UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A influência do cotidiano nas questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio

Paulo Tadeu Gandra Campos

Juiz de Fora (MG)
Julho, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Paulo Tadeu Gandra Campos

A influência do cotidiano nas questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio

Orientador(a): Prof[a] Dr[a]: Chang Kuo Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Julho, 2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Campos, Paulo Tadeu Gandra.
A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio / Paulo Tadeu Gandra Campos. -- 2014.
94 p.

Orientadora: Chang Kuo Rodrigues
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2014.

1. Exame Nacional do Ensino Médio. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Engenharia Didática. 4. Função Matemática. I. Rodrigues, Chang Kuo, orient. II. Título.

Paulo Tadeu Gandra Campos

A influência do cotidiano nas questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

____

Prof(a). Dr(a). Chang Kuo Rodrigues.
Orientador(a)

____

Prof(a). Dr(a). Patrícia Nunes da Silva
Convidado(a) externo UFJF

____

Prof(a). Dr(a). Maria Cristina Araújo de Oliveira
Convidado(a) interno UFJF

Juiz de Fora, 11 de Julho de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de alcançar mais esta vitória.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora e professora Chang Kuo Rodrigues pela seriedade, paciência e dedicação dispensadas, o que tornou possível a realização deste trabalho.

À banca participante da qualificação e da defesa, composta pelas professoras Maria Cristina Araújo de Oliveira e Patrícia Nunes da Silva, muito obrigado pelas sugestões que tornaram o trabalho mais rico e coerente.

Agradeço a todos os professores do programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, em especial a Maria Cristina Araújo de Oliveira, Antônio Olímpio Júnior, Regina Kopke e Marco Aurélio Kistemann Júnior pelas proveitosas aulas durante o curso.

Aos colegas de mestrado, em especial a Cleuza Eunice Pereira Brumano pela amizade e companhia durante as cansativas viagens de Viçosa a Juiz de Fora.

À minha querida família pelo carinho, amizade e apoio durante esta árdua caminhada.

Aos amigos de Viçosa, Juiz de Fora, Governador Valadares e Teófilo Otoni pelo incentivo para conclusão desta etapa.

"Certa vez fui perguntado se era bom ou ruim ser professor.
Disse, sinceramente, que não sabia, pois ser professor não
se limitava às definições de ser bom ou ruim.
Ser professor era, acima de tudo, ser humano."

Quefren Weld

RESUMO

Este trabalho é o resultado da pesquisa sobre a possível contribuição do cotidiano em questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio. Nesta dissertação as reflexões foram direcionadas para o Ensino Básico, mais precisamente para o Ensino Médio, e a proposta é investigar se as questões de matemática contextualizadas com situações do cotidiano e/ou de outras áreas do conhecimento (questões de contexto cotidiano ou interdisciplinar) podem ser mais eficazes atingindo positivamente uma parcela maior de alunos com relação à aprendizagem dessa disciplina, além de avaliar se eles desenvolveriam mais ou alguma *sensibilidade numérica*. Buscando responder essas perguntas, as que nortearam nosso trabalho, pautamos a presente dissertação pela metodologia Engenharia Didática, com a qual confrontamos a resolução, por parte dos alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola particular de Viçosa-MG, de dois tipos de questões; o primeiro, retirado do antigo vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, classificado como questões de contexto matemático; e o segundo tipo, questões por nós adaptadas em um formato classificado como atividades de contexto cotidiano ou interdisciplinar. As duas resoluções foram norteadas segundo a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, a *sensibilidade numérica* (*numeracy*), de Ubiratan D'Ambrósio e a Matriz de Referência do ENEM. Estas questões aplicadas compõem o produto desta dissertação, com a qual esperamos acrescentar ao que tem sido produzido no país sobre o tema e, principalmente, aguçar novas pesquisas, a partir dos resultados que aqui obtemos.

Palavras-chave: Exame Nacional do Ensino Médio. Teoria Antropológica do Didático. Engenharia Didática. Função Matemática.

ABSTRACT

This work is the result of research on the possible contribution of the everyday issues in the function of the National High School Exam. In this dissertation reflections were targeted for schools, specifically for middle school and the proposal is to investigate whether the math questions contextualized with everyday situations and / or other areas of knowledge (everyday issues or interdisciplinary context) may be more effective positively reaching a larger share of students toward learning this discipline, and to evaluate if they would develop more or some numerical sensitivity. Seeking to answer these questions, which have guided our work, we base this thesis by the Engineering Teaching methodology with which we confront the resolution, by students of the third grade of high school to a private school in Viçosa - MG , two types of issues; the first, removed the old bone of Federal University of Juiz de Fora, classified as questions of mathematical context; and the second type, tailored questions for us, in a format classified as interdisciplinary context or everyday activities . The two resolutions were guided according to the Anthropological Theory of Didactics, Yves Chevallard, the numerical sensitivity (numeracy) of D'Ambrosio and Matrix Reference ENEM. These issues comprise the applied product of this dissertation, with which we hope to add to what has been produced in the country on the topic and especially whet new research, from the results we get here.

Keywords: National High School Exam. Anthropological Theory of Didactics. Didactic Engineering. Math Function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estamos em uma época de forte transição no cenário educacional do país. Positivamente ou não, o programa de conteúdos abordados no Ensino Médio da grande maioria das escolas brasileiras é norteado pelos conteúdos cobrados no vestibular. Porém, de 2009 até os dias atuais, muitas modificações estão ocorrendo com o tipo de exame que classifica os estudantes que pleiteiam vagas nas instituições de nível superior.

Nesse âmbito, estamos falando do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que, atualmente, serve de parâmetro para avaliar o ingresso no Ensino Superior de quase a totalidade de instituições públicas, federais e estaduais, além das particulares, do país e, além disso, apresenta inúmeras diferenças quanto ao antigo vestibular que, ao que tudo indica, estará fadado a um sistema de ingresso obsoleto.

Mesmo que não concordemos com o fato de uma prova, ao final dos três anos do Ensino Médio, ditar o que deve ou não ser estudado no referido período, não podemos negar que as diferenças apresentadas nos modelos de questões, por essa transição, têm causado evidentes mudanças nos livros didáticos, na fala dos professores e, consequentemente, no estudo dos estudantes.

Enquanto o modelo anterior, vestibular, apresentava, para determinadas universidades, um grande número de questões que podiam ser resolvidas por meio de aplicação direta de técnicas e conceitos matemáticos, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é constituído de questões nas quais, embora também exijam conhecimentos específicos matemáticos para sua resolução, predominam as situações do cotidiano.

Um exemplo que reforça tal afirmação é o da Universidade Federal de Juiz de Fora, na qual dividimos em quatro modalidades: “vestibular seriado: PISM I, II e III, no período de 2009 a 2013”, “antigo vestibular, nos anos de 2009 e 2010”, “vestibular à distância UFJF EAD, no período de 2009 a 2012” e o “vestibular de inverno UFJF GV, no ano de 2013”, em Governador Valadares-MG. Dentre as 171 questões encontradas nessas provas, 67 delas, aproximadamente 39%, apresentam contextos do cotidiano ou interdisciplinar e 104 questões, ou 61%, apresentam contextos matemáticos. Refinando mais nossa pesquisa, das 171 questões pesquisadas, 41 referem-se ao conteúdo Função e, dentre estas, apenas 4, ou 9,7%, possuem contexto do cotidiano ou interdisciplinar e 37 delas, aproximadamente 90,2%, são de contexto matemático, Anexo 1[1].

Em síntese, a transição do antigo vestibular para o ENEM trouxe consideráveis mudanças na estrutura das questões. Mas essa diferença no tipo de questão tem prejudicado ou favorecido uma maior parcela dos estudantes? Assim, lançamos nossa questão de pesquisa, que é a seguinte: “Sabemos que as questões de natureza matemática, aquelas que são resolvidas pela aplicação direta de conceitos e técnicas, sofreram críticas nos documentos oficiais como, por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Daí perguntamos: as questões de matemática contextualizadas com situações do cotidiano e/ou de outras áreas do conhecimento podem ser mais eficazes, atingindo positivamente uma parcela maior de alunos com relação à aprendizagem dessa disciplina? Nessa direção, eles desenvolveriam mais a *sensibilidade numérica*?”.

O termo *sensibilidade numérica*, ou *numeracy*, segundo D’Ambrosio (2007), é utilizado por nós, como uma forma de incorporar um sentido para os números, pois quando compreendemos a aplicação das técnicas e conceitos matemáticos em situações hipoteticamente reais, esse conhecimento é assimilado com sentido e significado. Partindo disso, vale ressaltar dois aspectos a serem considerados nessa investigação: sob o ponto vista do professor, no processo de ensinar, já que é dele a responsabilidade de elaborar as tarefas a serem executadas pelos alunos; e, sob o ponto de vista do aluno, ou melhor, no processo de aprender, quando ele compreende o que efetivamente está fazendo ao executar a tarefa.

As questões contextualizadas propostas pelo ENEM contêm, em grande parte, ideias e conceitos do cotidiano pessoal da grande maioria daqueles que pleiteiam vagas em cursos superiores no Brasil.

Evidentemente, boa parcela dos candidatos podem não seguir carreiras com forte ênfase matemática; portanto, abordar temas e relações do dia a dia nas

---

[1] Os endereços virtuais dessas provas encontram-se no Anexo 1, p. 82

questões pode aguçar o interesse dos estudantes pela disciplina citada ou mesmo amenizar essa distância entre os conteúdos apresentados nos livros didáticos e a vida deles, mesmo que não sigam carreira cujo conteúdo matemático seja predominante.

Agregando as questões de matemática relacionadas às outras áreas do conhecimento, de natureza interdisciplinar, optamos, assim, por designar "atividades de contexto interdisciplinar"; abordando também mais dois tipos de tarefas, a saber: de contexto matemático e de contexto cotidiano. Desta forma, destacam-se os objetivos dessa pesquisa:

- Verificar se os sujeitos apresentam diferentes performances na resolução de dois tipos de questões: de contexto matemático e de contexto cotidiano;
- Estabelecer um paralelo entre as resoluções de questões de cunho matemático e aquelas de contexto, seja do cotidiano ou interdisciplinar, para serem contempladas em uma análise subsidiada pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) e verificar se há sensibilidade numérica em questões de contextos do cotidiano;
- Confeccionar um produto educacional decorrente da investigação proposta.

Vale a pena lembrar que, com a mudança do antigo vestibular para o ENEM, acreditamos que as estratégias de resolução das questões também sofreram mudanças, uma vez que o modelo das questões não é o mesmo.

Consideramos relevantes os objetivos do presente trabalho, não apenas pela importância do estudo de funções dentro da própria Matemática, ligado a temas sociais e a temas do cotidiano, mas, também por ser o ENEM um instrumento de avaliação nacional que vem influenciando vários segmentos, tais como: o currículo, o livro didático e o ingresso dos estudantes do Ensino Médio nas universidades.

Diante desse contexto, partimos para as seguintes hipóteses:

(i) as questões contextualizadas podem permitir ao estudante uma visão crítica da sociedade, em vários aspectos, como desmatamento, poluição de rios, tomadas de decisão, entre outros. Ou seja, os estudantes podem, assim como o Inep - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - sugere na Matriz de Referência do ENEM em suas habilidades: "H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos" e "H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos", utilizar e adquirir novos conhecimentos do cotidiano e de outras áreas ao se depararem com problemas de matemática de contexto cotidiano e de contexto interdisciplinar e;

(ii) as questões que envolvem situações reais favorecem a prática da *sensibilidade numérica (numeracy)*, fato que não é corriqueiro em atividades de contexto matemático.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, dentre os quais o primeiro, este que estamos finalizando, que nos traz a introdução da dissertação. Em seguida, no capítulo 2, apresentaremos a revisão da literatura quanto ao tema de estudo, feita a partir dos bancos de dados de dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e dos programas de pós-graduação em Educação Matemática do país, no que se refere ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); o quadro teórico que repousa sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevallard, e sobre a *sensibilidade numérica* (*numeracy),* segundo Ubiratan D'Ambrosio e, por fim, falaremos sobre a metodologia utilizada nesse trabalho, a Engenharia Didática.

No capítulo 3, faremos um breve histórico sobre o Exame Nacional do Ensino Médio, apresentando sua evolução no formato da prova e no quesito importância no cenário escolar brasileiro, no decorrer dos 15 anos de sua existência, e sobre o extinto vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora.

No capítulo 4, apresentaremos, primeiramente, três questões selecionadas do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, seguida de uma resolução à luz da Teoria Antropológica do Didático e da classificação segundo a Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio. Concomitantemente a essas questões, apresentaremos outras três, as quais foram por nós adaptadas em contexto cotidiano. Em um segundo momento, faremos um breve histórico sobre como foi formada a turma na qual foi feita a investigação e, por fim, apresentaremos as principais informações colhidas nas resoluções das questões aplicadas aos alunos da referida turma de terceiro ano do Ensino Médio.

No capítulo 5, apresentaremos comentários a respeito da análise e da discussão dos resultados obtidos no capítulo 4 e, finalmente, no capítulo 6, pontuaremos algumas considerações finais a respeito da pesquisa, destacando as questões que essa dissertação deixou em aberto, para possíveis futuras pesquisas nessa área.

2 REVISÃO DA LITERATURA, QUADRO TEÓRICO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente capítulo está dividido em três partes. Inicialmente apresentamos a revisão da literatura feita a partir dos bancos de dados de dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e de programas de pós-graduação em Educação Matemática do país, no que se refere ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Em um segundo momento, falamos sobre o referencial teórico adotado no trabalho, referência essa que repousa sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevallard, e sobre a *sensibilidade numérica* (*numeracy),* segundo Ubiratan D'Ambrosio. Por último, discorremos sobre a metodologia de pesquisa escolhida, a Engenharia Didática.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Na revisão da literatura, constatamos que, embora o Exame Nacional do Ensino Médio tenha ocupado posição de destaque no cenário escolar atual, fato que será apresentado com mais detalhes no próximo capítulo, poucos são os trabalhos da comunidade da Educação Matemática sobre o tema.

Pesquisamos os bancos de dissertações e teses de seis programas de mestrado e doutorado do país, na referida área, a saber: Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF/MG, Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP/MG, Universidade Severino Sombra – USS/RJ, Universidade Bandeirantes - Uniban/SP, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP e Universidade Estadual Paulista – Unesp/SP, e encontramos apenas duas dissertações que tratam do tema. Já na pesquisa feita no banco de dados da CAPES encontramos seis trabalhos (cinco dissertações e uma tese) que, de certa forma, se referiam à matemática e ao ENEM. Desde já apontamos a necessidade de mais pesquisas abordando este exame, uma vez que, assim como trataremos mais adiante, o assunto é de extrema importância para os alunos, professores e instituições do Ensino Médio e, sobretudo, da pertinência acadêmica desta investigação.

Dentre esses oito trabalhos encontrados, destacamos quatro por contribuírem mais para o desenvolvimento dessa dissertação.

O primeiro trabalho referido tem como título “As Questões do ENEM e a Interdisciplinaridade no Ensino de Matemática”, de autoria de Fábio Souza da Silva, defendido em 2010, pelo programa de mestrado da Universidade Severino Sombra – USS/RJ, cuja intenção foi identificar as interdisciplinaridades nas questões do ENEM de 1998 a 2008, sobre o conteúdo matemático de função. Para tal, ele faz uma pesquisa quantitativa das temáticas mais frequentes no referido exame de 1998 a 2008 e, em seguida, norteado pelos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM), faz uma análise da interdisciplinaridade apresentada nessas questões.

Observe que pretendemos ser mais específicos quanto à época, pois, como veremos a seguir, o *novo ENEM* modificou consideravelmente as questões. Nossa intenção, além de seguir um viés um pouco diferente desse autor, é apurar se “as questões de matemática, contextualizadas com situações do cotidiano e/ou de outras áreas do conhecimento, podem ser mais eficazes atingindo positivamente uma parcela maior de alunos com relação à aprendizagem dessa disciplina”, já que estamos considerando as competências e as habilidades, que abarcam as questões do *novo ENEM*, ou seja, de 2009 em diante.

No que tange ao conteúdo matemático por nós escolhido, para a presente dissertação, funções, concordamos com Silva (2010), quando o mesmo afirma que as funções polinomiais de primeiro e segundo grau, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, em notação gráfica, tabular ou algébrica, favorecem a interdisciplinaridade, ou seja, a interação entre disciplinas, além de possibilitar, até mesmo, conexões com o cotidiano. Silva (2010) afirma que o ensino de funções deve buscar a contextualização e a interdisciplinaridade, de modo que haja conexões entre os diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento. Esse argumento é corroborado pelos PCN, a saber:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o

> comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999a p.43 e 44)

Nessa direção, as questões apresentadas pelo ENEM são bem favoráveis à interdisciplinaridade, o que nos faz pensar em um novo modelo de escola, menos conteudista e, acima de tudo, exigindo mais interpretação da realidade que cerca os alunos, uma vez que o currículo do Ensino Médio também é construído com vista nos conteúdos cobrados nos exames de vestibular.

Já a dissertação “Tratamento da Informação e o ENEM: A Matemática na Trama da Avaliação” de autoria de Romeu Mauro dos Reis, defendida em 2009, pelo programa de mestrado da Pontifícia Universidade Católica - PUC/SP, embora trate do Exame Nacional do Ensino Médio, mesmo tema escolhido por nós, está mais preocupada em analisar as estratégias utilizadas em questões que envolvam a leitura e a interpretação de gráficos, fato que se observa claramente em sua revisão de literatura toda voltada a trabalhos que se referem à análise de gráficos e tabelas e à estatística. Embora o presente autor reconheça a importância da interdisciplinaridade, ao abordar temas relevantes como Meio Ambiente, Saúde, Ética, entre outros, fato facilitado pelo objeto matemática em questão, Estatística, o autor não se refere, assim como pretendemos, à utilização e/ou identificação de conceitos do cotidiano e/ou de outras disciplinas como possível fator contribuinte para a resolução das questões.

Na análise das questões aplicadas e resolvidas pelos alunos, o autor fez uso da “pesquisa descritiva” segundo Rudio (1986, p.56), apontou índice satisfatório de acertos e, embora tenha relatado utilização de boas estratégias de resolução por parte dos alunos, fazendo uso de conhecimentos escolares anteriores e utilizando argumentos fundamentados em sua experiência e contextos sociais, apontou a necessidade na melhora no ensino de Estatística procurando melhor reconhecê-la, entendê-la e empregá-la de forma eficiente na vida dos estudantes.

Seguimos, assim como Reis (2009), o caminho de analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de questões do ENEM e/ou questões de contexto cotidiano, porém faremos uso da Teoria Antropológica do Didático e nos deteremos no objeto matemático função.

A dissertação de Márcio Deleprani, cujo título é “As provas de matemática do Enem: Conteúdos, dificuldades e influências para o currículo do ensino médio**”,** defendida em 2012 pela Universidade do Grande Rio Prof. José de Souza Herdy (UNIGRANRIO), possui por questão principal analisar o nível de conhecimento exigido para resolver as questões de matemática nas provas do ENEM, verificar seu grau de dificuldade, como também quais conteúdos aparecem com mais frequência e como são seus enunciados. Aparentemente é uma dissertação que procura atualizar tanto o corpo docente quanto o discente a respeito das características apresentadas nas questões de matemática do ENEM, assim como o próprio autor afirma:

> Assim, o trabalho desenvolvido visa mostrar o nível das questões e ajudar os alunos e professores a se prepararem para essa prova, que é tão importante em nosso país. (DELEPRANI, 2012, p. 17)

Mas, fazendo uma leitura atenta desse trabalho pudemos verificar que Deleprani, embora realmente apresente informações que atualizam tanto alunos quanto professores em relação aos conteúdos mais frequentes e sobre o modelo de questão do referido exame, possui, antagonicamente a nós, aversão a exames contextualizados. Inclusive incentiva as demonstrações em detrimento da contextualização e interdisciplinaridade.

> As demonstrações estão desaparecendo das salas de aula no BRASIL porque aqui a obtusidade dos psicopedagogos do MEC criou o dogma da CONTEXTUALIZAÇÃO, que está sendo levado a absurdos semelhantes ao do livro de PORTUGUÊS que ensina que falar "nóis pega os pexe" está correto. Essa mentalidade espalhou-se por todas as áreas do ensino brasileiro e os resultados a gente vê todos os anos nos exames do Pisa. Em resumo, não são os

> matemáticos que estão ditando as diretrizes do ensino em nossa área: são pessoas que padecem do pior tipo de ignorância - a de achar que sabem aquilo que não sabem.
> (GARBI, 2011 apud DELEPRANI, 2012, p. 16, GRIFO DO AUTOR)

Acreditamos que o trabalho de Deleprani seguiu em direção oposta ao nosso, uma vez que acreditamos, assim como apresentaremos a seguir, de posse dos conhecimentos básicos de matemática, que o contexto e a interdisciplinaridade de questões podem contribuir para que surjam novas estratégias de resolução dos exercícios, fato que não ocorre em demonstrações matemáticas.

A dissertação de Perla Golle, “Sentidos de numeramento construídos na resolução de situações-problema no ensino médio: Um estudo a partir de uma questão do ENEM”, apresentada em 2011 ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Ciências da Educação, da Universidade Regional de Blumenau – FURB, cujo objetivo era compreender os sentidos de numeramento construídos por estudantes de Ensino Médio na resolução de uma situação-problema, nos serviu pra dimensionarmos com exatidão o que chamamos de *sensibilidade numérica* porque Golle, como é apresentado no título do trabalho, utiliza o termo “numeramento” na mesma direção que a nossa, porém de maneira mais ampla.

Para Golle:

> O numeramento requer do aluno uma visão muito mais ampla da matemática, ou seja, vai além da aplicação de fórmulas e resolução de simples exercícios. Envolve a capacidade de compreensão do aluno, suas habilidades, suas competências, que auxiliam na formação de uma sujeito mais reflexivo.
> (GOLLE, 2011, p. 26)

Como veremos a seguir, o termo por nós chamado de *sensibilidade numérica*, refere-se à incorporação de sentido ao número e nos preocuparemos com esse cuidado em analisar o valor numérico, basicamente, nas respostas. Diferentemente de Perla que conceitua o “numeramento” como um modo de operar durante toda a resolução do exercício.

Novamente apontamos a falta de pesquisas, em Educação Matemática, com finalidade de aproximar a sala de aula ao ENEM, principalmente ao *novo ENEM*, que passou a vigorar em 2009, uma vez que o trabalho de Reis (2009) se restringe a analisar questões anteriores ao novo formato do referido exame.

Reforçamos a importância do presente trabalho uma vez que o tema ENEM apresenta poucas pesquisas, mesmo possuindo tamanha importância no cenário educacional atual.

2.2 QUADRO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO

Os referenciais teóricos utilizados no presente trabalho são a "Teoria Antropológica do Didático", extensão da Teoria da Transposição Didática, ambas criações do didata francês Yves Chevallard e, recorremos, também, à definição de *Numeracy* de D'Ambrósio (1996, 1999), quando for pertinente analisar as atividades desta investigação diante da *sensibilidade numérica*.

2.2.1 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi criada a partir da extensão de outra teoria, a Teoria da Transposição Didática, ambas, fruto do trabalho de Yves Chevallard (1991, 1996). Para maior compreensão dos termos aqui apresentados, segue um breve histórico sobre o autor e sobre a Teoria da Transposição Didática.

"Yves Chevallard, nascido em 1º de Maio de 1946, é um didata francês do campo do ensino das matemáticas. Leciona atualmente no *Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie d'Aix-Marseille"* (LEITE, 2004, p.45) e, desde 1971, publica artigos e textos em várias revistas científicas, dentre os quais está a "obra mais difundida no Brasil, o livro *La Transposition Didactique Del Saber Sábio al Saber Enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1991*". (LEITE, 2004, p.45)

A Teoria da Transposição Didática se refere às transformações (mudanças) sofridas pelos saberes no percurso que se inicia no campo científico, associado à vida acadêmica nas universidades e termina no campo escolar, na sala de aula.

Essas transformações se devem à própria história das ciências, aos cientistas, aos políticos, aos autores de livros didáticos, aos professores, dentre outros agentes que interferem no processo educativo. Segundo Chevallard (s/d apud PAIS, 2011, p.19), todos esses agentes que participam, de maneira direta ou indireta, das transformações dos saberes situam-se na *noosfera* (conjunto das fontes de influências na seleção dos conteúdos). Assim, a *noosfera* influencia, não somente a escolha de conteúdos, mas também o tipo de abordagem feita, os objetivos finais, os métodos utilizados etc.

Dessa forma, "a noção de transposição estuda a seleção que ocorre através de uma extensa rede de influências, envolvendo diversos segmentos do sistema educacional", (PAIS, 2011, p.19).

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática.*
> (CHEVALLARD, 1991 apud LEITE, 2004, p.45, *grifo do autor*).

Consideramos a intervenção do professor um importante fator nas transformações sofridas pelos conteúdos, uma vez que ele é voz ativa no cenário didático escolar. Acreditamos que o modo pelo qual o educador apresenta os saberes, é carregado da maneira como o mesmo os interpreta e os conceitua. Ou seja, mesmo que o conteúdo seja o mesmo, cada educador discursa de maneira subjetiva, única. Estamos falando da *epistemologia* apresentada pelos professores.

> [...] entendemos a epistemologia do professor como sendo as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos. (PAIS, 2011. p.34)

Assim, a “Teoria da Transposição Didática situa o saber matemático num projeto de uma análise epistemológica do saber do ponto de vista didático”[2]. E essa análise se enuncia, essencialmente, em termos de *objetos de saber,* os quais são divididos em objetos *matemáticos, protomatemáticos e paramatemáticos. Os o*bjetos *matemáticos* são aqueles facilmente identificados nos contextos escolares, como, por exemplo, as quatro operações básicas, os sólidos geométricos, as equações e as figuras planas. Já os objetos *paramatemáticos* não são objetos de ensino em si, servindo de suporte para a apresentação dos conteúdos, por exemplo, a noção de demonstração e de parâmetro. Por fim, os objetos *protomatemáticos* são, na verdade, noções, percepções, que os professores desejam que os alunos adquiram. Por exemplo, “a capacidade de percepção, por parte dos alunos, de ocasiões de aplicação dos saberes estudados” (LEITE, 2004, p.57).

Com a intenção de verificar se os conteúdos ensinados estavam próximos dos conteúdos aprendidos e/ou, até mesmo, procurando verificar se os objetos *protomatemáticos* estavam sendo adquiridos pelos alunos, Chevallard desenvolveu a Teoria Antropológica do Didático que permite ao professor pesquisador uma análise detalhada na resolução das questões apresentadas pelos alunos. Veremos isso a seguir.

Analisando o nome da teoria, “Teoria Antropológica do Didático”, podemos pontuar algumas considerações sobre a mesma. O termo Antropológico é derivado da palavra antropologia que se refere ao estudo do homem (antropo + logia, ambas vêm do grego: *ánthropos* = homem e *lógos* = estudo). Já o termo Didático refere-se à intenção de ensinar. Assim, temos um direcionamento a respeito do que trata a referida teoria, a qual, segundo Chevallard, “estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas”. (CHEVALLARD, 1999 apud ALMOULOUD, 2007, p.111).

Na TAD, utiliza-se o termo objeto para se referir a indivíduos, a instituições e às posições ocupadas pelos indivíduos nas instituições. Porém, “a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma

---

[2] Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:xmb2CQwedqoJ:www.pucsp.br/pensamentomatematico/arquivos20091/tad.ppt+&cd=1&hl=en&ct=clnk&gl=br. Acesso em: 26 set. 2013.

pessoa ou instituição com esse objeto" (ALMOULOUD, 2010, p.113). E, para Chevallard, uma instituição, cuja definição é diferente da que usamos habitualmente, assume inúmeras variações.

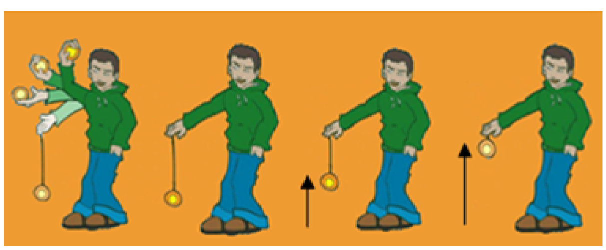
> A instituição pode ser uma sala de aula, uma escola, uma disciplina, um livro didático, etc. e "a cada instituição I está associado um conjunto de objetos O_I, chamado conjunto dos objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I conhece." (CHEVALLARD, 1996 apud SILVA, 2007, p. 68).

Com o objetivo de modelar as atividades matemáticas que ocorrem nas instituições didáticas, categoria particular das instituições, Yves Chevallard desenvolveu a Teoria Antropológica do Didático (TAD), que se baseia em quatro termos, a saber: *tarefa* (T), *técnica* (τ), *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ).

Para maior compreensão por parte do leitor, ao abordarmos os conceitos de *tarefa* (T), *técnica* (τ), *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ), faremos, concomitantemente, uma análise minuciosa da atividade apresentada na Figura 1 abaixo, pontuando os quatro termos sugeridos por Chevallard.

Figura 1 – Uma situação-problema para a TAD

O ioiô é um brinquedo constituído de uma corda ou barbante conectado a uma peça de plástico ou acrílico, por exemplo, que amarrada a um dos dedos da mão pode criar bons momentos de diversão. Com movimentos de subida e descida, pessoas treinadas em manejar um ioiô são capazes de executar várias manobras.



Fonte: http://www.facebook.com/TulaBomboniereeCia (modificado). Acesso em: 03 Mai 2013.

A imagem acima mostra um garoto brincando com seu ioiô, no qual o brinquedo é arremessado para baixo até que atinja uma altura mínima e, assim, retorna para sua mão, ou seja, atinge a altura máxima. Suponha que a distância da mão do garoto até o chão se mantenha constante e que o movimento de descida e de subida do ioiô seja descrito pela função $h(t) = 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t)$, sendo h a altura em metros, do brinquedo, e t, o tempo decorrido, em segundos, após o lançamento do mesmo. A altura mínima alcançada por esse ioiô está entre:

a) 0,6 m e 0,8 m. b) 0,7 m e 0,9 m. c) 0,8 m e 1,0 m. d) 0,9 m e 1,1 m. e) 1,0 m e 1,2 m.

Fonte: Dados da pesquisa

No contexto da TAD, uma *tarefa* (*T*) é identificada por um verbo de ação que deve estar acompanhado de um conteúdo em estudo. Assim, de acordo com a Figura 1, a *tarefa* (*T*) consiste em calcular a altura mínima alcançada pelo ioiô, e é identificada na pergunta do problema. Observe que o verbo de ação para essa tarefa pode ser <u>calcular</u>, e o conteúdo em estudo que o acompanha é <u>a altura mínima alcançada pelo ioiô que se movimenta segundo a expressão</u>:

$$h(t) = 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad (1)$$

Uma *técnica* (τ) é uma maneira de proceder a fim de realizar uma *tarefa* (*T*), mas não é necessariamente um procedimento metodológico ou algorítmico.

> [...] a realização de toda *tarefa* provém de se colocar em ação uma *técnica*.
> O sentido do termo *técnica* é mais amplo do que o usual; não é apenas um procedimento estruturado e metódico, mas, uma maneira particular de se realizar determinada *tarefa*. Uma *técnica* pode resolver algumas *tarefas* de determinado tipo, mas, não obrigatoriamente todas; essa característica é definida como a capacidade intelectual da *técnica*.
> (BOSCH; CHEVALARD, 1999, apud MIGUEL, 2005, p.35, *grifo nosso*)

Fundamentado na análise sob a concepção da Teoria Antropológica do Didático, detectamos que, a validade da *técnica* (τ) aplicada em uma dada *tarefa* (*T*) deve ter o respaldo e o reconhecimento da instituição a qual está situada. Ou seja, no que tange ao trabalho em questão, ao identificar uma *tarefa* (*T*) em um problema matemático, por exemplo, do ENEM, o modo de se resolver esse exercício ou, a maneira de se realizar essa *tarefa* (*T*), ou, a *técnica* (τ) aplicada para realizar essa *tarefa* (*T*), deve ser reconhecida, segundo a estruturação matemática apresentada pelo (indivíduo) professor e pela (instituição) livro didático adotado.

No que tange à produção de *técnicas* (τ),

> A maioria das *tarefas* institucionais torna-se rotineira quando deixa de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir *técnicas* é necessário que se tenha uma *tarefa* efetivamente problemática que estimula o desenvolvimento de pelo

> menos uma *técnica* para responder às questões colocadas pela *tarefa*. (ALMOULOUD, 2007, p. 115, *grifo nosso*)

Uma *técnica* (τ) utilizada para realizar a *tarefa* (T) apresentada na Figura 1 é, partir da desigualdade, -1 ≤ sen(t) ≤ 1. E, por meio de uma sequência de operações obter, no centro das desigualdades, a função h(t) fornecida no enunciado. Abaixo seguem as operações:

$$-1 \leq \text{sen}(t) \leq 1 \quad (2)$$

$$-1 \leq \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(t) \leq 1 \quad (3)$$

$$-0{,}2 \leq 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \leq 0{,}2 \quad (4)$$

$$0{,}2 \geq -0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad -0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \geq -0{,}2 \quad (5)$$

$$1 + 0{,}2 \geq 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \geq 1 - 0{,}2 \quad (6)$$

$$1{,}2 \geq \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t)}_{h(t)} \quad \text{e} \quad \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t)}_{h(t)} \geq 0{,}8 \quad (7)$$

$$0{,}8 \leq h(t) \leq 1{,}2 \quad (8)$$

Assim, como sen(t) = 1 para $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, verifica-se que a função h(t) apresenta um mínimo que é, 0,8 m, ou seja, a altura mínima assumida pelo ioiô.

Uma *tecnologia* (θ) é um discurso descritivo e justificativo das *técnicas* (τ) empregadas para tentar realizar uma *tarefa* (T). Novamente, as *tecnologias* (θ) empregadas devem ser reconhecidas pela instituição em que estão inseridas.

> A existência de uma *técnica* supõe a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificativo da *técnica* e de âmbito de aplicabilidade e validade. Chamaremos esse discurso sobre a *técnica* de uma *tecnologia*.
> (CHEVALLARD et al., 2001 apud SABO, 2010, p. 58, *grifo nosso*)

Baseado na *técnica* (τ) utilizada para realizar a *tarefa* (T) apresentada na Figura 1 temos nas passagens, as seguintes *tecnologias* (θ), respectivamente:

(2) A função trigonométrica seno é limitada, variando de -1 até 1.

(3) Separação da dupla desigualdade em duas.

(4) A multiplicação de números positivos, no caso 0,2, em desigualdades, não altera o sentido das mesmas.

(5) A adição de valores iguais nos dois membros das desigualdades preserva o sentido das mesmas.

(6) Soma e subtração de números fracionários de mesmo denominador.

(7) Reconhecimento da expressão h(t) em cada uma das desigualdades.

(8) Junção das duas desigualdades em uma única.

Observe que algumas das explicações acima são claras e, talvez, evidentes, tomando por base a *técnica* utilizada anteriormente. Segundo Chevallard (1999 apud SABO, 2010, p.58), "qualquer que seja o tipo de tarefa, a *técnica* relativa a esta *tarefa* estará sempre associada a uma *tecnologia* ou a um vestígio da *tecnologia*". Ou seja, na própria *técnica* utilizada já é possível identificar parte da *tecnologia*.

A *teoria* (Θ) justifica e garante a veracidade da *tecnologia* (θ), pois a partir dela podemos generalizar os conhecimentos em outras situações similares.

> A *teoria* é a especulação abstrata da *tecnologia*; no plano *teórico* estão as definições, os teoremas, as noções mais abrangentes e abstratas que servem para explicar, justificar e produzir *tecnologias*. (MIGUEL, 2005, p. 36, *grifo nosso*)

A *teoria* (Θ) é chamada de *tecnologia* (θ) da *tecnologia* (θ) e, segundo Chevallard (1996 apud RODRIGUES, 2009 p. 46), "a *teoria* (Θ) é o nível superior de justificativa-explicação-produção e nem sempre está presente numa atividade."

Concluímos que o fato da *teoria* (Θ) nem sempre estar presente em uma atividade, como mencionado acima, é concebível devido à complexidade de alguns conceitos matemáticos. Mas consideramos presença de teoria em exercícios quando um sujeito se mostra capaz de identificar e generalizar situações já vivenciadas. Em outras palavras, diante da *tecnologia* (θ) utilizada para justificar a *técnica* (τ) empregada na Figura 1, podemos generalizá-los para outras situações tais como nas questões: "Determine o valor mínimo da função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = 7 – 2·cos(x).”, “Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $-1 < \frac{2x}{3} \leq 4$.”. Ou, como na questão da Figura 2:

Figura 2 – Questão de função do ENEM 2010

ENEM 2010. Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a R quilômetros de distância do centro da Terra. Quando R assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de R em função de t seja dado por:

$$R(t) = \frac{5.865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06 \cdot t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de R, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12.000 km b) 12.765 km c) 11.730 km d) 10.965 km e) 5.865 km

Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores. Acesso em: 8 jul 2013.

Ou seja, teremos uma teoria (Θ) se um estudante conseguir identificar que nas três questões acima podemos utilizar a mesma tecnologia utilizada na Figura 1.

Assim, podemos dizer que na TAD, as noções de (tipo de) *tarefa*, (tipo de) *técnica*, *tecnologia* e *teoria* se baseiam em três postulados, explicados logo abaixo:

> 1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de *tarefas* relativamente bem delineadas.
> 2. O cumprimento de toda *tarefa* decorre do desenvolvimento de uma *técnica*.
> [...]
> 3. As *tarefas* devem satisfazer a condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições. (ALMOULOUD, 2007, p. 114-116, *grifo nosso*),

Enquanto um tipo de *tarefa* (T), acompanhado de um tipo de *técnica* (τ), formam um bloco prático-técnico, ou seja, um *saber-fazer*, algo que justifica e/ou explica essa *técnica* (τ), a *tecnologia* (θ), acompanhada de uma *teoria* (Θ), formam um bloco *tecnológico-técnico* referente ao saber.

> Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma *organização praxeológica* (ou *praxeologia*) *pontual*. A palavra praxeologia é formada por dois

> termos gregos, *práxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão. (ALMOULOUD, 2007, p. 117, *grifo do autor*).

E Chevallard deixa claro que os dois blocos, “prático-técnico” e “tecnológico-teórico”, são importantes para o aprendizado da matemática.

> Não é possível, nem para o matemático profissional nem para os alunos de uma série fundamental, atuar matematicamente, com verdadeira eficácia sem entender o que está fazendo. Mas também não se pode entender em profundidade uma organização matemática determinada se, simultaneamente, não for realizada uma prática matemática eficaz. Não há práxis sem logos, mas também não há logos sem práxis. Ao unir as duas faces da atividade matemática, obtemos a noção de praxeologia: para responder a um determinado tipo de questão matemática é necessário elaborar uma praxeologia matemática constituída por um tipo de problema determinado, uma ou várias técnicas, suas tecnologias e a teoria correspondente. (CHEVALLARD et al., 2001 apud SABO 2010, p. 61)

Assim, após discorrer sobre a Teoria da Transposição Didática e sobre a Teoria Antropológica do Didático, podemos, concordando com Sabo (2010) dizer que:

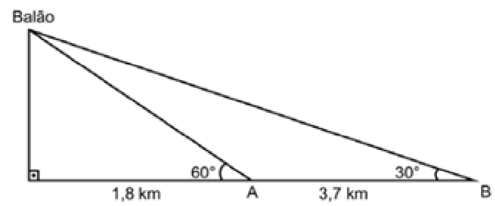
> A Teoria Antropológica do Didático representa uma importante contribuição para a Didática da Matemática, pois fornece condições e subsídios teóricos que permitem analisar como os conhecimentos matemáticos estão relacionados e como essas relações podem objetivar, efetivamente, a Transposição Didática dos conceitos envolvidos. (SABO, 2010, p.54)

Considerando os conteúdos trabalhados no Ensino Médio (1º a 3º ano), falamos de organização *praxeológica pontual* (organização matemática pontual – OMP) quando nos referimos à resolução de certo tipo de problema de trigonometria no triângulo retângulo. Por exemplo,

Figura 3 – Questão de função do ENEM 2010

ENEM 2010. Um balão atmosférico lançado em Bauru (343 km a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km   b) 1,9 km   c) 3,1 km   d) 3,7 km   e) 5,5 km

Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores. Acesso em: 27 set 2013.

Explorando problemas provenientes de mesmas organizações praxeológicas pontuais, como o exemplo dado na Figura 3, encontramos diferentes *técnicas* (τ) empregadas para resolver as *tarefas* (T) apresentadas. Quando várias *técnicas* (τ), agrupadas, possuem mesma *tecnologia* (θ) diremos que temos uma *Organização Matemática Local* (OML).

De acordo com a Figura 3, falamos de uma organização matemática *local* (OML) no que diz respeito à resolução de diferentes tipos de problemas de trigonometria no triângulo retângulo. Nas palavras de Almouloud (2010, p.117), “uma OML deve responder a questões que não podem ser respondidas por nenhuma Organização Matemática Pontual (OMP) [...]”.

De maneira análoga, avaliando a qualidade dos componentes de uma OML e articulando-a com outras, construímos uma *Organização Matemática Regional* (OMR). Tomando por base o exemplo da Figura 3, a OMR seria a generalização de problemas de trigonometria, ou seja, o que diz respeito à noção de função trigonométrica.

Em uma organização praxeológica, principalmente na *técnica* (T) empregada, aparecem dois tipos de objetos, que Bosch e Chevallard (1999) denominaram de *ostensivos* e *não ostensivos*.

Os objetos ostensivos são aqueles que podem ser manipulados na realização de uma atividade matemática, enquanto os objetos não ostensivos não podem ser manipulados e estão voltados aos conceitos e às ideias dos conteúdos matemáticos.

> Os objetos ostensivos têm certa materialidade e, por isso, são perceptíveis aos sentidos humanos e podem ser manipulados: sons, grafismo e gestos; os objetos não-ostensivos são ideias, intuições, conceitos, que existem institucionalmente, mas, não podem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si próprios. Eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados: uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita um gesto ou um longo discurso. (MIGUEL, 2005, p. 35)

Por exemplo, diante do exercício proposto na Figura 1, apresentamos a seguinte solução:

$$-1 \leq sen(t) \leq 1 \qquad (9)$$

$$-1 \leq sen(t) \quad e \quad sen(t) \leq 1 \qquad (10)$$

$$-0,2 \leq 0,2 \cdot sen(t) \quad e \quad 0,2 \cdot sen(t) \leq 0,2 \qquad (11)$$

$$0,2 \geq -0,2 \cdot sen(t) \quad e \quad -0,2 \cdot sen(t) \geq -0,2 \qquad (12)$$

$$1 + 0,2 \geq 1 - 0,2 \cdot sen(t) \quad e \quad 1 - 0,2 \cdot sen(t) \geq 1 - 0,2 \qquad (13)$$

$$1,2 \geq \underbrace{1 - 0,2 \cdot sen(t)}_{h(t)} \quad e \quad \underbrace{1 - 0,2 \cdot sen(t)}_{h(t)} \geq 0,8 \qquad (14)$$

$$0,8 \leq h(t) \leq 1,2 \qquad (15)$$

Podemos citar como objetos ostensivos nas passagens:

- (11) Multiplicação entre números inteiros e a multiplicação de 0,2 pela expressão sen(t).
- (12) Soma e subtração entre números racionais.

E, como objetos não ostensivos:

- O conceito de variação e/ou limitação da função trigonométrica cosseno.
- O conceito de número.
- O conceito de função.

Assim,

> Na abordagem antropológica, podemos dizer que o cumprimento de toda tarefa envolve necessariamente a manipulação de *ostensivos* regulados pelos *não ostensivos*, fazendo com que os objetos ostensivos tornem-se a parte perceptível da atividade.
> (ALMOULOUD, 2007, p. 120, *grifo do autor*).

Em síntese, a TAD é norteada por quatro estágios “*tarefa* (*T*), *técnica* (τ), *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ)”. Os dois primeiros geram o bloco *prático-técnico* e os dois últimos o bloco *teórico-tecnológico.* O cumprimento de toda *tarefa* (*T*) é proveniente da utilização de uma *técnica* (τ), justificada pela *tecnologia* (θ)*,* que é garantida pela *teoria* (Θ)*,* e todo esse processo de resolução de problemas é composto da utilização de objetos ostensivos e não ostensivos.

2.2.2 A SENSIBILIDADE NUMÉRICA (*NUMERACY*)

Dentre as questões dos vestibulares anteriores ao *novo ENEM,* em particular da UFJF[3]*,* não eram frequentes as de contexto cotidiano e de contexto interdisciplinar, tal como já foi exposto na introdução desse trabalho (p.11 e 12).

Esse fato acarretava questões de contexto matemático e, consequentemente, os cálculos e os resultados obtidos nem sempre eram criticados com o cuidado necessário, pois esses valores, para muitos estudantes, pouco familiarizados com a matemática, só faziam sentido dentro da própria disciplina.

Com a mudança de abordagem encontrada nas questões do ENEM, sentimos que a análise cuidadosa dos resultados obtidos na resolução dos

[3] Optamos pela escolha das questões dos vestibulares da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF/MG – por ser a mesma cidade do programa de mestrado do presente trabalho, além da proximidade da cidade que morava (Viçosa-MG) na época em que o autor desse trabalho foi aluno da instituição acima mencionada.

exercícios deveria ganhar maior atenção, visto que se trata de situações próximas ao nosso cotidiano. Reconhecemos por *sensibilidade numérica*, ou *numeracy*, o cuidado em analisar respostas numéricas diante da situação apresentada pelos exercícios. Essa atenção quanto ao resultado obtido pode, não somente possibilitar ao aluno rever seus cálculos e corrigir eventuais equívocos, mas também propiciar aos mesmos criticidade em situações extra “sala de aula”, como, no cálculo de faturas, análise de estatísticas divulgadas nos meios de comunicação, processamento de informação, tomada de decisões, interpretação de dados etc.

Em outras palavras, adotamos o termo *numeracy* no contexto de *alfabetização*, tal como define Ubiratan D’Ambrosio:

> Eu argumento contra a ênfase excessiva no quantitativo, o que pode ser prejudicial para a igualmente importante ênfase no qualitativo. Minha proposta de *literacy*, *materacy* e *technoracy*, [...] é uma resposta à minha crítica da falta de equilíbrio. *Literacy* é um instrumento de comunicação e, como tal, inclui o que tem sido chamado de *quantitative* literacy ou *numeracy*. (D’AMBROSIO, 2007, p.28, *grifo do autor*)

No contexto escolar, *numeracy* “envolve mais do que a simples aplicação de procedimentos de rotina dentro da sala de aula. Os alunos precisam reconhecer que a matemática é constantemente utilizada fora da sala de aula”.[4]

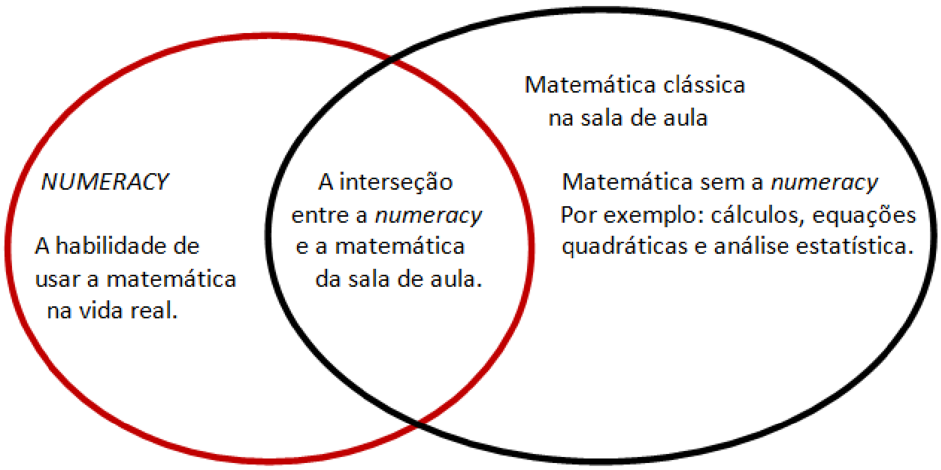
> *Numeracy* é a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos fundamentados e de usar e se envolver com a matemática de forma que atenda as necessidades da vida do indivíduo como um construtivo, preocupado e reflexivo cidadão (PISA, *grifo nosso*)[5]

Dessa maneira, a *sensibilidade numérica*, em situações mais abrangentes, deseja ampliar os conceitos trabalhados nas aulas de matemática, visando lapidar a compreensão dos resultados encontrados e das implicações desses resultados na

[4] Disponível em:
http://www.australiancurriculum.edu.au/GeneralCapabilities/Numeracy/Introduction/Introduction.
Acesso em: 27 set 2013.
[5] Disponível em: http://www.nationalnumeracy.org.uk/what-is-numeracy/index.html. Acesso em: 13 out. 2013. (Trad. nossa)

vida das pessoas. O desejo é que ocorra, na matemática da sala de aula, a interseção entre *numeracy*, ou habilidade de usar a matemática na vida real, e a matemática sem a *numeracy*, tal qual é a sua prevalência na prática pedagógica ainda nos dias atuais, como mostra a Figura 4 abaixo.

Figura 4: *Numeracy* e Matemática



Disponível em: http://www.nationalnumeracy.org.uk/the-mathematical-journey-/index.html. Acesso em: 13 out 2013. (Tradução nossa)

Em nossas pesquisas, constatamos vertentes voltadas à *numeracy* em alguns países, em especial na Austrália e na Inglaterra. Este último, país pioneiro na utilização desse termo:

> [...] o termo *numeracy* foi originalmente definido pelo Ministério da Educação de Londres como "a imagem da alfabetização matemática envolvendo pensamento quantitativo".
> (GOOS; GEIGER; DOLE, 2012 apud SALGADO, 2013, p.4, *grifo do autor*)

No Reino Unido, uma reorganização curricular na escola, feita pelo Departamento de Educação (DFE), no início de 2011,

> [...] deixou clara sua intenção de desenvolver um currículo que se compare favoravelmente aos dos países de mais alto desempenho e que refletisse a melhor sabedoria coletiva sobre como as crianças aprendem e o que eles devem saber. Este novo currículo tem sido desenvolvido em consonância com os princípios de liberdade,

> responsabilidade e justiça - para elevar os padrões para todas as crianças.[6]

O desejo é que cada jovem no Reino Unido atinja um nível de matemática, que lhe permita seguir a carreira de sua escolha, quando eles deixam a escola. “Queremos que eles atinjam um nível de matemática que lhes permita realizar seu pleno potencial na sua vida pessoal e social também”[7]. Este objetivo deve desempenhar um papel importante no direcionamento das políticas de ensino e aprendizagem nas escolas. Os próprios professores devem ter intenção de apoiar os alunos a atingir um nível de matemática adequado à sua vida diária.

Além disso, bem como reitera Rodrigues (1999),

> Eventualmente, surgem comentários referentes à incompreensão por parte dos alunos, no sentido de que não conseguem assimilar os conteúdos ministrados em aula, uma vez que não descobriram ainda o motivo e a finalidade de se estudar determinados conteúdos [...]. Nesse sentido, o processo de ensino/aprendizagem deve se realizar, principalmente, por via dupla de interação: aluno/professor e professor/aluno [...]. Acreditamos que estas interações podem ocorrer através da utilização de situações-problemas do cotidiano do aluno, inseridos no contexto do conteúdo apresentado, visando, essencialmente o apreender. (RODRIGUES, 1999, p.23).

Já que:

> O distanciamento entre os conteúdos programáticos e a experiência dos alunos certamente responde pelo desinteresse e até mesmo pela deserção que constatamos em nossas escolas. (BRASIL, 2002, p.35-36).

Outro fator importante refere-se à importância da interdisciplinaridade na Educação Básica. Concordamos com Rodrigues (1999) quando a mesma afirma que:

---

[6] Disponível em: http://www.nationalnumeracy.org.uk/the-mathematical-journey-/index.html. Acesso em: 13 out 2013. (Tradução nossa)

[7] Disponível em: http://www.nationalnumeracy.org.uk/the-mathematical-journey-/index.html. Acesso em: 13 out 2013. (Tradução nossa)

> Dentro de uma prática de ensino contextualizada, há a presença constante do *significado*, ou seja, o aluno encontra sentido no que está aprendendo, uma vez que lhe é possível estabelecer confrontos entre o conteúdo e sua realidade, além de perceber associações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (RODRIGUES, 1999, p.37-38, *grifo do autor*).

Também nesse sentido, de acordo com os PCN:

> Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem uma função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos.
> [...]
> A integração dos diferentes conhecimentos pode criar as condições necessárias para uma aprendizagem motivadora, na medida em que ofereça maior liberdade aos professores e alunos para a seleção de conteúdos mais diretamente relacionados aos assuntos ou problemas que dizem respeito à vida da comunidade. (BRASIL, 2002, p.36).

Com esse conceito de *sensibilidade numérica* (*numeracy*), concluímos a apresentação do nosso referencial teórico. Na sequência do capítulo abordaremos a metodologia de pesquisa adotada por nós, a Engenharia Didática, da escola francesa.

2.3 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Na última parte desse capítulo iremos entrar em detalhes a respeito da metodologia de pesquisa por nós adotada, procurando relacionar os capítulos do trabalho em questão a alguma fase dessa metodologia.

A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), metodologia adotada neste trabalho, comporta quatro fases, a saber:

- Análises preliminares.

- Construção e análise *a priori.*
- Experimentação.
- Análise *a posteriori* e validação.

Na a*nálise preliminar*, o pesquisador, buscando um quadro teórico para fundamentar sua pesquisa, e já possuindo um objeto a ser pesquisado, se debruça sobre questões que envolvem os conteúdos visados, além de analisar os obstáculos que marcam sua evolução. Para tal, faz uma revisão da literatura, aponta sua problemática de pesquisa e sua metodologia.

Dessa forma, procurando situar o leitor quanto à primeira fase da metodologia Engenharia Didática, designando o presente capítulo (capítulo 2 dessa dissertação) como a fase de *análise preliminar*, na qual, em 2.1, foi apresentada a “Revisão da Literatura”; em 2.2, o “Quadro Teórico”, composto pela “Teoria Antropológica do Didático” e pela “*Sensibilidade Numérica*” (*Numeracy*) e, em 2.3, a metodologia de pesquisa. Além disso, ressaltamos o trabalho do pesquisador nessa fase ao consideramos que o presente trabalho pode contribuir para o professor leitor de maneira que o mesmo, buscando adaptar questões de contexto matemático para questões de contextos cotidiano e/ou interdisciplinar, foi feito o seguinte procedimento, sob o ponto de vista do processo de ensinar, ao preparar as tarefas:

- Identificar algumas questões de contexto matemático sobre função, do vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, do período de 2009 a 2013, para adaptá-las em um formato proveniente de contextos do cotidiano;
- Aplicar essas questões para os alunos e, posteriormente, corrigir, de acordo com a chave de resolução;

Na segunda fase dessa metodologia, a “construção e análise *a priori”* o pesquisador procura definir “dois tipos de variáveis potenciais manipuladas pelo pesquisador” (ALMOULOUD, 2007, p.175), são elas:

- Variáveis macrodidáticas ou globais, que se referem à organização global da engenharia, como, por exemplo, os conteúdos e os modelos das questões que serão apresentados aos alunos cujos resultados, podem validar ou refutar as hipóteses elencadas no início do trabalho.
- Variáveis microdidáticas ou locais, que se referem às fases ou sessões de pesquisa, como número de alunos participantes, quantas serão as possíveis sessões, sessões em grupo ou individuais etc.

Situando o leitor quanto à segunda fase dessa metodologia, no capítulo 4, mais precisamente na sessão 4.1, está a "construção e a análise *a priori"*, na qual apresentamos adaptações de algumas questões de contexto matemático e uma proposta de resolução das questões adaptadas segundo a TAD.

Na experimentação, que se refere à continuação do capítulo 4, no caso, sessão 4.2, o pesquisador vai ao campo e, atento às variáveis microdidáticas, colhe dados para serem confrontados com os resultados obtidos na *análise a priori*.

Finalmente, na última sessão da Engenharia Didática, faremos primeiramente, na análise a *posteriori,* a confrontação dos dados colhidos na fase anterior, a experimentação, e, passando para o estágio seguinte, analisaremos se houve validação ou não dos resultados.

Destinaremos os capítulos 5 e 6 dessa dissertação, respectivamente Análise e Discussão dos Resultados e Considerações Finais, para a última fase dessa metodologia.

3 O INGRESSO AO ENSINO SUPERIOR

Neste capítulo, faremos, primeiramente, um breve histórico sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), apresentando sua evolução no formato da prova e no quesito importância no cenário escolar brasileiro, no decorrer dos 15 anos de sua existência. Em seguida teceremos alguns comentários sobre o extinto vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, além de seu vestibular seriado PISM – Programa de Ingresso Seletivo Misto.

3.1 O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM

A partir das avaliações de larga escala realizadas pelo Governo Federal como Prova Brasil, SAEB e Provão, as políticas públicas focaram as séries finais da Educação Básica, o Ensino Médio, e, “atendendo a necessidade da legislação, visto que a LDB n^o 9.394/96 estabelece que todos os níveis de ensino devem ser objeto de avaliação externa” (REIS, 2009, p.61), criaram, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), cujo objetivo é avaliar o desempenho do estudante ao fim de sua escolaridade na Educação Básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade.

Por onze anos, de 1998 a 2008, este exame foi composto por uma redação com tema proposto e 63 questões objetivas e contextualizadas. Diferentemente da grande maioria dos vestibulares da época, o exame em pauta não fixava um número determinado de questões por matéria, a saber: Matemática, Português, Física, Química, Biologia, Geografia e História. As Línguas Estrangeiras não eram contempladas nesse exame.

A Tabela 1 abaixo nos informa a respeito do número de questões de matemática ou que contemplavam ideias matemáticas, de 1998 a 2008.

Tabela 1 – Quantidade de questões de Matemática no período de 1998 a 2008.

Ano	Número de Questões de Matemática
1998	18
2009	18
2000	11
2001	16
2002	14
2003	14
2004	18
2005	17
2006	13
2007	14
2008	13

Fonte: SILVA, 2010, p.53

Na edição de 2004, tivemos o primeiro indício de que o ENEM se posicionaria como meio de se obter algum benefício no acesso ao Ensino Superior, uma vez que, neste ano, “o Ministério da Educação instituiu o Programa Universidade para Todos (ProUni), vinculando a concessão de bolsas em Universidades privadas à nota obtida no ENEM”. (REIS, 2009, p.61-62)

A partir de 2009, foram implementadas mudanças no exame, dentre as quais passou-se a utilizá-lo como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Segundo o Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira –, órgão responsável pelo desenvolvimento e coordenação do exame, essas mudanças “contribuem para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para a mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio”[8].

A partir de então, o Governo Federal respeita a autonomia das universidades quanto à utilização ou não do ENEM como mecanismo de seleção de candidatos a vagas. Embora a grande maioria das universidades do país tenha aderido ao exame como critério de seleção para a ocupação de suas vagas disponíveis, outras instituições ainda resistem a esse processo, como é o caso da Universidade Federal

[8] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem. Acesso em: 23 maio 2013.

do Rio Grande do Sul[9] (UFRGS), da Universidade de Brasília (UnB) e da Universidade Federal da Paraíba (UFPB)[10], até a data da pesquisa.

A utilização dos resultados deste exame para acesso ao ensino superior pode ocorrer de várias formas e as próprias universidades podem escolher o modo. Algumas instituições optaram por adotá-lo como fase única, como é o caso da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG e da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Outras universidades utilizam o referido exame combinado com seus processos seletivos próprios, como é o caso da UFJF que disponibiliza 70% das vagas pelo ENEM/SISU e as demais pelo vestibular seriado PISM.

Outras universidades o utilizam apenas como primeira fase, como é o caso da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) na qual o ENEM representa a 1ª fase do Vestibular de Verão e critério único para Vestibular de Inverno[11].

O *Novo ENEM*, como passou a ser chamado a partir de 2009, ganhou novo formato, e o seu conteúdo passou a ser definido a partir da Matriz de Referência em quatro áreas do conhecimento, a saber:

- Linguagens, códigos e suas tecnologias, que abrange o conteúdo de Língua Portuguesa (Gramática e Interpretação de Texto), Língua Estrangeira Moderna, Literatura, Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação.
- Matemática e suas tecnologias.
- Ciências da Natureza e suas tecnologias, que abrange os conteúdos de Química, Física e Biologia.
- Ciências Humanas e suas tecnologias, que abrange os conteúdos de Geografia, História, Filosofia, Sociologia e conhecimentos gerais[12].

Cada uma dessas quatro áreas do conhecimento passou a ter número determinado de questões em um total de 180. Assim, o exame passou a se

[9] Disponível em: http://www.estadao.com.br/noticias/vidae,sisu-80-das-universidades-federais-ja-aderiram,1033511,0.htm. Acesso em: 23 maio 2013.
[10] Disponível em: http://noticias.terra.com.br/educacao/enem/enem-vai-mudar-vestibular-das-maiores-universidades-do-pais-em-2013,2de50bc65c6ad310VgnVCM3000009acceb0aRCRD.html: Acesso em: 23 maio 2013.
[11] Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/enem/lista-adesao-enem.htm. Acesso em: 23 maio 2013.
[12] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/conteudo-das-provas. Acesso em: 23 maio 2013.

estender por dois dias, com 90 questões por dia, além de, no segundo dia, também ser aplicada a redação.

Diferentemente dos vestibulares tradicionais, o Novo ENEM não é baseado em conteúdos específicos e sim em uma Matriz de Referências constituída por Competências e Habilidades. Comum a todas as áreas de conhecimento, os Eixos Cognitivos apresentam:

> **I. Domínio de linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
> **II. Compreensão de fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricogeográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
> **III. Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> **IV. Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> **V. Elaborar propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural. (BRASIL, 2013, p.1)

Em particular, embora na área de Matemática e suas Tecnologias, sejam apresentadas sete Competências, e cada Competência possuir certo número de Habilidades, vamos focar as Competências e Habilidades que se referem ao objeto matemático função e as que são exigidas para solucionar cada uma das tarefas.

> **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**
> **H6** - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
> **H7** - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
> **H8** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. (BRASIL, 2009, p.5-7)

Outra função desse exame é a certificação de conclusão do Ensino Médio, para alunos maiores de dezoito anos e que não concluíram esse nível de escolaridade na idade adequada, conforme o art. 38 da Lei nº 9.394/96, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Para isso, basta o participante do ENEM, no ato da inscrição, indicar que deseja realizar o exame para obter o certificado de conclusão do Ensino Médio e em qual instituição.

A partir de 2010, o ENEM ganhou a versão PPL – ENEM para Pessoas Privadas de Liberdade – com o mesmo formato, mesma proposta e mesmas possibilidades para seu público; essa modalidade de exame possui mesmo número de questões divididas pelas quatro áreas do conhecimento e uma redação com tema proposto[13].

3.2 O VESTIBULAR E O PROGRAMA DE INGRESSO SERIADO MISTO / UFJF

O tradicional vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, que por muitos anos foi constituído de provas objetivas e discursivas formuladas pelos professores da própria instituição, continha, predominantemente, questões que aqui classificamos como “atividades de contexto matemático”. Nos anos 90, surgiu uma segunda opção para o ingresso a esta instituição, o Programa de Ingresso Seriado Misto (PISM), no qual os estudantes fariam três provas, cada uma ao final de cada um dos três anos do Ensino Médio, e a nota final seria obtida por meio da média ponderada das notas dos Módulos I, II e III, nos quais os respectivos pesos são de 20%, 30% e 50%.[14]

Em 2009, assim como já abordado, o ENEM ganhou um novo formato e passou a substituir alguns vestibulares pelo Brasil e, em Juiz de Fora não foi diferente. Nos anos de 2009, 2010 e 2011, o clássico vestibular da UFJF existiu concomitantemente com o ENEM mas, ao final de 2011, ficou definido que o ENEM substituiria as provas de questões objetivas e a universidade local se encarregaria

[13] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/certificacao. Acesso em: 13 maio 2013.
[14] Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/pism. Acesso em: 17 out. 2013.

em organizar as provas com questões discursivas[15]. Em 2012, a Universidade adotou esse exame como a primeira etapa do vestibular, ainda seguindo o modelo de duas fases. Para o ano de 2013, novas mudanças ocorreram e a chamada segunda etapa, constituída de questões discursivas foi extinta. Ou seja, o ENEM passaria a ser, junto do PISM, o novo processo de seleção de estudantes para as vagas oferecidas pela federal de Juiz de Fora. Mais precisamente, para este ano, 70% das vagas de cada curso serão disputadas pelos candidatos que fizerem opção pelo SISU (ENEM) e as demais vagas estarão destinadas aos candidatos do Módulo III do PISM[16].

Diante desse breve histórico, podemos notar que, de 2009 a 2013, o ENEM, a clássica prova de vestibular da UFJF e o PISM "conviveram" concomitantemente, possuindo valores iguais (ou parecidos), uma vez que por parte desse período, embora o primeiro não permitisse ao aluno ingressar no Ensino Superior da referida cidade mineira, assim como os dois últimos, oferecia, no entanto, possibilidades de ingresso em outras instituições do país. E, mesmo com essa importância, os exames apresentavam questões com naturezas bem distintas. O ENEM apresentou, predominantemente, questões de contexto cotidiano, enquanto as provas do vestibular da UFJF e do PISM, apresentaram, em sua grande maioria, questões de contexto matemático.

A seguir, apresentaremos um esboço da nossa investigação, na qual abordamos questões dos vestibulares da UFJF e do PISM, no período de 2009 a 2012, e, ao mesmo tempo, propomos questões, com o mesmo objeto matemático, porém de contexto cotidiano, culminando também para o Produto Educacional do presente trabalho.

---

[15] Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/enem/vestibular-ufjf-sera-substituido-pelo-enem-sisu/317127.html

[16] Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/. Acesso em: 11 out. 2013.

4 A INVESTIGAÇÃO

No presente capítulo iremos apresentar, inicialmente, algumas questões selecionadas do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, algumas questões que adaptamos segundo a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio e uma chave de resolução para cada questão segundo a Teoria Antropológica do Didático. Em seguida comentaremos um pouco sobre o perfil da turma na qual aplicamos as questões e, finalmente, apresentaremos as principais informações colhidas na análise das resoluções das questões.

4.1 AS QUESTÕES ELABORADAS

Selecionamos algumas questões de *função* dos vestibulares da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), período de 2009 a 2013, dentre as quais apresentaremos três. Concomitantemente, propomos três novas questões, por nós formuladas, ou adaptadas, com a intenção de aproximar o cotidiano ao objeto matemático das três primeiras. Inicialmente, essas questões eram em número de cinco pares, mas, no próprio processo do trabalho, aceitando a sugestão de uma primeira avaliação da presente investigação da Banca, verificamos que bastavam apenas 3 pares.

Vale a pena esclarecer que nessas adaptações das questões de contexto matemático, nem sempre é possível manter, fidedignamente, a mesma estrutura, uma vez que o cotidiano possui complexidades e limitações que ultrapassam os conteúdos de matemática para este nível de ensino, ou melhor, do Ensino Médio. Então propomos um critério de equivalência entre as questões de contexto matemático e as de contexto cotidiano. Esse critério se resume a dois pontos.

- Primeiro: As questões devem apresentar, no mínimo, uma competência em comum e mesmas habilidades segundo a matriz de referência do ENEM. Exceto, as habilidades que se referem à intervenção da realidade e a situações-problema, uma vez que estas não podem ser contempladas em questões de contexto matemático, pois as questões de contexto matemático são voltadas apenas para a matemática, não havendo conexão com o cotidiano.

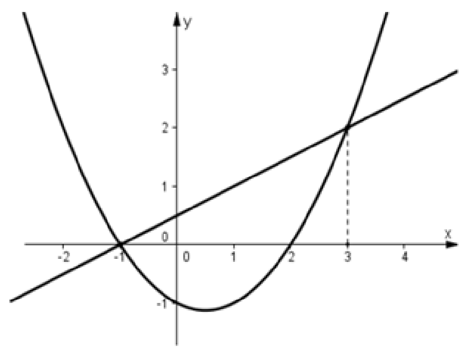
- Segundo: As questões devem apresentar o mesmo objeto matemático, diferindo, apenas, pelo contexto e conceitos em que estão inseridas.

Para cada questão proposta, sugerimos uma resolução sob a égide da Teoria Antropológica do Didático e apontamos a classificação por competências e habilidades segundo a matriz de referência do ENEM.

Agora, apresentamos as questões que serão seguidas de uma sugestão de resolução, à luz da Teoria Antropológica do Didático e sua classificação mediante as competências e habilidades da Matriz de Referência do ENEM.

Figura 5 – Questão 1 – UFJF 2010

Questão 1 (UFJF 2010) No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de uma função f, do 1º grau, e de uma função g, do 2º grau.



Considerando o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) > 0\}$, é correto afirmar que:

a) $S =]-1, 3[$ b) $S =]-1, 2[$ c) $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$ d) $S =]3, +\infty[$ e) $S = \emptyset$

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

Para a resolução à luz da Teoria Antropológica do Didático, destacamos na Figura 5, o desenvolvimento da Questão 1 do clássico vestibular da UFJF de 2010:

- *Tarefa* (*T*): Distinguir a função cujo gráfico é uma reta da função cujo gráfico é uma parábola e identificar para quais valores de x os valores numéricos da função f são superiores aos da função g.
- *Técnica* (τ):

A reta é o esboço do gráfico da função f. (16)

A parábola é o esboço do gráfico da função g. (17)

Sabendo quais são os gráficos de f e g, por meio de análise de gráficos, observamos que f está acima de g, para x variando de -1 até 3.

- *Tecnologia* (θ): Na passagem (16), concluímos que o gráfico de f é a reta, pois toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta.

Na passagem (17), concluímos que o gráfico de g é a parábola, pois toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola.

- *Teoria* (Θ): Na *tecnologia* (θ) utilizamos, primeiramente, o conceito de função polinomial do primeiro grau que é uma função cuja expressão geral é $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta, deixamos tal explicação para o Anexo 2 desse trabalho.

Na segunda parte da *tecnologia* utilizamos o conceito de função polinomial do segundo grau, cuja expressão geral é $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola, deixamos tal explicação para o Anexo 3 desse trabalho.

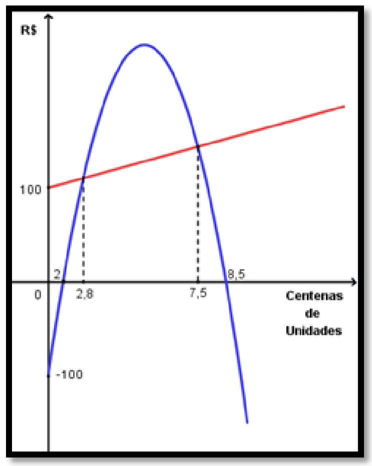
No quesito Matriz de Referência do ENEM para as competências e as habilidades, apontamos:

- Competência de área 5, “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômica ou técnico-científicas, usando representações algébricas”. Abarcando as habilidades: “Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas” (H20) e “Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).
- Competência de área 6, “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com habilidades: “Resolver problemas com dados apresentados em tabelas e gráficos” (H25) e

"Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos" (H26).

Figura 6 – Questão proposta 1

Questão proposta 1 O Departamento Financeiro de uma empresa de cosméticos apresentou um relatório referente aos lucros e/ou prejuízos do ano de 2010. O gráfico abaixo, contido no relatório, apresenta a função Lucro (L), do 2º grau e a função Custo (C), do 1º grau para a produção e venda de x centenas de unidades de cosméticos.



A faixa de número de peças produzidas e vendidas que compreende lucro superior aos custos dessa empresa é:

a) Entre -100 e 100. b) Entre 0 e 280. c) Entre 200 e 850.
d) Entre 280 e 750. e) Entre 280 e 850.

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, segue a resolução da Questão proposta 1, Figura 6, que surgiu a partir da Questão 1 do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF de 2010.

- *Tarefa* (*T*): Distinguir a função cujo gráfico é uma reta da função cujo gráfico é uma parábola, identificar em que faixa de número de cosméticos produzidos e vendidos teremos lucro maior que os custos e reconhecer a escala gráfica utilizada no eixo horizontal.
- *Técnica* (τ): Chamaremos Lucro (L) e Custo (C).

$$\text{O gráfico de C é a reta} \tag{18}$$

$$\text{O gráfico de L é a parábola.} \tag{19}$$

Sabendo quais são os gráficos de L e C, por meio de análise de gráficos, observamos que L está acima de C, entre 2,8 (x 100) e 7,5 (x 100) unidades de cosméticos produzidos e vendidos.

- *Tecnologia* (θ): Na passagem (18), concluímos que o gráfico de C é a reta, pois toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta.

Em (19), concluímos que o gráfico de L é uma parábola, pois toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola.

- *Teoria* (Θ): Primeiro, na *tecnologia* (θ), utilizamos o conceito de função do primeiro grau, que é uma função cuja expressão geral é $y = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta, deixamos tal explicação para o Anexo 2 desse trabalho.

Em um segundo momento, utilizamos o conceito de função do segundo grau, que é uma função cuja expressão geral é $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola, deixamos tal explicação para o Anexo 3 desse trabalho.

No quesito Matriz de Referência do ENEM para as competências e as habilidades, apontamos, assim como na questão anterior, Figura 5.

- Competência de área 5, “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis <u>socioeconômicas</u> ou técnico-científicas, usando representações algébricas” (<u>grifo nosso</u>). Abarcando as habilidades: “Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas” (H20) e “Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).
- Competência de área 6, “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com habilidades: “Resolver problemas com dados apresentados em tabelas e gráficos” (H25) e “Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos” (H26).

Assim como mencionado no início do capítulo, o par de questões apresentados, Figuras 5 e 6, contém mesmas competências e habilidades segundo a Matriz de Referência do ENEM, além de apresentarem o mesmo conhecimento matemático, função do primeiro e segundo graus.

Diante dessa chave de respostas as reservaremos para análise comparativa com as resoluções dos alunos.

Figura 7 – Questão 2 – UFJF EAD 2010

Questão 2 (UFJF EAD 2010) O valor máximo da função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = 7 – 2 · sen(x), é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 11

Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/downloads/universidade-federal-juiz-fora.htm. Acesso em: 15 out 2013.

A seguir, a resolução, à luz da Teoria Antropológica do Didático, da Questão 2 do Programa Seletivo para Educação à Distância da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2010, Figura 7:

- *Tarefa* (*T*): Calcular o máximo valor numérico da função f(x) fornecida.
- *Técnica* (τ):

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \tag{20}$$

$$\text{sen}(x) \geq -1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(x) \leq 1 \tag{21}$$

$$2 \cdot \text{sen}(x) \geq -2 \quad \text{e} \quad 2 \cdot \text{sen}(x) \leq 2 \tag{22}$$

$$-2 \cdot \text{sen}(x) \leq 2 \quad \text{e} \quad -2 \cdot \text{sen}(x) \geq -2 \tag{23}$$

$$7 - 2 \cdot \text{sen}(x) \leq 7 + 2 \quad \text{e} \quad 7 - 2 \cdot \text{sen}(x) \geq 7 - 2 \tag{24}$$

$$\underbrace{7 - 2 \cdot \text{sen}(x)}_{f(x)} \leq 9 \quad \text{e} \quad \underbrace{7 - 2 \cdot \text{sen}(x)}_{f(x)} \geq 5 \tag{25}$$

$$5 \leq f(x) \leq 9 \tag{26}$$

- *Tecnologia* (θ): Em (20), a função trigonométrica seno é limitada, variando de -1 até 1.

Em (21), separação das desigualdades sucessivas em duas.

Em (22), a multiplicação de números positivos, no caso 2, em desigualdades, não altera o sentido das mesmas.

Em (23), a multiplicação de números negativos, no caso -1, em desigualdades altera o sentido das mesmas.

Em (24), a adição de valores iguais nos dois membros das desigualdades preserva o sentido das últimas.

Em (25), reconhecimento da expressão f(x) em cada uma das desigualdades.

Em (26), junção das duas desigualdades em uma única.

- *Teoria* (Θ): Para justificar a *tecnologia*, devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que a função trigonométrica f(x) = sen(x), é limitada, deixamos tal explicação para o Anexo 4 desse trabalho.

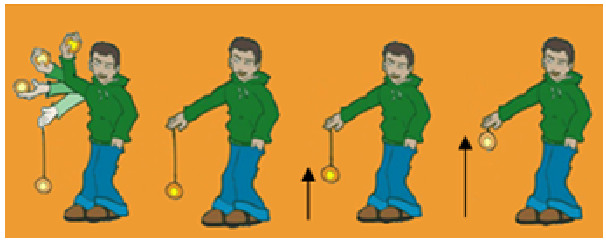
No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, destacamos as competências e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”. Com as habilidades: “Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas” (H19) e “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

Na sequência, Figura 8, será apresentada a Questão proposta 2, oriunda da questão anterior, Figura 7.

Figura 8 – Questão proposta 2

Questão proposta 2 O ioiô é um brinquedo constituído de uma corda ou barbante conectado a uma peça de plástico ou acrílico, por exemplo, que amarrada a um dos dedos da mão pode criar bons momentos de diversão. Com movimentos de subida e descida, pessoas treinadas em manejar um ioiô são capazes de executar várias manobras.



Fonte: http://www.facebook.com/TulaBombonieree Cia (modificado). Acesso em: 03 Mai 2013.

A imagem acima mostra um garoto brincando com seu ioiô, no qual o brinquedo é arremessado para baixo até que atinja uma altura mínima e, assim, retorna para sua mão, ou seja, atinge a altura máxima. Suponha que a distância da mão do garoto até o chão se mantenha constante e que o movimento de descida e de subida do ioiô seja descrito pela função h(t) = 1 – 0,2 · sen(t), sendo h a altura em metros, do brinquedo, e t, o tempo decorrido, em segundos, após o lançamento do mesmo. A altura mínima alcançada por esse ioiô está entre:

a) 0,6 m e 0,8 m. b) 0,7 m e 0,9 m. c) 0,8 m e 1,0 m. d) 0,9 m e 1,1 m. e) 1,0 m e 1,2 m.

Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo a Teoria Antropológica do Didático, a resolução da Questão proposta 2, Figura 8, é:

- *Tarefa* (*T*): Calcular a altura mínima alcançada pelo ioiô.
- *Técnica* (τ):

$$-1 \leq \text{sen}(t) \leq 1 \quad (27)$$

$$-1 \leq \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(t) \leq 1 \quad (28)$$

$$-0{,}2 \leq 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \leq 0{,}2 \quad (29)$$

$$0{,}2 \geq -0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad -0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \geq -0{,}2 \quad (30)$$

$$1 + 0{,}2 \geq 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad 1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t) \geq 1 - 0{,}2 \quad (31)$$

$$1{,}2 \geq \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t)}_{h(t)} \quad \text{e} \quad \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \text{sen}(t)}_{h(t)} \geq 0{,}8 \quad (32)$$

$$0{,}8 \leq h(t) \leq 1{,}2 \quad (33)$$

- *Tecnologia* (θ): (27) A função trigonométrica seno é limitada, variando de -1 até 1.

(28) Separação da dupla desigualdade em duas.

(29) A multiplicação de números positivos, no caso, 0,2, em desigualdades, não altera o sentido das mesmas.

(30) A adição de valores iguais nos dois membros das desigualdades preserva o sentido das mesmas.

(31) Soma e subtração de números fracionários de mesmo denominador.

(32) Reconhecimento da expressão h(t) em cada uma das desigualdades.

(33) Junção das duas desigualdades em uma única.

- *Teoria* (Θ): Para justificar a *tecnologia* (θ), devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que a função trigonométrica f(x) = sen(x), é limitada, deixamos tal explicação para o Anexo 4 desse trabalho.

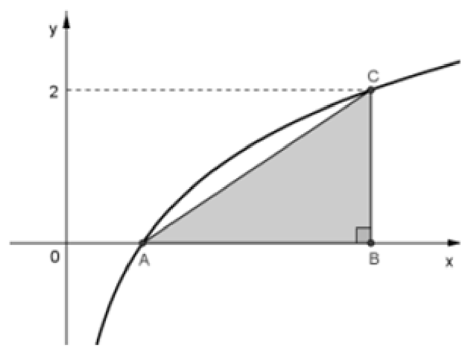
No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”. Com as habilidades: “Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas” (H19), “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22) e “avaliar propostas de intervenção na realidade por meio de conhecimentos algébricos” (H23).

Na próxima questão, Figura 9, será apresentada uma função logarítmica.

Figura 9 – Questão 3 – PISM I 2009

Questão 3 (PISM I 2009) No plano cartesiano abaixo, onde os eixos estão graduados em centímetros, está representado o gráfico da função f: $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$.



O perímetro do triângulo ABC, retângulo em B, em centímetros, mede:

a) $5 + 2\sqrt{3}$ b) $5 + \sqrt{13}$ c) 5   d) 6   e) $6 + 2\sqrt{5}$

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

Segundo a Teoria Antropológica do Didático, a resolução da Questão 3 do Programa de Ingresso Seletivo Misto da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009, Figura 9, é:

- *Tarefa* (*T*): Calcular o comprimento de cada um dos lados do triângulo ABC e somá-los.
- *Técnica* (τ): O comprimento do cateto $\overline{BC}$ já está determinado, bastando projetar o mesmo sobre o eixo vertical. Assim $\overline{BC}$ = 2 cm.

Para obtermos o comprimento do cateto $\overline{AB}$, calculemos os valores de A e B e a diferença B – A.

$$f(B) = 2 \tag{34}$$
$$\log_2 (B) = 2 \tag{35}$$
$$B = 2^2 \tag{36}$$
$$B = 4 \tag{37}$$

e,

$$f(A) = 0 \tag{38}$$
$$\log_2 (A) = 0 \tag{39}$$
$$A = 2^0 \tag{40}$$
$$A = 1 \tag{41}$$

Assim, $\overline{AB} = B - A = 4 - 1 = 3$.

Para calcularmos o comprimento da hipotenusa $\overline{AC}$, temos: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 13 \rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Finalmente, $\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = \sqrt{13} + 2 + 3 = 5 + \sqrt{13}$.

- *Tecnologia* (θ): Nas passagens (34) e (38), utilizamos as informações contidas no gráfico fornecido no enunciado da questão.

Nas passagens (35) e (39), substituímos o símbolo f(x) pela expressão que a determina, a saber, $\log_2 (x)$.

Nas passagens (36) e (40), usamos a definição de logaritmo, $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$, para calcularmos o valor numérico dos respectivos logaritmos.

Em (37) e (41), efetuamos os cálculos apresentados em, respectivamente, (36) e (40).

Para o cálculo da hipotenusa $\overline{AC}$, foi utilizado o Teorema de Pitágoras.

▪ *Teoria* (Θ): A definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, utilizada na *tecnologia* é um meio matemático de obtermos o valor de logaritmo de "a" na base "b" ($\log_b a$) que é o número que a base "b" deve ser elevado para obtermos o logaritmando "a". A *tecnologia* (θ) utilizada para o cálculo de $\overline{AC}$, devido ao alto grau de complexidade na demonstração do teorema de Pitágoras, deixamos tal explicação para o Anexo 5 desse trabalho.

No que tange à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

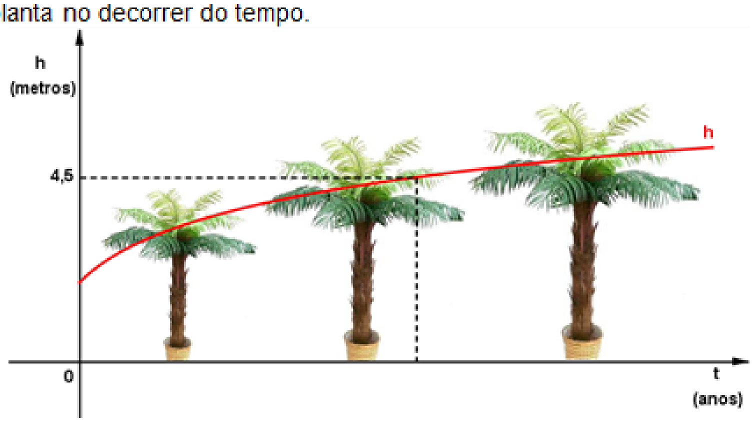
- Competência de área 2 "utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela; com a habilidade "Identificar características de figuras planas ou espaciais"(H7)
- Competência de área 5 "modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas"; com as habilidades: "interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas" (H20) e "utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação" (H22).
- Competência de área 6 "interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação". Com as respectivas habilidades, (H24) e (H26), "usar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências" e "analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos".

Diante desse conhecimento matemático munido das competências e habilidades exigidas pela Matriz de Referência do ENEM, propomos a Questão 3, contextualizada, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Questão proposta 3

Questão proposta 3 (UFSCar/modificada) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_2(t + 1)$, com h em metros e t em anos.

O gráfico abaixo ilustra o ano em que uma árvore dessa mesma espécie foi plantada (t = 0 corresponde ao ano de 2005, t = 1 corresponde ao ano de 2006, ...) e a curva vermelha descreve o crescimento da planta no decorrer do tempo.



De acordo com o enunciado e o gráfico, considere as afirmativas a seguir:

I) A altura dessa árvore, em 2012, era de 4,5 metros.
II) Essa árvore foi plantada com 1,8 metros de altura.
III) O crescimento médio dessa árvore, nos três primeiros anos após o seu plantio, foi de aproximadamente 66 cm por ano.

Estão corretas as afirmativas:

a) Todas estão corretas. b) II e III estão corretas. c) I e II estão corretas.
d) I e III estão corretas. e) Nenhuma está correta.

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, a resolução da Questão proposta 3, Figura 10, segundo a Teoria Antropológica do Didático:

- *Tarefa* (*T*): Analisar cada uma das três afirmativas decidindo por sua veracidade ou falsidade.
- *Técnica* (τ): I) Afirmação verdadeira, pois no ano de 2012, t = 7.

$$h(7) = 1{,}5 + \log_2(7 + 1) \tag{42}$$

$$h(7) = 1{,}5 + \log_2(8) \tag{43}$$

$$h(7) = 1{,}5 + 3 \tag{44}$$

$$h(7) = 4{,}5 \text{ metros} \tag{45}$$

II) Afirmação falsa, pois a árvore foi plantada em 2005 e t = 0.

$$h(0) = 1{,}5 + \log_2(0 + 1) \tag{46}$$

$$h(0) = 1{,}5 + \log_2(1) \tag{47}$$

$$h(0) = 1{,}5 + 0 \quad (48)$$

$$h(0) = 1{,}5 \text{ metros} \quad (49)$$

III) Afirmativa verdadeira. Em 2005, t = 0 e h(0) = 1,5 metros (visto na afirmação II). Em 2008, t = 3.

$$h(3) = 1{,}5 + \log_2(3 + 1) \quad (50)$$

$$h(3) = 1{,}5 + \log_2(4) \quad (51)$$

$$h(3) = 1{,}5 + 2 \quad (52)$$

$$h(3) = 3{,}5 \text{ metros} \quad (53)$$

Assim, o crescimento médio dessa árvore, nos três primeiros anos, após seu plantio é: $\frac{3{,}5 - 1{,}5}{3} \approx 0{,}66$ metros = 66 centímetros por ano.

- *Tecnologia* (θ): Nas passagens (42), (46) e (50), substituímos os respectivos valores numéricos 7, 0 e 3 na função $h(t) = 1{,}5 + \log_2 (t + 1)$ fornecida no enunciado da questão.

Nas passagens (43), (47) e (51), operamos com somas os valores substituídos nos respectivos passos anteriores.

Nas passagens (44), (48) e (52), usamos a definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, para calcularmos o valor numérico dos respectivos logaritmos.

Em (45), (49) e (53), operamos com soma de números naturais.

A *técnica (τ)* utilizada em III ainda diz respeito à noção de Média Aritmética para calcularmos o crescimento médio da árvore nos três primeiros anos após seu plantio. Para tal, descobrimos o crescimento total nesses três anos, 3,5 – 1,5 = 2 metros, e dividimos pelo número de anos, 3.

- *Teoria* (Θ): A definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, utilizada na *tecnologia* (θ) é um modo matemático de obtermos o valor de logaritmo de “a” na base “b” ($\log_b a$) que é o número que a base “b” deve ser elevado para obtermos o logaritmando “a”.

No que tange à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”; com as habilidades: “interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas” (H20). “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22) e “avaliar propostas de intervenção na realidade por meio de conhecimentos algébricos” (H23).

- Competência de área 6 “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com as respectivas habilidades, (H24) e (H26), “usar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências” e “analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos”.
- Competência de área 7 “compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística”. Com a habilidade “utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação” (H29).

Para o desenvolvimento dessas questões com os sujeitos dessa investigação, faz necessário conhecê-los, conforme será, a seguir, descrito.

4.2 O PERFIL DA TURMA

A turma escolhida para a aplicação das questões é a mesma na qual o autor do presente trabalho já havia trabalhado como professor por dois anos. O professor e a turma se conheceram no início de 2012, no primeiro ano do Ensino Médio. Com o transcorrer do mestrado, o professor pesquisador escolheu essa turma para aplicação das atividades pelo fato da turma se mostrar, na grande maioria das aulas, dedicada em aprender e em obter bons resultados em avaliações, além de serem comprometidos com as aulas de Matemática.

Em 2013, a turma perdeu alguns colegas, por mudança de cidade, e ganhou outros, de tal forma que aumentou o número de alunos, e o interesse pelos conteúdos ministrados continuou basicamente o mesmo.

Já em 2014, à turma, se juntaram mais quatro alunos que, devido ao pouco tempo de contato, não sabemos dizer se estão alinhados aos demais, no quesito interesse pela Matemática.

Como o objeto matemático trabalhado nesse trabalho é o de função, conteúdo visto no primeiro ano do Ensino Médio, não se tem muitas informações a respeito do modo como se deu a apresentação dos mesmos para a metade da turma (os alunos que entraram nesse colégio em 2013 ou em 2014).

Dessa maneira, como o objetivo desta investigação é analisar as possíveis diferenças de performances na resolução de questões de contexto matemático e de contexto do cotidiano, na aplicação das questões, dividimos a turma em dois grupos de tal forma que enquanto um grupo resolvia a questão de contexto matemático o outro resolvia a de contexto cotidiano. Assim, os grupos foram compostos por 11 e 10 alunos, todos com os nomes fictícios, já que mantemo-nos no anonimato, de tal forma que cada aluno tenha sido contemplado com pelo menos uma questão de contexto matemático e uma de contexto cotidiano, sem que questões equivalentes tenham sido resolvidas pelo mesmo estudante e pelo mesmo grupo.

4.3 A APLICAÇÃO E A RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES

Aplicamos os três pares de questões, em momento único, com duração de cerca de duas aulas de cinquenta minutos, para estudantes da Educação Básica, de um colégio particular de Viçosa-MG. Sendo mais preciso, a investigação ocorreu com alunos do terceiro ano do Ensino Médio e não foi aleatória.

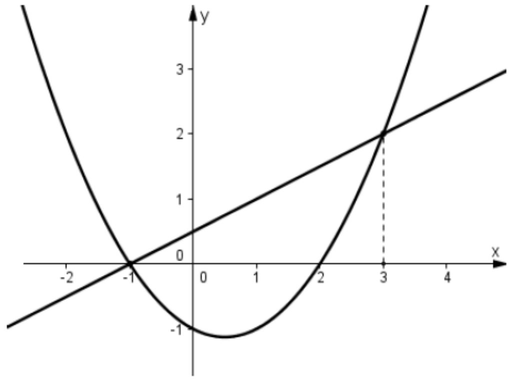
A seguir, destacaremos alguns resultados particulares identificados nas resoluções, buscando analisar a partir da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e da *sensibilidade numérica*.

4.3.1 VARIÁVEIS MICRODIDÁTICAS: RESULTADOS INDIVIDUAIS

A Questão 1, a qual relembraremos o enunciado a seguir, não foi resolvida corretamente por nenhum dos estudantes. Acreditamos que o fato da mesma apresentar dois gráficos no mesmo plano cartesiano tenha trazido obstáculos para os alunos, mesmo que nenhum deles tenha relatado isso. Um fato importante sobre essa questão é que, embora seja possível, não é necessário saber as expressões das funções para resolvê-la. Um dos estudantes apresentou um esboço de resolução nesse sentido, Figura 11.

Figura 11 – Enunciado da Questão 1 e resolução da estudante Fernanda

Questão 1 (UFJF 2010) No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de uma função f, do 1º grau, e de uma função g, do 2º grau.



Considerando o conjunto S = {x ∈ ℝ : f(x) - g(x) > 0}, é correto afirmar que:

a) S =]-1, 3[b) S =]-1, 2[c) S =]-∞, -1[∪]3, +∞[d) S =]3, +∞[e) S = ∅

Resolução

f(x): 1º grau
g(x): 2º grau

Sabe-se que $\overbrace{f(x)}^{y} = ax+b$
$g(x) = ax^2 + bx + c$

~~• Determinar o valor de X em cada função.~~

Na função de 1º grau, a partir do gráfico, determina-se que quando x=3, y = 2.

$f(3) = a.3+b$
$y = 3a + b$
$2 = 3.a + b$
$\boxed{a+b = \frac{2}{3}}$

$* \ f(x) = y$
$f(3) = 3a+b$
$y = 3a+b$

$g(x) = ax^2 + bx + c$
$\downarrow$
$a>0$

Soma
Produto

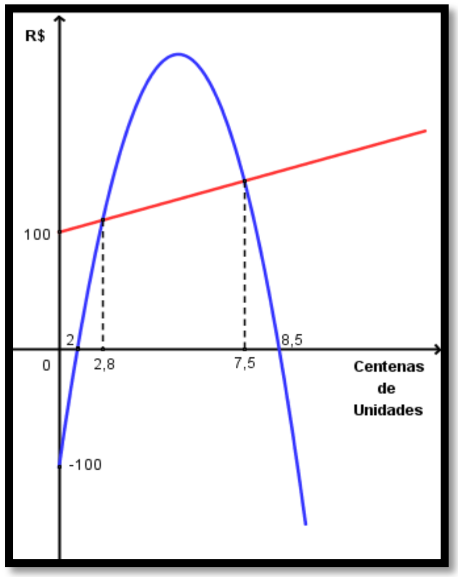
Fonte: Dados da pesquisa

Observe que a estudante Fernanda, embora tenha identificado corretamente que as funções apresentadas no exercício são do primeiro e do segundo grau, ela ficou presa às expressões das funções para operar algebricamente e resolver a desigualdade solicitada nesta atividade. Embora a intenção da aluna seja correta, ou seja, embora mostre indícios de que identificou corretamente a *tarefa* (*T*) do problema, e tenha apresentado um esboço de sugestão de resolução, uma *Técnica* (τ), diferente do proposto, a mesma optou por um caminho mais seguro.

A Questão proposta 1 foi resolvida corretamente por cinco estudantes, de um total de onze, e destacamos a resolução de Bruna, Figura 12, pois ela demonstra <u>utilizar o conhecimento cotidiano</u> sobre custos e lucro para argumentar e, consequentemente, concluir corretamente a resolução da questão.

Figura 12 – Enunciado da Questão proposta 1 e Resolução da estudante Bruna

Questão proposta 1 O Departamento Financeiro de uma empresa de cosméticos apresentou um relatório referente aos lucros e/ou prejuízos do ano de 2010. O gráfico abaixo, contido no relatório, apresenta a função Lucro (L), do 2º grau e a função Custo (C), do 1º grau para a produção e venda de x centenas de unidades de cosméticos.



A faixa de número de peças produzidas e vendidas que compreende lucro superior aos custos dessa empresa é:

a) Entre -100 e 100. b) Entre 0 e 280. c) Entre 200 e 850.
d) Entre 280 e 750. e) Entre 280 e 850.

Resolução

Eu acho que é entre 280 e 750, pois para produzir o produto há um valor a ser gasto para isso e o produto só terá lucro a partir de um certo ponto, que compreende essa faixa de quantidade.

↳ Não tenho certeza

Fonte: Dados da pesquisa

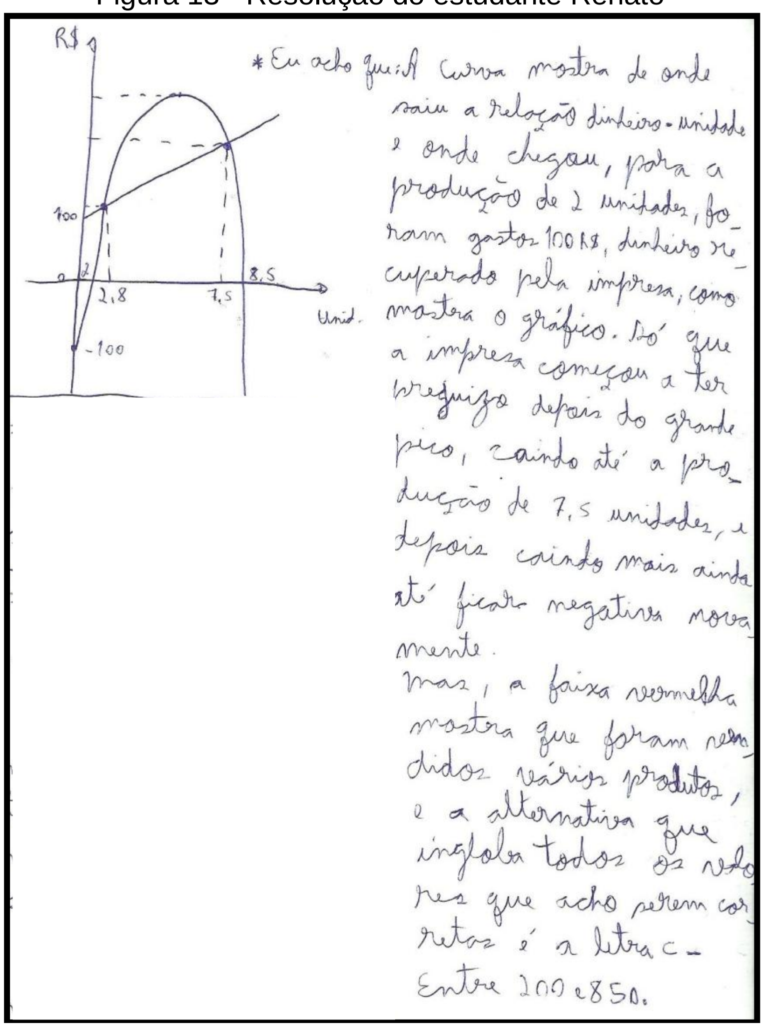
Observe que os argumentos, ou seja, a *tecnologia* (θ), utilizados por Bruna são todos com a linguagem cotidiana e tais justificativas não seriam plausíveis para resolver a Questão 1, Figura 5, muito embora percebemos que sua t*écnica* (τ) tenha sido a de fazer uma análise gráfica, assim como propomos na chave de resolução dessa questão.

Concluímos que, para essa resolução, o conhecimento cotidiano tenha sim ajudado o estudante a resolver a questão.

Dentre os estudantes que não concluíram corretamente a Questão proposta 1, destaca-se a resolução de Renato pois, assim como acreditamos que conhecimento cotidiano pode favorecer a resolução das questões, também cremos que o conhecimento cotidiano equivocado, ou, até mesmo a falta desse conhecimento, favorece o insucesso em questões desse tipo.

Veja na Figura 13 a resolução do estudante Renato.

Figura 13 - Resolução do estudante Renato



* Eu acho que: A curva mostra de onde saiu a relação dinheiro-unidade e onde chegou, para a produção de 2 unidades, foram gastos 100 R$, dinheiro recuperado pela empresa, como mostra o gráfico. Só que a empresa começou a ter prejuízo depois do grande pico, caindo até a produção de 7,5 unidades, e depois caindo mais ainda até ficar negativo novamente.

Mas, a faixa vermelha mostra que foram vendidos vários produtos, e a alternativa que engloba todos os valores que acho serem corretos é a letra C – Entre 200 e 850.

Fonte: Dados da pesquisa

Observe que o estudante não soube analisar a parábola que fornece o lucro da empresa, pois afirmou que após o ponto mais alto, vértice da parábola, a empresa começou a ter prejuízo. Assim como ao afirmar que a “faixa vermelha” mostra que foram vendidos vários produtos, deixa indícios que não entendeu bem, ou que não sabe o conceito de custo e prejuízo.

A Questão 2 foi resolvida por onze alunos e nenhum deles apresentou desenvolvimento correto. Analisando tais resoluções, foi notório que o conceito de trigonometria para esses alunos repousa sobre as relações de seno, cosseno e tangente dos arcos 30º, 45º e 60º. Nenhum deles lembrou-se que a função seno é limitada, variando de -1 até 1, chegando a afirmarem que “quanto maior o ‘x’ maior o seno”, Figura 14, ou que “o valor máximo pode ser qualquer um”, Figura 15.

Figura 14 – Enunciado da Questão 2 e resolução da estudante Daniela

Questão 2 (UFJF EAD 2010) O valor máximo da função f : ℝ → ℝ, definida por f(x) = 7 – 2 · sen(x), é igual a:

a) 5   b) 6   c) 7   d) 9   e) 11

Resolução

$f(x) = 7 - 2 \cdot sen(x)$ → função do primeiro grau do tipo $y = ax+b$

é igual a

$f(x) = 7 - 2\,senx.$

$sen\,30° = 1/2 = 0{,}50$

$sen\,45° = \sqrt{2}/2 = 0{,}57$

$sen\,60° = \sqrt{3}/2 = 0{,}85$

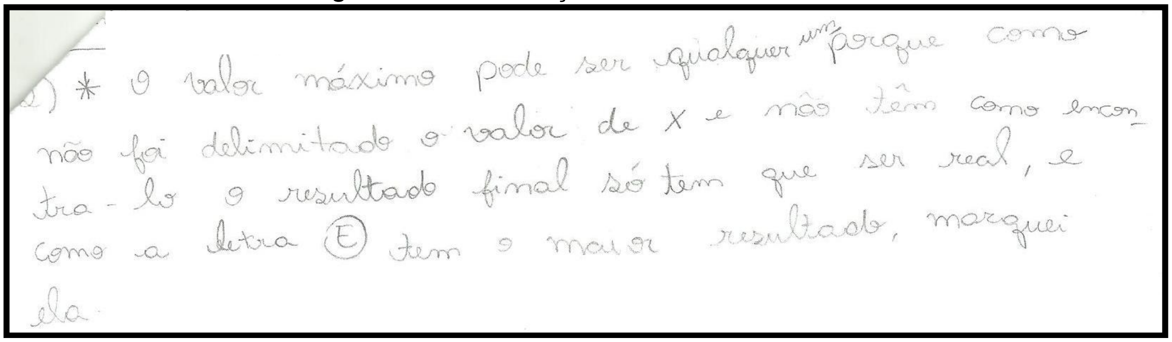
Quanto maior o "x", maior o seno.

• $\sqrt{2}$ eu acho que é 1,14.

• $\sqrt{3}$ eu acho que é 1,7

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 15 – Resolução do estudante Mario


2) * o valor máximo pode ser qualquer um porque como não foi delimitado o valor de x e não têm como encontra-lo o resultado final só tem que ser real, e como a letra E tem o maior resultado, marquei ela.

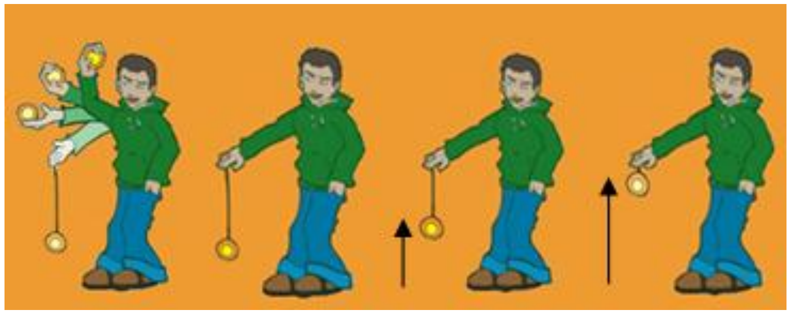
Fonte: Dados da pesquisa.

Tais argumentos mostram que o conteúdo matemático função trigonométrica não está bem fundamentado, não somente para estes estudantes, mas também para aqueles que sequer apresentaram tentativas de t*écnicas* (τ) para o problema, ou seja, não esboçaram sequer tentativas para resolver essa questão. Mas, como veremos a seguir, nesse par de questões, o conhecimento equivocado sobre trigonometria, ou a falta dele, gerou argumentos confusos e inconsistentes, embora na questão contextualizada (Questão proposta 2), tenha aparecido um indício de *sensibilidade numérica*, como por exemplo, resposta dada pela aluna na Figura 16.

A Questão proposta 2, assim como sua equivalente de contexto matemático, apresentou alto índice de insucesso, com demonstrações de que a lembrança por parte dos alunos no que diz respeito ao conteúdo trigonometria, está fortemente voltado aos valores de seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º. Porém, acreditamos que por se tratar de uma questão de contexto cotidiano, um estudante, Figura 16, esboçou um raciocínio no qual o conhecimento da trajetória feita pelo ioiô favoreceu a argumentação, gerando, inclusive, um cuidado na análise da resposta numérica, aparentando utilizar o que chamamos de *sensibilidade numérica*.

Figura 16 – Enunciado da Questão proposta 2 e resolução da estudante Carla

Questão proposta 2 O ioiô é um brinquedo constituído de uma corda ou barbante conectado a uma peça de plástico ou acrílico, por exemplo, que amarrada a um dos dedos da mão pode criar bons momentos de diversão. Com movimentos de subida e descida, pessoas treinadas em manejar um ioiô são capazes de executar várias manobras.



Fonte: http://www.facebook.com/TulaBombonieereeCia **(modificado). Acesso em: 03 Mai 2013.**

A imagem acima mostra um garoto brincando com seu ioiô, no qual o brinquedo é arremessado para baixo até que atinja uma altura mínima e, assim, retorna para sua mão, ou seja, atinge a altura máxima. Suponha que a distância da mão do garoto até o chão se mantenha constante e que o movimento de descida e de subida do ioiô seja descrito pela função h(t) = 1 - 0,2 · sen(t), sendo h a altura em metros, do brinquedo, e t, o tempo decorrido, em segundos, após o lançamento do mesmo.
A altura mínima alcançada por esse ioiô está entre:

a) 0,6 m e 0,8 m. b) 0,7 m e 0,9 m. c) 0,8 m e 1,0 m.
d) 0,9 m e 1,1 m. e) 1,0 m e 1,2 m.

Resolução

2) $h(t) = 1 - 0,2 \cdot sen(t)$ → Subida e descida

Para baixo → altura mínima
Volta para mão → altura maxima

h= altura
t = tempo

Sabendo que para encontrarmos o resultado usamos formula h(t)=1-0,2.sen(t) podemos afirmar que a altura mínima é menor do que 1, sendo assim as alternativas C, D e E são canceladas, sobrando A ou B.

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que mesmo a aluna Carla não sabendo operar com os conceitos de trigonometria, como apresentamos na chave de resolução dessa questão, a análise por ela feita, baseada no movimento de descida e subida do ioiô, assim como ela mesma explicita na t*écnica* (τ): "*Para baixo* ⟶ *altura mínima* e *Volta para mão* ⟶ *altura máxima"*, ou seja, o conhecimento cotidiano a auxiliou na análise das alternativas, mesmo que não tenha concluído com unicidade, qual alternativa assinalar.

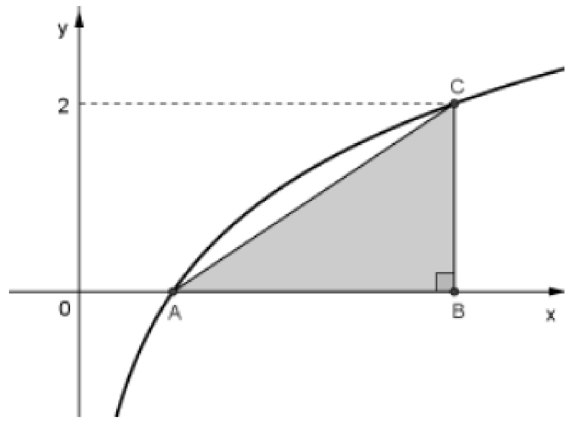
Concluímos que para essa resolução o conhecimento cotidiano e a incorporação de sentido ao número, *sensibilidade numérica*, tenham sim ajudado o estudante a resolver a questão.

A Questão 3 e a Questão proposta 3, assim como relataremos na análise global das resoluções, apresentaram alto índice de insucesso. Fato deixado claro pelos próprios estudantes por envolver o objeto matemático logaritmo.

Dos onze alunos que fizeram a Questão 3, apenas um apresentou sua resolução de maneira correta. Isso pode ser constatado na Figura 17, quando a maneira de se resolver a Questão 3, apresentada pelo estudante se assemelha bastante à chave de resolução anteriormente apresentada.

Figura 17 – Enunciado da Questão 3 e resolução da estudante Daniela

Questão 3 (PISM I 2009) No plano cartesiano abaixo, onde os eixos estão graduados em centímetros, está representado o gráfico da função f: $\mathbb{R}_{+}^{*} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = $\log_2$ x.



O perímetro do triângulo ABC, retângulo em B, em centímetros, mede:

a) $5 + 2\sqrt{3}$ b) $5 + \sqrt{13}$ c) 5 d) 6 e) $6 + 2\sqrt{5}$

Resolução

$\log_b a = c.$

$a = b^c$ (eu acho)

* No ponto C, y = 2.

$2 = \log_2 x$

$x = 2^2$

$x = 4$cm.

No ponto A, y = 0.

$0 = \log_2 x$

$2^0 = x$

$x = 1.$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$3^2 + 2^2 = (AC)^2$

$13 = (AC)^2$

$AC = \sqrt{13}$

Perímetro =

$\sqrt{13} + 2 + 3$

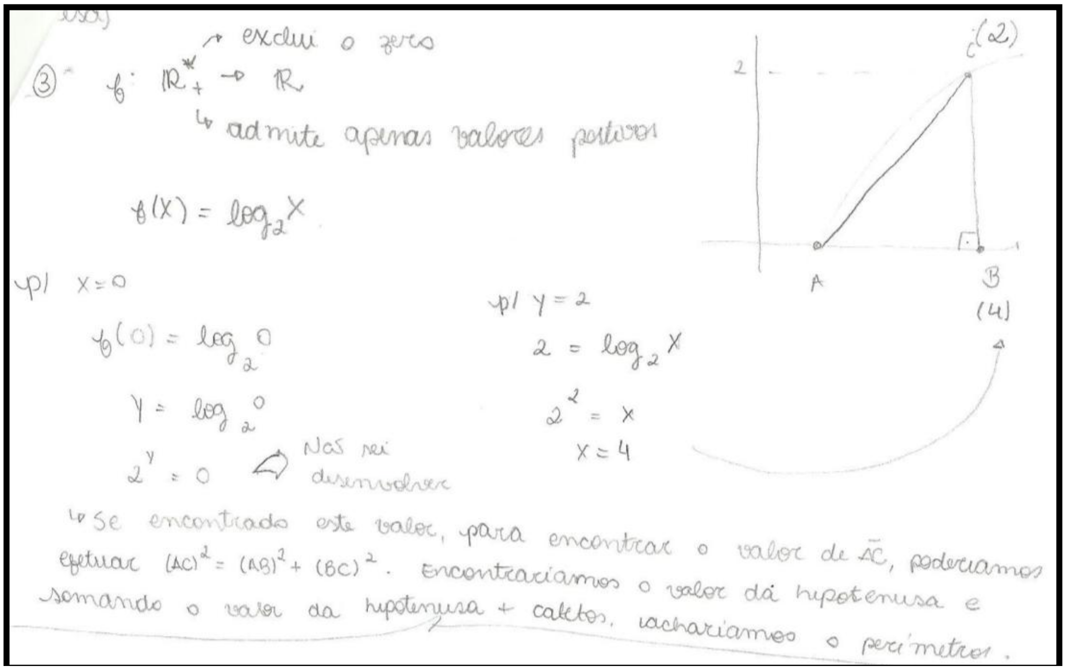
$5 + \sqrt{13}$ cm

Fonte: Dados da pesquisa.

Já a aluna Amanda, pelos argumentos apresentados, demonstrou saber muito bem o que deveria fazer para resolver esse exercício, porém se confundiu em uma das substituições de valores numéricos na expressão dada e não soube seguir na resolução com valores numéricos, embora soubesse a *tarefa* (*T*) e t*écnica* (τ) para tal.

Veja a resolução da aluna Amanda na figura 18 a seguir.

Figura 18 - Resolução da estudante Amanda



Fonte: Dados da pesquisa

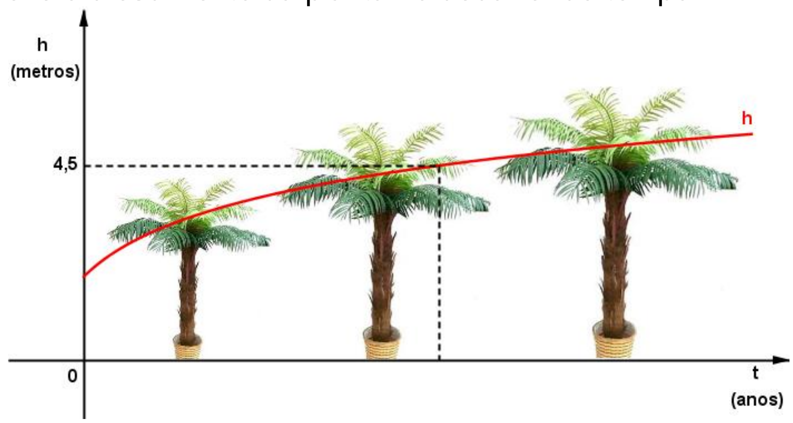
Na Questão proposta 3, embora nenhum dos dez alunos tenha apresentado resolução inteiramente correta, devido, novamente, ao fato da mesma passar por conhecimentos de logaritmo, as respostas apresentadas contêm maior número de argumentos, mesmo que às vezes incorretos, provavelmente devido ao fato de se tratar de uma questão de contexto cotidiano.

Um fato importante constatado se deve à falta de conhecimento apresentada a respeito de como se dá o crescimento da função logaritmo. Três alunos utilizaram da regra de três como *Técnica* (τ) para concluir que se a árvore cresceu 1,5 m em um ano, então, em 7 anos, ela cresceria 7 x 1,5 = 10,5 m, Figura 19, como se o crescimento da função logaritmo fosse proporcional ao tempo.

Figura 19 – Enunciado da Questão proposta 3 e resolução da estudante Ana

Questão proposta 3 (UFSCar/modificada) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_2(t + 1)$, com h em metros e t em anos.

O gráfico abaixo ilustra o ano em que uma árvore dessa mesma espécie foi plantada (t = 0 corresponde ao ano de 2005, t = 1 corresponde ao ano de 2006, ...) e a curva vermelha descreve o crescimento da planta no decorrer do tempo.



De acordo com o enunciado e o gráfico, considere as afirmativas a seguir:

I) A altura dessa árvore, em 2012, era de 4,5 metros.
II) Essa árvore foi plantada com 1,8 metros de altura.
III) O crescimento médio dessa árvore, nos três primeiros anos após o seu plantio, foi de aproximadamente 66 cm por ano.

Estão corretas as afirmativas:

a) Todas estão corretas. b) II e III estão corretas. c) I e II estão corretas.
d) I e III estão corretas. e) Nenhuma está correta.

Resolução

3 Acho que é a letra E)

Pelo enunciado eu entendi que ela foi plantada com 1,5m de altura. Então a afirmativa II) não é.

E se foi plantada em 2005 com 1,5m, pra 2012 se passaram 7 anos. E em 2012, a altura dessa arvore seria 10,5m. Então não seria a afirmativa I).

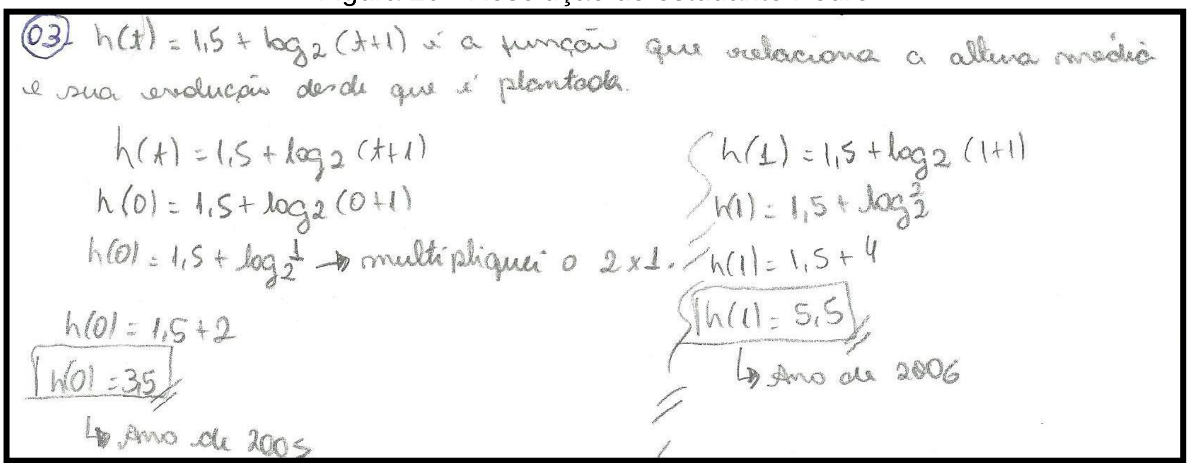
$$\begin{array}{r} 1{,}5 \\ \times 7 \\ \hline 10{,}5 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe nessa resolução, Figura 19, que por falta de incorporação de sentido ao número, *sensibilidade numérica*, a estudante afirma que a árvore cresce com a mesma intensidade durante sete anos sucessivos e não repara que a mesma ficaria extremamente alta com mais alguns anos.

Uma última análise nessa questão, em particular na resolução de Pedro, Figuras 20 e 21, mesmo não sabendo operar corretamente com logaritmos, ele nos dá indícios de sensibilidade numérica ao comparar uma altura da árvore, por ele obtida, com outro valor apresentado no exercício.

Figura 20 - Resolução do estudante Pedro



03) $h(t) = 1,5 + \log_2 (t+1)$ é a função que relaciona a altura média e sua evolução desde que é plantada.

$h(t) = 1,5 + \log_2 (t+1)$

$h(0) = 1,5 + \log_2 (0+1)$

$h(0) = 1,5 + \log_2 \frac{1}{2}$ → multipliquei o 2×1.

$h(0) = 1,5 + 2$

$\boxed{h(0) = 3,5}$

↳ Ano de 2005

$h(1) = 1,5 + \log_2 (1+1)$

$h(1) = 1,5 + \log_2 \frac{2}{2}$

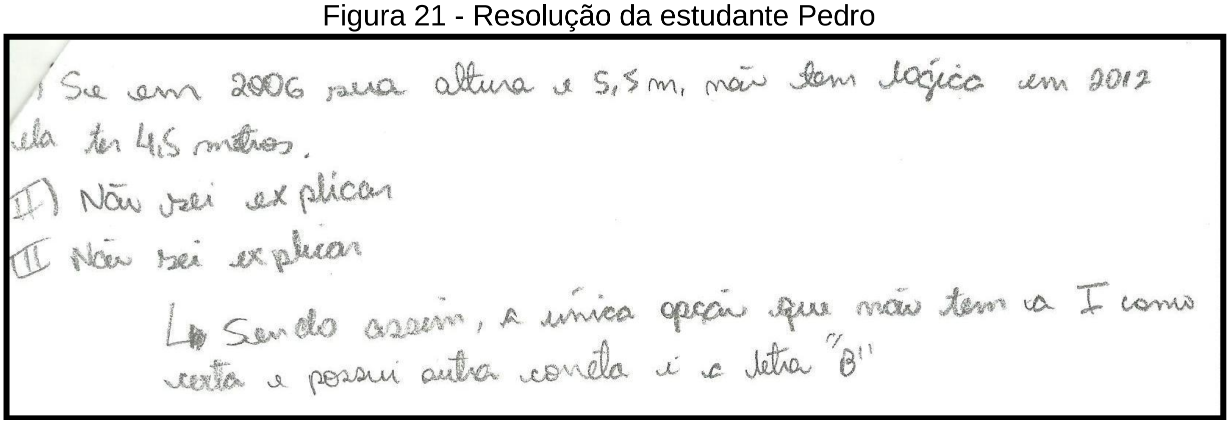
$h(1) = 1,5 + 4$

$\boxed{h(1) = 5,5}$

↳ Ano de 2006

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 21 - Resolução da estudante Pedro



Se em 2006 sua altura é 5,5 m, não tem lógica em 2012 ela ter 4,5 metros.

II) Não sei explicar

III Não sei explicar

↳ Sendo assim, a única opção que não tem a I como certa e possui outra correta é a letra "B"

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse par de questões, as resoluções com maiores êxitos ocorreram nas de contexto matemático. Nesse sentido, inferimos que os obstáculos apresentados diante do objeto matemático logaritmo tenham prejudicado a análise nos dois tipos de questões, uma vez que muitos alunos sequer esboçaram tentativa de resolvê-las.

No próximo item, será apresentado um resultado global das atividades aplicadas, seguindo as variáveis macrodidáticas tais como preconiza a metodologia dessa investigação, a Engenharia Didática.

4.3.2 VARIÁVEIS MACRODIDÁTICAS: RESULTADO GLOBAL

Destacaremos agora os principais resultados globais identificados nas resoluções.

- Como já foi relatado em 4.2, não temos muito conhecimento da vida estudantil dos sujeitos que participaram da investigação, mas acreditamos estarmos certos ao dizer que nenhum deles recordava com afinco o conteúdo matemático, função, uma vez que tal tema costuma ser abordado no primeiro ano do Ensino Médio. Dessa forma, muitos alunos chegaram a escrever no local da resolução das questões que não se recordavam bem dos conceitos matemáticos que supostamente deveriam ser utilizados nas questões.
- Dentre os conteúdos matemáticos abordados nos três pares de questões, aqueles de maior familiaridade por parte dos alunos foram os conceitos de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, as quais são “Questão 1” e “Questão proposta1”. Consequentemente, essas questões apresentaram maior índice de acerto e comentários matematicamente coerentes.

  Cinco alunos resolveram, de maneira correta. Outros alunos, não conseguiram concluir o raciocínio nessas questões, mas demonstraram saber os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento de suas resoluções. Acreditamos que o fato de os gráficos apresentados nessas questões possuírem duas curvas em um mesmo plano cartesiano tenha trazido obstáculos para os alunos.
- As questões que apresentaram os conteúdos de função trigonométrica ou logarítmica tiveram baixo índice de acerto e os próprios estudantes relataram não se recordar esses conceitos. Um deles afirmou não ter visto trigonometria enquanto aluno do primeiro ano da escola em que estudou.
- Nenhum dos vinte e um alunos resolveu corretamente qualquer uma das questões que envolvia o conteúdo de trigonometria e muitos deles sequer

esboçaram conhecimentos necessários para sua resolução. Ao passo que apenas um dos alunos conseguiu resolver corretamente alguma das questões que envolviam conhecimentos de logaritmo e um segundo demonstrou saber muito bem o que deveria fazer para ter sucesso nesse exercício, mas demonstrou certa confusão ao operar com os conceitos de logaritmo. Dez estudantes deixaram claro, a ponto de escrever no local de resolução que não se recordavam nada sobre os conceitos de logaritmo.

- As respostas dos estudantes às questões de contexto cotidiano, mesmo que, por vezes, incorretas, se apresentam de forma diferenciada no quesito cuidado em tentar resolver a questão, quando comparadas às questões de contexto matemático.
- O cuidado em incorporar sentido ao valor numérico obtido como resposta nas questões, termo por nós chamado de *sensibilidade numérica,* não foi observado com frequência nas resoluções e, quando foi percebido tal cuidado, as questões eram de contexto cotidiano.

Diante dessas descrições, das variáveis microdidáticas e das macrodidáticas, a seguir, no próximo capítulo, será abordada a análise mais detalhada sobre as atividades realizadas durante a fase da experimentação da Engenharia Didática, no sentido de discutir esses resultados, a partir dos confrontos possíveis de serem feitos entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesse capítulo faremos, seguindo as etapas de nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, a análise a *posteriori*, na qual há a confrontação dos dados colhidos na fase anterior, a experimentação, com os resultados obtidos na *análise a priori.*

A partir dos resultados obtidos podemos perceber, pelo alto índice de insucesso, principalmente nas questões que envolviam conceitos de funções logaritmo e trigonométrica, que se o estudante não possuir os conhecimentos básicos sobre o objeto matemático abordado, a questão, seja ela de contexto matemático, interdisciplinar ou cotidiano, não será resolvida de maneira completamente correta. Em outras palavras, não havendo conhecimentos básicos matemáticos, as hipóteses por nós apontadas, (i) ... *os estudantes podem, assim como o Inep - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - sugere em suas habilidades: "H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos" e "H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos", utilizar e adquirir novos conhecimentos do cotidiano e de outras áreas ao se depararem com problemas de matemática de contexto cotidiano e de contexto interdisciplinar* e (ii) *as questões que envolvem situações reais favorecem a prática da sensibilidade numérica (numeracy), fato que não é corriqueiro em atividades de contexto matemático,* não poderiam sequer ser alcançadas.

Podemos afirmar, diante da análise das questões resolvidas, que, as hipóteses, acima mencionadas, quase não foram alcançadas, conforme as resoluções das questões de trigonometria e de logaritmo, as quais tiveram grande número de insucesso.

Porém, não podemos deixar de citar algumas observações em questões de contexto cotidiano por nós identificadas.

A primeira delas, identificada na resolução da Questão proposta 1 da estudante Bruna, Figura 12, na qual, sabendo lidar com os conhecimentos do cotidiano apresentados no problema, a aluna argumenta e resolve apropriadamente a questão.

Observe que a aluna sequer precisou, assim como destacamos na *tarefa* (*T*) da nossa chave de resolução (p.48), seguindo a Teoria Antropológica do Didático, distinguir a função cujo gráfico é uma reta da função cujo gráfico é uma parábola, embora tenha identificado em que faixa de número de cosméticos produzidos e vendidos teremos lucro maior que os custos e reconhecido a escala gráfica utilizada no eixo horizontal, assim como apontamos.

A *técnica* (τ) por ela utilizada, de certa forma se aproxima, daquela sugerida por nós na chave de resolução (p.48), pois, assim como nós, utiliza-se da análise dos gráficos para afirmar que a faixa da produção e venda de produtos que gera lucro é de 280 a 750.

Já a t*ecnologia* (θ) utilizada pela estudante Bruna, embora correta, é bem distinta daquela apresentada por nós (p.48), uma vez que ela se utiliza muito mais de conhecimentos cotidianos. Assim justificou a estudante: "... para produzir o produto há um valor a ser gasto para isso e o produto só terá lucro a partir de um certo ponto, que compreende essa faixa de quantidade".

Esse é um exemplo que, de certa forma, comprova nossas hipóteses. Mas vale a pena ressaltar que o primeiro par de questões foi aquele nos quais os alunos mais demonstraram familiaridade com relação ao conteúdo matemático.

Contrapondo a esse argumento, quando acontecer do estudante não dominar o cotidiano da questão e, mesmo assim tentar utilizá-lo para a resolução do problema, esse contexto tende a incorrer ao insucesso. Tal fato pode ser constatado na resolução da Questão proposta 1, do aluno Renato, Figura 13, na qual o mesmo não soube analisar a parábola que fornece o lucro da empresa, pois registrou que após o ponto mais alto, vértice da parábola, a empresa começou a ter prejuízo. Assim como ao afirmar que a "faixa vermelha" mostra que foram vendidos vários produtos, deixa parecer que não entendeu bem o conceito de custo e prejuízo.

Outra constatação está na estratégia utilizada por Carla na resolução da Questão proposta 2, Figura 16, que nos leva a inferir que em questões de contexto cotidiano, o estudante atento à situação problema, terá outras alternativas para tentar resolver a questão. Alternativas essas que passam pela incorporação de sentido ao número encontrado como resposta, ou, simplesmente, *sensibilidade numérica*. Observe que a estudante Carla, Figura 16, tomando por base o movimento do ioiô, afirmou que a altura mínima do mesmo será menor que 1, excluindo, corretamente, três das cinco alternativas apresentadas. Desse modo podemos afirmar que a estudante identificou corretamente a *tarefa (T)* apresentada no problema, assim como propomos em nossa chave de resolução (p.51) “Calcular a altura mínima alcançada pelo ioiô”.

Já a *técnica* (τ) utilizada por Carla, exatamente por se basear na *sensibilidade numérica,* difere totalmente da nossa (p.51) que se apoia em conceitos puramente matemáticos.

Embora apenas um aluno tenha apresentado, ou esboçado, o cuidado em analisar o sentido do número nesse par de questões, esse caso foi visto na questão de contexto cotidiano. Outro exemplo que comprova nossas hipóteses.

No que tange ao terceiro par de questões, mesmo que, como apresentado em 4.3, com um exemplo de cuidado em analisar as respostas numéricas, feita pelo estudante Pedro, as resoluções da questão de contexto matemático se apresentaram melhor, com dois exemplos corretos, ou próximos disso. Assim, afirmamos que não se trata de um exemplo que comprova nossas hipóteses.

Nossa uma última análise repousa sobre as respostas dos estudantes às questões de contexto cotidiano, mesmo que, por vezes, incorretas, se apresentaram de forma diferenciada no cuidado em tentar dar alguma resposta, quando comparadas às questões de contexto matemático. Aparentemente os estudantes se mostraram mais à vontade com questões de contexto cotidiano. Afirmamos isso, pois, nas questões de contexto matemático foi constatado alto índice de respostas do tipo “não me recordo” ou “não sei fazer”, enquanto nas respectivas questões de contexto cotidiano, mesmo que de maneira incorreta ou equivocada, percebemos uma tentativa maior em argumentar em cima das informações fornecidas no enunciado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo, o último do trabalho, servirá, assim como a metodologia de pesquisa adotada, a Engenharia Didática, sugere, para analisarmos se houve ou não validação das hipóteses por nós levantadas. Para isso tomaremos por base a discussão feita no capítulo cinco dessa dissertação, no qual fizemos a confrontação entre os dados colhidos na experimentação, e na *análise a priori.*

Diante da mudança, de 2009 em diante, do vestibular clássico, aparentemente fadado à extinção, para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o cenário da educação básica brasileira, mais precisamente o Ensino Médio, inevitavelmente, vem se modificando uma vez que o modelo de questão apresentado no ENEM difere bastante do modelo de questão que era abordado em muitos vestibulares clássicos como, por exemplo, o da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Enquanto o modelo anterior, vestibular, apresentava, para determinadas universidades, um grande número de questões que podiam ser resolvidas por meio de aplicação direta de técnicas e conceitos matemáticos, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é constituído de questões as quais, embora também exijam conhecimentos específicos matemáticos para sua resolução, predominam as situações do cotidiano.

Em síntese, a transição do antigo vestibular para o ENEM trouxe consideráveis mudanças na estrutura das questões. Mas essa diferença no tipo de questão tem prejudicado ou favorecido uma maior parcela dos estudantes? Visando responder a essas perguntas, partimos da seguinte questão de pesquisa: “as questões de matemática contextualizadas com situações do cotidiano e/ou de outras áreas do conhecimento podem ser mais eficazes, atingindo positivamente uma parcela maior de alunos com relação à aprendizagem dessa disciplina? Nessa direção, eles desenvolveriam mais a *sensibilidade numérica*?”.

Na tentativa de responder a essas perguntas, verificamos por meio da revisão da literatura, que a comunidade acadêmica pouco tem explorado o tema ENEM, devido ao baixo número de dissertações e teses envolvendo esse assunto.

Apontamos a necessidade de um maior número de pesquisas voltado para o referido exame, por ser o ENEM um instrumento de avaliação nacional que vem influenciando vários segmentos, tais como: o currículo, o livro didático e o ingresso dos estudantes do Ensino Médio nas universidades.

A partir das hipóteses (i) as questões contextualizadas podem permitir ao estudante uma visão crítica da sociedade, em vários aspectos, como desmatamento, poluição de rios, tomadas de decisão, entre outros. Ou seja, os estudantes podem, tal como o Inep - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - sugere em suas habilidades: “H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos” e “H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos”, utilizar e adquirir novos conhecimentos do cotidiano e de outras áreas ao se depararem com problemas de matemática de contexto cotidiano e de contexto interdisciplinar e (ii) as questões que envolvem situações reais favorecem a prática da *sensibilidade numérica (numeracy)*, fato que não é corriqueiro em atividades de contexto matemático, fomos a campo aplicando seis questões, três classificadas como de contexto matemático e retiradas do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora e a outra metade, por nós adaptadas no formato de contexto cotidiano, a 21 alunos, estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola particular de Viçosa.

Na correção do desenvolvimento dessas questões nos apoiamos em nossa resolução prévia, seguindo as orientações da Teoria Antropológica do Didático, um de nossos referenciais teóricos, e procuramos confirmar ou refutar as hipóteses de que o desempenho dos estudantes nas questões de contexto cotidiano é melhor que nas questões de contexto matemático. Mas, os principais resultados obtidos na análise das resoluções dos três pares de questões aplicados aos estudantes repousam sobre:

- Possíveis dificuldades em operar com mais de um gráfico em um mesmo plano cartesiano.
- Reduzido conhecimento de trigonometria e função trigonométrica, basicamente, aos valores de seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º.

- Desconhecimentos básicos quanto ao cálculo de logaritmos e quanto à variação gráfica da função logaritmo.

Na realidade, o próprio conceito de função, em notação algébrica e gráfica, é algo que se mostrou pouco familiarizado pelos estudantes. Mas deixamos em aberto, para trabalhos futuros, a indagação: “O baixo número de questões de trigonometria e logaritmo nas provas do ENEM de 2009 em diante, se deve ao baixo número de acertos por parte dos estudantes da Educação Básica em questões com esses conteúdos?”

Finalizando, gostaríamos de reforçar a necessidade de haver mais pesquisas envolvendo esse tema “influência do cotidiano na resolução de questões de matemática” uma vez que o presente trabalho corrobora com os princípios pedagógicos defendidos nos PCN, procurando mostrar a importância de não somente saber operar com a matemática, mas, sobretudo, saber interpretar e/ou criticar situações do cotidiano. Contudo, vale relembrar, tal como destacamos no capítulo anterior, que qualquer influência do cotidiano na resolução de questões de matemática só ocorre e/ou será percebida se o estudante estiver minimamente familiarizado com o objeto matemático da questão. Caso contrário, acontecerá como em muitos casos de nossa investigação, tanto nas questões de contexto matemático quanto nas questões de contexto cotidiano, o aluno pouco saberá argumentar sobre a solução dos exercícios ou, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, sequer saberá identificar a *tarefa* (*T*) apresentada na questão.

Mesmo assim, pudemos identificar em algumas situações a contribuição do conhecimento cotidiano e o que chamamos de *sensibilidade numérica.* Mas, principalmente pelo alto índice de equívocos quanto aos conhecimentos de função e suas propriedades, julgamos que nossas questões de pesquisa não puderam ser respondidas com firmeza, ou seja, segundo a metodologia adotada, a Engenharia Didática, de cunho qualitativo, não houve confirmação nem refutação das nossas hipóteses. Por isso, mais uma vez, reiteramos o desejo de um maior número de trabalhos com este tema, ou até mesmo, continuar a investigar esse mesmo tema em outro nível de estudo.

Esperamos assim ter contribuído para a comunidade acadêmica e para os profissionais do magistério em matemática com um trabalho voltado para a sala de aula, cuja concretização se faz no Produto Educacional desenvolvido como parte fundamental para a conclusão do Mestrado Profissional, envolvendo temas atuais como o Exame Nacional do Ensino Médio e objetos matemáticos importantes para a formação do aluno.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007. P. 111-128.

BARRETO, Aristides Camargos. **Matemática Funcional** Para o curso colegial 1º volume. Belo Horizonte: Editora Veja S.A.,1969.

BRASIL, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

_____. Secretaria da Educação Básica. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília: MEC, 2009. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/conteudo-das-provas> Acesso em: 23 jun. 2013.

CASTRO, Karina de Oliveira. **Ideias e Conceitos Básicos de Função no 7º ano do Ensino Fundamental**: possibilidades e desafios. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Severino Sombra.

DELEPRANI, Márcio. **As Provas de Matemática do ENEM:** Conteúdos, dificuldades e influências para o currículo do Ensino Médio. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy"

D'AMBROSIO, Ubiratan. Peace, social justice and ethnomathematics. **The Montana Mathematics Enthusiast,** ISSN 1551-3440, Monograph 1, The Montana Council of Teachers of Mathematics. 2007, p.25-34. Disponível em: https://www.google.com.br/?gws_rd=cr&ei=gNBdUoizLMaEkQelhoHgAg#q=D%E2%80%99AMBROSIO%2C+Ubiratan.+Peace%2C+social+justice+and+ethnomathematics.+. Acesso em: 15 out 2013.

GOLLE, Perla. **Sentidos de Numeramento Construídos na Resolução de Situações-Problema no Ensino Médio:** Um estudo a partir de uma questão do ENEM. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Regional de Blumenau – FURB.

IEZZI, Gelson ... (et al.). **Matemática**: 3ª série, 2º grau. São Paulo: Atual Editora ltda, 1980.

IEZZI, Gelson. **Fundamento de Matemática Elementar** (Trigonometria). São Paulo: Atual Editora, 1985.

LEITE, Miriam Soares. **Contribuições de Brasil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

MIGUEL, Maria Inez Rodrigues. **Ensino e Aprendizagem do Modelo Poisson**: uma experiência com modelagem. São Paulo, 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

REIS, Romeu Mauro dos. **Tratamento da Informação e o ENEM**: a Matemática na Trama da Avaliação. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

RODRIGUES. Chang Kuo. **A Função do Cotidiano e o Cotidiano das Funções**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade de Santa Úrsula.

_____, Chang Kuo. **O Teorema Central do Limite**: um estudo ecológico do saber e do didático. 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes Docentes**: Análise Combinatória no Ensino Médio. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SALGADO, Maria do Carmo. Literacia Matemática, Numeracia: acepções e usos. XI Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. ***Anais...*** Curitiba-PR, 2013.

SILVA, Cláudia Borim da. **Pensamento Estatístico e Raciocínio sobre variação**: um estudo com professores de matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, Fábio Silva da. **As Questões do ENEM e a Interdisciplinaridade no Ensino de Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Severino Sombra.

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu Teorema** em 90 minutos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

ANEXOS

ANEXO 1

Endereço para download das provas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

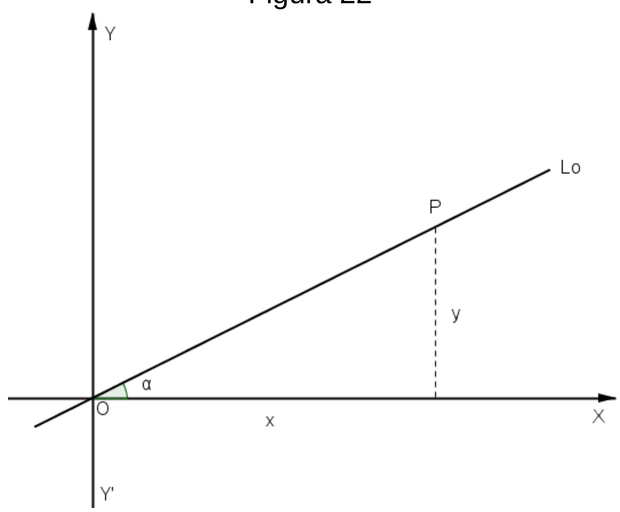
Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/downloads/universidade-federal-juiz-fora.htm Acesso em: 4 Mar 2014.

ANEXO 2

Nessa sessão iremos demonstrar que toda função polinomial do primeiro grau, cuja expressão é do tipo $y = ax + b$, a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, possui por gráfico uma reta.

Seja, inicialmente, uma reta L_o passando pela origem e diferente de Y'Y. Tomemos um ponto $P = (x, y) \in L_o$ e chamemos de α o ângulo XOP tal que $0 \leq \alpha < 180º$.

Figura 22



Fonte: Barreto,1969, p. 279.

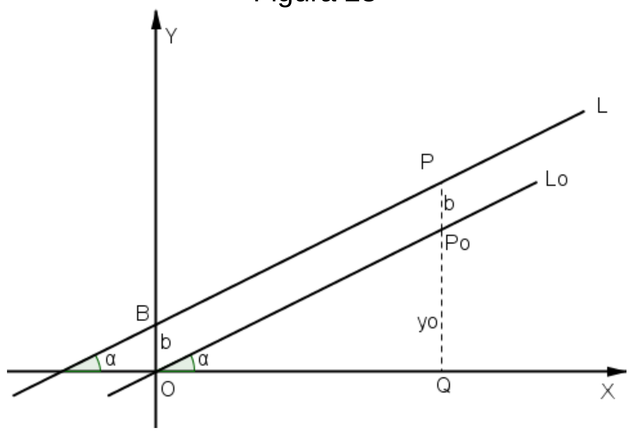
Logo, $P = (x, y) \in L_o \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \tan \alpha \Leftrightarrow y = (\tan \alpha) \cdot x$

Pondo agora $\tan \alpha = a$, $a \in (-\infty, +\infty)$, resulta, então: $y = ax$ como equação da reta L_o.

A cada reta L_o diferente de Y'Y corresponde um número real a, que é igual a $\tan \alpha$. Reciprocamente, a cada número real a corresponde uma reta L_o diferente de Y'Y única. Fica estabelecida, assim, uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais e a totalidade das retas que passam pela origem, menos Y'Y.

Dada uma reta L, conduzamos por O a paralela L_o a L. Depois, tomaremos de $P \in L$ a perpendicular PQ a X'X e ponhamos $PQ \cap L_o = P_o$.

Figura 23



Fonte: Fonte: Barreto,1969, p. 280.

Ora, $P = (x, y) \in L \Leftrightarrow P_o = (x, y_o) \in L_o \Leftrightarrow y = y_o + b \Leftrightarrow y = ax + b$ com $a = \tan \alpha$.

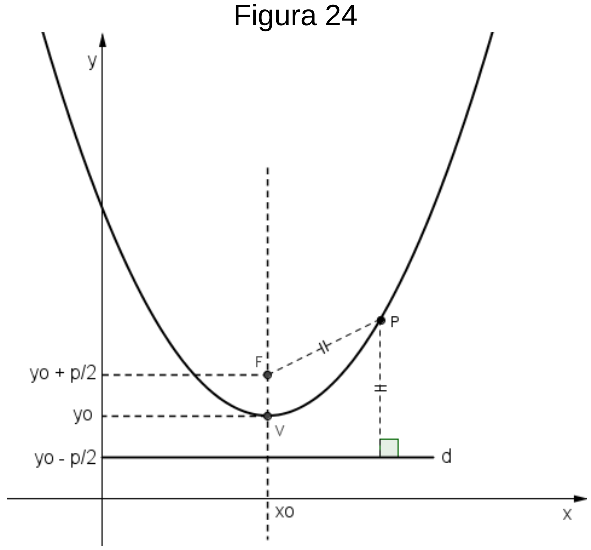
Logo, uma equação de L é do tipo $y = ax + b$ e é dita equação reduzida da reta.

ANEXO 3

Nessa sessão iremos demonstrar que toda função polinomial do segundo grau, cuja expressão é do tipo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, a, b e c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, possui por gráfico uma parábola.

Partimos da definição de parábola: conjunto dos pontos *P* do plano equidistantes de um ponto *F* e de uma reta *d* fixados, ou seja, $d_{P,F} = d_{p,d}$.

Figura 24



Fonte: Iezzi, 1980, p. 104.

$$d_{P,F} = d_{p,d} \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_o)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y - y_0 + \frac{p}{2}\right|$$

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 - p(y - y_0) + \frac{p^2}{4} = \left(y - y_0\right)^2 + p(y - y_o) + \frac{p^2}{4}$$

$$\left(x - x_0\right)^2 = 2p\left(y - y_o\right)$$

Portanto $\left(x - x_0\right)^2 = 2p\left(y - y_o\right)$ é a equação da parábola, e pode ser colocada na forma:

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2 - \frac{x_0}{p} \cdot x + \left(\frac{x_0^2}{2p} + y_0\right) \text{ (1)}$$

No caso da parábola côncava para baixo a equação será: $\left(x - x_0\right)^2 = -2 \cdot p \cdot \left(y - y_o\right)$, que pode ser colocada na forma:

$$y = -\frac{1}{2p} \cdot x^2 + \frac{x_0}{p} \cdot x + \left(-\frac{x_0^2}{2p} + y_0\right) \ (2)$$

Consideremos agora a equação $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$.

Se $a > 0$, comparando com (1) vem:

$\frac{1}{2 \cdot p} = a, \Longrightarrow p = \frac{1}{2 \cdot a}$

$-\frac{x_0}{p} = b \Longrightarrow x_0 = -p \cdot b \Longrightarrow x_0 = \frac{-b}{2 \cdot a}$

$-\frac{x_0^2}{2 \cdot p} + y_0 = c \Longrightarrow y_0 = c + \frac{x_0^2}{2 \cdot p} \Longrightarrow y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \Longrightarrow y_0 = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$, onde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Se $a < 0$, comparando com (2) vem:

$-\frac{1}{2 \cdot p} = a, \Longrightarrow p = -\frac{1}{2 \cdot a}$

$\frac{x_0}{p} = b \Longrightarrow x_0 = p \cdot b \Longrightarrow x_0 = \frac{-b}{2 \cdot a}$

$-\frac{x_0^2}{2 \cdot p} + y_0 = c \Longrightarrow y_0 = c + \frac{x_0^2}{2 \cdot p} \Longrightarrow y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \Longrightarrow y_0 = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$, onde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Concluímos que:

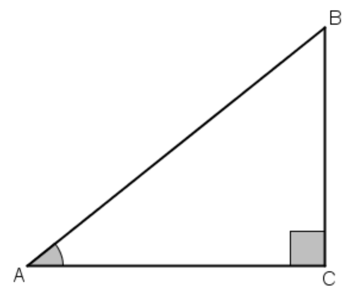
- a equação de uma parábola com eixo de simetria vertical é da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
- Toda equação da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \neq 0$, representa uma parábola com eixo de simetria vertical, côncava para cima se $a > 0$ ou côncava para baixo se $a < 0$.

ANEXO 4

Nessa sessão iremos demonstrar que a função trigonométrica seno é limitada.

Dado um triângulo retângulo ABC, reto em B, define-se seno do ângulo Â, como sendo a razão entre o lado oposto ao ângulo Â e o lado oposto ao ângulo reto.

Figura 25



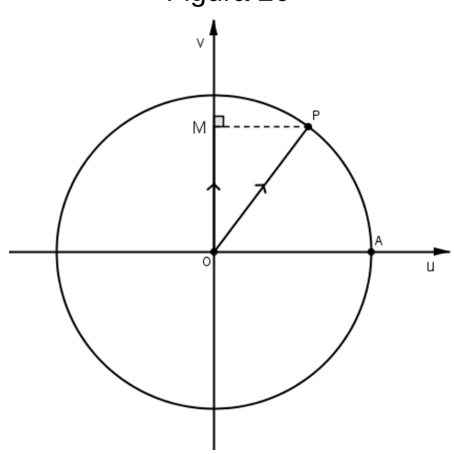
Fonte: Acervo do autor.

Dessa forma temos sen Â = $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Sabemos que a hipotenusa, lado oposto ao ângulo reto, é o maior dos lados de um triângulo retângulo. Em particular, $0 < \overline{BC} < \overline{AB} \Longrightarrow 0 < \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < 1 \Longrightarrow$ $0 <$ sen Â < 1.

Define-se agora a função seno, dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo.

Figura 26



Fonte: Iezzi, 1985, p. 17.

Denomina-se seno de x a ordenada $\overline{OM}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denomina-se função seno a função f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o valor $\overline{OM}$ = sen x, isto é, f(x) = sen x.

Conclui-se que a imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ para todo x real, pois se P está no ciclo, sua ordenada pode varia apenas de -1 até 1.

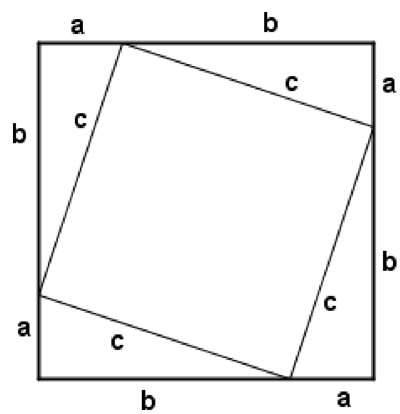
Anexo 5

Nessa sessão iremos demonstrar o Teorema de Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras possui cerca de 400 demonstrações, dentre as quais destacamos uma que se encontra no *Cho upei ching,* escrito entre 500 a.C e o início da nossa era.

Um quadrado com lados a + b tem um quadrado inscrito com lados c.

Figura 27



Fonte: Strathern, 1998 p. 73.

Relacionando a área total com as áreas dos quadrados e dos quatro triângulos, temos: $(a + b)^2 = 4\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + c^2 \Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.