

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Erick Mário do Nascimento Oliveira

**Comportamento do Método de Direções Interiores ao Epígrafo (IED)
Quando Aplicado a Problemas de Programação em Dois Níveis**

Juiz de Fora

2018

Erick Mário do Nascimento Oliveira

**Comportamento do Método de Direções Interiores ao Epígrafo (IED)
Quando Aplicado a Problemas de Programação em Dois Níveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire

Coorientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Erick Mário do Nascimento.

Comportamento do método de direções interiores ao epígrafo (IED) quando aplicado a problemas de programação em dois níveis / Erick Mário do Nascimento Oliveira. -- 2018.

91 p.

Orientador: Wilhelm Passarella Freire

Coorientador: Grigori Chapiro

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, 2018.

1. Algoritmo de direções interiores ao epígrafo. 2. Problema de programação em dois níveis. 3. Otimização não diferenciável. I. Freire, Wilhelm Passarella, orient. II. Chapiro, Grigori, coorient. III. Título.

Erick Mário do Nascimento Oliveira

**Comportamento do Método de Direções Interiores ao Epígrafo (IED)
Quando Aplicado a Problemas de Programação em Dois Níveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 26 de Junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Grigori Chapiro - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Afonso Celso de Castro Lemonge
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Dênis Emanuel da Costa Vargas
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

Deus nunca disse que a jornada seria fácil, mas ele disse que a chegada valeria a pena.

Em 2016 recebi a notícia da minha aprovação no mestrado, foi um misto de sentimentos, abrir mão de muitas coisas, e o pior delas foi estar distante da minha família, mas eu fui. Lembro da tristeza e vazío que senti ao embarcar, me vi sozinho, só Deus sabe das minhas lutas e noites mal dormidas, não foi fácil viver longe da família, mas batalhei até o fim para realizar esse sonho, e hoje agradeço a Deus por essa conquista.

À minha mãe Erica Maria por me proporcionar a alcançar essa conquista, que abriu mão dos seus sonhos para criar seus filhos, essa vitória também é da senhora. Agradeço ao meu pai João Andrade, por sempre estar ao meu lado. Aos meus irmãos, vocês são minhas riquezas. Aos meus sobrinhos. À toda minha família, obrigado por tudo. À minha esposa Rafaelle que sempre esteve junto a mim me dando força.

Aos meus colegas do PGMC, aos professores, aos funcionários e aos amigos que adquiriram em Minas Gerais, que direta ou indiretamente contribuíram com a minha vitória.

Aos professores Wilhelm Passarella Freire e Grigori Chapiro por terem me orientado, com paciência e dedicação, na elaboração deste trabalho.

Aos professores Afonso Celso de Castro Lemonge e Dênis Emanuel da Costa Vargas por participarem da banca de defesa, por contribuir com sugestões e comentários.

À UFJF e à Capes pelo suporte financeiro concedido.

*“Bendito seja o Senhor, a minha
rocha, que treina as minhas
mãos para a guerra e os meus
dedos para a batalha.”*

Salmo 144:1.

RESUMO

Neste trabalho é apresentado o comportamento do algoritmo IED quando aplicado a problemas de programação em dois níveis. Para isso, o problema do seguidor é substituído pelas condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker e, dessa maneira, o problema de programação em dois níveis é transformado em um problema de otimização com restrições não lineares. Dessa forma, as condições necessárias para utilização do algoritmo IED (*Interior Epigraph Directions*) são satisfeitas. Esse método tem como característica resolver problemas de otimização não convexa e não diferenciáveis via utilização da técnica de dualidade Lagrangiana, onde as funções de restrições são introduzidas na função objetivo para formar a função Lagrangiana. Além disso, o método considera o problema dual induzido por um esquema generalizado da dualidade Lagrangiana aumentada e obtém a solução primal produzindo uma sequência de pontos no interior do epígrafo da função dual. Dessa forma, o valor da função dual, em algum ponto do espaço dual, é dado pela minimização da Lagrangiana. Por fim, experimentos numéricos são apresentados em relação à utilização do algoritmo IED em problemas de programação em dois níveis encontrados na literatura.

Palavras-chave: Otimização Não Diferenciável, Problema de Programação em Dois Níveis, Algoritmo de Direções Interiores ao Epígrafo.

ABSTRACT

This work presents the behavior of the IED algorithm when applied to bilevel programming problems. For this, the follower problem is replaced by the first-order necessary Karush-Kuhn-Tucker's conditions and thus, the problem of bilevel programming turns into an optimization problem with non-linear constraints. Thus, the conditions required for use of the IED (Interior Epigraph Directions) algorithm are satisfied. This method has the characteristic of solving non-convex and non-differentiable optimization problems using the Lagrangian duality technique, where the constraint functions are introduced into the objective function for formulation of the Lagrangian. Furthermore, the method considers the dual problem induced by a generalized scheme of augmented Lagrangian duality and obtains the primal solution by producing a sequence of points inside the dual function epigraph. Then the value of the dual function, at some point in the dual space, is given by Lagrangian minimization. Finally, numerical experiments are presented showing the use of the IED algorithm in bilevel programming problems found in the literature.

Keywords: Non-Differentiable Optimization, Bilevel Programming Problems, Interior Epigraph Directions Algorithm.

SUMÁRIO

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO..... | 10 |
| 2 | CONCEITOS BÁSICOS..... | 12 |
| 2.1 | Problema de otimização | 12 |
| 2.2 | Direção de descida/direção viável | 14 |
| 2.3 | Conjuntos e funções convexas | 15 |
| 2.4 | Condições de Karush-Kuhn-Tucker | 18 |
| 3 | PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS UTILIZANDO ABORDAGEM DE <i>KKT</i> | 22 |
| 3.1 | Problema de programação em dois níveis | 22 |
| 3.2 | Problema de programação em dois níveis linear | 31 |
| 3.3 | Formulação de Karush-Kuhn-Tucker para problema de dois níveis . | 36 |
| 3.4 | Alguns algoritmos para problemas de programação em dois níveis .. | 41 |
| 4 | O ALGORITMO DE DIREÇÕES INTERIORES AO EPÍGRAFO.... | 46 |
| 4.1 | A direção de busca do IED | 48 |
| 4.2 | NFDA para problemas convexos | 51 |
| 4.3 | O método IED | 54 |
| 5 | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS..... | 60 |
| 6 | CONCLUSÕES..... | 80 |
| | REFERÊNCIAS..... | 81 |
| | APÊNDICE A..... | 84 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------|---|
| \mathbb{R} | Conjunto dos números reais. |
| \mathbb{R}^n | Espaço euclidiano n -dimensional. |
| $\mathcal{D}_f(x)$ | Conjunto de todas as direções de descida da função f no ponto x . |
| $\nabla f(x)$ | Gradiente de f em x . |
| $\nabla^2 f(x)$ | Matriz Hessiana de f em x . |
| $\partial f(x)$ | subdiferencial de f no ponto x . |
| $\Psi(x)$ | Conjunto dos minimizadores globais do seguidor para x fixado. |
| $\text{epi}(f)$ | Epígrafo da função f . |
| $f'(x; u)$ | Derivada direcional de f no ponto x na direção do vetor u . |
| I | Matriz identidade |
| $L_{f,D}(c)$ | Conjunto de nível da função f a partir do ponto x . |
| RI | Região Induzida. |
| $S(x)$ | Conjunto viável do seguidor para x fixado. |
| S_x | Projeção de S sobre o espaço decisão do líder. |

1 INTRODUÇÃO

Otimização é uma área da matemática, onde se busca minimizar ou maximizar funções cujas variáveis satisfazem determinadas restrições que em geral aparecem na forma de igualdades e/ou desigualdades. Neste contexto, busca-se desenvolver técnicas computacionais para a solução de problemas de grande porte (muitas variáveis/restrições envolvidas), isto é, encontrar soluções a partir de modelos matemáticos que as representam.

No que se refere às técnicas computacionais, estas diferem entre si conforme o tipo de problema a ser abordado. Por exemplo, técnicas para solucionar problemas de otimização lineares diferem daquelas utilizadas para resolver problemas não lineares. No caso de problemas diferenciáveis aplica-se derivadas como ferramenta para sua solução, o que não é possível quando se trata de problemas não diferenciáveis, que empregam conceitos de Análise Convexa, por exemplo.

Certos problemas de Otimização têm natureza hierárquica significando que o líder toma uma decisão que afeta no comportamento do seguidor. Cada decisão do líder é considerada fixa pelo seguidor o qual responde com base naquela informação de modo a minimizar/maximizar os seus objetivos. Essa decisão do seguidor, por sua vez, pode influenciar no resultado obtido pelo líder, que também busca pela decisão ótima. Esses problemas são modelados como problemas de programação em níveis.

Os problemas de programação em níveis foram difundidos inicialmente por Heinrich Von Stackelberg [1], a fim de descrever situações do mercado. No entanto, o primeiro trabalho a definir esses problemas foi publicado por Candler e Norton [2], que teve como motivação o trabalho de Bracken e McGill [3]. Após a definição do problema de programação em níveis de Candler e Norton, os problemas de programação em dois níveis atraíram a atenção de vários pesquisadores, provocando, assim, o desenvolvimento de métodos como Branch and Bound [4], Kth-Best [5], de máxima descida [6] e de penalidades [7].

Uma das abordagens para resolver problemas de programação em dois níveis é a utilização das condições necessárias de *KKT* (*Karush-Kuhn-Tucker*) para substituir o problema do seguidor. A partir do momento que é realizada essa alteração, o problema

de programação em dois níveis transforma-se em um problema clássico de otimização com restrições não lineares.

Essa abordagem possibilitou a aplicação do método de Direções Interiores ao Epigrafo (IED) aos problemas de dois níveis. O método IED foi desenvolvido por Freire et. al. [8] a fim de resolver problemas de otimização não convexos e não diferenciáveis. O IED é uma adaptação do NFDA (*Nonsmooth Feasible Directions Algorithm*) desenvolvido por Freire [9] em sua tese de doutorado, combinado com o DSG (*Deflected Subgradient Method*) desenvolvido por Burachik e Kaya [10].

Uma vez que não foram encontrados trabalhos na literatura que usam o método de Direções Interiores ao Epigrafo em problemas de programação em dois níveis, este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento deste algoritmo quando aplicado a tais problemas

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, descreve-se os conceitos gerais de otimização. No Capítulo 3 são apresentados uma breve introdução ao problema de programação em dois níveis, a aplicação das condições necessárias de primeira ordem de *KKT* nesse problema e, em linhas gerais, métodos para resolução desse tipo de problema. No Capítulo 4, descreve-se o método IED. No Capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos obtidos pelo IED na resolução de problemas de programação em dois níveis reformulado com abordagem de *KKT*. No Capítulo 6, são apresentados as conclusões e também indicações futuras de pesquisa.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas noções básicas sobre problemas de otimização, direção de descida/ direção viável, conjuntos convexos, funções convexas e as condições necessárias e suficientes de Karush-Kuhn-Tucker.

2.1 Problema de otimização

Os resultados apresentados nesta subseção sobre os conceitos de otimização, podem ser encontrados em [11–15].

Seja o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$. O problema de otimização é minimizar f no conjunto D . O problema a considerar neste trabalho é:

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D, \end{cases}$$

onde o conjunto D será chamado de conjunto viável do problema, os pontos de D serão chamados pontos viáveis e f será chamada função objetivo.

Definição 2.1.1. Um ponto $x^* \in D$ é um minimizador local de f em D se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in D$ tal que $\|x - x^*\| < \epsilon$.

Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in D$ tal que $x \neq x^*$ e $\|x - x^*\| < \epsilon$, diremos que se trata de um minimizador local estrito em D .

Definição 2.1.2. Um ponto $x^* \in D$ é um minimizador global de f em D se, e somente se, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in D$.

Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in D$ tal que $x \neq x^*$, diremos que se trata de um minimizador global estrito em D .

Definição 2.1.3. Dizemos que $\bar{v} \in (-\infty, \infty)$ definido por

$$\bar{v} = \inf_{x \in D} f(x),$$

é o valor ótimo do problema (P) .

Geralmente, o conjunto viável D de um problema de otimização é determinado pela interseção de um conjunto de igualdades e/ou desigualdades, ou seja,

$$D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n / g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

onde $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : X \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Teorema 2.1.1. (Teorema de Weierstrass)

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto não vazio.

Então, f atinge um mínimo e um máximo em D e o problema (P) têm soluções globais.

Definição 2.1.4. O conjunto de nível da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ associado a $c \in \mathbb{R}$, é o conjunto dado por

$$L_{f,D}(c) = \{x \in D / f(x) \leq c\}.$$

Colorário 2.1.1. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto D . Suponhamos que existe $c \in \mathbb{R}$, tal que o conjunto de nível $L_{f,D}(c)$ seja não vazio e compacto.

Então o problema de minimizar f em D possui uma solução global.

Definição 2.1.5. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função Lipschitziana se existe $k > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in D$, tem-se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Definição 2.1.6. Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ e $u \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f no ponto a , na direção do vetor u , é o limite

$$f'(a, u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t},$$

quando existe.

Um caso particular das derivadas direcionais é quando $u = e_i$, $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

e será chamado de derivada parcial.

Definição 2.1.7. *Se as derivadas parciais de uma função f de n -variáveis existem no ponto a , define-se o gradiente de f :*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^T.$$

Definição 2.1.8. *Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $a \in D$, quando existirem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ e, além disso, para todo vetor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a + v \in D$, tem-se*

$$f(a + v) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i + r(v), \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

2.2 Direção de descida/direção viável

Os resultados apresentados neste capítulo sobre os conceitos de direção de descida/direção viável, podem ser encontrados em [12, 14, 15].

Definição 2.2.1. *Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção viável em relação ao conjunto D no ponto $a \in D$, quando existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$a + td \in D, \forall t \in [0, \epsilon].$$

Denotemos por $\mathcal{V}_D(a)$ o conjunto de todas direções viáveis em relação ao conjunto D no ponto $a \in D$.

Definição 2.2.2. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ chama-se cone quando*

$$d \in K \Rightarrow td \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Definição 2.2.3. *Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in \mathbb{R}^n$, se existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(a + td) < f(a), \forall t \in (0, \epsilon].$$

Denotemos por $\mathcal{D}_f(a)$ o conjunto de todas as direções de descida da função f no ponto a .

Teorema 2.2.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ e um vetor $d \in \mathbb{R}^n$, tal que $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$. Então existe um $\epsilon > 0$, tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$ para todo $t \in (0, \epsilon]$.*

2.3 Conjuntos e funções convexas

Os resultados apresentados neste capítulo sobre os conceitos básicos, podem ser encontrados em [12–15].

Definição 2.3.1. *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é denominado convexo se, para quaisquer $x, y \in D$, tem-se*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in D \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Proposição 2.3.1. *Seja a um vetor coluna não nulo e seja c um número real. O conjunto*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = c\}$$

é um hiperplano em \mathbb{R}^n

Definição 2.3.2. *Seja D um conjunto convexo não vazio em \mathbb{R}^n . Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se convexa quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Definição 2.3.3. *Seja D um conjunto convexo não vazio em \mathbb{R}^n . Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se estritamente convexa quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 \neq x_2$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Definição 2.3.4. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é o conjunto convexo não vazio em \mathbb{R}^n . A função f é côncava em D se $-f$ é convexa em D .*

Lemma 2.3.1. *Sejam D um subconjunto convexo não vazio de \mathbb{R}^n e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em D . Então o conjunto de nível $L_{f,D}(\alpha) = \{x \in D / f(x) \leq \alpha\}$, onde α é um número real, é um conjunto convexo.*

Definição 2.3.5. *Sejam D um conjunto não vazio do \mathbb{R}^n e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O epigrafo de f , denotado por $\text{epi}(f)$, é um subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} definido por*

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / y \in \mathbb{R}, f(x) \leq y\}.$$

Teorema 2.3.1. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida no subconjunto convexo não vazio de $D \subset \mathbb{R}^n$. A função f é convexa em D se, e somente se, o $\text{epi}(f)$ é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Funções convexas diferenciáveis

Os resultados apresentados nesta subseção sobre funções convexas diferenciáveis, podem ser encontrados em [12–15].

Teorema 2.3.2. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e convexo e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em D . A função f é convexa se, e somente se, $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$, para todo $x, y \in D$.*

Teorema 2.3.3. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e convexo, e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em D . A função f é convexa se, e somente se, a matriz Hessiana F de f é semi-definida positiva para todo $x \in D$.*

Definição 2.3.6. *Chamamos de problema de programação convexa o seguinte problema*

$$(P_2) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D, \end{cases}$$

onde D é um conjunto convexo e f é uma função convexa.

Definição 2.3.7. *Seja D um conjunto convexo de \mathbb{R}^n . Dizemos que $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($g = (g_1, \dots, g_m)$) é convexa em D se todas as funções $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são convexas em D .*

Colorário 2.3.1. *Seja Ω um conjunto convexo de \mathbb{R}^n . Sejam $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função convexa e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma função afim. Então o conjunto*

$$D = \{x \in \Omega / h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

é convexo.

Teorema 2.3.4. *(Continuidade de funções convexas) Seja D um conjunto convexo, aberto e não vazio de \mathbb{R}^n e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa.*

Então f é localmente Lipschitz-contínua em D . Em particular, f é contínua em D .

Teorema 2.3.5. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, onde D é um conjunto convexo. Então o conjunto de nível*

$$L_{f,D}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq c\}$$

é não vazio e limitado.

Funções convexas não diferenciáveis

Em [12,13] podemos encontrar os resultados sobre subgradientes que veremos a seguir.

Teorema 2.3.6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existem as derivadas direcionais em cada direção $d \in \mathbb{R}^n$. Além disso,*

$$f(x + \alpha d) \geq f(x) + \alpha f'(x; d), \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Definição 2.3.8. *Seja D um subconjunto convexo não vazio de \mathbb{R}^n e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então s é chamado de um subgradiente de f em $x \in D$ se*

$$f(z) \geq f(x) + s^T(z - x), \text{ para todo } z \in D.$$

O conjunto de todos os subgradientes de f em x é chamado subdiferencial e é denotado por $\partial f(x)$. Além disso, pelo Teorema 2.3.6 temos

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n / f'(x; d) \geq \langle s, d \rangle \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorema 2.3.7. *Seja D um conjunto convexo não vazio do \mathbb{R}^n e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então para cada $x \in \text{int } D$, existe um vetor s tal que o hiperplano suporte ao $\text{epi}(f)$ no ponto $(x, f(x))$ é definido por*

$$H = \{(z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / y = f(x) + s^T(z - x)\}.$$

Em particular

$$f(z) \geq f(x) + s^T(z - x), \text{ para todo } z \in D,$$

isto é, s é um subgradiente de f em x .

2.4 Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Os resultados que serão apresentados nesta seção podem ser encontrados em [14, 15].

Considere o seguinte problema de programação não linear com restrições de igualdade:

$$(P_{eq}) \begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = 0, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e todas as funções são diferenciáveis.

Definição 2.4.1. *Considere todas as curvas diferenciáveis em uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^n$ passando por um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. O plano tangente a S , em um ponto x^* , é o conjunto de vetores de \mathbb{R}^n , que são tangentes em x^* a alguma curva diferenciável contida em S e que passa por x^* .*

Definição 2.4.2. *Um ponto x^* que satisfaz as equações $h(x) = 0$ é dito ser um ponto regular das restrições se os vetores $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ são linearmente independentes.*

Teorema 2.4.1. *Se x^* é um ponto regular da superfície S definida por $h(x) = 0$, então o plano tangente T verifica*

$$T = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h(x^*)y = 0\}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.4.2. *Seja x^* um minimizador local de (P_{eq}) . Suponhamos que x^* é um ponto*

regular das restrições. Então, existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*). \quad (2.2)$$

Teorema 2.4.3. *Sejam x^* um ponto regular, minimizador local de (P_{eq}) e T como (2.1). Suponhamos f, h sejam duas vezes diferenciáveis. Então existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \quad (2.3)$$

e

$$y^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) y \geq 0 \text{ para todo } y \in T, \quad (2.4)$$

onde

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m$$

é chamada de função Lagrangiana.

Teorema 2.4.4. *Sejam x^* um ponto regular tal que $h(x^*) = 0$ e T como (2.1). Se $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ é tal que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

e

$$y^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) y \geq 0 \text{ para todo } y \in T - \{0\},$$

então x^* é um minimizador local estrito de (P_{eq}) .

Agora iremos apresentar as condições de Karush-Kuhn-Tucker para problemas de programação não linear com restrições de igualdade e desigualdade. Para isso, considere o seguinte problema:

$$(P_{ed}) \begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^q$ e todas as funções são diferenciáveis.

Definição 2.4.3. *Dizemos que uma restrição de desigualdade $g_i(x^*)$ é ativa em um ponto x^* , se $g_i(x^*) = 0$ e inativa em x^* se $g_i(x^*) < 0$.*

Definição 2.4.4. *Seja x^* o ponto que satisfaz as restrições h e g do problema (P_{ed}) , e seja J o conjunto de índices j para que $g_j(x^*) = 0$. Então x^* é dito ser um ponto regular se os gradientes $\nabla h_i(x^*), \nabla g_j(x^*), 1 \leq i \leq m, j \in J$ são linearmente independentes.*

Teorema 2.4.5. *(Condições de Karush-Kuhn-Tucker) Consideremos o problema (P_{ed}) . Seja x^* um ponto viável e regular. Então existem um vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e um vetor $\mu^* \in \mathbb{R}^q$ tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)^T \lambda^* + \nabla g(x^*)^T \mu^* &= 0, \\ g(x^*)^T \mu^* &= 0, \\ \mu^* &\geq 0, \\ h(x^*) &= 0, \\ g(x^*) &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 2.4.6. *(Condição Necessária de Segunda Ordem) Suponhamos que f, h e g são duas vezes diferenciáveis e que x^* é um ponto regular das restrições. Se x^* é um minimizador local de (P_{ed}) , então existem um vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e um vetor $\mu^* \in \mathbb{R}^q, \mu^* \geq 0$ tais que as restrições (2.5) são satisfeitas e, além disso, a matriz $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$, definida por*

$$\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla^2 g_j(x^*) \tag{2.6}$$

é semi-definida positiva no subespaço tangente das restrições ativas em x^ .*

Teorema 2.4.7. *(Condição Suficiente de Segunda Ordem) Sejam f, h e g funções duas vezes diferenciáveis. A condição suficiente que um ponto x^* satisfazendo h e g seja um mínimo relativo estrito do problema (P_{ed}) é que existem um vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e um vetor $\mu^* \in \mathbb{R}^q$ tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)^T \lambda^* + \nabla g(x^*)^T \mu^* &= 0, \\ g(x^*)^T \mu^* &= 0, \\ \mu^* &\geq 0, \\ h(x^*) &= 0, \\ g(x^*) &\leq 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

e a matriz

$$\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla^2 g_j(x^*)$$

é semi-definida positiva para todo $y \in T' = \{y \mid \nabla h(x^*)y = 0, \nabla g_j(x^*)y = 0 \forall j \in J'\}$,
 onde $J' = \{j \mid g_j(x^*) = 0, \mu_j^* > 0\}$.

3 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS UTILIZANDO ABORDAGEM DE *KKT*

Neste capítulo será apresentado uma breve introdução sobre problemas de programação em dois níveis, com a finalidade de definir algumas notações e alguns conjuntos. Além disso, será descrita a abordagem de *Karush-Kuhn-Tucker*, a qual transforma o problema de programação em dois níveis em um problema de otimização com restrições não lineares. Por fim, serão apresentados, em linhas gerais, alguns métodos para encontrar soluções de problemas de programação em dois níveis.

3.1 Problema de programação em dois níveis

O problema de programação em dois níveis (PPDN) geral pode ser definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y) \\ \text{restrito à: } G(x,y) \leq 0, \\ \min_{y'} f(x,y') \\ \text{restrito à: } h(x,y') \leq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^q$, são funções diferenciáveis. O problema de minimizar $F(x,y)$ é chamado de problema do líder ou nível superior e o problema

$$\begin{aligned} \min_{y'} f(x,y') \\ \text{restrito à: } h(x,y') \leq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

é chamado de problema do seguidor ou do nível inferior.

A partir desta formulação do problema de programação de dois níveis geral, define-se os seguintes conjuntos.

Definição 3.1.1.

- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} | G(x,y) \leq 0, h(x,y) \leq 0\}$.

Denominado de conjunto viável ou de restrição do problema de programação em dois

níveis.

- $S_x = \{x \mid (x, y) \in S \text{ para algum } y\}$.

Denominado de projeção de S sobre o espaço de decisão do líder.

- $S(x) = \{y \mid h(x, y) \leq 0\}$.

Denominando de conjunto viável do seguidor para x fixado.

- $\Psi(x) = \{y \mid y \in \arg \min[f(x, \hat{y}) \mid \hat{y} \in S(x)]\}$.

Denominado de conjunto dos minimizadores globais do seguidor para x fixado.

- $RI = \{(x, y) \mid (x, y) \in S, y \in \Psi(x)\}$.

Denominado região induzida e que representa o conjunto de pontos viáveis em que a função objetivo do líder será minimizada.

Definidos esses conjuntos, o problema (3.1) se resume à seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) \\ \text{restrito à: } (x, y) \in RI. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para exemplificar as definições acima, considere o seguinte problema [16]:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{restrito à: } & 0 \leq x \leq 8, \\ & \min_y f(x, y) = (y - 5)^2 \\ & \text{restrito à: } -2x + y \leq 1, \\ & x - 2y \leq -2, \\ & x + 2y \leq 14. \end{aligned} \tag{3.4}$$

O conjunto viável S é representado na Figura 3.1, onde $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (2.4, 5.8)$ e $P_3 = (6, 4)$.

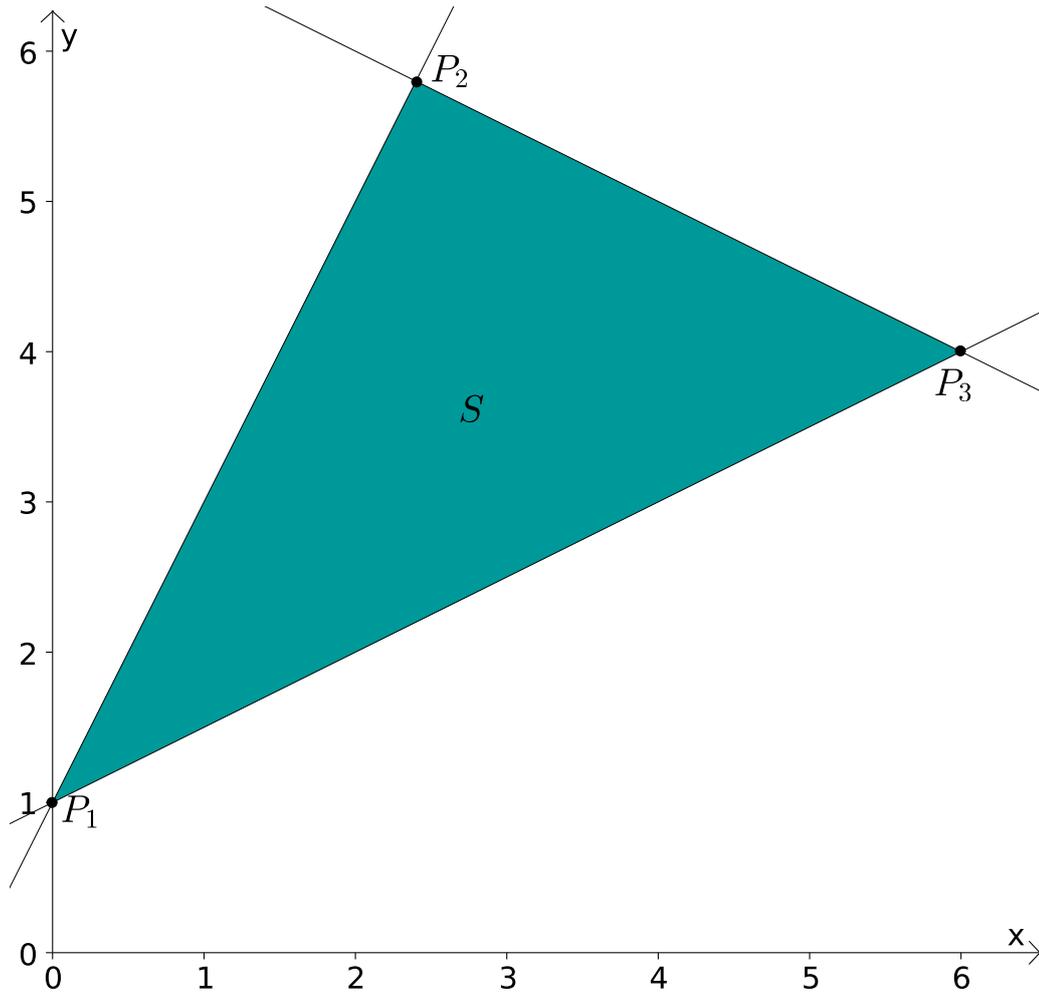


Figura 3.1: Região viável.

O segmento da reta entre os pontos $(0,0)$ e $(6,0)$ representa a projeção de S sobre o espaço de decisão do líder e pode ser visualizado na Figura 3.2.

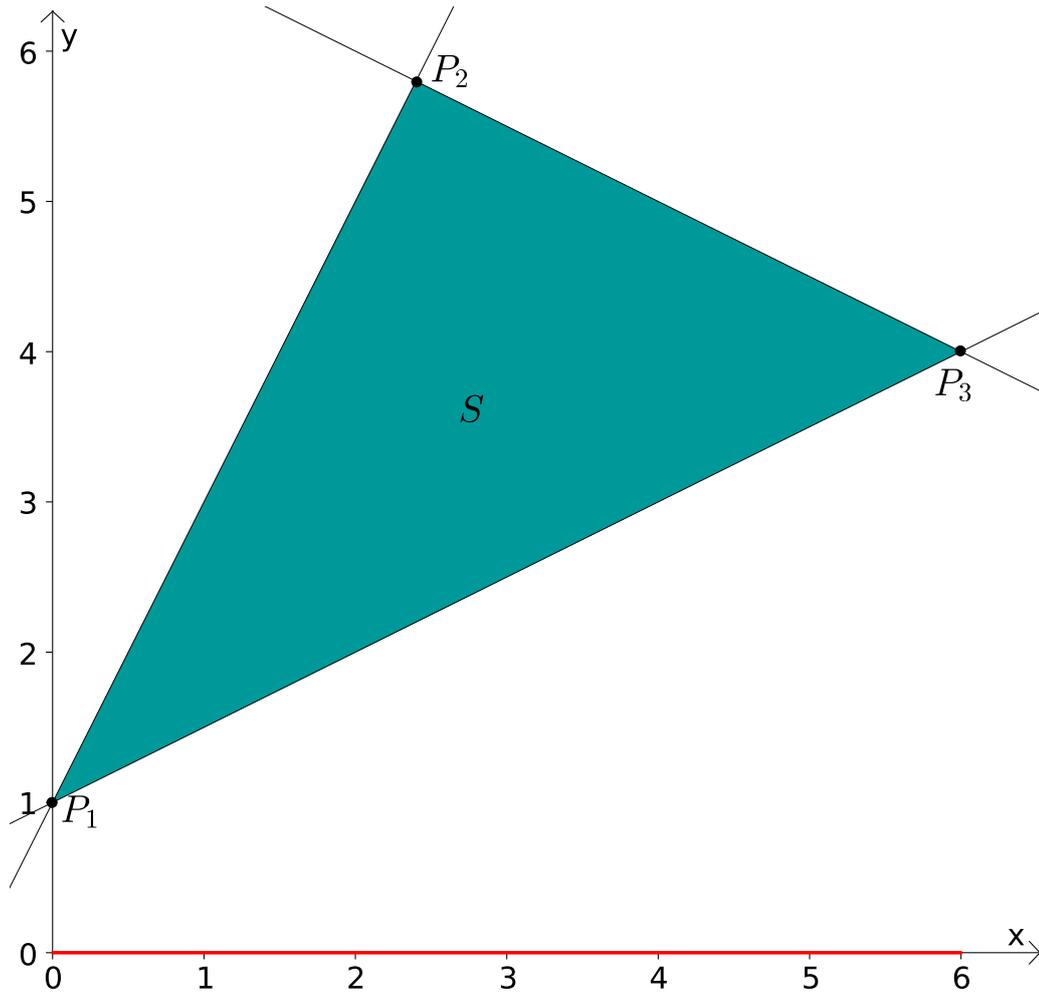


Figura 3.2: Projeção de S sobre o espaço de decisão do líder.

A região induzida é um pouco mais difícil de ser determinada. Tentaremos deixar mais claro sua definição nas linhas que se seguem.

O minimizador global de f é $y' = 5$. Vamos determinar o intervalo em que o problema do seguidor se resume a um problema de otimização irrestrita. Para isso será preciso reescrever as restrições do seguidor isolando y' ,

$$\begin{aligned}
 y' &\leq 1 + 2x; \\
 y' &\geq \frac{2+x}{2}; \\
 y' &\leq \frac{14-x}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Substituindo $y' = 5$ nas desigualdades (3.5) temos que

$$\begin{aligned} 5 &\leq 1 + 2x \Rightarrow x \geq 2; \\ 5 &\geq \frac{2+x}{2} \Rightarrow x \leq 8; \\ 5 &\leq \frac{14-x}{2} \Rightarrow x \leq 4. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vemos que $2 \leq x \leq 4$, caso contrário, será o limitante mais próximo de $y' = 5$ na direção de $-\nabla f$ e sabe-se que S_x é o intervalo $[0, 6]$, então resta analisar os intervalos $0 \leq x < 4$ e $4 < x \leq 6$ para encontrar o limitante superior e o inferior da região viável em cada um desses intervalos e depois encontrar o limitante mais próximo de $y' = 5$ na direção de $-\nabla f$.

Para encontrar o limitante superior e o inferior será feita uma análise nas desigualdades (3.5) e é fácil ver que $\frac{2+x}{2} \geq 0$ para $0 \leq x \leq 6$ e assim, conclui-se que $\frac{2+x}{2}$ é o limitante inferior de y' para $x \geq 0$ e o limitante superior será o menor valor de $1 + 2x$ ou $\frac{14-x}{2}$ para $0 \leq x < 2$ e para $4 < x \leq 6$, ou seja, $\frac{2+x}{2} \leq y' \leq \min\{1 + 2x, \frac{14-x}{2}\}$ para $0 \leq x < 2$ e $\frac{2+x}{2} \leq y' \leq \min\{1 + 2x, \frac{14-x}{2}\}$ para $4 < x \leq 6$.

Sabe-se que o limitante inferior nos intervalos $0 \leq x < 2$ e $4 < x \leq 6$ é a reta $y = \frac{2+x}{2}$. Agora, resta verificar qual das retas $y = 1 + 2x$ e $y = \frac{14-x}{2}$ é o limitante superior nestes intervalos.

Para o primeiro caso, considere $0 \leq x < 2$. Neste caso, é fácil verificar que $\min\{1 + 2x, \frac{14-x}{2}\} = 1 + 2x$. Sendo $1 + 2x$ crescente, segue que o limitante superior para $0 \leq x < 2$ é a reta $y = 1 + 2x$. Para o segundo caso, considere $4 < x \leq 6$. Para esta situação é trivial verificar que $\min\{1 + 2x, \frac{14-x}{2}\} = \frac{14-x}{2}$ e sendo $\frac{14-x}{2}$ decrescente segue que o limitante superior para $4 < x \leq 6$ é a reta $y = \frac{14-x}{2}$.

É fácil verificar que o limitante superior está mais próximo do valor $y' = 5$. Portanto, o conjunto de minimizadores globais do seguidor é definido como a seguir

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \{y \mid y = 1 + 2x, 0 \leq x < 2\} \cup \{y \mid y = 5, 2 \leq x \leq 4\} \cup \\ & \{y \mid y = \frac{14-x}{2}, 4 < x \leq 6\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, a região induzida do problema (3.4) é definida como a seguir

$$\begin{aligned} RI = & \{(x, y) \mid y = 1 + 2x, 0 \leq x < 2\} \cup \{(x, y) \mid y = 5, 2 \leq x \leq 4\} \cup \\ & \{(x, y) \mid y = \frac{14-x}{2}, 4 < x \leq 6\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

e pode ser visualizada na Figura 3.3.

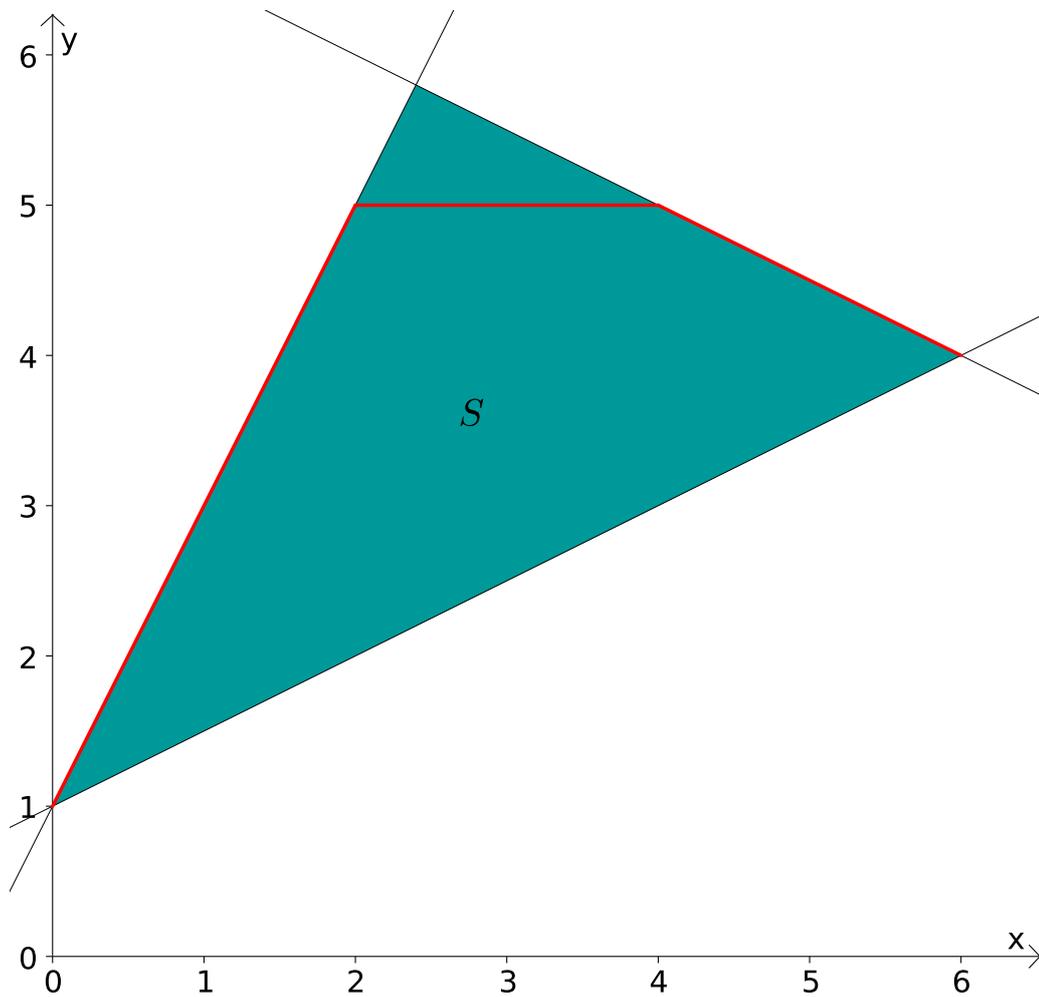


Figura 3.3: A região induzida RI .

Para obter a solução ótima para o líder, basta minimizar F na região induzida, ou seja,

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ \text{restrito à: } & (x,y) \in RI. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A análise deste problema será dividido em três casos:

1ª caso: $x \in [0, 2)$

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ \text{restrito à: } & -2x + y = 1, \\ & 0 \leq x < 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cuja solução é $(x, y) = (1, 3)$ com valor ótimo para o líder $F = 5$ e para o seguidor $f = 4$.

2ª caso: $x \in [2, 4]$

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{restrito à: } & y = 5, \\ & 2 \leq x \leq 4. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Cuja solução é $(x, y) = (3, 5)$ com valor ótimo para o líder $F = 9$ e para o seguidor $f = 0$.

3ª caso: $x \in (4, 6]$

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{restrito à: } & x + 2y = 14, \\ & 4 < x \leq 6. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Cuja solução é $(x, y) = (4.4, 4.8)$ com valor ótimo para o líder $F = 9.8$ e para o seguidor $f = 0.04$.

Desta forma, o ponto que gera o menor valor para o líder é $(x^*, y^*) = (1, 3)$. Os pontos ótimos e as curvas de nível da função objetivo do líder podem ser visualizados na Figura 3.4.

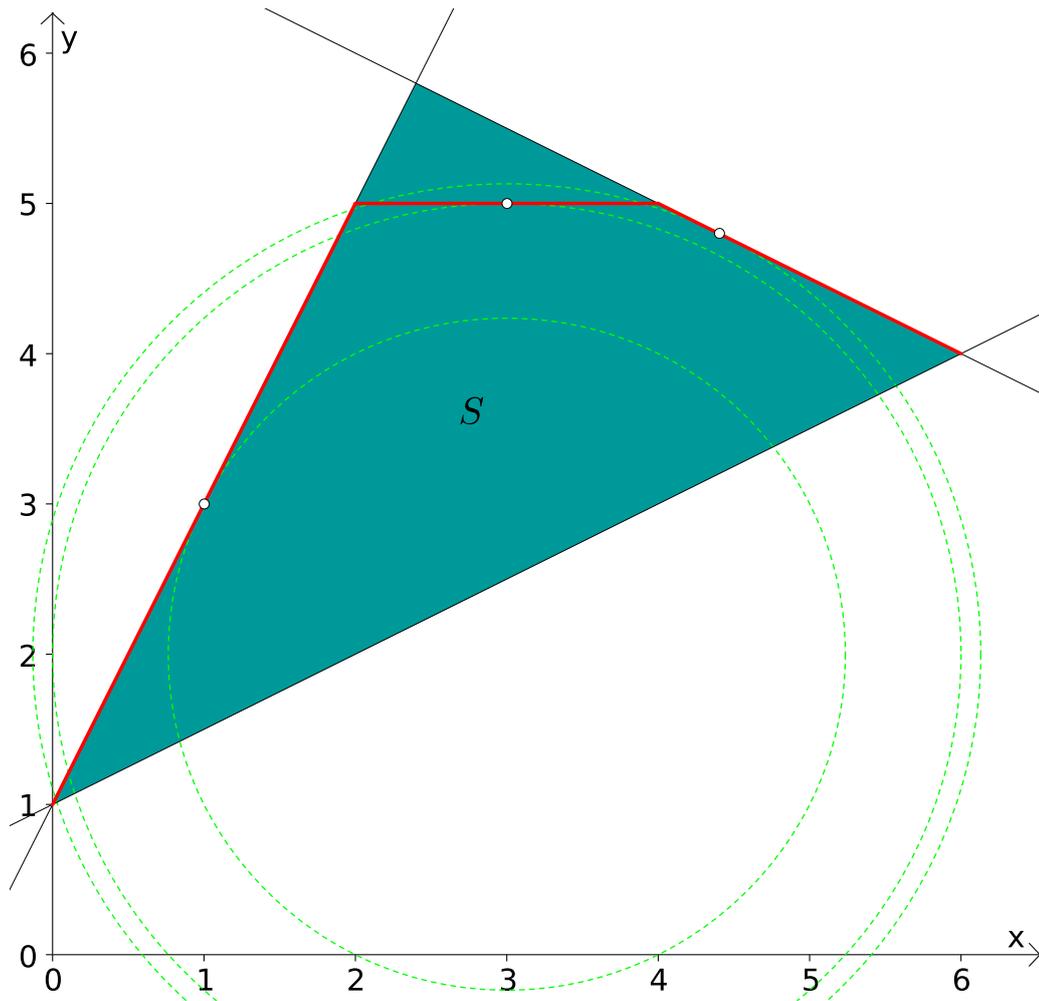


Figura 3.4: A região induzida, a curva de nível da F e os três pontos de solução ótima do problema (3.4).

Considere agora o problema (3.4) onde as restrições que figuravam no nível inferior passaram a figurar no nível superior:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\
 \text{restrito à : } & 0 \leq x \leq 8, \\
 & -2x + y \leq 1, \\
 & x - 2y \leq -2, \\
 & x + 2y \leq 14, \\
 \min_y f(x,y) &= (y-5)^2.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

De uma forma semelhante ao problema (3.4), encontra-se o conjunto de minimizadores globais do seguidor para o problema (3.13), que é $\Psi(x) = \{5\}$, não importando qual seja a decisão do líder. O conjunto projeção de S sobre o espaço de decisão do líder pode ser

calculado a partir da interseção da reta $y = 5$ com o conjunto S , em que a região viável do problema (3.13) é igual ao do problema (3.4). Os pontos de interseções da reta $y = 5$ com as retas $y = \frac{14-x}{2}$ e $y = 1 + 2x$ são $(2, 5)$ e $(4, 5)$, e a partir disto, conclui-se que o conjunto S_x é o intervalo $[2, 4]$. A região induzida do problema (3.13) é a interseção da reta $y = 5$ com o conjunto de restrição S , e pode ser visualizada na figura 3.5.

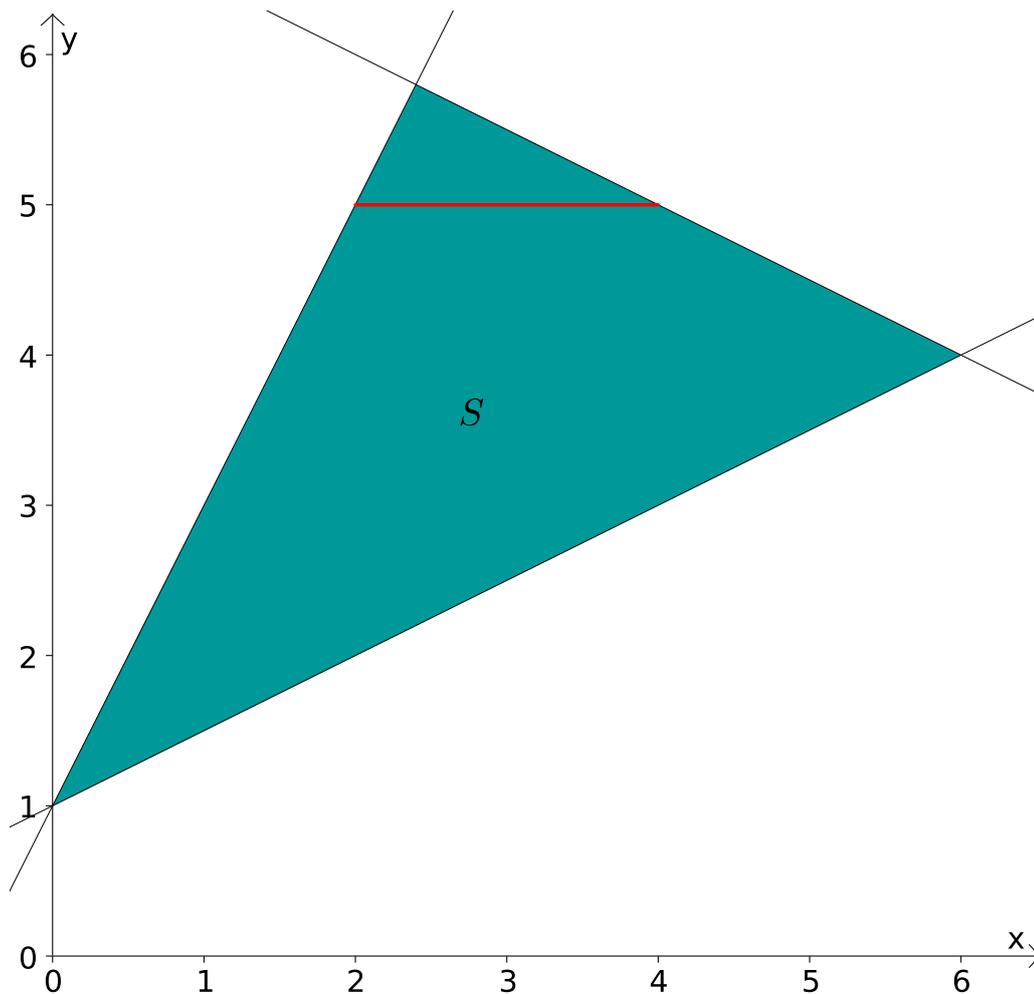


Figura 3.5: Região Induzida do problema RI do problema (3.13).

Para obter a solução ótima para o líder, basta minimizar F na região induzida, ou seja,

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ \text{restrito à: } & y = 5, \\ & 2 \leq x \leq 4. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Cuja solução é $(x, y) = (3, 5)$ com valor ótimo para o líder $F = 9$ e para o seguidor

$f = 0$.

Observando os problemas (3.4) e (3.13), vemos que, ao mudarmos as restrições de nível, podemos obter soluções distintas.

3.2 Problema de programação em dois níveis linear

O PPDN linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min_x F(x, y) &= c_1x + d_1y \\
 \text{restrito à: } &A_1x + B_1y \leq b_1, \\
 \min_{y'} f(x, y') &= c_2x + d_2y' \\
 \text{restrito à: } &A_2x + B_2y' \leq b_2,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Para exemplificar os conjuntos definidos em (3.1.1), consideremos os seguintes exemplos, retirados de [17]:

Ex. (1)

$$\begin{aligned}
 \min_x F(x, y) &= x - 8y \\
 \text{restrito à: } &-7x + 3y \leq 5, \\
 &x + y \leq 15, \\
 \min_{y'} f(x, y') &= y' \\
 \text{restrito à: } &5x - 2y' \leq 33, \\
 &-x - 2y' \leq -9, \\
 &x \geq 0, \quad y' \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A região viável de S pode ser visualizada na figura 3.6 e a região viável para o problema do seguidor pode ser visualizada na figura 3.7. Conhecendo-se os pontos viáveis do problema do líder, a saber, $P_1 = (1, 4)$, $P_2 = (7, 1)$, $P_3 = (9, 6)$ e $P_4 = (4, 11)$, conclui-se que a projeção de S no espaço de decisão do líder é o intervalo $[1, 9]$.

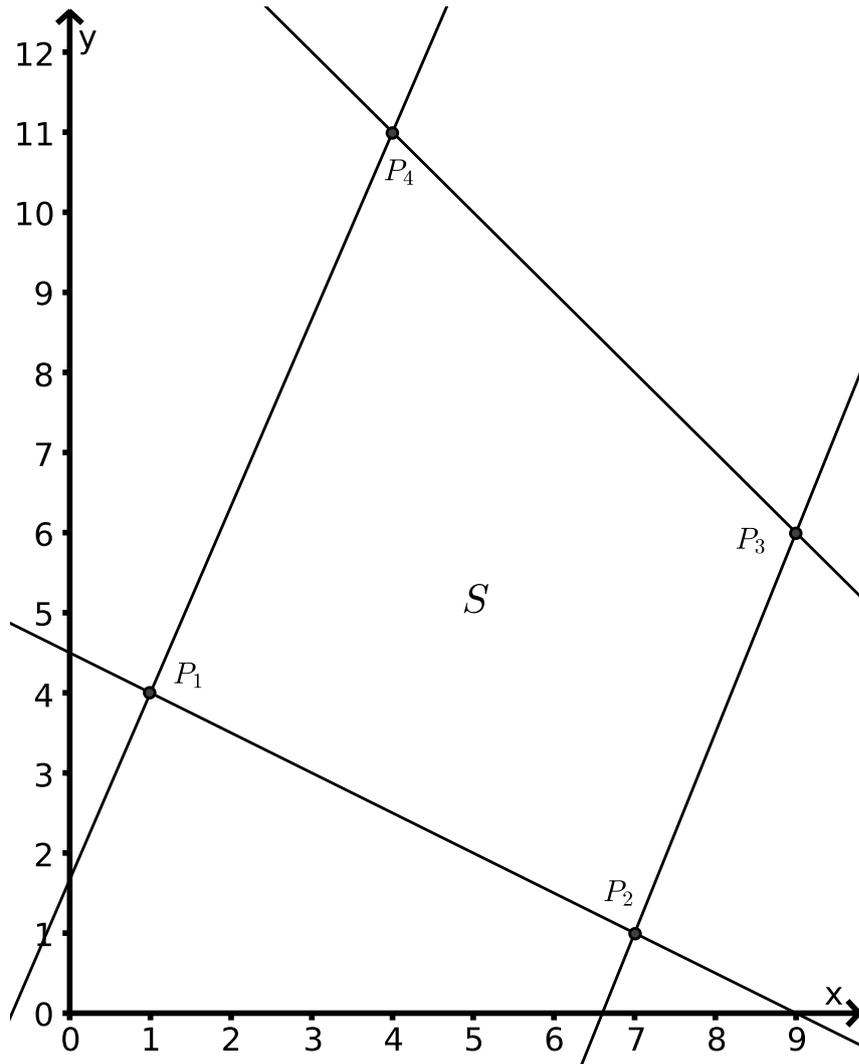


Figura 3.6: A região viável S .

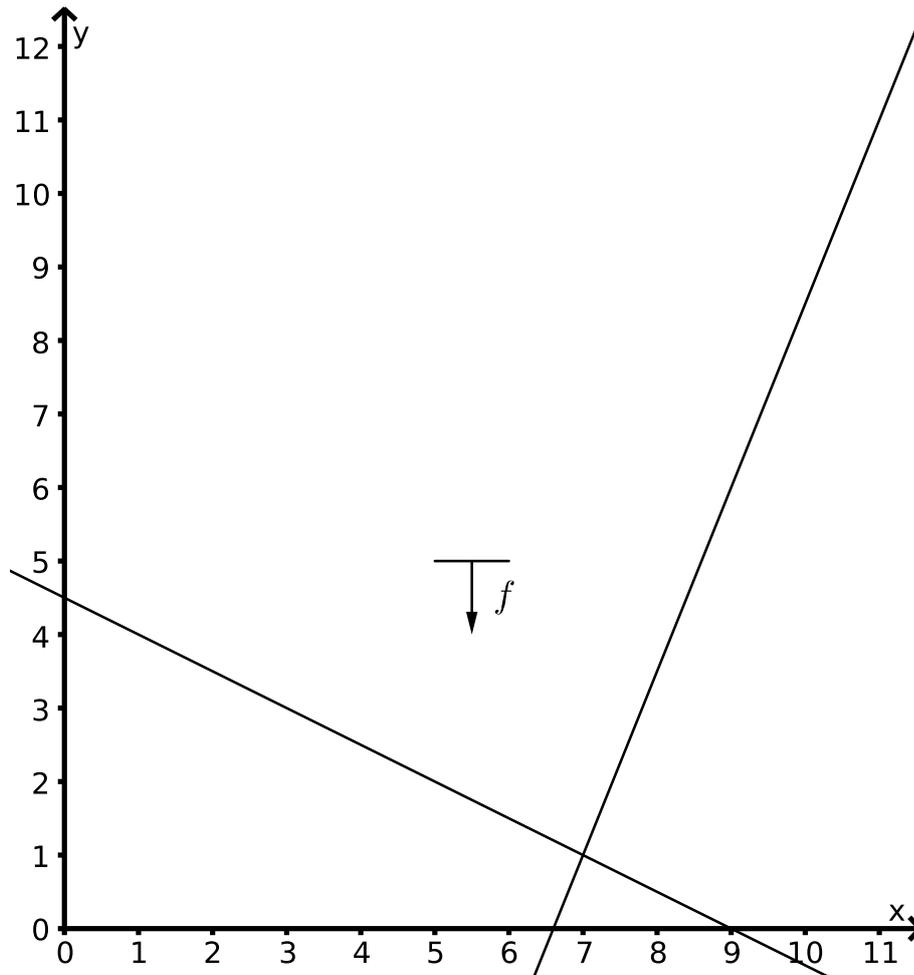


Figura 3.7: A região viável do seguidor.

Esse problema pode ser resolvido de forma semelhante ao problema (3.4) e, portanto, o conjunto de minimizadores globais do seguidor é definido como a seguir

$$\Psi(x) = \left\{ y \mid y = \frac{9-x}{2}, 1 \leq x \leq 7 \right\} \cup \left\{ y \mid y = \frac{5x-33}{2}, 7 \leq x \leq 9 \right\}. \quad (3.17)$$

Portanto, a região induzida do problema (3.16) é definida como a seguir

$$RI = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{9-x}{2}, 1 \leq x \leq 7 \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid y = \frac{5x-33}{2}, 7 \leq x \leq 9 \right\}, \quad (3.18)$$

e pode ser visualizada na figura 3.8.

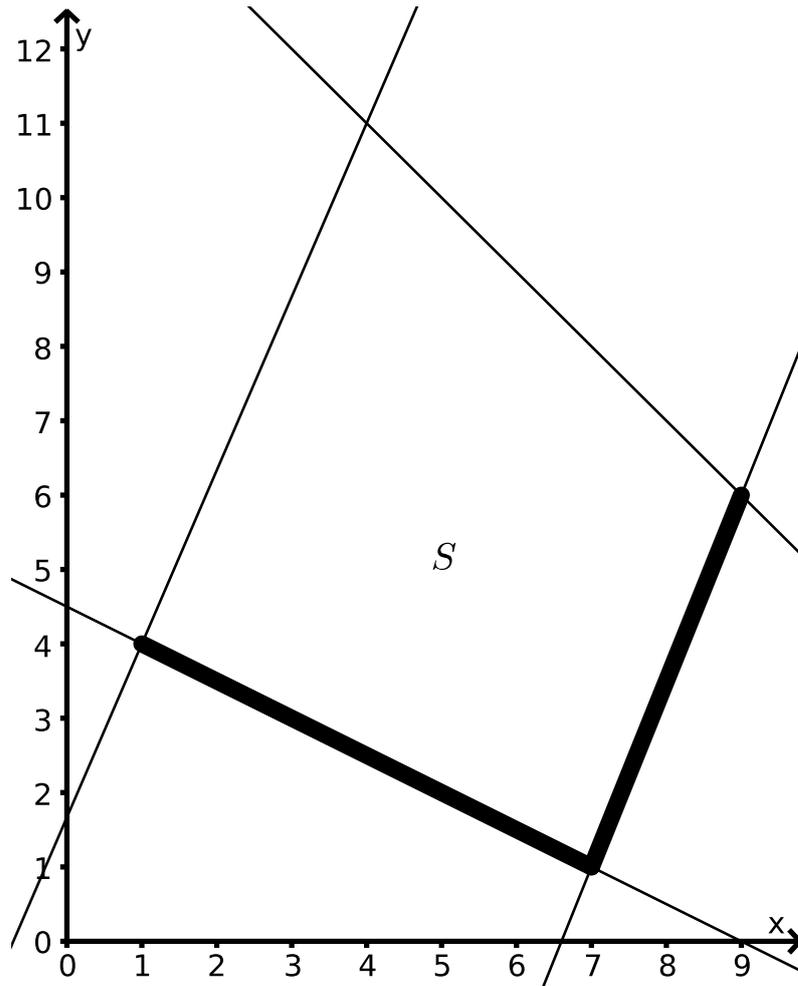


Figura 3.8: Região induzida RI .

Para obter a solução ótima para o líder, basta minimizar F na região induzida, ou seja,

$$\begin{aligned} \min_x F(x, y) &= x - 8y \\ \text{restrito à: } &(x, y) \in RI \end{aligned} \tag{3.19}$$

O problema (3.19) pode ser resolvido de forma semelhante ao problema (3.9), e portanto, o ponto que gera o menor valor para o líder é $(x^*, y^*) = (9, 6)$ com $F = -39$ e $f = 6$.

Considere agora o problema (3.16) onde as restrições que figuravam no nível inferior passaram a figurar no nível superior e as restrições que figuravam no nível superior passaram a figurar no nível inferior:

Ex. (2)

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= x - 8y \\
 \text{restrito à: } &5x - 2y \leq 33, \\
 &-x - 2y \leq -9, \\
 \min_{y'} f(x,y') &= y' \\
 \text{restrito à: } &-7x + 3y' \leq 5, \\
 &x + y' \leq 15, \\
 &x \geq 0, y' \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

O conjunto viável S é o mesmo do problema (1) e pode ser visualizado na figura 3.6. Sabendo quais pontos são viáveis ao problema (3.20), pode-se concluir que projeção de S sobre o espaço de decisão do líder é o intervalo $[1, 9]$.

Conjunto viável do seguidor é

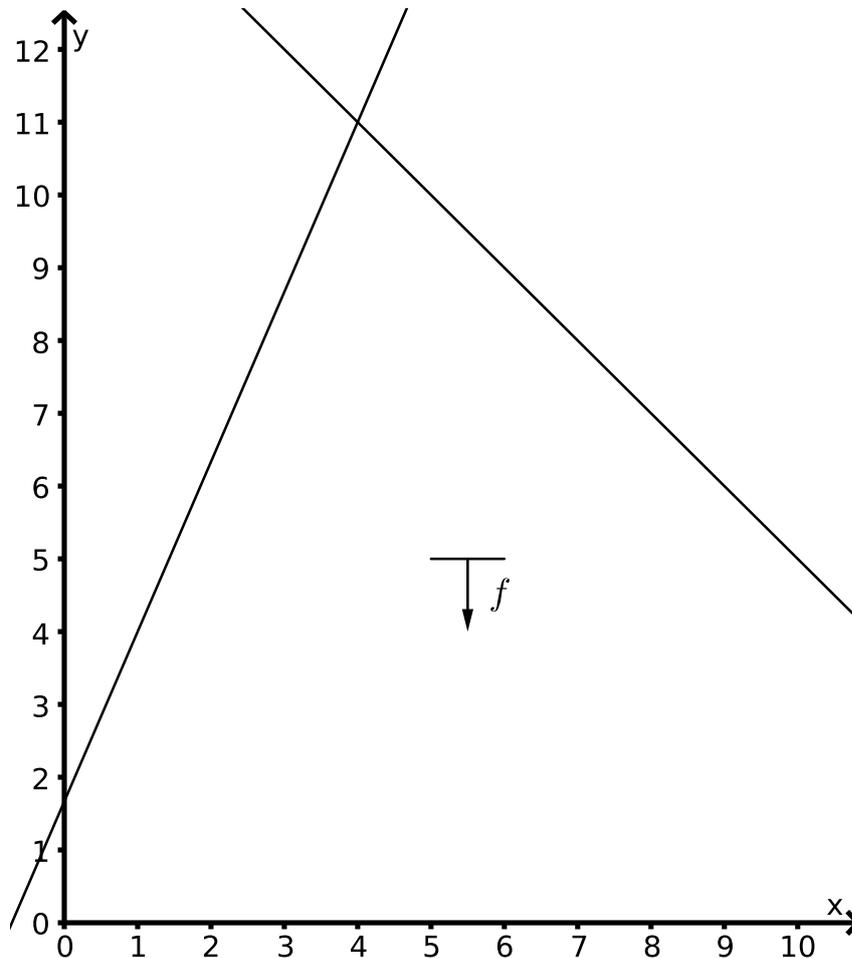


Figura 3.9: A região viável do seguidor.

Não importa a escolha do líder, o minimizador global de f é $y' = 0$, portanto, o conjunto minimizador global do problema do seguidor é dado por $\Psi(x) = \{0\}$. Portanto, a interseção de S com a reta $y = 0$ é vazia e, conseqüentemente, a região induzida é vazia e assim o problema (3.20) não tem solução.

Observando os problemas (3.16) e (3.20), vemos que ao mudarmos as restrições de nível, o problema pode passar a não ter solução.

3.3 Formulação de Karush-Kuhn-Tucker para problema de dois níveis

A utilização das condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker em problemas de programação em dois níveis é uma ferramenta bastante utilizada na resolução destes problemas. O problema de dois níveis (3.1) é transformado em um problema de otimização com restrições não lineares que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x,y,\lambda} F(x,y) \\
 & \text{restrito à:} \quad \nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 0, \\
 & \quad \quad \quad \lambda_i h_i(x,y) = 0, \\
 & \quad \quad \quad G_i(x,y) \leq 0, \\
 & \quad \quad \quad h_i(x,y) \leq 0, \\
 & \quad \quad \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^q$ e a função Lagrangiana associada ao problema do seguidor é definida da seguinte forma:

$$L_f(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^q \lambda_i h_i(x,y). \tag{3.22}$$

Note que o número de variáveis aumenta de $n_1 + n_2$ para $n_1 + n_2 + q$ e de restrições aumenta de $p+q$ para n_2+p+3q . Os próximos 3 exemplos deixam claro como a abordagem de K-K-T atua.

Ex. 3 [18]

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= x - 4y \\
 \text{restrito à: } &x \geq 0, \\
 \min_y f(x,y) &= y \\
 \text{restrito à: } &-x - y \leq -3, \\
 &3x - 2y \leq 4, \\
 &-2x + y \leq 0, \\
 &2x + y \leq 12, \\
 &y \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

A função Lagrangiana fica

$$L_f(x, y, \lambda) = y + \lambda_1(-x - y - 3) + \lambda_2(3x - 2y - 4) + \lambda_3(-2x + y) + \lambda_4(2x + y - 12) + \lambda_5(-y). \tag{3.24}$$

O seu gradiente é

$$\nabla L_f(x, y, \lambda) = 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5. \tag{3.25}$$

Portanto, o problema (3.23) reformulado fica:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= x - 4y \\
 \text{restrito à:} & \quad 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\
 & \quad \lambda_1(x + y - 3) = 0, \\
 & \quad \lambda_2(-3x + 2y + 4) = 0, \\
 & \quad \lambda_3(2x - y) = 0, \\
 & \quad \lambda_4(-2x - y + 12) = 0, \\
 & \quad \lambda_5(y) = 0, \\
 & \quad -x - y \leq -3, \\
 & \quad 3x - 2y \leq 4, \\
 & \quad -2x + y \leq 0, \\
 & \quad 2x + y \leq 12, \\
 & \quad x \geq 0, y \geq 0, \\
 & \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Desta forma, o problema (3.23) com 2 variáveis e com 6 restrições de desigualdades é transformado no problema (3.26) com 7 variáveis e 17 restrições de igualdades e desigualdades. A solução ótima encontrada em [18] para esse problema é o ponto $(x^*, y^*) = (4, 4)$. A função objetivo do líder tem valor $F^* = -12$ e a função objetivo do seguidor tem valor $f^* = 4$.

Ex. 4 [16]

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= -x - 3y_1 + 2y_2 \\
 \text{restrito à:} & \quad -x \leq 0, \\
 & \quad x - 8 \leq 0, \\
 \min_y f(x,y) &= -y_1 \\
 \text{restrito à:} & \quad -2x + y_1 + 4y_2 - 16 \leq 0, \\
 & \quad 8x + 3y_1 - 2y_2 - 48 \leq 0, \\
 & \quad -2x + y_1 - 3y_2 + 12 \leq 0, \\
 & \quad y_1 - 4 \leq 0, \\
 & \quad -y_1 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

A função Lagrangiana é

$$L_f(x, y, \lambda) = -y_1 + \lambda_1(-2x + y_1 + 4y_2 - 16) + \lambda_2(8x + 3y_1 - 2y_2 - 48) + \lambda_3(-2x + y_1 - 3y_2 + 12) + \lambda_4(y_1 - 4) + \lambda_5(-y_1). \quad (3.28)$$

Seu gradiente é dado por

$$\begin{aligned} \nabla_{y_1} L_f(x, y, \lambda) &= -1 + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5, \\ \nabla_{y_2} L_f(x, y, \lambda) &= 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O problema (3.27) reformulado fica

$$\begin{aligned} \min_{x, y, \lambda} F(x, y) &= -x - 3y_1 + 2y_2 \\ \text{restrito à:} & \quad -1 + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\ & \quad 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ & \quad \lambda_1(-2x + y_1 + 4y_2 - 16) = 0, \\ & \quad \lambda_2(8x + 3y_1 - 2y_2 - 48) = 0, \\ & \quad \lambda_3(-2x + y_1 - 3y_2 + 12) = 0, \\ & \quad \lambda_4(y_1 - 4) = 0, \\ & \quad \lambda_5(-y_1) = 0, \\ & \quad -2x + y_1 + 4y_2 - 16 \leq 0, \\ & \quad 8x + 3y_1 - 2y_2 - 48 \leq 0, \\ & \quad -2x + y_1 - 3y_2 + 12 \leq 0, \\ & \quad x - 8 \leq 0, \\ & \quad y_1 - 4 \leq 0, \\ & \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \\ & \quad -x \leq 0, \quad -y_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O problema (3.27) com 3 variáveis e com 7 restrições desigualdades é transformado no problema (3.30) com 8 variáveis e 19 restrições igualdades e desigualdades. A solução ótima encontrada em [16] para esse problema é o ponto $(x_1^*, y_1^*, y_2^*) = (5, 4, 2)$. A função objetivo do líder tem valor $F^* = -13$ e a função objetivo do seguidor tem valor $f^* = -2$.

Ex. 5 [19]

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= (10-x)^3 + (10-y)^3 \\
 \text{restrito à:} \quad & -x+y \leq 0, \\
 & x-15 \leq 0, \\
 & -x \leq 0, \\
 \min_y f(x,y) &= (x+2y-15)^4 \\
 \text{restrito à:} \quad & x+y-20 \leq 0, \\
 & y-20 \leq 0, \\
 & -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

A função Lagrangiana

$$L_f(x,y,\lambda) = (x+2y-15)^4 + \lambda_1(x+y-20) + \lambda_2(y-20) + \lambda_3(-y). \tag{3.32}$$

Gradiente da função Lagrangiana

$$\nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 8(x+2y-15)^3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3. \tag{3.33}$$

Problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= (10-x)^3 + (10-y)^3 \\
 \text{restrito à:} \quad & 8(x+2y-15)^3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\
 & \lambda_1(x+y-20) = 0, \\
 & \lambda_2(y-20) = 0, \\
 & \lambda_3(-y) = 0, \\
 & -x+y \leq 0, \\
 & x-15 \leq 0, \\
 & x+y-20 \leq 0, \\
 & y-20 \leq 0, \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3, \\
 & -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

O problema (3.31) com 2 variáveis e com 6 restrições desigualdades é transformado

no problema (3.34) com 5 variáveis e 13 restrições igualdades e desigualdades. A solução ótima encontrada em [19] para esse problema é o ponto $(x^*, y^*) = (6.08194, 4.45902)$. A função objetivo do líder tem valor $F^* = -230.2686$ e a função objetivo do seguidor tem valor $f^* = 0$.

3.4 Alguns algoritmos para problemas de programação em dois níveis

A estrutura dos problemas de programação em dois níveis não é simples, mesmo para o caso linear e, conseqüentemente, traz muitas dificuldades para que se encontre a solução de tais problemas. O que levou ao surgimento de estratégias para análise de tais problemas e, posteriormente, ao desenvolvimento de métodos mais eficientes para a sua solução. No cotidiano há uma série de métodos que podem ser utilizados para solucionar problemas de programação em dois níveis, entretanto, a depender da modelagem do problema, nem sempre é possível encontrar a sua solução.

Considere o seguinte problema de programação de dois níveis

$$\begin{aligned}
 & \min_{x,y} F(x, y) \\
 & \text{restrito à: } G(x, y) \leq 0 \\
 & \min_{y'} f(x, y') \\
 & \text{restrito à: } h(x, y') \leq 0,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Apresentaremos alguns métodos para resolver diferentes problemas de programação em dois níveis do tipo (3.35).

Kth-Best.

O algoritmo intitulado *Kth-Best* foi apresentado por Bialas e Karwan [5] para resolver problemas de programação em dois níveis linear. Com as hipóteses, de que a região induzida seja limitada, e que o conjunto $\Psi(x)$ seja unitário para todo x , o algoritmo localiza a solução ótima global do problema.

É possível mostrar que a solução do PPDN linear se encontra em um dos vértices da região viável [teorema 5.2.2 [18]].

Desta forma, a ideia principal do algoritmo baseia-se em percorrer os vértices de S à procura do vértice (x^k, y^k) com o menor valor objetivo para $F(x, y)$ e que pertença a região induzida.

O algoritmo inicia o seu processo a partir de um ponto viável, que é obtido da resolução da programação linear do problema (3.35) sem a função objetivo do seguidor. Desta forma, verifica-se se o ponto atual pertence a região induzida e, em caso afirmativo, o algoritmo para. Caso contrário, os vértices adjacentes serão adicionados em uma lista e, então, como forma de assegurar que o algoritmo termina no vértice com menor valor objetivo para o líder, serão examinados em ordem crescente do valor objetivo de $F(x, y)$.

Método de Penalidade.

Os primeiros a encontrar soluções para problemas de dois níveis gerais com este tipo de metodologia foram Shimizu e Aiyoshi [7], que apresentaram um método de dupla penalidade em que a função penalidade tenta manter a viabilidade para o problema do líder e também para o problema do seguidor e ainda satisfazer condições de primeira ordem do problema do seguidor penalizado. De forma simplificada, o método propõe a utilização de uma função de penalidade, que transforma o problema do seguidor de (3.35) em um problema irrestrito com uma função objetivo aumentada, isto é,

$$p(x, y; r) = f(x, y) + r\phi(g(x, y)), \quad (3.36)$$

onde ϕ é uma função de penalidade contínua.

Portanto, o problema de dois níveis (3.35) é reformulado e pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & F(x, y(x, y)) \\ \text{restrito à:} \quad & G(x, y) \leq 0 \\ & \nabla_y p(x, y; r) = 0 \\ & g(x, y) < 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde a última restrição em (3.37) determina o domínio da função p .

Para um parâmetro r dado, resolve-se o problema (3.37) adotando-se uma função de penalidade mista interior-exterior que transforma o problema (3.37) na seguinte função

objetivo aumentada

$$Q(x, y; t, s, r) = F(x, y) + t\Phi(G(x, y)) + r\phi(g(x, y)) + s\psi(\|\nabla_y p(x, y; r)\|), \quad (3.38)$$

onde Φ e ψ são funções de penalidade contínuas

Logo, a solução aproximada para o problema (3.35) pode ser obtida a partir da resolução do problema irrestrito

$$\min_{x, y} Q(x, y; t, s, r). \quad (3.39)$$

Mais detalhes podem ser encontrados em [20].

Anandalindam e White [21] apresentaram um método de penalidades que resolve problemas em dois níveis linear. Este método utiliza uma função de penalidade exata com a “brecha” de dualidade nula para o problema do seguidor. O PPDN linear é então resolvido adicionando ao problema do líder tal função. O método tem garantia de convergência sob certas hipóteses. Os detalhes podem ser encontrados em [21].

Método Branch and Bound.

O algoritmo *branch and bound* proposto por Bard [18], é um método que lista as prováveis combinações das restrições de complementariedade do seguinte problema reformulado a partir do problema (3.35) aplicando-se KKT ao problema do seguidor

$$\begin{aligned} \min_{x, y, \lambda} F(x, y) \\ \text{restrito à: } \quad & \nabla L_f(x, y, \lambda) = 0 \\ & \lambda_i g_i(x, y) = 0 \\ & G_i(x, y) \leq 0 \\ & h_i(x, y) \leq 0 \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Bard [18] considera algumas hipóteses para aplicabilidade do método, supõe que todas as funções são convexas e duas vezes diferenciáveis. Isso garante que o conjunto $\Psi(x)$ seja unitário para todo x . A partir destas hipóteses e de acordo com o **Teorema 1** em [4], o algoritmo obtém a solução ótima global para o PPDN.

Bard e More [22] propuseram uma modificação no método de Branch and Bound com o intuito de resolver PPDN linear/quadrático. O algoritmo obtém a solução global do PPDN linear/quadrático, se o minimizador global do seguidor for único para todo x .

De maneira geral, o método inicia resolvendo o problema (3.40) sem as restrições de complementariedade $\lambda_i g_i(x, y) = 0$, para obter um ponto viável. Em seguida, realiza-se o passo de *branch*, que tem por finalidade verificar se este ponto satisfaz as restrições de complementariedade e, em caso afirmativo, atualiza a função objetivo do líder. Caso contrário, no nó atual i , $u_i = 0$ ou $g_i = 0$ é inserido no problema (3.40) para obter um novo ponto viável. Assim, o algoritmo repete-se até verificar todas as possíveis combinações para as restrições de complementariedade.

Mais detalhes podem ser encontrados em [4, 22].

Direção de Descida.

Os métodos de direção de descida para resolver problemas de dois níveis foram desenvolvidos de forma semelhante aos métodos de programação não linear. O método de máxima descida foi desenvolvido por Savard e Gauvin [6], para resolver problemas do tipo

$$\begin{aligned} \min_x \quad & F(x, y) \text{ onde } y \text{ resolve} \\ & \min_y \quad f(x, y) \\ & \text{restrito à: } \quad g_i(x, y) \leq 0, \quad i \in I \\ & \quad \quad \quad g_i(x, y) = 0, \quad i \in J, \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde I, J são conjuntos de índices finitos e $S(x) = \{y : g_i(x, y) \leq 0, i \in I \text{ e } g_i(x, y) = 0, i \in J\}$ é a região viável do seguidor. Savard e Gauvin [6] reformulam o problema (3.41) em um problema de programação em dois níveis quadrático, cuja a solução ótima desse problema é uma direção de descida para $F(x, y)$. Existem métodos eficazes para obter a solução do PPDN quadrático, tal como, Branch and Bound.

Para utilização deste método, algumas hipóteses são consideradas. O conjunto dos minimizadores globais do seguidor deve ser unitário para todo x , os gradientes das restrições ativas no problema do seguidor devem ser linearmente independentes e supõe-se que a condição suficiente de segunda ordem do problema do seguidor é satisfeita.

De maneira geral, o método inicia o seu processo em um ponto viável $(x_k, y(x_k))$

para o problema (3.41), a partir desse ponto resolve-se o PPDN quadrático obtido da reformulação do problemas (3.41), cuja a solução ótima desse problema é uma direção de descida para $F(x, y)$. Assim, verifica-se se esse valor ótimo obtido é negativo e, em caso afirmativo, o algoritmo para. Caso contrário, calcula-se o tamanho do passo t_k tal que $F(x_k + t_k d_k, y(x_k + t_k d_k)) < F(x_k, y(x_k))$. Então um novo ponto é calculado a partir do passo t_k e, assim, o processo se repete até o algoritmo satisfazer o critério de parada.

Para mais detalhes sobre o método de máxima descida veja [6].

4 O ALGORITMO DE DIREÇÕES INTERIORES AO EPÍGRAFO

Neste capítulo apresentaremos o método IED, desenvolvido por Freire et al. [8], para resolver problemas de otimização não convexos, não diferenciáveis e com restrições.

Considera-se o seguinte problema

$$(P_1) = \begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeito a } g(x) = 0 \\ x \in X, \end{cases}$$

onde X é um subconjunto compacto do \mathbb{R}^n e as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas.

O problema (P_1) somente é definido como um problema com restrições de igualdade, porém as restrições de desigualdades podem ser incorporadas ao problema (P_1) através do operador $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

O método IED utiliza uma técnica de dualidade Lagrangiana, onde cada função de restrição é adicionada à função objetivo através de um multiplicador, ou variável dual, para formar a Lagrangiana clássica. Em um esquema de dualidade, em vez do problema (P_1) , o problema resolvido é aquele em que a função dual é maximizada. Nessa abordagem, o valor da função dual em um determinado ponto no espaço dual é calculado minimizando-se a Lagrangiana, que é um problema sem restrições e, portanto, métodos para otimização irrestrita podem ser usados.

Acontece que o valor ótimo do problema dual associado com a Lagrangiana clássica, em geral, não é o mesmo para o problema primal (P_1) , se (P_1) não for convexo. A diferença entre os dois valores ótimos é chamado de “brecha” de dualidade.

Sabe-se que as propriedades de “brecha” de dualidade nula e do ponto de sela sem as hipóteses de convexidade são garantida pela seguinte família de função Lagrangiana [23].

A Lagrangiana aumentada $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a soma da função objetivo f com mais dois termos: uma função de penalidade σ mais um termo linear, conforme a seguir

$$L(x, (u, c)) = f(x) + c\sigma(g(x)) + \langle Au, g(x) \rangle, \quad (4.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz real simétrica, $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\sigma(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $\sigma(0) = 0$.

O problema dual gerado por tais Lagrangianas (4.1) é um problema convexo (não diferenciável), que geralmente é resolvido por métodos de otimização convexa não diferenciáveis, como métodos de subgradientes e suas extensões [23–29].

Uma abordagem de dualidade baseada na Lagrangiana L para resolver (P_1) pode ser descrita da seguinte forma. Dado um ponto corrente (u^k, c^k) no espaço dual, um iterado primal x^k é obtido pela regra

$$x^k \in \text{Arg min}_{x \in X} L(x, (u^k, c^k)), \quad (4.2)$$

L é como em (4.1).

A iteração x_k obtida em (4.2) pode ser usada para calcular a direção de busca que leva a próxima iteração dual (u_{k+1}, c_{k+1}) .

Na verdade, x_k é usado para obter uma deflexão da direção do subgradiente que, por sua vez, é utilizado para melhorar os valores duais. Esta é a ideia por trás dos métodos estudados em [23–29]. Esses métodos são referidos como métodos deflected subgradient (DSG).

O IED é uma adaptação do NFDA (*Nonsmooth Feasible Directions Algorithm*) que foi desenvolvido Freire [9] para encontrar solução de problemas convexos, não diferenciáveis e sem restrições, combinado com o DSG (*Deflected Subgradient Method*) desenvolvido Burachik e Kaya [10] para encontrar solução de problemas de otimização não-convexos e não-diferenciáveis.

De maneira geral, o método IED funciona da seguinte forma: a partir de um ponto no interior do epígrafo da função dual, um subgradiente é usado para definir uma aproximação linear ao epígrafo. Um ponto auxiliar é obtido resolvendo-se as condições de otimalidade de um problema linear resultante. Se o ponto auxiliar estiver no interior do epígrafo, o passo IED é declarado sério e o ponto auxiliar se torna o próximo iterado, a partir do qual o processo é repetido. Se o ponto auxiliar não pertence ao interior do epígrafo, o passo IED é declarado nulo e uma versão adequada do passo DSG é aplicada ao ponto original. O novo ponto ocupa o lugar do ponto original, a partir do qual o processo se repete, até que se realize um passo sério. Caso ocorra um número infinito de passos nulos, o método converge para uma solução primal, em virtude das propriedades de convergência do DSG.

Um aspecto fundamental do método é a minimização da função Lagrangiana. A minimização desta função de modo eficaz e preciso é vital para o sucesso do IED, embora

o método utilizado para solucionar esta tarefa não afete a convergência do método IED, como provado em [8]. Resolver esse problema eficazmente é fundamental para o sucesso dos métodos com base na dualidade Lagrangiana. A versão original do método IED emprega a rotina *fminsearch* do Matlab para a minimização da Lagrangiana.

Para formular o problema dual, define-se a função dual (côncava) correspondente $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(u, c) = \min_{x \in X} [f(x) + c\sigma(g(x)) + \langle Au, g(x) \rangle]. \quad (4.3)$$

O problema dual associado ao primal (P_1) é dado por

$$(D) \quad \max_{(u,c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+} H(u, c), \quad (4.4)$$

e uma vez que a função dual H é côncava, D é equivalente ao problema convexo

$$(D^*) \quad \min_{(u,c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+} -H(u, c).$$

Com esta equivalência, tem-se em (D^*) um problema irrestrito de otimização convexa.

Assumida a possibilidade de resolução do subproblema (4.3), dado um ponto dual (u, c) , tem-se agora um ponto primal x que pertence ao conjunto

$$X(u, c) = \underset{x \in X}{\text{Arg min}} [f(x) + c\sigma(g(x)) + \langle Au, g(x) \rangle]. \quad (4.5)$$

Por simplicidade (D^*) será o problema dual e nos referiremos a $Q := -H$ como a função dual.

Após a resolução do problema (4.5), podemos obter um subgradiente $s \in \partial Q(u, c)$ com base no seguinte resultado:

Teorema 4.0.1. ([23], Lema 2.1(a))

Dada a função dual Q e um par $v = (u, c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$, tome $x \in X(v)$. Então $s = (-Ag(x), -\sigma(g(x))) \in \partial Q(v)$.

4.1 A direção de busca do IED

Nesta seção, descreveremos como a direção de busca do IED é obtida.

A direção de busca empregada pelo IED foi, a primeira vez, usada por um algoritmo chamado Feasible Directions Interior Point Algorithm (FDIPA) [30] para problemas não lineares diferenciáveis.

Consideremos o problema de otimização com restrições de desigualdades

$$(P_2) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeito à } g(x) \leq 0, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções diferenciáveis.

Seja x^* um ponto regular do problema (P_2) . A condição necessária de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) é expressa da seguinte forma: Se x^* é um mínimo local de (P_2) , então existe λ^* tal que

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0 \quad (4.6)$$

$$G(x^*)\lambda^* = 0 \quad (4.7)$$

$$\lambda^* \geq 0 \quad (4.8)$$

$$g(x^*) \leq 0, \quad (4.9)$$

onde $G(x)$ é uma matriz diagonal com $G_{ii}(x) \equiv g_i(x)$.

Uma iteração de Newton para resolver o sistema linear de equações (4.6) e (4.7) pode ser expressa por

$$\begin{pmatrix} B^k & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^T & G(x^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^k \\ \lambda - \lambda^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k)\lambda^k \\ G(x^k)\lambda^k \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde (x^k, λ^k) é o ponto atual na iteração k , Λ é uma matriz diagonal com $\Lambda_{ii} \equiv \lambda_i$ e $B^k \equiv \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k)$ é a hessiana da função Lagrangiana $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ ou uma aproximação Quasi-Newton. Contudo, B^k deve ser definida positiva para garantir a convergência global do algoritmo.

Chamando $d = x - x^k$, o sistema (4.10) pode ser escrito da seguinte forma

$$B^k d + \nabla g(x^k)\lambda = -\nabla f(x^k) \quad (4.11)$$

$$\Lambda^k \nabla g(x^k)^T d + G(x^k)\lambda = 0. \quad (4.12)$$

A solução (d_1^k, λ_1^k) do sistema (4.11)-(4.12) fornece uma direção de descida d_1^k , conforme demonstrado em [30]. Entretanto, d_1^k pode não ser uma direção viável pois, quando alguma restrição se aproxima de zero, d_1^k tende a uma direção tangente ao conjunto viável, fato decorrente de $\nabla g_i(x^k)^T d_1^k = 0$ na equação (4.12) para o caso em que as restrições são ativas.

No intuito de contornar esse problema, define-se um novo sistema em d^k e $\bar{\lambda}$, de forma que inclui-se no lado direito da equação (4.12) um vetor negativo $-\rho^k \Lambda^k$, com $\rho^k > 0$,

$$B^k d + \nabla g(x^k) \bar{\lambda} = -\nabla f(x^k), \quad (4.13)$$

$$\Lambda^k \nabla g(x^k)^T d + G(x^k) \bar{\lambda} = -\rho^k \Lambda^k. \quad (4.14)$$

Desta forma, (4.14) é equivalente a

$$\lambda_i^k \nabla g_i(x^k)^T d^k + g_i(x^k) \bar{\lambda}^k = -\rho^k \lambda_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.15)$$

e então, (4.15) se reduz a

$$\nabla g_i(x^k) d^k = -\rho^k < 0$$

para $g_i(x^k) = 0$. Portanto, d^k é uma direção viável.

A inclusão do termo negativo $-\rho^k \lambda^k$ produz uma deflexão proporcional d^k , no interior da região viável.

A questão agora é garantir que d^k seja uma direção de descida. Para isso, ρ deve ser determinado adequadamente. Assim, d^k pode ser obtido a partir da resolução dos seguintes sistemas

$$B^k d_1 + \nabla g(x^k) \lambda_1 = -\nabla f(x^k) \quad (4.16)$$

$$\Lambda^k \nabla g(x^k)^T d_1 + G(x^k) \lambda_1 = 0 \quad (4.17)$$

e

$$B^k d_2 + \nabla g(x^k) \lambda_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\Lambda^k \nabla g(x^k)^T d_2 + G(x^k) \lambda_2 = -\Lambda^k, \quad (4.19)$$

e, conseqüentemente,

$$d^k = d_1^k + \rho^k d_2^k$$

$$\bar{\lambda}^k = \lambda_1^k + \rho^k \lambda_2^k,$$

tem-se $(d^k)^T \nabla f(x^k) = (d_1^k)^T \nabla f(x^k) + \rho^k (d_2^k)^T \nabla f(x^k)$. Uma vez que $(d_1^k)^T \nabla f(x^k) < 0$, se $(d_2^k)^T \nabla f(x^k) \leq 0$, então $(d^k)^T \nabla f(x^k) < 0$, $\forall \rho^k > 0$.

Portanto, ρ^k deve ser escolhido de maneira adequada, se $(d_2^k)^T \nabla f(x^k) > 0$. Para esse caso, estabelecendo $(d^k)^T \nabla f(x^k) \leq \xi (d_1^k)^T \nabla f(x^k)$ com $\xi \in (0, 1)$, tem-se

$$(d_1^k)^T \nabla f(x^k) + \rho^k (d_2^k)^T \nabla f(x^k) \leq \xi (d_1^k)^T \nabla f(x^k)$$

de maneira que

$$\rho^k \leq \frac{(\xi - 1)(d_1^k)^T \nabla f(x^k)}{(d_2^k)^T \nabla f(x^k)}. \quad (4.20)$$

Assim, se ρ^k for escolhido de modo a satisfazer a desigualdade (4.20), $d^k = d_1^k + \rho^k d_2^k$ será uma direção descida viável para f .

A direção de descida do algoritmo pode ser visualizada na figura 4.1.

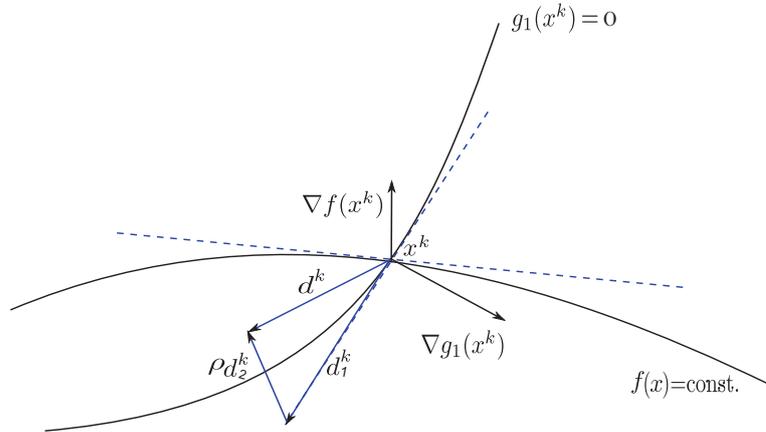


Figura 4.1: Direção de busca do FDIPA (Fonte: [31]).

Mais informações sobre o FDIPA podem ser encontrados em [30].

4.2 NFDA para problemas convexos

A partir do FDIPA, Freire [9] desenvolveu o algoritmo *Nonsmooth Feasible Directions Algorithm* (NFDA) para lidar com problemas convexos, não diferenciáveis e irrestritos da

forma:

$$(P_3) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa não necessariamente diferenciável.

O problema irrestrito (P_3) pode ser reformulado da seguinte forma

$$(P_4) \begin{cases} \min \psi(x, z) = z \\ \text{sujeito a } f(x) \leq z \\ (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $f(x) \leq z$ é uma restrição não diferenciável. Assume-se que um subgradiente arbitrário $s \in \partial f(x)$ pode ser calculado em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

NFDA tem como ponto de partida (x_0, z_0) no interior do epígrafo da função f . O método define um hiperplano suporte para o epígrafo da função f no ponto $(x^k, f(x^k))$

$$h^k(x) = f(x^k) + \langle s^k, (x - x^k) \rangle,$$

onde $s^k \in \partial f(x^k)$. Um problema auxiliar linear restrito empregando todos os hiperplanos suporte calculados até o momento é definido da seguinte forma

$$(P_5) \begin{cases} \min \psi(x, z) = z \\ \text{sujeito a } g^k(x, z) \leq 0 \\ (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $g^k = (g_1^k, \dots, g_m^k) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial com $g_i^k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_i^k(x, z) = h_i^k(x) - z$.

O NFDA não resolve o problema (P_5) , mas procura uma direção de busca d^k do mesmo modo que o método FDIPA. Para obter a direção de busca resolve-se dois sistemas e escolhe-se o parâmetro ρ da mesma maneira que o FDIPA faz.

Na iteração (x^k, z^k) de posse da direção de busca d^k , o passo t^k é dado por

$$t^k = \min\{t_{\max}, T\},$$

onde $t_{\max} = \max\{t \mid \bar{g}_i^k((x^k, z^k) + td^k) \leq 0\}$ e $T > 0$ é um parâmetro pré-definido, uma vez que t_{\max} pode não ser finito. Um novo ponto é calculado da seguinte forma

$$(y^k, \omega^k) = (x^k, z^k) + \mu t^k d^k, \text{ onde } \mu \in (0, 1).$$

Se $F(y^k) < \omega^k$ supõe-se que o conjunto atual de planos cortantes é uma boa aproximação de $f(x)$ numa vizinhança de x^k , então a nova iteração é definida $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (y^k, \omega^k)$ e este passo é chamado de passo sério que pode ser visualizado na figura 4.2. Caso contrário, se $F(y^k) \geq \omega^k$, então $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$ e o passo é chamado de passo nulo que pode ser visualizado na figura 4.3. Em qualquer caso, um novo hiperplano suporte no ponto $(y^k, F(y^k))$ é adicionado para formar um novo problema auxiliar como (P_5) .

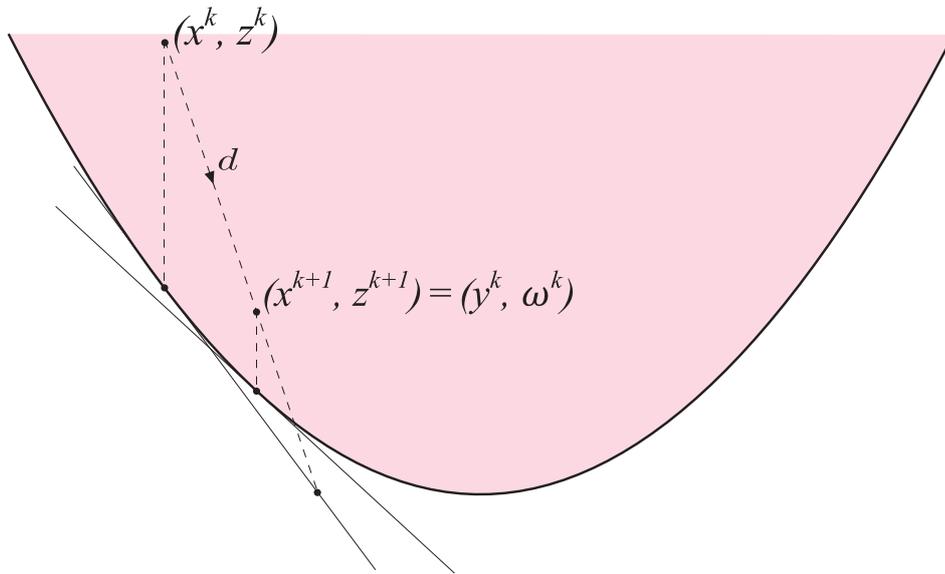


Figura 4.2: Passo sério do NFD (Fonte: [32]).

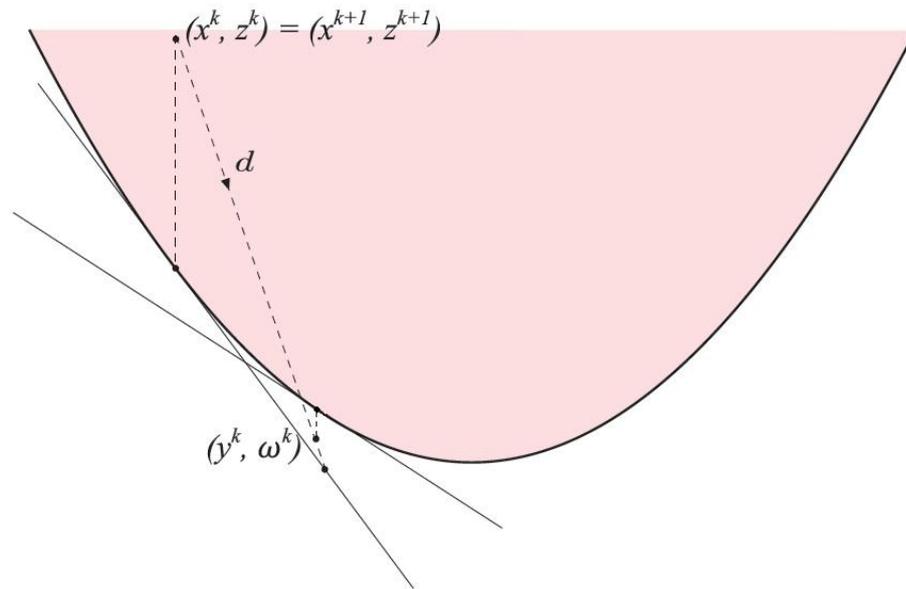


Figura 4.3: Passo nulo do NFDA (Fonte: [32]).

Mais informações a respeito do método NFDA, veja [9, 33].

4.3 O método IED

Nesta seção descreveremos o método de Direções Interiores ao Epígrafo [8] para resolver problemas de otimização não diferenciáveis, não convexos com restrições.

O problema dual (D), é equivalente ao problema

$$(D^*) = \begin{cases} \min Q(u, c) \\ (u, c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

que, por sua vez, é equivalente ao problema

$$(ED^*) \begin{cases} \min \psi(u, c, z) = z \\ \text{sujeito a } Q(u, c) \leq z. \\ (u, c, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

As ideias aplicadas pelo NFDA podem ser utilizadas no problema (ED^*), porque os problemas (P_4) e (ED^*) têm a mesma estrutura.

No passo k do método IED, temos o ponto $(v^k, z^k) = ((u^k, c^k), z^k) \in \text{int}(\text{epi}(Q))$ e uma iteração primal $x^k \in X(v^k)$ tal que $g(x^k) \neq 0$.

Utilizando o Teorema (4.0.1) e possuindo x^k , podemos obter naturalmente o subgradiente

$$s^k = (-Ag(x^k), -\sigma(g(x^k))) \in \partial Q(v^k).$$

Este subgradiente define um hiperplano de suporte

$$h^k(v) = Q(v^k) + \langle s^k, v - v^k \rangle$$

para o $\text{epi}(Q)$ no ponto $(v^k, Q(v^k))$. Aplicando este hiperplano suporte, o problema auxiliar é definido como

$$(AP_k) \begin{cases} \min \psi(u, c, z) = z \\ \text{sujeito a } g^k(u, c, z) \leq z \\ (u, c, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $g^k : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g^k(v, z) = h^k(v) - z$.

A partir de (AP_k) as direções d_1^k e d_2^k são obtidas por meio da resolução dos sistemas

$$\begin{aligned} B^k d_1 + \nabla g(v^k, z^k) \lambda_1 &= -\nabla \psi(v^k, z^k) \\ \Lambda^k \nabla g(v^k, z^k)^T d_1 + G(v^k, z^k) \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$\begin{aligned} B^k d_2 + \nabla g(v^k, z^k) \lambda_2 &= 0 \\ \Lambda^k \nabla g(v^k, z^k)^T d_2 + G(v^k, z^k) \lambda_2 &= -\Lambda^k. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Com d_1^k e d_2^k a direção de busca é definida por $d^k = d_1^k + \rho^k d_2^k$, onde o parâmetro $\rho^k > 0$ deve ser escolhido adequadamente para que d^k seja uma direção de descida para ψ , isto é, $(d^k)^T \nabla \psi(v^k, z^k) < 0$, e, ao mesmo tempo, uma direção de descida local para a função dual Q . Para isto, d^k tem que ser uma direção de descida para g também, isto é, $(d^k)^T \nabla g(v^k, z^k) < 0$.

Em outras palavras, o algoritmo IED encontra uma direção d , em cada iteração, que

pertence ao interior do cone

$$K(v^k, z^k) = \{d \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \mid d^T \nabla g(v^k, z^k) < 0 \text{ e } d^T \nabla \psi(v^k, z^k) < 0\},$$

que pode ser visualizado na figura 4.4.

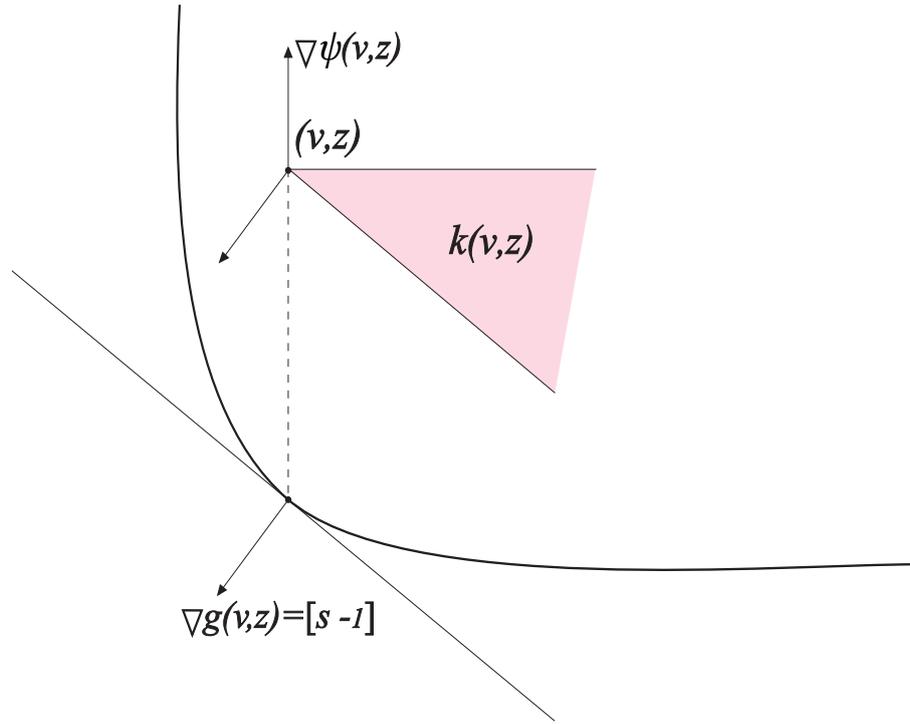


Figura 4.4: O cone de direções $K(v, z)$ (Fonte: [34]).

Freire et al. [8] provaram que se ρ satisfaz

$$-\frac{d_1^T \nabla g(v, z)}{d_2 \nabla g(v, z)} < \rho < (1 - \epsilon) \frac{d_1^T \nabla \psi(v, z)}{d_2 \nabla \psi(v, z)},$$

então $d \in K(v, z)$.

A partir da escolha apropriada do passo t^k , o cálculo do ponto auxiliar na iteração atual $(v^k, z^k) \in \text{int}(\text{epi}(Q))$ é dado por

$$(\tilde{u}^k, \tilde{c}^k, \tilde{z}^k) = (\tilde{v}^k, \tilde{z}^k) = (v^k, z^k) + t^k d^k.$$

Se $g(\tilde{x}^k) = 0$ com $\tilde{x}^k \in X(\tilde{v}^k)$, o algoritmo para, de acordo com o Teorema (4.3.1). Caso contrário, se $g(\tilde{x}^k) \neq 0$ e $Q(\tilde{v}^k) < \tilde{z}^k$ então $(v^{k+1}, z^{k+1}) = (\tilde{v}^k, \tilde{z}^k)$ e declara-se esse passo como sério.

Se $Q(\tilde{v}^k) \geq \tilde{z}^k$ um passo do DSG é realizado no intuito de obter o próximo iterado

$(v^{k+1}, z^{k+1}) \in \text{int}(\text{epi}(Q))$ e, assim, declara-se esse passo como nulo.

Em vista disso, calcula-se um novo plano suporte no ponto $(v^{k+1}, Q(z^{k+1}))$, define-se um novo problema auxiliar e o processo se repete até obter-se um x^k que satisfaça $g(x^k) = 0$.

O resultado que justifica o critério de parada utilizado pelo IED:

Teorema 4.3.1. ([8], Teorema 2.1) *Suponha que para algum $(\bar{u}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ temos $\bar{x} \in X(\bar{u}, \bar{c}) = \text{Arg min}[f(x) + \bar{c}\sigma(g(x)) + \langle A\bar{u}, g(x) \rangle]$. Então \bar{x} é uma solução do problema primal e (\bar{u}, \bar{c}) é uma solução do problema dual se, e somente se, $g(\bar{x}) = 0$.*

O Algoritmo DSG

O algoritmo DSG encontrado em [23] é descrito a seguir:

Passo 0: Escolha $v^0 = (u^0, c^0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$, e parâmetros exógenos, $\{\alpha_k\} \subset (0, \alpha)$.

Também fixe $\beta \geq \eta > 0$. Seja $k := 0$.

Passo 1: (Critério de parada)

a) Calcule $x^k \in X(v^k)$,

b) Se $g(x^k) = 0$ pare. Caso contrário, vá para o passo 2.

Passo 2: (Cálculo do passo e atualização das variáveis duais)

$\eta_k := \min\{\eta, \sigma(g(x^k))\}$, $\beta_k := \max\{\beta, \sigma(g(x^k))\}$, e escolha r_k em $[\eta_k, \beta_k]$,

$u^{k+1} = u^k - r_k A(g(x^k))$,

$c^{k+1} = c^k - (1 + \alpha_k)r_k \sigma(g(x^k))$.

Seja $k = k + 1$ e vá para o passo 1.

A seguir, descrevemos o algoritmo IED.

O algoritmo IED

Passo 0: Fixe uma sequência $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}_+$ e uma sequência $\{B^k\}$ de matrizes definidas positivas. Fixe $\beta \geq \eta > 0$, $T_0 \in (0, 1)$, $\hat{Q} \leq \tilde{Q}$, onde \tilde{Q} é o valor ótimo dual, uma matriz simétrica A , e uma função aumentada σ . Tome $u^0 \in \mathbb{R}^m$, $c^0 > 0$, $\lambda^0 > 0$ e $z^0 > Q(v^0) = Q(u^0, c^0)$. Tome $x^0 \in X(v^0)$ tal que $g(x^0) \neq 0$. Seja $k = 0$.

Passo k: Seja $(v^k, z^k) \in \text{int}(\text{epi}(Q))$, $\lambda^k > 0$ e $x^k \in X(v^k)$ tal que $g(x^k) \neq 0$. Calcule $s^k = (-A(g(x^k)), -\sigma(g(x^k)))$.

Passo k.1: Seja $i = 0$. Dado (v^k, z^k, λ^k) , encontre $d_1^k, d_2^k, \lambda_1^k$ e λ_2^k resolvendo os sistemas 4.21 e 4.22.

Encontre ρ_1^k, ρ_2^k satisfazendo $\rho_1^k = -\frac{(d_1^k)^T \nabla g(v^k, z^k)}{(d_2^k)^T \nabla g(v^k, z^k)} < \rho^k \leq (1 - \xi^k) \frac{(d_1^k)^T \nabla \psi(v^k, z^k)}{(d_2^k)^T \nabla \psi(v^k, z^k)} < \rho_2^k$, com $\xi^k \in \left(\frac{1}{3}(1 - \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}), \frac{2}{3}(1 - \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}) \right) \subset (0, 1)$, e a direção de busca $d^k = d_1^k + \rho^k d_2^k$.

Calcule o tamanho de passo $t^k = \max\{\eta_0, \frac{z^k - \hat{Q}}{-\nabla \psi(v^k, z^k)^T d^k}, \frac{|(v^k)^T s^k|}{-\nabla \psi(v^k, z^k)^T d^k}\}$.

Passo k.2: Calcule o ponto auxiliar $(\hat{v}^k, \hat{z}^k) = (v^k, z^k) + t^k d^k$. Encontre $\hat{x}^k \in X(\hat{v}^k, \hat{z}^k)$. Se $g(\hat{x}^k) = 0$, pare. Sejam $x^k = \hat{x}^k$ e $v^k = \hat{v}^k$.

Passo k.3.a: (Passo sério) Se $(\hat{v}^k, \hat{z}^k) \in \text{int}(\text{epi}(Q))$ então $(v^{k+1}, z^{k+1}) = (\hat{v}^k, \hat{z}^k)$, $x^{k+1} = \hat{x}^k$, $\lambda^{k+1} = \lambda^k + t^k(\lambda_1^k + \rho^k \lambda_2^k) = \hat{\lambda}^k$, $k = k + 1$ e vá para o passo k .

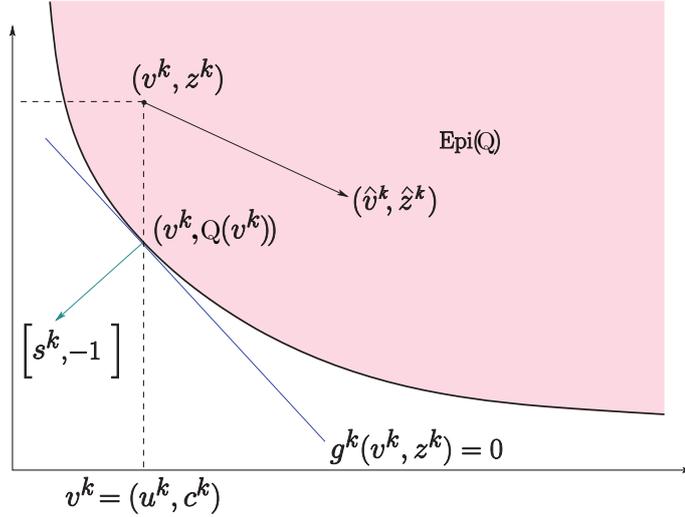


Figura 4.5: Passo sério: $(v^{k+1}, z^{k+1}) = (\hat{v}^k, \hat{z}^k)$ (Fonte: [8]).

Step k.3.b: (Passo nulo) Faça $i = i + 1$. Escolha $r_k \in [\eta_k, \beta_k]$, onde $\eta_k = \min\{\eta, \sigma(g(x))\}$ e $\beta_k = \min\{\beta, \sigma(g(x))\}$. Calcule um novo ponto no $\text{int}(\text{epi}(Q))$ realizando o passo DSG a partir de v^k :

$$\tilde{u}^{k,i} = u^k - r_k A(g(x^k));$$

$$\tilde{c}^{k,i} = c^k - (1 + \alpha_k) r_k \sigma(g(x^k));$$

$$\tilde{v}^{k,i} = (\tilde{u}^{k,i}, \tilde{c}^{k,i}).$$

Encontre $\tilde{x}^{k,i} \in X(\tilde{v}^{k,i})$. Se $g(\tilde{x}^{k,i}) = 0$, pare. Caso contrário, calcule $Q(\tilde{v}^{k,i})$ e tome $\tilde{z}^{k,i}$ tal que $Q(\tilde{v}^{k,i}) < \tilde{z}^{k,i} < Q(v^k)$. Seja $(v^k, z^k) = (\tilde{v}^{k,i}, \tilde{z}^{k,i})$; $x^k = \tilde{x}^{k,i}$, e vá para o passo

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados uma série de experimentos numéricos para verificação do comportamento do algoritmo IED aplicado em problemas de programação em dois níveis. Para isso, considere a seguinte função Lagrangiana aumentada

$$L(x, u) = f(x) + c\|g(x)\| + \langle u, g(x) \rangle, \quad (5.1)$$

onde $\sigma(\cdot) = \|\cdot\|_2$ e $A = I$ é a matriz identidade.

As restrições de desigualdades $g(x) \leq 0$ foram substituídas pela restrição equivalente de igualdade não diferenciável $\max\{g(x), 0\} = 0$. Desta forma, todos os problemas com restrições de desigualdades são transformados em problemas de otimização com restrições de igualdades.

Os problemas apresentados neste capítulo foram obtidos da literatura cujos dados iniciais foram mantidos quando da aplicação do IED para resolvê-los. Outro ponto a destacar é que procuramos resolver problemas de dois níveis de naturezas diversas e assim resolvemos problemas lineares, não lineares e quadráticos.

Em todos os problemas apresentados neste capítulo foi utilizado $u_i = 1$ para $i = 1, \dots, m$, de modo que tivéssemos a Lagrangiana completa. Além disso, foi feita uma escolha aleatória $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, q$ em todos os problemas, porém os resultados obtidos não foram satisfatórios como pode-se ver no Apêndice A.

Por isso, uma segunda escolha foi feita com base na ideia utilizada pelo algoritmo *Branch and Bound*, onde o ponto inicial satisfaz as restrições do problema reformulado sem as restrições de complementariedade. Portanto, o ponto inicial (x, y) foi obtido da literatura e, assim, determina-se λ de modo a satisfazer as restrições do problema reformulado sem as restrições de complementariedade.

Considere como legenda as seguintes nomenclaturas:

- F^* = valor ótimo do líder.
- f^* = valor ótimo do seguidor.

Problema 1 [18]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= x - 4y \\
\text{restrito à:} \quad & -x \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= y \\
\text{restrito à:} \quad & -x - y + 3 \leq 0, \\
& -2x + y \leq 0, \\
& 2x + y - 12 \leq 0, \\
& 3x - 2y - 4 \leq 0, \\
& -y \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x,y,\lambda) &= y + \lambda_1(-x - y + 3) + \lambda_2(-2x + y) \\
&+ \lambda_3(2x + y - 12) + \lambda_4(3x - 2y - 4) + \lambda_5(-y).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5. \tag{5.4}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= x - 4y \\
 \text{restrito à:} \quad & 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\
 & \lambda_1(-x - y + 3) = 0, \\
 & \lambda_2(-2x + y) = 0, \\
 & \lambda_3(2x + y - 12) = 0, \\
 & \lambda_4(3x - 2y - 4) = 0, \\
 & \lambda_5(-y) = 0, \\
 & \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 5, \\
 & -x - y + 3 \leq 0, \\
 & -2x + y \leq 0, \\
 & 2x + y - 12 \leq 0, \\
 & 3x - 2y - 4 \leq 0, \\
 & -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (3, 6, 0, 0, 0, 0.5, 0)$ [35].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (4, 4)$, $F^* = -12$ e $f^* = 4$ [18].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (3.7498, 3.6246) | -10.7488 | 3.6246 | 5 | 1 | 1375 |
| (4.0000, 4.0000) | -12.0000 | 4.0000 | 10 | 4 | 2486 |
| (3.9998, 3.9998) | -11.9992 | 3.9998 | 25 | 2 | 1323 |
| (4.0000, 4.0000) | -11.9999 | 4.0000 | 50 | 1 | 1016 |
| (4.0000, 3.9999) | -11.9998 | 3.9999 | 75 | 1 | 1083 |
| (3.9996, 3.9993) | -11.9978 | 3.9993 | 100 | 3 | 1292 |
| (3.9999, 3.9998) | -11.9995 | 3.9998 | 500 | 1 | 832 |
| (4.0000, 4.0000) | -12.0000 | 4.0000 | 1000 | 1 | 1105 |
| (4.0000, 4.0000) | -12.0000 | 4.0000 | 10000 | 0 | 1013 |

Tabela 5.1: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 2 [5]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= -y \\
\text{restrito à: } \min_y f(x,y) &= y \\
\text{restrito à: } & -x - 2y + 10 \leq 0, \\
& x - 2y - 6 \leq 0, \\
& 2x - y - 21 \leq 0, \\
& x + 2y - 38 \leq 0, \\
& -x + 2y - 18 \leq 0, \\
& -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x, y, \lambda) = & y + \lambda_1(-x - 2y + 10) + \lambda_2(x - 2y - 6) + \lambda_3(2x - y - 21) + \\
& \lambda_4(x + 2y - 38) + \lambda_5(-x + 2y - 18) + \lambda_6(-x) + \lambda_7(-y).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 - \lambda_7. \tag{5.8}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= -y \\
 \text{restrito à:} & \quad 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 - \lambda_7 = 0, \\
 & \quad \lambda_1(-x - 2y + 10) = 0, \\
 & \quad \lambda_2(x - 2y - 6) = 0, \\
 & \quad \lambda_3(2x - y - 21) = 0, \\
 & \quad \lambda_4(x + 2y - 38) = 0, \\
 & \quad \lambda_5(-x + 2y - 18) = 0, \\
 & \quad \lambda_6(-x) = 0, \\
 & \quad \lambda_7(-y) = 0, \\
 & \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7, \\
 & \quad -x - 2y + 10 \leq 0, \\
 & \quad x - 2y - 6 \leq 0, \\
 & \quad 2x - y - 21 \leq 0, \\
 & \quad x + 2y - 38 \leq 0, \\
 & \quad -x + 2y - 18 \leq 0, \\
 & \quad -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (10, 14, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ [5].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (16, 11)$, $F^* = -11$ e $f^* = 11$ [5].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (15.9526, 10.9052) | -10.9052 | 10.9052 | 5 | 2 | 2462 |
| (16.0000, 11.0000) | -11.0000 | 11.0000 | 10 | 1 | 2207 |
| (15.9855, 10.9710) | -10.9710 | 10.9710 | 25 | 4 | 3824 |
| (15.9169, 10.8338) | -10.8338 | 10.8338 | 50 | 1 | 2696 |
| (16.0000, 11.0000) | -11.0000 | 11.0000 | 75 | 5 | 5464 |
| (15.9998, 10.9996) | -10.9996 | 10.9996 | 100 | 2 | 3229 |
| (12.0000, 3.0000) | -3.0000 | 3.0000 | 500 | 1 | 3276 |
| (12.0001, 3.0001) | -3.0001 | 3.0001 | 1000 | 2 | 3333 |
| (13.4635, 5.9270) | -5.9270 | 5.9270 | 10000 | 1 | 3149 |

Tabela 5.2: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 3 [[36], pág 242]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x, y) &= -2x_1 + x_2 + 0.5y_1 \\
\text{restrito à: } & x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \\
& -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \\
\min_y f(x, y) &= -4y_1 + y_2 \tag{5.10} \\
\text{restrito à: } & -2x_1 + y_1 - y_2 + 2.5 \leq 0, \\
& x_1 - 3x_2 + y_2 - 2 \leq 0, \\
& -y_1 \leq 0, \quad -y_2 \leq 0.
\end{aligned}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x, y, \lambda) &= -4y_1 + y_2 + \lambda_1(-2x_1 + y_1 - y_2 + 2.5) + \\
& \lambda_2(x_1 - 3x_2 + y_2 - 2) + \lambda_3(-y_1) + \lambda_4(-y_2). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

O gradiente é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla_{y_1} L_f(x, y, \lambda) &= -4 + \lambda_1 - \lambda_3, \\
\nabla_{y_2} L_f(x, y, \lambda) &= 1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= -2x_1 + x_2 + 0.5y_1 \\
 \text{restrito à:} & \quad -4 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\
 & \quad 1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0, \\
 & \quad \lambda_1(-2x_1 + y_1 - y_2 + 2.5) = 0, \\
 & \quad \lambda_2(x_1 - 3x_2 + y_2 - 2) = 0, \\
 & \quad \lambda_3(-y_1) = 0, \\
 & \quad \lambda_4(-y_2) = 0, \\
 & \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\
 & \quad x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \\
 & \quad -2x_1 + y_1 - y_2 + 2.5 \leq 0, \\
 & \quad x_1 - 3x_2 + y_2 - 2 \leq 0, \\
 & \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad -y_1 \leq 0, \quad -y_2 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (2, 0, 0, 0, 4, 3, 0, 0, 0)$ [36].

Solução ótima $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (2, 0, 1.5, 0)$, $F^* = -3.25$ e $f^* = -6$ [36].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|----------------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (2.0000, 0.0000, 1.5000, 0.0000) | -3.2500 | -6.0000 | 5 | 3 | 2776 |
| (2.0000, 0.0000, 1.5000, 0.0000) | -3.2500 | -6.0000 | 10 | 1 | 1749 |
| (1.6650, 0.0021, 1.1714, 0.3414) | -2.7422 | -4.3442 | 25 | 1 | 2539 |
| (1.9606, 0.0381, 1.5749, 0.1537) | -3.0957 | -6.1458 | 50 | 3 | 3833 |
| (0.9756, 0.0014, 0.4798, 1.0287) | -1.7098 | -0.8905 | 75 | 1 | 2553 |
| (0.6897, 0.0152, 0.2354, 1.3560) | -1.2465 | 0.4144 | 100 | 1 | 1797 |
| (2.0000, 0.0000, 1.5000, 0.0000) | -3.2500 | -6.0000 | 500 | 1 | 1863 |
| (1.6504, 0.0303, 1.2414, 0.4406) | -2.6498 | -4.5249 | 1000 | 1 | 2184 |
| (0.4700, 0.0100, 0.0000, 1.5599) | -0.9301 | 1.5599 | 10000 | 1 | 1864 |

Tabela 5.3: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 4 [16]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= -x - 3y_1 + 2y_2 \\
\text{restrito à:} \quad & -x \leq 0, \\
& x - 8 \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= -y_1 \\
\text{restrito à:} \quad & -2x + y_1 + 4y_2 - 16 \leq 0, \\
& 8x + 3y_1 - 2y_2 - 48 \leq 0, \\
& -2x + y_1 - 3y_2 + 12 \leq 0, \\
& y_1 - 4 \leq 0, \\
& -y_1 \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x,y,\lambda) &= -y_1 + \lambda_1(-2x + y_1 + 4y_2 - 16) + \lambda_2(8x + 3y_1 - 2y_2 - 48) + \\
& \lambda_3(-2x + y_1 - 3y_2 + 12) + \lambda_4(y_1 - 4) + \lambda_5(-y_1).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

O gradiente é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla_{y_1} L_f(x,y,\lambda) &= -1 + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5, \\
\nabla_{y_2} L_f(x,y,\lambda) &= 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= -x - 3y_1 + 2y_2 \\
 \text{restrito à:} & \quad -1 + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\
 & \quad 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\
 & \quad \lambda_1(-2x + y_1 + 4y_2 - 16) = 0, \\
 & \quad \lambda_2(8x + 3y_1 - 2y_2 - 48) = 0, \\
 & \quad \lambda_3(-2x + y_1 - 3y_2 + 12) = 0, \\
 & \quad \lambda_4(y_1 - 4) = 0, \\
 & \quad \lambda_5(-y_1) = 0, \\
 & \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \\
 & \quad -2x + y_1 + 4y_2 - 16 \leq 0, \\
 & \quad 8x + 3y_1 - 2y_2 - 48 \leq 0, \\
 & \quad -2x + y_1 - 3y_2 + 12 \leq 0, \\
 & \quad x - 8 \leq 0, \\
 & \quad y_1 - 4 \leq 0, \\
 & \quad -x \leq 0, \quad -y_1 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (1, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 0)$ [16].

Solução ótima $(x_1^*, y_1^*, y_2^*) = (5, 4, 2)$, $F^* = -13$ e $f^* = -4$ [16].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 5 | ----- | ----- |
| (4.9994, 4.0000, 2.0007) | -12.9980 | -4.0000 | 10 | 3 | 5247 |
| (5.1810, 4.0000, 2.7238) | -11.7333 | -4.0000 | 25 | 8 | 8084 |
| ----- | ----- | ----- | 50 | ----- | ----- |
| (5.0143, 4.0000, 2.0571) | -12.9000 | -4.0000 | 75 | 4 | 3403 |
| (5.0150, 4.0000, 2.0619) | -12.8913 | -4.0000 | 100 | 2 | 3825 |
| (7.9995, 0.0010, 7.9995) | 7.9966 | -0.0010 | 500 | 1 | 2829 |
| (4.8728, 4.0000, 2.0848) | -12.7032 | -4.0000 | 1000 | 4 | 5272 |
| (0.0000, 0.0000, 4.0000) | 8.0000 | 0.0000 | 10000 | 1 | 3380 |

Tabela 5.4: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 5 [4]:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= (x-5)^2 + (2y+1)^2 \\
 \text{restrito à: } & -x \leq 0, \\
 \min_y f(x,y) &= (y-1)^2 - 1.5xy \\
 \text{restrito à: } & -3x + y + 3 \leq 0, \\
 & x - 0.5y - 4 \leq 0, \\
 & x + y - 7 \leq 0, \\
 & -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
 L_f(x,y,\lambda) = & (y-1)^2 - 1.5xy + \lambda_1(-3x+y+3) + \lambda_2(x-0.5y-4) + \\
 & \lambda_3(x+y-7) + \lambda_4(-y).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 2(y-1) - 1.5x + \lambda_1 - 0.5\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4. \tag{5.20}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= (x-5)^2 + (2y+1)^2 \\
 \text{restrito à:} \quad & 2(y-1) - 1.5x + \lambda_1 - 0.5\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\
 & \lambda_1(-3x+y+3) = 0, \\
 & \lambda_2(x-0.5y-4) = 0, \\
 & \lambda_3(x+y-7) = 0, \\
 & \lambda_4(-y) = 0, \\
 & \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 4, \\
 & -3x + y + 3 \leq 0, \\
 & x - 0.5y - 4 \leq 0, \\
 & x + y - 7 \leq 0, \\
 & -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (4, 0, 8, 0, 0, 0)$ [4].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (1, 0)$, $F^* = 17$ e $f^* = 1$ [4].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (1.0055, 0.0166) | 17.0232 | 0.9421 | 5 | 2 | 1013 |
| (1.0059, 0.0176) | 17.0247 | 0.9387 | 10 | 2 | 947 |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 25 | 1 | 752 |
| (1.0020, 0.0059) | 17.0080 | 0.9795 | 50 | 2 | 863 |
| (1.0004, 0.0011) | 17.0015 | 0.9961 | 75 | 2 | 863 |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 100 | 2 | 809 |
| (1.0023, 0.0068) | 17.0092 | 0.9764 | 500 | 1 | 808 |
| (1.0023, 0.0070) | 17.0095 | 0.9757 | 1000 | 2 | 900 |
| (1.0011, 0.0033) | 17.0045 | 0.9884 | 10000 | 2 | 918 |

Tabela 5.5: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 6 [35]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= (10-x)^3 + (10-y)^3 \\
\text{restrito à:} \quad & -x+y \leq 0, \\
& x-15 \leq 0, \\
& -x \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= (x+2y-15)^4 \\
\text{restrito à:} \quad & x+y-20 \leq 0, \\
& y-20 \leq 0, \\
& -y \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A função Lagrangiana

$$L_f(x,y,\lambda) = (x+2y-15)^4 + \lambda_1(x+y-20) + \lambda_2(y-20) + \lambda_3(-y). \tag{5.23}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 8(x+2y-15)^3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3. \tag{5.24}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
\min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= (10-x)^3 + (10-y)^3 \\
\text{restrito à:} \quad & 8(x+2y-15)^3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\
& \lambda_1(x+y-20) = 0, \\
& \lambda_2(y-20) = 0, \\
& \lambda_3(-y) = 0, \\
& \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3, \\
& -x+y \leq 0, \\
& x-15 \leq 0, \\
& x+y-20 \leq 0, \\
& y-20 \leq 0, \\
& -x \leq 0, \quad -y \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Ponto inicial: $(x,y,\lambda) = (10,10,0,0,27000)$ [35].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (6.08194, 4.45902)$, $F = 230.2686$ e a $f = 0$ [19].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (6.0831, 4.4606) | 230.0725 | 0.0000 | 5 | 11 | 4549 |
| (6.0819, 4.4612) | 230.0739 | 0.0000 | 10 | 11 | 4518 |
| (6.0858, 4.4594) | 230.0604 | 0.0000 | 25 | 10 | 3697 |
| (6.0853, 4.4597) | 230.0507 | 0.0000 | 50 | 9 | 3914 |
| (6.0830, 4.4605) | 230.0861 | 0.0000 | 75 | 9 | 4109 |
| (6.0827, 4.4605) | 230.1035 | 0.0000 | 100 | 9 | 3672 |
| (6.0799, 4.4620) | 230.0883 | 0.0000 | 500 | 7 | 2995 |
| (6.0831, 4.4606) | 230.0695 | 0.0000 | 1000 | 6 | 2586 |
| (6.0832, 4.4608) | 230.0418 | 0.0000 | 10000 | 3 | 2072 |

Tabela 5.6: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 7 [16]:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\
 \text{restrito à: } & x-8 \leq 0, \\
 & -x \leq 0, \\
 \min_y f(x,y) &= (y-5)^2 \\
 \text{restrito à: } & -2x + y - 1 \leq 0, \\
 & x - 2y + 2 \leq 0, \\
 & x + 2y - 14 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

A função Lagrangiana

$$L_f(x, y, \lambda) = (y-5)^2 + \lambda_1(-2x + y - 1) + \lambda_2(x - 2y + 2) + \lambda_3(x + 2y - 14). \tag{5.27}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla L_f(x, y, \lambda) = 2(y-5) + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3. \tag{5.28}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\
 \text{restrito à:} \quad & 2(y-5) + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\
 & \lambda_1(-2x+y-1) = 0, \\
 & \lambda_2(x-2y+2) = 0, \\
 & \lambda_3(x+2y-14) = 0, \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
 & -2x + y - 1 \leq 0, \\
 & x - 2y + 2 \leq 0, \\
 & x + 2y - 14 \leq 0, \\
 & x - 8 \leq 0, \\
 & -x \leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (3, 1, 8, 0, 0, 0)$ [16].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (1, 3)$, $F^* = 5$ e $f^* = 4$ [16].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|--------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (0.9989, 2.9977) | 5.0000 | 4.0091 | 5 | 0 | 938 |
| (1.0011, 3.0021) | 5.0000 | 3.9915 | 10 | 0 | 785 |
| (0.9929, 2.9859) | 5.0002 | 4.0567 | 25 | 0 | 941 |
| (1.0000, 3.0000) | 5.0000 | 4.0000 | 50 | 0 | 1148 |
| (1.0000, 3.0000) | 5.0000 | 4.0000 | 75 | 0 | 961 |
| (1.0000, 3.0000) | 5.0000 | 4.0000 | 100 | 0 | 1464 |
| (1.0000, 3.0000) | 5.0000 | 4.0000 | 500 | 0 | 1234 |
| (0.3212, 1.6424) | 7.3040 | 11.2737 | 1000 | 0 | 569 |
| (0.2119, 1.4237) | 8.1058 | 12.7897 | 10000 | 1 | 638 |

Tabela 5.7: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 8 [35]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= x^2 + (y-10)^2 \\
\text{restrito à: } & x + 2y - 6 \leq 0, \\
& -x \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= x^3 - x^2 + x + 2y^3 - 2y \quad (5.30) \\
\text{restrito à: } & -x + 2y - 3 \leq 0, \\
& y - 10 \leq 0, \\
& -y \leq 0.
\end{aligned}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x,y,\lambda) = & x^3 - x^2 + x + 2y^3 - 2y + \lambda_1(-x + 2y - 3) + \\
& \lambda_2(y - 10) + \lambda_3(-y). \quad (5.31)
\end{aligned}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x,y,\lambda) = 6y^2 - 2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3. \quad (5.32)$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
\min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= x^2 + (y-10)^2 \\
\text{restrito à: } & 6y^2 - 2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\
& \lambda_1(-x + 2y - 3) = 0, \\
& \lambda_2(y - 10) = 0, \\
& \lambda_3(-y) = 0, \quad (5.33) \\
& \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
& x + 2y - 6 \leq 0, \\
& -x + 2y - 3 \leq 0, \\
& y - 10 \leq 0, \\
& x \geq 0, \quad -y \leq 0.
\end{aligned}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (1.5, 2.25, 0, 0, 28.375)$ [35].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (0, 0.5774)$, $F^* = 88.7863$ e $f^* = -0.7698$ [19].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (0.0160, 0.5774) | 88.7866 | -0.7541 | 5 | 1 | 870 |
| (0.0000, 0.5774) | 88.7863 | -0.7698 | 10 | 2 | 714 |
| (0.0008, 0.5774) | 88.7863 | -0.7690 | 25 | 1 | 658 |
| (0.0144, 0.5774) | 88.7865 | -0.7556 | 50 | 3 | 929 |
| (0.0514, 0.5774) | 88.7890 | -0.7209 | 75 | 1 | 670 |
| (0.0011, 0.5774) | 88.7863 | -0.7687 | 100 | 1 | 848 |
| ----- | ----- | ----- | 500 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 1000 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 10000 | ----- | ----- |

Tabela 5.8: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 9 [35]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= (x - y_2)^4 + (y_1 - 1)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
\text{restrito à:} & \quad -x \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= 2x + e^{y_1} + y_1^2 + 4y_1 + 2y_2^2 - 6y_2 \\
\text{restrito à:} & \quad 6x + y_1^2 + e^{y_2} - 15 \leq 0, \\
& \quad 5x + y_1^4 - y_2 - 25 \leq 0, \\
& \quad y_1 - 4 \leq 0, \\
& \quad y_2 - 2 \leq 0, \\
& \quad -y_1 \leq 0, \quad -y_2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

A função Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L_f(x,y,\lambda) &= 2x + e^{y_1} + y_1^2 + 4y_1 + 2y_2^2 - 6y_2 + \lambda_1(6x + y_1^2 + e^{y_2} - 15) + \\
& \quad \lambda_2(5x + y_1^4 - y_2 - 25) + \lambda_4(y_1 - 4) + \\
& \quad \lambda_4(y_2 - 2) + \lambda_5(-y_1) + \lambda_6(-y_2).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

O gradiente é dado por

$$\begin{aligned}\nabla_{y_1} L_f(x, y, \lambda) &= e^{y_1} + 2y_1 + 4 + 2y_1 \lambda_1 + 4y_1^3 \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5, \\ \nabla_{y_2} L_f(x, y, \lambda) &= y_2 + 2y_1 - 6 + e^{y_2} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_6.\end{aligned}\tag{5.36}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}\min_{x, y, \lambda} F(x, y) &= (x - y_2)^4 + (y_1 - 1)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \text{restrito à:} \quad & e^{y_1} + 2y_1 + 4 + 2y_1 \lambda_1 + 4y_1^3 \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 = 0, \\ & y_2 + 2y_1 - 6 + e^{y_2} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_6 = 0, \\ & \lambda_1(6x + y_1^2 + e^{y_2} - 15) = 0, \\ & \lambda_2(5x + y_1^4 - y_2 - 25) = 0, \\ & \lambda_3(y_1 - 4) = 0, \\ & \lambda_4(y_2 - 2) = 0, \\ & \lambda_5(-y_1) = 0, \\ & \lambda_6(-y_2) = 0, \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6, \\ & 6x + y_1^2 + e^{y_2} - 15 \leq 0, \\ & 5x + y_1^4 - y_2 - 20 \leq 0, \\ & y_1 - 4 \leq 0, \\ & y_2 - 2 \leq 0, \\ & -x \leq 0, \quad -y_1 \leq 0, \quad -y_2 \leq 0.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (1, 1, 1, 1.1036, 0, 0, 0, 10.9254, 0)$ [35].

Solução ótima $(x^*, y_1^*, y_2^*) = (1.9405, 0, 1.211)$, $F^* = 2.7497$ e $f^* = 0.5481$ [19].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|--------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (1.9405, 0.0000, 1.2111) | 2.7498 | 0.5478 | 5 | 2 | 3260 |
| (1.9407, 0.0000, 1.2107) | 2.7498 | 0.5487 | 10 | 2 | 3646 |
| (1.9401, 0.0000, 1.2117) | 2.7498 | 0.5465 | 25 | 3 | 3677 |
| (1.9876, 0.0000, 1.1231) | 2.8198 | 0.7592 | 50 | 2 | 3109 |
| (1.9411, 0.0000, 1.2100) | 2.7498 | 0.5503 | 75 | 4 | 5924 |
| (1.9922, 0.0000, 1.1140) | 2.8359 | 0.7825 | 100 | 2 | 5556 |
| (2.1059, 0.0000, 0.8607) | 4.1449 | 1.5292 | 500 | 2 | 1984 |
| (2.1085, 0.0000, 0.8540) | 4.2060 | 1.5516 | 1000 | 2 | 2066 |
| (2.1182, 0.0000, 0.8290) | 4.4490 | 1.6367 | 10000 | 2 | 2709 |

Tabela 5.9: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 10 [35]:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y} F(x,y) &= x^2 + (y - 10)^2 \\
\text{restrito à:} & \quad -x + y \leq 0, \\
& \quad -x \leq 0, \\
& \quad x - 15 \leq 0, \\
\min_y f(x,y) &= (x + 2y - 30)^2 \\
\text{restrito à:} & \quad x + y - 20 \leq 0, \\
& \quad y - 20 \leq 0, \\
& \quad -y \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

A função Lagrangiana

$$L_f(x, y, \lambda) = (x + 2y - 30)^2 + \lambda_1(x + y - 20) + \lambda_2(-y) + \lambda_3(y - 20). \tag{5.39}$$

O gradiente é dado por

$$\nabla_y L_f(x, y, \lambda) = 4(x + 2y - 30) + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \tag{5.40}$$

O problema reformulado

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y,\lambda} F(x,y) &= x^2 + (y - 10)^2 \\
 \text{restrito à:} \quad & 4(x + 2y - 30) + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\
 & \lambda_1(x + y - 20) = 0, \\
 & \lambda_2(-y) = 0, \\
 & \lambda_3(y - 20) = 0, \\
 & -x + y \leq 0, \\
 & x + y - 20 \leq 0, \\
 & y - 10 \leq 0, \\
 & x - 15 \leq 0, \\
 & -x \leq 0, \quad -y \leq 0, \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ponto inicial: $(x, y, \lambda) = (5, 5, 60, 0, 0)$ [35].

Solução ótima $(x^*, y^*) = (10, 10)$, $F^* = 100$ e $f^* = 0$ [19].

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (10.0000, 9.6495) | 100.1229 | 0.4914 | 5 | 1 | 1198 |
| (10.0000, 9.9837) | 100.0003 | 0.0011 | 10 | 4 | 2198 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 25 | 19 | 4900 |
| (10.0000, 9.9966) | 100.0000 | 0.0000 | 50 | 1 | 942 |
| (10.0000, 9.9944) | 100.0000 | 0.0001 | 75 | 1 | 1076 |
| (10.0000, 9.9944) | 100.0000 | 0.0001 | 100 | 1 | 840 |
| (10.0000, 10.0000) | 99.9994 | 0.0000 | 500 | 1 | 814 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 1000 | 1 | 1286 |
| (10.0000, 5.8757) | 117.0101 | 68.0403 | 10000 | 0 | 605 |

Tabela 5.10: Resultados encontrados pelo IED.

Na tabela 5.11 são mostrados os parâmetros c_0 que proporcionou ao algoritmo IED a obter os melhores resultados.

| Problemas | c_0 | Iteração do IED | Iteração do fmin |
|-------------|-------|-----------------|------------------|
| Problema 1 | 10000 | 0 | 1013 |
| Problema 2 | 10 | 1 | 2207 |
| Problema 3 | 10 | 1 | 1749 |
| Problema 4 | 10 | 3 | 5247 |
| Problema 5 | 25 | 1 | 752 |
| Problema 6 | 100 | 9 | 3672 |
| Problema 7 | 75 | 0 | 961 |
| Problema 8 | 10 | 0 | 956 |
| Problema 9 | 5 | 2 | 3260 |
| Problema 10 | 1000 | 1 | 1286 |

Tabela 5.11: Melhores resultados obtidos pelo IED.

A partir dos resultados apresentados neste capítulo, observa-se que $c_0 = 10$ proporcionou melhor comportamento do algoritmo IED, uma vez que os resultados obtidos pelo algoritmo condizem com os resultados encontrados na literatura. Apesar de $c_0 = 10$ não ter sido a melhor escolha em todos os problemas, as soluções encontradas pelo algoritmo IED foram muito próximos aos encontrados na literatura.

Nos resultados apresentados nesse capítulo, observa-se que o algoritmo conseguiu convergir para resultados próximos aos encontrados na literatura para diferentes c_0 , porém em alguns casos o algoritmo IED convergiu para resultados diferentes dos obtidos da literatura.

Embora, o IED original tenha sido capaz de resolver muitos problemas com a função *fminsearch*, em alguns casos não obteve êxito e não encontrou as soluções desejadas como se pode observar através de algumas experiências numéricas apresentadas nesse capítulo. Por exemplo, no **problema 4** a rotina *fminsearch* não conseguiu minimizar a função Lagrangiana com $c_0 = 5$ e $c_0 = 50$. Além disso, nos problemas em que $c_0 = 1$ foi utilizado, a rotina *fminsearch* não obteve resultados e, portanto, o algoritmo IED parou.

Uma outra questão sobre a minimização da função Lagrangiana é que a rotina *fminsearch* precisou de muitas iterações para tal minimização, como pôde-se observar nos resultados apresentados nesse capítulo. Embora, o problema de minimizar a função Lagrangiana seja um problema irrestrito, tal problema ainda é muito difícil de resolver.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se o comportamento do método IED aplicado em problemas de programação em dois níveis. Para isso, o problema do seguidor é substituído pela condição necessária de otimalidade de KKT e, assim, transformado em problemas de otimização clássica com restrições não lineares. Esse problema reformulado é propício para aplicação do algoritmo IED, uma vez que esse método foi desenvolvido para resolver problemas de otimização não diferenciáveis e não convexos.

O algoritmo IED utiliza a função *fminsearch* para minimização da função Lagrangiana. Na maioria dos casos a rotina *fminsearch* conseguiu minimizar a função Lagrangiana e, conseqüentemente, o algoritmo IED conseguiu obter valor ótimo para F nos problemas do Capítulo 5.

De acordo com os experimentos numéricos, pôde-se perceber que os parâmetros c_0 influenciaram na obtenção de valores ótimos pelo algoritmo IED. Em todos os problemas $c_0 = 10$ possibilitou ao algoritmo IED encontrar a solução ótima. Para alguns valores de c_0 , a rotina *fminsearch* não conseguiu minimizar a função Lagrangiana e, portanto, o algoritmo IED não conseguiu obter resultados.

Com o objetivo de melhorar o desempenho do algoritmo em relação à minimização da função Lagrangiana, serão apresentadas as seguintes sugestões de propostas para trabalhos futuros:

- Desenvolver algoritmos eficientes para minimizar a função Lagrangiana;
- Estudar a influência do parâmetro c no processo da minimização da função Lagrangiana;
- Estudar a influência do parâmetro λ do problema reformulado como dado inicial do algoritmo IED.
- Repetir esses processos com outras normas e outras matrizes A .

REFERÊNCIAS

- [1] STACKELBERG, H. V., *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press: Oxford, 1952.
- [2] CANDLER, W., NORTON, R., “Multilevel programming”, *Development Research*, v. 1, 1977.
- [3] BRACKEN, J., MCGILL, J. T., “Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints”, *Operations Reserch*, v. 21, n. 1, pp. 37–44, 1973.
- [4] BARD, J. F., “Convex two-level optimizition”, *Mathematical Programming*, v. 40, pp. 15–27, 1988.
- [5] BIALAS, W. F., KARWAN, M. H., “Two-level linear Programming.” *Management Science*, v. 30, pp. 1004–1020, 1984.
- [6] SAVARD, G., GAUVIN, J., “The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem”, *Operations Research Letters*, v. 15, pp. 265–272, 1994.
- [7] SHIMIZU, K., AIYOSHI, E., “A new computacional method for Stackelberg and mim-max problems by use of a penalty method”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, pp. 460–466, 1981.
- [8] BURACHIK, R. S., FREIRE, W. P., KAYA, C. Y., “Interior Epigraph Directions Method for Nonsmooth and Nonconvex Optimization via Generalized Augmented Lagrangian Duality”, *Journal of Global Optimization*, v. 60, pp. 501–529, 11 2014.
- [9] FREIRE, W. P., *Um Algoritmo de Direções Viáveis para Otimização Convexa Não Diferenciável.*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- [10] BURACHIK, R. S., KAYA, C. Y., “A Deflected Subgradient Method Using a General Augmented Lagrangian Dualitywith Implications on Penalty Methods”, In: BURACHIK, R. S., YAO, J.-C. (eds), *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control: In Honor of Boris S. Mordukhovich*, pp. 109–132, Springer New York: New York, NY, 2010.

- [11] LIMA, E. L., *Análise Real*. v. 2. 6, IMPA: Rio de Janeiro, 2013.
- [12] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., SHETTY, C. M., *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. 3rd ed. John Wiley and Sons, Inc, Hoboken: New Jersey, 2006.
- [13] IZMAILOV, A., SOLODOV, M., *Otimização*. 2nd ed., v. 1. IMPA: Rio de Janeiro, 2009.
- [14] LUENBERGER, D. G., YE, Y., *Linear and Nonlinear Programming*. 4th ed., v. 228. International Series in Operations Research & Management Science, 2016.
- [15] FRIEDLANDER, A., *Elementos de Programação Não-Linear*. Coleção manuais, Editora da UNICAMP, 1994.
- [16] SAHIN, K. H., CIRIC, A. R., “A dual temperature simulated annealing approach for solving bilevel programming problems”, *Computers and Chemical Engineering*, v. 23, pp. 11–25, 1998.
- [17] MERSHA, A. G., DEMPE, S., “Linear bilevel programming with upper level constraints depending on the lower level”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 180, pp. 247–254, 2006.
- [18] BARD, J. F., *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Springer: Texas, 1998.
- [19] SOBRAL, F. N. C., “Programação em dois níveis: reformulação utilizando as condições KKT”, 2008.
- [20] SHIMIZU, K., ISHIZUKA, Y., BARD, J. F., *Nondifferentiable and two-level mathematical programming*. Springer: New York, 1997.
- [21] WHITE, D. J., ANANDALINGAM, G., “A Penalty Function for Solving Bi-Level Linear Programs”, *Journal of Global Optimization*, v. 3, pp. 128–149, 1993.
- [22] BARD, J. F., “A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 11, pp. 281–292, 1990.

- [23] BURACHIK, R. S., KAYA, C. Y., “A deflected subgradient algorithm using a general augmented Lagrangian duality with implications on penalty methods.” *Springer Optimization and Its Applications*, pp. 528–549, 2010.
- [24] BURACHIK, R. S., KAYA, C. Y., “An update rule and a convergence result for a penalty function method.” *J. of Industrial and Management Optimization*, v. 3(2), pp. 381–398, 2007.
- [25] BURACHIK, R. S., GAISMOV, R. N., ISMAYILOVA, N. A., KAYA, C. Y., “On a modified subgradient algorithm for dual problems via sharp augmented lagrangian.” *J. Global Opt.*, v. 34(1), pp. 55–78, 2006.
- [26] BURACHIK, R. S., IUSEM, A. N., MELO, J. G., “A primal dual modified subgradient algorithm with sharp lagrangian.” *J. Global Opt.*, v. 46(3), pp. 347–361, 2010.
- [27] BURACHIK, R. S., IUSEM, A. N., MELO, J. G., “Duality and exact penazation for general augmented lagrangians.” *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 147(1), pp. 125–140, 2010.
- [28] BURACHIK, R. S., KAYA, C. Y., MAMMADOV, M., “An inexact modified subgradient algorithm for nonconvex optimization.” *Computacional Optimization and Applications*, v. 45(1), pp. 1–24, 2010.
- [29] GASIMOV, R. N., “Augmented lagrangian duality and nondifferentiable optimization methods in nonconvex programming.” *Journal Global Optimization.*, v. 24(2), pp. 187–203, 2002.
- [30] HERSKOVITS, J., “Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 99(1), pp. 121–146, 1998.
- [31] TANAKA, M., *Algoritmos de Direções Viáveis para Otimização Não Diferenciável.*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- [32] FREIRE, W. P., LEMONGE, A. C. C., FONSECA, T. L., FRANCO, H. J. R., “A Hybrid Epigraph Directions Method for Nonsmooth and Nonconvex

Constrained Optimization via Generalized Augmented Lagrangian Duality and a Genetic Algorithm”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2018, pp. 21, 2018.

- [33] HERSKOVITS, J., FREIRE, W. P., TANAKA, M., CANELA, A., “A feasible directions method for nonsmooth convex optimization”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 44(3), pp. 363–377, 2011.
- [34] FREIRE, W. P., BARRA, L. P., FERNANDES, C. F., FRANCO, H. J. R., “An improvement on the IED method for solving constrained nonsmooth and nonconvex optimization problems”, *International Conference on Engineering Optimization*, v. 47, 2016.
- [35] COLSON, B., “BIPA (Bilevel programming with approximation methods): Software guide and test problems”, *Les Cahiers du GERAD*, v. 37, 2002.
- [36] MIGDALAS, A., PARDALOS, P. M., *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1998.

APÊNDICE A

Os resultados apresentados neste apêndice foram obtidos a partir da aplicação do algoritmo IED nos problemas do Capítulo 5 e foram utilizados $\lambda = 0$ e $u = 1$ como dados iniciais.

Problema 1.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (3.9903, 3.9855) | -11.9517 | 3.9855 | 5 | 3 | 4272 |
| ----- | ----- | ----- | 10 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 25 | ----- | ----- |
| (3.1964, 2.7946) | -7.9821 | 2.7946 | 50 | 0 | 1267 |
| (3.9980, 3.9971) | -11.9902 | 3.9971 | 75 | 1 | 2571 |
| (4.0000, 4.0000) | -12.0000 | 4.0000 | 100 | 1 | 1827 |
| (2.0000, 1.0000) | -2.0000 | 1.0000 | 500 | 1 | 3165 |
| (1.7559, 1.2441) | -3.2207 | 1.2441 | 1000 | 0 | 1858 |
| (2.0000, 1.0000) | -2.0000 | 1.0000 | 10000 | 1 | 2514 |

Tabela A.1: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 2.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 5 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 10 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 25 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 50 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 75 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 100 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 500 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 1000 | ----- | ----- |
| (0.0001, 5.0000) | -5.0000 | 5.0000 | 10000 | 1 | 4211 |

Tabela A.2: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 3.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|----------------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (0.0992, 0.1336, 0.0000, 2.3017) | -0.0647 | 2.3017 | 5 | 1 | 3464 |
| (0.4988, 0.0004, 0.000, 1.5025) | -0.9971 | 1.5025 | 10 | 2 | 3721 |
| (2.0000, 0.0000, 1.5000, 0.0000) | -3.2500 | -6.0000 | 25 | 1 | 2271 |
| (0.8970, 0.0035, 0.4076, 1.1135) | -1.5868 | -0.5169 | 50 | 1 | 2968 |
| (0.7556, 0.1361, 0.6640, 1.6528) | -1.0430 | -1.0033 | 75 | 1 | 2371 |
| (0.6842, 0.0698, 0.3937, 1.5254) | -1.1016 | -0.0494 | 100 | 0 | 1768 |
| (0.3757, 0.0739, 0.0973, 1.8458) | -0.6290 | 1.4566 | 500 | 0 | 2433 |
| (2.0000, 0.000, 1.5000, 0.000) | -3.2500 | -6.0000 | 1000 | 2 | 5385 |
| (0.1568, 0.1366, 0.0665, 2.2529) | -0.1438 | 1.9871 | 10000 | 1 | 2791 |

Tabela A.3: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 4.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 5 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 10 | ----- | ----- |
| (4.9658, 4.0000, 2.0228) | -12.9202 | -4.0000 | 25 | 3 | 3248 |
| ----- | ----- | ----- | 50 | ----- | ----- |
| (8.0000, 0.0001, 8.0000) | 7.9997 | -0.0001 | 75 | 2 | 2098 |
| ----- | ----- | ----- | 100 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 500 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 1000 | ----- | ----- |
| (0.0607, 0.1214, 4.0000) | 7.5751 | -0.1214 | 1000 | 1 | 2039 |

Tabela A.4: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 5.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 5 | 2 | 1363 |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 10 | 1 | 2075 |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 25 | 1 | 1131 |
| (1.1599, 0.4796) | 18.5849 | -0.5635 | 50 | 1 | 1145 |
| (1.5380, 1.6140) | 29.8614 | -3.3465 | 75 | 0 | 1181 |
| (1.7778, 2.3333) | 42.4938 | -4.4445 | 100 | 2 | 1401 |
| (1.9682, 2.4761) | 44.6214 | -5.1312 | 500 | 1 | 1202 |
| (1.3777, 1.1331) | 23.7888 | -2.3238 | 1000 | 1 | 1600 |
| (1.0000, 0.0000) | 17.0000 | 1.0000 | 10000 | 1 | 1520 |

Tabela A.5: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 6.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (6.0830, 4.4606) | 230.0704 | 0.0000 | 5 | 11 | 4019 |
| (6.0838, 4.4602) | 230.0741 | 0.0000 | 10 | 11 | 4416 |
| (6.0830, 4.4606) | 230.0761 | 0.0000 | 25 | 10 | 4635 |
| (6.0872, 4.4587) | 230.0610 | 0.0000 | 50 | 9 | 4144 |
| (6.0832, 4.4603) | 230.0958 | 0.0000 | 75 | 9 | 3826 |
| (6.0845, 4.4602) | 230.0428 | 0.0000 | 100 | 8 | 3663 |
| (6.0833, 4.4609) | 230.0395 | 0.0000 | 500 | 6 | 2912 |
| (6.0830, 4.4603) | 230.1023 | 0.0000 | 1000 | 6 | 3225 |
| (6.0837, 4.4604) | 230.0634 | 0.0000 | 10000 | 3 | 1352 |

Tabela A.6: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 7.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|--------|--------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (4.0486, 4.9757) | 9.9544 | 0.0006 | 5 | 1 | 1104 |
| (2.9999, 5.0000) | 9.0000 | 0.0000 | 10 | 0 | 826 |
| (3.0005, 5.0000) | 9.0000 | 0.0000 | 25 | 0 | 812 |
| (3.0001, 5.0000) | 9.0000 | 0.0000 | 50 | 0 | 809 |
| (3.0112, 5.0000) | 9.0001 | 0.0000 | 75 | 0 | 701 |
| (2.9990, 5.0000) | 9.0000 | 0.0000 | 100 | 0 | 791 |
| (2.9998, 5.0000) | 9.0000 | 0.0000 | 500 | 0 | 920 |
| (2.6911, 5.0000) | 9.0954 | 0.0000 | 1000 | 0 | 841 |
| (1.9990, 4.9979) | 9.9896 | 0.0000 | 10000 | 0 | 747 |

Tabela A.7: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 8.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (0.0000, 0.5774) | 88.7863 | -0.7698 | 5 | 1 | 445 |
| (0.0000, 0.5774) | 88.7863 | -0.7698 | 10 | 2 | 655 |
| ----- | ----- | ----- | 25 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 50 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 100 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 500 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 1000 | ----- | ----- |
| ----- | ----- | ----- | 10000 | ----- | ----- |

Tabela A.8: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 9.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|---------|---------|-------|--------------|---------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (1.2105, 0.0000, 1.5000) | 3.2570 | -1.0789 | 5 | 1 | 5637 |
| (1.7995, 0.0000, 1.4358) | 3.0790 | 0.1073 | 10 | 2 | 10271 |
| (2.3333, 0.0000, 0.0000) | 30.6420 | 5.6667 | 25 | 1 | 6828 |
| (2.3333, 0.000, 0.00000) | 30.6420 | 5.6667 | 50 | 1 | 6184 |
| (2.3333, 0.0000, 0.0000) | 30.6420 | 5.6667 | 75 | 1 | 7706 |
| (2.3333, 0.0000, 0.0000) | 30.6420 | 5.6667 | 500 | 1 | 10514 |
| (1.9869, 0.0000, 1.1244) | 2.8177 | 0.7559 | 1000 | 1 | 10569 |
| ----- | ----- | ----- | 10000 | ----- | ----- |

Tabela A.9: Resultados encontrados pelo IED.

Problema 10.

| Solução encontrada pelo IED | F^* | f^* | c_0 | Iteração IED | Iteração fmin |
|-----------------------------|----------|----------|-------|-----------------|------------------|
| ----- | ----- | ----- | 1 | ----- | ----- |
| (9.9999, 9.9999) | 99.9984 | 0.0000 | 5 | 1 | 678 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 10 | 13 | 2753 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 25 | 13 | 4135 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 50 | 1 | 1415 |
| (10.0000, 10.0000) | 100.0000 | 0.0000 | 75 | 2 | 1027 |
| (10.0000, 9.5059) | 100.2441 | 0.9764 | 100 | 1 | 829 |
| (9.9999, 9.9999) | 99.9986 | 0.0000 | 500 | 2 | 1202 |
| (10.0000, 9.9349) | 100.0042 | 0.0170 | 1000 | 1 | 722 |
| (10.0000, 0.6966) | 186.5541 | 346.2163 | 10000 | 0 | 765 |

Tabela A.10: Resultados encontrados pelo IED.