $\mathcal{X}$ restrito a U_0 é dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = [F_1(1, x_1, x_2) - x_1F_0(1, x_1, x_2)]\frac{\partial}{\partial x_1} + [F_2(1, x_1, x_2) - x_2F_0(1, x_1, x_2)]\frac{\partial}{\partial x_2}$$

onde $x_1 = \frac{z_1}{z_0}$, $x_2 = \frac{z_2}{z_0}$ as coordenadas locais em U_0.

Se

$$d = \max\{\text{grau}\,[F_1(1, x_1, x_2) - x_1F_0(1, x_1, x_2)]\,,\ \text{grau}\,[F_2(1, x_1, x_2) - x_2F_0(1, x_1, x_2)]\},$$

então a este campo local $\mathcal{X}_{U_0}$, podemos associar uma 1-forma em $\mathbb{A}^2$ dada por

$$w_0 = -\left[F_2(1, x_1, x_2) - x_2F_0(1, x_1, x_2)\right]dx_1 + \left[F_1(1, x_1, x_2) - x_1F_0(1, x_1, x_2)\right]dx_2. \quad (5.7)$$

Pela Definição 5.12, a forma global Ω de w_0 em (5.7) é dada por

$$\Omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2z_2,$$

onde B_0, B_1, $B_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ ou d, onde

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^s\,[\,-z_1\,(-\,[F_2(1,x_1,x_2) - \; x_2\,F_0(1,x_1,x_2)\,]\,) - z_2[F_1(1,x_1,x_2) - x_1F_0(1,x_1,x_2)]\,]\,, \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s+1}\,(\,-\,[\,F_2(1,x_1,x_2) - x_2F_0(1,x_1,x_2)\,]\,)\,, \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s+1}\,[\,F_1(1,x_1,x_2) - x_1F_0(1,x_1,x_2)\,]\,, \end{cases}$$

$s = d+1$ ou $s = d$ e $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$.

Como F_0, F_1 e F_2 tem grau r e são homogêneos, então

$$F_i(1,\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) = \frac{1}{z_0^r}F_i(z_0,z_1,z_2),$$

para $i = 0,1,2$, e

$$B_0 = z_0^s\left[z_1\left(\frac{F_2(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} + \frac{z_2}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right) - z_2\left(\frac{F_1(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} + \frac{z_1}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right)\right],$$

$$B_1 = z_0^{s+1}\left[-\frac{F_2(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} + \frac{z_2}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right],$$

$$B_2 = z_0^{s+1}\left[\frac{F_2(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} - \frac{z_1}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right].$$

Portanto

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s-r}\,(z_1F_2(z_0,z_1,z_2) - z_2F_1(z_0,z_1,z_2))\,, \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s-r}\,(-z_0F_2(z_0,z_1,z_2) + z_2F_0(z_0,z_1,z_2))\,, \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{s-r}\,(z_0F_1(z_0,z_1,z_2) - z_1F_0(z_0,z_1,z_2))\,. \end{cases}$$

Uma forma de obtermos a expressão global da 1-forma Ω associada a um campo de vetores

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

é via o seguinte determinante:

$$\Omega = \begin{bmatrix} dz_0 & dz_1 & dz_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{bmatrix} = (-z_1F_2 + z_2F_1)\,dz_0 + (z_2F_0 - z_0F_2)\,dz_1 + (z_0F_1 - z_1F_0)\,dz_2. \tag{5.8}$$

5.2.3 Mudança da expressão local de uma 1-forma

Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{P}^2$, tal que $\mathcal{X}$ restrito à U_0 é

$$\mathcal{X}_{U_0} = P_1\frac{\partial}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde $x_1 = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $x_2 = \dfrac{z_2}{z_0}$.

Então existem polinômios homogêneos $F_0, F_1 \,\text{e}\, F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$, de mesmo grau, tais que a forma global de $\mathcal{X}_{U_0}$ em $\mathbb{P}^2$ é

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Seja w_0 a 1-forma local associada à $\mathcal{X}_{U_0}$, isto é,

$$w_0 = -P_2 dx_1 + P_1 dx_2.$$

Se $k = \max\{\text{grau}(P_1), \text{grau}(P_2)\}$, então a expressão global da 1-forma w_0, é dada por

$$\Omega = z_0^{(k)}\left(-z_1 - P_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0} - z_2P_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)dz_0 + z_0^{(k+1)}\left(-P_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)dz_1 + z_0^{(k+1)}P_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})dz_2. \tag{5.9}$$

Podemos relacionar o campo de vetores e a 1- forma expressada de forma global, mediante o determinante seguinte

$$\Omega = \begin{bmatrix} dz_0 & dz_1 & dz_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora usar a expressão (5.8) para $F_0, F_1 \,\text{e}\, F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$. Comparando-se a expressão de Ω dada em (5.9) com a sua expressão obtida em (5.8) temos que

$$\begin{cases} z_0^k\left[z_1P_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2P_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right] = z_1F_2(z_0, z_1, z_2) - z_2F_1(z_0, z_1, z_2), \\ \\ -z_0^{k+1}P_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = z_2F_0(z_0, z_1, z_2) - z_0F_2(z_0, z_1, z_2), \\ \\ z_0^{k+1}P_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = z_0F_1(z_0, z_1, z_2) - z_1F_0(z_0, z_1, z_2). \end{cases}$$

Sendo assim podemos tomar

$$F_0(z_0, z_1, z_2) = 0,\ F_1(z_0, z_1, z_2) = z_0^kP_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \text{ e } F_2(z_0, z_1, z_2) = z_0^kP_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}).$$

Portanto a expressão global de $\mathcal{X}_{U_0}$ em $\mathbb{P}^2$ é dada por

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial z_0} + z_0^k P_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\frac{\partial}{\partial z_1} + z_0^k P_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Donde a expressão de $\mathcal{X}$ em U_1 é

$$\mathcal{X}_1 = \left(-y_1 y_1^k P_1(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1})\right)\frac{\partial}{\partial y_1} + \left(y_1^k P_2(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}) - y_2 y_1^k P_1(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1})\right)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

onde $\hat{P}_i(y_1, y_2) = y_1^k P_i(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1})$.

Portanto a expressão local de w_0 em U_1 é

$$w_1 = \left[y_2 \hat{P}_1(y_1, y_2) - \hat{P}_2(y_1, y_2)\right] dy_1 - y_1 \hat{P}_1(y_1, y_2) dy_2. \tag{5.10}$$

6 FOLHEAÇÕES EM $\mathbb{P}^2$

6.1 FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SOBRE UMA VARIEDADE

Seja V uma variedade holomorfa de dimensão n. Uma folheação de dimensão n em V , é a grosso modo, uma decomposição de V em subvariedades de dimensão r, $1 \leq r \leq n-1$, chamadas de folhas.

Definição 6.1. Seja V uma variedade de dimensão n. Uma folheação holomorfa em V de dimensão r, ou codimensão $n-r$, onde $1 \leq r \leq n-1$, é uma decomposição $\mathcal{F}$ de V em subvariedades de dimensão r, imersas biunivocamente, chamadas de folhas da folheação $\mathcal{F}$, e que gozam das seguintes propriedades:

(a) Para cada $p \in V$, existe uma única subvariedade L_p da decomposição que passa por p. L_p é chamada a folha por p

(b) Para cada $p \in V$, existe uma carta holomorfa de V, (φ, U) com $p \in U$, onde U é aberto de V e $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\varphi(U) = P \times Q$, onde P e Q são poli discos abertos em $\mathbb{C}^r$ e $\mathbb{C}^{n-r}$ respectivamente.

(c) Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $L \cap U \neq \emptyset$ então

$$L \cap U = \bigcup_{q \in D_{L,U}} \varphi^{-1}(P \times \{q\}),$$

onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q.

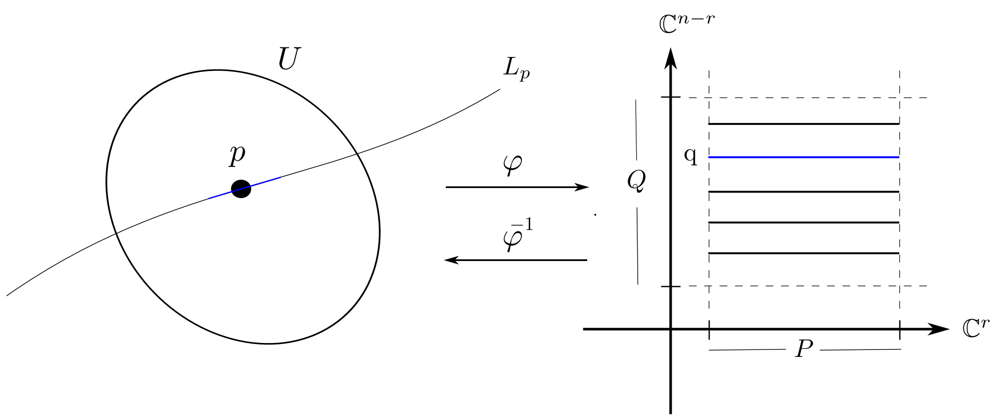

Figura 7 – Folha de $\mathcal{F}$ passando por $p \in U$

Observação 6.2. Uma folheação de dimensão um ou codimensão $n-1$ é também chamada de folheação por curvas.

Exemplo 6.3. Consideremos a decomposição $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{n-r}$. Tal decomposição define uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão r em $\mathbb{C}^n$, cujas folhas são os subespaços afins $\mathbb{C}^r \times \{q\}$, $q \in \mathbb{C}^{n-r}$.

Exemplo 6.4. A decomposição de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^1 \times \{q\}$, onde $q \in \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^1 \times \{q\}$ são subespaços afins de dimensão 1, define em $\mathbb{C}^2$ uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 1.

Exemplo 6.5. (Folheação gerada por 1-formas diferenciais em $\mathbb{P}^2$). Seja w uma 1-forma diferencial em $\mathbb{P}^2$, não identicamente nula, isto é $w(p) \in (T_p\mathbb{C}^2)^* = \mathbb{C}^2, \forall\, p \in \mathbb{C}^2$. Consideramos o conjunto

$$Sing(w) = \{p \in \mathbb{C}^2;\ w(p) \neq 0\}.$$

Então, w define uma folheação de grau 1 em $U = \mathbb{C}^2 - Sing(w)$ cujas folhas são

$$L_p = ker(w_p) = \{v \in \mathbb{C}^2; w(p)(v) = 0\}.$$

Para ver isso, observe que se $p \in U_0$ e $w_0 = w|_{U_0} = a_1 d_p x_1 + a_2 d_p x_2$, então a reta L_p é tal que

$$L_p \cap U_0 = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2; a_1(p)v_1 + a_2(p)v_2 = 0\},$$

já que $d_p x_1(v_1, v_2) = v_1$ e $d_p x_2(v_1, v_2) = v_2$.

Exemplo 6.6. (Folheação gerada por campos vetoriais holomorfos). Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade de dimensão m, $\mathcal{X}$ um campo de vetores não identicamente nulo em V e $Sing(\mathcal{X}) = \{p \in V; \mathcal{X}(P) = 0\}$. Então $\mathcal{X}$ gera uma uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão 1 no aberto $U = V - Sing(\mathcal{X})$, onde as folhas de $\mathcal{F}$ são as soluções da equação diferencial $\dfrac{dz}{dt} = \mathcal{X}(z)$ em U.

Exemplo 6.7. Sejam

$$\Omega = A_0 dz_0 + A_1 dz_1 + A_2 dz_2$$

e

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

uma 1−forma e um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$, respectivamente, tais que

$$\begin{cases} A_0 = z_1 F_0 - z_2 F_1 \\ A_1 = z_2 F_0 - z_0 F_2 \\ A_0 = z_0 F_1 - z_0 F_1. \end{cases}$$

Então, as singularidades de Ω e $\mathcal{X}$ são as mesmas e

$$\Omega|_{U_i}(p)(\mathcal{X}|_{U_i}(p)) = 0,\ \text{para todo}\ p \in \mathbb{P}^2\ \text{e para todo}\ i \in \{0,\ 1,\ 2\}.$$

Definição 6.8. Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ é definida por uma 1-forma polinomial

$$\Omega = A_0 dz_0 + A_1 dz_1 + A_2 dz_2,$$

onde A_0, A_1 e $A_2 \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos, de grau $d+1$, e que satisfazem a relação $z_0 A_0 + z_1 A_1 + z_2 A_2 = 0$.

Observação 6.9. O Exemplo 6.7 mostra que poderíamos definir a mesma folheação usando campos vetoriais.

Definição 6.10. O conjunto singular da folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$, denotado por $\operatorname{Sing}\mathcal{F}$, é dado por

$$\operatorname{Sing}\mathcal{F} = \{p \in \mathbb{P}^2 \mid A_i(p) = 0,\ \forall i = 0, 1, 2\} = Z\left(\langle A_0, A_1, A_2 \rangle\right).$$

Observação 6.11. Em todo o capítulo, denotaremos uma folheação sobre $\mathbb{P}^2$ por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ o que significará que

(a) P_1 e P_2 são polinômios em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ sem fatores em comum,

(b) $\mathcal{F}$ é definida em U_0 pela 1-forma

$$P_2\, dx_1 - P_1\, dx_2, \tag{6.1}$$

ou equivalentemente, pelo campo vetorial

$$P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{6.2}$$

já que ambos definem a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ (ver Exemplo 6.7).

Definição 6.12. Uma curva algébrica C de $\mathbb{P}^2$, tal que $C \cap U_0 \neq \emptyset$, é invariante por $\mathcal{F}$, se existe um polinômio $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ tal que

$$P_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = gf,$$

onde $C \cap U_0 = V(f)$, com $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$.

Observação 6.13. Também usamos a expressão C é uma solução de $\mathcal{F}$ para indicar que C é invariante por $\mathcal{F}$.

Definição 6.14. Sejam $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ e $z \in U_0$ uma singularidade de $\mathcal{F}$, isto é, $P_1(z) = P_2(z) = 0$. A matriz jacobiana de $\mathcal{F}$ em z é dada por

$$J_{\mathcal{F}}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Definição 6.15. Uma folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ é dita não degenerada em um ponto singular $z \in U_0$ se $\det J_{\mathcal{F}}(z) \neq 0$, ou equivalentemente, se os autovalores da matriz jacobiana $J_{\mathcal{F}}(z)$ são não nulos.

Definição 6.16. Uma folheação $\mathcal{F}$ é dita não degenerada se é não degenerada em cada ponto singular.

Definição 6.17. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não degenerada, $z \in Sing(\mathcal{F})$ e λ_1 e λ_2 autovalores de $J_{\mathcal{F}}(z)$. Os quocientes

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ e } \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

são chamados expoentes característicos da folheação $\mathcal{F}$ no ponto z. Denotamos por $\exp(\mathcal{F})$ o conjunto de todos os expoentes característicos de uma folheação não degenerada.

6.2 TANGÊNCIA DE UMA RETA COM UMA FOLHA DE $\mathcal{F}$

Definição 6.18. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não degenerada em $\mathbb{P}^2$ e $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta projetiva. Suponha que L não é uma solução de $\mathcal{F}$. Dizemos que $p \in L$ é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ com L se $p \in Sing(\mathcal{F})$ ou se $p \notin Sing(\mathcal{F})$ e os espaços tangentes de L e da folha de $\mathcal{F}$ que passa por p, em p, coincidem.

Se $\mathcal{F}$ é determinada por uma 1-forma Ω, então a condição de tangência, definida acima, pode ser expressa em coordenadas locais da seguinte forma.

Suponha que $p(x_0, y_0) \in U_0 = \mathbb{C}^2$ e que w_0 é dada

$$w_0 = P_1\, dx_2 - P_2\, dx_1.$$

Então,

(i) $Sing(\mathcal{F} \cap U_0) = Z(P_1(x_1, x_2), P_2(x_1, x_2))$.

(ii) Estamos supondo que P_1, P_2 não tem fatores comuns.

(iii) As folhas de $\mathcal{F}$ em $p \in U_0 \backslash \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$ são dadas por

$$\mathcal{F}_p = Ker(w_0(p)) = \{v \in T_p\mathbb{P}^2\,;\, w_0(p)(v) = 0\}.$$

(iv) $Ker(w_0(p)) \cap U_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2\,;\, P_1(p)x_2 - P_2(p)x_1 = 0\}$.

Além disso, consideramos que $\mathcal{L} = L \cap U_0$ é parametrizada por

$$\varphi(t) = (x_0, y_0) + t(a, b),\ t \in k$$

de modo que $p = \varphi(0)$.

Lema 6.19. Um ponto $p \in U_0$ é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ com L se somente se $t = 0$ é uma raiz do polinômio

$$h_{\mathcal{L}}(t) = b\,P_1(\varphi(t)) - a\,P_2(\varphi(t)),$$

onde $p = \varphi(0)$.

Demonstração. Suponha que p é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ com L em U_0.

(i) Se $p \in Sing(\mathcal{F})$, então $P_1(p) = P_2(p) = 0$ e

$$h_{\mathcal{L}}(0) = b\,P_1(\varphi(0)) - a\,P_2(\varphi(0)) = b\,P_1(p) - a\,P_2(p) = 0.$$

(ii) Se $p \notin Sing(\mathcal{F})$ e $T_p\,(\mathcal{F}_p) = T_p(L)$, então a folha $\mathcal{F}_p$ em U_0 é dada por

$$\mathcal{F}_p \cap U_0 = \{\,(\lambda\,P_1(p), \lambda\,P_2(p)\,);\ \lambda \in k\}.$$

Além disso, $T_p\,(\mathcal{F}_p \cap U_0) = T_p(\mathcal{L})$. Logo, os vetores diretores de ambas retas coincidem. Assim temos

$$(\,P_1(p),\ P_2(p)\,) = \alpha\,(a, b),$$

para algum $\alpha \in k$. Logo $bP_1(p) - aP_2(p) = 0$. Donde segue que

$$h_{\mathcal{L}}(0) = b\,P_1(\varphi(0)) - a\,P_2(\varphi(0)) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $t = 0$ é raiz de $h_{\mathcal{L}}(t)$. Então,

$$0 = h_{\mathcal{L}}(0) = b\,P_1(\varphi(0)) - a\,P_2(\varphi(0)) = b\,P_1(p) - a\,P_2(p).$$

Se $P_1(p) = P_2(p) = 0$, então $p \in Sing(\mathcal{F})$. Se $P_1(p) \neq 0$ ou $P_2(p) \neq 0$, então os vetores (a, b) e $(P_1(p), P_2(p))$ são paralelos. Logo $T_p\,(\mathcal{F}_p) = T_p(L)$. □

Observação 6.20. Se $p \in U_i \cap U_j$, então $h_{\mathcal{L}_i}(t) = h_{\mathcal{L}_j}(t)$, onde $\mathcal{L}_i = L \cap U_i$.

Definição 6.21. Definimos a multiplicidade de tangência de $\mathcal{F}$ com L num ponto p como sendo a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de

$$h_{\mathcal{L}}(t) = b\,P_1(\varphi(t)) - a\,P_2(\varphi(t)).$$

Denotamos a multiplicidade de interseção por $\#(\mathcal{F}, L, p)$. Se $\mathcal{F}$ não for tangente a L em p, definimos $\#(\mathcal{F}, L, p) = 0$.

Definição 6.22. Definimos o número total de tangências de $\mathcal{F}$ com L, como sendo

$$\#(\mathcal{F}, L) = \sum_{p \in L} \#(\mathcal{F}, L, p).$$

Proposição 6.23. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não degenerada em $\mathbb{P}^2$ e $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta projetiva. Suponha que L não é uma solução de $\mathcal{F}$. Então $\#(\mathcal{F}, L)$ é invariante por mudanças de coordenadas.

Demonstração. Seja $\varphi(t) = (p_1, p_2) + t(a, b),\ t \in \mathbb{C}$, uma parametrização de $\mathcal{L} = L \cap U_0$ e

$$h_{\mathcal{L}}(t) = bP_1(\varphi(t)) - aP_2(\varphi(t)).$$

Considere S uma mudança de coordenadas afins de $\mathbb{C}^2$, dada por

$$S(x_1, x_2) = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, b_0 + b_1x_1 + b_2x_2).$$

Sejam S^{-1} a inversa de S e y_1, y_2 as coordenadas do contradomínio de S. Então,

$$S^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{d}\left(-b_2\, a_0\, +\, a_2\, b_0 + b_2\, y_1\, -\, a_2\, y_2\, ,\ b_1a_0 - a_1b_0\, -\, b_1\, y_1\, +\, a_1\, y_2\right),$$

onde $d = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Podemos expressar as coordenadas iniciais $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2$ em relação as novas coordenadas y_1 e y_2, através de S^{-1}, por

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{d}(-a_0b_2 + b_0a_2 + b_2y_1 - a_2y_2), \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{d}(a_0b_1 - b_0a_1 - b_1y_1 + a_1y_2). \end{cases}$$

Logo, as relações entre as diferenciais são

$$\begin{cases} dx_1 = \dfrac{1}{d}(b_2\, dy_1 - a_2\, dy_2), \\ \\ dx_2 = \dfrac{1}{d}(-b_1\, dy_1 + a_1\, dy_2). \end{cases}$$

Usando que $\mathcal{F}$ é dada em U_0 por $w_0 = P_1dx_2 - P_2dx_1$ temos que, nas novas coordenadas, $\mathcal{F}$ é escrita na forma

$$\widetilde{w_0} = (\, P_1 \circ S^{-1})(y_1, y_2)\, \left(\frac{1}{d}(-b_1dy_1 + a_1dy_2)\right) - (\, P_2 \circ S^{-1})(y_1, y_2)\left(\frac{1}{d}(b_2dy_1 - a_2dy_2)\right).$$

Portanto

$$\widetilde{w_0} = -\left[\frac{b_1}{d}(P_1 \circ S^{-1}) + \frac{b_2}{d}(P_2 \circ S^{-1})\right] dy_1 + \left[\frac{a_1}{d}(P_1 \circ S^{-1}) + \frac{a_2}{d}(P_2 \circ S^{-1})\right] dy_2.$$

Lembrando que $S(\mathcal{L})$, a reta que passa por $p^{'} = S(p)$, tem parametrização

$$\psi(t) = (S_1(p_1, p_2), S_2(p_1, p_2)) + t(S_1^{'}(a, b), S_2^{'}(a, b)),\ t \in \mathbb{C}$$

onde $S'(x_1, x_2) = b_1x_1 + b_2x_2$, temos que

$$\widetilde{h}_{\mathcal{S}(\mathcal{L})}(t) = - \left[\frac{b_2}{d}(P_2 \circ S^{-1})(\psi(t)) + \frac{b_1}{d}(P_1 \circ S^{-1})(\psi(t))\right] S_1'(a,b)$$

$$+ \left[\frac{a_2}{d}(P_2 \circ S^{-1})(\psi(t)) + \frac{a_1}{d}(P_1 \circ S^{-1})(\psi(t))\right] S_2'(a,b).$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}_{\mathcal{S}(\mathcal{L})}(t) &= \frac{1}{d}\left[\left(-b_2 S_1'(a,b) + a_2 S_2'(a,b)\right)(P_2(S^{-1}(\psi(t)))\right] + \\
&+ \frac{1}{d}\left[\left(-b_1 S_1'(a,b) + a_1 S_2'(a,b)\right)(P_1(S^{-1}(\psi(t)))\right] \\
&= \frac{1}{d}\left[(-b_2 a_1 + a_2 b_1)\, aP_2(\varphi(t)) + (-b_1 a_2 + a_1 b_2)\, bP_1(\varphi(t))\right] \\
& \widetilde{h}_{\mathcal{S}(\mathcal{L})}(t) = aP_2(\varphi(t)) + bP_1(\varphi(t)) = h_{\mathcal{L}}(t).
\end{aligned}$$

Logo, $h_{\mathcal{L}}(t)$ é invariante mediante mudança de coordenadas afins. Portanto $\#(\mathcal{F}, L, p)$ é invariante por mudanças de coordenadas afins. $\square$

6.3 GRAU DE UMA FOLHEAÇÃO EM $\mathbb{P}^2$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ dada localmente em U_0 por

$$w_0 = P_2\, dx_1 - P_1\, dx_2.$$

Então, pela Definição 5.12, o grau s de w_0 é

$$s = \begin{cases} d, & \text{se } x_2 P_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_1 P_2^{(d)}(x_1,x_2) \neq 0, \\ \\ d-1, & \text{se } x_2 P_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_1 P_2^{(d)}(x_1,x_2) = 0. \end{cases}$$

onde $d = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$.

Definição 6.24. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ dada localmente em U_0 por uma 1-forma w_0. O grau de $\mathcal{F}$ é definido como o grau da 1-forma w_0.

Definimos agora polinômios em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ associados a $w_0 = P_1 dx_2 - P_2 dx_1$ que desempenharão um papel importante no próximo Teorema, o qual será o núcleo do algoritmo que vamos expor. Sejam $\Delta_i(\mathcal{F})$ os polinômios definidos por

$$\Delta_i(\mathcal{F}) = x_2 P_1^{(d-i)} - x_1 P_2^{(d-i)} \in \mathbb{C}[x_1, x_2],$$

onde $P_i^{(j)}$ são as componentes homogêneas de grau j dos polinômios P_i, com $i = 1, 2$ e $d = d(\mathcal{F}) = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$.

Pela Definição acima o grau de $\mathcal{F}$ é

$$\deg(\mathcal{F}) = \begin{cases} d \quad ; & \text{se } \Delta_0(\mathcal{F}) \text{ é não nulo.} \\ \\ d-1\,; & \text{se } \Delta_0(\mathcal{F}) \text{ é nulo.} \end{cases}$$

Observação 6.25. Denotamos a reta $z_0 = 0$ de $\mathbb{P}^2$ por L_∞, isto é,

$$L_\infty = \{(0 : z_1, z_2) \,|\, z_1 \neq 0 \text{ ou } z_2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2.$$

Lema 6.26. Suponhamos que $\mathcal{F}$ é dada localmente em U_0 por $w_0 = P_1\,dx_2 - P_2\,dx_1$, com $d = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$, então $\#(\mathcal{F}, L) = d$ ou $\#(\mathcal{F}, L) = d-1$, para cada reta L de $\mathbb{P}^2$ que não é uma solução de $\mathcal{F}$. Além disso, se ${P_1}^{(d)}$ e ${P_2}^{(d)}$ são as partes homogêneas de grau d de P_1 e P_2, são equivalentes:

(i) $\#(\mathcal{F}, L) = d$,

(ii) $\Delta_0(\mathcal{F}) = x_2{P_1}^{(d)}(x_1, x_2) - x_1{P_2}^{(d)}(x_1, x_2)$ é não nulo,

(iii) L_∞ é uma solução algébrica de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Vamos mostrar que (ii), se somente se (iii). Em $U_0 \cap U_1$ temos a seguinte relação entre as coordenadas; $x_1 = \dfrac{1}{y_1}$ e $x_2 = \dfrac{y_2}{y_1}$. Além disso, nas coordenadas de U_1, $\mathcal{F}$ é escrito como

$$y_1\hat{P}_1\,dy_2 - (y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2)\,dy_1 = 0. \tag{6.3}$$

Seja

$$y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = R_0(y_2) + R_1(y_2)y_1 + \cdots + R_d(y_2)y_1^d, \tag{6.4}$$

onde $R_0(y_2) = y_2P_1^{(d)}(1, y_2) - P_2^{(d)}(1, y_2)$. Seja

$$\Delta_0(\mathcal{F}) := x_2{P_1}^{(d)}(x_1, x_2) - x_1{P_2}^{(d)}(x_1, x_2) \tag{6.5}$$

Se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é nulo, então

$$y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = y_1[R_1(y_2) + \cdots + R_d(y_2)y_1^{d-1}]. \tag{6.6}$$

Assim (6.3) pode ser escrita na forma

$$\hat{P}_1\,dy_2 - (R_1(y_2) + \cdots + R_d(y_2)y_1^{d-1})\,dy_1 = 0. \tag{6.7}$$

Além disso, de (6.5) temos

$$\frac{y_2}{y_1}P_1^{(d)}(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}) - \frac{1}{y_1}P_2^{(d)}(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}) \equiv 0$$

e portanto
$$y_2 P_1^{(d)}(1, y_2) = P_2^{(d)}(1, y_2) \neq 0.$$

Então y_1 não é fator de $\hat{P}_1$, ou seja, y_1 não é uma solução algébrica de $\mathcal{F}$. Logo provamos que se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é nulo, então L_∞ é solução algébrica de $\mathcal{F}$.

Por outro lado, Se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é não nulo, então y_1 não é um fator de $y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2$. Assim, usando (6.3), obtemos que L_∞ não é solução algébrica de $\mathcal{F}$.

Seja $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta que não é solução algébrica da folheação $\mathcal{F}$. Suponhamos que $L \cap U_0 = \{x_2 = 0\}$ e que $\varphi(t) = (t, 0)$, $t \in \mathbb{C}$ é uma parametrização de $L \cap U_0$. Neste caso, $h_{\mathcal{L}}(t) = -P_2(t, 0)$. Logo,

$$\#(\mathcal{F}, L) = \deg(P_2(t, 0)) + \#(\mathcal{F}, L \cap L_\infty).$$

Em $U_0 \cap U_1$, considere a mudança de coordenadas $y_1 = 1/x_1$ e $y_2 = x_2/x_1$. Assim $L \cap L_\infty$ é determinada por $y_2 = 0$ e a parametrização de $L \cap U_1$, nas novas coordenadas, é

$$L \cap U_1 =: \{(y_1, y_2); y_2 = 0 \text{ e } y_1 = \frac{1}{t} = s\}.$$

Caso 1: Suponhamos que $\Delta_0(\mathcal{F})$ não é identicamente nulo. Como $L \cap L_\infty = \{(0 : 0 : 1)\}$ e

$$\mathcal{F} = (y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2)dy_1 + y_1\hat{P}_1 dy_2,$$

temos que
$$h_{\mathcal{L}}(s) = -[0.\hat{P}_1(0, s) - \hat{P}_2(0, s)] = s^d\hat{P}_2(\frac{1}{s}, 0).$$

Logo, $h_{\mathcal{L}}(s) = \hat{P}_2(s, 0)$. Assim, $\#(\mathcal{F}; L; L \cap L_\infty) = d - \deg P_2$, e

$$\#(\mathcal{F}, L) = \deg P_2 + d - \deg P_2 = d.$$

Caso 2: Se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é identicamente nulo, então L_∞ não é solução algébrica de $\mathcal{F}$ e, neste caso,

$$\mathcal{F}|_{U_1} = \hat{P}_1\, dy_2 - (R_1(y_2) + \cdots + R_d(y_2)y_1^{d-1})\, dy_1$$

e
$$h_{\mathcal{L}}(s) = R_1(0) + \cdots + R_d(0)s^{d-1} = -\frac{1}{s}\hat{P}_2(0, s) = -\frac{1}{s}s^d P_2(\frac{1}{s}, 0).$$

Logo
$$\#(\mathcal{F}; L; L \cap L_\infty) = d - 1 - \deg P_2$$

e
$$\#(\mathcal{F}, L) = degP_2 + d - 1 - degP_2 = d - 1.$$

Portanto
$$\#(\mathcal{F}, L) = \begin{cases} d\ , \text{ se } \Delta_0(\mathcal{F}) \text{ é não nulo,} \\ d - 1\ , \text{ se } \Delta_0(\mathcal{F}) \text{ é nulo.} \end{cases}$$

□

Observação 6.27. Segue do Lema 6.26 que o grau de uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ definida por uma 1-forma Ω coincide com o número total de tangência de uma reta L que não é solução de $\mathcal{F}$.

Teorema 6.28. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não degenerada em $\mathbb{P}^2$, tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ como na Observação 6.11.

(a) A reta L_∞ é invariante por $\mathcal{F}$ se e somente se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é um polinômio não nulo.

(b) Suponhamos que $\Delta_0(\mathcal{F})$ é identicamente nulo e $\exp(\mathcal{F}) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$. Seja C curva algébrica irredutível em $\mathbb{P}^2$. Se C é invariante por $\mathcal{F}$, então o grau de C é menor ou igual a $\deg(\mathcal{F})$.

Demonstração. (a) Como $L_\infty \cap U_0 = \emptyset$, para estudarmos a sua invariância por $\mathcal{F}$, precisamos da expressão local de $\mathcal{F}$ em U_1.

Sejam $y_1 = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $y_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ as coordenadas afins de U_1. Então $L_\infty \cap U_1 = Z(y_1)$.

Se a folheação $\mathcal{F}$ é dada em U_0 pelo campo vetorial

$$\mathcal{X}_0 = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

então $\mathcal{F}$ também é determinada pela 1-forma Ω, definida em U_0 por

$$w_0 = P_1\, dx_1 - P_2\, dx_2. \tag{6.8}$$

Usando a relação obtida em (5.10), vemos que a expressão de Ω em U_1 é

$$w_1 = -y_1 \hat{P}_1(y_1, y_2) dy_2 + \left[y_2 \hat{P}_1(y_1, y_2) - \hat{P}_2(y_1, y_2) \right] dy_1. \tag{6.9}$$

Denotemos por $P_i{}^{(j)}$ a parte homogênea de grau j do polinômio $P_i(x_1, x_2)$, com $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{0, \ldots, d\}$. Logo

$$\hat{P}_i(y_1, y_2) = P_i^{(d)}(1, y_2) + P_i^{(d-1)}(1, y_2) y_1 + \cdots + P_i^{(1)}(1, y_2) y_1^{d-1} + P_i^{(0)}(1, y_2) y_1^d, \tag{6.10}$$

para cada $i \in \{1, 2\}$. Além disso, se consideramos $\hat{P}_i(y_1, y_2)$ como um polinômio de $k[y_2][y_1]$, então o coeficiente de $y_1{}^j$ é $P_i{}^{(d-j)}(1, y_2)$, para cada $j \in \{0, \ldots, d\}$ e $i \in \{1, 2\}$.

Sendo assim obtemos que

$$\begin{aligned} y_2 \hat{P}_1(y_1, y_2) - \hat{P}_2(y_1, y_2) &= (y_2 P_1^{(d)}(1, y_2) - P_2^{(d)}(1, y_2)) + (y_2 P_1^{(d-1)}(1, y_2) - P_2^{(d-1)}(1, y_2)) y_1 \\ &+ \cdots + (y_2 P_1^{(1)}(1, y_2) - P_2^{(1)}(1, y_2)) y_1^{(d-1)} + (y_2 P_1^{(0)}(1, y_2) - P_2^{(0)}(1, y_2)) y_1^{(d)} \\ &= \Delta_0(1, y_2) + \Delta_1(1, y_2) y_1 + \cdots + \Delta_{d-1}(1, y_2) y_1^{d-1} + \Delta_k(1, y_2) y_1^d. \end{aligned}$$

Como $\Delta_0(\mathcal{F})$ em U_0 é

$$\Delta_0(x_1,x_2) = x_2 P_1^{(d)}(x_1,x_2) - x_1 P_2^{(d)}(x_1,x_2) \in k[x_1,x_2],$$

então $\Delta_0(x_1,x_2) = \dfrac{1}{{y_1}^{d+1}}\Delta_0(1,y_2),$ para cada $(x_1,x_2) \in U_0 \cap U_1$.

Suponhamos que $\Delta_0(\mathcal{F})$ é um polinômio não nulo. Se $\Delta_0(1,y_2)$ é um polinômio identicamente nulo em U_1, então $\Delta_0(x_1,x_2)$ é identicamente nulo em $U_0 \cap U_1$. Como $\mathbb{P}^2$ é irredutível (e consequentemente, todo aberto também é) teríamos que $\Delta_0(x_1,x_2)$ é identicamente nulo. Logo, $\Delta_0(1,y_2)$ é não nulo em U_1.

Sendo $\Delta_0(1,y_2)$ não identicamente nulo em U_1, concluímos que y_1 não divide o polinômio $y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2$. Logo y_1 não é fator comum de $-y_1\hat{P}_1$ e $y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2$. Então a folheação $\mathcal{F}$ é dada em U_1 pela 1- forma

$$w_1 = -y_1\hat{P}_1 dy_2 + (y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2)dy_1.$$

O campo vetorial em U_1 correspondente a w_1 então é dado por

$$\mathcal{X}_1 = -y_1\hat{P}_1\frac{\partial}{\partial y_1} + (\hat{P}_2 - y_2\hat{P}_1)\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Portanto a reta $L_\infty = Z(y_1)$ é invariante pelo campo $\mathcal{X}_1$, já que $\mathcal{X}_1(y_1) = -y_1\hat{P}_1$.

Se $\Delta_0(\mathcal{F})$ é identicamente nulo, então

$$y_2\hat{P}_1(y_1,y_2) - \hat{P}_2(y_1,y_2) = \Delta_1(1,y_2)y_1 + \cdots + \Delta_{d-1}(1,y_2)y_1^{d-1} + \Delta_d(1,y_2)y_1^d.$$

Logo, y_1 é o único fator comum de $y_1\hat{P}_1$ e $y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2$.

Como

$$\frac{1}{y_1}(y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2) = \Delta_1(1,y_2) + y_1\Delta_1(1,y_2) + \cdots + {y_1}^{d-1}\Delta_d(1,y_2),$$

temos que

$$w_1 = \hat{P}_1\, dy_2 + \hat{R}_1\, dy_1, \tag{6.11}$$

onde $\hat{R}_1 = \dfrac{1}{y_1}(y_2\hat{P}_1 - \hat{P}_2)$. Logo o correspondente campo sobre U_1 será

$$\mathcal{X}_{U_1} = \hat{P}_1\frac{\partial}{\partial y_1} - (\hat{R}_1)\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Por outro lado, $\Delta_0(1,y_2)$ identicamente nulo implica $y_2P_1^{(d)}(1,y_2) = P_2^{(d)}(1,y_2)$. Como $d = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$, concluímos que $P_2^{(d)}(1,y_2)$ e $P_1^{(d)}(1,y_2)$ são não ambos identicamente nulos. Portanto, y_1 não divide $\hat{P}_1 = \mathcal{X}_{U_1}(y_1)$. Logo, y_1 não é invariante por $\mathcal{F}$.

(b) Se $\Delta_0(\mathcal{F}) = 0$, pelo Lema 6.26, segue que o número total de tangência de uma reta, que não é solução de $\mathcal{F}$, com $\mathcal{F}$ é $d-1$. Como C é uma curva invariante por $\mathcal{F}$ e $\exp(\mathcal{F}) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$, então por [14] temos que as únicas singularidades possíveis de C são do tipo "*normal crossings.*" Logo por [5] o grau de S é menor ou igual d.

□

Corolário 6.29. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não degenerada em $\mathbb{P}^2$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$. Suponha que $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$. Então, são válidas as seguintes afirmações:

(a) os polinômios P_1 e P_2 tem grau $d = \deg(\mathcal{F})$.

(b) as singularidades de $\mathcal{F}$ em $L_\infty \cap U_1$ são os pontos da forma $(0, y_2)$, onde y_2 é zero comum de $P_1^{(d)}(1, y_2)$ e $\Delta_1(1, y_2)$.

(c) o determinante e o traço da jacobiana de $\mathcal{F}$ no ponto $(0, y_2) \in U_1 \cap \operatorname{Sing} \mathcal{F}$, denotados por $d_1(1, y_2)$ e $t_1(1, y_2)$, respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} d_1(1, y_2) = &\quad P_1^{(d-1)}(1, y_2)\frac{\partial \Delta_1}{\partial y_2}(1, y_2) - \Delta_2(1, y_2)\frac{\partial P_1^{(d)}}{\partial y_2}(1, y_2), \\ t_1(1, y_2) = &\quad \Delta_2(1, y_2) + \frac{\partial P_1^{(d)}}{\partial y_2}(1, y_2). \end{aligned} \tag{6.12}$$

(d) $(0:0:1) \in \operatorname{Sing} \mathcal{F}$, se somente se, $P_2^{(d)}(0, 1) = \Delta_1(0, 1) = 0$. Além disso, o determinante e o traço da jacobiana de $\mathcal{F}$ em $(0:0:1)$ são $d_2(0, 1)$ e $t_2(0, 1)$, respectivamente, com

$$\begin{aligned} d_2(0, 1) = &\quad \Delta_2(0, 1)\frac{\partial P_2^{(d)}}{\partial w_2}(0, 1) - P_2^{(d-1)}(0, 1)\frac{\partial \Delta_1}{\partial w_2}(0, 1), \\ t_2(0, 1) = &\quad \frac{\partial \Delta_1}{\partial w_2}(0, 1) - P_2^{(d-1)}(0, 1). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Demonstração.

(a) Suponha que $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$. Então,

$$\Delta_0(\mathcal{F})(x_1, x_2) = x_2 P_1^{(d)}(x_1, x_2) - x_1 P_2^{(d)}(x_1, x_2) \equiv 0.$$

Já que $x_2 P_1^{(d)}(x_1, x_2) = x_1 P_2^{(d)}(x_1, x_2)$ e $d = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$, segue que $P_2^{(d)}(x_1, x_2)$ e $P_1^{(d)}(x_1, x_2)$ não são nulos. Portanto, $\deg P_1 = \deg P_2 = d$.

(b) Se $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$, então pelo Teorema 6.28, equação (6.11), $\mathcal{F}$ restrita a U_1 é induzida pela 1-forma $w_1 = \hat{P}_1 dy_2 + \hat{R}_1 dy_1 = 0$, onde y_1 e y_2 são as coordenadas de U_1 e

$$\begin{aligned} \hat{P}_1(y_1, y_2) &= P_1^{(d)}(1, y_2) + P_1^{(d-1)}(1, y_2)y_1 + \cdots + P_1^{(1)}(1, y_2)y_1^{d-1} + P_1^{(0)}(1, y_2)y_1^d, \\ \hat{R}_1(y_1, y_2) &= \Delta_1(1, y_2) + \Delta_2(1, y_2)y_1 + \Delta_3(1, y_2)y_1^2 + \cdots + \Delta_d(1, y_2)y_1^{d-1}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Observamos que $z = (z_0 : z_1 : z_2) \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap (L_\infty \cap U_1)$, se somente se, $z_0 = 0$, $z_1 \neq 0$ e as coordenadas locais de z em U_1 anulam w_1. Portanto, usando (6.14), $z = (z_0 : z_1 : z_2) \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap (L_\infty \cap U_1)$, se somente se, $P_1^{(d)}(1, y_2) = 0$ e $\Delta_1(1, y_2) = 0$, onde $y_1 = \dfrac{z_0}{z_1} = 0$ e $y_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$.

(c) Usando novamente a expressão dada em (6.11) do Teorema 6.28, temos que se $z \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap U_1$, então $z = (z_0 : z_1 : z_2)$, $z_1 \neq 0$, $y_1 = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $y_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ anulam a 1-forma

$$w_1 = \hat{P}_1 dy_2 + \hat{R}_1 dy_1,$$

ou seja, $\hat{P}_1(y_1, y_2)$ e $\hat{R}_1(y_1, y_2) = 0$.

Dado $z \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap U_1$, temos que

$$J_{\mathcal{F}}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{P}_1}{\partial y_1}(z) & \dfrac{\partial \hat{P}_1}{\partial y_2}(z) \\ \dfrac{\partial \hat{R}_1}{\partial y_1}(z) & \dfrac{\partial \hat{R}_1}{\partial y_2}(z) \end{bmatrix}.$$

Como

$$\hat{P}_1(y_1, y_2) = P_1^{(d)}(1, y_2) + P_1^{(d-1)}(1, y_2)y_1 + \cdots + P_1^{(1)}(1, y_2)y_1^{d-1} + P_1^{(0)}(1, y_2)y_1^d,$$

segue que

$$\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) = P_1^{(d-1)}(1, y_2) + 2P_1^{(d-2)}(1, y_2)y_1 + \cdots + (d-1)P_1^{(1)}(1, y_2)y_1^{d-2} + dP_1^{(0)}(1, y_2)y_1^{d-1},$$

$$\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial y_2}P_1^{(d)}(1, y_2) + y_1\frac{\partial}{\partial y_2}P_1^{(d-1)}(1, y_2) + \cdots + y_1^d\frac{\partial}{\partial y_2}P_1^{(0)}(1, y_2).$$

Em particular, para $z = (0 : 1 : y_2) \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap (L_\infty \cap U_1)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial\, y_1}(0, y_2) &= P_1^{(d-1)}(1, y_2), \\ \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial y_2}(0, y_2) &= \frac{\partial}{\partial y_2}P_1^{(d)}(1, y_2). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Além disso, da igualdade

$$\hat{R}_1(y_1, y_2) = \Delta_1(1, y_2) + \Delta_2(1, y_2)y_1 + \Delta_3(1, y_2)y_1^2 + \cdots + \Delta_d(1, y_2)y_1^{d-1},$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\hat{R}_1(y_1,y_2) = \Delta_2(1,y_2) + 2\Delta_3(1,y_2)y_1 + \cdots + (d-1)\Delta_d(1,y_2)y_1^{d-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\hat{R}_1(y_1,y_2) = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1(1,y_2) + y_1\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_2(1,y_2)\cdots + y_1^{d-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_d(1,y_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\hat{R}_1(0,y_2) = \Delta_2(1,y_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\hat{R}_1(0,y_2) = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1(1,y_2).$$

Portanto, concluímos que

$$d_1(1,y_2) = detJ_{\mathcal{F}}(0,y_2) = P_1^{(d-1)}(1,y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1(1,y_2) - \Delta_2(1,y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}P_1^{(d)}(1,y_2)$$

$$t_1(1,y_2) = trJ_{\mathcal{F}}(0,y_2) = P_1^{(d-1)}(1,y_2) + \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1(1,y_2).$$

(d) Como $(0:0:1) \in U_2$, então $(0:0:1) \in \operatorname{Sing}\mathcal{F}$, se e somente se, as coordenadas $(0,0)$ anulam a 1-forma w_2 que induz $\mathcal{F}$ em U_2. Se $w_1 = \dfrac{z_0}{z_2}$ e $w_1 = \dfrac{z_1}{z_2}$, então a expressão de w_2 em U_2 é

$$w_2 = -w_1\hat{P}_2(w_1,w_2)\,dw_2 - (\hat{P}_1(w_1,w_2) - w_2\hat{P}_2(w_1,w_2))\,dw_1.$$

Como $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$, então é fácil ver que $\Delta_0(w_2,1) = 0$. Além disso, utilizando-se a mesma estratégia da parte 1 do Teorema 6.28, obtemos que

$$\hat{P}_1(w_1,w_2) = P_1^{(d)}(w_2,1) + P_1^{(d-1)}(w_2,1)w_1 + \cdots + P_1^{(1)}(w_2,1)w_1^{d-1} + P_1^{(0)}(w_2,1)w_1^d,$$

$$\hat{P}_2(w_1,w_2) = P_2^{(d)}(w_2,1) + P_2^{(d-1)}(w_2,1)w_1 + \cdots + P_2^{(1)}(w_2,1)w_1^{d-1} + P_2^{(0)}(w_2,1)w_1^d.$$

Portanto

$$\begin{array}{rcl}\hat{P}_1(w_1,w_2) - w_2\hat{P}_2(w_1,w_2) & = & {P_1}^{(d)}(w_2,1) - w_2{P_2}^{(d)}(w_2,1) + \\ & + & [{P_1}^{(d-1)}(w_2,1) - w_2{P_2}^{(d-1)}(w_2,1)]w_1 + \\ & + & \cdots + [{P_1}^{(0)}(w_2,1) - w_2{P_2}^{(0)}(w_2,1)]w_1^d \\ & = & \Delta_0(w_2,1) + \Delta_1(w_2,1)w_1 + \cdots + \Delta_d(w_2,1)w_1^d.\end{array}$$

Como $\Delta_0(w_2,1) = 0$, então

$$w_2 = -\hat{P}_2(w_1,w_2)\,dw_2 - R_2(w_1,w_2)\,dw_1 = 0,$$

onde

$$R_2(w_1,w_2) = \Delta_1(w_2,1) + \Delta_2(w_2,1)w_1 + \cdots + \Delta_d(w_2,1)w_1^{d-1}.$$

Portanto, $(0:0:1) \in \operatorname{Sing}\mathcal{F}$, se e somente se, $\hat{P}_2(0,0) = 0$ e $R_2(0,0) = 0$, ou seja, ${P_2}^{(d)}(0,1) = 0$ e $\Delta_1(0,1) = 0$. Além disso, a matriz jacobiana de $\mathcal{F}$ no ponto $p = (0:0:1) \in Sing(\mathcal{F}) \cap U_2$ está dada por

$$J_{\mathcal{F}}(z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(p) & \dfrac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}(p) \\ \\ -\dfrac{\partial R_2}{\partial w_1}(p) & \dfrac{\partial R_2}{\partial w_2}(p) \end{bmatrix}$$

Portanto

$$det J_{\mathcal{F}}(p) = -\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(p)\frac{\partial R_2}{\partial w_2}(p) + \frac{\partial R_2}{\partial w_2}(p).\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(p),$$

$$tr J_{\mathcal{F}}(p) = -\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(p) + \frac{\partial R_2}{\partial w_2}(p).$$

Como

$$\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(w_1,w_2) = P_2^{(d-1)}(w_2,1) + 2P_2^{(d-2)}(w_2,1)w_1 + \cdots + (d-2)P_2^{(1)}(w_2)w_1^{d-2} + (d)P_2^{(0)}(w_2)w_1^{d-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{P}_2(w_1,w_2) = \frac{\partial}{\partial w_2}P_2^{(d)}(w_2,1) + w_1\frac{\partial}{\partial w_2}P_2^{(d-1)}(w_2,1) + \cdots + w_1^d\frac{\partial}{\partial w_2}P_1^{(0)}(w_2,1),$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{R}_2(w_1,w_2) = \Delta_2(w_2,1) + 2\Delta_3(w_2,1)w_1 + \cdots + (d-1)\Delta_d(w_2,1)w_1^{d-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{R}_2(w_1,w_2) = \frac{\partial}{\partial w_2}\Delta_1(w_2,1) + w_1\frac{\partial}{\partial w_2}\Delta_2(w_2,1) + \cdots + w_1^{d-1}\frac{\partial}{\partial w_2}\Delta_d(w_2,1),$$

concluímos que

$$\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_1}(0,0) = P_2^{(d-1)}(0,1), \quad \frac{\partial}{\partial w_2}\hat{P}_2(0,0) = \frac{\partial}{\partial w_2}P_2^{(d)}(0,1), \quad \frac{\partial}{\partial w_1}\hat{R}_2(0,0) = \Delta_2(0,1)$$

e $\dfrac{\partial}{\partial w_2}\hat{R}_2(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial w_2}\Delta_1(0,1)$.

Logo

$$det J_{\mathcal{F}}(0,0) = \Delta_2(0,1)\frac{\partial}{\partial w_2}P_2^{(d)}(0,1) - P_2^{(d-1)}(0,1)\frac{\partial}{\partial w_2}\Delta_1(0,1).$$

$$tr J_{\mathcal{F}}(p) = \frac{\partial}{\partial w_2}\Delta_1(0,1) - P_2^{(d-1)}(0,1).$$

□

6.4 ALGORITMO DO TEOREMA 6.28

O Teorema 6.28 sugere a seguinte estratégia para verificar se uma dada folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ possui curvas algébricas invariantes.

1^0 Passo: Verifique se $\mathcal{F}$ é uma folheação não degenerada sem exponentes racionais positivos. Caso contrário, não há garantia do que o terceiro passo funcionará corretamente.

2^0 Passo: Verifique se $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$. Se $\Delta_0(\mathcal{F}) \not\equiv 0$, então L_∞ é invariante por $\mathcal{F}$. Se $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$ vá para o terceiro passo.

3^0 Passo: Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$. Verifique se existe polinômio f de grau m, $0 \leq m \leq \deg(\mathcal{F})$, e algum polinômio $g \in k[x_1, x_2]$, de grau $\deg(\mathcal{F}) - 1$, que satisfazem a igualdade

$$P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f = gf. \tag{6.16}$$

Se tais polinômios não existirem, então $\mathcal{F}$ não possui curvas algébricas invariantes.

Para testar o terceiro passo escolhemos polinômios $f, g \in k[x_1, x_2]$ genéricos e colocamos na equação (6.16). Em seguida, utilizamos a base de Gröbner para verificar se o sistema obtido de (6.16) admite solução. Como utilizamos a base de Gröbner precisamos fixar uma ordem no conjunto de todos os monômios em x_1 e x_2

Utilizamos a base de Gröbner somente para verificar se um dado ideal é trivial ou não. Por esta razão é que podemos escolher qualquer ordem de termos que desejamos para este algoritmo.

Algoritmo 1: ALGORITMO DO TEOREMA 6.28

Entrada: $P_1, P_2 \in k[x_1, x_2]$

início

Faça $k = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$ e calcule $\Delta_0(\mathcal{F})$;

se $\Delta_0(\mathcal{F}) \not\equiv 0$ **então**

Retorne "1" , pois a reta L_∞ é solução algébrica da folheação $\mathcal{F}$.

senão

Etapa 2: Considere $f = \sum_{|\alpha|\leq k} u_\alpha x^\alpha$ e $g = \sum_{|\beta|\leq k-1} v_\beta x^\beta$

Seja I o ideal gerado pelos polinômios nas variáveis u_α's e v_β's, que são os coeficientes dos monômios x^α na equação

$$P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f - gf = 0$$

Etapa 3: Considere $\mathcal{U}$ o conjunto de monômios de grau menor o igual à k, ou seja, $\mathcal{U} = \{x^\alpha; |\alpha| \leq k\}$.

Etapa 4: Seja x^α o elemento de maior ordem de $\mathcal{U}$. Considere o ideal $\mathcal{J}_\mathcal{U} = \langle I, u_\alpha - 1\rangle$;

Etapa 5:

se $1 \notin \mathcal{J}_\mathcal{U}$ **então**

$Z(\mathcal{J}_\mathcal{U}) \neq \emptyset$

temos $Z(I) \neq \emptyset$, retorne"α" e pare.

senão

Etapa 6 : inclua x^α aos geradores de $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}, x^\alpha \rangle$ e faça $\mathcal{U} = \mathcal{U} - \{x^\alpha\}$.

volte à etapa (4).

fim

fim

fim

Saída: O grau de uma solução algébrica da folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$, ou "0" se $\mathcal{F}$ não possui uma solução algébrica menor o igual que $\deg(\mathcal{F})$

6.5 FOLHEAÇÕES COM EXPOENTES RACIONAIS POSITIVOS.

Queremos um algoritmo que determine se $\mathcal{F}$ é não degenerada e se possui expoentes racionais positivos.

Inicialmente localizamos os pontos singulares de $\mathcal{F}$. Seja $u \in \mathbb{P}^2$ uma singularidade de $\mathcal{F}$. Se $u \in U_0$, então u é uma singularidade de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ se $P_1(u) = P_2(u) = 0$. Além disso, u é uma singularidade degenerada se

$$detJ_{\mathcal{F}}(u) = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(u).\frac{\partial P_2}{\partial x_2}(u) - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(u).\frac{\partial P_2}{\partial x_1}(u) = 0.$$

Sendo assim para sabermos se $\mathcal{F}$ tem singularidades degeneradas em U_0 basta determinarmos se a variedade afim $V = Z(P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}})$ é vazia ou não.

Observamos que pelo Teorema dos zeros de Hilbert (ver [7] página 10), temos que $V = \emptyset$ se e somente se o ideal $\sqrt{\langle P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}}\rangle} = \langle 1\rangle$. Como $\sqrt{\langle P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}}\rangle} = \langle 1\rangle$, se somente se, $\langle P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}}\rangle = \langle 1\rangle$, segue que V não tem singularidades degeneradas, se somente se, $1 \in \langle P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}}\rangle$. Portanto se uma base de Gröbner do ideal $\langle P_1, P_2, detJ_{\mathcal{F}}\rangle$ for igual a $\{1\}$, então $\mathcal{F}$ não tem singularidades degeneradas em U_0. Caso contrário terá singularidades degeneradas. No segundo caso, os coeficientes racionais de $\mathcal{F}$ não estarão todos bem definidos.

Daqui para frente assumimos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, P_2)$ não possui pontos singulares degenerados em U_0.

Sejam $u \in U_0 \cap \operatorname{Sing} \mathcal{F}$ e λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz $J_{\mathcal{F}}(u)$. Como $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, então o expoente racional $\eta = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, está bem definido. Por definição, λ_1 e λ_2 são as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(J_{\mathcal{F}}(u))\lambda + \det J_{\mathcal{F}}(u).$$

Logo $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(J_{\mathcal{F}}(u))$, $\lambda_1\lambda_2 = \det J_{\mathcal{F}}(u)$ e

$$\frac{[tr J_{\mathcal{F}}(u)]^2}{\det J_{\mathcal{F}}(u)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

Portanto, usando-se a relação

$$\frac{[tr J_{\mathcal{F}}(u)]^2}{\det J_{\mathcal{F}}(u)} = \eta + \frac{1}{\eta} + 2,$$

concluímos que η satisfaz a igualdade

$$\det J_{\mathcal{F}}(u)\, \eta^2 + [2 \det J_{\mathcal{F}}(u) - (tr J_{\mathcal{F}}(u))^2]\, \eta + \det J_{\mathcal{F}}(u) = 0.$$

Considere o polinômio

$$\theta_0(s, x_1, x_2) = \det J_{\mathcal{F}} s^2 + (2 \det J_{\mathcal{F}} - (tr J_{\mathcal{F}})^2)s + \det J_{\mathcal{F}} \in k[s, x_1, x_2].$$

Então $\theta_0(\eta, u_1, u_2) = 0$, $\forall u = (u_1, u_2) \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_0$, ou seja, $(\eta, u_1, u_2) \in Z(P_1, P_2, \theta_0)$.

Considere o ideal $\langle P_1, P_2, \theta_0 \rangle$ de $k[s, x_1, x_2]$ e a ordem lexicográfica para os monômios de $k[s, x_1, x_2]$ onde impomos que $x_2 \underset{Lex}{\succ} x_1 \underset{Lex}{\succ} s$. Como os polinômios P_1, $P_2 \in k[x_1, x_2]$ não tem fatores comuns, então $Z(\langle P_1, P_2 \rangle)$ é finito. Portanto $Z(\langle P_1, P_2, \theta_0 \rangle)$ também é finito.

O Corolário A.44 nos garante que se $I = \langle P_1, P_2, \theta_0 \rangle \subset k[s, x_1, x_2]$ e G é uma base de Gröbner de I, com a ordem lexicográfica $x_2 \underset{Lex}{\succ} x_1 \underset{Lex}{\succ} s$, então existe um polinômio $e_o \in G$ tal que $e_0 \in k[s]$. Em particular se um número complexo η é um expoente característico de um ponto singular da folheação então ele é um zero de $e_0(s)$.

De fato, se $u \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_0$ e $\eta \in \exp(\mathcal{F}, u)$, então $(\eta, u_1, u_2) \in V(I) = V(G)$. Como $e_0(s) \in G$, segue que $e_0(\eta) = e_0(\eta, u_1, u_2) = 0$. Portanto η é zero de e_0. Assim se $e_0(s)$ não tem raízes racionais positivas, então $\mathcal{F}$ não tem expoentes racionais positivos nas singularidades pertencentes a U_0.

Isto resolve o problema com relação às singularidades de $\mathcal{F}$ em U_0. Entretanto a folheação $\mathcal{F}$ poderia ter singularidades fora de U_0, isto é, em L_∞. Uma forma de lidar com estas singularidades seria repetir o processo anterior para o campo de vetores que induz a folheação $\mathcal{F}$ em U_1 e U_2. No entanto, como o cálculo de uma base de Gröbner com uma ordem lexicográfica pode ser bastante lento, é conveniente usarmos o Corolário 6.29 para acelerar os cálculos.

Observação 6.30. Note que consideramos que $\Delta_0(\mathcal{F}) \equiv 0$, já que se este não for o caso então a reta no infinito seria uma curva invariante de $\mathcal{F}$.

Consideramos então o problema de determinarmos as singularidades de $\mathcal{F}$ em $L_\infty \cap U_1$. Utilizando-se o item c do Corolário 6.29, temos que a folheação $\mathcal{F}$ tem singularidades em $L_\infty \cap U_1$, se e somente se, os polinômios ${P_1}^{(k)}(1, y_2)$ e $\Delta_1(1, y_2)$ de $k[y_2]$ tem raízes em comum. Os polinômios ${P_1}^{(k)}(1, y_2)$ e $\Delta_1(1, y_2)$ tem raízes em comum, se somente se, tem fatores em comum. Logo calculamos

$$g(y_2) = MDC\{P_1^{(k)}(1, y_2), \Delta_1(1, y_2)\}.$$

Para determinarmos $g(y_2)$ podemos usar o algoritmo de Euclides, veja [8]. Então concluímos que $P_1^{(k)}(1, y_2)$ e $\Delta_1(1, y_2)$ tem fator comum, se somente se, $g(y_2) \neq 1$.

Se $g(y_1) = 1$, então $\mathcal{F}$ não tem singularidades em $L_\infty \cap U_1$.

Se $g(y_2) \neq 1$, então devemos determinar se as singularidades de $\mathcal{F}$ em $L_\infty \cap U_1$ são degeneradas ou não e em seguida calcular os seus expoentes racionais.

Passamos a estudar o caso em que $g(y_1) \neq 1$. Seja $u = (0, u_2) \in \text{Sing}\,\mathcal{F} \cap (L_\infty \cap U_1)$, tal que $g(u) = 0$. Queremos determinar se u é uma singularidade degenerada ou não degenerada. Para isto seja

$$h(y_2) = MDC\{g(y_2), d_1(1, y_2)\},$$

onde $d_1(1, y_2)$ é o determinante jacobiano da folheação $\mathcal{F}$ em U_1 nos pontos $u = (0, y_2)$.

Se o polinômio $h(y_2) = 1$, então os polinômios $g(y_2)$ e $d_1(1, y_2)$ não tem zeros comuns, portanto as singularidades de $\mathcal{F}$ em $L_\infty \cap U_1$ não são degeneradas.

Se $h(y_2) \neq 1$, então os polinômios $g(y_2)$ e $d_1(1, y_2)$ tem zeros comuns e portanto $\mathcal{F}$ tem singulares degeneradas, onde não estarão bem definidos os exponentes característicos racionais.

Agora nosso objetivo é descobrirmos se $\mathcal{F}$ tem ou não expoentes característicos racionais nos pontos da forma $u = (0, u_2)$. A estratégia é a mesma que as dadas para as singularidades em U_0. Vamos encontrar uma relação entre os polinômios $detJ_{\mathcal{F}}(0, y_2)$ e $trJ_{\mathcal{F}}(0, y_2)$, que são o determinante e traço da matriz jacobiana da folheação $\mathcal{F}$ em U_1, respectivamente, e os expoentes racionais dos pontos u.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ os autovalores da matriz $J_{\mathcal{F}}(0, u_2)$, que são ambos não nulos. Da mesma forma que foi feita em U_0, obtemos que

$$\frac{[trJ_{\mathcal{F}}(0, u_2)]^2}{\det J_{\mathcal{F}}(0, u_2)} = \eta + \frac{1}{\eta} + 2, \quad onde\ \eta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Donde obtemos a igualdade

$$\det J_{\mathcal{F}}(0, u_2)\eta^2 + [2\det J_{\mathcal{F}}(0, u_2) - (trJ_{\mathcal{F}}(0, u_2))^2]\eta + \det J_{\mathcal{F}}(0, u_2) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$d_1(1, u_2)\eta^2 + [2d_1(1, u_2) - (t_1(1, u_2))^2]\eta + d_1(1, u_2) = 0.$$

Logo o papel de θ_0 é desempenhado pelo polinômio

$$\theta_1(y_2, s) = d_1(1, y_2)s^2 + [2d_1(1, y_2) - t_1(1, y_2)^2]s + d_1(1, y_2).$$

Então $\theta_1(u_2, \eta) = 0$.

Novamente pelo Corolário A.44, sabemos que existe um polinômio $e_1(s) \in G_1$, onde G_1 é uma base de Gröbner para o ideal $I_1 = \langle P_1^{(k)}(1, y_2), \Delta_1(1, y_2), \theta_1(y_2, s)\rangle$, em relação à ordem lexicográfica com $y_2 \underset{Lex}{\succ} s$. Como $e_1 \in k[s]$, será mais fácil o cálculo de suas raízes, que são uma quantidade finita. Se $e_1(s)$ não tiver raízes racionais positivas, então concluímos que $\mathcal{F}$ não tem expoentes característico racionais nos pontos $(0, u_2)$.

Finalmente devemos determinar se $(0:0:1)$ é uma singularidade de $\mathcal{F}$ e calcular seu expoente característico, se não for singularidade degenerada. Para fazer isto usamos as soluções dadas em (6.13) do Corolário 6.29 da mesma forma que fizemos nos casos anteriores.

Em seguida apresentamos estas ideias em um algoritmo que determina se uma dada folheação possui expoentes racionais positivos.

ALGORITMO:

Parâmetros: P_1, $P_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$.

Saída: "ok" se $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ não tem expoentes racionais positivos e "false"caso contrário.

1ª Etapa: Calcule a base de Gröbner G do ideal $I = \langle P_1, P_2, \det_{\mathcal{F}} J \rangle$.

- Se $1 \notin G$, então retorne "ok"e pare.
- Caso contrário ($1 \in G$) vá para a etapa seguinte.

2ª Etapa: Defina o polinômio $\theta_0(x_1, x_2, s)$ e use a base de Gröbner com relação à ordem lexicográfica com $s < x_1 < x_2$ para encontrar um polinômio $e_0(s)$, tal que
$e_0(s) \in \langle P_1, P_2; \theta_0 \rangle$.

3ª Etapa: Calcule as raízes de $e_0(s)$ e verifique se alguma delas é racional e positiva.

- Se não acontece, retorne "false".

4ª Etapa: Calcule $g(y_2) = MDC\{{P_1}^{(k)}(1, y_2),\ \Delta_1(1, y_2)\}$

- Se $g(y_2) = 1$ retorne "ok".
- Se $g(y_2) \neq 1$ vá para etapa seguinte.

5ª Etapa: Calcule $h(y_2) = MDC\{g(y_2), d_1(1, y_2)\}$

- Se $h(y_2) \neq 1$ retorne "false".
- Se $h(y_2) = 1$, vá para a seguinte etapa.

6ª Etapa : Defina $\theta_1(y_2, s) = d_1(1, y_2)s^2 + (2d_1(1, y_2) - t_1(1, y_2)^2)s + d_1(1, y_2)$ e use uma base de Gröbner G_1, em relação à ordem lexicográfica $s < y_1 < y_2$, para calcular um polinômio $e_1(s)$ em uma única variável pertencente a G_1.

7ª Etapa : Verifique se $e_1(s)$ tem expoentes racionais positivos. Se não acontece, retorne "false".

8ª Etapa : Calcule ${P_2}^{(k)}(0,1)$ e $\Delta_1(0,1)$.

- Se $P_2(k)(0,1) \neq 0$ ou $\Delta_1(0,1) \neq 0$, retorne "ok".

- Se $P_2(k)(0,1) = \Delta_1(0,1) = 0$, retorne "false".

9ª Etapa : Calcule $\theta_2(s) = d_2(0,1)s^2 + (2d_2(0,1) - t_2(0,1)^2)s + d_2(0,1)$.

Se $\theta_2(s)$ tem zeros racionais positivos, retorne "false".

Caso contrário retorne "true".

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, W. W.; LOUSTAUNAU, P. *An Introduction to Gröbner Bases, Graduate Studies in Math 3.* Providence: American Mathematical Soc., 1994.

[2] CAMACHO, C.; LINS NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[3] CAMPILLO, A.; CARNICER, M. *Proximity inequalities and bounds for the degree of invariant curves by foliations of* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 349, p.2211-2228, 1997.

[4] CARNICER, M.; *The Poincaré Problem in the nondicritical case.* Annals of the Mathematics 140, p.289-294, 1994.

[5] CERVEAU, D.; LINS NETO, A. *Holomorphic Foliations in* $\mathbb{CP}^2$ *having an invariant algebraic curve.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41:4, (1991), p.883-903.

[6] COUTINHO, S. C.; RIBEIRO, B. F. *On Holomorphic Foliations Without Algebraic Solutions.* Experimental Mathematics 10 (2001) p.529-536.

[7] FULTON, W. *Algebraic curves - An Introducton to Algebraic Geometry.* New York: Benjamin, W. A. 1969.

[8] GONÇALVES ADILSON. *Introdução à Álgebra.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[9] LINS NETO, A. *Algebric solutions of Polinomyal Differential Equations and Foliations in Dimension Two.* Berling: Springer, 1345 (1988) p.192-232.

[10] LINS NETO, A.; SCARDÚA, B. *Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas.*

[11] POINCARE, H. *Sur L integrations Algebrique des Équations Differentielles du* 1^{er} *Ordre.* Rendiconti Circ. Math. Palermo 11 (1981) p.193-239.

[12] ROSSINI, A. A. G., *Folheações Algébricas Projetivas.* Dissertação Mestrado, Juiz de Fora: UFJF, 2011.

[13] SHAFAREVICH, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1.* New York: Springer, 1994.

[14] SOARES, M. G. *On algebraic sets invariant by one-dimensional foliations on* $\mathbb{CP}(3)$ Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43:1, (1973), p.143-162.

[15] SOARES, M. G. *Projective varieties invariant by one-dimensional foliations.* Annals of Mathematic, 152, p.369-382, 2000.

[16] SOARES, M. G. *The Poincaré Problem for hypersurfaces invariant by one dimensional foliations.* Inventiones Mathematicae 128, p.495-500, 1997.

[17] VAINSENCHER, I. *Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[18] VEIRA COSTA, A.; VAINSENCHER, I. *Bases de Gröbner: Resolvendo Equações Polinomiais* : Escola de Ágebra, IMECC UNICAMP. 1994.

APÊNDICE A – BASES DE GRÖBNER E ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES

O objetivo principal deste apêndice é apresentar a teoria necessária para demonstrar o Corolário A.44 o qual será um resultado importante utilizado no capitulo 6 deste trabalho.

A.1 ORDEM MONOMIAL SOBRE O ANEL DE POLINÔMIOS

Neste apêndice k denotará um corpo, não necessariamente um corpo algebricamente fechado.

Definição A.1. O conjunto de todos os monômios em $k[x_1, \ldots, x_n]$ é denotado por

$$\mathbb{T}^n = \{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n};\ \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Algumas vezes, por comodidade, escreveremos x^β, para referir-nos a $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$, onde $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ e 1 para referir-nos ao monômio $x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$.

Estabeleceremos uma ordem para os elementos do conjunto $\mathbb{T}^n$. Isto é equivalente a colocarmos uma ordem no conjunto $\mathbb{N}^n$ dos expoentes dos elementos de $\mathbb{T}^n$.

Definição A.2. Uma relação de ordem, ou uma ordenação sobre um conjunto $A \subset \mathbb{N}^n$, onde A é não vazio, é uma relação denotada por "$\succ$"satisfazendo:

(a) Para cada $\alpha \in A$, $\alpha \succ \alpha$ (reflexiva).

(b) Se α, $\beta \in A$ são tais que $\alpha \succ \beta$ e $\beta \succ \alpha$, então $\alpha = \beta$ (assimétrica).

(c) Se α, β e γ pertencem à A são tais que $\alpha \succ \beta$ e $\beta \succ \gamma$, então $\alpha \succ \gamma$ (transitiva).

Definição A.3. Dizemos que uma relação de ordem $\succ$ em $\mathbb{N}^n$ é uma ordem monomial se satisfaz as seguintes afirmações:

(a) Para cada α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, se $\alpha \neq \beta$, então $\alpha \succ \beta$ ou $\beta \succ \alpha$ (é uma ordem total).

(b) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e $\alpha \succ \beta$, então $\alpha + \gamma \succ \beta + \gamma$, $\forall\, \gamma \in \mathbb{N}^n$.

(c) A ordem $\succ$ é uma boa ordem, ou seja, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}^n$ admite um menor elemento.

Uma vez escolhida uma ordem monomial $\succ$ em $\mathbb{N}^n$, dizemos que um monômio de x^α é maior que x^β, e escrevemos $x^\alpha \succ x^\beta,\ se\ \alpha \succ \beta$.

Observação A.4.

(a) A condição (b) da Definição A.3 garante que se $x^\alpha \succ x^\beta$ então $x^\alpha x^\gamma \succ x^\beta x^\gamma$.

(b) A condição (a) da Definição A.3 garante que não existirá ambiguidade na escolha de um maior elemento de uma coleção finita de monômios.

Definição A.5. A ordem lexicográfica em $\mathbb{N}^n$, denotada por $\succ_{Lex}$, é definida por

$$\alpha \succ_{Lex} \beta, \ se \ \exists \ j \in \{1, ..., n\} \text{ tal que } \alpha_j > \beta_j \ e \ \ \alpha_k = \beta_k, \quad \forall \ \ k < j.$$

Na ordem lexicógrafica, estamos dizendo que α é maior que β se a primeira coordenada da esquerda para a direita de α que não coincidir com correspondente coordenada de β for maior que a de β.

Observação A.6. A ordem lexicográfica em $\mathbb{N}^n$ induz uma ordem em $\mathbb{T}^n$.

Observação A.7. Sejam $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n}$ elementos de $\mathbb{T}^n$, onde

$$\alpha_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \alpha_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \alpha_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Como $\alpha_1 \underset{Lex}{\succ} \alpha_2 \underset{Lex}{\succ} \ldots \underset{Lex}{\succ} \alpha_n$, então $x^{\alpha_1} \underset{Lex}{\succ} x^{\alpha_2} \underset{Lex}{\succ} \ldots \underset{Lex}{\succ} x^{\alpha_n}$.

Exemplo A.8. Consideremos a ordem lexicográfica e os monômios

$$xy^3z^3,\ xy^2z^4,\ x^2y^4z^2,\ x^4y,\ z^7 \text{ de } k[x, y, z].$$

Suponhamos que $x \succ_{Lex} y \succ_{Lex} z$, $\alpha_1 = (1, 3, 3)$, $\alpha_2 = (1, 2, 4)$, $\alpha_3 = (2, 4, 2)$, $\alpha_4 = (4, 1, 0)$ e $\alpha_5 = (0, 0, 7)$. A ordenação em $\mathbb{N}^n$ é $\alpha_4 \succ \alpha_3 \succ \alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \alpha_5$. Portanto, a ordenação destes monômios será $x^4y \succ x^2y^4z^2 \succ xy^3z^3 \succ xy^2z^4 \succ z^7$.

Proposição A.9. Uma ordem total $\succ$ em $\mathbb{N}^n$ é uma boa ordem, se e somente se, para cada sequência decrescente $(\alpha_1 \succeq \alpha_2 \succeq \cdots \succeq \alpha_m \succeq \ldots)$ em $\mathbb{N}^n$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_m = \alpha_{m_0}$, para cada $m \geqslant m_0$.

Demonstração. Suponhamos que $\succ$ não é uma boa ordem. Então existe $A \subseteq \mathbb{N}^n$, não vazio, tal que A não admite um menor elemento. Dado $\alpha_1 \in A$, como A não admite elemento mínimo, existe $\alpha_2 \in A$, tal que $\alpha_1 \succ \alpha_2$. Utilizando-se o mesmo raciocínio para α_2, existe $\alpha_3 \in A$ tal que $\alpha_2 \succ \alpha_3$. Continuando-se desta forma encontramos uma sequência estritamente infinita

$$\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \alpha_3 \succ \cdots \succ \alpha_m \succ \ldots \ \text{ em } \mathbb{N}^n.$$

O que gera uma contradição com a hipótese.

Reciprocamente, suponha que existe uma sequência decrescente

$$(\alpha_1 \succeq \alpha_2 \succeq \cdots \succeq \alpha_m \succeq \ldots) \text{ em } \mathbb{N}^n,$$

tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe m_0 para o qual tem-se $\alpha_m > \alpha_{m_0}$. Considere $A = \{\alpha_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ o conjunto formado por todos os elementos desta sequência. Então A não tem menor elemento. $\square$

Proposição A.10. A ordem lexicográfica é uma ordem monomial.

Demonstração.

(a) Sejam α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, tal que $\alpha \neq \beta$. Existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha_j \neq \beta_j$. Utilizando a ordem $>$ em $\mathbb{N}$, que é uma ordem total, temos que $\alpha_j > \beta_j$ ou $\beta_j > \alpha_j$. Portanto $\alpha \underset{Lex}{\succ} \beta$ ou $\beta \underset{Lex}{\succ} \alpha$. Logo a ordem lexicográfica é uma ordem total.

(b) Sejam α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, tais que $\alpha \underset{Lex}{\succ} \beta$. Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_j > \beta_j$ e $\alpha_k = \beta_k$, $\forall k < j$. Como $>$ é a ordem em $\mathbb{N}$ e $\alpha_j > \beta_j$, segue que $\alpha_j + \gamma_j > \beta_j + \gamma_j$. Além disso $\alpha_k + \gamma_k = \beta_k + \gamma_k$, $\forall\, k < j$. Portanto $\alpha + \gamma \underset{Lex}{\succ} \beta + \gamma$.

(c) Seja $\alpha_1 \underset{Lex}{\succ} \alpha_2 \underset{Lex}{\succ} \alpha_3 \underset{Lex}{\succ} \dots$ uma sequência em $\mathbb{N}^n$, a qual denotamos por $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, onde cada $\alpha_i = ({\alpha_i}^1, \dots, {\alpha_i}^n)$. Então para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ temos que $\left({\alpha_i}^j\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em $\mathbb{N}$. Como $\geq$ é uma boa ordem em $\mathbb{N}$, pela Proposição A.9, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^j_m = \alpha^j_{m_j}$, $\forall\, m > m_j$. Se $m_0 = \max\{m_j\,;\ 1 \leq j \leq n\}$, então existe $\alpha_{m_0} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\alpha_m = \alpha_{m_0}$, $\forall\, m > m_0$.

□

Definição A.11. O grau total do monômio x^α, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, é a soma dos expoentes de cada variável e será denotado por $|\alpha|$.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

Exemplo A.12. Se $x^2yz^5 \in k[x, y, z]$, então grau total de x^2yz^5 é $|\alpha| = 2 + 1 + 5 = 8$.

Definição A.13. A ordem lexicográfica graduada em $\mathbb{N}^n$ é definida da seguinte forma:

$$\alpha \underset{LexG}{\succ} \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{se } \ |\alpha| > |\beta| \\ \text{ou} \\ |\alpha| = |\beta| \ \ e \ \ \alpha \underset{Lex}{\succ} \beta. \end{cases}$$

Observação A.14. A ordem lexicográfica graduada em $\mathbb{N}^n$ induz uma ordem em $\mathbb{T}^n$.

Exemplo A.15. Sejam x^2yx^5 e $x^2y^3 \in k[x, y, z]$. Então, $\alpha = (2, 1, 5) \underset{LexG}{\succ} \beta = (2, 3, 0)$, pois $|\alpha| = 8 > |\beta| = 5$. Logo $x^2yx^5 \underset{LexG}{\succ} x^2y^3$.

Definição A.16. A ordem lexicográfica inversa graduada em $\mathbb{N}^n$, denotada por $\succ_{LIG}$, é definida por:

$$\alpha \succ_{LIG} \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} se\ |\alpha| > |\beta| \\ \text{ ou} \\ se\ |\alpha| = |\beta| \text{ e existe } \ j \in \{1, ..., n\} \text{ tal que } \alpha_j < \beta_j \ e \ \ \alpha_k = \beta_k, \ \forall \ \ k > j. \end{cases}$$

Exemplo A.17. Em $k[x, y, z]$ temos que

$$y^3 \underset{LIG}{\succ} xz^2 \underset{LIG}{\succ} xy \underset{LIG}{\succ} y^2,$$

já que $(0, 1, 0) \underset{LIG}{\succ} (1, 0, 2) \underset{LIG}{\succ} (1, 1, 0) \underset{LIG}{\succ} (0, 2, 0)$ em $\mathbb{N}^n$.

Fixada uma ordem monomial "$\succ$" em $\mathbb{N}^n$, podemos escrever cada polinômio não nulo $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, de forma única, como

$$f = C_\alpha X^\alpha + \sum_{\substack{C_\beta \in k \\ \alpha > \beta}} C_\beta X^\beta, \quad C_\alpha \in k - \{0\}, \tag{A.1}$$

onde $C_\alpha X^\alpha$ é o maior monômio de f, mediante a ordem induzida por "$\succ$"sobre $\mathbb{T}^n$.

Definição A.18. Fixada uma ordem monomial "$\succ$" em $\mathbb{N}^n$ e dado $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ não nulo, expressado como em (A.1), dizemos que $C_\alpha X^\alpha$ é o termo líder de f e que o grau de f é α. Serão denotados por $TL(f)$ e $\deg(f)$, respectivamente.

Observação A.19.

(a) Apesar do fato do grau de $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ ser um vetor $\alpha \in \mathbb{N}^n$, convencionamos que $\deg(0) = -\infty$.

(b) Devemos destacar a ordem monomial utilizada, já que o termo líder e o grau de um polinômio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ podem variar conforme a ordem monomial considerada.

Exemplo A.20. Seja $f = 2x^2yz^4 + 3xy^3z^2 - 5x^3 \in k[x, y, z]$.

- Considerando-se a ordem Lexicográfica $x \succ_{Lex} y \succ_{Lex} z$, temos que

  $$x^3 \succ_{Lex} x^2yz^4 \succ_{Lex} xy^3z^2.$$

  Logo expressamos $f = -5x^3 + 2x^2yz^4 + 3xy^3z^2$ e concluímos que $TL(f) = -5x^3$ e $\deg(f) = (3, 0, 0)$.

- Consideremos a ordem Lexicográfica graduada. Se $\alpha = (2, 1, 4)$, $\beta = (1, 3, 2)$ e $\gamma = (3, 0, 0)$, então

  $$|\alpha| = 2 + 1 + 4 = |\beta| = 1 + 3 + 2 > |\gamma| = 3 + 0 + 0.$$

  Como $\alpha \succ_{Lex} \beta$, então $x^2yz^4 \succ_{LexG} xy^3z^2 \succ_{LexG} x^3$. Sendo assim $TL(f) = 2x^2yz^5$, $\deg(f) = (2, 1, 4)$, pois $f = 2x^2yz^4 + 3xy^3z^2 - 5x^3$.

Proposição A.21. Fixada uma ordem monomial "$\succ$" e dados $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$, não nulos, cumprem-se:

(a) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

(b) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$. Valendo-se a igualdade se $\deg(f) \neq \deg(g)$.

A.2 DIVISÃO DE POLINÔMIOS EM $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

A.2.1 Divisão de Polinômios em uma Variável

Nesta apêndice consideramos polinômios em $k[x]$ e usamos o algoritmo euclidiano para dividir polinômios. A teoria de polinômios em uma variável é uma boa ilustração da teoria mais geral que será apresentada no restante deste capítulo. Apresentamos as notações que mais para frente serão generalizadas para o estudo de polinômios em várias variáveis.

Definição A.22. Seja $f \in k[x]$ um polinômio não nulo. O grau de f é o maior exponente de x que aparece em f e o termo líder de f é o termo com maior grau e o seu coeficiente líder é o coeficiente do termo líder.

Exemplo A.23. Seja $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_i \in k,\ 0 \leq i \leq n$, $a_n \neq 0$. Então, $\deg(f) = n,\ TL(f) = a_n x^n$ e $CL(f) = a_n$.

A principal aplicação do algoritmo euclidiano é o algoritmo da divisão de polinômios.

Exemplo A.24. Vamos dividir o polinômio $f = -4x^4 + 2x^2 - x + 2$ por $g = x^2 + x + 1$.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & -4x^4+2x^2-\ \ x+2 & x^2+\ \ x+1 \\ \cline{3-3}
- & -4x^4-4x^3-4x^2 & -4x^2+4x+1 \\ \cline{2-2}
 & 4x^3+6x^2-x+2 & \\
- & 4x^3+4x^2+4x & \\ \cline{2-2}
 & 2x^2-5x+2 & \\
- & 2x^2+2x+2 & \\ \cline{2-2}
 & -7x+0 &
\end{array}
$$

Vamos a analisar os passos na divisão acima. Primeiro multiplicamos g por $-4x^2$ e subtraímos o produto resultante de f. A ideia é multiplicar g por um termo apropriado, neste caso $-4x^2$, de tal forma que o termo líder de g vezes este monômio cancele o termo líder de f. Após este primeiro cancelamento obtemos o resto $h = 4x^3 + 6x^2 - x + 2$. Repetimos este processo até não podermos mais.

Em geral, se temos dois polinômios

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

com $\deg(f) = n > \deg(g) = m$, então o primeiro passo na divisão de f por g é subtrair de f o produto $a_n\, b_m^{-1}\, x^{n-m}$. Podemos reescrever isso utilizando a notação anterior: o fator multiplicado por g é $\dfrac{TL(f)}{TL(g)}$ e $h = f - \dfrac{TL(f)}{TL(g)} g$ é o primeiro resto. Chamamos à h a redução de f por g e o denotamos por $f \xrightarrow{g} h$.

Algoritmo 2: ALGORITMO DA DIVISÃO EM k[x]

Entrada: $f, g \in k[x],\ g \neq 0$.

início

$q = 0,$ e $r = f;$

enquanto $r \neq 0$ *e* grau(g) $\leq$ grau(r), **faça**

$$q = q + \frac{TL(r)}{TL(g)};$$

$$r = r - \frac{TL(r)}{TL(g)} g;$$

fim

fim

Saída: $q,\ r \in k[x]$ tais que $f = gq + r$, onde $r = 0$ ou grau(r) $<$ grau(g).

Uma vez finalizado este processo obtemos no algoritmo o polinômio r que satisfaz $r = 0$ ou tem grau estritamente menor que o grau de g. Este processo completo, com r satisfazendo as condicões acima, será denotado por $f \xrightarrow{g}_+ r$.

Exemplo A.25. Vamos reduzir $f = -4x^4 + 2x^2 - x + 2$ por $g = x^2 + x + 1$. Temos que

$$f \xrightarrow{g} 4x^3 + 6x^2 - x + 2 \xrightarrow{g} 2x^2 - 5x + 2 \xrightarrow{g} -7x.$$

Logo $f \xrightarrow{g}_+ r$, onde $r = -7x$.

Teorema A.26. Se I é um ideal em $k[x]$, então I é gerado por um único elemento.

Demonstração. Veja [8] pág. 72 □

Proposição A.27. Seja $I \subset k[x]$ um ideal gerado por $f_1, f_2, \ldots, f_s$, então

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle = \langle MDC\{f_1, f_2, \ldots, f_s\} \rangle.$$

Demonstração. Veja [8] pág. 73 □

Com as ideias colocadas nesta seção podemos responder o seguinte problema: Como decidirmos se um polinômio f pertence ou não a um ideal I de $k[x]$ gerado por polinômios $f_1, f_2, \ldots, f_s$ polinômios em $k[x]$.

Primeiro calculamos o polinômio $g = MDC\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ e em seguida utilizamos o algoritmo da divisão para dividirmos f por g. Então, $f \in I$, se e somente se, o resto desta divisão é zero . Então, utilizando-se a notação introduzida, podemos escrever

$$f \in I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle = \langle g \rangle, \text{ se e somente se, } f \xrightarrow{g}_+ 0.$$

A.2.2 Divisão de Polinômios em Várias Variáveis

No caso de várias variáveis, sabemos que um ideal I gerado pelo conjunto de polinômios $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ pode não ser um ideal principal, como ocorre no caso $k[x]$. Dados $f, f_1, \ldots, f_m$ polinômios em $k[x_1, \ldots, x_n]$ discutiremos como encontrar uma expressão para f na forma $f = q_1 f_1 + \cdots + q_m f_m + r$, onde $q_1, \ldots, q_m, r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ e os q_i podem ser visto como quocientes e r como o resto, de maneira análoga na divisão em uma variável.

Sabemos que no caso de uma variável, exigimos que o resto seja zero ou tenha grau menor que o grau do dividendo. Essa condição é equivalente a pedir que a expressão $f = qg + r$ em $k[x]$ satisfaça $TL(g) \succ TL(r)$. Então temos já a pista necessária para o processo de divisão em várias variáveis. A condição análoga será que $TL(f_i) \succ TL(r)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Como os termos líderes variam conforme a ordem monomial considerada, como já vimos no Exemplo A.20, iniciamos fixando uma ordem monomial e ordenando os polinômios $f, f_1, \ldots, f_m$ em $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemplo A.28. Vamos dividir o polinômio $f = x^3 + x^2 + xy^2 + xy + z^3 + z^2$ pelos polinômios $f_1 = x^2 - z, f_2 = xy - z, f_3 = z^2 + 1 \subset k[x, y, z]$, isto é, escrever f na forma $f = q_1 f_1 + \cdots + q_m f_m + r$, considerando-se a ordem lexicográfica.

Primeiro ordenamos os monômios de f e conjunto de polinômios não nulos seguindo a ordem lexicográfica graduada com $x \underset{LexG}{\succ} y$. Já que $f_1 \underset{LexG}{\succ} f_2 \underset{LexG}{\succ} f_3$, calculamos o termos líderes $TL(f_1) = x^2$, $TL(f_2) = xy$, $TL(f_3) = z^2$ e $TL(f) = x^3$. Procedemos a dividir f por f_1 (observe que a ordem dos f_i's é importante).

PASSO 1: Dividimos o polinômio f por f_1, de modo análogo na divisão por uma variável como $TL(f_1) \mid TL(f)$, obtemos o primeiro termo do quociente e fazemos

$$q_1 = \frac{TL(f)}{TL(f_1)} \quad e \quad h_1 = f - q_1 f_1;$$

PASSO 2: Repetimos o processo anterior considerando-se agora o novo polinômio h_1. Dividimos por $TL(f_1)$ enquanto for possível, e fazemos

$$q_2 = \frac{TL(h_1)}{TL(f_1)} \quad e \;\; h_2 = h_1 - q_2 f_1;$$

Resumimos estes passos 1 e 2 com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{r r|l}
- & f = x^3 + x^2 + \;\; xy^2 + xy + z^3 + z^2 & f_1 = x^2 - \;\; z \\ \cline{3-3}
 & q_1 f_1 = x^3 - xz & q_1 = x \; ; \; q_2 = 1 \\ \cline{2-2}
- & h_1 = x^2 + xy^2 + xy + xz + z^3 + z^2 & \\
 & q_2 f_1 = x^2 - z & \\ \cline{2-2}
 & h_2 = xy^2 + xy + xz + z^3 + z^2 + z &
\end{array}$$

PASSO 3 : Continuamos com o processo, mas como $TL(f_1)$ não divide $TL(h_2)$, então passamos a dividir h_2 por f_2. Como $TL(f_2) \mid TL(h_2)$, fazemos

$$q_3 = \frac{TL(h_2)}{TL(f_2)} \quad e \quad h_3 = h_2 - q_3 f_2;$$

PASSO 4 : Como $TL(f_2) \mid TL(h_3)$ continuamos o processo com f_2 e fazemos:

$$q_4 = \frac{TL(h_3)}{TL(f_2)} \quad e \quad h_4 = h_3 - q_4 f_2;$$

Resumimos estes passos 3 e 4 com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{r r|l}
- & h_2 = xy^2 + xy + xz + z^3 + z^2 + z & f_2 = xy - \;\; z \\ \cline{3-3}
 & q_3 f_2 = xy^2 - yz & q_3 = y \; ; \; q_4 = 1 \\ \cline{2-2}
- & h_3 = xy + xz + yz + z^3 + z^2 + z & \\
 & q_4 f_2 = xy - z & \\ \cline{2-2}
 & h_4 = xz + yz + z^3 + z^2 + 2z &
\end{array}$$

PASSO 5: Como $TL(f_2)$ não divide a $TL(h_4)$, então passamos a dividir h_4 por f_3. Entretanto como $TL(f_3)$ também não divide $TL(h_4)$, então subtraímos de h_4 o seu termo líder, que não é divisível por nenhum $TL(f_i), \; 1 \leq i \leq 3$. Em seguida fazemos

$$h_5 = h_4 - TL(h_4) \text{ e } r_1 = TL(h_4);$$

PASSO 6: Como h_5 não é divisível por nenhum $TL(f_i)$, fazemos

$$h_6 = h_5 - TL(h_5) \text{ e } r_2 = TL(h_5);$$

Resumimos os passos 5 e 6:
$h_5 = yz + z^3 + z^2 + 2z$ e $r_1 = xz$,

$h_6 = z^3 + z^2 + 2z$ e $r_2 = yz$.

PASSO 7: Dividimos h_6 por f_3, pois $TL(f_3) \mid TL(h_6)$. Repetimos o processo até obtermos um polinômio que não seja divisível por f_3.

$$
\begin{array}{rr|l}
- & h_6 = z^3 + z^2 + 2z & f_3 = z^2 + \ 1 \\ \cline{3-3}
 & q_5 f_3 = z^3 + z & q_5 = z \ ; \ q_6 = 1 \\ \cline{2-2}
- & h_7 = z^2 + z & \\
 & q_6 f_3 = z^2 + 1 & \\ \cline{2-2}
 & h_8 = z - 1 &
\end{array}
$$

Finalmente vemos que este polinômio h_8 não é divisível por nenhum $TL(F_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Portanto, descobrimos polinômios $u_1 = q_1 + q_2 = x + 1$, $u_2 = q_3 + q_4 = y + 1$, $u_3 = q_5 + q_6 = z + 1$ e $r = r_1 + r_2 + h_8 = xz + yz + z - 1$ tais que

$$f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 + r.$$

Este exemplo nos motiva a fazer a próxima definição.

Definição A.29. Sejam $f, g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$, com $g \neq 0$. Dizemos que f se reduz a h módulo g, e escrevemos $f \xrightarrow{g} h$, se somente se, $TL(g)$ divide o $TL(f)$, em relação à alguma ordem monomial, e $h = f - \dfrac{TL(f)}{TL(g)} g$.

Exemplo A.30. Sejam $f = 6x^2y - x + 4y^3 - 1$ e $g = 2xy + y^3$. Considerando-se a ordem lexicográfica com $x \underset{Lex}{\succ} y$, temos que $TL(f) = 6x^2y$, $TL(g) = 2xy$. Portanto $f \xrightarrow{g} h$, $h = 6x^2y - x + 4y^3 - 1 - \frac{6x^2y}{2xy}(2xy + y^2) = -3xy^3 - x + 4y^2 - 1$.

Definição A.31. Sejam $f, h, f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$, polinômios não nulos e o conjunto $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$. Dizemos que f é reduzido à h módulo F, e denotamos por $f \xrightarrow{F} h$, se existe uma sequência de índices $i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{1, 2, \ldots, s\}$ e uma sequência de polinômios $h_{i_1}, \ldots, h_{i_t} \in k[x_1, \ldots, x_n]$, tais que:

$$f \xrightarrow{f_{i_1}} h_{i_1} \xrightarrow{f_{i_2}} h_{i_2} \xrightarrow{f_{i_3}} \ldots \xrightarrow{f_{i_{t-1}}} h_{i_{t-1}} \xrightarrow{f_{i_t}} h_t = h.$$

Definição A.32. Um polinômio $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ é chamado de reduzido em relação ao conjunto $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$, não nulos, se $r = 0$ ou $TL(r)$ não é divisível por nenhum $TL(f_i)$, $1 \leq i \leq s$. Em outras palavras r não pode ser reduzido módulo F.

Definição A.33. Se $f \xrightarrow{F} r$ e r não pode ser reduzido modulo F, então chamamos ao r o reduzido de f módulo F.

Teorema A.34. Consideremos um conjunto $F = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, de polinômios não nulos. Se $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, então existem polinômios $f_1, \ldots, f_s$ e $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s + r,$$

onde r é reduzido em relação a F.

Demonstração. Veja [1], página 30. □

O algoritmo abaixo nos fornece uma ideia da prova do Teorema A.34 e uma forma prática de determinarmos os polinômios f_i's e r.

Algoritmo 3: ALGORITMO DA DIVISÃO EM VARIAS VARIÁVEIS

Entrada: $f, f_1, f_2, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$

início

$q_1 = q_2 = \cdots = q_m = r = 0$ e $h = f$;

enquanto $h \neq 0$ **faça**

se $i \in \{1, \ldots, s\}$ *tal que* $TL(f_i) \mid TL(h)$ **então**

Tome o menor destes índices i e faça:

$q_i = q_i + \dfrac{TL(h)}{TL(f_i)}$;

$h = h - \dfrac{TL(h)}{TL(f_i)} f_i$;

senão

$r = r + TL(h)$;

$h = h - TL(h)$;

fim

fim

fim

Saída: $q_1, \ldots, q_m$ e $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, tais que $f = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i + r$ e $TL(f_i) \nmid TL(r)$, $\forall i \in \{1 \ldots, s\}$.

Poderíamos ser induzidos a pensar que uma condição necessária para que um polinômio f pertença a um ideal $J = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ é que o resto r da divisão de f módulo $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ seja nulo, como no caso da divisão de uma variável. Entretanto, o seguinte exemplo mostra que essa não é uma condição necessária.

Exemplo A.35. Sejam $f = y^2x - x,\ f_1 = yx - x,\ f_2 = y^2 - x$ e $J = \langle f_1, f_2 \rangle$. Considere a ordem lexicográfica graduada inversa, $y \succ_{LIG} x$ e $F = \{f_1, f_2\}$. Utilizando-se o algoritmo da divisão em $k[x, y]$ para dividir f por f_2 e f_1, temos que f é reduzido à r módulo F. Ou seja $f = y^2x - x \xrightarrow{F}_+ r = x^2 - x$, onde o resto r é não nulo. Além disso $r = (y + 1)f_1 + (-x)f_2 \in J$.

Observação A.36. O Teorema A.41 abaixo mostra que uma condição necessária e suficiente para que f pertença a J é que o resto seja nulo utilizando-se uma base de Gröbner para J para a divisão.

A.3 BASES DE GRÖBNER

Definição A.37. Seja $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal e consideremos uma ordem monomial. Definimos o ideal dos termos líderes de I como sendo o ideal gerado pelos termos líderes de cada elemento de I. Denotamos este ideal por $TL(I)$.

$$TL(I) = \langle \{TL(f); f \in I\} \rangle.$$

Observação A.38.

(a) Se $I = \langle f \rangle \subset k[x]$, então $TL(I) = \langle TL(f) \rangle$.

(b) Se $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ é um ideal em $k[x_1, \ldots, x_n]$, nem sempre temos que

$$TL(I) = \langle TL(f_1), \ldots, TL(f_m) \rangle.$$

Veja o Exemplo A.39.

Exemplo A.39. Consideramos a ordem lexicográfica $x \underset{Lex}{\succ} y$ e $I = \langle x^2 - y, x - y \rangle \subset k[x, y]$. Notamos que o polinômio $f = y^2 - y \in I$, já que $f = (x^2 - y) - (x + y)(x - y)$, mas $TL(f) = y^2 \notin \langle TL(x^2 - y), TL(x - y) \rangle = \langle x^2, x \rangle = \langle x \rangle$.

Definição A.40. Seja I um ideal não vazio de $k[x_1, \ldots .x_n]$. Dizemos que um subconjunto finito $G = \{g_1, \cdots, g_s\} \subset I$ de polinômios não nulos é uma base de Gröbner de I se para cada $f \in I$ existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $TL(g_i) | TL(f)$.

Teorema A.41. Sejam I ideal não nulo de $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $G = \{g_1, \cdots, g_s\} \subset I$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma base de Gröbner para I.

(b) $f \in I$, se e somente se, $f \xrightarrow{G}_{+} 0$.

(c) $f \in I$ se, somente se, $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i$, com $TL(f) = \max_{1 \leq i \leq s}\{TL(h_i)TL(g_i)\}$.

(d) TL(I)=TL(G)

Demonstração. Observamos incialmente que, para cada polinômio f de $k[x_1, \ldots, x_n]$, existem polinômios $f_1, \ldots, f_s, r$ em $k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que r é reduzido em relação a G e

$$r = f - f_1 g_1 - f_2 g_2 \cdots - f_s g_s. \tag{A.2}$$

$(a) \Longrightarrow (b)$ Se $f \in I$, então segue da igualdade (A.2) que $r \in I$. Se $r \neq 0$, como G é uma base de Gröbner de I, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $TL(g_i)$ divide $TL(r)$. O qual é uma contradição pois r é reduzido em relação à G. Portanto $r = 0$, ou seja, $f \xrightarrow{G} +0$.

Por outro lado se $r = 0$, então da igualdade (A.2) segue que $f \in I$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Se $f \in I$, então pela hipótese $f \xrightarrow{G}_{+} 0$. Logo $r = 0$ e, por (A.2), obtemos o resultado.

Por outro lado se vale a relação $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i$, então $r = 0$ e, por hipótese, $f \in I$.

$(c) \Longrightarrow (d)$ Se $f \in I$, então $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i$, com $TL(f) = \max_{1 \leq i \leq s}\{TL(h_i)TL(g_i)\}$. Se $TL(f) = TL(h_{i_0})TL(g_{i_0})$, $1 \leq i_0 \leq s$, então, como $TL(g_{i_0}) \in TL(G)$, concluímos que $TL(f) \in TL(G)$.

Claramente $TL(G) \subseteq TL(I)$, pois $G \subset I$. Assim $TL(G) = TL(I)$.

$(d) \Longrightarrow (a)$

Seja $f \in I$, como por hipótese $TL(I) = TL(G)$, então $TL(f) \in TL(G)$. Portanto $TL(f) = \sum_{i=1}^{s} h_i TL(g_i)$, e como $TL(f)$ é um múltiplo constante de um monômio, segue que $TL(f)$ tem que ser divisível por algum destes $TL(g_i)$. Portanto pela Definição (A.40), G é uma base de Gröbner para I.

□

A.4 RESULTADOS PRINCIPAIS DA BASE DE GRÖBNER

Teorema A.42. Suponha que k é um corpo algebricamente fechado. Sejam $I \neq \{0\}$ um ideal em $k[x_1, \cdots, x_n]$ e G uma base de Gröbner de I. Suponha que a variedade afim $V = Z(I)$ é finita. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $g \in G$ tal que $TL(g) = (x_i)^v$, para algum $v \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponhamos que $V = Z(I) = \emptyset$. Então, pelo Teorema dos zeros de Hilbert ([7] página 10), $I = k[x_1, \ldots, x_n]$ e assim $1 \in I$. Logo $G = \{1\}$ e a afirmação vale para todo i.

Suponhamos agora que $V = Z(I) \neq \emptyset$. Então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$V(I) = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\} \subset \mathbb{A}^n,$$

onde $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, com $j = 1, \ldots, l$.

Se $i \in \{1, \cdots, n\}$ é fixado, então para cada $j = 1, \ldots, l$ a função $f_j = x_i - a_{ij} \in k[x_i]$ é tal que $f_j(a_{ij}) = 0$. Logo se $f = f_1 f_2 \cdots f_l \in k[x_i] \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, então $f(a_j) = 0$, $\forall j = 1, \ldots, l$. Assim $f \in \mathcal{I}(Z(I))$ e, pelo Teorema dos zeros de Hilbert(ver [7] página 10), temos que $f \in Rad(I)$. Portanto existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $f^v \in I$. Daí concluímos que $TL(f^v) = \prod_{j=1}^{l} TL(f_j^v) = x_i^{lv}$ e, como G é uma base de Gröbner de I , existe $g \in G$ tal que $TL(g) | x_i^{lv}$. $\square$

Definição A.43. Um ideal de $k[x_1, \cdots, x_n]$ é dito zero dimensional se $V(I)$ é finito.

Corolário A.44. Sejam I um ideal em $k[x_1, \ldots, x_n]$ zero dimensional e $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ uma base de Gröbner reduzida para I, com relação à ordem lexicográfica $x_1 \underset{Lex}{\succ} x_2 \underset{Lex}{\succ} \ldots \underset{Lex}{\succ} x_n$. Então podemos ordenar $g_1, \ldots, g_s$ de tal forma que $g_1 \in k[x_1]$, $g_2 \in k[x_1, x_2]$ e $TL(g_2) = x_2^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e sucessivamente, $g_s \in k[x_1, \ldots, x_s]$ e $TL(g_n) = x_s^v$, para algum $v \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ é zero dimensional , então $Z(I)$ é finito. Logo, pelo Teorema A.42, existe $g_1 \in G$ tal que $TL(g_1) = x_1^s$, para algum $s \in \mathbb{N}$. Já que
$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, então $g_1 \in k[x_1]$, pois, se alguma outra variável aparecesse em g_1, então $TL(g_1) \neq x_1^s$. O mesmo raciocínio é valido para os demais.

$\square$