Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Eli Érisson Pereira Antunes

Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos

Juiz de Fora

2018

Eli Érisson Pereira Antunes

Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientador: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Érisson Pereira Antunes, Eli.
Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos / Eli Érisson Pereira Antunes. – 2018.
71 f.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Flaviana Andréa Ribeiro
Coorientador: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Campo vetorial. 2. Curva algébrica invariante. 3. Integral primeira. I. Ribeiro, Flaviana Andréa, orient. II. Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos.

Eli Érisson Pereira Antunes

Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Flaviana Andréa Ribeiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr$^{\underline{a}}$. Adriana Rodrigues da Silva
Universidade Federal de Uberlândia

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me deu força e saúde para continuar meus estudos.

A toda minha família, em particular, Felipe, Aristeu e Harlisson, pelo apoio, e em especial, aos meus pais Elzita e Osvando, não apenas pela vida que vocês me deram, mais também por me terem incutido todos os valores que achavam importantes , me tornando assim a pessoa que sou hoje e pelo imenso incentivo, mesmo estando longe.

A minha namorada Sarah pelos incontáveis suportes e inestimáveis contribuições.

As minhas orientadoras Flaviana E Joana pela imensa contribuição na minha vida acadêmica e pela enorme paciência.

Aos professores que participaram da minha formação.

À Paula, pela disponibilidade e atenção.

Aos colegas de estudos que fizeram a minha estadia no mestrado mais acolhedora em especial Julio, Maiara, Mauro e Wilian.

Aos meus amigos que sempre torceram pelo meu crescimento.

A CAPES e UFJF pelo apoio financeiro no decorrer do curso.

A todos meu muito obrigado! Vocês fazem parte da minha conquista!

RESUMO

Este trabalho é baseado em um artigo de Javier Chavarriga e Jaume Llibre, ([CL]), no qual são apresentadas condições suficientes na ordem de um campo vetorial polinomial em $\mathbb{C}^2$ para a existência de uma integral primeira racional. Além disso, também descreve-se o número de pontos múltiplos que uma curva algébrica de grau n, invariante por um campo polinomial em $\mathbb{C}^2$ de grau m, pode ter em função de m e n.

Palavras-chave: Campo vetorial. Curva algébrica invariante. Integral primeira.

ABSTRACT

This work is based on Javier Chavarriga and Jaume Llibre's article ([CL]), in which sufficient conditions are presented on the order of a polynomial vector field in $\mathbb{C}^2$ for the existence of a first rational integral. Moreover, it is also described the number of multiple points that an algebraic curve of degree n, invariant by a polynomial field of degree m in $\mathbb{C}^2$, can have in function of m and n.

Keywords: Vector field. Algebraic invariant curve. First integral.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo Lins Neto e Scárdua, em [LNS], o estudo de equações diferenciais complexas foi iniciado de maneira sistemática por P. Painlevé no fim do século XIX ([PA1] e [PA2]). Foi com Painlevé que o estudo das equações diferenciais racionais da forma $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, onde $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são polinômios complexos, ganhou métodos próprios e diferenciados, utilizando de forma mais forte o caráter holomorfo das soluções locais. No entanto, vários outros autores contribuiram de maneira decisiva para a teoria no seu início, tais como E. Picard, G. Darboux, H. Poincaré, Briot e Bouquet, G.D. Birkhoff e outros.

Em seu trabalho, Painlevé esteve frequentemente preocupado com a classificação da equação geral

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1.1}$$

a partir do comportamento de suas soluções. Um outro problema investigado nessa época é o de se determinar quais equações diferenciais racionais da forma (1.1) podem ser integradas por meio de funções elementares do Cálculo Diferencial e Integral e por meio de operações algébricas como a obtenção de raízes de polinômios complexos em duas variáveis.

Escrevendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, onte t é uma nova variável real ou complexa, podemos reescrever a equação (1.1) como um sistema de equações diferenciais polinomiais em $\mathbb{C}^2$ da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.2}$$

Além disso, como $\mathbb{C}^2 \cong T_P\mathbb{C}^2 = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}\Big|_P, \dfrac{\partial}{\partial y}\Big|_P \right\rangle$, para todo $P \in \mathbb{C}^2$, podemos associar ao sistema (1.2) um campo de vetores polinomial χ, tal que

$$\chi(P) := P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P, \; \forall\, P \in \mathbb{C}^2.$$

As curvas analíticas obtidas pelo prolongamento das soluções locais da equação (1.1) são chamadas trajetórias do campo χ e definem, no plano, uma folheação por curvas (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções). De forma simplificada, uma folheação de uma variedade M é uma decomposição de M em subvariedades lisas de mesma dimensão, e que são localmente associadas a equações diferenciais.

Foi com o avanço da Teoria das Folheações e com o desenvolvimento da Topologia Diferencial e da Teoria das Várias Variáveis Complexas, que as equações diferenciais complexas (encaradas como folheações holomorfas ou campos vetoriais) foram redescobertas e puderam ser mais uma vez estudadas com mais vigor.

No estudo do comportamento das soluções de (1.1), aparece o conceito de integral primeira, isto é, uma função constante ao longo das soluções. Quando uma equação admite uma integral primeira holomorfa $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, suas trajetórias estão contidas nas curvas de nível de f. Muitos métodos diferentes têm sido usados para estudar a existência de integral primeira. Dentre esses, podemos citar a Teoria de Integrabilidade de Darboux que faz uma conexão entre existência de uma integral primeira e a existência de curvas algébricas invariantes. Extensões da Teoria de Integrabilidade de Darboux foram feitas por Jouanlou e Weil.

Neste texto, que foi baseado no trabalho de Javier Chavarriga e Jaume Llibre, ([CL]), apresentamos condições suficientes na ordem de um campo vetorial polinomial em $\mathbb{C}^2$ para a existência de uma integral primeira racional e estudamos o número de pontos múltiplos que uma curva algébrica de grau n, invariante por um campo polinomial em $\mathbb{C}^2$ de grau m pode ter, em função de m e n.

No Capítulo 2 são apresentados resultados básicos de Geometria Algébrica tais como variedades algébricas, espaço tangente, anéis locais e multiplicidade de interseção de curvas.

No Capítulo 3, apresentamos os sistemas diferenciais polinomiais no plano, a definição de integral primeira, campos vetoriais em $\mathbb{C}^2$ e a projetivação desses campos e a definição de pontos singulares de campos vetoriais.

No capítulo 4 apresentamos a Teoria de Integrabilidade de Darboux e um estudo das singularidades das curvas algébricas invariantes.

2 VARIEDADES ALGÉBRICAS

Em todo o texto k será um corpo algebricamente fechado embora alguns resultados sejam válidos para corpos mais gerais.

2.1 CONJUNTO ALGÉBRICO

Denotaremos por $\mathbb{A}^n(k)$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$ o espaço afim n-dimensional sobre k, isto é, $\mathbb{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) |\, a_i \in k\}$. Vamos dar a $\mathbb{A}^n$ a estrutura de espaço topológico definindo a *topologia de Zariski*.

Definição 2.1. Seja $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio no anel de polinômios nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em k. Dizemos que $P \in \mathbb{A}^n$ é um *zero* de F se $F(P) = 0$.

Se F é não constante, então o conjunto de todos os zeros de F,

$$\mathcal{V}(F) := \{P \in \mathbb{A}^n |\, F(P) = 0\},$$

é chamado de hipersuperfície. No caso $n = 2$, $\mathcal{V}(F)$ é chamada de curva.

De maneira mais geral, podemos definir o conjunto dos zeros comuns de um conjunto de polinômios.

Definição 2.2. Seja $T \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um conjunto não vazio de polinômios. O conjunto dos zeros comuns de T é

$$\mathcal{V}(T) = \{P \in \mathbb{A}^n | F(P) = 0,\ \forall F \in T\}.$$

Definição 2.3. Um subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n$ é chamado um *conjunto algébrico afim*, ou simplesmente conjunto algébrico, se $V = \mathcal{V}(T)$ para algum subconjunto $T \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

Seguem algumas propriedades de fácil verificação.

1. $\mathcal{V}(\{0\}) = \mathbb{A}^n$.

2. $\mathcal{V}(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$.

3. $\mathcal{V}(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) = \{P = (p_1, \ldots, p_n)\}$.

4. Seja $I = \langle T \rangle$ o ideal gerado por um subconjunto $T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Então $\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(I)$.

5. Se $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ é qualquer coleção de ideais em $k[x_1, \ldots, x_n]$, então

$$\mathcal{V}(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{V}(I_\alpha).$$

6. Se $I \subset J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, então $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$.

7. $\mathcal{V}(FG) = \mathcal{V}(F) \cup \mathcal{V}(G)$, para quaisquer polinômios $F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Mais geralmente, se I e J são ideais de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então

$$\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\{FG|\ F \in I, G \in J\}).$$

Definição 2.4. Um subconjunto de $\mathbb{A}^n$ é chamado aberto se seu complementar for um subconjunto algébrico de $\mathbb{A}^n$.

Segue das propriedades anteriores que os conjuntos abaixo são abertos.

1. $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ são abertos.

2. Se $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ é qualquer coleção de ideais em $k[x_1, \ldots, x_n]$, então

$$\mathbb{A}^n - \mathcal{V}(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha) = \mathbb{A}^n - \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{V}(I_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (\mathbb{A}^n - \mathcal{V}(I_\alpha)).$$

   Este último conjunto é aberto, já que cada $\mathbb{A}^n - \mathcal{V}(I_\alpha)$ é aberto.

3. Se $I_1, \ldots, I_m$ são ideais de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então

$$\mathbb{A}^n - \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{V}(I_\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} (\mathbb{A}^n - \mathcal{V}(I_\alpha)).$$

   Este último é a interseção finita de conjunto abertos e portanto é aberto.

Assim, os abertos de $\mathbb{A}^n$ formam uma topologia chamada topologia de Zariski.

2.2 O IDEAL DE UM CONJUNTO

Definição 2.5. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto qualquer. Definimos o *ideal* de V como

$$\mathcal{I}(V) = \{F \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid F(P) = 0,\ \forall P \in V\}.$$

Pode-se verificar que $\mathcal{I}(V)$ é de fato um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ e que valem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{I}(\emptyset) = k[x_1, \ldots, x_n]$;

2. Se $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(P) = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle$;

3. Se $X \subset Y \subseteq \mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$;

4. Se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.

Listamos a seguir algumas relações entre ideais e conjuntos algébricos:

1. Se $T \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, então $T \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(T))$ e $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(T))) = \mathcal{V}(T)$.

2. Se $X \subset \mathbb{A}^n$, então $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ e $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))) = \mathcal{I}(X)$.

Definição 2.6. Seja I um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Definimos o *radical* de I como

$$\sqrt{I} = \{F \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, F^n \in I, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pode-se verificar facilmente que $\sqrt{I}$ é um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definição 2.7. Seja $\mathcal{P}$ um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é um ideal *primo* se $\mathcal{P} \neq \langle 1 \rangle$ e $\forall F, G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $FG \in \mathcal{P}$ tivermos $F \in \mathcal{P}$ ou $G \in \mathcal{P}$.

Definição 2.8. Um ideal $\mathcal{M}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal *maximal* se $\mathcal{M} \neq \langle 1 \rangle$ e não existe um ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\mathcal{M} \subsetneq I \subsetneq \langle 1 \rangle$

Definição 2.9. Sejam I, J ideais de um anel A. O produto IJ é o ideal definido por

$$IJ = \langle \{ab |\, a \in I, b \in J\} \rangle .$$

De maneira recursiva definimos o produto de n ideais de A. Isto é, se $I_1, \ldots, I_n$ são ideais de um anel A, então

$$I_1 \ldots I_n = \langle \{a_1 a_2 \cdots a_n |\, a_j \in I_j, \;\; \forall j = 1, 2, \ldots, n\} \rangle.$$

Note que se I é finitamente gerado por $a_1, \ldots, a_s$, então $I^n = \langle \{a_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{i_s} |\, \sum i_j = n\} \rangle$.

Definição 2.10. Um anel A é dito Noetheriano se todo ideal de A é finitamente gerado.

Lema 2.11. *Sejam J e I ideais de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Se $J \subset \sqrt{I}$, então $(J^d) \subset I$ para algum inteiro positivo d.*

Demonstração. Sendo $k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel noetheriano, então J é finitamente gerado, ou seja, $J = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e $F_1, \ldots, F_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Vamos mostrar a afirmação por indução no número r de geradores de J.

Suponha $r = 1$, como $J = \langle F_1 \rangle \subset \sqrt{I}$, então existe $d_1 > 0$ tal que $F_1^{d_1} \in I$. Além disso, se $H \in J$, então $H = F_1 K_1$ e consequentemente $H^{d_1} = F_1^{d_1} K_1^{d_1} \in I$.

Se $r = 2$, então existem inteiros positivos d_1 e d_2 tais que $F_1^{d_1} \in I$ e $F_2^{d_2} \in I$. Seja $d = d_1 + d_2$. Se $H \in J$, segue que $H = F_1 K_1 + F_2 K_2$, com K_1 e $K_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e

$$H^d = (F_1 K_1 + F_2 K_2)^d = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (F_1 K_1)^{d-i} (F_2 K_2)^i.$$

Cada termo $(F_1K_1)^{d-i}(F_2K_2)^i \in I$, porque se $i < d_2$, temos $d - i = d_1 + d_2 - i > d_1$. Logo $H^d \in I$.

Suponha que seja válido para $r - 1$, isto é, para $J' = \langle F_1, \dots, F_{r-1}\rangle$ existe um $d' > 0$ tal que $J'^{d'} \subset I$. Iremos mostrar que é válido para r. Como $J = \langle F_1, \dots, F_r\rangle \subset \sqrt{I}$, temos que existe um $d_r > 0$ tal que $F_r^{d_r} \in I$. Tomemos $d = d' + d_r$. Então, para $G = F_1K_1 + \cdots + F_rK_r \in J$, temos que $G = H + F_rK_r$ com $H = F_1K_1 + \cdots + F_{r-1}K_{r-1} \in J'$. Logo

$$G^d = (H + F_rK_r)^d = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (H)^{d-i}(F_rK_r)^i.$$

De maneira similar ao caso $r = 2$, obtemos que $G^d \in I$. Portanto $J^d \in I$.

$\square$

Definição 2.12. Seja X um espaço topológico e $V \subset X$ um subconjunto. Então V é *irredutível* se, equivalentemente:

(i) V não é a união de dois fechados próprios;

(ii) Quaisquer dois abertos não vazios de V se intersectam;

(iii) Todo aberto não vazio de V é denso em V.

Lema 2.13. *Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo em $k[x_1, \dots, x_n]$.*

Demonstração. Suponha primeiro que V é irredutível. Se $\mathcal{I}(V)$ não for ideal primo, então existem $F_1, F_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ com $F_1\, F_2 \in \mathcal{I}(V)$ e $F_1, F_2 \notin \mathcal{I}(V)$. Tomando $J_1 = \langle F_1\rangle$ e $J_2 = \langle F_2\rangle$, temos que $J_1J_2 = \langle F_1F_2\rangle \subset \mathcal{I}(V)$ e $J_1, J_2 \not\subset \mathcal{I}(V)$. Além disso

$$V \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) \subset \mathcal{V}(J_1J_2) = \mathcal{V}(J_1) \cup \mathcal{V}(J_2).$$

Entretanto

$$V \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) \not\subset \mathcal{V}(J_1) \text{ e } V \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) \not\subset \mathcal{V}(J_2).$$

Portanto, $V = (V \cap \mathcal{V}(J_1)) \cup (V \cap \mathcal{V}(J_2))$, onde $V \cap \mathcal{V}(J_1)$ e $V \cap \mathcal{V}(J_2)$ são conjuntos algébricos próprios de V. Isso contradiz a hipótese de V ser irredutível.

Reciprocamente suponha que V seja redutível, ou seja, $V = V_1 \cup V_2$ para $V_1, V_2 \subsetneq V$ subconjuntos algébricos. Sendo as inclusões próprias, então existem elementos $F_1 \in \mathcal{I}(V_1) \setminus \mathcal{I}(V)$ e $F_2 \in \mathcal{I}(V_2) \setminus \mathcal{I}(V)$. Como F_1F_2 se anula em V, segue que $F_1F_2 \in \mathcal{I}(V)$, contradizendo o fato de $\mathcal{I}(V)$ ser primo.

$\square$

Exemplo 2.14. $\mathbb{A}^n$ é irredutível para todo n, pois $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ é um ideal primo.

Teorema 2.15. *Sejam k um corpo algebricamente fechado e $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Então segue que:*

1) Todo ideal maximal $\mathcal{M} \subset A$ é da forma:

$$\mathcal{M} = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle = \mathcal{I}(P),$$

para algum $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$;

2) Se $J \subseteq A$ é um ideal próprio, então $\mathcal{V}(J) \neq \emptyset$;

3) (Nullstellensatz ou Teorema dos Zeros de Hilbert) Para todo ideal $J \subset A$ temos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$.

Demonstração. 1) Primeiramente notemos que $\mathcal{I}(P) = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle = \mathcal{M}$ é um ideal maximal para todo $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$. De fato, defina o seguinte homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & k \\ & F & \longmapsto & F(P) \end{array}$$

Vamos mostrar que $\ker(\alpha) = \mathcal{M}$. Se $F \in \mathcal{M}$, então $F = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) H_i$, com $H_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto, $F(P) = 0$ e $\mathcal{M} \subseteq \ker(\alpha)$.

Para provar que $\ker(\alpha) \subseteq \mathcal{M}$ usaremos indução em n.

Para $n = 1$ temos que $\mathcal{M} = \langle x_1 - p_1 \rangle \subset k[x_1]$. Se $F \in \ker(\alpha)$, pelo algoritmo da divisão de Euclides, podemos escrever $F = (x_1 - p_1)Q + r$, onde r é uma constante. No entanto temos que $0 = F(p_1) = (p_1 - p_1)Q(p_1) + r = r$. Portanto, $F = (x_1 - p_1)Q \in \mathcal{M}$.

Suponha que a afirmação seja válida para $n - 1$. Para mostrar a afirmação para n escreva

$$k[x_1, \ldots, x_n] = k[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n] = R[x_n],$$

onde $R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Deste modo olhamos para os polinômios em $k[x_1, \ldots, x_n]$ como polinômios na indeterminada x_n com coeficientes em R. Observe que o coeficiente líder de $x_n - p_n \in R[x_n]$ é invertível em R. Logo, pelo algoritmo da divisão, podemos dividir qualquer polinômio de $R[x_n]$ por $x_n - p_n$. Seja $F \in \ker(\alpha) \subset R[x_n]$. Temos que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n)(x_n - p_n) + r(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

onde $r(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R$, isto é, não depende da indeterminada x_n. Calculando F em $P = (p_1, \ldots, p_n)$ obtemos

$$0 = F(P) = G(P)(p_n - p_n) + r(p_1, \ldots, p_{n-1}) = r(p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Por hipótese de indução $r \in \langle x_1 - p_1, \ldots, x_{n-1} - p_{n-1} \rangle \subset \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle$. Portanto, $F \in \mathcal{M}$. Pelo primeiro Teorema do Isomorfismo para anéis, $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{M} \cong k$ e consequentemente $\mathcal{M}$ é um ideal maximal.

Agora sejam $J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal maximal e o corpo $L := k[x_1, \ldots, x_n]/J$. Considere φ a composição das seguintes aplicações

$$k \overset{i}{\hookrightarrow} k[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\pi} k[x_1, \ldots, x_n]/J = L,$$

onde i é a inclusão e π é o homomorfismo projeção, isto é, $\varphi = \pi \circ i$. O corpo L é uma k-álgebra finitamente gerada (gerada pelas classes de equivalência dos $x_i's$ módulo J). Logo, L é algébrico sobre k. Como k é algebricamente fechado, temos que φ é um isomorfismo. Sejam $b_i = x_i \mod J \in L$ e $p_i := \varphi^{-1}(b_i) \in k$. Então, para todo i, temos

$$x_i - p_i \in \ker(\pi) = J$$

Consequentemente $\mathcal{M} = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle \subset J$, mas pela primeira parte $\mathcal{M}$ é maximal e assim $\mathcal{M} = J$.

2) Seja $J \subsetneq A$ um ideal próprio de A. Sendo A um anel noetheriano, então existe um ideal maximal $\mathcal{M} \subset A$ tal que $J \subset \mathcal{M}$ e, pelo item 1. do Teorema (2.15), $\mathcal{M} = \mathcal{I}(P)$ para algum $P \in \mathbb{A}^n$. Assim $\{P\} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(P)) \subset \mathcal{V}(J)$. Portanto $\mathcal{V}(J) \neq \emptyset$.

3) Ver Teorema 2, pág. 172 de [CLO]. □

2.3 CONJUNTOS ALGÉBRICOS DO PLANO

Proposição 2.16. *Sejam $F, G \in k[x, y]$. Suponha que F e G não tenham fator em comum, então $\mathcal{V}(\langle F, G \rangle)$ é finito.*

Demonstração. Como $k[x, y] = k[x][y]$, então F e G também não tem fator em comum em $k(x)[y]$ (Pelo Lema de Gauss). Como $k(x)[y]$ é domínio de ideais principais e $\langle F, G \rangle = 1$, então $RF + SG = 1$ onde $R, S \in k(x)[y]$. Logo, existe um polinômio $C_1 \in k[x] - \{0\}$ tal que $RC_1, SC_1 \in k[x, y]$ e $RC_1F + SC_1G = C_1$. No entanto para qualquer $(a, b) \in \mathcal{V}(\langle F, G \rangle)$ temos $(RC_1F)(a, b) + (SC_1G)(a, b) = C_1(a) = 0$. Mas todo polinômio em $k[x]$ tem um número finito de raízes e assim existe um número finito de possibilidades para a. Considere F e G em $k[x, y] = k[y][x]$ e de modo similar obtemos um número finito de possibilidades para b, com $(a, b) \in \mathcal{V}(\langle F, G \rangle)$. Portanto $\mathcal{V}(\langle F, G \rangle)$ é finito. □

Lema 2.17. *Seja $\{P_1, \ldots, P_N\}$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{A}^n$. Então existem polinômios $F_1, \ldots, F_N \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $F_i(P_j) = 0$ se $i \neq j$ e $F_i(P_i) = 1$.*

Demonstração. Provaremos esse lema usando indução em N.

Se $N = 1$, então tome $G_1 \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathcal{I}(\{P_1\})$ não nulo. Se $F_1 = \dfrac{G_1}{G_1(P_1)}$, teremos que $F_1(P_1) = 1$.

Se $N = 2$, então $\mathcal{I}(\{P_1, P_2\}) \subsetneq \mathcal{I}(P_1)$ e $\mathcal{I}(\{P_1, P_2\}) \subsetneq \mathcal{I}(P_2)$. Escolhendo polinômios não nulos $G_1 \in \mathcal{I}(P_2) \setminus \mathcal{I}(\{P_1, P_2\})$ e $G_2 \in \mathcal{I}(\{P_1\}) \setminus \mathcal{I}(\{P_1, P_2\})$, então os polinômios $F_i = \dfrac{G_i}{G_i(P_i)}$ são tais que $F_i(P_i) = 1$ e $F_i(P_j) = 0$ se $i \neq j$.

Por indução, assumimos que o resultado é válido para qualquer coleção de $N - 1$ pontos. Considere o conjunto $\{P_1, \ldots, P_{N-1}\} \cup \{P_N\}$. Procedendo de modo similar ao caso $N = 2$ podemos encontrar um polinômio $F_N \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $F_N(P_N) = 1$ e $F_N(P_j) = 0$ se $j \neq N$. Além disso, pela hipótese de indução existem polinômios $F'_1, \ldots, F'_{N-1}$ que satisfazem a as afirmações do lema para os pontos $P_1, \ldots, P_{N-1}$. Definindo $F_i = F'_i(1 - F_N)$ para $i = 1, \ldots, N - 1$, concluímos que $F_i(P_i) = 1$ e $F_i(P_j) = 0$ se $i \neq j$. □

Corolário 2.18. *Seja I um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Então $\mathcal{V}(I)$ é um conjunto finito se, e somente se, $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k.*

Além disso, se a dimensão é finita, então o número de pontos de $\mathcal{V}(I)$ é no máximo $\dim_k (k[x_1, \ldots, x_n]/I)$.

Demonstração. Suponha que $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k. Se $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{V}(I)$, pelo Lema (2.17), existem $F_1, \ldots, F_N \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $F_i(P_j) = 0$ se $i \neq j$ e $F_i(P_i) = 1$. Denote por $f_i = \overline{F_i}$ a classe de F_i em $k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Se $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i = 0$, com $\lambda_i \in k$ para $i = 1, \ldots, N$, então $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i F_i \in I$ e $\lambda_j = (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i F_i)(P_j) = 0$, para cada j. Portanto os f_i's são linearmente independentes sobre k e consequentemente $N \leq \dim_k (k[x_1, \ldots, x_n]/I)$.

Suponha que $\mathcal{V}(I) = \{P_1, \ldots, P_N\}$ é finito, onde $P_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$. Defina

$$F_j = \prod_{i=1}^{N} (x_j - p_{ij})$$

com $j = 1, \ldots, n$. Como $F_j(P) = 0$, para todo $P \in \mathcal{V}(I)$ e todo j, então $F_j \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$. Assim, para cada j, existe $d_j > 0$ tal que $F_j^{d_j} \in I$. Defina $d = \max\{d_j\}$. Tomando a classe de F_j^d módulo I, temos que

$$\overline{F}_j^d = \overline{x}_j^{Nd} + \lambda_{Nd-1} \overline{x}_j^{Nd-1} + \ldots + \lambda_0 \overline{1} = 0$$

e assim $\overline{x}_j^{Nd}$ é uma combinação k-linear de $\overline{1}, \overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_j^{Nd-1}$. Por indução temos que $\overline{x}_j^s$ com $s \geq Nd$ pode ser escrito como combinação k-linear de $\overline{1}, \overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_j^{Nd-1}$. Consequentemente, o conjunto $\{\overline{x}_j^m \,|1 \leq j \leq m$ e $0 \leq m \leq Nd - 1\}$ gera $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ como espaço vetorial sobre k. □

Definição 2.19. Seja $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Suponha que a decomposição de f em fatores irredutíveis seja $f = f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}$. Se $\lambda_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, s$, dizemos que f é reduzido.

2.4 ANEL DE COORDENADAS

Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico irredutível não vazio. Então $I = \mathcal{I}(V)$ é um ideal primo em $k[x_1, \ldots, x_n]$ e, consequentemente, $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ é um domínio.

Definição 2.20. O *anel de coordenadas* de um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{A}^n$ irredutível e não vazio é o domínio

$$k[V] := \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{I}.$$

Para todo conjunto algébrico não vazio V, denotamos por $\mathcal{F}(V, k)$ o conjunto de todas as funções de V em k. No conjunto $\mathcal{F}(V, k)$ definimos as seguintes operações:

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P)$$

$$(fg)(P) = f(P)g(P)$$

para todo $P \in V$ e $f, g \in \mathcal{F}(V, k)$. Essas operações fazem desse conjunto um anel. O corpo k é identificado como o subanel de $\mathcal{F}(V, k)$ consistindo de todas funções constantes.

Definição 2.21. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Uma *função* $f \in \mathcal{F}(V, k)$ é chamada uma função polinomial em V se existir um polinômio $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f(P) = F(P)$ para todo $P \in V$.

O conjunto das funções polinomiais em V é um subanel de $\mathcal{F}(V, k)$ que contém k. Note que na definição de função polinomial o polinômio $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ não é unicamente determinado. Se $F + I = G + I$, então $F - G \in I$ e $F(P) - G(P) = (F - G)(P) = 0$ para todo $P \in V$, ou seja, $F(P) = f(P) = G(P)$.

Proposição 2.22. *Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico irredutível e $k[V]$ seu anel de coordenadas. Então $k[V]$ é isomorfo a um subanel de $\mathcal{F}(V, k)$, formado por todas as funções polinomiais de V em k.*

Demonstração. Defina o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi : & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathcal{F}(V, k) \\ & F & \longmapsto & f = F|_V \end{array}$$

que associa cada polinômio $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ a função polinomial $f = F|_V \in \mathcal{F}(V, k)$. Temos que $\ker(\psi) = \mathcal{I}(V)$. De fato, se $F \in \ker(\psi)$, então $f = F|_V$ é identicamente nula em V, isto é $0 = f(P) = F(P)$ para todo $P \in V$. Portanto, $F \in \mathcal{I}(V)$. Por outro lado para $F \in \mathcal{I}(V)$, temos que $F(P) = 0$ para todo $P \in V$. Portanto $\psi(F) = 0$ e $F \in \ker\psi$. $\square$

2.5 MAPAS POLINOMIAIS

Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ e $W \subset \mathbb{A}^m$ conjuntos algébricos irredutíveis e x_i, para $1 \leq i \leq n$, e x_j, para $1 \leq j \leq m$, as funções coordenadas em $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$ respectivamente.

Definição 2.23. Uma função $\theta : V \to W$ é chamada um *função polinomial* se existem polinômios $F_1, \ldots, F_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\theta(P) = (F_1(P), \ldots, F_m(P))$$

para todo $P \in V$.

Qualquer função $\theta : V \to W$ induz um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\theta}: & k[W] & \longrightarrow & k[V] \\ & f & \longmapsto & \widetilde{\theta}(f) = f \circ \theta \end{array}$$

Se θ é uma função polinomial, então $\widetilde{\theta}(k[W]) \subset k[V]$. De fato, por definição existem polinômios $H_1, \ldots, H_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $\theta(P) = (H_1(P), \ldots, H_m(P))$ para todo $P \in V$. Seja $f \in k[W]$, então por definição existe $F \in k[x_1, \ldots, x_m]$ tal que $f(Q) = F(Q)$ para todo $Q \in W$. Sendo assim para cada $P \in$ temos que

$$f \circ \theta(P) = f(H_1(P), \ldots, H_m(P)) = F(H_1(P), \ldots, H_m(P)) = F \circ (H_1, \ldots, H_m)(P).$$

Portanto $\widetilde{\theta}(f)$ é uma função polinomial de V em k e assim $\widetilde{\theta}(f) \in k[V]$.

Seja $\varphi : V \to W$ uma função polinomial. Para $g \in k[W]$, definimos $\varphi^*(g) := g \circ \varphi$. A função, φ^* é chamada de *pullback* de φ.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(g)"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd}$$

Desde que g e φ são polinomiais, $g \circ \varphi$ também o é e

$$\begin{array}{rccc} \varphi^*: & k[W] & \longrightarrow & k[V], \\ & g & \mapsto & \varphi^*(g) := g \circ \varphi. \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.

2.6 MUDANÇA DE COORDENADAS

Se $T = (T_1, \ldots, T_m)$ é um mapa polinomial de $\mathbb{A}^n$ em $\mathbb{A}^m$ e $F \in k[x_1, \ldots, x_m]$, denotamos por

$$F^T = \widetilde{T}(F) = F(T_1, \ldots, T_m).$$

Se I é um ideal $k[x_1, \ldots, x_m]$ e V é conjunto algébrico em $\mathbb{A}^m$, então I^T denotará o ideal em $k[x_1, \ldots, x_n]$ gerado por $\{F^T \mid F \in I\}$ e V^T o conjunto algébrico $T^{-1}(V) = \mathcal{V}(I^T)$, onde $I = \mathcal{I}(V)$. Se V é uma hipersuperfície definida por F, então V^T é a hipersuperfície definida por F^T, se F^T não é constante.

Definição 2.24. Uma *mudança de coordenadas afins* em $\mathbb{A}^n$ é uma função polinomial

$$T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

tal que cada T_i é um polinômio de grau 1 e tal que T é bijetiva.

Se $T_i = \sum a_{ij}x_j + a_{i0}$, então $T = T" \circ T'$, onde T' é uma aplicação linear e $T"$ é uma translação, isto é, $T_i' = \sum a_{ij}x_j$ e $T_i" = x_i + a_{i0}$. Pode-se ver que, se T e U são mudanças de coordenadas afins em $\mathbb{A}^n$, então $T \circ U$ e T^{-1} também são.

2.7 FUNÇÕES RACIONAIS E ANÉIS LOCAIS

Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico irredutível não vazio. Sendo $k[V]$ um domínio, então podemos considerar seu corpo de frações.

Definição 2.25. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico irredutível. O *corpo das funções racionais* de V é o corpo de frações de $k[V]$, que é

$$k(V) := \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in k[V], b \neq 0 \right\} / \sim,$$

onde $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ se $ab' = a'b$.

Um elemento de $k(V)$ é chamado de *função racional* em V.

Definição 2.26. Sejam $f \in k(V)$ uma função racional em V e $P \in V$. A função racional f é chamada *regular* em P, se existem $a, b \in k[V]$ tais que $f = \dfrac{a}{b}$ e $b(P) \neq 0$.

Observe que se V for irredutível, teremos que $k[V]$ será um domínio de fatoração única, então para $f \in k(V)$ existe uma única representação de $f = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in k[V]$ tais que a e b não têm fatores em comum.

Definição 2.27. Seja $P \in V$. O conjunto de todas a funções racionais em V que são regulares em P é denotado por

$$\mathcal{O}_P(V) := \{f \in k(V) | \, f \text{ é regular em } P\}.$$

É de fácil verificação que $\mathcal{O}_P(V)$ é um subanel de $k(V)$ que contem $k[V]$. Além disso, $\mathcal{O}_P(V)$ é um anel local, isto é, tem um único ideal maximal. Este ideal, denotado por $\mathfrak{m}_P(V)$, é o conjunto de todas a funções regulares em P que se anulam em P, isto é,

$$\mathfrak{m}_P(V) := \{f \in \mathcal{O}_P(V) |\, f(P) = 0\}.$$

Por isso, o anel $\mathcal{O}_P(V)$ é chamado de *anel local* de V em P.

Proposição 2.28. *Seja $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal tal que $\mathcal{V}(I) = \{P_1, \ldots, P_N\}$ é finito. Seja $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{P_i}(\mathbb{A}^2)$. Então, existe um isomorfismo natural de $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ com $\prod_{i=1}^{N} \dfrac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$.*

Demonstração. Sejam $I_j = \mathcal{I}(\{P_j\}) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, para $j = 1, 2 \ldots, N$, os distintos ideais maximais que contém I. Observe que $I \subset K[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathcal{O}_j$, para todo j. Então, se $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ e $R_j = \mathcal{O}_j/I\mathcal{O}_j$, existe um homomorfismo natural

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j : & R & \longrightarrow & R_j \\ & \overline{L} & \longmapsto & \frac{\overline{L}}{1} \end{array}$$

onde $l = \overline{L}$ é a classe de $L \in k[x_1, \ldots, x_n]$ módulo I e $\frac{\overline{L}}{1}$ é a classe de $\frac{L}{1}$ em $\mathcal{O}_j/I\mathcal{O}_j$.

Os homomorfismos φ_j induzem o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R & \longrightarrow & \prod_{j=1}^{N} R_j \\ & l & \longmapsto & (\varphi_1(l), \ldots, \varphi_N(l)) \end{array}$$

Vamos mostrar que φ é um isomorfismo. Contudo, para isso será necessário fazer algumas construções.

Pelo Teorema (2.15) (Nullstellensatz), temos que

$$\sqrt{I} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\{P_1, \ldots, P_N\}) = \bigcap_{j=1}^{N} I_j$$

e, pelo Lema (2.11), existe um inteiro positivo d tal que $(\bigcap_{j=1}^{N} I_j)^d \subset I$. Como

$$\mathcal{V}(\bigcap_{j \neq i} I_j) \bigcap \mathcal{V}(I_i) = \emptyset,$$

para $i \neq j$, segue que $\bigcap_{j \neq i} I_j$ e I_i são comaximais, isto é, $\bigcap_{j \neq i} I_j + I_i = k[x_1, \ldots, x_n]$. Logo,

$$\bigcap (I_j^d) = (\prod I_j)^d = (\bigcap I_j)^d \subset I.$$

Escolha $F_j \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $F_j(P_i) = 0$ se $i \neq j$ e $F_j(P_j) = 1$, cuja a existência é garantida pelo Lema (2.17). Definindo os polinômios $E_j = 1 - (1 - F_j^d)^d$, podemos notar que $E_j = F_j^d D_j$, para algum $D_j \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Do fato de $F_j \in I_i$ temos que $F_j^d \in I_i^d$ e assim decorre que $E_j \in I_i^d$ se $i \neq j$. Temos também que

$$1 - \sum_{j=1}^{N} E_j = (1 - E_i) - \sum_{j \neq i} E_j \in \bigcap I_j^d \subset I, \tag{2.1}$$

já que

$$\left((1 - E_i) - \sum_{j \neq i}^{N} E_j \right) (P_j) = 0$$

e

$$\left((1 - E_i) - \sum_{j \neq i} E_j \right) (P_i) = 0$$

Denotemos por e_j classe de equivalência de E_j em R, desse modo pela expressão (2.1) temos que $\overline{1 - \sum_j E_j} = 1 - \sum_j e_j = 0$, ou seja, $\sum_j e_j = 1$. Note também que,

$$\begin{aligned} E_j^2 &= (1 - (1 - F_j^d)^d)(1 - (1 - F_j^d)^d) \\ &= \underbrace{1 - (1 - F_j^d)^d}_{E_j} - \underbrace{(1 - F_j^d)^d + (1 - F_j^d)^{2d}}_{G}. \end{aligned}$$

Como $G(P_j) = 0$ e $G(P_i) = 0$, temos que $G \in I$ e assim $e_j^2 = e_j$. Além disso, $e_j e_i = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} E_j E_i &= (1 - (1 - F_j^d)^d)(1 - (1 - F_i^d)^d) \\ &= 1 - (1 - F_i^d)^d - (1 - F_j^d)^d + (1 - F_i^d)^d (1 - F_j^d)^d. \end{aligned}$$

e $E_j E_i (P_i) = 0$, para todo i, j. Logo, $E_j E_i \in I$ e $e_i e_j = 0$ em R.

Afirmamos que se $G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ e $G(P_j) \neq 0$, então existe $t \in R$ tal que $tg = e_j$ onde $g = \overline{G} \in R$. De fato, assumindo que $G(P_j) = 1$, tomemos $H = 1 - G$. Então, $(1 - H)(E_j + HE_j + \ldots + H^{d-1}E_j) = E_j - H^d E_j$. Como $H \in I_j$, temos que $H^d E_j \in I$. Logo, $g(e_j + he_j + \cdots + h^{d-1}e_j) = e_j$, como desejado.

Seja $l \in R$ tal que $\varphi(l) = \overline{0}$, isto é, cada $\varphi_j(l) = \overline{0}_j = I\mathcal{O}_j$. Então, para cada j, podemos escrever $L = \frac{H_j}{K_j}$, onde $H_j, K_j \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $H_j \in I$ e $K_j(P_j) \neq 0$. Deste modo, $L.K_j = H_j \in I$ e consequentemente $lk_j = 0 + I$. Como $K_j(P_j) \neq 0$, temos pela última afirmação, que exite $t_j \in R$ tal que $t_j k_j = e_j$. Além disso, como $\sum_j e_j = 1$, temos $l = 1 \cdot l = \sum_j e_j l = \sum_j t_j k_j l = 0$. Portanto φ é injetiva.

Seja E_j como definido anteriormente, temos que $E_j(P_j) = 1$ e $E_j(P_i) = 0$ se $i \neq j$. Logo, $\varphi_j(e_j)$ é unidade em R_j e $\varphi_j(e_i) = \overline{0}$, se $i \neq j$. Dessa forma, $\varphi(\sum_{i=1}^{N} e_i) = \varphi(1) = 1$. Suponhamos que $z = (\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_N}{s_N}) \in \prod_{j=1}^{N} R_j$. Então, $s_j(P_j) \neq 0$. Logo, existe $t_j \in R$ tal que $t_j s_j = e_j$ e assim $\frac{a_j}{s_j} = \frac{t_j a_j}{e_j} = \frac{t_j a_j}{1}$ em R_j. Portanto, $\varphi_j(\sum t_i a_i e_i) = \varphi_j(t_j a_j) = \frac{a_j}{s_j}$ e $\varphi(\sum t_i a_i e_i) = z$. $\square$

O Corolário a seguir é uma aplicação direta da Proposição (2.28)

Corolário 2.29. *Se* $\mathcal{V}(I) = \{P\}$*, então* $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ *é isomorfo a* $\mathcal{O}_P/I\mathcal{O}_P$*.*

Proposição 2.30. *Sejam* V *um conjunto algébrico irredutível em* $\mathbb{A}^n$*,* $I = \mathcal{I}(V) \subseteq J$ *onde* J *é um ideal de* $k[x_1, \ldots, x_n]$*. Tome* $P \in V$ *e denote por* J' *a imagem de* J *em* $k[V]$*. Então existe um isomorfismo natural* φ *de* $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$ *para* $\mathcal{O}_P(V)/J'\mathcal{O}_P(V)$*.*

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_P(V) \\ q_1 \big\downarrow & & \big\downarrow q_2 \\ \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_P(V)/J'\mathcal{O}_P(V). \end{array}$$

Aqui $\alpha(f/g) = \overline{f}/\overline{g}$, onde $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são as classes de equivalência de f e g em $k[V]$ e q_1 e q_2 são os homomorfismos canônicos de projeção. Definimos φ para que o diagrama comute, isto é,

$$\varphi(q_1(f/g)) = q_2(\alpha(f/g)), \forall\, f/g \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n).$$

Como α q_1 e q_2 são sobrejetivos, segue que φ também é. Agora vamos verificar que φ é injetiva. Seja $\overline{\overline{f/g}} = q_1(f/g)$. Se $0 = \varphi(\overline{\overline{f/g}}) = q_2(\alpha(f/g))$, então $\alpha(f/g) \in J'\mathcal{O}_P(V)$. No entanto, como $\ker(\alpha) = I\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \subseteq J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$ segue que $\alpha^{-1}(J'\mathcal{O}_P(V)) = J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$ e consequentemente $f/g \in \ker(q_1)$. Portanto, $\overline{\overline{f/g}} = q_1(f/g) = 0$. □

2.8 ÍNDICE DE INTERSEÇÃO

Sejam $V = \mathcal{V}(F)$ uma curva algébrica em $\mathbb{A}^2$, onde $F(x, y) \in k[x, y]$ é um polinômio de grau n e $P \in V$. Se $P = (0, 0)$, então $F(x, y)$ pode ser reescrito como

$$F(x, y) = F_m(x, y) + \cdots + F_n(x, y), \tag{2.2}$$

onde $0 \leq m \leq n$ e $F_j(x, y) \in k[x, y]$ são polinômios homogêneos de grau j com $F_m(x, y) \neq 0$. A *multiplicidade* de F em P é definida por $m_P(F) = m$.

Se $P = (p_1, p_2) \neq (0, 0)$, podemos calcular o $m_P(F)$ aplicando uma mudança de coordenadas afim, isto é, podemos considerar o polinômio

$$F^T(t_1, t_2) = F(t_1 + p_1, t_2 + p_2)$$

onde $T(t_1, t_2) = (t_1 + p_1, t_2 + p_2)$ é a mudança de coordenadas que leva a origem no ponto P. Deste modo, $m_P(F) = m_{(0,0)}(F^T)$.

Se $P \notin \mathcal{V}(F)$, convencionamos $m_P(F) = 0$.

Definição 2.31. Seja $P \in \mathcal{V}(F)$. Se $m_P = 1, 2, 3, \ldots, m$, dizemos que P é um ponto *simples, duplo, triplo,*$\ldots$*,* m*-uplo*, respectivamente.

Suponha $P = (0,0)$ e $m = m_P > 0$. Escreva F_m como um produto de polinômios lineares, isto é, $F_m = \prod_{i=1}^{r} L_i^{r_i}$. As retas definidas por L_i são chamadas *retas tangentes* a $\mathcal{V}(F)$ em P e r_i é a multiplicidade da reta tangente L_i em P.

Quando $m = m_P > 1$ não for especificado, diremos simplesmente que P é um ponto múltiplo. Além disso, dizemos que um ponto m-uplo $P \in \mathcal{V}(F)$ é *ordinário* se F admite m retas tangentes distintas no ponto P.

Geometricamente, $m_P(F)$ é o número de tangentes de F em P, contadas com multiplicidades.

O Teorema a seguir mostra que a multiplicidade de F em P depende somente do anel local $\mathcal{O}_P(V)$, onde $V = \mathcal{V}(F)$. Mais precisamente, a multiplicidade depende da dimensão de um subanel quociente determinado por $\mathcal{O}_P(V)$.

Teorema 2.32. *Seja $P \in V$, onde $V = \mathcal{V}(F)$ é uma curva algébrica plana irredutível e $F \in k[x,y]$. Então para todo t suficientemente grande*

$$m_P(F) = \dim_k \left(\mathfrak{m}_P^t(V)/\mathfrak{m}_P^{t+1}(V)\right).$$

Demonstração. Para esta demostração denotaremos por $\mathfrak{m}$ o ideal maximal $\mathfrak{m}_P(V) \subset \mathcal{O}_P(V)$. Considere os ideais $\mathfrak{m}^t$, $\mathfrak{m}^{t+1} \subset \mathcal{O}_P(V)$ e a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^t}{\mathfrak{m}^{t+1}} \xrightarrow{\alpha} \frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^{t+1}} \xrightarrow{\beta} \frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^t} \longrightarrow 0, \tag{2.3}$$

onde $\alpha(\bar{f}) = \alpha(f + \mathfrak{m}^{t+1}) = f + \mathfrak{m}^{t+1}$ e $\beta(\bar{g}) = \beta(g + \mathfrak{m}^{t+1}) = g + \mathfrak{m}^t$, para toda $f \in \mathfrak{m}^t$ e $g \in \mathcal{O}_P(V)$.

Pode-se verificar facilmente que os homomorfismo α e β estão bem definidos. Agora vamos mostrar que a sequência (2.3) é uma sequência exata curta, isto é, que α é injetiva, $\ker(\beta) = Im(\alpha)$ e que β é sobrejetiva. Note que α é induzido pela inclusão e consequentemente injetiva e o homomorfismo natural β é sobrejetor.

Agora basta mostrar que $\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$. Seja $\overline{g} \in \mathrm{Im}(\alpha)$, então existe um $\overline{f} \in \dfrac{\mathfrak{m}^t}{\mathfrak{m}^{t+1}}$ tal que $\alpha(\overline{f}) = \overline{g}$, onde $\overline{f} = f + \mathfrak{m}^{t+1}$, com $f \in \mathfrak{m}^t$. Desse modo,

$$\beta(\overline{g}) = \beta(\alpha(f + \mathfrak{m}^{t+1})) = \beta(f + \mathfrak{m}^{t+1}) = f + \mathfrak{m}^t = \overline{0}.$$

Por outro lado, se $\overline{g} = g + \mathfrak{m}^{t+1} \in \ker(\beta)$, então $\beta(\overline{g}) = g + \mathfrak{m}^t = 0$ e assim $g \in \mathfrak{m}^t$ e, consequentemente, $\overline{g} \in \mathrm{Im}(\alpha)$.

Com isso, temos que

$$\frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^t} \cong \frac{\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^{t+1}}{\ker(\beta)} = \frac{\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^{t+1}}{\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}}.$$

Sendo k algebricamente fechado, temos que $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m} \simeq k$. Além disso, $\dfrac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^t}$ é naturalmente um $(\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m})$-espaço vetorial, para todo $t \in \mathbb{N}$. Como β é um homomorfismo, ele é em particular uma k-transformação linear. Logo,

$$\begin{aligned}\dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^{t+1}}\right) &= \dim_k(\ker(\beta)) + \dim_k(\mathrm{Im}(\beta)) \\ &= \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^t}{\mathfrak{m}^{t+1}}\right) + \dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}^t}\right).\end{aligned}$$

Note que se mostrarmos que $\dim_k(\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^t) = t\, m_P(F) + s$ para alguma constante s, e para todo t suficientemente grande, então

$$\begin{aligned}\dim_k(\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}) &= \dim_k(\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^{t+1}) - \dim_k(\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^t) \\ &= (t+1)\, m_P(F) + s - (t\, m_P(F) + s) \\ &= m_P(F).\end{aligned}$$

Provaremos agora que tal fato é válido para todo $t \geq m_P(F)$.

Podemos supor sem perda de generalidade, aplicando uma mudança de coordenadas se necessário, que $P = (0,0)$. Seja $I = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \subseteq k[V] = k[x,y]/\langle F \rangle$. Afirmamos que $\mathfrak{m}^t = I^t\mathcal{O}_P(V)$. De fato, se $f = \dfrac{f_1}{g_1}. \cdots .\dfrac{f_t}{g_t} \in \mathfrak{m}^t$, então cada $f_i \in k[V]$ é zero em P. Portanto, cada $f_i \in I$ e o produto $f = f_1. \cdots .f_n \in I^t$. Além disso, cada g_i é diferente de zero em P. Logo, o inverso de $g_1. \cdots .g_t$ pertence a $\mathcal{O}_P(V)$ e $\mathfrak{m}^t \subset I^t\mathcal{O}_P(V)$. Reciprocamente, o ideal I^t é gerado pelo produto de t polinômios f_i que se anulam em P. Portanto $\mathfrak{m}^t = I^t\mathcal{O}_P(V)$.

Já que $\mathcal{V}(I^t, F) = \{P\}$ obtemos pelo Corolário (2.29) e pela Proposição (2.30) as seguintes relações:

$$\frac{k[x,y]}{\langle I^t, F\rangle} \cong \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle I^t, F\rangle \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)} \cong \frac{\mathcal{O}_P(V)}{I^t\mathcal{O}_P(V)}.$$

Da igualdade $\mathfrak{m}^t = I^t\mathcal{O}_P(V)$, temos que $\mathcal{O}_P(V)/I^t\mathcal{O}_P(V) = \mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^t$. Assim, para determinarmos a dimensão de $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}^t$ podemos apenas calcular a dimensão de $k[x,y]/\langle I^t, F\rangle$. Para isso, observe que se m denota a multiplicidade de F em P, então $F \in I^m$ e $FG \in I^t$ sempre que $G \in I^{t-m}$ e $t \geq m$.

Considere os seguintes homomorfismos para cada $t \geq m$:

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \dfrac{k[x,y]}{I^{t-m}} & \longrightarrow & \dfrac{k[x,y]}{I^t} \\ & G + I^{t-m} & \longmapsto & GF + I^t\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \dfrac{k[x,y]}{I^t} & \longrightarrow & \dfrac{k[x,y]}{\langle I^t, F\rangle} \\ & H + I^t & \longmapsto & H + \langle I^t, F\rangle . \end{array}$$

Considere a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow \frac{k[x,y]}{I^{t-m}} \xrightarrow{\Psi} \frac{k[x,y]}{I^t} \xrightarrow{\varphi} \frac{k[x,y]}{\langle I^t, F\rangle} \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Pode-se verificar facilmente que Ψ é injetiva, φ é sobrejetiva e $\ker(\varphi) = \mathrm{Im}(\Psi)$, ou seja, a sequência (2.4) é exata curta. Portanto,

$$\begin{aligned} \dim_k \Big(k[x,y]/(I^t, F)\Big) &= \dim_k \Big(k[x,y]/I^t\Big) - \dim_k \Big(k[x,y]/I^{t-m}\Big) \\ &= \frac{t(t+1)}{2} - \frac{(t-m)(t-m+1)}{2} \\ &= t\,m - \frac{m(m-1)}{2}. \end{aligned}$$

Como $-m(m-1)/2$ não depende de t esta é nossa constante s. □

Definição 2.33. Sejam $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ duas curvas algébricas em $\mathbb{A}^2$, onde $F, G \in k[x,y]$ e $P \in \mathbb{A}^2$. Dizemos que $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ se *intersectam estritamente* em P se $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ não têm componentes em comum passando por P. As duas curvas $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ se *intersectam transversalmente* em P se P é um ponto simples de $\mathcal{V}(F)$ e de $\mathcal{V}(G)$ e as duas curvas tem retas tangentes diferentes em P.

Lema 2.34. *Sejam F e G polinômios em $k[x,y]$ e $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$.*

(a) Se F e G não têm retas tangentes em comum em P, então $I^t \subseteq \langle F, G\rangle\mathcal{O}$, para $t \geq n + m - 1$, onde $m = m_P(F)$, $n = m_P(G)$ e $I = \langle x, y\rangle\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$.

(b) A condição $AF + BG \in I^{n+m}$ se, e somente se, $A \in I^n$ e $B \in I^m$ é equivalente à F e G terem retas tangentes distintas.

Demonstração. (a) Denote por $L_1, \ldots, L_m$ as m retas tangentes de F em P e por $M_1, \ldots, M_n$ as n retas tangentes de G em P. Considere os seguintes polinômios

$$A_{i,j} = L_1 \cdots L_i M_1 \cdots M_j, \text{ para todo } i, j \geq 0,$$

onde $L_i = L_m$ quando $i > m$, $M_j = M_n$ quando $j > n$ e $A_{00} = 1$.

Afirmamos que o conjunto $\{A_{i,j} \,|\, i + j = t\}$ é uma base para o conjunto dos polinômios homogêneos de grau t em $k[x,y]$. Observe também que este espaço tem dimensão $t+1$, pois os monômios $x^i y^{t-i}$, para $0 \leq i \leq t$, formam uma base para este espaço. Como existem $t+1$ elementos em $A_{i,j}$, com $i + j = t$, para mostrar a afirmação, basta mostrar que os elementos de $A_{i,j}$ são linearmente independentes. Suponha que não sejam, assim existe um l (escolhido o maior possível), tal que $A_{l,t-l}$ pode ser escrito como combinação dos demais, isto é,

$$\begin{aligned} A_{l,t-l} =& \sum_{i=1}^{l-1} \lambda_i A_{i,t-i} = \lambda_1 A_{1,t-1} + \lambda_2 A_{2,t-2} + \ldots + \lambda_{l-1} A_{l-1,t-(l-1)} \\ =& \lambda_1 L_1 M_1 \ldots M_{t-1} + \lambda_2 L_1 L_2 M_1 \ldots M_{t-2} + \ldots + \lambda_{l-1} L_1 \ldots L_{l-1} M_1 \ldots M_{t-l+1} \end{aligned}$$

Então, M_{t-l+1} divide $A_{i,t-i}$ para $i < l$ mas não divide $A_{l,t-l}$.

Para concluir é suficiente mostrar que $A_{i,j} \in \langle F, G\rangle \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ para todo $i+j \geq n+m-1$. Observe que $i + j \geq n + m - 1$ implica que $i \geq m$ ou $j \geq n$. Suponha que $i \geq m$. Então, $A_{i,j} = A_{m,0}B$ com B homogêneo de grau $t = i + j - m$. Além disso, $F = A_{m,0} + F'$, com F' de grau $\geq m + 1$. Logo, $A_{ij} = BF - BF'$, onde cada termo de BF' tem grau $\geq i + j + 1$. Trocando $A_{i,j}$ pelas componentes de BF' vemos que a demonstração termina se mostrarmos que $I^r \subset \langle F, G\rangle \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$, para algum r suficientemente grande. Suponhamos F e G não tem componentes em comum e $\mathcal{V}(F, G) = \{P, Q_1, \ldots, Q_s\}$. Escolha $H \in k[x, y]$ tal que $H(Q_i) = 0$ e $H(P) \neq 0$ (Lema (2.17)). Então, $Hx, Hy \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(F, G))$ e, portanto, existe r natural tal que $(Hx)^r, (Hy)^r \in \langle F, G\rangle \subset k[x, y]$. Como H^n é unidade em $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ segue que $x^r, y^r \in \langle F, G\rangle \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ e portanto $I^{2r} \subset \langle F, G\rangle \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$.

(b) Claramente, se $A \in I^n$ e $B \in I^m$, então $AF + BG \in I^{n+m}$.

Suponha que F e G têm tangentes distintas em P e $AF + BG \in I^{n+m}$. Sejam $A = A_r + A_{r+1} + \cdots$ e $B = B_s + B_{s+1} + \cdots$, onde A_i e B_j são as partes homogêneas de A e B de grau i e j, respectivamente. Então

$$AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + R,$$

onde R é composto por todos os monômios de $AF + BG$ de grau diferente de $r + m$ e $s + n$. Suponha por absurdo que $s < m$ e $r < n$. Já que $AF + BG \in I^{n+m}$, então $r + m = s + n$ e $A_r F_m = -B_s G_n$. Como F_m e G_n não têm fator em comum, segue que F_m divide B_s e G_n divide A_r. O que é uma contradição. Portanto, $s \geq m$ e $r \geq n$, ou seja, $A \in I^m$ e $B \in I^n$.

Reciprocamente, suponha que L é uma reta tangente comum de F e G. Então $F_m = LF'_{m-1}$ e $G_n = LG'_{n-1}$. Portanto, $G'_{n-1}F - F'_{m-1}G \in I^{n+m}$, $G'_{n-1} \notin I^n$ e $F'_{m-1} \notin I^m$.

□

Teorema 2.35. *Sejam $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ curvas algébricas planas e $P \in \mathbb{A}^2$. Existe um único número de interseção $I(P, F \cap G)$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$I(P, F \cap G)$ é um inteiro não negativo quando $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ se intersectam estritamente em P e $I(P, F \cap G) = \infty$, se $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ não se intersectam estritamente em P.*

2. *$I(P, F \cap G) = 0$ se, e somente, se $P \notin \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)$. Além disso, $I(P, F \cap G)$ depende somente da componente de $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ que contém P.*

3. *Se T é uma mudança de coordenadas e $T(P) = Q$, então*

$$I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T).$$

4. *$I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.*

5. *$I(P, F \cap G) \geq m_P(F)\, m_P(G)$. A igualdade ocorre se, e somente se, $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ não têm tangentes em comum em P.*

6. *$I(P, F \cap G_1G_2) = I(P, F \cap G_1) + I(P, F \cap G_2)$.*

7. *$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF))$, para todo polinômio $A \in k[x, y]$.*

Demonstração. A demonstração será dividida em duas partes, na primeira demonstraremos a unicidade e na segunda vamos mostrar que $I(P, F \cap G) = \dim_k(O_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G\rangle)$ satisfaz todas as propriedades listadas.

Unicidade: Basta apresentar uma maneira construtiva de calcularmos $I(P, F \cap G)$ usando apenas as propriedades (1)-(7).

Pela propriedade (3) podemos assumir que $P = (0, 0)$. Se F e G têm uma componente em comum, então pela propriedade (1) segue que $I(P, F \cap G) = \infty$. Portanto, podemos supor que $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ não têm componentes em comum e $I(P, F \cap G) < \infty$. Então procedemos por indução no número de interseção. O caso $I(P, F \cap G) = 0$ ocorre se, e somente se, $P \notin \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)$, por (2). Logo podemos supor que $I(P, F \cap G) = n > 0$ e que para todas curvas $\mathcal{V}(A)$ e $\mathcal{V}(B)$ tais que $I(P, A \cap B) < n$ existe um método para calcular $I(P, A \cap B)$ usando as propriedades (1)-(7).

Sejam $r =$grau$(F(x, 0))$ e $s =$grau$(G(x, 0))$. Consideramos que $r = 0$ ou $s = 0$, se os polinômios correspondentes forem nulos. Por (4) $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$, assim podemos assumir que $r \leq s$.

Se $r = 0$, então $F(x, 0) = 0$. Portanto, y divide F, isto é, $F = yH$, para algum polinômio H, e por (6) temos que

$$I(P, G \cap F) = I(P, G \cap y) + I(P, G \cap H).$$

Agora suponha que

$$G(x, 0) = x^m(a_0 + a_1x + \cdots + a_{s-m}x^{s-m}).$$

Note que, pela propriedade (1), como $I(P, F \cap G) < \infty$ então F e G não têm componentes em comum. Em particular y não divide G e $m > 0$. Como $G(x, y) = G(x, 0) + yK$, onde $K \in k[x, y]$, segue de (7), que $I(P, y \cap G) = I(P, y \cap G(x, 0))$. Então

$$\begin{aligned} I(P, y \cap G) &\overset{(7)}{=} I(P, y \cap G(x,0)) \\ &\overset{(6)}{=} I(P, y \cap x^m) + I(P, y \cap (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{s-m} x^s)) \\ &= m + 0 = m. \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre pelas propriedades (1) e (5). Deste modo

$$n = I(P, F \cap G) = I(P, y \cap G) + I(P, H \cap G) = m + I(P, H \cap G).$$

Como $m > 0$, então $I(P, H \cap G) < n$ e por hipótese temos como calculá-lo.

Se $r > 0$, multiplicando por constante se necessário, podemos assumir que $F(x, 0)$ e $G(x, 0)$ são mônicos. Se $H = G - x^{s-r}F$, então o grau $H(x, 0) = t < s$, pois o termo líder de $G(x, 0)$ é cancelado. Além disso, segue de (7) que $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap H)$. Podemos repetir esse processo, usando (4) sempre que o grau do primeiro exceder o do segundo, até chegar a dois polinômios A e B tal que $A(x, 0) = 0$. Como este processo preserva o número de interseção, obteremos que $I(P, F \cap G) = I(P, A \cap B)$ e usando o caso anterior calculamos $I(P, F \cap G)$.

Existência: Defina o índice por $I(P, F \cap G) := \dim_k \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G\rangle$.

1. Se F e G não têm componentes em comum, então pela Proposição (2.28) e Corolário (2.18) temos que $I(P, F \cap G)$ é finito. Suponha agora que F e G têm uma componente H em comum passando por P. Uma vez que $\langle F, G\rangle \subset \langle H\rangle$, podemos considerar o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$\alpha : \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G\rangle} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle H\rangle}.$$

Sendo α uma transformação k-linear, temos que

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G\rangle} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle H\rangle} + \dim_k \ker(\alpha) \geq \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle H\rangle}.$$

Pela Proposição (2.30), temos que $\dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle H\rangle} \cong \mathcal{O}_P(\mathcal{V}(H))$. Como $k[\mathcal{V}(H)] \subset \mathcal{O}_P(\mathcal{V}(H))$, segue que $\dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle H\rangle) \geq \dim_k(k[\mathcal{V}(H)])$. Como $\mathcal{V}(H)$ é infinito segue do corolário (2.18) que $k[\mathcal{V}(H)]$ tem dimensão infinita. Logo, $\dim_k \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle H\rangle}$ tem dimensão infinita.

2. Suponha que $I(P, F \cap G) = 0$. Então $\dim_k \left(\dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G\rangle}\right) = 0$, ou seja, $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) = \langle F, G\rangle$. Portanto existem $A, B \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ tais que $AF + BG = 1$. Logo $F(P) \neq 0$ ou $G(P) \neq 0$ e consequentemente $P \notin \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)$.

Por outro lado se $P \notin \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)$, então suponha, sem perda de generalidade, que $F(P) \neq 0$. Logo $1/F \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ e $1 = (1/F)F \in \langle F, G \rangle$. Portanto $I(P, F \cap G) = 0$.

3. Seja $T : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ uma mudança de coordenadas tal que $T(P) = Q$. Então T induz uma função $\widetilde{T} : \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \longrightarrow \mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^2)$, definida por $\widetilde{T}\,(f/g) = f \circ T^{-1}/g \circ T^{-1}$. Vemos que não existe nenhum elemento $f/g \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ tal que $\widetilde{T}(f/g) \notin \mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^2)$, pois caso contrário teríamos $g(P) = g \circ T^{-1}(Q) = 0$. Como T é um isomorfismo, temos que $\widetilde{T}$ também é. Portanto

$$I(P, F \cap G) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G \rangle} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^2)}{\left\langle \widetilde{T}(F), \widetilde{T}(G) \right\rangle} = I(Q, \widetilde{T}(F), \widetilde{T}(G)).$$

4. Como os ideais $\langle F, G \rangle = \langle G, F \rangle$, segue da definição que $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.

5. Sejam $m = m_P(F)$, $n = m_P(G)$ e $I = \langle x, y \rangle \subset k[x, y]$. Vamos mostrar que o $I(P, F \cap G) \geq m\,n$. Sem perda de generalidade podemos supor que $P = (0, 0)$. Defina os homomorfismos

$$\Psi : \frac{k[x, y]}{I^n} \times \frac{k[x, y]}{I^m} \longrightarrow \frac{k[x, y]}{I^{n+m}}$$

e

$$\varphi : \frac{k[x, y]}{I^{n+m}} \longrightarrow \frac{k[x, y]}{\langle I^{n+m}, F, G \rangle},$$

onde $\Psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG}$ e $\varphi(C + I^{n+m}) = C + \langle I^{n+m}, F, G \rangle$. Os homomorfismos Ψ e φ estão bem definidos. De fato, se $\overline{C_1} = \overline{C_2}$ em $\dfrac{k[x, y]}{I^{n+m}}$, então

$$C_1 - C_2 \in \left\langle I^{n+m} \right\rangle \subset \left\langle I^{n+m}, F, G \right\rangle$$

e, consequentemente, $\overline{C_1} = \overline{C_2}$ em $\dfrac{k[x, y]}{\langle I^{n+m}, F, G \rangle}$.

Além disso, se $(\overline{A_1}, \overline{B_1}) = (\overline{A_2}, \overline{B_2})$ e $\dfrac{k[x, y]}{I^n} \times \dfrac{k[x, y]}{I^m}$, então $A_1 - A_2 \in I^n$ e $B_1 - B_2 \in I^m$. Por definição temos que $F = F_m + \cdots + F_r$ e $G = G_n + \cdots + G_s$, onde F_i e G_j são os polinômios homogêneos de grau i e j respectivamente. Logo, $F \in I^m$, $G \in I^n$, $(A_1 - A_2)F \in I^{n+m}$, e $(B_1 - B_2)G \in I^{n+m}$. Portanto,

$$(A_1 - A_2)F + (B_1 - B_2)G \in I^{n+m} \subset \langle I^{n+m}, F, G \rangle,$$

ou seja, $\overline{A_1F + B_1G} = \overline{A_2F + B_2G}$ em $\dfrac{k[x, y]}{I^{n+m}}$.

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{k[x, y]}{I^n} \times \dfrac{k[x, y]}{I^m} & \xrightarrow{\Psi} & \dfrac{k[x, y]}{I^{n+m}} & \xrightarrow{\varphi} & \dfrac{k[x, y]}{\langle I^{n+m}, F, G \rangle} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Big\downarrow \alpha & & \\
 & & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G \rangle} & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle I^{n+m}, F, G \rangle} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

onde π é o homomorfismo natural e o α é induzido pelo homomorfismo natural de $k[x,y]$ em $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$. Note que φ e π são sobrejetivas. Além disso, se $\varphi(\overline{C}) = 0$, então $C \in \langle I^{n+m}, F, G\rangle$, ou seja, $C = C_1H + C_2F + C_3G$, onde $C_i \in k[x,y]$ e $H \in I^{n+m}$. Deste modo obtemos

$$\overline{C} = \overline{C_1H} + \overline{C_2F} + \overline{C_3G} = \overline{C_2F} + \overline{C_3G} = \Psi(\overline{C_2}, \overline{C_3}).$$

Por outro lado,

$$\varphi(\Psi(\overline{A}, \overline{B})) = \varphi(\overline{AF+BG}) = 0,$$

pois $AF + BG \in \langle I^{n+m}, F, G\rangle$. Portanto, $\ker(\varphi) = \mathrm{Im}(\Psi)$. Logo, as duas sequências do diagrama anterior são exatas. Do diagrama acima obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \dim_k(k[x,y]/I^n) + \dim_k(k[x,y]/I^m) &= \dim_k \ker(\Psi) + \dim_k \mathrm{Im}(\Psi) \\ &\geq \dim_k \mathrm{Im}(\Psi) \\ &= \dim_k \ker(\varphi) \end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\dim_k \left(k[x,y]/\left\langle I^{n+m}, F, G\right\rangle\right) + \dim_k \ker(\varphi) = \dim_k \left(k[x,y]/I^{n+m}\right). \tag{2.6}$$

Como $\mathcal{V}(I^{n+m}, F, G) = \{P\}$, usando o Corolário (2.29), concluímos que α é um isomorfismo. Combinando todos os resultados obtemos:

$$\begin{aligned} I(P, F\cap G) &= \dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G\rangle) \\ &= \dim_k \ker(\pi) + \dim_k \mathrm{Im}(\pi) \\ &\geq im_k \left(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\left\langle I^{n+m}, F, G\right\rangle\right) && \text{pois } \pi \text{ é sobrejetiva} \\ &= \dim_k \left(k[x,y/\left\langle I^{n+m}, F, G\right\rangle\right) && \text{pois } \alpha \text{ é um isomorfismo} \\ &= \dim_k \left(k[x,y]/I^{n+m}\right) - \dim_k \ker(\varphi) && \text{por (2.6)} \\ &\geq \dim_k(k[x,y]/I^{n+m}) - \dim_k(k[x,y]/I^n) - \dim_k(k[x,y]/I^m), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (2.5). Como $\dim_k(k[x,y]/I^t) = \binom{t+1}{2}$, então

$$I(P, F\cap G) \geq \binom{n+m+1}{2} - \binom{n+1}{2} - \binom{m+1}{2} = n\text{m}. \tag{2.7}$$

A desigualdade (2.7) será uma igualdade se, e somente se, φ e π forem injetivas. O item (b) do Lema 2.34 garante que φ é injetivo se e somente F e G não tem tangentes em comum em P. Além disso, o homomorfismo π é injetivo se e somente se $I^{n+m} \subset \langle F, G\rangle\, \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$. Observe que o item (a) do Lema (2.34) garante que se F e G tem tangentes distintas em P então π é injetiva. Portanto, a igualdade na propriedade (5) ocorre se, e somente se, F e G não tem tangentes em comum em P.

6. Se F e G_1G_2 tem componentes em comum, então F tem componentes em comum com G_1 ou G_2. Assim, $I(P, F\cap G_1G_2)=\infty$ e $I(P, F\cap G_1)=\infty$ ou $I(P, F\cap G_2)=\infty$. Logo,
$$I(P, F\cap G_1)+I(P, F\cap G_2)=(P, F\cap G_1G_2).$$
Deste modo, vamos assumir que F e G_1G_2 não têm componentes em comum.

Defina
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1G_2\rangle} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1\rangle} \\ & \overline{Z} & \longmapsto & \overline{Z} \end{array}$$
e
$$\begin{array}{rccc} \psi: & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_2\rangle} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1G_2\rangle} \\ & \overline{Y} & \longmapsto & \overline{G_1Y}. \end{array}$$

Os homomorfismos φ e ψ estão bem definidos. De fato, seja $\overline{Z_1}=\overline{Z_2}$ em $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G_1G_2\rangle$, então
$$Z_1-Z_2\in\langle F, G_1G_2\rangle\subset\langle F, G_1\rangle.$$
Portanto, $\overline{Z_1}=\overline{Z_2}$ em $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G_1\rangle$. Se $\overline{Y_1}=\overline{Y_2}$ em $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/\langle F, G_2\rangle$, então $Y_1-Y_2\in\langle F, G_2\rangle$, ou seja, existem $\dfrac{q_1}{r_1}, \dfrac{q_2}{r_2}\in\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ tais que
$$Y_1-Y_2=\frac{q_1}{r_1}F+\frac{q_2}{r_2}G_2.$$
Multiplicando a igualdade anterior por G_1 obtemos
$$G_1Y_1-G_1Y_2=\frac{q_1}{r_1}G_1F+\frac{q_2}{r_2}G_1G_2.$$
Portanto $\overline{G_1Y_1}=\overline{G_1Y_2}$ em $\mathcal{O}_P/\langle F, G_1G_2\rangle$.

Considere a seguinte sequência:
$$0\longrightarrow\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_2\rangle}\xrightarrow{\psi}\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1G_2\rangle}\xrightarrow{\varphi}\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1\rangle}\longrightarrow 0. \tag{2.8}$$

Afirmamos que esta sequência é uma sequência exata curta. De fato:

i) (ψ é injetiva) Suponha que $\psi(\overline{Z})=\overline{G_1Z}=0$, então $G_1Z\in\langle F, G_1G_2\rangle$, ou seja, existem $u, v\in\mathcal{O}_P$ tais que
$$G_1Z=uF+vG_1G_2. \tag{2.9}$$
Escolha um polinômio $S\in k[x,y]$ tal que $S(P)\neq 0$. Então multiplicando (2.9) por S obtemos $G_1ZS=uSF+vSG_1G_2$. Como G_1 e F não têm componente comum e $G_1(ZS-vSG_2)=uSF$, então F divide $(ZS-vSG_2)$, isto

é, $ZS - vSG_2 = DF$ para algum $D \in k[x,y]$. Assim, $ZS = DF + vSG_2$. Dividindo esta última igualdade por S obtemos

$$Z = \frac{D}{S}F + \frac{vS}{S}G_2.$$

Como $S(P) \neq 0$ temos que D/S e $vS/S \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$. Portanto $\overline{Z} = 0$.

ii) $(\mathrm{Im}(\psi) = \ker(\varphi))$ Note que $\varphi(\psi(\overline{Y})) = \varphi(\overline{G_1Y}) = 0$ para todo $\overline{Y} \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$. Por outro lado, se $\varphi(\overline{Z}) = 0$, então $\overline{Z} = \overline{G_1Y_1 + FY_2}$ para $Y_1, Y_2 \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$. Portanto, $\overline{Z} = \psi(\overline{Y_1})$.

iii) Claramente φ é sobrejetora.

Sendo φ e ψ transformações lineares temos:

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_2\rangle} = \dim_k \mathrm{Im}(\psi) + \dim_k \ker(\psi) = \dim_k \mathrm{Im}(\psi),$$

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1G_2\rangle} = \dim_k \mathrm{Im}(\psi) + \dim_k \ker(\psi) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1\rangle} + \dim_k \ker(\varphi)$$

Como $\mathrm{Im}(\psi) = \ker(\varphi)$, segue que

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1G_2\rangle} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_1\rangle} + \dim_k \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{\langle F, G_2\rangle}.$$

7. De modo similar a propriedade (4), essa ocorre pois $\langle F, G\rangle = \langle F, G + AF\rangle$ para qualquer $A \in k[x,y]$.

□

2.9 CONJUNTO ALGÉBRICO PROJETIVO

Definição 2.36. O espaço projetivo de dimensão n sobre um corpo k é o conjunto quociente

$$\mathbb{P}^n(k) = \frac{\mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}}{\sim},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}$ é a seguinte:

$$(p_0, p_1, \ldots, p_n) \sim (q_0, q_1, \ldots, q_n) \Leftrightarrow \exists\lambda \in k\backslash\{0\}; q_i = \lambda p_i, \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Um ponto de $\mathbb{P}^n(k)$ que é a classe de equivalência do ponto $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}$ é denotado por $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$. Se um ponto $P \in \mathbb{P}^n(k)$ é determinado por

$(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}$, dizemos que $x_0, x_1, \dots, x_n$ são as coordenadas homogêneas do ponto $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Assim,

$$\mathbb{P}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n); (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\backslash\{0\}\}.$$

Para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, o conjunto

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i \neq 0\}$$

está naturalmente em bijeção com os pontos de $\mathbb{A}^n$ e, por isso, são chamados pontos finitos. De fato, as funções

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & U_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \dots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \psi_i : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & U_i \\ & (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n) \end{array}$$

são bijeções, uma inversa da outra. Assim, escrevemos $U_i = \mathbb{A}^n_i$.

Os pontos pertencentes ao conjunto $\mathbb{L}_\infty := \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i = 0\}$ são chamdos pontos no infinito do aberto U_i.

Podemos então escrever o espaço projetivo de dimensão n como a união disjunta destes dois conjuntos, isto é,

$$\mathbb{P}^n = U_i \cup \mathbb{L}_\infty,$$

ou ainda,

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Definição 2.37. Seja $F \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Dizemos que $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ é zero do polinômio F, e escrevemos por $F(x) = 0$, se F se anula para qualquer escolha de coordenadas homogêneas de x, isto é, se

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0,$$

para todo $\lambda \in k\backslash\{0\}$.

Definição 2.38. Um polinômio $F \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é chamado um polinômio homogêneo de grau d, se

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \dots, x_n), \forall\, \lambda \in k\backslash\{0\}.$$

Observação 2.39. Todo polinômio $F \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de grau r se escreve na forma

$$F = F^0 + F^1 + \cdots + F^r,$$

onde cada F^i é a soma de todos os monômios de grau i de F. Os polinômios $F^0, F^1, \ldots, F^r$ são chamados componentes homogêneas de F. Além disso,

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = F^0(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \lambda F^1(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda^r F^r(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

para todo $\lambda \in k\backslash\{0\}$.

Para um corpo k infinito, temos que $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = 0$, para todo $\lambda \in k\backslash\{0\}$, se e somente se, $F^i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, para todo i. Ou seja, se um polinômio F se anula em um ponto $x \in \mathbb{P}^n$, então todas as suas componentes homogêneas se anulam nesse ponto.

Definição 2.40. Seja $S \subset k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ um subconjunto. O conjunto de zeros de S, denotado por $\mathcal{V}(S)$, é definido como sendo

$$\mathcal{V}(S) = \{x \in \mathbb{P}^n; F(x) = 0,\ \forall\, F \in S\}.$$

Definição 2.41. Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é dito conjunto algébrico (projetivo), se $V = \mathcal{V}(S)$ para algum $S \subset k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ formado por polinômios homogêneos.

Definição 2.42. Os conjuntos algébricos projetivos são ditos fechados projetivos. Os complementares dos fechados projetivos são chamados de abertos projetivos.

Definição 2.43. Os fechados projetivos definem em $\mathbb{P}^n$ uma topologia chamada Topologia de Zariski.

Exemplo 2.44. Seja $F \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio homogêneo. O conjunto $\mathcal{V}(F)$ é um fechado projetivo de $\mathbb{P}^n$, chamado uma hipersuperfície. No caso $n = 2$, a hipersuperfície $\mathcal{V}(F)$ é chamada de curva.

Exemplo 2.45. Seja $F \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio homogêneo. O conjunto

$$U_F := \mathbb{P}^n - \mathcal{V}(F)$$

é um aberto de $\mathbb{P}^n$, chamado aberto principal.

Exemplo 2.46. Para $i = 0, 1, \ldots, n$, os conjuntos

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n;\ x_i \neq 0\}$$

são abertos principais de $\mathbb{P}^n$, já que $U_i = \mathbb{P}^n - \mathcal{V}(x_i)$.

Definição 2.47. Um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ que é a interseção de um aberto com um fechado projetivo é chamado quasiprojetivo.

Observação 2.48. Para qualquer fechado projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$, o conjunto $X_i := X \cap U_i$ é aberto em X. Portanto, é um conjunto quasiprojetivo.

Dado um fechado $V \subset \mathbb{A}^n \simeq U_0$, seja $\overline{V}$ a interseção de todos os fechados de $\mathbb{P}^n$ contendo V. Então, $\overline{V}$ é um fechado de $\mathbb{P}^n$, chamado fecho projetivo de V. Não é difícil ver que $\overline{V} = \mathcal{V}(S)$, onde

$$S = \{x_0^{\mathrm{gr}(F)} F(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0); F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}(V)\}.$$

Definição 2.49. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ dois conjuntos quasiprojetivos. Uma função $\phi : X \to Y$ é um morfismo se, para cada $x \in X$, existem $F_0, F_1, \ldots, F_m \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, homogêneos de mesmo grau, tal que

$$\phi(x) = (F_0(x) : F_1(x) : \ldots : F_m(x)).$$

Um morfismo bijetor cuja inversa é também um morfismo é chamado um isomorfismo.

Definição 2.50. Um conjunto quasiprojetivo que é isomorfo a um fechado afim é chamado *variedade afim.*

Exemplo 2.51. Os conjuntos $U_i = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n; x_i \neq 0\}$, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, são variedades afins.

3 ESPAÇO TANGENTE E DERIVAÇÕES

3.1 ESPAÇO TANGENTE

Sejam V um subconjunto algébrico de $\mathbb{A}^n$ e $P \in V$. Uma reta L em $\mathbb{A}^n$ contendo P é por definição o conjunto dado por:

$$L = \{P + vt\,;\, t \in k\},$$

onde $v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$ é fixado. Se $I = \mathcal{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_r\rangle$ onde $F_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, para $i = 1, \ldots, r$, então

$$L \cap V = \mathcal{V}(F(t)), \text{ onde } F(t) = mdc(F_1(P + vt), \ldots, F_r(P + vt)) \tag{3.1}$$

Suponhamos que $F(t) = c\prod_{i=1}^{s}(t - \alpha_i)^{e_i}$. Os valores $t = \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, s$, são as raízes de F e tem uma multiplicidade associada e_i. Observe que cada $t = \alpha_i$ corresponde a um ponto de interseção de L com V, sendo $t = 0$ correspondente ao ponto P.

Definição 3.1. Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico e $P \in \mathbb{A}^n$ um ponto de V. A *multiplicidade de interseção* da reta $L = \{P + vt\,;\, t \in k\}$ com o conjunto algébrico V no ponto P é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz do polinômio

$$F(t) = mdc(F_1(P + vt), \ldots, F_r(P + vt)).$$

Definição 3.2. A reta L é tangente a V em P se tem multiplicidade de interseção maior ou igual a 2.

Usando a definição anterior, podemos escrever uma condição para que a reta L seja tangente a um conjunto algébrico $V = \mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r)$ em P. Para isso, considere a expansão em série de Taylor de cada F_j em P, para $j = 1, \ldots, r$, e observe que

$$\begin{aligned} F_j(P + tv) &= F_j(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(P) t v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_k}(P) t^2 v_i v_k + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(P) t v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_k}(P) t^2 v_i v_k + \ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

já que $F_j(P) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r$. Então, $t = 0$ tem multiplicidade maior ou igual a 2 como raiz de cada $F_j(P + tv)$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(P) t v_i = 0, \ \forall\ j = 1. \ldots, r. \tag{3.3}$$

Definição 3.3. O conjunto de todos os pontos de $\mathbb{A}^n$ que estão em alguma reta tangente a V em P é chamado *espaço tangente* de V em P e será denotado por T_PV.

Na definição anterior não é clara qual é a natureza de T_PV como subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Na verdade, o conjunto T_PV é um subconjunto algébrico de $\mathbb{A}^n$. De fato, $Q \in \mathbb{A}^n$ está no espaço tangente a V em P se, e somente se, o vetor $v = Q - P \in \mathbb{A}^n$ define uma reta L tangente a V em P. Usando a expressão (3.3) que caracteriza retas tangentes a V em P, temos que $Q \in T_PV$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P)(Q_i - P_i) = 0,\ \forall\, j = 1, \ldots, r. \tag{3.4}$$

Definição 3.4. O espaço tangente a V em P é um subconjunto algébrico de $\mathbb{A}^n$ formado por todos os pontos Q que satisfazem o sistema de equações (3.4), isto é,

$$T_PV = \left\{ Q \in \mathbb{A}^n\,;\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P)(Q_i - P_i) = 0, \forall\, j = 1, \ldots, r \right\}.$$

Exemplo 3.5. Seja V a superfície de $\mathbb{A}^3$ dada como o conjunto de zeros do polinômio $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Então $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$ e, pela definição (3.4), se $P = (x_0, y_0, z_0) \in V$,

$$\begin{aligned} T_PV &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3;\ \frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3;\ (-2x_0)(x - x_0) + (-2y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3;\ -2x_0x - 2y_0y + z + (2x_0^2 + 2y_0^2 - z_0) = 0\} = \mathcal{V}(H) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}(H)$ é o plano de equação $H(x, y, z) = -2x_0x - 2y_0y + z + (2x_0^2 + 2y_0^2 - z_0) = 0$.

Observação 3.6. Podemos ver pelo Exemplo (3.5) que o espaço tangente a uma variedade afim V em um ponto P não contém, em geral, a origem de $\mathbb{A}^n$. Na verdade, vimos na definição (3.3) que T_PV é a união de todas as retas tangentes a V em P e, portanto, todas elas passam por P. Mas, ainda assim é possível dar a T_PV uma estrutura de espaço vetorial. Para isso, observe que

$$Q \in T_PV \Leftrightarrow L = \{P + (Q - P)t; t \in k\} \text{ é tangente a } V \text{ em } P\ .$$

Quando a reta $L = \{P + (Q - P)t; t \in k\}$ é tangente a V em P dizemos que o vetor $v = Q - P$ é um vetor tangente a V em P. Logo, existe uma bijeção entre os conjuntos

$$\{Q \in T_PV\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} T' := \{v \in \mathbb{A}^n; v = Q - P \text{ é tangente a } V \text{ em } P\ \}.$$

A estrutura de espaço vetorial em T_PV é induzida da estrutura de espaço vetorial de T' e no que segue usaremos sempre a identificação

$$T_PV = \{v \in \mathbb{A}^n; v \text{ é tangente a } V \text{ em } P\ \}.$$

Exemplo 3.7. Sejam $V = \mathbb{A}^n$ e $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V$. Então $\mathcal{I}(V) = \langle 0 \rangle$ e

$$\begin{aligned} T_PV &= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n;\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial 0}{\partial x_i}(P)(x_i - a_i) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3;\ \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - a_i) = 0 \right\} = \mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n. \end{aligned}$$

Veremos a seguir que é possível dar uma nova definição de espaço tangente a uma variedade afim V que depende só do anel de coordenadas de V. Sejam $F(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio em $k[x_1, \dots, x_n]$ e P um ponto de $\mathbb{A}^n$. Considere a expansão em série de Taylor de F em P. A parte linear de F é definida como a *diferencial* de F em P e denotaremos por $d_P F$, ou seja

$$d_P F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F(P)(x_i - P_i).$$

Segue da definição que $d_P F$ satisfaz

$$\begin{aligned} d_P(\alpha) &= 0 \\ d_P(F+G) &= d_P F + d_P G \\ d_P(FG) &= G(P) d_P F + F(P) d_P G, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in k$ e para quaisquer $F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$. Usando a definição de diferencial podemos reescrever as equações que definem o espaço tangente de V em P como

$$d_P F_1 = \cdots = d_P F_r = 0,$$

se $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$. Além disso, se $F - G \in \mathcal{I}(V)$, temos que

$$(d_P F - d_P G)(v) = 0, \ \forall \ v \in T_P V \Longrightarrow d_P F(v) = d_P G(v), \forall \, v \in T_P V.$$

Logo, denotando por $g = \overline{G}$ a classe de equivalência de $G \in k[x_1, \dots, x_n]$ no anel de coordenadas de V, $k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(V)$, temos que

$$d_P g := d_P G|_{T_P V} \tag{3.5}$$

está bem definida e é um funcional linear em $T_P V$.

Definição 3.8. O funcional linear $d_P g$ dado por (3.5) é chamado *diferencial* de g em P.

É fácil ver que para quaisquer $f, g \in k[V]$, temos que

$$d_P(f+g) = d_P f + d_P g; \tag{3.6}$$

$$d_P(fg) = g(P) d_P f + f(P) d_P g. \tag{3.7}$$

Assim, $d_P : k[V] \to (T_P V)^*$, onde $(T_P V)^*$ é o conjunto de funcionais lineares de $T_P V$, é um homomorfismo. Como $d_P(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in k$, podemos restringir o estudo das diferenciais d_P a $\mathfrak{m}_P$, onde $\mathfrak{m}_P = \{f \in k[V] \,|\, f(P) = 0\}$ é o ideal maximal de P em $k[V]$.

Teorema 3.9. *Seja V uma variedade afim, $P \in V$ e $\mathfrak{m}_P$ o ideal maximal de P em $k[V]$. A restrição de d_P a $\mathfrak{m}_P$ define um isomorfismo entre $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_P^2$ e $(T_P V)^*$, como k-espaços vetoriais.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathrm{Im}(d_P) = (T_PV)^*$ e $\ker(d_P) = \mathfrak{m}_P^2$. A primeira igualdade ocorre, pois qualquer forma linear φ em T_PV é induzida por uma função linear f em $\mathbb{A}^n$ com $d_Pf = \varphi$ e $f(P) = 0$ e assim $\mathrm{Im}(d_P) = (T_PV)^*$. Iremos mostrar agora que $\ker(d_P) = \mathfrak{m}_P^2$, primeiramente observe que para qualquer $g \in k[V]$ teremos que $d_Pg = d_Pg_0$ onde $g_0 = g - g(P) \in \mathfrak{m}_P$. Agora seja

$$g = g_1g_2 \in \mathfrak{m}_P^2 = \langle \{g_1.g_2 \,|\, g_i \in \mathfrak{m}_P, i = 1, 2\}\rangle.$$

Então por (3.7) temos que

$$d_Pg = g_1(P)d_Pg_2 + g_2(P)d_Pg_1 = 0,$$

Portanto $\mathfrak{m}_P^2 \subseteq \ker(d_P)$. Reciprocamente, seja $g \in \ker(d_P)$ e suponha que $G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ é um polinômio tal que $g = \overline{G} \in k[V]$. Como $g \in \ker(d_P)$ temos que

$$d_Pg = 0 = d_PG|_{T_PV}$$

e, consequentemente, d_PG é uma combinação linear das equações que definem T_PV, isto é, se $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, \ldots, F_r\rangle$,

$$d_PG = \lambda_1 d_PF_1 + \cdots + \lambda_r d_PF_r. \tag{3.8}$$

Defina $G_1 = G - \lambda_1F_1 + \cdots + \lambda_rF_r$. Podemos ver que $G_1(P) = 0$, pois $g(P) = G(P) = 0$ e $F_1(P) = \cdots = F_r(P) = 0$, já que $P \in V = \mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r)$. Assim, a forma de grau 0 de G_1 é nula. Além disso, pela equação (3.8), a forma de grau 1 de G_1 também é nula. Portanto, a expansão em série de Taylor G_1 em P só tem fatores de grau ≥ 2, ou seja,

$$G_1 \in \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n\rangle^2.$$

Logo,

$$g = \overline{G} = \overline{G_1} \in \langle \overline{x_1 - p_1}, \ldots, \overline{x_n - p_n}\rangle^2 = \mathfrak{m}_P^2.$$

□

Definição 3.10. O *espaço cotangente* de V em P é espaço vetorial $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Corolário 3.11. *Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Então d_P define um isomorfismo entre o espaço tangente T_PV e o espaço vetorial de todas as formas lineares em $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, isto é,*

$$T_PV \cong (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*.$$

Demonstração. Pelo Teorema (3.9) temos que $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong (T_PV)^*$ e além disso os espaços vetoriais $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ e T_PV tem dimensão finita e portanto

$$(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^* \cong \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong (T_PV)^* \cong T_PV$$

□

Exemplo 3.12. Sejam $V = \mathbb{A}^n$ e $P = (p_1, \ldots, p_n) \in V$. Então, $k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{m}_P = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle$ e, para todo $g \in \mathfrak{m}_P$, existem $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k$, tais que

$$g = \lambda_0(x_1 - p_1) + \ldots + \lambda_n(x_n - p_n) + \mathfrak{m}_P^2,$$

ou seja,

$$d_P g = \lambda_0 d_P(x_1 - p_1) + \ldots + \lambda_n d_P(x_n - p_n) = \lambda_0 d_P x_1 + \ldots + \lambda_n d_P x_n.$$

Isto significa que $\{d_P x_1, \ldots, d_P x_n\}$ gera $(T_P V)^*$. Mas, vimos no Exemplo (3.7) que $T_P \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^n$ e, portanto, tem dimensão vetorial igual a n. Logo, $\{d_P x_1, \ldots, d_P x_n\}$ é base de $(T_P V)^*$.

É possível ainda dar uma terceira caracterização do espaço tangente a uma variedade afim V usando derivações. Esta caracterização será importante para definição de campo vetorial numa variedade.

Definição 3.13. Seja R uma anel comutativo, A um R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Uma R-derivação de A em M é uma aplicação R-linear $D : A \to M$ tal que para $a, b \in A$

$$D(ab) = a.D(b) + bD(a).$$

Note que da definição temos que $D(1) = 1.D(1) + 1D(1)$ e assim $D(1) = 0$ e $D(r) = 0$ para todo $r \in R$.

Denotaremos por $\mathrm{Der}_k(A, M)$ o conjunto de todas as R-derivações de A em M, isto é,

$$\mathrm{Der}_R(A, M) = \{D : A \longrightarrow M \mid D \text{ é uma } R-\text{derivação}\}.$$

Exemplo 3.14. Sejam k um corpo e $k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em k. Para cada $i = 1, 2 \ldots, n$, seja

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n],$$

a derivada parcial em relação à variável x_i. Sabemos que $\partial/\partial x_i$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\frac{\partial(F+G)}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial(FG)}{\partial x_i} = G\frac{\partial F}{\partial x_i} + F\frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Dado $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, sejam $k_p = \dfrac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle}$ e

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to k_p = \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle}$$

a projeção canônica. Então a função $D_i : k[x_1, \dots, x_n] \to k_p$, definida pela composição $D_i = \pi \circ \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, é uma k-derivação de $k[x_1, \dots, x_n]$ em k_p. Observe que

$$\pi(F(x_1, \dots, x_n)) = F(P), \ \forall \ F(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

e, portanto,

$$D_i(F) = \frac{\partial(F)}{\partial x_i}(P), \ \forall F \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Logo, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$ e as derivadas parciais são k-derivações.

Exemplo 3.15. Seja V uma variedade afim e $k[V]$ o anel coordenadas de V. Dado $P \in V$, seja $k_P = \mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}_P(V) \cong k$ e considere em k_P a estrutura de $k[V]-$módulo dada por

$$g.\alpha := g(P)\alpha, \forall\, g \in k[V] \text{ e } \forall\, \alpha \in k.$$

Fixando v um vetor tangente a V em P, temos que a função

$$\begin{array}{rccl} D_v : & k[V] & \to & k_P \\ & g = \overline{G} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}(P) v_i \end{array}$$

está bem definida e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{l} D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g) \\ D_v(fg) = g(P)D_v(f) + f(P)D_v(g) \\ D_v(\alpha) = 0, \forall \alpha \in k \end{array} \tag{3.9}$$

Logo, é uma k-derivação de $k[V]$ em k_P, isto é, pertence ao conjunto $\mathrm{Der}_k(k[V], k_P)$.

Vamos mostrar agora que toda k derivação de $k[V]$ em k_P é da forma D_v para algum vetor tangente $v \in T_P V$.

Proposição 3.16. *Sejam V uma variedade afim, $P \in V$ e $D \in Der_k(k[V], k_P)$. Então, existe um vetor tangente $v \in T_P V$ tal que $D(g) = D_v(g)$, para todo $g \in k[V]$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rccc} \pi : & k[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & k[V] \\ & G = \displaystyle\sum_{\alpha} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} & \longmapsto & g = \displaystyle\sum_{\alpha} a_\alpha \overline{x}_1^{\alpha_1} \cdots \overline{x}_n^{\alpha_n} \end{array}$$

a projeção canônica, que é um homomorfismo de k-álgebras. Se $D \in Der_k(k[V], k_P)$, considere a função

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{D} : & k[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & k_P \\ & G & \longmapsto & D(\pi(G)). \end{array}$$

Então, $\widetilde{D}$ é uma k-derivação de $k[x_1,\ldots,x_n]$ em k_P e, se $\pi(G)=\sum_{\alpha} a_\alpha \overline{x}_1^{\alpha_1}\cdots\overline{x}_n^{\alpha_n}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(G) &= D(\pi(G)) = \sum_{\alpha} a_\alpha D(\overline{x}_1^{\alpha_1}\cdots\overline{x}_n^{\alpha_n})\\ &= \sum_{i,\alpha} a_\alpha \alpha_i \overline{x}_1^{\alpha_1}\cdots\overline{x}_i^{\alpha_i-1}\cdots\overline{x}_n^{\alpha_n} D(\overline{x}_i) = \sum_{j=1}^{n}\widetilde{D}(x_j)\frac{\partial G}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Consideremos $v=\left(\widetilde{D}(x_1),\ldots,\widetilde{D}(x_n)\right)\in\mathbb{A}^n$. Afirmamos que $v\in T_PV$.

De fato, se $\mathcal{I}(V)=\langle F_1,\ldots,F_r\rangle$, temos que

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{D}(x_j)\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P)=\widetilde{D}(F_i)(P)=D(\pi(F_i))(P)=D(0)(P)=0,$$

para todo $i=1\ldots,r$. Portanto, $v=\left(\widetilde{D}(x_1),\ldots,\widetilde{D}(x_n)\right)\in T_PV$ e $D=D_v$.

$\square$

Corolário 3.17. *Sejam V uma variedade afim e $P\in V$. Então, o espaço tangente T_PV e o conjunto das derivações $Der_k(k[V],k_P)$ são isomorfos como k-espaços vetoriais.*

Demonstração. Considere a função $\phi: T_PV\to Der_k(k[V],k_P)$ dada por $\phi(v)=D_v$. Então ϕ é injetora e

$$\phi(\alpha v+w)=D_{\alpha v+w}=\alpha D_v+D_w, \forall\,\alpha\,\in k \text{ e } \forall\, v,w\in T_PV.$$

Segue da Proposição (3.16) que ϕ é sobrejetora. $\square$

Exemplo 3.18. Seja $V=\mathbb{A}^n$ e seja $P\in V$. Então,

$$T_PV\simeq Der_k(k[V],k_P)=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P,\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\Big\rangle.$$

3.1.1 Epaço Tangente em Variedades Quasiprojetivas

Nos conjuntos quasiprojetivos o espaço tangente é definido localmente.

Definição 3.19. Seja $P\in\mathbb{P}^n$. Definimos o espaço tangente a $\mathbb{P}^n$ em P, denotado por $T_P\mathbb{P}^n$, como sendo $T_P\mathbb{A}^n$, se $P\in U_i\cong\mathbb{A}^n$.

Observação 3.20. A definição de espaço tangente a $\mathbb{P}^n$ em P independe do aberto U_i. De fato, se $P\in\mathbb{A}_i^n\cap\mathbb{A}_j^n$, e os abertos $U_i=\mathbb{A}_i^n$ e $U_j=\mathbb{A}_j^n$ são variedades afins isomorfas. Logo anéis de coordenadas isomorfos. Então, pelo Corolário (3.17), que $T_P\mathbb{A}_i^n\cong T_P\mathbb{A}_j^n$.

Definição 3.21. Seja V uma variedade quasiprojetiva irredutível e seja P um ponto de V. Definimos o espaço tangente a V em P por $T_PV:=T_PU$, onde U é qualquer vizinhança afim de P.

Observação 3.22. Como a interseção de conjuntos afins é de novo um conjunto afim, temos que se U e W são abertos afins da variedade quasiprojetiva irredutível V contendo P então pela Definição (3.21),

$$T_P V := T_P U \cong T_P(U \cap W) \cong T_P W,$$

isto é, a definição independe da vizinhança afim contendo P.

Exemplo 3.23. Sejam $\mathbb{A}^3 = \{(z_0, z_1, z_2); z_i \in k, \forall\, i = 1, 2, 3\}$ e $U = \mathbb{A}^3 - \mathcal{V}(z_0)$. Então, U é uma variedade quasi-projetiva (aberto de $\mathbb{P}^4$) isomorfa a um conjunto fechado de $V \subset \mathbb{A}^4$. De fato, se $V = \{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}^4;\ z_0 z_3 - 1 = 0\}$, então $\phi : U \to V$ dada por $\phi((z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1, z_2, \dfrac{1}{z_0})$ é um isomorfismo de variedades quasi-projetivas.

Assim, pela Definção (3.21), para todo $P \in U \subset \mathbb{A}^3$, temos que $T_P \mathbb{A}^3 = T_P U$.

4 SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POLINOMIAIS E CAMPOS VETORIAIS

Neste capítulo estudaremos a relação entre sistemas de equações diferenciais, campos de vetores e 1-formas no plano projetivo.

4.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

Sejam $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ e considere o sistema de equações diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p(x, y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = q(x, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

Definição 4.1. Dizemos que uma função holomorfa $\theta : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ é uma solução do sistema (4.1) se para todo $t \in U$ tivermos que

$$\theta\text{'}(t) = (p(\theta(t)), q(\theta(t))).$$

A existência de solução para o sistema (4.1) é garantida pelo próximo teorema.

Definição 4.2. Dados $r \in \mathbb{R}$ positivo e $C \in \mathbb{C}$, definimos o disco aberto de centro em C e raio r por

$$D(C, r) := \{t \in \mathbb{C};\ |t - C| < r\}.$$

Teorema 4.3. *(Existência e unicidade). Considere um sistema de equações diferencias da forma (4.1). Então valem as seguintes afirmações:*

a. Para qualquer ponto $P \in \mathbb{C}^2$ existe um número real positivo r_P e uma função holomorfa $\theta_P : D(0, r_P) \to \mathbb{C}^2$ tal que $\theta_P(0) = P$ e $\theta\text{'}_P(t) = (p(\theta_P(t)), q(\theta_P(t)))$, ou seja, θ_P é uma solução de (4.1) passando por P.

b. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo a origem. Se $\varphi : U \to \mathbb{C}^2$ é uma solução de (4.1) tal que $\varphi(0) = P$, então $\varphi_{|V} = \theta_{P|V}$, onde $V = U \cap D(0, r_P)$.

Demonstração. Ver Teorema 1, página 113 de [GT] □

Definição 4.4. Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Dizemos que F é uma integral primeira em U para o sistema de equações diferenciais (4.1) se F é constante ao longo das soluções de (4.1) contidas em U. Isto é, se $F(\theta(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$ e para todo t tal que a solução $\theta(t)$ está em U.

Definição 4.5. Sejam $V \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e $\theta : V \to \mathbb{C}^2$ uma solução de (4.1). Então θ é uma solução algébrica se existe um polinômio não-nulo $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $f(\theta(t)) = 0$ para qualquer $t \in V$.

Definição 4.6. Seja $C = \mathcal{V}(f)$ uma curva algébrica, onde $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Dizemos que $C = \mathcal{V}(f)$ é uma curva algébrica invariante por (4.1) se para qualquer solução de (4.1),

$$\theta : D(0, r) \to \mathbb{C}^2$$

que satisfaz $f(\theta(0)) = 0$ tivermos que

$$f(\theta(t)) = 0, \ \forall \ t \in D(0, r).$$

4.2 CAMPOS VETORIAIS NO PLANO PROJETIVO

Um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ é uma correspondência χ que associa a cada ponto $P \in \mathbb{P}^2$, um vetor tangente $\chi(P) \in T_P\mathbb{P}^2$.

Dado $P \in \mathbb{P}^2$, podemos supor sem perda de generalidade que $P \in U_0$. Sejam (x, y) coordenadas em $U_0 \simeq \mathbb{A}^2$. Como vimos no Exemplo (3.18), temos que

$$\chi(P) = a_1(P)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + a_2(P)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P,$$

onde $a_1(P), a_2(P) \in k$. Assim, podemos representar localmente o campo χ em U_0 por uma expressão da forma

$$\chi_{U_0} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.2}$$

com $a_1, a_2 : U_i \to k$ funções.

Quando as funções $a_1, a_2 : U_i \to k$ forem polinomiais diremos que o campo χ é um *campo polinomial*.

Podemos associar ao sistema de equações diferencias (4.1) o campo de vetores

$$\chi = p(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.3}$$

Segundo Lins Neto e Scárdua, em [LNS], as curvas obtidas pelo prolongamento das soluções locais da equação (4.1) são chamadas *trajetórias* (ou soluções) do campo χ e definem no plano uma folheação por curvas (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções). Não faremos a definição precisa de uma folheação mas, de forma simplificada, uma folheação de uma variedade M é uma decomposição de M em subvariedades lisas de mesma dimensão, e que são localmente associadas a equações diferenciais.

Definição 4.7. Um campo χ em $\mathbb{P}^2$ é integrável em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}^2$ se existe uma função analítica (multivaluada) não constante, $F : U \to \mathbb{C}$, chamada integral primeira do campo em U, constante em toda solução $(x(t), y(t))$ do campo em U, isto é, $F(x(t), y(t)) = c$ para algum $c \in \mathbb{C}$ e todos os valores de t para os quais $(x(t), y(t)) \in U$.

Proposição 4.8. *Uma função holomorfa $F : U \to \mathbb{C}$ é uma integral primeira do campo χ em U se, e somente se, $\chi(F) = 0$ em U.*

Demonstração. Sejam P um ponto de $\mathbb{C}^2$ e $\theta(t)$ uma solução do campo definida em um aberto I contendo 0, tal que $\theta(0) = P$. Se F é uma integral primeira para χ temos que $F(\theta(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$ e todo $t \in I$ tal que $\theta(t) \in U$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}F(\theta(t)) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t))\right)\theta'(t) \\ &= p(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)) + q(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se fizermos $t = 0$ na equação (4.4), concluímos que

$$\chi(F)(P) = p(P)\frac{\partial F}{\partial x}(P) + q(P)\frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0.$$

Como em todo $P \in \mathbb{C}^2$ passa uma solução do campo, concluímos que

$$\chi(F)(P) = 0,\ \forall\, P \in U \Rightarrow \chi(F) = 0.$$

Reciprocamente, se $\chi(F) = 0$, para toda solução do campo $\phi : I \to U$ temos que,

$$\frac{dF}{dt}(\theta(t)) = p(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)) + q(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)) = 0,\ \forall\ t \in I.$$

Logo, $F(\theta(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$.

□

4.3 1-FORMAS NO PLANO PROJETIVO

Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é uma correspondência ω que associa a cada ponto $P \in \mathbb{P}^2$ um funcional linear $\omega(P) \in (T_P\mathbb{P}^2)^*$.

Como no caso de campos de vetores, veremos como representar uma 1-forma no plano projetivo. Dado $P \in \mathbb{P}^2$, suponha $P \in U_0 \simeq \mathbb{A}^2$ e sejam (x, y) coordenadas locais de U_0. Então, pelo Exemplo (3.12), $(T_P\mathbb{P}^2)^* = \langle d_Px, d_Py\rangle$ e, portanto, a 1-forma ω em $P \in U_0$ é da forma:

$$\omega(P) = b_1(P)d_Px + b_2(P)d_Py$$

Portanto, podemos representar ω em U_0 por

$$\omega = b_1dx + b_2dy$$

onde $b_1, b_2 : U \to k$ são funções. Quando tais funções forem polinomiais diremos que a 1-forma ω é uma *1-forma polinomial.*

Sejam ω uma 1-forma e $P \in \mathbb{P}^2$, então

$$\omega(P) : T_P\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

é um funcional linear cujo núcleo, $\ker(\omega(P))$, é uma reta em $T_P\mathbb{P}^2$ passando por P. Deste modo, obtemos uma correspondência $P \mapsto \ker(\omega(P))$, que associa a cada ponto $P \in \mathbb{P}^2$ uma reta de $T_P\mathbb{P}^2$. Uma correspondência deste tipo chama-se distribuição de subespaços tangentes. No caso, trata-se de uma distribuição de retas tangentes.

Dessa forma, uma distribuição polinomial de vetores tangentes em $\mathbb{P}^2$ pode ser pensada como um campo vetorial ou como núcleo de uma 1-forma. Mais explicitamente, para cada $P \in \mathbb{P}^2$, podemos definir um vetor de $T_P\mathbb{P}^2$ como dado por uma direção $\chi(P)$, para algum campo χ ou como um vetor da forma $\ker(\omega(P))$, para alguma 1-forma.

Definição 4.9. Dizemos que um campo de vetores χ e uma 1-forma ω definem a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ se, para cada $P \in \mathbb{P}^2$, $\chi(P) \in \ker(\omega(P))$, isto é,

$$\omega(P)(\chi(P)) = 0, \forall P \in \mathbb{P}^2.$$

4.4 EXPRESSÕES GLOBAIS DE CAMPOS E 1-FORMAS

Nesta seção faremos a definição de projetivização de um campo vetorial e de uma 1-forma em $\mathbb{A}^2$ ou, equivalentemente, definiremos o que é a expressão global de um campo ou de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$. Essas definições nascem de duas observações. A primeira é que o espaço tangente de $\mathbb{P}^2$ em um ponto é isomorfo a $\mathbb{A}^2$ e a segunda é que os abertos principais de $\mathbb{P}^2$ são isomorfos a variedades afins de $\mathbb{A}^3$.

Vimos na definição de espaço projetivo que um ponto $P = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2$ é uma classe de equivalência de um ponto $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{A}^3 - \{0\}$. Por isso, faz sentido estudar a relação entre os espaços tangentes de $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{A}^3$. Neste momento, é importante lembrar que a definição de espaço tangente de $\mathbb{P}^2$ em um ponto é local.

Lema 4.10. *Os conjuntos abertos* $U_0 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2; z_0 \neq 0\} = \mathbb{P}^2 - \mathcal{V}(z_0)$ *e* $U = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{A}^3; z_0 \neq 0\} = \mathbb{A}^3 - \mathcal{V}(z_0)$, *são variedades quasiprojetivas isomorfas a conjuntos algébricos afins. Além disso,* $k[U_0] \simeq k[x, y]$ *e*

$$k[U] \simeq k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right].$$

Demonstração. De fato, as funções

$$\begin{array}{rccc} \phi : & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi: & U & \longrightarrow & V \\ & (z_0, z_1, z_2) & \longmapsto & \left(z_0, z_1, z_2, \dfrac{1}{z_0}\right), \end{array}$$

onde $V = \mathcal{V}(z_0 z_3 - 1) \subset \mathbb{A}^4$, são isomorfismos. Logo,

$$k[U_0] \simeq k[\mathbb{A}^2] \simeq k[x, y]$$

e

$$k[U] \simeq k[V] = \frac{k[z_0, z_1, z_2, z_3]}{\langle z_0 z_3 - 1\rangle} \simeq k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right].$$

□

Sejam U e U_0 os abertos definidos no Lema anterior e φ o morfismo dado por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U & \longrightarrow & U_0 \simeq \mathbb{A}^2 \\ & (z_0, z_1, z_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{z_2}{z_0}\right). \end{array}$$

Dado $Q \in U \subset \mathbb{A}^3$, seja $P = \varphi(Q)$. Vamos mostrar que existe uma relação entre o espaço tangente a $\mathbb{A}^3$ em um ponto Q e o espaço tangente a U_0 no ponto $P = \varphi(Q)$. Para isso, vamos usar a caracterização do espaço tangente como o conjunto de derivações, isto é, usaremos que $T_Q U = \mathrm{Der}_k(k[U], k_Q) = \mathrm{Der}_k\left(k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right], k_Q\right)$ e que $T_P U_0 = \mathrm{Der}_k(k[U_0], k_P) = \mathrm{Der}_k(k[x, y], k_P)$.

Definimos a diferencial de φ em Q, denotada por $d_Q\varphi$, por:

$$\begin{array}{rccc} d_Q\varphi: & T_Q U & \longrightarrow & T_P \mathbb{A}^2 \\ & D & \longrightarrow & D \circ \varphi^* \end{array}$$

onde φ^* é o pullback de φ, isto é, φ^* é o homomorfismo de anéis $\varphi^* : k[x, y] \to k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right]$ dado por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Então, $d_Q\varphi$ é uma transformação linear e, para todo $f \in k[x, y]$, vale

$$d_Q\varphi(D)(f) = (D \circ \varphi^*)(f) = D(\varphi^*(f)) = D(f \circ \varphi). \tag{4.5}$$

Observação 4.11. Se $f(x, y) \in k[x, y]$ é um polinômio de grau n, então

$$\varphi^*(f)(z_0, z_1, z_2) = f(\varphi(z_0, z_1, z_2)) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{F(z_0, z_1, z_2)}{z_0^n} \in k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right],$$

onde $F(z_0, z_1, z_2) \in k[z_0, z_1, z_2]$ é um polinômio homogêneo de grau n, chamado *homogeneização* de f.

Observação 4.12. Para $j = 1, 2$ e 3, as derivadas parciais $\dfrac{\partial}{\partial z_j} : k[z_0, z_1, z_2] \to k[z_0, z_1, z_2]$ podem ser estendidas ao corpo de frações $k(z_0, z_1, z_2)$ de $k[z_0, z_1, z_2]$ de modo a se preservar a regra de Leibniz, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{1}{G^2}\left(G\frac{\partial F}{\partial z_j} - F\frac{\partial G}{\partial z_j}\right).$$

Como $k[U] \simeq k\left[\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right] \subset k(z_0, z_1, z_2)$, temos que dado

$$D \in T_Q U \cong T_Q \mathbb{A}^3 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_0}\Big|_Q, \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_Q, \frac{\partial}{\partial z_2}\Big|_Q \right\rangle,$$

existem $a_0, a_1, a_2 \in k$ tais que

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial z_0}\Big|_Q + a_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_Q + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\Big|_Q.$$

Proposição 4.13. *Se $f(x,y) \in k[x,y]$, $Q = (q_0, q_1, q_2) \in U$, $P = \varphi(Q) \in U_0$ e*

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial z_0}\Big|_Q + a_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_Q + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\Big|_Q \in T_Q U,$$

então

$$d_Q\varphi(D)(f) = \frac{1}{q_0}\left([a_1 - x a_0]\,(P) \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P + [a_2 - y a_0]\,(P) \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P \right).$$

Demonstração. Vimos que se $f(x,y) \in k[x,y]$ é um polinômio de grau n, então

$$\varphi^*(f)(z_0, z_1, z_2) = f(\varphi(z_0, z_1, z_2)) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{F(z_0, z_1, z_2)}{z_0^n},$$

onde $F(z_0, z_1, z_2) \in k[z_0, z_1, z_2]$ é um polinômio homogêneo de grau n. Então,

$$D(f \circ \varphi) = a_0 \frac{\partial}{\partial z_0}(f \circ \varphi)(Q) + a_1 \frac{\partial}{\partial z_1}(f \circ \varphi)(Q) + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}(f \circ \varphi)(Q)$$

$$= a_0 \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{F}{z_0^n}\right)(Q) + a_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{F}{z_0^n}\right)(Q) + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{F}{z_0^n}\right)(Q)$$

$$= a_0\left(-n\frac{F}{z_0^{n+1}} + \frac{1}{z_0^n}\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)(Q) + a_1\left(\frac{1}{z_0^n}\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)(Q) + a_2\left(\frac{1}{z_0^n}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(Q)$$

Usando a relação de Euler, $nF = z_0\frac{\partial F}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}$, segue que

$$D(f \circ \varphi) = \frac{1}{z_0^n}(Q)\left[a_0\left(-\frac{z_1}{z_0}\frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{z_2}{z_0}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(Q) + a_1\frac{\partial F}{\partial z_1}(Q) + a_2\frac{\partial F}{\partial z_2}(Q)\right]$$

$$= \frac{1}{z_0}(Q)\left[\left(a_1 - a_0\frac{z_1}{z_0}\right)(Q)\left(\frac{1}{z_0^{n-1}}\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)(Q) + \left(a_2 - a_0\frac{z_2}{z_0}\right)(Q)\left(\frac{1}{z_0^{n-1}}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(Q)\right]$$

$$= \frac{1}{z_0}(Q)\left[\left(a_1 - a_0\frac{z_1}{z_0}\right)(Q)\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(Q)) + \left(a_2 - \frac{z_2}{z_0}a_0\right)(Q)\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(Q))\right].$$

Portanto,

$$q_0 D(\varphi^*)(f) = \left[a_1 - \frac{z_1}{z_0} a_0\right](Q)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(Q)) + \left[a_2 - \frac{z_2}{z_0} a_0\right](Q)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(Q)),$$

ou ainda,

$$q_0(d_Q\varphi(D))(f) = [a_1 - xa_0](P)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P + [a_2 - ya_0](P)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P.$$

Donde concluímos que

$$q_0(d_Q\varphi(D))(f) = [a_1 - xa_0](P)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P + [a_2 - ya_0](P)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P \in T_P\mathbb{P}^2. \tag{4.6}$$

□

Proposição 4.14. *Um campo vetorial em $\mathbb{A}^3$ dado*

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde $F_0, F_1, F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos de grau d, definem localmente um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ da forma

$$\chi = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.7}$$

onde $x = \dfrac{z_1}{z_0}$, $y = \dfrac{z_2}{z_0}$ e $f_i(x, y) = F_i(1, x, y)$, para todo $i = 0, 1, 2$.

Demonstração. Se $Q \in U \subset \mathbb{A}^3$, temos que

$$\mathcal{X}(Q) = F_0(Q)\frac{\partial}{\partial z_0}\Big|_Q + F_1(Q)\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_Q + F_2(Q)\frac{\partial}{\partial z_2}\Big|_Q \in T_Q\mathbb{A}^3,$$

e, pela Proposição 4.13,

$$q_0 d_Q\varphi(\mathcal{X}(Q)) = (F_1 - xF_0)(P)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + (F_2 - yF_0)(P)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P, \tag{4.8}$$

onde $P \in \mathbb{A}^2$ é tal que $\varphi(Q) = P$ e

$$\begin{aligned}(F_1 - xF_0)(P) &:= F_1(z_0, z_1, z_2) - \frac{z_1}{z_0}F_0(z_0, z_1, z_2) = z_0^d\left(F_1(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_1}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)\\ &= z_0^d[F_1(1, x, y) - xF_0(1, x, y)],\end{aligned}$$

pois, $x = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_0}$. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}(F_2 - yF_0)(P) &:= F_2(z_0, z_1, z_2) - \frac{z_2}{z_0}F_0(z_0, z_1, z_2) = z_0^d\left(F_2(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0}F_0(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)\\ &= z_0^d[F_1(1, x, y) - yF_0(1, x, y)].\end{aligned}$$

Como $z_0 \neq 0$ em U e só nos interessa a direção do campo, podemos escrever

$$d_Q\varphi(\mathcal{X}(Q)) = (f_1 - xf_0)(P)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + (f_2 - yf_0)(P)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P \in T_P\mathbb{A}^2, \tag{4.9}$$

onde $f_i(x,y) = F_i(1,x,y)$, para todo $i = 0,1,2$.

$\square$

A Proposição anterior motiva as seguintes definições.

Definição 4.15. Uma expressão da forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde $F_0, F_1, F_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$, quando não nulos, são homogêneos de mesmo grau, é chamada uma expressão global de um campo em $\mathbb{P}^2$ ou simplesmente de um campo projetivo.

Definição 4.16. Um campo projetivo

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde os polinômios F_0, F_1 e F_2 são homogêneos de grau d é dito ser de grau d.

Definição 4.17. Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ cuja forma global é

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0, denotada por $\mathcal{X}_{U_0}$, é definida por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - x\,f_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - y\,f_0)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.10}$$

onde $x = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_0}$ são as coordenadas locais em U_0 e $f_i = F_i(1,x,y)$, $\forall\, i \in \{0,1,2\}$.

De forma análoga, definimos as expressões locais de $\mathcal{X}$ nos abertos U_1 e U_2.

Definição 4.18. A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_1, denotada por $\mathcal{X}_{U_1}$, é definida por

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - x\,f_1)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - y\,f_1)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.11}$$

onde $x = \dfrac{z_0}{z_1}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_1}$ são as coordenadas locais em U_1 e $f_i = F_i(x,1,y), \forall\, i \in \{0,1,2\}$.

Definição 4.19. A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_2, denotada por $\mathcal{X}_{U_2}$, é dada por

$$\mathcal{X}_{U_2} = (f_0 - x\,f_2)\frac{\partial}{\partial x} + (f_1 - y\,f_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{4.12}$$

onde $x = \dfrac{z_0}{z_2}$ e $y = \dfrac{z_1}{z_2}$ são as coordenadas locais em U_2 e $f_i = F_i(x,y,1), \forall\, i \in \{0,1,2\}$.

Analogamente ao que fizemos para os campos vetoriais em $\mathbb{P}^2$, definiremos a expressão global de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$.

Seja ω uma 1-forma dada em $U_0 \simeq \mathbb{A}^2$ por

$$\omega = b_1 dx + b_2 dy$$

e seja $d = max\{\deg(b_1), \deg(b_2)\}$. Dado $Q = (z_0, z_1, z_2) \in U$, sejam $P \in \mathbb{A}^2$ tal que $P = (x, y) = \varphi(Q)$, $x = \dfrac{z_1}{z_0}$ e $y = \dfrac{z_2}{z_0}$. Então,

$$\omega(P) = b_1(P)d_P x + b_2(P)d_P y$$

$$= b_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}d_P z_1 - \frac{z_1}{z_0^2}d_P z_0\right) + b_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}d_P z_2 - \frac{z_2}{z_0^2}d_P z_0\right)$$

$$= \left[-\frac{z_1}{z_0^2}b_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0^2}b_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right]d_P z_0 + \frac{1}{z_0}b_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)d_P z_1 + \frac{1}{z_0}b_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)d_P z_2$$

$$= \frac{1}{z_0}\left(-\frac{z_1}{z_0}b_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - \frac{z_2}{z_0}b_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right)d_P z_0 + \frac{1}{z_0}b_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})d_P z_1 + \frac{1}{z_0}b_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})d_P z_2.$$

Portanto,

$$\omega(\varphi(Q)) = \frac{1}{z_0^{d+2}}[B_0(Q)d_Q z_0 + B_1(Q)d_Q z_1 + B_2(Q)d_Q z_2] \tag{4.13}$$

onde os polinômios B_0, B_1 e B_2 são homogêneos de mesmo grau, $d+1$, e satisfazem

$$\begin{cases} B_0(z_0, z_1, z_2) = z_0^d\left[-z_1 b_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) - z_2 b_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})\right], \\ B_1(z_0, z_1, z_2) = z_0^{d+1} b_1(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}), \\ B_2(z_0, z_1, z_2) = z_0^{d+1} b_2(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}). \end{cases}$$

Observação 4.20. Os polinômios B_0, B_1 e B_2 satisfazem a relação $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$.

Observação 4.21. Sejam $b_{1d}(x, y)$ e $b_{2d}(x, y)$ as componentes homogêneas de grau d de $b_1(x, y)$ e $b_2(x, y)$ respectivamente. Então, se $xb_{1d}(x, y) - yb_{2d}(x, y) = 0$, teremos que z_0 é um fator em comum de B_0, B_1 e B_2. Logo, simplificando por z_0 teremos que os polinômios

B_0, B_1 e B_2 são homogêneos de grau d e satisfazem

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d-1}\left[-z_1 b_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2 b_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right], \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^d b_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^d b_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}). \end{cases}$$

Definição 4.22. Uma expressão da forma

$$\Omega = B_0 dz_0 + B_1 dz_1 + B_2 dz_2,$$

onde $B_0, B_1, B_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tais que $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$ é chamada de expressão global de uma 1-forma projetiva ou simplesmente de 1-forma projetiva.

Observação 4.23. Seja ω uma 1-forma $\mathbb{P}^2$ dada em U_0 por $\omega = b_1dx + b_2dy$ e seja $d = max\{\deg(b_1), \deg(b_2)\}$. Os polinômios de grau $d+1$ (possivelmente de grau d) dados por

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d}\left[-z_1 b_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}) - z_2 b_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0})\right], \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d+1} b_1(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}), \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d+1} b_2(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}). \end{cases}$$

definem uma 1-forma projetiva $\Omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2$ associada a ω.

4.5 RELAÇÃO ENTRE CAMPOS E 1-FORMAS EM $\mathbb{P}^2$

Vimos na Definição (4.9) que um campo de vetores χ e uma 1-forma ω definem a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ se , $\omega(P)(\chi(P)) = 0$, $\forall P \in \mathbb{P}^2$.

Suponhamos $P \in U_0 \subset \mathbb{P}^2$, $\omega\Big|_{U_0} = b_1dx + b_2dy$ e

$$\chi\Big|_{U_0} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Então, χ e ω definem a mesma folheação em $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ se, e somente se, $\forall P \in U_0 \subset \mathbb{P}^2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(P)(\chi(P)) \\ &= (b_1(P)d_Px + b_2d_Py)\left(a_1(P)\frac{\partial}{\partial x}|_P + a_2(P)\frac{\partial}{\partial y}|_P\right) \\ &= b_1(P)a_1(P) + b_2(P)a_2(P) \end{aligned} \tag{4.14}$$

já que, $d_P x\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P\right) = 1$, $d_P x\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P\right) = 0$, $d_P y\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P\right) = 0$ e $d_P y\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P\right) = 1$. A equação (4.14) é igual a zero se, e somente se, $(b_1(P), b_2(P)) = \lambda(-a_2(P), a_1(P))$ para algum $\lambda \in k$. Ou seja, $\omega|_{U_0} = b_1dx + b_2dy$ e $\chi|_{U_0} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y}$ definem a mesma folheação em $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ se, e somente se, $\omega|_{U_0} = -a_2dx + a_1dy$.

Veremos agora qual a relação entre a expressão global do $\chi|_{U_0} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y}$ e a 1-forma $\omega|_{U_0} = -a_2dx + a_1dy$.

Suponhamos que o campo χ é dado globalmente por

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Então, pela Definição (4.17), a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0 é dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $a_1(x,y) = F_1(1,x,y) - xF_0(1,x,y)$, $a_2(x,y) = F_2(1,x,y) - yF_0(1,x,y)$ e $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$ são coordenadas locais em U_0. Neste caso, a expressão global da 1-forma dada em U_0 por

$$\omega = -a_2(x,y)dx + a_1(x,y)dy.$$

é a expressão da forma

$$\Omega := B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2,$$

onde $B_0, B_1, B_2 \in k[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos de grau d ou $d+1$ tais que

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^d\,[\,z_1\,([F_2(1,x,y) - \,y\,F_0(1,x,y)\,]\,) - z_2[F_1(1,x,y) - xF_0(1,x,y)]\,] \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d+1}\,(\,-\,[\,F_2(1,x,y) - yF_0(1,x,y)\,]\,) \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d+1}\,[\,F_1(1,x,y) - xF_0(1,x,y)\,]\,, \end{cases}$$

$$d = \max\{\deg\,[F_1(1,x,y) - xF_0(1,x,y)]\,,\ \deg\,[F_2(1,x,y) - yF_0(1,x,y)]\},$$

e $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$.

Suponha que F_0, F_1 e F_2 tem grau r (e são homogêneos), temos, para $i = 0,1,2$,

$$F_i\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0^r}F_i(z_0,z_1,z_2), \text{ e}$$

$$B_0 = z_0^d\left[z_1\left(\frac{F_2(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} - \frac{z_2}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right) - z_2\left(\frac{F_1(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} - \frac{z_1}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right)\right],$$

$$B_1 = z_0^{d+1}\left[-\frac{F_2(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} + \frac{z_2}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right],$$

$$B_2 = z_0^{d+1}\left[\frac{F_1(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r} - \frac{z_1}{z_0}\frac{F_0(z_0,z_1,z_2)}{z_0^r}\right].$$

Portanto,

$$\begin{cases} B_0(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d-r}\left(z_1F_2(z_0,z_1,z_2) - z_2F_1(z_0,z_1,z_2)\right), \\ \\ B_1(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d-r}\left(-z_0F_2(z_0,z_1,z_2) + z_2F_0(z_0,z_1,z_2)\right), \\ \\ B_2(z_0,z_1,z_2) = z_0^{d-r}\left(z_0F_1(z_0,z_1,z_2) - z_1F_0(z_0,z_1,z_2)\right). \\ \end{cases}$$

Uma forma de obtermos a expressão global da 1-forma Ω associada a um campo de vetores

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

é via o seguinte determinante:

$$\Omega = \begin{bmatrix} dz_0 & dz_1 & dz_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{bmatrix} = (z_1F_2 - z_2F_1)\,dz_0 + (z_2F_0 - z_0F_2)\,dz_1 + (z_0F_1 - z_1F_0)\,dz_2.$$

Faremos agora uma recíproca do resultado anterior, isto é, veremos como definir a partir de uma expressão global de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ um campo vetorial global definindo a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$.

Proposição 4.24. *Sejam B_0, B_1 e $B_2 \in k[z_0,z_1,z_2]$ polinômios homogêneos de grau $m+1$ satisfazendo $z_0B_0 + z_1B_1 + z_2B_2 = 0$, então existem polinômios F_0, F_1, F_2 homogêneos de grau m tais que:*

$$\begin{cases} B_0 = z_2F_1 - z_1F_2; \\ B_1 = z_0F_2 - z_2F_0; \\ B_2 = z_1F_0 - z_0F_1. \end{cases}$$

Demonstração. Segue da hipótese que

$$z_0B_0 = -z_1B_1 - z_2B_2. \tag{4.15}$$

Observe que não existe nenhum monômio em B_0 divisível por z_0^{m+1} pois, caso contrário, teríamos que z_0^{m+2} dividindo algum monômio de $z_0B_0 = -z_1B_1 - z_2B_2$. Mas, todo monômio de $-z_1B_1 - z_2B_2$ tem as variáveis z_1 ou z_2 o que impossibilita a existência de um monômio de grau $m+2$ divisível por z_0^{m+2}. Deste modo, todos os monômios de B_0 possuem fator z_1 ou z_2 e assim podemos escrever $B_0 = z_2F_1 - z_1F_2$, para algum par de polinômios homogêneos $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ de grau m. Substituindo B_0 em (4.15), obtemos:

$$-z_1B_1 - z_2B_2 = z_0z_2F_1 - z_0z_1F_2. \tag{4.16}$$

Agrupando os termos de z_1 e z_2 na equação (4.16) chegamos à seguinte igualdade

$$z_2(z_0F_1 + B_2) = z_1(z_0F_2 - B_1). \tag{4.17}$$

Então, z_2 divide $z_0F_2 - B_1$ e z_1 divide $z_0F_1 + B_2$, ou seja, existem polinômios G_3 e G_4, ambos de grau m, tais que

$$\begin{cases} z_0F_2 - B_1 = z_2G_3 \\ z_0F_1 + B_2 = z_1G_4 \end{cases} \tag{4.18}$$

Substituindo as equações de (4.18) em (4.17) resulta que:

$$z_2z_1G_4 = z_1z_2G_3 \text{ e assim teremos } G_3 = G_4$$

Denotando $G_3 = G_4 = F_0$ obtemos a relação desejada

$$\begin{cases} B_1 = z_0F_2 - z_2F_0 \\ B_2 = z_1F_0 - z_0F_1 \\ B_0 = z_2F_1 - z_1F_2. \end{cases}$$

□

Observação 4.25. Com a proposição anterior podemos reescrever uma 1-forma de grau $m+1$

$$\Omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2,$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Omega &= (z_2F_1 - z_1F_2)dz_0 + (z_0F_2 - z_2F_0)dz_1 + (z_1F_0 - z_0F_1)dz_2 \\ &= F_0(z_1dz_2 - z_2dz_1) + F_1(z_2dz_0 - z_0dz_2) + F_2(z_0dz_1 - z_1dz_0), \end{aligned}$$

onde F_0, F_1 e F_2 são polinômios homogêneos de grau m, tais que

$$\begin{cases} B_0 = z_2F_1 - z_1F_2 \\ B_1 = z_0F_2 - z_2F_0 \\ B_2 = z_1F_0 - z_0F_1. \end{cases}$$

O terno (F_0, F_1, F_2) define então um campo de vetores de $\mathbb{P}^2$ de grau m, mais precisamente

$$\chi = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}. \tag{4.19}$$

Se o terno (G_0, G_1, G_2) também define Ω, isto é,

$$B_0 = z_2G_1 - z_1G_2, \qquad B_1 = z_0G_2 - z_2G_0, \qquad B_2 = z_1G_0 - z_0G_1,$$

afirmamos que existe um polinômio homogêneo $H \in k[z_0, z_2, z_2]$ de grau $m - 1$, tal que

$$G_0 = F_0 + z_0H, \qquad G_1 = F_1 + z_1H, \qquad G_2 = F_2 + z_2H.$$

De fato, se

$$\chi = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z - 2}$$

e

$$\chi' = G_0\frac{\partial}{\partial z_0} + G_1\frac{\partial}{\partial z_1} + G_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

representam o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^2$, então pela Definição (4.17) tem suas formas locais em U_0, dadas respectivamente por

$$\chi_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\chi'_{U_0} = (g_1 - xg_0)\frac{\partial}{\partial x} + (g_2 - yg_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde (x, y) são coordenadas locais em U_0, isto é, $x = \dfrac{z_1}{z_0}$, $y = \dfrac{z_2}{z_0}$. Logo,

$$f_1 - xf_0 = g_1 - xg_0 \tag{4.20}$$

$$f_2 - yf_0 = g_2 - yg_0. \tag{4.21}$$

Multiplicando (4.20) por z_0^{m+1}, obtemos a seguinte expressão

$$z_0F_1 - z_1F_0 = z_0G_1 - z_1G_0.$$

Agrupando os termos z_0 e z_1 temos

$$z_0(G_1 - F_1) = z_1(G_0 - F_0). \tag{4.22}$$

Daí segue que z_0 divide $(G_0 - F_0)$, isto é, existe um polinômio homogêneo $H \in k[z_0, z_1, z_2]$ de grau $m - 1$ tal que $G_0 - F_0 = z_0H$. Substituindo essa expressão em (4.22),obtemos

$$z_0(G_1 - F_1) = z_0z_1H$$

e, consequentemente,

$$G_1 - F_1 = z_1 H.$$

De modo similar, multiplicamos (4.21) por z_0^{m+1} e obtemos

$$z_0 F_2 - z_2 F_0 = z_0 G_2 - z_2 G_0.$$

Agrupando novamente os termos de z_0 e z_1, temos

$$z_0(G_2 - F_2) = z_2(G_0 - F_0).$$

Usando o fato de que $G_0 - F_0 = z_0 H$, temos

$$\begin{aligned} z_0(G_2 - F_2) &= z_0 z_2 H \\ G_2 - F_2 &= z_2 H. \end{aligned}$$

Observação 4.26. Nas hipóteses da Observação (4.25), seja

$$H = -\frac{1}{m+2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\right).$$

Então,

$$\frac{\partial G_0}{\partial z_0} + \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + \frac{\partial G_2}{\partial z_2} = 0. \tag{4.23}$$

De fato, como $G_0 = F_0 + z_0 H$, $G_1 = F_1 + z_1 H$ e $G_2 = F_2 + z_2 H$, suas derivadas parciais são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_0}{\partial z_0} = \dfrac{\partial F_0}{\partial z_0} + H + z_0 \dfrac{\partial H}{\partial z_0} \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} + H + z_1 \dfrac{\partial H}{\partial z_1} \\[2ex] \dfrac{\partial G_2}{\partial z_2} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2} + H + z_2 \dfrac{\partial H}{\partial z_2}. \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_0}{\partial z_0} + \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + \frac{\partial G_2}{\partial z_2} &= \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + H + z_0 \frac{\partial H}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + H + z_1 \frac{\partial H}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + H + z_2 \frac{\partial H}{\partial z_2} \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + 3H + z_0 \frac{\partial H}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial H}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial H}{\partial z_2} \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + 3H + (m-1)H \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + (m+2)H. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de H na última expressão teremos o resultado desejado, onde a passagem da segunda igualdade para a terceira foi usado a relação de Euler, isto é,

$$(m-1)H = z_0 \frac{\partial H}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial H}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial H}{\partial z_2}.$$

4.6 PONTOS SINGULARES DE CAMPOS VETORIAIS PROJETIVOS

Definição 4.27. Seja $\omega = B_0dz_0 + B_1dz_1 + B_2dz_2$ uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ e sejam F_0, F_1, F_2 polinômios homogêneos de grau m satisfazendo

$$\begin{cases} B_0 = z_2F_1 - z_1F_2 \\ B_1 = z_0F_2 - z_2F_0 \\ B_2 = z_1F_0 - z_0F_1. \end{cases}$$

Os pontos singulares de Ω ou do seu campo associado,

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

é o conjunto de pontos do plano projetivo tais que

$$z_2F_1 - z_1F_2 = 0, \qquad z_0F_2 - z_2F_0 = 0, \qquad z_1F_0 - z_0F_1 = 0.$$

Para determinarmos o número de pontos singulares de um campo vetorial projetivo de grau m vamos usar o resultado dado a seguir.

Lema 4.28 (Lema de Darboux)**.** *Sejam A, A', B, B', C e C' polinômios homogêneos nas variáveis z_0, z_1 e z_2 de graus l, l', m, m', n e n' respectivamente, tais que*

$$AA' + BB' + CC' \equiv 0.$$

Assumimos que as curvas $A = 0, B = 0, C = 0$ e as curvas $A' = 0, B' = 0, C' = 0$ não têm componente em comum duas a duas. Então

$$\sum_P I(P, A \cap B \cap C) + \sum_P I(P, A' \cap B' \cap C') \geqslant \frac{lmn + l'm'n'}{\lambda},$$

onde $\lambda = l + l' = m + m' = n + n'$. Além disso, se as seis curvas acima não têm solução em comum, a desigualdade se torna uma igualdade.

Demonstração. Ver ([JJJ]) □

Proposição 4.29 (Proposição de Darboux)**.** *Seja $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ um campo projetivo de grau m tendo um número finito de pontos singulares. Então, o número de pontos singulares de $\mathcal{X}$, contando multiplicidades, é dado por*

$$\sum_P I(P, (z_2F_1 - z_1F_2) \cap (z_0F_2 - z_2F_0) \cap (z_1F_0 - z_0F_1)) = m^2 + m + 1.$$

Demonstração. Observemos que $z_0(z_2F_1 - z_1F_2) + z_1(z_0F_2 - z_2F_0) + z_2(z_1F_0 - z_0F_1) = 0$. Logo, se tomarmos $A = z_2F_1 - z_1F_2$, $B = z_0F_2 - z_2F_0$, $C = z_1F_0 - z_0F_1$, $A' = z_0$, $B' = z_1$, e $C' = z_2$ teremos que as curvas homogêneas A, B, C de graus $m + 1$ e as curvas A', B', C'

de graus 1 satisfazem as hipóteses do Lema 4.28 (Lema de Darboux). Além disso, as curvas A', B', e C' não tem pontos em comum , isto é,

$$\sum_P I(P, A' \cap B' \cap C') = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_P I(P, A \cap B \cap C) + \sum_P I(P, A' \cap B' \cap C') &= \frac{(m+1)^3 + 1}{m+2} \\
&= \frac{(m+2)[(m+1)^2 - m - 1 + 1)]}{m+2} \\
&= m^2 + m + 1.
\end{aligned}$$

$\square$

5 TEORIA DE DARBOUX DE INTEGRABILIDADE

Em 1878 Darboux, em [D], mostrou como construir integral primeira de sistesmas de equações diferenciais polinomiais (ou de campos vetoriais polinomiais no plano) que possuíam um número suficiente de curvas algébricas invariantes. Em particular, ele mostrou que se um campo de grau m tem pelo menos $\dfrac{m(m+1)}{2}+1$ curvas algébricas invariantes, então ele tem uma integral primeira que pode ser expressa em função das curvas invariantes.

Neste capítulo, apresentaremos condições suficientes na ordem do campo projetivo, dadas por Javier Chavarriga e Jaume Llibre em ([CL]), para a existência de uma integral primeira racional e estudaremos o número de pontos múltiplos que uma curva algébrica de grau n, invariante por um campo polinomial de grau m pode ter, em função de m e n.

5.1 CURVAS INVARIANTES POR CAMPOS VETORIAIS EM $\mathbb{P}^2$

Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial projetivo dado em U_2 por

$$\chi = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{5.1}$$

onde $x = z_0/z_2$ e $y = z_1/z_2$ e $m = max\{\deg(p), \deg(q)\}$. Então, a 1-forma associada χ em U_2 é dada por

$$\omega = p(x,y)dy - q(x,y)dx.$$

Seja Ω a expressão global de ω, isto é,

$$\Omega = z_2^{m+2}\left[p\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_2dz_1 - z_1dz_2}{z_2^2} - q\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_2dz_0 - z_0dz_2}{z_2^2}\right]$$

e sejam $P(z_0,z_1,z_2) = z_2^m p\left(\dfrac{z_0}{z_2},\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ e $Q(z_0,z_1,z_2) = z_2^m q\left(\dfrac{z_0}{z_2},\dfrac{z_1}{z_2}\right)$. Então, a expressão de Ω se torna

$$\Omega = P(z_0,z_1,z_2)(z_1dz_2 - z_2dz_1) + Q(z_0,z_1,z_2)(z_2dz_0 - z_0dz_2),$$

e a expressão global do campo vetorial (5.1) é

$$\mathcal{X} = P(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + Q(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}. \tag{5.2}$$

Proposição 5.1. *Seja $f(x,y) \in k[x,y]$ um polinômio reduzido. A curva $C = \mathcal{V}(f)$ é uma curva algébrica invariante por (5.1) se, e somente se, existe um polinômio $c \in k[x,y]$ de grau $m-1$, chamado cofator de f, tal que*

$$\chi(f) = p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = cf. \tag{5.3}$$

Demonstração. Suponha que C é uma curva algébrica invariante por (5.1). Sejam $P \in C$ e $\theta : D(0,r) \to \mathbb{C}^2$ uma solução do sistema associado ao campo (5.1) passando por P. Então, segue da Definição (4.5) que

$$f(\theta(t)) = 0, \ \forall t \in D(0,r),$$

e, consequentemente, temos que

$$\frac{df}{dt}(\theta(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t))\right) \cdot \theta'(t) = 0, \ \forall t \in D(0,r).$$

Como $\theta'(t) = (p(\theta(t)), q(\theta(t))$, temos que

$$p(\theta(t))\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)) + q(\theta(t))\frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t)) = 0, \ \forall t \in D(0,r).$$

Logo, o polinômio $p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y}$ se anula em todos os ponto de C. Como f é reduzido (todos os seus fatores irredutíveis são distintos), segue do Teorema dos Zeros de Hilbert que existe um polinômio $c \in k[x,y]$ tal que

$$\chi(f) = p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = cf. \tag{5.4}$$

Reciprocamente, se

$$\chi(f) = p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = cf, \tag{5.5}$$

seja θ uma solução do campo definida em $D(0,r)$, tal que $f(\theta(0)) = 0$. Então, em $D(0,r)$ temos que

$$\frac{df}{dt}(\theta(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t))\right) \cdot \theta'(t) = c(\theta)f(\theta).$$

Logo, $f(\theta(t)) = ae^{g(t)}$, para algum $a \in \mathbb{C}$. Como $f(\theta(0)) = 0$, segue que $a = 0$ e portanto $f(\theta(t)) = 0$, para todo $t \in D(0,r)$.

□

Definição 5.2. Seja $F(z_0, z_1, z_2) \in k[z_0, z_1, z_1]$ um polinômio homogêneo não nulo. A curva projetiva $\mathcal{V}(F)$ é invariante pelo campo projetivo de grau m dado por

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

se existe um polinômio homogêneo $C(z_0, z_1, z_2) \in k[z_0, z_1, z_2]$ de grau $m-1$ tal que

$$\mathcal{X}(F) = F_0\frac{\partial F}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial F}{\partial z_2} = CF.$$

Proposição 5.3. *Seja $\mathcal{V}(f(x,y))$ uma curva algébrica reduzida de grau n invariante por (5.1) com cofator $c(x,y)$. Então, $F(z_0,z_1,z_2) = z_2^n f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)$ é uma curva algébrica invariante por (5.2) com cofator $C(z_0,z_1,z_2) = z_2^{m-1} c\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)$.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{V}(f(x,y))$ é uma curva invariante por (5.1), se

$$\chi(f) = p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = cf,$$

para algum polinômio $c \in k[x,y]$. Para mostrar que F é invariante pelo campo (5.2) basta mostrar que $\chi(F) = CF$. Mas,

$$\begin{aligned}
\chi(F) &= P(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial z_0} + Q(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial z_1} \\
&= z_2^m p\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left(z_2^n f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\right) + z_2^m q\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_2^n f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\right) \\
&= z_2^m z_2^n \left[p\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{1}{z_2} + q\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{1}{z_2}\right] \\
&= z_2^{m-1} z_2^n c\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) \\
&= z_2^{m-1} c\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) z_2^n f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) = C(z_0,z_1,z_2)F(z_0,z_1,z_2).
\end{aligned}$$

□

5.2 CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA PARA INTEGRAL PRIMEIRA

Teorema 5.4 (Teorema de Darboux)**.** *Seja $\mathcal{X}$ um campo projetivo de grau m admitindo r curvas algébricas invariantes $\mathcal{V}(f_i)$, com cofatores c_i, para $i = 1, \ldots, r$.*

a) Se existem $\lambda_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, \ldots, r$, não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i = 0$, então a função (multivaluada) $f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}$ é uma integral primeira do campo $\mathcal{X}$.

b) Se $r \geq \frac{m(m+1)}{2} + 1$, então existem $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, r$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i = 0$.

Demonstração. a) Antes de mostrar que $f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}$ é uma integral primeira do campo $\mathcal{X}$, observe que as curvas $\mathcal{V}(f_i)$ são invariantes com cofatores c_i, para $i = 1, \ldots, r$, se

$$\chi(f_i) = p\frac{\partial f_i}{\partial x} + q\frac{\partial fi}{\partial y} = c_i f_i.$$

Então, pela Proposição (4.8), basta mostrar que $\chi(f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}) = 0$. Mas,

$$\mathcal{X}(f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}) = p\frac{\partial}{\partial x}(f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}) + q\frac{\partial}{\partial y}(f_1^{\lambda_1} \cdots f_r^{\lambda_r}), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1^{\lambda_1}\cdots f_r^{\lambda_r}) = \lambda_1 f_1^{\lambda_1-1}\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2^{\lambda_2}\cdots f_r^{\lambda_r} + \cdots + \lambda_r f_r^{\lambda_r-1}\frac{\partial f_r}{\partial x}f_1^{\lambda_1}\cdots f_{r-1}^{\lambda_{r-1}} \tag{5.7}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1^{\lambda_1}\cdots f_r^{\lambda_r}) = \lambda_1 f_1^{\lambda_1-1}\frac{\partial f_1}{\partial y}f_2^{\lambda_2}\cdots f_r^{\lambda_r} + \cdots + \lambda_r f_r^{\lambda_r-1}\frac{\partial f_r}{\partial y}f_1^{\lambda_1}\cdots f_{r-1}^{\lambda_{r-1}} \tag{5.8}$$

Substituindo as igualdades (5.7) e (5.8) em (5.6), obtemos

$$\begin{aligned}\chi(f_1^{\lambda_1}\cdots f_r^{\lambda_r}) &= \sum_{i=1}^{r}(p\frac{\partial f_i}{\partial x} + q\frac{\partial f_i}{\partial y})\lambda_i f_1^{\lambda_1}\cdots f_i^{\lambda_i-1}\cdots f_r^{\lambda_r}\\ &= \sum_{i=1}^{r}(c_i f_i)\lambda_i f_1^{\lambda_1}\cdots f_i^{\lambda_i-1}\cdots f_r^{\lambda_r}\\ &= (f_1^{\lambda_1}\cdots f_n^{\lambda_n})\left(\sum_{i=1}^{r}c_i\lambda_i\right) = 0.\end{aligned}$$

b) Seja $\mathcal{V}(f)$ uma curva algébrica invariante pelo campo χ, então

$$\chi(f) = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = cf$$

com $c \in k[x,y]$ de grau menor ou igual a $m-1$. Sabendo que a dimensão do espaço vetorial do polinômios em duas variáveis de grau menor ou igual a $m-1$ é $\dfrac{m(m+1)}{2}$, se existem r curvas algébricas invariantes, com $r > \dfrac{m(m+1)}{2}$, então existem r cofatores c_i de grau menor ou igual a $m-1$. Tais cofatores são linearmente dependentes sobre k e, portanto, existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in k$, não todos nulos tais $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i c_i = 0$.

□

Observação 5.5. Desta forma, se o item *b*) for satisfeito, o item *a*) nos garante a existência da integral primeira de $\mathcal{X}$.

Antes de continuarmos, iremos enunciar um resultado de grande importância para os teoremas seguintes. Embora tudo na Seção (2.8) tenha sido feito no contexto afim, é possível definir índice de interseção de curvas no espaço projetivo.

O Teorema de Bezout, enunciado a seguir, nos dá o número de pontos na interseção de duas curvas planas projetivas, contando a multiplicidade.

Teorema 5.6. *Sejam $\mathcal{V}(F)$ e $\mathcal{V}(G)$ curvas projetivas planas de graus n e m respectivamente, com $F, G \in k[x_0, x_1, x_2]$. Se F e G não tem componentes em comum, então*

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^2} I(P, F\cap G) = nm.$$

Demonstração. Ver [WF], pág. 112. □

Além disso, se $\mathcal{V}(F_i)$, para $i = 1, \ldots, s$, são curvas projetivas planas e $P \in \mathbb{P}^2$. Definimos a multiplicidade de interseção das curvas $\mathcal{V}(F_1), \ldots, \mathcal{V}(F_s)$ em P como

$$I(P, \bigcap_{i=1}^{s} F_i) := \dim_k \left(\mathcal{O}_P / \langle F_1, \ldots, F_s \rangle\right).$$

Teorema 5.7. *Seja $\mathcal{V}(f(x,y))$ uma curva algébrica invariante de grau $n > 1$ do campo*

$$\chi = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

de grau $m > 1$ e cofator c. Assuma que $\mathcal{V}(f(x,y))$ não é uma reta e que c não é identicamente nulo. Sejam

$$P(z_0, z_1, z_2) = z_2^m p\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right), \qquad Q(z_0, z_1, z_2) = z_2^m q\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)$$
$$C(z_0, z_1, z_2) = z_2^{m-1} c\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right),$$

Se m^2 é o número de pontos do conjunto solução do sistema

$$nP - z_0 C = 0, \qquad nQ - z_1 C = 0, \qquad z_2 C = 0, \tag{5.9}$$

contados com multiplicidades, então χ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$\mathcal{V}(nP - z_0C, nQ - z_1C, z_2C) = \mathcal{V}(nP - z_0C, nQ - z_1C, z_2) \cup \mathcal{V}(nP - z_0C, nQ - z_1C, C),$$

Então, contando multiplicidades, o número de pontos satisfazendo o sistema (5.9) é a soma do número de pontos satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} nP - z_0C = 0 \\ nQ - z_1C = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

mais o número de pontos satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ C = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Como,

$$\mathcal{V}(nP - z_0C, nQ - z_1C, z_2) \subset \mathcal{V}(nP - z_0C, z_2) \quad \text{e}$$
$$\mathcal{V}(nP - z_0C, nQ - z_1C, C) = \mathcal{V}(P, Q, C) \subset \mathcal{V}(P, C),$$

temos, pelo Teorema de Bezout, que o sistema (5.10) tem no máximo $\deg(nP - z_0C)\deg(z_2) = m.1 = m$ soluções e que o sistema (5.11) tem no máximo $\deg(P)\deg(C) = m(m-1) =$

$m^2 - m$ soluções, contando multiplicidades. Assim, o sistema (5.9) tem no máximo $m + (m^2 - m) = m^2$ soluções. Mas por hipótese, o sistema (5.9) tem exatamente m^2 soluções, contando multiplicidades. Logo, podemos afirmar que o sistema (5.10) tem m soluções e o sistema (5.11) tem $m^2 - m$ soluções, contando multiplicidades.

Os polinômios P, Q e C podem ser escrito da seguinte maneira

$$P(z_0, z_1, z_2) = p_0 z_2^m + p_1(z_0, z_1) z_2^{m-1} + \ldots + p_m(z_0, z_1).$$
$$Q(z_0, z_1, z_2) = q_0 z_2^m + q_1(z_0, z_1) z_2^{m-1} + \ldots + q_m(z_0, z_1).$$
$$C(z_0, z_1, z_2) = c_0 z_2^{m-1} + c_1(z_0, z_1) z_2^{m-2} + \ldots + c_{m-1}(z_0, z_1).$$

Então, para $z_2 = 0$, o sistema (5.10) pode ser escrito como

$$\begin{cases} np_m(z_0, z_1) - z_0 c_{m-1}(z_0, z_1) = 0 \\ nq_m - z_1 c_{m-1}(z_0, z_1) = 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Como o sistema (5.12) é dado por dois polinômios homogêneos de grau m nas variáveis z_0 e z_1 que se intersectam em m pontos, contando multiplicidades, existe um polinômio homogêneo $A(z_0, z_1)$ de grau m tal que

$$p_m(z_0, z_1) = \lambda_1 A(z_0, z_1) + \frac{1}{n} z_0 c_{m-1}(z_0, z_1),$$
$$q_m(z_0, z_1) = \lambda_2 A(z_0, z_1) + \frac{1}{n} z_1 c_{m-1}(z_0, z_1),$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in k$ são não nulos. Então, o sistema de equações diferenciais polinomial associado ao campo de vetores (4.3) pode ser escrito como

$$\frac{dx}{dt} = p_0 + p_1(x, y) + \cdots + p_{m-1}(x, y) + \lambda_1 A(x, y) + \frac{1}{n} x c_{m-1}(x, y) = P(x, y, 1),$$
$$\frac{dy}{dt} = q_0 + q_1(x, y) + \cdots + q_{m-1}(x, y) + \lambda_2 A(x, y) + \frac{1}{n} y c_{m-1}(x, y) = Q(x, y, 1),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dx}{dt} = p_0 + p_1 + \cdots + p_{m-1} - \frac{1}{n} x(c_0 + c_1 + \cdots + c_{m-2}) + \lambda_1 A + \frac{1}{n} xc,$$
$$\frac{dy}{dt} = q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} - \frac{1}{n} y(c_0 + c_1 + \cdots + c_{m-2}) + \lambda_2 A + \frac{1}{n} yc.$$

Como λ_1 e λ_2 são não nulos, podemos fazer a mudança das variáveis (x, y) para as variáveis (x, z), onde $z = \lambda_2 x - \lambda_1 y$. Nessas novas variáveis a segunda equação do sistema polinomial se escreve

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 P(x, y, 1) - \lambda_1 Q(x, y, 1) = b(x, y) + \frac{1}{n} zc(x, y),$$

com $y = (\lambda_2 x - z)/\lambda_1$ e

$$\begin{aligned} b(x, y) = \lambda_2(p_0 + p_1 + \cdots + p_{m-1} - \frac{1}{n} x(c_0 + c_1 + \cdots + c_{m-2})) \\ - \lambda_1(q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} - \frac{1}{n} y(c_0 + c_1 + \cdots + c_{m-2})). \end{aligned}$$

Sabendo que o sistema (5.11), ou seja, que as curvas $P(x,y,1)=0$ $Q(x,y,1)=0$ e $C(x,y,1)=c(x,y)=0$ têm m^2-m pontos de interseção, contados com multiplicidade, temos que as curvas $P(x,y,1)=0, b(x,y)+c(x,y)z/n=0$ e $c(x,y)=0$ têm m^2-m pontos de interseção, onde $y=(\lambda_2 x-z)/\lambda_1$. Logo, o número de pontos de interseção das curvas $b(x,y)=0$ e $c(x,y)=0$ é no mínimo m^2-m, levando em conta multiplicidades. Mas pelo Teorema de Bezout, se essas duas últimas curvas não têm componente em comum, então elas tem $\deg(b)\deg(c)=(m-1)^2$ pontos de interseção, contados com multiplicidade. Como $m^2-m>(m-1)^2$, pois $m>1$, temos que as curvas $b(x,y)=0$ e $c(x,y)=0$ têm uma componente em comum $s(x,y)=0$ de grau $r\geq 1$. Ou seja, podemos escrever $b=\bar{b}s$ e $c=\bar{c}s$, onde $\bar{b}$ e $\bar{c}$ são polinômios de grau $m-r-1$.

Novamente, usando que o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1)=0$, $Q(x,y,1)=0$ e $c(x,y)=0$ é m^2-m, podemos concluir que o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1)=0$, $Q(x,y,1)=0$ e $\bar{c}(x,y)=0$ é $m(m-r-1)$ e que o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1)=0$, $Q(x,y,1)=0$ e $s(x,y)=0$ é mr, contando multiplicidades. Desde que o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1)=0$, $b(x,y)+c(x,y)z/n=0$ e $\bar{c}(x,y)=0$ é $m(m-r-1)$ segue que o número de pontos de interseção das curvas $b(x,y)=0$ e $\bar{c}(x,y)=0$ é pelo menos $m(m-r-1)$. Por outro lado, se as curvas $b=0$ e $\bar{c}=0$ não têm componentes em comum, pelo Teorema de Bezout, elas se intersectam em $(m-1)(m-r-1)$ pontos contados com multiplicidade. Por isso, desde que $m>1$ e $m(m-r-1)>(m-1)(m-r-1)$, se $r\neq m-1$, temos que $r=m-1$. Portanto, $b=\bar{b}s=\bar{b}\bar{c}^{-1}c=ac$ com $a\in k-\{0\}$. Assim,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{c}{n}(an+z)$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt}=\lambda_2 P(x,y,1)-\lambda_1 Q(x,y,1)=\frac{1}{n}c(x,y)(an+\lambda_2 x-\lambda_1 y). \tag{5.13}$$

Da equação (5.13) segue que se $g(x,y)=an+\lambda_2 x-\lambda_1 y$ então

$$\chi(g(x,y))=p\frac{\partial g}{\partial x}+q\frac{\partial g}{\partial y}=\lambda_2 p(x,y)-\lambda_1 q(x,y)=\frac{1}{n}c(x,y)g(x,y)$$

donde concluímos que $g(x,y)=an+\lambda_2 x-\lambda_1 y$ é uma reta invariante com cofator c/n. Além disso, os cofatores de f e g satisfazem a equação

$$1\cdot c-n\cdot\left(\frac{1}{n}c\right)=0$$

o que implica, pelo Teorema (5.4) (Teorema de Daroux), que

$$H(x,y)=f(x,y)(\lambda_2 x-\lambda_1 y+an)^{-n}$$

é uma integral primeira racional do campo χ. Finalmente, observe que por hipótese a curva $\mathcal{V}(f)$ não é uma reta, então os polinômios f e $(\lambda_2 x-\lambda_1 y+an)^n$ não são associados e, consequentemente, H não é constante. $\square$

Observação 5.8. Pela demonstração do teorema anterior, segue que qualquer campo χ que assuma as hipótese do Teorema (5.7) tem uma reta invariante $ax+by+c=0$ tal que a integral primeira racional no campo χ é da forma:

$$\frac{f(x,y)}{(ax+by+c)^n}$$

5.3 PONTOS MÚLTIPLOS DE UMA CURVA ALGÉBRICA INVARIANTE

Teorema 5.9. *Seja $\mathcal{V}(f)$ uma curva algébrica de grau n invariante pelo campo*

$$\chi = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.14}$$

de grau m, com cofator c. Sejam

$$P(z_0,z_1,z_2) = z_2^m p\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right), \quad Q(z_0,z_1,z_2) = z_2^m q\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right), \quad C(z_0,z_1,z_2) = z_2^{m-1} c\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)$$

Assuma que

(1) As curvas $nP - z_0C = 0$, $nQ - z_1C$ e $z_2C = 0$ não têm componente em comum.

(2) A curva projetiva plana $F(z_0,z_1,z_2) = z_2^n f\left(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$ tem r pontos múltiplos contados com multiplicidade.

Então $(n-1)(n-m-1) \leq r$.

Demonstração. Suponha $\mathcal{V}(f)$ invariante pelo campo (5.14), com cofator $c(x,y)$. Então, pela Proposição (5.3), a curva $\mathcal{V}(F)$ é invariante pelo o campo

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial z_0} + Q\frac{\partial}{\partial z_1}$$

com cofator $C(z_0,z_1,z_2) = z_2^{m-1}c(\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2})$, isto é,

$$\mathcal{X}(F) = P\frac{\partial F}{\partial z_0} + Q\frac{\partial F}{\partial z_1} = CF. \tag{5.15}$$

Usando a relação de Euler temos que $nF = z_0\frac{\partial F}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}$. Logo, podemos reescrever a equação (5.15) da seguinte maneira

$$P\frac{\partial F}{\partial z_0} + Q\frac{\partial}{\partial z_1} = C\left[\frac{1}{n}z_0\frac{\partial F}{\partial z_0} + \frac{1}{n}z_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{1}{n}z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}\right]$$

que por sua vez pode ser escrita como

$$(P - \frac{1}{n}z_0C)\frac{\partial F}{\partial z_0} + (Q - \frac{1}{n}z_1C)\frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{1}{n}z_2C\frac{\partial F}{\partial z_2} = 0.$$

Sejam

$$A = \frac{\partial F}{\partial z_0}, \qquad B = \frac{\partial F}{\partial z_1}, \qquad D = \frac{\partial F}{\partial z_2},$$

$$A' = P - \frac{1}{n} z_0 C, \qquad B' = Q - \frac{1}{n} z_1 C, \qquad D' = -\frac{1}{n} z_2 C,$$

$r = \sum_P I(P, A \cap B \cap D)$ e $r' = \sum_P I(P, A' \cap B' \cap D')$. Observe que r e r' são finitos por hipótese. Além disso, A, A', B, B', D e D' satisfazem as hipóteses do Lema (4.28) de Darboux. Então,

$$\begin{aligned} r + r' \geq \frac{(n-1)^3 + m^3}{n-1+m} &= \frac{(n-1+m)[(n-1)^2 - (n-1)m + m^2]}{n-1+m} \\ &= m^2 + (n-1)(n-1-m). \end{aligned}$$

Mas o número de pontos de interseção das curvas $A' = 0$, $B' = 0$ e $D' = 0$ é no máximo m^2 levando em conta suas multiplicidades, ou seja, $r' \leq m^2$. Portanto, $r \geq (n-1)(n-1-m)$ como desejado. □

Corolário 5.10. *Seja $\mathcal{V}(f)$ uma curva algébrica irredutível de grau n, sem pontos múltiplos, invariante pelo campo*

$$\chi = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m. Então, $n \leq m + 1$.

Demonstração. Se $\mathcal{V}(f)$ é irredutível sem pontos múltiplos, então valem as hipóteses do Teorema (5.9) e, neste caso, $F(z_0, z_1, z_2) = z_2^n f(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) = 0$ não tem pontos múltiplos. Então, pelo Teorema (5.9), temos que

$$(n-1)(n-m-1) \leq 0.$$

Mas, $n - 1 \geq 0$. Logo, $n - m - 1 \leq 0$, ou seja, $n \leq m + 1$. □

Teorema 5.11. *Sob as hipóteses do Teorema (5.9), se $\mathcal{V}(f(x,y))$ é uma curva algébrica de grau $n = m + 1$ invariante pelo campo χ de grau $m > 1$, tal que sua projetivização $F(z_0, z_1, z_2) = z_2^n F(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) = 0$ não tem pontos múltiplos, então o campo χ tem uma integral primeira racional.*

Demonstração. Considerando as mesmas notações usadas na demonstração do Teorema (5.9), temos que

$$r + r' \geq m^2 + (n-1)(n-m-1).$$

Como $F(z_0, z_1, z_2)$ não tem pontos múltiplos, temos que $r = 0$ e

$$r' \geq m^2 + (n-1)(n-m-1).$$

Substituindo $n = m + 1$ na desigualdade acima temos que $r' \geq m^2$. Como $r' \leq m^2$ sempre, temos $r' = m^2$. Logo, pelo Teorema (5.7) o campo χ tem uma integral primeira racional. $\square$

Definição 5.12. O *gênero virtual* de uma curva projetiva F sem componentes múltiplas é o número inteiro

$$g_v = g_v(F) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_P \frac{m_P(m_P-1)}{2}$$

onde $d = \deg F$ e $m_P = m_p(F)$ é a multiplicidade de F em P.

Lema 5.13. *Se F é uma curva projetiva irredutível, então $g_v(F) \geq 0$.*

Demonstração. Ver ([I]). $\square$

Teorema 5.14. *Sob as hipóteses do Teorema (5.9), se $f(x,y) \in k[x,y]$ é irredutível e todos os pontos múltiplos de $\mathcal{V}(F(z_0,z_1,z_2))$ são duplos ordinários, então $n \leq 2m$. Além disso, se $n = 2m$ então χ tem uma integral primeira racional.*

Demonstração. Desde que todo ponto múltiplo de $\mathcal{V}(F)$ é duplo ordinário, segue que

$$I(P, \frac{\partial F}{\partial z_0} \cap \frac{\partial F}{\partial z_1} \cap \frac{\partial F}{\partial z_2}) = 1. \tag{5.16}$$

Se $\mathcal{V}(F)$ é uma curva algébrica irredutível de grau n temos, pelo Lema (5.13),

$$\sum_P \frac{1}{2} m_P(m_P - 1) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \tag{5.17}$$

onde a soma percorre todos os pontos múltiplos de $\mathcal{V}(F)$. Como os pontos múltiplos de $\mathcal{V}(F)$ são duplos ordinários, seque que $m_P = 2$ e que

$$\sum_P \frac{1}{2} m_P(m_P-1) = \sum_P \frac{1}{2} 2(2-1) = \sum_P 1,$$

onde a soma percorre todos os pontos múltiplos de $\mathcal{V}(F)$. Se r denota o número de pontos múltiplos de $\mathcal{V}(F)$ temos que a inequação (5.17) pode ser rescrita como

$$r = \sum_P I(P, \frac{\partial F}{\partial X} \cap \frac{\partial F}{\partial Y} \cap \frac{\partial F}{\partial Z}) = \sum_P 1 \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Mas pelo Teorema (5.9) temos $(n-1)(n-m-1) \leq r \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
&n^2 - nm - 2n + m + 1 \leq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) \Rightarrow \\
&n^2 + 2m \leq n(2m+1) \Rightarrow \\
&n^2 < n^2 + 2m \leq n(2m+1) \Rightarrow \\
&n < n + 2\frac{m}{n} \leq 2m + 1 \Rightarrow n \leq 2m.
\end{aligned}$$

Agora, assumindo $n = 2m$ temos, nas notações usadas na demonstração do Teorema (5.9), que

$$r + r' \geq m^2 + (n-1)(n-m-1) = m^2 + (2m-1)(m-1).$$

Por outro lado,

$$r \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (2m-1)(m-1),$$

logo $r' \geq m^2$. Como $r' \leq m^2$ sempre, temos $r' = m^2$ e, pelo Teorema (5.7), o campo vetorial χ tem integral primeira racional.

$\square$

REFERÊNCIAS

[A] Rossini, A. A. G. *Folheações algébricas projetivas.* Dissertação de Mestrado-UFJF, 2011. http://www.ufjf.br/mestradomatematica/files/2011/12/Dissertacao_artur.pdf

[C] CAMACHO, C.; LINS NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações.* Río de Janeiro: I.M.P.A., 1979.

[CL] Chavarriga, J., Llibre, J. *Invariant Algebraic Curves and Rational First Integrals for Planar Polynomial Vector Fields.* Journal odf Differential Equations 169 (2001) 1-16.

[CLM-O] Chavarriga, J., Llibre, J., Moulin-Ollagnier, J. *On a result of Darboux.* LMS J. Comput. Math., 4, 197-21, 2001.

[CLO] Cox, D., Little, J., O'Shea, D. *Ideals, Varieties and Alorithms.* Mew York: Springer-Verlag, 1992.

[D] Darboux, G. *Mémoire sur lés équations différentieles algébriques du premier ordre et du premier degré.* Bulletin des sciences mathématiques et astromnomiques, 2: 60-96, 1878.

[GT] Teschl, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 140. http://www4.ncsu.edu/~schecter/ma_732_sp13/teschl_ode.pdf

[H] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[I] VAINSENCHER, I. *Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Río de Janeiro: I.M.P.A., 1979.

[JJJ] J. Chavarriga, J. Llibre, and J. Moulin Ollagnier, *On a result of Darboux*, preprint.

[JV] Pereira,J. V., Scárdua, B. A. *Integrabilidade de Folheações Holomorfas.* 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1997.

[LNS] Lins Neto, A., Scárdua, B. A. *Folheações algébricas complexas.* 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2003.

[PA1] Painlevé , P. *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1897.

[PA2] Painlevé , P. *Oeuvres de Paul Painlevé, Tome II, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 15, quai Anatole-France*. 75700 Paris, 1974.

[S] SHAFAREVICH, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1.* New York: Springer, 1994.

[WF] Fulton, W. *Algebraic Curves. An Introduction To Algebraic Geometry.* W.A.Benjamin, Inc., New York, 1969.