

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Sarah Ribeiro de Jesus Ferreira**

**Combinatória das Representações Irreduzíveis do Grupo Simétrico**

Juiz de Fora

2018

**Sarah Ribeiro de Jesus Ferreira**

**Combinatória das Representações Irreduzíveis do Grupo Simétrico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lonardo Rabelo

Coorientador: Jordan Lambert Silva

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ribeiro de Jesus Ferreira, Sarah.

Combinatória das Representações Irreduzíveis do Grupo Simétrico /  
Sarah Ribeiro de Jesus Ferreira. – 2018.

119 f. : il.

Orientador: Lonardo Rabelo

Coorientador: Jordan Lambert Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Grupo simétrico. 2. Representações. 3. Tableau de Young. I. Rabelo,  
Lonardo, orient. II. Combinatória das Representações Irreduzíveis do Grupo  
Simétrico.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por essa conquista. Agradeço aos meus orientadores pelo trabalho desenvolvido, por acreditaram em meu potencial e pela paciência. Aos membros da banca examinadora, Robson e Beatriz pela disponibilidade e contribuição.

Aos professores do departamento por todos os ensinamentos transmitidos e pela contribuição no meu processo de aprendizado. A Paula pelo modo prestativo e eficiente com que sempre me atendeu.

À CAPES e à UFJF pelo auxílio financeiro concedido para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Joaquim e Clarice meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser a melhor, mas a dar o melhor de mim. Obrigada pelo amor incondicional e pelas orações.

A meus irmãos Eliaquim, Sanny, Andreia, Paula e a meu sobrinho André pois sempre se orgulharam de mim e confiaram em mim. Obrigada pela confiança.

Ao meu primo Wilian Rocha agradeço a Deus pela sua amizade, pela nossa convivência, obrigada por acreditar em mim.

Aos meus amigos de sempre, em especial Priscila, Caio, Erick, Thaís, Maiara e Mauro por só quererem o meu bem e estarem na torcida.

A meus amigos do mestrado, pelos momentos divididos juntos. Em especial cito, representando todos, Júlio.

Ao meu namorado Eli por ser tão importante na minha vida. Sempre ao meu lado, me pondo para cima e me fazendo acreditar que posso mais do que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pode ser concretizado.

Às demais pessoas que contribuíram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho ou participaram da minha vida, e que, por ventura, eu tenha me esquecido de agradecer. Ninguém vence sozinho. Obrigada a todos que torceram por mim.

*“Você ganha força, coragem e confiança através de cada experiência em que você realmente para e encara o medo de frente.”  
(Eleanor Roosevelt)*

## RESUMO

Nesse trabalho, apresentamos a teoria de representação básica do grupo simétrico e seus aspectos combinatórios. O objetivo principal desse trabalho é construir um conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes do grupo simétrico, em termos da sua partição e conceitos combinatórios relacionados com o tableau de Young. Veremos que esse objeto combinatório nos fornecerá duas maneiras de descrever as representações irredutíveis do grupo simétrico, uma via politablóides e uma alternativa via idempotentes da álgebra de grupo, e que, na verdade, essas duas abordagens são isomorfas. Iremos abordar alguns resultados interessantes, como a regra de Young, a regra da ramificação e o algoritmo combinatório da correspondência de Robinson-Schensted.

Palavras-chave: Grupo simétrico. Representações. Tableau de Young.

## ABSTRACT

In this work, we present the basic representation theory of the symmetric group and its combinatorial aspects. The main objective of this work is to construct a complete set of irreducible and inequivalent representations of the symmetric group, in terms of its partition and combinatorial concepts related to Young's tableau. We will see that this combinatorial object will provide us two ways of describing the irreducible representations of the symmetric group, a politabloid pathway, and an alternative via idempotent group algebra, and that, in fact, these two approaches are isomorphic. We will cover some interesting results, such as the Young's rule, the branching rule, and the Robinson-Schensted's combinatorial matching algorithm.

Key-words: Symmetric group. Representations. Young Tableau.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>10</b>
2.1	GRUPO SIMÉTRICO . . . . .	10
2.2	REPRESENTAÇÕES E MÓDULOS . . . . .	14
2.2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS E CONCEITOS . . . . .	14
2.2.2	REDUTIBILIDADE . . . . .	20
2.2.3	LEMA DE SCHUR . . . . .	25
2.2.4	PRODUTO TENSORIAL . . . . .	31
2.2.5	ÁLGEBRA DE COMUTADORES E ÁLGEBRA DE ENDOMORFISMOS	32
2.2.6	CARACTERES DE GRUPO . . . . .	38
2.2.7	PRODUTO INTERNO DE CARACTERES . . . . .	41
2.2.8	DECOMPOSIÇÃO DA ÁLGEBRA DE GRUPO . . . . .	47
2.2.9	REPRESENTAÇÕES RESTRITAS E REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS	49
<b>3</b>	<b>MÓDULO DE PERMUTAÇÃO</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	PARTIÇÕES E TABLEAUX DE YOUNG . . . . .	53
3.2	TABLÓIDES . . . . .	57
3.3	LEMA DO SINAL . . . . .	62
<b>4</b>	<b>MÓDULOS DE SPECHT</b> . . . . .	<b>64</b>
4.1	O TEOREMA DO SUBMÓDULO . . . . .	66
<b>5</b>	<b>SIMETRIZADORES DE YOUNG</b> . . . . .	<b>72</b>
5.1	SIMETRIZADORES DE YOUNG . . . . .	72
5.2	OS MÓDULOS IRREDUTÍVEIS $V_\lambda$ . . . . .	76
5.3	COMPARAÇÃO DOS MÓDULOS DE SPECHT E DOS MÓDULOS GERADOS PELOS SIMETRIZADORES DE YOUNG . . . . .	79
<b>6</b>	<b>BASE PARA O MÓDULO DE SPECHT</b> . . . . .	<b>82</b>
6.1	TABLEAUX PADRÃO . . . . .	82
6.2	LEMA DA DOMINÂNCIA PARA TABLÓIDE LINHA E TABLÓIDE COLUNA . . . . .	82
6.3	POLITABLOIDES PADRÕES . . . . .	86
6.3.1	INDEPENDÊNCIA LINEAR . . . . .	86
6.3.2	GERADORES . . . . .	88
6.4	REPRESENTAÇÃO NATURAL DE YOUNG . . . . .	95



<b>7</b>	<b>MULTIPLICIDADE DOS MÓDULOS <math>S^\lambda</math> EM <math>M^\mu</math></b> . . . . .	<b>98</b>
7.1	TABLEAU SEMIPADRÃO . . . . .	98
7.2	A BASE SEMI-PADRÃO PARA $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . . . . .	102
7.3	NÚMEROS DE KOSTKA E A REGRA DE YOUNG . . . . .	107
<b>8</b>	<b>RESTRIÇÃO E INDUÇÃO DOS MÓDULOS DE SPECHT</b> .	<b>109</b>
<b>9</b>	<b>RESULTADOS COMBINATÓRIOS</b> . . . . .	<b>114</b>
9.1	O ALGORITMO DE ROBINSON-SCHENSTED . . . . .	114
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>119</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Através da teoria de representação de grupos podemos entender um grupo  $G$  a partir de sua ação em espaços vetoriais, ou seja, podemos caracterizar as formas como um grupo pode agir num espaço vetorial e os efeitos dessas ações. A teoria de representação de grupos simétricos é um caso especial da teoria geral de representação dos grupos finitos.

Dado um grupo finito  $G$ , temos que o número de representações irredutíveis de  $G$  é igual ao seu número de classes de conjugação, no entanto, não existe uma fórmula geral para mapear as classes de conjugação de um grupo para suas representações irredutíveis. No caso do grupo simétrico  $S_n$ , o número de tais representações irredutíveis é igual ao número de partições de  $n$ .

Pelo Teorema de Cayley, temos que todo grupo finito  $G$  é isomorfo a um subgrupo de  $S_{|G|}$  o que mostra a importância de se conhecer as representações irredutíveis do grupo simétrico. Tendo visto os conceitos básicos pertinentes à teoria geral da representação de grupos, passamos a especificar nossa discussão para os grupos simétricos cujas propriedades permitem uma exploração mais detalhada.

Podemos associar cada partição de  $n$  a um tableau de Young. Esses objetos combinatórios são nomeados em homenagem ao Alfred Young, que foi um dos primeiros a construir as representações irredutíveis de  $S_n$ . Eles fornecem uma maneira para se obter representações do grupo simétrico o qual chamamos de Representação de Permutação. Construímos um conjunto completo de módulos irredutíveis e inequivalentes do grupo simétrico, os quais também são determinados unicamente em termos das partições de  $n$ . A partir disso, decompomos a representação de permutação em suas partes irredutíveis.

Iremos utilizar dois métodos para se obter tais representações irredutíveis: através dos módulos de Specht e através de elementos idempotentes da álgebra do grupo. Fazemos a comparação das duas abordagens adotadas nesse trabalho provando que essas duas formas de representação são isomorfas. Para uma descrição mais detalhada desses módulos, continuamos nossa discussão utilizando os módulos de Specht. Nossa fonte principal nesse trabalho será o livro do B. Sagan [SA].

Essa dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, começamos lembrando alguns conceitos gerais do grupo simétrico e, depois, fazemos uma discussão sobre a teoria da representação, com ênfase no grupo simétrico. Os conceitos apresentados nesse capítulo serão referidos com muita frequência no decorrer da dissertação.

No Capítulo 3, apresentamos os diagramas Young, tableaux de Young e tablóides para construir uma representação de  $S_n$  conhecida como módulo de permutação  $M^\lambda$ , essas representações são geralmente irredutíveis.

No Capítulo 4, baseando na abordagem utilizada no livro do Sagan, com o objetivo

de construir os módulos de Specht, que são representações irredutíveis de  $S_n$ , introduzimos politablóides. Além disso, provamos que os módulos de Specht formam uma lista completa de representações irredutíveis de  $S_n$ .

No Capítulo 5, utilizando os idempotentes da álgebra de grupo, apresentamos uma maneira distinta de definir uma representação irredutível do grupo simétrico, essa abordagem é adotada pelo livro W. Fulton e J. Harris [FH].

No Capítulo 6, nós determinamos a dimensão de  $S^\lambda$ . Provamos que os politablóides padrões de forma  $\lambda$  formam uma base para o módulo de Specht.

No Capítulo 7, apresentamos resultados relativos à decomposição dos módulos de permutação nos módulos Specht. Nós encontramos as multiplicidades dos módulos de Specht em  $M^\lambda$ , apresentamos os números de Kostka e discutimos a regra de Young.

No Capítulo 8, dada a representação associada ao módulo de Specht  $S^\lambda$ , determinamos pela regra de ramificação de Young sua representação restrita em  $S_{n-1}$  e sua representação induzida em  $S_{n+1}$ .

No Capítulo 9, apresentamos uma interpretação combinatória de uma identidade envolvendo a dimensão das representações irredutíveis de  $S_n$ , utilizando a correspondência Robinson-Schensted.

## 2 PRELIMINARES

O objetivo desta dissertação é o estudo das representações do grupo simétrico. Por isto, neste primeiro capítulo, apresentamos o grupo simétrico e suas propriedades e posteriormente introduzimos os conceitos básicos relacionados a teoria de representação e a teoria dos módulos que são os principais campos onde todo o nosso trabalho se desenvolverá.

### 2.1 GRUPO SIMÉTRICO

Nessa seção, apresentaremos as principais definições e propriedades do grupo simétrico.

**Definição 2.1.** Seja  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . O conjunto  $S_X$  das aplicações biunívocas de  $X$  em  $X$ , ou das permutações de  $X$ , é um grupo com respeito à composição de aplicações. Este grupo é chamado grupo simétrico de grau  $n$  e é denotado por  $S_n$ .

Os elementos de  $S_n$  são chamados permutações de  $n$  elementos. O grupo  $S_n$  tem ordem  $n!$  e a multiplicação de permutações é operada da direita para esquerda:  $\pi\tau$  é a bijeção obtida por primeiro aplicar  $\tau$  seguida por  $\pi$ .

Há diferentes notações para representar uma permutação  $\pi \in S_n$ .

1. A notação duas-linhas: formada pela matriz

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n). \end{array}$$

**Exemplo 2.1.** Seja  $\pi \in S_5$  dado por

$$\pi(1) = 3, \quad \pi(2) = 4, \quad \pi(3) = 5, \quad \pi(4) = 2, \quad \pi(5) = 1.$$

Então sua forma duas-linhas é

$$\pi = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1. \end{array}$$

2. A notação cíclica: dado  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os elementos da sequência  $i, \pi(i), \pi^2(i), \dots$  podem não ser todos distintos. Tomando a primeira potência  $p$  tal que  $\pi^p(i) = i$ , temos o ciclo

$$(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{p-1}(i)).$$

Equivalentemente, o ciclo  $(i, j, k, \dots, l)$  significa que  $\pi$  envia  $i$  para  $j$ ,  $j$  para  $k$ , e assim por diante e  $l$  de volta a  $i$ . Agora, escolhamos um elemento que não está no

ciclo contendo  $i$  e repetimos esse processo até que todos os membros de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tenham sido considerados. Em geral, para cada  $\pi \in S_n$ , os números são rearranjados e agrupados em  $k$  ciclos

$$(i_1, i_2, \dots, i_{m_1})(i_{m_1+1}, \dots, i_{m_2}) \cdots (i_{m_{k-1}+1} \cdots i_{m_k}).$$

**Exemplo 2.2.** Seja  $\pi \in S_5$  do Exemplo 2.1. A notação cíclica de  $\pi$  é  $(1, 3, 5)(2, 4)$ .

**Exemplo 2.3.** Permutar ciclicamente os elementos dentro de um ciclo ou reordenar os ciclos em si não altera a permutação. Por exemplo,

$$(1, 2, 3)(4)(5) = (2, 3, 1)(4)(5) = (4)(2, 3, 1)(5) = (4)(5)(3, 1, 2).$$

**Exemplo 2.4.** Podemos representar o grupo simétrico de grau três por

$$S_3 = \{1, (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

3. Um  $k$ -ciclo, ou ciclo de comprimento  $k$ , é um ciclo contendo  $k$  elementos. O tipo cíclico, ou simplesmente o tipo de  $\pi$ , é uma expressão da forma

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}),$$

onde  $m_k$  é o número de ciclos de comprimento  $k$  em  $\pi$ .

**Exemplo 2.5.** No Exemplo 2.3, a permutação tem tipo cíclico

$$(1^2, 2^0, 3^1, 4^0, 5^0)$$

indicando que ela consiste de um 3-ciclo e dois 1-ciclos.

Um 1-ciclo de  $\pi$  é chamado ponto fixo. Os números 4 e 5 são pontos fixos no Exemplo 2.3. Os pontos fixos são geralmente omitidos da notação ciclo se não houver confusão. Um 2-ciclo  $\pi = (i, j)$  é chamado de transposição.

Dizemos que os ciclos  $\pi = (i_1, \dots, i_l)$  e  $\tau = (j_1, \dots, j_r)$  são disjuntos se  $i_s \neq j_t$  para todo  $s = 1, \dots, l$  e  $t = 1, \dots, r$ . Neste caso, temos que  $\pi\tau = \tau\pi$ . Note que isso não ocorre quando os ciclos não são disjuntos. Sejam  $\pi = (1, 2)$  e  $\tau = (1, 3)$  temos que  $\pi\tau = (1, 2)(1, 3) = (1, 3, 2)$  e  $\tau\pi = (1, 3)(1, 2) = (1, 2, 3)$ , então  $\pi\tau \neq \tau\pi$ .

**Proposição 2.1.** Qualquer permutação  $\alpha \in S_n$  é um ciclo ou um produto de ciclos disjuntos.

*Demonstração.* Ver Proposição 2.2 de [RJ]. □

**Definição 2.2.** Uma fatoração completa de uma permutação  $\pi$  é uma fatoração de  $\pi$  em ciclos disjuntos que contém exatamente um 1-ciclo para  $i$  fixo por  $\pi$ .

**Exemplo 2.6.** A fatoração completa da permutação  $\pi = (1, 3, 5)$  em  $S_5$  é  $(1, 3, 5)(2)(4)$ .

**Proposição 2.2.** Toda permutação  $\pi \in S_n \setminus \{(1)\}$  se decompõe completamente de forma única como produto de ciclos disjuntos, a menos da ordem dos fatores.

*Demonstração.* Ver Proposição 2.3 de [RJ]. □

Uma permutação  $\pi \in S_n$  é par se ela pode ser fatorada em um número par de transposições. Caso contrário,  $\pi$  é ímpar. Se uma transposição for da forma  $s_i = (i, i + 1)$  para  $1 < i < n - 1$ , dizemos que é uma transposição adjacente.

**Proposição 2.3.** Os seguintes conjuntos geram  $S_n$ .

1. Todas as transposições de  $S_n$ ;
2. Todas as transposições adjacentes.

*Demonstração.* Ver Proposição 2.10 [RJ]. □

**Definição 2.3.** Seja  $\pi \in S_n$  com fatoração completa  $\pi = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ . O sinal de  $\pi$  é definido por  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{n-t}$ .

**Teorema 2.1.** Para quaisquer permutações  $\pi, \tau \in S_n$ , temos que  $\text{sgn}(\pi\tau) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\tau)$ .

*Demonstração.* Ver Teorema 2.12 de [RJ]. □

**Corolário 2.2.** Seja  $\pi \in S_n$ .

1. Se  $\text{sgn}(\pi) = 1$  então  $\pi$  é par.
2. Se  $\text{sgn}(\pi) = -1$  então  $\pi$  é ímpar.
3. Uma permutação é ímpar se, e somente se, for produto de uma quantidade ímpar de transposições.

*Demonstração.* Ver Teorema 2.13 de [RJ]. □

Considere agora um grupo qualquer  $G$ . Dizemos que dois elementos  $g, h \in G$  são conjugados se  $g = khk^{-1}$ , para algum  $k \in G$ . O conjunto de todos elementos conjugados a um dado  $g$  é chamado de a classe de conjugação de  $g$  e é denotado por  $K_g$ . Como a conjugação é uma relação de equivalência temos que distintas classes de conjugação particionam  $G$ .

**Proposição 2.4.** Sejam  $\sigma, \tau \in S_n$ . Suponha que  $\sigma$  tem decomposição cíclica

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k_1})(b_1, b_2, \dots, b_{k_2}) \cdots .$$

Então  $\tau\sigma\tau^{-1}$  tem decomposição cíclica

$$(\tau(a_1), \tau(a_2), \dots, \tau(a_{k_1}))(\tau(b_1), \tau(b_2), \dots, \tau(b_{k_2})) \cdots ,$$

isto é,  $\tau\sigma\tau^{-1}$  é obtido de  $\sigma$  substituindo-se cada entrada  $i$  no ciclo de decomposição de  $\sigma$  pela entrada  $\tau(i)$ .

*Demonstração.* Ver Proposição 4.10 de [DF]. □

**Definição 2.4.** Se  $n \in \mathbb{Z}^+$ , uma *partição* de  $n$  é uma sequência não decrescente de inteiros positivos cuja soma é  $n$ .

Note pelos resultados anteriores que o tipo cíclico de uma permutação decomposta como produto de ciclos disjuntos é único. O tipo cíclico de um  $m$ -ciclo em  $S_n$  é  $1, 1, \dots, 1, m$ , onde o  $m$  é precedido de  $(n - m)$  uns. Cada tipo cíclico para uma permutação de  $S_n$  é uma partição de  $n$ . Temos que  $k$  está repetido  $m_k$  vezes na versão para partição do tipo cíclico de  $\pi$ . O Exemplo 2.5 corresponde a partição  $(3, 1, 1)$ .

**Proposição 2.5.** Dois elementos de  $S_n$  são conjugados em  $S_n$  se, e somente se, têm o mesmo tipo cíclico. O número de classes de conjugação de  $S_n$  é igual ao número de partições de  $n$ .

*Demonstração.* Ver Proposição 4.11 de [DF]. □

Por exemplo, as permutações  $\pi = (1, 2, 3)(4, 5)(6, 7)$  e  $\tau = (1, 5)(3, 7)(2, 4, 6)$  são conjugadas pois tem o mesmo tipo cíclico  $(2, 2, 3)$ .

Seja  $g \in G$  onde  $G$  é grupo qualquer. Definimos o centralizador  $Z_g$  por

$$Z_g = \{h \in G : hgh^{-1} = g\}.$$

$Z_g$  corresponde ao subgrupo de todos elementos que comutam com  $g$ .

**Proposição 2.6.** Existe uma bijeção entre  $K_g$  e as classes laterais de  $Z_g$  em  $G$ . Portanto

$$|K_g| = \frac{|G|}{|Z_g|}.$$

*Demonstração.* Ver Proposição 4.6 de [DF]. □

## 2.2 REPRESENTAÇÕES E MÓDULOS

Nesta seção, apresentamos os principais ingredientes usados na teoria da representação de grupos. Tal teoria será necessária nos seguintes capítulos nos quais abordaremos a teoria de representação do grupo simétrico.

A teoria de representação de grupos pode ser descrita tanto na linguagem de ações no grupo linear quanto pela linguagem de módulos. Neste trabalho, vamos seguir a abordagem de módulos, seguindo a referência [SA].

### 2.2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS E CONCEITOS

Inicialmente definiremos as noções equivalentes de representações de grupo, representações matriciais e módulos de grupo.

Seja  $V$  um espaço vetorial. A menos que seja afirmado o contrário, todos os espaços vetoriais serão sobre os números complexos e de dimensão finita. Seja  $GL(V)$  o grupo geral linear formado pelas transformações lineares inversíveis de  $V$  em  $V$ . Se  $\dim V = d$ , então  $GL(V)$  é isomorfa ao grupo  $GL_d(\mathbb{C})$  de matrizes  $d \times d$  inversíveis com entradas em  $\mathbb{C}$ .

**Definição 2.5.** Uma *representação* de um grupo  $G$  é um homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  para algum espaço vetorial  $V$  de dimensão finita.

Vamos denotar um elemento  $\varphi(g)$  por  $\varphi_g$ , onde  $g \in G$ . Segue, por definição, que  $\varphi_{gh} = \varphi_g \varphi_h$  para todo  $g, h \in G$ ,  $\varphi_e = 1$  e  $\varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}$ . A dimensão de  $V$  é chamada grau de  $\varphi$ .

**Exemplo 2.7.** Uma representação de grau 1 de um grupo  $G$  é um homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ , onde  $\mathbb{C}^*$  é o grupo multiplicativo de todos números complexos não nulos. No caso que o grupo  $G$  tem ordem finita, os valores de  $\varphi_g$  são raízes da unidade. Suponha que  $g \in G$  tenha ordem  $k$ . Temos que  $(\varphi_g)^k = \varphi_{g^k} = \varphi_e = 1$ . Se  $\varphi_g = 1$  para todo  $g \in G$ , então essa representação é chamada *representação trivial*.

**Definição 2.6.** Uma *representação matricial de um grupo*  $G$  é um homomorfismo de grupo  $X : G \rightarrow GL_d(\mathbb{C})$ . Equivalentemente, para cada  $g \in G$ , atribui-se uma matriz  $X(g)$   $d \times d$  tal que

1.  $X(e) = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade, e
2.  $X(gh) = X(g)X(h)$  para todo  $g, h \in G$ .

O parâmetro  $d$  é chamado *grau*, ou *dimensão*, da representação e é denotado por  $\deg X$ . As condições 1 e 2 implicam que  $X(g^{-1}) = X(g)^{-1}$ .



A aplicação  $X(\pi) = (\text{sgn}(\pi))$  é uma representação de grau 1 de  $S_n$ , chamada de *representação sinal*.

**Exemplo 2.8.** Seja  $\pi \in S_n$ . Definimos  $X(\pi) = (x_{i,j})_{n \times n}$  por

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi(j) = i, \\ 0. & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtemos uma representação de  $S_n$  de grau  $n$  chamada de *representação definida*. A matriz  $X(\pi)$  é chamada *matriz de permutação*, uma vez que ela contém apenas zeros e uns: um único 1 em cada linha e coluna.

Em particular, as matrizes da representação definida de  $S_3$  são

$$\begin{aligned} X(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X((1,2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X((1,3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X((2,3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X((1,2,3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X((1,3,2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na sequência, vamos introduzir o conceito de  $G$ -módulo e mostraremos que existe uma conexão entre  $G$ -módulos e representações de  $G$ .

**Definição 2.7.** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $G$  um grupo. Então  $V$  é um  $G$ -módulo de  $G$  se existe um homomorfismo de grupos

$$\varphi : G \longrightarrow \text{GL}(V).$$

Equivalentemente,  $V$  é um  $G$ -módulo se existe uma multiplicação,  $g \cdot \mathbf{v}$ , de elementos de  $V$  pelos elementos de  $G$ , ou seja, se existe uma aplicação  $\cdot : G \times V \longrightarrow V$ , possuindo as seguintes propriedades

1.  $g \cdot \mathbf{v} \in V$ ,
2.  $g \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c(g \cdot \mathbf{v}) + d(g \cdot \mathbf{w})$ ,
3.  $(gh) \cdot \mathbf{v} = g \cdot (h \cdot \mathbf{v})$  e
4.  $e \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

para todos  $g, h \in G$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e escalares  $c, d \in \mathbb{C}$ .

Dizemos que a multiplicação  $g \cdot \mathbf{v}$  define uma ação de  $G$  em  $V$  e que  $G$  age sobre  $V$ . Quando não houver confusão sobre o grupo envolvido utilizaremos “módulo” ao invés de “ $G$ -módulo” e trataremos de maneira similar outras palavras envolvendo  $G$ - como um prefixo.

Estas duas noções de representação são equivalentes. De fato, seja  $V$  o espaço vetorial  $\mathbb{C}^d$  de todos vetores colunas de comprimento  $d$ . Dada uma representação matricial  $X$  de grau  $d$ , então  $V$  é um  $G$ -módulo com respeito ao produto

$$g \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} X(g)\mathbf{v}.$$

Reciprocamente, se  $V$  é um  $G$ -módulo, então tome qualquer base  $\mathcal{B}$  para  $V$ , portanto  $X(g)$  será a matriz da transformação linear  $g \in G$  na base  $\mathcal{B}$  calculada da maneira usual.

Dizemos que  $V$  carrega uma representação de  $G$  ou que uma representação de  $G$  dá a  $V$  uma estrutura de  $G$ -módulo. Isso estabelece uma correspondência biunívoca entre as representações de  $G$  e seus  $G$ -módulos.

Note que se  $S$  é qualquer conjunto com uma multiplicação por elementos de  $G$  satisfazendo as condições 1, 3 e 4, então dizemos que  $G$  age em  $S$ . É sempre possível tomar um conjunto no qual  $G$  age e transformá-lo em um  $G$ -módulo. Mais especificamente, seja  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Denote  $\mathbb{C}S = \mathbb{C}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  o espaço gerado por  $S$  sobre  $\mathbb{C}$  que consiste de todas combinações lineares formais  $c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_n\mathbf{s}_n$ , onde  $c_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i$ . A adição e multiplicação por escalar em  $\mathbb{C}S$  são definidas respectivamente por

$$(c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) + (d_1\mathbf{s}_1 + d_2\mathbf{s}_2 + \dots + d_n\mathbf{s}_n) = (c_1 + d_1)\mathbf{s}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{s}_2 + \dots + (c_n + d_n)\mathbf{s}_n$$

e

$$c(c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) = (cc_1)\mathbf{s}_1 + (cc_2)\mathbf{s}_2 + \dots + (cc_n)\mathbf{s}_n.$$

Quando estendemos a ação de  $G$  em  $S$  para a ação em  $\mathbb{C}S$  por linearidade

$$g \cdot (c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) = c_1(g \cdot \mathbf{s}_1) + c_2(g \cdot \mathbf{s}_2) + \dots + c_n(g \cdot \mathbf{s}_n)$$

tornamos  $\mathbb{C}S$  em um  $G$ -módulo de dimensão  $|S|$ .

**Definição 2.8.** Se um grupo  $G$  age no conjunto  $S$ , então o módulo associado  $\mathbb{C}S$  é chamado *representação de permutação* associado a  $S$ . Os elementos de  $S$  formam uma base para  $\mathbb{C}S$  chamada *base padrão*.

**Exemplo 2.9.** Considere o grupo simétrico  $S_n$  com a ação usual em  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja

$$\mathbb{C}S = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \dots + c_n\mathbf{n} : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}.$$

Então a ação

$$\pi(c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \dots + c_n\mathbf{n}) = c_1\pi(\mathbf{1}) + c_2\pi(\mathbf{2}) + \dots + c_n\pi(\mathbf{n})$$

para todo  $\pi \in S_n$ , define uma estrutura de  $S_n$ -módulo em  $\mathbb{C}S$ .

Por exemplo, em  $S_3$ , vamos utilizar a base padrão  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  para encontrar a matriz para  $\pi = (1, 2)$ . Como  $(1, 2)\mathbf{1} = \mathbf{2}$ ,  $(1, 2)\mathbf{2} = \mathbf{1}$  e  $(1, 2)\mathbf{3} = \mathbf{3}$  temos que

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o mesmo processo para os outros elementos de  $S_3$ , obtemos exatamente as mesmas matrizes que as da representação definida do Exemplo 2.8. Isto significa que obtemos um módulo para a representação definida de  $S_n$ .

**Exemplo 2.10.** O  $G$ -módulo trivial é o espaço vetorial uni-dimensional  $V$  com  $g \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$  para todo  $\mathbf{v} \in V$  e  $g \in G$ .

**Exemplo 2.11.** Este exemplo corresponde a uma das mais importantes representações para qualquer grupo: a *representação regular*. Seja  $G$  um grupo arbitrário. Então  $G$  age em si mesmo pela multiplicação à esquerda, com o produto usual do grupo. As propriedades 1, 3 e 4 seguem respectivamente do fechamento, associatividade e identidade do grupo.

Logo se  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , então temos o correspondente  $G$ -módulo

$$\mathbb{C}[G] = \{c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \dots + c_n\mathbf{g}_n : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$$

o qual é chamado de a *álgebra de grupo* de  $G$ . Veremos adiante que ela nos fornecerá informações muito importantes sobre as representações de grupo. O uso do colchete indica que isso é uma álgebra e não apenas um espaço vetorial.

Como um espaço vetorial, os elementos são combinações lineares formais  $\sum_i \alpha_i \mathbf{g}_i$  onde  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ . A multiplicação é dada tomando-se  $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_k$  em  $\mathbb{C}[G]$  se  $g_i g_j = g_k \in G$  e estendemos linearmente. Expressamos a multiplicação da seguinte forma

$$\left( \sum_i \alpha_i \mathbf{g}_i \right) \left( \sum_j \beta_j \mathbf{g}_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j.$$

A representação regular  $V = \mathbb{C}[G]$  com  $G$  agindo na álgebra do grupo pela multiplicação à esquerda pode ser expressa como

$$g(c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \dots + c_n\mathbf{g}_n) = c_1(g\mathbf{g}_1) + c_2(g\mathbf{g}_2) + \dots + c_n(g\mathbf{g}_n), \text{ para todo } g \in G.$$

**Exemplo 2.12.** Se  $S_n = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$  então

$$\mathbb{C}[S_n] = \{c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + \dots + c_n\pi_n : c_i \in \mathbb{C}\}$$

com a ação

$$\pi(c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + \dots + c_n\pi_n) = c_1(\pi\pi_1) + c_2(\pi\pi_2) + \dots + c_n(\pi\pi_n)$$

é um  $S_n$ -módulo chamado módulo regular. Além disto,  $\mathbb{C}[S_n]$  é chamada a álgebra de grupo de  $S_n$ .

**Exemplo 2.13.** Se  $G$  age em  $V$  então  $\mathbb{C}[G]$  também age em  $V$ . Mais especificamente, se  $c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \dots + c_n\mathbf{g}_n \in \mathbb{C}[G]$  e  $v \in V$  então podemos definir a ação

$$(c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \dots + c_n\mathbf{g}_n)\mathbf{v} = c_1(\mathbf{g}_1\mathbf{v}) + c_2(\mathbf{g}_2\mathbf{v}) + \dots + c_n(\mathbf{g}_n\mathbf{v}).$$

Podemos estender o conceito de representação para álgebras: a representação de uma álgebra  $A$  é um homomorfismo de  $A$  em  $\text{GL}(V)$ . Deste modo, toda representação de um grupo  $G$  dá origem a uma representação da sua álgebra de grupo  $\mathbb{C}[G]$ .

**Exemplo 2.14.** Se  $\varphi : S_n \rightarrow \text{GL}(V)$  é uma representação de  $S_n$  então  $\varphi$  induz uma representação única  $\bar{\varphi} : \mathbb{C}[S_n] \rightarrow \text{GL}(V)$  tal que  $\bar{\varphi}|_{S_n} = \varphi$ .

**Exemplo 2.15.** Seja  $G$  um grupo com  $H \leq G$ . Uma generalização da representação regular é a *representação de classes laterais* (à esquerda) de  $G$  em relação a  $H$ .

Sejam  $g_1, g_2, \dots, g_k$  os representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$ ; isto é,  $\mathcal{H} = \{g_1H, g_2H, \dots, g_kH\}$  é um conjunto completo de classes laterais disjuntas de  $H$  em  $G$ . Segue que  $G$  age em  $\mathcal{H}$  por

$$g(g_iH) = (gg_i)H, \text{ para todo } g \in G.$$

O correspondente módulo

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1g_1\mathbf{H} + c_2g_2\mathbf{H} + \dots + c_kg_k\mathbf{H} : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$$

herda a ação

$$g(c_1g_1\mathbf{H} + c_2g_2\mathbf{H} + \dots + c_kg_k\mathbf{H}) = c_1(gg_1\mathbf{H}) + c_2(gg_2\mathbf{H}) + \dots + c_k(gg_k\mathbf{H}).$$

Note que se  $H = G$ , então isso reduz a representação trivial ( $\mathcal{H} = \{e\}$ ). Quando  $H = \{e\}$ , temos que  $\mathcal{H} = G$  então obtemos a representação regular.

Considere  $G = S_3$  e  $H = \{e, (2, 3)\}$ . Podemos tomar  $\mathcal{H} = \{H, (1, 2)H, (1, 3)H\}$  e

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1\mathbf{H} + c_2(\mathbf{1}, \mathbf{2})\mathbf{H} + c_3(\mathbf{1}, \mathbf{3})\mathbf{H} : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}.$$

Podemos computar as matrizes dos elementos representantes das classes de conjugação de  $S_3$  na base padrão. Temos que  $X(e) = I$ . Como  $(1, 2)\mathbf{H} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})\mathbf{H}$ ,  $(1, 2)(\mathbf{1}, \mathbf{2})\mathbf{H} = \mathbf{H}$  e  $(1, 2)(\mathbf{1}, \mathbf{3})\mathbf{H} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2})\mathbf{H} = (\mathbf{1}, \mathbf{3})\mathbf{H}$  temos

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, como  $(1, 2, 3)\mathbf{H} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})\mathbf{H}$ ,  $(1, 2, 3)(\mathbf{1}, \mathbf{2})\mathbf{H} = (\mathbf{1}, \mathbf{3})\mathbf{H}$  e  $(1, 2, 3)(\mathbf{1}, \mathbf{3})\mathbf{H} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})\mathbf{H} = \mathbf{H}$  temos

$$X((1, 2, 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E, assim por diante, redescobrimos novamente a representação definida. Isto ocorre em geral pois veremos adiante que estes módulos são isomorfos.

**Definição 2.9.** Seja  $V$  um  $G$ -módulo. Um *submódulo* de  $V$  é um subespaço  $W$  que é fechado sob a ação de  $G$ , isto é, se  $\mathbf{w} \in W$  então  $g\mathbf{w} \in W$ , para todo  $g \in G$ .

Dizemos também que  $W$  é um subespaço  $G$ -invariante. Equivalentemente,  $W$  é um subconjunto de  $V$  que é um  $G$ -módulo. Escrevemos  $W \leq V$  se  $W$  é um submódulo de  $V$ .

**Exemplo 2.16.** Qualquer  $G$ -módulo  $V$  admite o submódulo  $W = V$  bem como o submódulo  $W = \{\mathbf{0}\}$ , onde  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo. Esses são chamados de módulos *triviais*. Todos os outros submódulos são chamados *não triviais*.

**Exemplo 2.17.** Considere  $G = S_n$ ,  $n \geq 2$ , e  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$  o módulo correspondente a representação definida. Agora tome

$$W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}\} = \{c(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}) : c \in \mathbb{C}\},$$

isto é,  $W$  é o subespaço uni-dimensional gerado pelo vetor  $\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}$ . Para verificar que  $W$  é fechado sob a ação de  $S_n$ , é suficiente mostrar que  $\pi\mathbf{w} \in W$  para todo  $\mathbf{w}$  em alguma base para  $W$  e para todo  $\pi \in S_n$ . Portanto, precisamos apenas verificar que  $\pi(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}) \in W$ , para cada  $\pi \in S_n$ . Mas,

$$\pi(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}) = \pi(\mathbf{1}) + \pi(\mathbf{2}) + \dots + \pi(\mathbf{n}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n} \in W,$$

pois aplicando  $\pi$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  obtemos novamente o mesmo conjunto de números em uma ordem eventualmente diferente. Portanto  $W$  é um submódulo de  $V$  que é não trivial uma vez que  $\dim W = 1$  e  $\dim V = n \geq 2$ .

Uma vez que  $W$  é um módulo de  $G$  situado dentro de  $V$ , podemos restringir a ação de  $G$  a  $W$ . Como cada  $\pi \in S_n$  envia o vetor da base  $\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}$  para si mesmo,

teremos que  $X(\pi) = (1)$  é a matriz correspondente e, portanto, encontramos uma cópia da representação trivial em  $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$ . Em geral, para um espaço vetorial  $W$  de dimensão qualquer, se  $G$  fixa todo elemento de  $W$ , dizemos que  $G$  age *trivialmente* em  $W$ .

**Exemplo 2.18.** Suponha  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  com a álgebra de grupo  $V = \mathbb{C}[G]$ . Usando a mesma ideia do exemplo anterior, seja

$$W = \mathbb{C}[\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \dots + \mathbf{g}_n],$$

o subespaço uni-dimensional gerado pelo vetor que é a soma de todos elementos de  $G$ . A verificação é análoga. Se  $g \in G$  então

$$\begin{aligned} g(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \dots + \mathbf{g}_n) &= g\mathbf{g}_1 + g\mathbf{g}_2 + \dots + g\mathbf{g}_n \\ &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \dots + \mathbf{g}_n \in W, \end{aligned}$$

visto que a multiplicação por  $g$  permuta os elementos de  $G$  deixando a soma inalterada. Como no exemplo anterior,  $G$  age trivialmente em  $W$ .

**Exemplo 2.19.** Seja  $G = S_n$ . A representação sinal pode ser recuperada usando o submódulo

$$W = \mathbb{C}\left[\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi\right]$$

pois  $\sigma w = (\text{sgn}(\sigma))w$  para todo  $w \in W$  e  $\sigma \in S_n$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} \sigma \left( \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi \right) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\sigma\pi \quad (\text{fazendo } \sigma\pi = \tau) \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}\tau)\tau \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1})\text{sgn}(\tau)\tau \\ &= (\text{sgn}(\sigma)) \left( \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau)\tau \right). \end{aligned}$$

## 2.2.2 REDUTIBILIDADE

Iremos agora introduzir o conceito de representações irredutíveis. Veremos que a redutibilidade total dos módulos sobre grupos finitos será apresentada através de um resultado fundamental conhecido como Teorema de Maschke.

**Definição 2.10.** Um  $G$ -módulo não nulo  $V$  é dito *redutível* se contém um submódulo não trivial  $W$ . Caso contrário,  $V$  é dito *irredutível*, isto é, seus únicos submódulos são  $V$  e  $\{0\}$ . Equivalentemente,  $V$  é redutível se ele tem uma base  $\mathcal{B}$  na qual todo  $g \in G$  é atribuído uma matriz de bloco da forma

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array} \right).$$

onde as matrizes  $A(g)$  são quadradas e todas de mesmo tamanho e  $0$  é uma matriz não vazia de zeros.

Note que qualquer representação de grau 1 é irredutível. Pelos exemplos anteriores podemos observar que a representação definida e a representação regular são redutíveis se  $n \geq 2$  e  $|G| \geq 2$ , respectivamente, pois admitem submódulos não triviais.

**Exemplo 2.20.** Considere a representação definida de  $S_3$ . Podemos estender a base  $\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$  de  $W$  para uma base para  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  tomando  $\mathcal{B} = \{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ . Temos que  $X(e) = I$ . Para calcular  $X(\pi)$ , vemos a ação de  $\pi$  na base  $\mathcal{B}$ . Para  $\pi = (1, 2)$ , temos que  $(1, 2)(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}$ ,  $(1, 2)\mathbf{2} = \mathbf{1} = (\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}) - \mathbf{2} - \mathbf{3}$  e  $(1, 2)\mathbf{3} = \mathbf{3}$  de onde obtemos

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo de forma similar, para os outros elementos restantes  $\pi \in S_3$ , temos

$$\begin{aligned} X((1, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & X((2, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ X((1, 2, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & X((1, 3, 2)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que todas essas matrizes tem a forma

$$X(\pi) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right).$$

ilustrando o fato de que  $S_3$  age trivialmente em  $W$ .

**Definição 2.11.** Seja  $V$  um espaço vetorial com subespaços  $U$  e  $W$ . Então  $V$  é a *soma direta* de  $U$  e  $W$ ,  $V = U \oplus W$ , se todo  $\mathbf{v} \in V$  pode ser escrito unicamente como uma soma representada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad \text{com } \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{w} \in W.$$

Se  $V$  é um  $G$ -módulo e  $U, W$  são  $G$ -submódulos, então dizemos que  $U$  e  $W$  são *complementos* um do outro.

Seja  $X$  uma matriz. Dizemos que  $X$  é a *soma direta* de matrizes  $A$  e  $B$ , denotada por  $X = A \oplus B$ , se  $X$  tem a forma diagonal de blocos

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

Seja  $V$  um  $G$ -módulo com  $V = U \oplus W$ , onde  $U, W \leq V$ . Desde que isso é uma soma direta de espaços vetoriais, podemos escolher uma base para  $V$  de modo que a matriz de qualquer  $g \in G$  na base  $\mathcal{B}$  é

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & B(g) \end{array} \right),$$

onde  $A(g)$  e  $B(g)$  são matrizes da ação de  $G$  restrita a  $U$  e a  $W$ , respectivamente.

**Definição 2.12.** Um *produto interno* em um espaço vetorial complexo  $V$  é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaz

1.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ,
2.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ ,
3.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ,
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  com igualdade apenas pra  $u = 0$ ,

para todos  $u, v, w \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Definição 2.13.** Dados um produto interno no espaço vetorial  $V$  e um subespaço  $W$ , o *complemento ortogonal* de  $W$  é  $W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } \mathbf{w} \in W\}$ .

É sempre verdade que  $V = W \oplus W^\perp$ . Veremos que quando  $W \leq V$  e o produto interno for  $G$ -invariante, obtemos resultados adicionais.

**Definição 2.14.** Um produto interno em um espaço vetorial  $V$  é invariante sob a ação de  $G$  se  $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$  para todo  $g \in G$  e  $v, w \in V$ .

**Proposição 2.7.** Sejam  $V$  um  $G$ -módulo,  $W$  um submódulo, e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno invariante sobre a ação de  $G$ . Então  $W^\perp$  é também um  $G$ -submódulo.

*Demonstração.* Vamos mostrar que para todo  $g \in G$  e  $u \in W^\perp$  temos  $gu \in W^\perp$ . Tome qualquer  $\mathbf{w} \in W$ ; usando o fato do produto interno ser invariante temos que  $\langle gu, \mathbf{w} \rangle = \langle g^{-1}gu, g^{-1}\mathbf{w} \rangle$ . Pela propriedade da ação de grupo, temos que  $\langle gu, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, g^{-1}\mathbf{w} \rangle$  e, como  $\mathbf{u} \in W^\perp$  e  $g^{-1}\mathbf{w} \in W$  pois  $W$  é um submódulo, temos que  $\langle \mathbf{u}, g^{-1}\mathbf{w} \rangle = 0$ . Portanto,  $W^\perp$  é fechado sobre a ação de  $G$ .  $\square$



**Exemplo 2.21.** Considere a representação definida de  $S_3$ . Já vimos que

$$V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\} = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\} \oplus \mathbb{C}\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$$

como espaços vetoriais. O espaço vetorial  $\mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$  é um  $S_3$ -módulo mas o espaço vetorial  $\mathbb{C}\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  não é. Note que  $(1, 2)\mathbf{2} = \mathbf{1} \notin \mathbb{C}\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ . Então precisamos encontrar um complementar para  $\mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$ , isto é, um submódulo  $U$  tal que

$$V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\} = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\} \oplus U.$$

Para encontrar um complemento, introduzimos um produto interno em  $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ . Dados quaisquer dois vetores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  na base  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ , seja seu produto interno

$$\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \delta_{i,j}, \tag{2.1}$$

onde  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker, ou seja,  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ .

Agora, estendemos por linearidade para obter um produto interno em todo espaço vetorial. Equivalentemente, poderíamos ter começado definindo o produto de quaisquer dois vetores  $\mathbf{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3}$ ,  $\mathbf{w} = x\mathbf{1} + y\mathbf{2} + z\mathbf{3}$  como

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z},$$

com a barra denotando o conjugado. Essa definição satisfaz todos os axiomas para um produto interno. Note que o produto interno é invariante sob a ação de  $G$ . Se  $\pi \in S_3$  então

$$\langle \pi\mathbf{i}, \pi\mathbf{j} \rangle = \delta_{\pi(i), \pi(j)} = \delta_{i,j} = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle,$$

onde a igualdade do meio se mantém porque  $\pi$  é uma bijeção. Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}^\perp &= \{\mathbf{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : a + b + c = 0\}. \end{aligned}$$

Para calcular as matrizes da soma direta, escolhemos a base  $\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$  para  $\mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$

e  $\{\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}\}$  para  $\mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}^\perp$ . Produzimos as matrizes

$$X(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X((1, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X((2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X((1, 2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X((1, 3, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

São matrizes da forma

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|cc} A(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B(g) \end{array} \right).$$

Sabemos que  $A(g)$  é irredutível e veremos na Seção 2.2.7 que  $B(g)$  também é irredutível. Portanto, decompos a representação definida de  $S_3$  em submódulos irredutíveis. O teorema seguinte mostra que isso pode ser feito para qualquer grupo finito.

**Definição 2.15.** Uma representação é *completamente redutível* se ela pode ser escrita como uma soma direta de irredutíveis.

**Teorema 2.3.** [Teorema de Maschke] Seja  $G$  um grupo finito e seja  $V$  um  $G$ -módulo não nulo. Então

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}$$

onde cada  $W^{(i)}$  é um  $G$ -submódulo irredutível de  $V$ . Em outras palavras, toda representação de um grupo finito de dimensão positiva é completamente redutível.

*Demonstração.* Provaremos por indução em  $d = \dim V$ . Se  $d = 1$ , então temos que  $V$  é irredutível,  $k = 1$  e  $W^{(1)} = V$ . Agora suponha que o resultado seja válido para  $d \leq n$  e que  $\dim V = n + 1$ . Se  $V$  é irredutível, já temos o resultado. Caso contrário,  $V$  tem um  $G$ -submódulo não trivial,  $W$ . Vamos construir um submódulo complementar a  $W$ .

Escolha qualquer base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  para  $V$ . Considere o produto interno único que satisfaz

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$$

para elementos de  $\mathcal{B}$ . Esse produto interno pode não ser  $G$ -invariante, mas podemos encontrar outro que seja. Para qualquer  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ , tome

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle' = \sum_{g \in G} \langle g\mathbf{v}, g\mathbf{w} \rangle.$$

Esse produto interno satisfaz a definição de um produto interno e é  $G$ -invariante, ou seja,  $\langle h\mathbf{v}, h\mathbf{w} \rangle' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle'$  para todo  $h \in G$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ . De fato, pela maneira que é definido temos que  $\langle h\mathbf{v}, h\mathbf{w} \rangle' = \sum_{g \in G} \langle gh\mathbf{v}, gh\mathbf{w} \rangle$  e, como  $g$  varia sobre  $G$ , colocando  $f = gh$  temos  $\langle h\mathbf{v}, h\mathbf{w} \rangle' = \sum_{f \in G} \langle f\mathbf{v}, f\mathbf{w} \rangle$ . Novamente, pela definição desse produto interno, concluímos que  $\langle h\mathbf{v}, h\mathbf{w} \rangle' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle'$ .

Tome

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle' = 0\}.$$

Pela Proposição 2.7, temos que  $W^\perp$  é um  $G$ -módulo de  $V$  com  $V = W \oplus W^\perp$ .

Como  $\dim W < n + 1$  e  $\dim W^\perp < n + 1$  temos, por hipótese indutiva, que  $W$  e  $W^\perp$  são completamente redutíveis. Logo,

$$\begin{aligned} W &= U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_s \quad \text{e} \\ W^\perp &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_r \end{aligned}$$

onde cada  $U_i$  e cada  $Z_j$  são irredutíveis. Portanto,  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_s \oplus Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_r$  é completamente redutível.  $\square$

Segue a versão matricial do teorema de Maschke.

**Corolário 2.4.** Seja  $G$  um grupo finito e seja  $X$  uma matriz de uma representação de  $G$  de dimensão  $d > 0$ . Então há uma matriz fixa  $T$  tal que toda matriz  $X(g)$ ,  $g \in G$ , tem a forma

$$[X(g)]_{\mathcal{B}} = TX(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X^{(k)}(g) \end{pmatrix}$$

onde cada  $X^{(i)}$  é uma matriz de uma representação irredutível de  $G$ .

### 2.2.3 LEMA DE SCHUR

Para podermos obter uma lista completa de  $G$ -módulos irredutíveis, precisamos saber quando módulos aparentemente diferentes são na verdade os mesmos. Para estabelecer equivalências de módulos precisamos de homomorfismos. Nessa seção, definiremos essas aplicações e provaremos o Lema de Shur, que é fundamental na teoria das representações de grupos.

**Definição 2.16.** Sejam  $V$  e  $W$  dois  $G$ -módulos. Então um  $G$ -homomorfismo é uma transformação linear  $\theta : V \longrightarrow W$  que satisfaz

$$\theta(g \cdot \mathbf{v}) = g \cdot \theta(\mathbf{v})$$

para todo  $g \in G$  e  $\mathbf{v} \in V$ . De modo equivalente, dizemos que  $\theta$  preserva a ação de  $G$ .

Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  bases para  $V$  e  $W$ , respectivamente. Sejam  $X(g)$  e  $Y(g)$  as correspondentes representações matriciais. Tome  $T$  a matriz de  $\theta$  nas duas bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Então, a propriedade de  $G$ -homomorfismo se torna

$$TX(g)\mathbf{v} = Y(g)T\mathbf{v}$$

para todo vetor coluna  $\mathbf{v}$  e  $g \in G$ . Mas como isso vale para todo  $\mathbf{v}$ , devemos ter

$$TX(g) = Y(g)T \quad \text{para todo } g \in G. \quad (2.2)$$

Portanto ter um  $G$ -homomorfismo  $\theta$  é equivalente à existência de uma matriz  $T$  que satisfaça a Equação (2.2).

Sejam  $G = S_n$ ,  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{v}\}$  com a ação trivial de  $S_n$  e  $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$  com a ação definida de  $S_n$ . Defina uma transformação  $\theta : V \longrightarrow W$  por

$$\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}$$

e estenda linearmente, isto é,

$$\theta(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n})$$

para todo  $c \in \mathbb{C}$ . Temos que  $\theta$  é um  $G$ -homomorfismo. De fato, para todo  $\pi \in S_n$ ,

$$\theta(\pi\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{i} = \pi \sum_{i=1}^n \mathbf{i} = \pi\theta(\mathbf{v}).$$

De forma similar, seja  $G$  um grupo arbitrário agindo trivialmente em  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{v}\}$  e seja  $W = \mathbb{C}[G]$  a álgebra de grupo. Agora temos a transformação  $\theta : V \longrightarrow W$  dada por

$$\theta(\mathbf{v}) = \sum_{g \in G} \mathbf{g}$$

estendendo linearmente temos um  $G$ -homomorfismo pois temos que

$$\theta(h\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) = \sum_{g \in G} \mathbf{g} = h \sum_{g \in G} \mathbf{g} = h\theta(\mathbf{v}).$$

Seja  $G = S_n$  agindo em  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{v}\}$  por meio da representação sinal

$$\pi\mathbf{u} = \text{sgn}(\pi)\mathbf{u}$$

para todo  $\pi \in S_n$  e  $\mathbf{u} \in V$ . Mantendo a ação usual na álgebra de grupo, temos que

$$\eta(\mathbf{v}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi$$

estende-se a um  $G$ -homomorfismo de  $V$  a  $W$ . De fato, para todo  $\sigma \in S_n$ , temos que

$$\begin{aligned} \eta(\sigma\mathbf{v}) &= \eta(\text{sgn}(\sigma)\mathbf{v}) = \text{sgn}(\sigma)\eta(\mathbf{v}) \\ \sigma(\eta(\mathbf{v})) &= \sigma\left(\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi\right) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\sigma\pi = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}\tau)\tau = (\text{sgn}(\sigma)) \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau)\tau \\ &= \text{sgn}(\sigma)\eta(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Agora, estabelecemos a noção de equivalência entre  $G$ -módulos.

**Definição 2.17.** Sejam  $V$  e  $W$  dois  $G$ -módulos. Um  $G$ -isomorfismo é um  $G$ -homomorfismo  $\theta : V \rightarrow W$  bijetivo. Dizemos que  $V$  e  $W$  são  $G$ -isomorfos ou  $G$ -equivalentes e escrevemos  $V \cong W$ . Caso contrário, dizemos que  $V$  e  $W$  são  $G$ -inequivalentes.

Em termos matriciais, as representações matriciais  $X$  e  $Y$  de um grupo  $G$  são equivalentes se e somente se existe uma matriz fixa  $T$  tal que

$$Y(g) = TX(g)T^{-1}$$

para todo  $g \in G$ .

**Lema 2.1.** Seja  $X$  uma representação matricial de  $G$  correspondente ao módulo  $V$ . Se  $X$  for equivalente a uma representação irredutível então  $X$  é irredutível.

*Demonstração.* Seja  $Y$  uma representação matricial irredutível de  $G$  correspondente a um módulo  $W$  tal que  $X \cong Y$ . Então existe um isomorfismo  $T : V \rightarrow W$  com  $Y(g) = TX(g)T^{-1}$  para todo  $g \in G$ . Como  $Y$  é irredutível, então  $\{0\}$  e  $W$  são os seus únicos submódulos.

Seja  $S \leq V$  um submódulo de  $V$ . Assim, pela  $G$ -equivalência,  $TX(g)s \in T(S)$  para todo  $g \in G$  e  $s \in S$ . Temos que  $Y(g)T(s) \in T(S)$  para todo  $g \in G$  e  $s \in S$ . Como  $T(s) \in T(S) \leq W$ , segue que  $T(S)$  é  $G$ -invariante. Sendo  $Y$  uma representação irredutível, segue que  $T(S) = 0$  ou  $T(S) = W$ . Se  $T(S) = 0$  então  $S = 0$ , pois  $T$  é injetor. Se  $T(S) = W$  então  $S = V$ , pois  $T$  é sobrejetor. Portanto,  $X$  é irredutível.  $\square$

**Exemplo 2.22.** Veremos agora que as representações de classes laterais de  $S_3$  no Exemplo 2.15 coincidem com a representação definida. Lembrando que tomamos o subgrupo  $H = \{e, (2, 3)\} \subset S_3$ , dando origem ao módulo de representação de classes laterais  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  com  $\mathcal{H} = \{H, (1, 2)H, (1, 3)H\}$ .

Dado qualquer conjunto  $A$ , seja  $S_A$  o grupo simétrico em  $A$ . Agora, o subgrupo  $H$  pode ser expresso como um produto direto.

$$H = \{(1)(2)(3), (1)(2, 3)\} = \{(1)\} \times \{(2)(3), (2, 3)\} = S_{\{1\}} \times S_{\{2,3\}}. \quad (2.3)$$

Um dispositivo conveniente para exibir esses subgrupos de produtos de  $S_3$  é o tablóide. Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  uma partição. Um *tablóide de Young com forma  $\lambda$*  é uma tabela com  $l$  linhas tais que a linha  $i$  contém  $\lambda_i$  inteiros positivos e a ordem das entradas da linha não importa. Para mostrar que cada linha pode ser embaralhada arbitrariamente, colocamos traços horizontais entre as linhas para denotar que é um tablóide. Por exemplo, se  $\lambda = (4, 2, 1)$ , então alguns dos possíveis tablóides de Young são

$$\begin{array}{c} \overline{3 \ 1 \ 4 \ 6} \\ \overline{5 \ 7} \\ \underline{2} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{3 \ 6 \ 1 \ 4} \\ \overline{7 \ 5} \\ \underline{2} \end{array} \neq \begin{array}{c} \overline{7 \ 5 \ 3 \ 4} \\ \overline{2 \ 1} \\ \underline{1} \end{array}.$$

A Equação (2.3) diz que  $H$  consiste de todas as permutações em  $S_3$  que permutam os elementos dos conjuntos  $\{1\}$  e de  $\{2, 3\}$  respectivamente neles mesmos, resultando nas permutações  $(2)(3)$  e  $(2, 3)$ . Isso é modelado pelo tablóide

$$\begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array}$$

pois a ordem 2 e 3 não importa mas 1 deve permanecer fixo. Abaixo, listamos o conjunto completo de tablóides de Young com forma  $\lambda = (2, 1)$  cujas entradas são exatamente 1, 2, 3

$$S = \left( \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{1 \ 3} \\ \underline{2} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{1 \ 2} \\ \underline{3} \end{array} \right).$$

Mais ainda, existe uma ação de qualquer  $\pi \in S_3$  em  $S$  dada por

$$\pi \begin{array}{c} \overline{i \ j} \\ \underline{k} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{\pi(i) \ \pi(j)} \\ \underline{\pi(k)} \end{array}.$$

Portanto faz sentido considerar a aplicação  $\theta$  que envia

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\xrightarrow{\theta} \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array}, \\ (1, 2)\mathbf{H} &\xrightarrow{\theta} (1, 2) \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{1 \ 3} \\ \underline{2} \end{array}, \\ (1, 3)\mathbf{H} &\xrightarrow{\theta} (1, 3) \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{1 \ 2} \\ \underline{3} \end{array}. \end{aligned}$$

Segue que  $\theta$  se torna, por extensão linear, um isomorfismo de espaços vetoriais de  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  a  $\mathbb{C}S$ . Na verdade,  $\theta$  é também um  $G$ -homomorfismo. Para verificar isso, observamos que a ação de cada  $\pi \in S_3$  é preservada em cada vetor da base em  $H$ . Por exemplo, se  $\pi = (1, 2)$  e  $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$  então

$$\theta((1, 2)\mathbf{H}) = \theta(\overline{(1, 2)\mathbf{H}}) = \overline{\frac{1 \ 3}{2}} = (1, 2)\overline{\frac{2 \ 3}{1}} = (1, 2)\theta(\mathbf{H}).$$

Portanto

$$\mathbb{C}\mathcal{H} \cong \mathbb{C}S. \quad (2.4)$$

Outro fato sobre os tablóides no conjunto  $S$  é que são completamente determinados pelos elementos localizados na segunda linha. Obtemos uma aplicação natural,  $\eta$ , entre as bases  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  para a representação definida e  $S$  por

$$\begin{aligned} \mathbf{1} & \xrightarrow{\eta} \overline{\frac{2 \ 3}{1}}, \\ \mathbf{2} & \xrightarrow{\eta} \overline{\frac{1 \ 3}{2}}, \\ \mathbf{3} & \xrightarrow{\eta} \overline{\frac{1 \ 2}{3}}. \end{aligned}$$

Agora estendendo  $\eta$  linearmente obtemos um  $G$ -isomorfismo de  $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  à  $\mathbb{C}S$ . Isso, em combinação com a Equação (2.4), mostra que  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  e  $\mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  são de fato equivalentes.

É importante destacar que o uso dos tablóides de Young não se restringe ao Exemplo 2.3. Veremos adiante que os tablóides de Young serão usados para construirmos todas as representações irredutíveis do  $S_n$ .

**Proposição 2.8.** Seja  $\theta : V \rightarrow W$  um  $G$ -homomorfismo. Então

1. O núcleo  $\ker \theta = \{v \in V : \theta(v) = 0\}$  é um  $G$ -submódulo de  $V$ , e
2. A imagem  $\operatorname{im} \theta = \{w \in W : w = \theta(v) \text{ para algum } v \in V\}$  é um  $G$ -submódulo de  $W$ .

*Demonstração.* Já sabemos que o núcleo  $\ker \theta$  é um subespaço de  $V$ . Vamos mostrar que é fechado sob a ação de  $G$ . Como  $\theta$  é um  $G$ -homomorfismo então, para qualquer  $g \in G$ ,  $\theta(g\mathbf{v}) = g\theta(\mathbf{v})$ . Se  $\mathbf{v} \in \ker \theta$  temos que  $g\theta(\mathbf{v}) = g\mathbf{0} = \mathbf{0}$  de onde concluímos que  $g\mathbf{v} \in \ker \theta$ . Se  $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} \theta$ ,  $\mathbf{w} = \theta(\mathbf{v})$  para algum  $v \in V$ , e então temos que  $g\mathbf{w} = g\theta(\mathbf{v}) = \theta(g\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} \theta$ .  $\square$

**Teorema 2.5.** [Lema de Schur] Sejam  $V$  e  $W$  dois  $G$ -módulos irredutíveis. Se  $\theta : V \rightarrow W$  é um  $G$ -homomorfismo então

1.  $\theta$  é um  $G$ -isomorfismo ou
2.  $\theta$  é a aplicação nula.

*Demonstração.* Como  $V$  é irredutível e, pela Proposição 2.8,  $\ker \theta$  é um submódulo de  $V$ , devemos ter que  $\ker \theta = \{\mathbf{0}\}$  ou  $\ker \theta = \{V\}$ . Analogamente, a irredutibilidade de  $W$  implica que ou  $\text{Im } \theta = \{\mathbf{0}\}$  ou  $\text{Im } \theta = \mathbf{W}$ . Se  $\ker \theta = V$  ou  $\text{Im } \theta = \{\mathbf{0}\}$  então  $\theta$  deve ser a aplicação nula. Por outro lado, se  $\ker \theta = \{\mathbf{0}\}$  ou  $\text{Im } \theta = \mathbf{W}$  então temos um isomorfismo.  $\square$

**Corolário 2.6.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas matrizes de representações irredutíveis de  $G$ . Se  $T$  é qualquer matriz tal que  $TX(g) = Y(g)T$  para todo  $g \in G$  então

1.  $T$  é invertível ou
2.  $T$  é a matriz nula.

**Corolário 2.7.** Sejam  $V$  e  $W$  dois  $G$ -módulos com  $V$  irredutível. Então  $\dim \text{Hom}(V, W) = 0$  se, e somente se  $W$  não contém submódulos isomorfos a  $V$ .

*Demonstração.* Seja  $W$  um  $G$ -módulo não nulo. Se  $W$  contém algum submódulo isomorfo a  $V$  então, pelo Lema 2.1, temos que esse módulo é irredutível. Segue pelo Lema de Schur que  $\dim \text{Hom}(V, W) \neq 0$ . Agora, se  $W$  não contém submódulos isomorfos a  $V$ . Pelo Teorema de Mascke,  $W = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}$ , onde cada  $W^{(i)}$  é um  $G$ -submódulo irredutível de  $W$ . Se  $W$  não contém submódulos isomorfos a  $V$ , temos que  $W^{(i)} \not\cong V$  para todo  $i$  e, pelo Teorema de Schur, temos que  $\dim \text{Hom}(V, W^{(i)}) = 0$ . Estendendo para  $W$  concluímos que  $\dim \text{Hom}(V, W) = 0$ .  $\square$

**Corolário 2.8.** Seja  $X$  uma matriz de uma representação irredutível de  $G$  sobre os números complexos. Então as únicas matrizes  $T$  que comutam com  $X(g)$  para todo  $g \in G$  são aquelas da forma  $T = cI$ , isto é, são múltiplas da matriz identidade.

*Demonstração.* Suponha que  $T$  é uma matriz tal que

$$TX(g) = X(g)T,$$

para todo  $g \in G$ . Segue que

$$(T - cI)X = X(T - cI),$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $c \in \mathbb{C}$ . Como  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, podemos tomar  $c$  sendo um autovalor de  $T$ . Portanto, tomando  $X = Y$ , temos que  $T - cI$  satisfaz a hipótese do Corolário 2.6 e não é invertível pela escolha de  $c$ . Segue que  $T - cI = 0$ .  $\square$

**Corolário 2.9.** Se  $X$  e  $Y$  forem representações irredutíveis equivalentes correspondentes aos  $G$ -módulos  $V$  e  $W$ , respectivamente, então  $\dim \text{Hom}(X, Y) = 1$ .



*Demonstração.* De fato, sejam  $S, T \in \text{Hom}(X, Y)$ , com  $S, T \neq 0$ . Pelo Lema de Schur, temos que  $S$  e  $T$  são inversíveis. Temos que  $S^{-1}T \in \text{Hom}(X, X) = cI$ , pelo Corolário 2.8, isto implica que  $S^{-1}T = cI$ , ou seja,  $T = cS$ .  $\square$

**Proposição 2.9.** Toda representação irredutível de um grupo abeliano é uni-dimensional.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grupo abeliano e  $X : G \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{C})$  uma representação matricial irredutível de  $G$  correspondente a  $V$ . Fixe  $h \in G$  e denote  $T = X(h)$ . Segue que para todo  $g \in G$

$$TX(g) = X(h)X(g) = X(hg) = X(g)T.$$

Pelo Corolário 2.8,  $T \in \text{Hom}_G(X, X) = c_h I$ , para algum  $c_h \in \mathbb{C}$ . Seja  $v \in V, v \neq 0$  e  $k \in \mathbb{C}$ , então,  $X(h)(kv) = c_h I(kv) = (c_h k)v$ . Segue que  $\mathbb{C}v$  é  $G$ -invariante, pois  $h$  é arbitrário. Pela irredutibilidade,  $V = \mathbb{C}v$  e  $\dim V = 1$ .  $\square$

## 2.2.4 PRODUTO TENSORIAL

**Definição 2.18.** Sejam as matrizes  $X = (x_{i,j})$  e  $Y$ . Então seu *produto tensorial* é a matriz em blocos

$$X \otimes Y = (x_{i,j}Y) = \begin{pmatrix} x_{1,1}Y & x_{1,2}Y & \dots \\ x_{2,1}Y & x_{2,2}Y & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.19.** Dados os espaços vetoriais  $V$  e  $W$  então seu *produto tensorial* é o conjunto

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{i,j} c_{i,j} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j : c_{i,j} \in \mathbb{C}, \mathbf{v}_i \in V, \mathbf{w}_j \in W \right\}$$

sujeito às relações

$$(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} = c_1(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}) + c_2(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}) \text{ e} \\ \mathbf{v} \otimes (d_1 \mathbf{w}_1 + d_2 \mathbf{w}_2) = d_1(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1) + d_2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2).$$

Temos que  $V \otimes W$  é um espaço vetorial. Se  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  e  $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_f\}$  são bases para  $V$  e  $W$ , respectivamente, então o conjunto

$$\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j : 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq f\}$$

é uma base para  $V \otimes W$ . Isso dá uma conexão com a definição de produto tensorial de matrizes. Seja  $\text{Mat}_d$  o conjunto de todas matrizes  $d \times d$  com entradas em  $\mathbb{C}$ . A álgebra das matrizes  $\text{Mat}_d$  tem como base o conjunto

$$\mathcal{B} = \{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq d\},$$

onde  $E_{i,j}$  é a matriz de zeros com exatamente um 1 na posição  $(i, j)$ . Então se  $X = (x_{i,j}) \in \text{Mat}_d$  e  $Y = (y_{k,l}) \in \text{Mat}_f$  então, pelo fato de que  $\otimes$  é linear, temos que

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= \left( \sum_{i,j=1}^d x_{i,j} E_{i,j} \right) \otimes \left( \sum_{k,l=1}^f y_{k,l} E_{k,l} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \sum_{k,l=1}^f x_{i,j} y_{k,l} (E_{i,j} \otimes E_{k,l}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mas se  $E_{i,j} \otimes E_{k,l}$  representa a  $(k, l)$ -ésima posição do  $(i, j)$ -ésimo bloco de uma matriz, então a Equação 2.5 diz que a correspondente entrada para  $X \otimes Y$  deveria ser  $x_{i,j} y_{k,l}$ , concordando com a definição matricial.

**Lema 2.2.** Suponha  $A, X \in \text{Mat}_d$  e  $B, Y \in \text{Mat}_f$ . Então

1.  $(A \oplus B)(X \oplus Y) = AX \oplus BY$ ,
2.  $(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX \otimes BY)$ .

## 2.2.5 ÁLGEBRA DE COMUTADORES E ÁLGEBRA DE ENDOMORFISMOS

**Definição 2.20.** Dada uma representação matricial  $X : G \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{C})$ , a correspondente *álgebra de comutadores* é

$$\text{Com}X = \{T \in \text{Mat}_d : TX(g) = X(g)T \text{ para todo } g \in G\}$$

Dado um  $G$ -módulo  $V$ , a correspondente álgebra de endomorfismos é.

$$\text{End}V = \{\theta : V \rightarrow V : \theta \text{ é um } G\text{-homomorfismo}\}$$

A álgebra de comutadores e a álgebra de endomorfismos satisfazem os axiomas para uma álgebra. Se  $V$  é um  $G$ -módulo e  $X$  é sua a correspondente representação matricial, tome uma base  $\mathcal{B}$  para produzir  $X$  e a aplicação que envia cada  $\theta \in \text{End} V$  para a matriz  $T$  de  $\theta$  na base  $B$ , então  $\text{End} V$  e  $\text{Com} X$  são álgebras isomorfas.

Agora iremos calcular  $\text{Com} X$  para varias representações  $X$ .

Suponha que  $X$  é uma representação matricial tal que

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} & 0 \\ 0 & X^{(2)} \end{pmatrix} = X^{(1)} \oplus X^{(2)}$$

onde  $X^{(1)}, X^{(2)}$  são representações irredutíveis e inequivalentes de graus  $d_1, d_2$ , respectivamente. Suponha que

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz particionada da mesma maneira que  $X$ . Se  $TX = XT$  então segue que

$$\begin{pmatrix} T_{1,1}X^{(1)} & T_{1,2}X^{(2)} \\ T_{2,1}X^{(1)} & T_{2,2}X^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)}T_{1,1} & X^{(1)}T_{1,2} \\ X^{(2)}T_{2,1} & X^{(2)}T_{2,2} \end{pmatrix}$$

e igualando os blocos correspondentes obtemos

$$\begin{aligned} T_{1,1}X^{(1)} &= X^{(1)}T_{1,1}, \\ T_{1,2}X^{(2)} &= X^{(1)}T_{1,2}, \\ T_{2,1}X^{(1)} &= X^{(2)}T_{2,1}, \\ T_{2,2}X^{(2)} &= X^{(2)}T_{2,2}. \end{aligned}$$

Usando os Corolários 2.6 e 2.8 juntamente com o fato de que  $X^{(1)}$  e  $X^{(2)}$  são inequivalentes, temos que

$$T_{1,1} = c_1 I_{d_1}, \quad T_{1,2} = T_{2,1} = 0, \quad T_{2,2} = c_2 I_{d_2},$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  e  $I_{d_1}, I_{d_2}$  são matrizes identidades de graus  $d_1, d_2$ . Portanto

$$T = \begin{pmatrix} c_1 I_{d_1} & 0 \\ 0 & c_2 I_{d_2} \end{pmatrix}.$$

Isto é, quando  $X = X^{(1)} \oplus X^{(2)}$  com  $X^{(1)} \not\cong X^{(2)}$  e irredutíveis temos

$$\text{Com } X = \{c_1 I_{d_1} \oplus c_2 I_{d_2} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

onde  $d_1 = \deg X^{(1)}, d_2 = \deg X^{(2)}$ .

Em geral, se  $X = \bigoplus_{i=1}^k X^{(i)}$ , onde os  $X^{(i)}$  são dois a dois inequivalentes, então, por um argumento similar. Temos que

$$\text{Com } X = \{\bigoplus_{i=1}^k c_i I_{d_i} : c_i \in \mathbb{C}\}, \quad (2.6)$$

onde  $d_i = \deg X^{(i)}$ . Note que grau de  $X$  é  $\sum_{i=1}^k d_i$  e que a dimensão da  $\text{Com } X$  como um espaço vetorial é  $k$ , pois, apenas os  $k$  escalares  $c_i$  variam, enquanto que as matrizes identidades são fixas.

Em seguida, lidamos com o caso de somas de representações equivalentes. Uma notação conveniente é

$$mX = \overbrace{X \oplus X \oplus \dots \oplus X}^m,$$

onde o inteiro não negativo  $m$  é chamado de *multiplicidade de  $X$* .

Suponha que

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} & 0 \\ 0 & X^{(1)} \end{pmatrix} = 2X^{(1)}$$

onde  $X^{(1)}$  é uma representação matricial irredutível de grau  $d$ . Tome  $T$  particionada como anteriormente. Fazendo a multiplicação em  $TX = XT$  e igualando blocos correspondentes obtemos quatro equações, todas da forma

$$T_{i,j}X^{(1)} = X^{(1)}T_{i,j},$$

para todo  $i, j = 1, 2$ . Pelos Corolários 2.6 e 2.8, temos que para todo  $i$  e  $j$ ,

$$T_{i,j} = c_{i,j}I_d,$$

onde  $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ . Portanto, nesse caso a álgebra de comutadores é

$$\text{Com } X = \left\{ \begin{pmatrix} c_{1,1}I_d & c_{1,2}I_d \\ c_{2,1}I_d & c_{2,2}I_d \end{pmatrix} : c_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ para todo } i, j \right\} \quad (2.7)$$

Agora utilizando a Definição 2.18, podemos escrever os elementos de (2.7) como

$$T = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} \otimes I_d,$$

e então  $\text{Com } X = \{M_2 \otimes I_d : M_2 \in \text{Mat}_2\}$ .

De modo geral, se tomarmos  $X = mX^{(1)}$ , então

$$\text{Com } X = \{M_m \otimes I_d : M_m \in \text{Mat}_m\}, \quad (2.8)$$

onde  $d$  é o grau de  $X^{(1)}$ . Calculando os graus e dimensões, obtemos

$$\deg X = \deg mX^{(1)} = m \deg X^{(1)} = md$$

e

$$\dim(\text{Com } X) = \dim\{M_m : M_m \in \text{Mat}_m\} = m^2.$$

Finalmente, vamos considerar o caso mais geral:

$$X = m_1X^{(1)} \oplus m_2X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_kX^{(k)} \quad (2.9)$$

onde os  $X^{(i)}$  são irredutíveis e dois a dois inequivalentes com  $\deg X^{(i)} = d_i$ . O grau de  $X$  é dado por

$$\deg X = \sum_{i=1}^k \deg(m_iX^{(i)}) = m_1d_1 + m_2d_2 + \dots + m_kd_k.$$

Combinando (2.6) e (2.8) obtemos

$$\text{Com } X = \left\{ \bigoplus_{i=1}^k (M_{m_i} \otimes I_{d_i}) : M_{m_i} \in \text{Mat } m_i \text{ para todo } i \right\} \quad (2.10)$$

de dimensão

$$\dim(\text{Com } X) = \dim\left\{ \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i} : M_{m_i} \in \text{Mat } m_i \right\} = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2. \quad (2.11)$$

Vamos considerar o *centro* de  $\text{Com } X$ . O *centro* de uma álgebra  $A$  é

$$Z_A = \{a \in A : ab = ba \text{ para todo } b \in A\}.$$

Vamos agora calcular o centro de uma álgebra matricial.

**Proposição 2.10.** O *centro* de  $\text{Mat}_d$  é  $Z_{\text{Mat}_d} = \{cI_d : c \in \mathbb{C}\}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $C \in Z_{\text{Mat}_d}$ . Em particular,

$$CE_{i,i} = E_{i,i}C \quad (2.12)$$

para todo  $i$ . Mas  $CE_{i,i}$  (respectivamente,  $E_{i,i}C$ ) tem entradas todas zeros exceto para a  $i$ -ésima coluna (respectivamente, linha), que é a mesma coluna que  $C$  (respectivamente, linha). Portanto a Equação (2.12) implica que todos elementos fora da diagonal de  $C$  devem ser 0. Similarmente, se  $i \neq j$ , então  $C(E_{i,j} + E_{j,i}) = (E_{i,j} + E_{j,i})C$ , onde a multiplicação da esquerda (respectivamente, direita) troca colunas (respectivamente, linhas)  $i$  e  $j$  de  $C$ . Segue que todos os elementos da diagonal devem ser iguais e então  $C = cI_d$  para algum  $c \in \mathbb{C}$ . Finalmente todas essas matrizes comutam com qualquer outra matriz.  $\square$

Considere  $C \in Z_{\text{Com } X}$ , onde  $X$  e  $\text{Com } X$  são dados por (2.9) e (2.10), respectivamente. Então

$$CT = TC \text{ para todo } T \in \text{Com } X, \quad (2.13)$$

onde  $T = \bigoplus_{i=1}^k (M_{m_i} \otimes I_{d_i})$  e  $C = \bigoplus_{i=1}^k (C_{m_i} \otimes I_{d_i})$ . Calculando o lado esquerdo usando o Lema 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} CT &= \left( \bigoplus_{i=1}^k C_{m_i} \otimes I_{d_i} \right) \left( \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i} \otimes I_{d_i} \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^k (C_{m_i} \otimes I_{d_i}) (M_{m_i} \otimes I_{d_i}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^k (C_{m_i} M_{m_i} \otimes I_{d_i}). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$TC = \bigoplus_{i=1}^k (M_{m_i} C_{m_i} \otimes I_{d_i}).$$

Portanto a equação (2.13) vale se, e somente se,

$$C_{m_i}M_{m_i} = M_{m_i}C_{m_i} \text{ para todo } M_{m_i} \in \text{Mat}_{m_i}.$$

Mas isso significa que  $C_{m_i}$  está no centro de  $\text{Mat}_{m_i}$ . Pela Proposição 2.10 isto é equivalente a  $C_{m_i} = c_i I_{m_i}$ , para algum  $c_i \in \mathbb{C}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} C &= \bigoplus_{i=1}^k c_i I_{m_i} \otimes I_{d_i} \\ &= \bigoplus_{i=1}^k c_i I_{m_i d_i} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 I_{m_1 d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 I_{m_2 d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_k I_{m_k d_k} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e todos os membros de  $Z_{\text{Com } X}$  tem essa forma e  $\dim Z_{\text{Com } X} = k$ .

Como um exemplo, seja

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & X^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & X^{(2)} \end{pmatrix} = 2X^{(1)} \oplus X^{(2)},$$

onde  $\deg X^{(1)} = 3$  e  $\deg X^{(2)} = 4$ . Então as matrizes  $T \in \text{Com } X$  são da forma

$$T = \left( \begin{array}{ccc|ccc|cccc} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right),$$

onde  $a, b, c, d, x \in \mathbb{C}$  e  $\dim(\text{Com } X) = m_1^2 + m_2^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ .

Os elementos  $C \in Z_{\text{Com } X}$  são

$$C = \left( \begin{array}{ccc|ccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right)$$

onde  $a, x \in \mathbb{C}$ . A dimensão é o número de diferentes componentes irredutíveis de  $X$ , nesse caso 2, ou seja,  $\dim Z_{\text{Com } X} = 2$ .

Em suma, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.10.** Seja  $X$  uma representação matricial de  $G$  tal que

$$X = m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)},$$

onde os  $X^{(i)}$  são inequivalentes, irredutíveis e  $\deg X^{(i)} = d_i$ . Então

1.  $\deg X = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_k d_k$ ,
2.  $\text{Com } X = \{\oplus_{i=1}^k (M_{m_i} \otimes I_{d_i}) : M_{m_i} \in \text{Mat}_{m_i} \text{ para todo } i\}$ ,
3.  $\dim(\text{Com } X) = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$ ,
4.  $Z_{\text{Com } X} = \{\oplus_{i=1}^k c_i I_{m_i} d_i : c_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i\}$  e
5.  $\dim Z_{\text{Com } X} = k$ .

Seja uma representação  $Y$  que não é decomposta em irredutíveis, pela versão matricial do Teorema de Maschke, Corolário 2.4,  $Y$  é equivalente a uma representação  $X$  de forma dada pela Equação 2.9. Se  $Y = R X R^{-1}$  para alguma matriz fixa  $R$ , então a aplicação  $T \rightarrow R T R^{-1}$  é um isomorfismo de álgebra e seus centros também são isomorfos. Então o Teorema 2.10 continua válido com todas as igualdades substituídas por isomorfismos.

Existe uma versão para módulos desse resultado. Vamos usar a notação de multiplicidade para  $G$ -módulos da mesma maneira que nós usamos para matrizes.

**Teorema 2.11.** Seja  $V$  um  $G$ -módulo tal que

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k V^{(k)},$$

onde os  $V^{(i)}$  são dois a dois irredutíveis, inequivalentes e  $\dim V^{(i)} = d_i$ . Então

1.  $\dim V = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_k d_k$ ,
2.  $\text{End } V \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Mat}_{m_i}$ ,
3.  $\dim(\text{End } V) = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$ ,
4.  $Z_{\text{End } V}$  é isomorfo à álgebra de matrizes diagonais de grau  $k$ , e
5.  $\dim Z_{\text{End } V} = k$ .

**Proposição 2.11.** Sejam  $V$  e  $W$  dois  $G$ -módulos com  $V$  irredutível. Então  $\dim \text{Hom}(V, W)$  é a multiplicidade de  $V$  em  $W$ .

*Demonstração.* Seja  $W$  um  $G$ -módulo não nulo. Podemos escrever  $W = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}$ , onde cada  $W^{(i)}$  é um  $G$ -módulo irredutível. Temos que  $\text{Hom}(V, W) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Hom}(V, W^{(i)})$ . Pelo Lema de Schur 2.5, temos que  $\dim \text{Hom}(V, W^{(i)}) = 0$  se  $V \not\cong W^{(i)}$ . Agora, se  $V \cong W^{(i)}$ , pelo Corolário 2.9, segue que  $\dim \text{Hom}(V, W^{(i)}) = 1$ . Logo

$$\dim \text{Hom}(V, W) = \sum_{i=1}^k \dim \text{Hom}(V, W^{(i)}) = \sum_{i=1}^{m_i} \dim \text{Hom}(V, W^{(i)}) = m_i. \quad \square$$

## 2.2.6 CARACTERES DE GRUPO

Nessa seção vamos definir o conceito de carácter de uma representação e veremos algumas propriedades da função carácter. Alguns resultados mostram como essa função é útil para determinar representações irredutíveis e obter decomposições de representações arbitrárias.

**Definição 2.21.** Seja  $X(g)$ ,  $g \in G$ , uma representação matricial. O *carácter* de  $X$  é

$$\begin{aligned} \chi : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi(g) = \text{tr } X(g), \end{aligned}$$

onde  $\text{tr}$  denota o traço de uma matriz. Se  $V$  é um  $G$ -módulo, então seu carácter é o carácter da representação matricial  $X$  correspondente a  $V$ .

O carácter de uma representação irredutível é chamado carácter irredutível. Note-mos que o traço de uma matriz não depende da escolha da base uma vez que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . Sejam  $X$  e  $Y$  representações matriciais ambas correspondentes a  $V$ . Então  $Y = TXT^{-1}$  para algum  $T \in \text{Mat}_d$  fixo. Portanto, para todo  $g \in G$ ,  $\text{tr } Y(g) = \text{tr } TX(g)T^{-1} = \text{tr } X(g)$ . Então  $X$  e  $Y$  tem o mesmo carácter.

Suponha que  $G$  é arbitrário e  $X$  é uma representação de grau 1. Então o carácter  $\chi(g)$  é a única entrada de  $X(g)$  para cada  $g \in G$ . O carácter da representação coincide com a representação, ou seja,  $\chi = X$ . Tais caracteres são chamados de *caracteres lineares*.



**Exemplo 2.23.** Considerando a representação definida de  $S_n$  com seu carácter  $\chi^{\text{def}}$ . Se tomarmos  $n = 3$  então podemos computar os valores do carácter tomando os traços das matrizes no Exemplo 2.8

$$\begin{aligned}\chi^{\text{def}}((1)(2)(3)) &= 3, & \chi^{\text{def}}((1, 2)(3)) &= 1, & \chi^{\text{def}}((1, 3)(2)) &= 1, \\ \chi^{\text{def}}((1)(2, 3)) &= 1, & \chi^{\text{def}}((1, 2, 3)) &= 0, & \chi^{\text{def}}((1, 3, 2)) &= 0.\end{aligned}$$

Em geral, se  $\pi \in S_n$ , então  $\chi^{\text{def}}(\pi)$  é o número de 1 na diagonal de  $X(\pi)$ , isto é, o número de pontos fixos de  $\pi$ .

Agora, seja  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  e considere a representação regular com o módulo  $V = \mathbb{C}[G]$  e carácter  $\chi^{\text{reg}}$ . Temos que  $X(e) = I_n$  e então  $\chi^{\text{reg}}(e) = |G|$ . Para calcular os valores dos caracteres para  $g \neq e$ , vamos usar matrizes decorrentes da base padrão  $\mathcal{B} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$ . Note que  $X(g)$  é a matriz de permutação para a ação de  $g$  em  $\mathcal{B}$  e, portanto,  $\chi^{\text{reg}}(g)$  é o número de pontos fixos por essa ação. Mas, se  $g\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i$  para qualquer  $i$ , então devemos ter  $g = e$ , o que não ocorre. Logo não há pontos fixos se  $g \neq e$ . Resumindo,

$$\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = e, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora provaremos algumas propriedades elementares dos caracteres.

**Proposição 2.12.** Seja  $X$  uma representação matricial de um grupo  $G$  de grau  $d$  com carácter  $\chi$ .

1.  $\chi(e) = d$ .
2. Se  $K$  é uma classe de conjugação de  $G$ , então

$$g, h \in K \Rightarrow \chi(g) = \chi(h).$$

3. Se  $Y$  é uma representação de  $G$  com carácter  $\psi$  então

$$X \cong Y \Rightarrow \chi(g) = \psi(g)$$

para todo  $g \in G$ .

*Demonstração.* 1. Como  $X(e) = I_d$ , então  $\chi(e) = \text{tr} I_d = d$ .

2. Por hipótese  $g = khk^{-1}$ , então  $\chi(g) = \text{tr} X(g) = \text{tr} X(k)X(h)X(k)^{-1} = \text{tr} X(h) = \chi(h)$ . Temos então que  $\chi$  é constante nas classes de conjugação de  $G$ .

3. Essa afirmação diz que representações equivalentes têm o mesmo carácter. Sejam  $X$  e  $Y$  representações equivalentes, existe  $T$  fixa tal que  $Y = TXT^{-1}$ , portanto para todo  $g \in G$ ,  $\chi^X(g) = \text{tr}X(g) = \text{tr}(TXT^{-1}) = \text{tr}Y(g) = \chi^Y(g)$ .  $\square$

Veremos que vale a recíproca do item 3: se duas representações têm o mesmo carácter então elas devem ser equivalentes. Esse resultado será provado mais adiante no Corolário 2.13.

**Definição 2.22.** Uma *função de classe* de um grupo  $G$  é uma aplicação  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(g) = f(h)$  sempre que  $g$  e  $h$  estão na mesma classe de conjugação. O conjunto de todas funções de classe em  $G$  é denotado por  $R(G)$ .

Como o carácter de uma representação é uma função que é constante nas classes de conjugação então ele é uma função de classe. Temos que  $R(G)$ , munido da adição e da multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Além disto,  $R(G)$  tem uma base natural consistindo das funções que têm o valor 1 em uma dada classe de conjugação e 0 fora dela. Portanto a  $\dim R(G)$  é o número de classes de conjugação de  $G$ . Se  $K$  é uma classe de conjugação e  $\chi$  é um carácter então podemos definir  $\chi_K$  como o valor de um dado carácter em um dada classe, ou seja,  $\chi_K = \chi(g)$  para qualquer  $g \in K$ .

**Definição 2.23.** Seja  $G$  um grupo. A *tabela de caracteres de  $G$*  é uma tabela com linhas indexadas pelos caracteres irredutíveis não equivalentes de  $G$  e colunas indexadas pelas classes de conjugação. A entrada da tabela na linha  $\chi$  e coluna  $K$  é  $\chi_K$ :

	... $K$ ...
$\vdots$	$\vdots$
$\chi$	... $\chi_K$
$\vdots$	

Por convenção, a primeira linha corresponde ao carácter trivial e a primeira coluna corresponde a classe da identidade,  $K = \{e\}$ .

Provaremos na Seção 2.2.8 que o número de representações irredutíveis e inequivalentes de  $G$  é igual ao número de classes de conjugação. Disto segue que a tabela de caracteres é sempre quadrada.

Recordando que uma classe de conjugações em  $S_n$  consiste de todas permutações de mesmo tipo cíclico. Em particular, para  $S_3$ , temos três classes de conjugação,  $K_1 = \{e\}$ ,  $K_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$  e  $K_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ . Portanto assumindo o resultado da Proposição 2.14, existem três representações irredutíveis de  $S_3$ . Já encontramos duas delas, a representação trivial e a representação sinal.

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$			

Nós conseguiremos encontrar o terceiro carácter utilizando o produto interno de caracteres que definiremos na próxima seção.

Se  $G$  é um grupo abeliano com  $n$  elementos então cada elemento de  $G$  é o representante de uma classe de conjugação distinta. Como temos  $n$  classes de conjugação devemos ter  $n$  representações irredutíveis e inequivalentes de  $G$ . Pela Proposição 2.9 essas representações irredutíveis têm grau 1.

### 2.2.7 PRODUTO INTERNO DE CARACTERES

O produto interno de caracteres é uma ferramenta muito importante. Trata-se de um método simples que nos permite determinar quando uma representação é irredutível. Além disso, é utilizado para mostrar que o número de irredutíveis é igual ao número de classes de conjugação. Por fim, pode ser empregado para provar que a igualdade de caracteres implica equivalência de representações.

Vamos denotar por  $L(G)$  o conjunto de todas as funções de  $G$  em  $\mathbb{C}$  que é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  que pode ser munido com um produto interno definido por,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}.$$

onde a barra significa conjugação complexa. De fato, temos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno.

1. Sejam  $\alpha, \beta \in L(G)$ :

$$\overline{\langle \beta, \alpha \rangle} = \overline{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \beta(g) \overline{\alpha(g)}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\beta(g)} \alpha(g) = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

2. Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in L(G)$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha + \gamma, \beta \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\alpha + \gamma)(g) \overline{\beta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} + \gamma(g) \overline{\beta(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \left( \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} + \sum_{g \in G} \gamma(g) \overline{\beta(g)} \right) \\ &= \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \gamma, \beta \rangle. \end{aligned}$$

3. Para  $\alpha, \beta \in L(G)$  e  $k \in \mathbb{C}$ :

$$\langle k\alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k\alpha(g) \overline{\beta(g)} = k \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} = k \langle \alpha, \beta \rangle.$$

4. Seja  $\alpha \in L(G)$  não nula:

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\alpha(g)} > 0.$$

Em particular definimos o produto interno de caracteres. Sejam  $\chi$  e  $\psi$  dois caracteres de um grupo  $G$  ao números complexos  $\mathbb{C}$ . O produto interno de  $\chi$  e  $\psi$  é

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Veremos na seguinte proposição uma definição alternativa que nos será mais útil.

**Proposição 2.13.** Sejam  $\chi$  e  $\psi$  caracteres. Então

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

*Demonstração.* Suponha que  $V$  é um  $G$ -módulo com carácter  $\psi$ . Na prova do Teorema de Maschke, vimos que existe um produto interno de  $V$  em  $V$  que é invariante sob a ação de  $G$ . Escolhendo uma base ortonormal para  $V$ , obtemos uma representação matricial  $Y$  para  $\psi$ , onde cada  $Y(g)$  é unitária, isto é,  $Y(g^{-1}) = Y(g)^{-1} = \overline{Y(g)}^t$ , onde  $t$  denota transposta. Então  $\overline{\psi(g)} = \text{tr} \overline{Y(g)} = \text{tr} Y(g^{-1})^t = \text{tr} Y(g^{-1}) = \psi(g^{-1})$ . O resultado é obtido substituindo esse resultado no produto interno.  $\square$

Sempre que  $\chi$  e  $\psi$  são constantes nas classes de conjugação de  $G$ , podemos escrever

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_K |K| \chi_K \overline{\psi_K},$$

onde a soma é sobre todas classes de conjugação de  $G$ .

Vamos reformular o Lema de Schur no contexto dos caracteres. Veremos agora que os caracteres irredutíveis são ortonormais com respeito ao produto interno.

**Teorema 2.12.** Sejam  $\chi$  e  $\psi$  caracteres irredutíveis de um grupo  $G$ . Então

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$$

*Demonstração.* Suponha que  $\chi, \psi$  são caracteres das representações matriciais  $A, B$  de graus  $d, f$ , respectivamente. Seja  $X = (x_{i,j})$  uma matriz  $d \times f$  com entradas  $x_{i,j}$  e considere a matriz

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) X B(g^{-1}). \quad (2.14)$$

Afirmamos que  $A(h)Y = YB(h)$  para todo  $h \in G$ . De fato,

$$\begin{aligned} A(h)YB(h^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(h)A(g)XB(g^{-1})B(h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(hg)XB(g^{-1}h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{l \in G \\ l=hg}} A(l)XB(l^{-1}) \\ &= Y, \end{aligned}$$

Portanto, pelos Corolários 2.6 e 2.8,

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } A \not\cong B, \\ cI_d & \text{se } A \cong B. \end{cases} \quad (2.15)$$

Considere o primeiro caso onde  $\chi \neq \psi$ , para que  $A$  e  $B$  sejam inequivalentes. Isto implica que  $y_{i,j} = 0$  para todo elemento de  $Y$ . Assim, tomamos a entrada  $(i, j)$  da Equação (2.14) para obter

$$\frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)x_{k,l}b_{l,j}(g^{-1}) = 0$$

para todo  $i, j$ . Se este polinômio é zero, os coeficientes de cada  $x_{k,l}$  devem ser também zero. Então

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)b_{l,j}(g^{-1}) = 0$$

para todo  $i, j, k, l$ . Note que essa última equação pode ser reescrita como

$$\langle a_{i,k}, b_{l,j} \rangle' = 0 \text{ para todo } i, j, k, l \quad (2.16)$$

uma vez que nossa definição de produto interno se aplica a todas funções de  $G$  a  $\mathbb{C}$ .

Agora,

$$\chi = \text{tr}A = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{d,d} \quad , \quad \psi = \text{tr}B = b_{1,1} + b_{2,2} + \dots + b_{f,f}$$

de onde segue que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle' = \sum_{i,j} \langle a_{i,i}, b_{j,j} \rangle' = 0.$$

Agora suponha que  $\chi = \psi$ . Como estamos apenas interessados nos valores dos caracteres, também podemos tomar  $A = B$ . Pela Equação (2.15), existe um escalar  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $y_{i,j} = c\delta_{i,j}$ . Então, como no parágrafo anterior, temos  $\langle a_{i,k}, a_{l,j} \rangle' = 0$  quando  $i \neq j$ . Para o caso  $i = j$ , considere

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g)XA(g^{-1}) = cI_d$$

e tomando o traço em ambos os lados temos

$$\begin{aligned} cd &= \text{tr } cI_d = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } A(g)XA(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } X = \text{tr } X. \end{aligned}$$

Portanto  $y_{i,i} = c = \frac{1}{d} \text{tr } X$  o qual pode ser reescrito como

$$\frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)x_{k,l}a_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d}(x_{1,1} + x_{2,2} + \dots + x_{d,d}).$$

Igualando os coeficientes de monômios semelhantes nessa equação temos

$$\langle a_{i,k}, a_{l,i} \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)a_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d} \delta_{k,l}. \quad (2.17)$$

Segue que

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j=1}^d \langle a_{i,i}, a_{j,j} \rangle' = \sum_{i=1}^d \langle a_{i,i}, a_{i,i} \rangle' = \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} = 1. \quad \square$$

As Equações (2.16) e (2.17) fornecem as relações de ortogonalidade para as entradas de uma matriz de uma representação.

O corolário a seguir nos permitirá relacionar representações e caracteres, permitindo comparar representações com respeito ao seus caracteres correspondentes.

**Corolário 2.13.** Seja  $X$  uma representação matricial de  $G$  com carácter  $\chi$ . Suponha

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)}$$

onde os  $X^{(i)}$  são irredutíveis e inequivalentes com caracteres  $\chi^{(i)}$ .

1.  $\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + \dots + m_k \chi^{(k)}$ .
2.  $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$  para todo  $j$ .
3.  $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$ .
4.  $X$  é irredutível se e somente se  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ .
5. Seja  $Y$  outra representação matricial de  $G$  com caracter  $\psi$ . Então

$$X \cong Y \text{ se e somente se } \chi(g) = \psi(g) \text{ para todo } g \in G.$$

*Demonstração.* 1. Como o traço de uma soma direta é a soma dos traços, vemos que

$$\chi = \text{tr } X = \text{tr } \bigoplus_{i=1}^k m_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^k m_i \chi^{(i)}.$$

2. Pelo Teorema 2.12,

$$\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = \left\langle \sum_i m_i \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \sum_i m_i \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = m_j.$$

3. Pelo Teorema 2.12,

$$\langle \chi, \chi \rangle = \left\langle \sum_i m_i \chi^{(i)}, \sum_j m_j \chi^{(j)} \right\rangle = \sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \sum_i m_i^2.$$

4. A afirmação que  $X$  é irredutível implica que  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  é parte das relações de ortogonalidade já provadas. Para o contrário, suponha que

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_i m_i^2 = 1.$$

Então deve haver exatamente um índice  $j$  tal que  $m_j = 1$  e todos os restantes  $m_i$  devem ser nulos. Assim,  $X = X^{(j)}$  que é irredutível.

5. A “ida” foi provada na parte 3 da Proposição 2.12. Para provar a “volta”, seja  $Y \cong \bigoplus_{i=1}^k n_i X^{(i)}$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que as decomposições de  $X$  e  $Y$  contenham os mesmos irredutíveis: qualquer irredutível encontrado em um mas não o outro pode ser inserido com multiplicidade 0. Como  $\chi = \psi$  segue que  $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \langle \psi, \chi^{(i)} \rangle$  para todo  $i$ . Então, pelo item 2 desse corolário,  $m_i = n_i$  para todo  $i$ . Portanto, as duas somas diretas são equivalentes, isto é,  $X \cong Y$ .  $\square$

**Exemplo 2.24.** Seja  $G = S_n$ , note que ambos  $\pi, \pi^{-1} \in S_n$  têm o mesmo tipo cíclico e eles portanto estão na mesma classe de conjugação. Se  $\chi$  é um carácter de  $S_n$ , como os caracteres são constantes nas classes de conjugação, então  $\chi(\pi) = \chi(\pi^{-1})$ . Segue que a fórmula do produto interno para  $S_n$  pode ser reescrita como

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi) \psi(\pi). \quad (2.18)$$

Em particular, Seja  $G = S_3$  e considere  $\chi = \chi^{\text{def}}$ . Como  $S_3$  tem três classes de conjugação, sabemos que  $S_3$  tem três caracteres irredutíveis  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$ , onde os dois primeiros caracteres  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$  são o carácter trivial e o carácter sinal, respectivamente. Pelo Teorema de Maschke, nós sabemos que

$$\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + m_3 \chi^{(3)}.$$

Para calcular  $m_1$  e  $m_2$  nós vamos utilizar a Equação (2.18) e a parte 2 do Corolário 2.13, lembrando que nós já encontramos os valores do carácter para  $\chi = \chi^{\text{def}}$  no Exemplo 2.23. Assim, temos que

$$m_1 = \langle \chi, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi) \chi^{(1)}(\pi) = \frac{1}{6} (3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 1,$$

$$m_2 = \langle \chi, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi) \chi^{(2)}(\pi) = \frac{1}{6} (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0.$$

Portanto

$$\chi = \chi^{(1)} + m_3\chi^{(3)}.$$

Nós já sabíamos que o carácter definido continha uma cópia do carácter trivial. Isso foi observado quando decompos as matrizes correspondentes a representação definida de  $S_3$  como  $X = A \oplus B$ , onde  $A$  era a matriz da representação trivial. As matrizes  $B$  correspondem a uma ou mais cópias do carácter  $\chi^{(3)}$ .

$$B(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B((1, 2)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B((1, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B((2, 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B((1, 2, 3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B((1, 3, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se consideramos  $\psi$  o carácter correspondente, então temos

$$\begin{aligned} \psi(e) &= 2, \\ \psi((1, 2)) &= \psi((1, 3)) = \psi((2, 3)) = 0, \\ \psi((1, 2, 3)) &= \psi((1, 3, 2)) = -1 \end{aligned}$$

Se  $\psi$  é irredutível, então  $m_3 = 1$  e nós encontramos  $\chi^{(3)}$ . Caso não, então  $\psi$  sendo de grau dois, deve conter duas cópias de  $\chi^{(3)}$ . Mas a Parte 4 do Corolário 2.13 torna mais fácil determinar a irredutibilidade; apenas calculando:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1.$$

Portanto a tabela completa de caracteres irredutíveis para  $S_3$  é

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

Em geral, o módulo definido para  $S_n$ ,  $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$ , sempre tem  $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \dots + \mathbf{n}\}$  como submódulo. Se  $\chi^{(1)}$  e  $\chi^\perp$  são os caracteres correspondentes a  $W$  e  $W^\perp$ , respectivamente, então  $V = W \oplus W^\perp$ . E podemos escrever isso como

$$\chi^{\text{def}} = \chi^{(1)} + \chi^\perp.$$

Nós sabemos que  $\chi^{\text{def}}$  conta os pontos fixos e que  $\chi^{(1)}$  é o carácter trivial. Portanto

$$\chi^\perp(\pi) = (\text{número de pontos fixos de } \pi) - 1$$

é também um carácter de  $S_n$  irredutível.



### 2.2.8 DECOMPOSIÇÃO DA ÁLGEBRA DE GRUPO

Nosso objetivo agora é decompor a álgebra de grupo em representações irredutíveis. Este processo nos permite obter o número de representações irredutíveis e inequivalentes de qualquer grupo.

Seja  $G$  um grupo com a álgebra de grupo  $\mathbb{C}[G]$  e carácter  $\chi = \chi^{\text{reg}}$ . Pelo Teorema de Maschke, podemos escrever

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}, \quad (2.19)$$

onde os  $V^{(i)}$  variam sobre todas representações irredutíveis e inequivalentes e apenas um número finito dos  $m_i$  são não nulos.

**Proposição 2.14.** Seja  $G$  um grupo finito e suponha  $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}$ , onde os  $V^{(i)}$  formam uma lista completa de  $G$ -módulos irredutíveis e inequivalentes. Então

1.  $m_i = \dim V^{(i)}$ ,
2.  $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$  e
3. o número de  $V^{(i)}$ 's é igual ao número de classes de conjugação de  $G$ .

*Demonstração.* 1. Se  $V^{(i)}$  tem carácter  $\chi^{(i)}$  então, pela Parte 2 do Corolário 2.13,

$$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)}(g^{-1}).$$

O carácter da representação regular é zero para  $g \neq e$  e  $\chi(e) = |G|$ . Portanto,

$$m_i = \frac{1}{|G|} \chi(e) \chi^{(i)}(e) = \dim V^{(i)} \quad (2.20)$$

pelo Item 1 da Proposição 2.12. Portanto todo  $G$ -módulo irredutível ocorre em  $\mathbb{C}[G]$  com multiplicidade igual a sua dimensão. Em particular, todos eles aparecem pelo menos uma vez e então a lista de  $G$ -módulos irredutíveis e inequivalentes deve ser finita, uma vez que a álgebra de grupo tem dimensão finita.

2. Segue pelo cálculo das dimensões em ambos os lados da Equação (2.19).
3. Pelo item 5 do Teorema 2.11, temos que o número de  $V^{(i)}$ 's é igual a  $\dim Z_{\text{End } \mathbb{C}[G]}$ .

Vamos agora descrever inicialmente os elementos de  $\text{End } \mathbb{C}[G]$ . Dado qualquer  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}[G]$ , defina a aplicação  $\phi_{\mathbf{v}} : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  pela multiplicação à direita por  $\mathbf{v}$ , isto é,  $\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{v}$ , para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}[G]$ . Segue que  $\phi_{\mathbf{v}} \in \text{End } \mathbb{C}[G]$ . Na verdade, esses são os únicos elementos de  $\text{End } \mathbb{C}[G]$ . Pois, afirmamos que  $\mathbb{C}[G] \cong \text{End } \mathbb{C}[G]$  como espaços vetoriais. Para ver isso, considere a aplicação  $\phi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End } \mathbb{C}[G]$

dada por  $\mathbf{v} \xrightarrow{\phi} \phi_{\mathbf{v}}$ . Temos que  $\phi$  é linear. Vamos mostrar que  $\phi$  é injetiva. Se  $\phi_{\mathbf{v}}$  é a aplicação nula então  $\mathbf{0} = \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ . Para mostrar que  $\phi$  é sobrejetiva, seja  $\theta \in \text{End } \mathbb{C}[\mathbf{G}]$ . Segue que  $\theta(\mathbf{e}) = \mathbf{v}$ , para algum  $\mathbf{v}$ . Segue que  $\theta = \phi_{\mathbf{v}}$ . Pois, dado qualquer  $g \in G$ ,  $\theta(\mathbf{g}) = \theta(g\mathbf{e}) = g\theta(\mathbf{e}) = g\mathbf{v} = \mathbf{g}\mathbf{v} = \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{g})$ . O resultado segue pelo fato de duas transformações lineares que coincidem numa base coincidem também fora dela.

Agora, em termos de álgebras, a aplicação  $\phi$  é um anti-isomorfismo, uma vez que ela reverte a ordem da multiplicação:  $\phi_{\mathbf{v}}\phi_{\mathbf{w}} = \phi_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$ , para todo  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}[\mathbf{G}]$ . Portanto,  $\phi$  induz um anti-isomorfismo dos centros de  $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$  e  $\text{End } \mathbb{C}[\mathbf{G}]$ , então temos que o número de  $V^{(i)}$  é igual a  $\dim Z_{\mathbb{C}[\mathbf{G}]}$ .

Para descobrir como é o centro da álgebra de grupo, considere qualquer  $\mathbf{z} = c_1\mathbf{g}_1 + \dots + c_n\mathbf{g}_n \in Z_{\mathbb{C}[\mathbf{G}]}$ , onde os  $g_i \in G$ . Agora, para todo  $h \in G$ , temos  $\mathbf{z}\mathbf{h} = \mathbf{h}\mathbf{z}$  que equivale a  $\mathbf{z} = \mathbf{h}\mathbf{z}\mathbf{h}^{-1}$ , que ainda pode ser escrito como

$$c_1\mathbf{g}_1 + \dots + c_n\mathbf{g}_n = c_1\mathbf{h}\mathbf{g}_1\mathbf{h}^{-1} + \dots + c_n\mathbf{h}\mathbf{g}_n\mathbf{h}^{-1}.$$

Mas como  $h$  assume todos os valores possíveis em  $G$ ,  $hg_1h^{-1}$  assume valores sobre a classe de conjugação de  $g_1$ . Desde que  $\mathbf{z}$  permanece invariante, todos os membros dessa classe devem ter o mesmo coeficiente escalar  $c_1$ . Portanto se  $G$  tem  $k$  classes  $K_1, \dots, K_k$ , tome

$$\mathbf{z}_i = \sum_{g \in K_i} \mathbf{g}$$

para  $i = 1, \dots, k$ . Assim, mostramos que qualquer  $\mathbf{z} \in Z_{\mathbb{C}[\mathbf{G}]}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{z}_i.$$

Considerações semelhantes mostram que vale a recíproca: qualquer combinação linear de  $\mathbf{z}_i$ 's está no centro de  $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ . Finalmente, note que o conjunto  $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$  forma uma base para  $Z_{\mathbb{C}[\mathbf{G}]}$ . Já mostramos que esse conjunto gera. Além disto, eles são linearmente independentes pois são somas sobre subconjuntos dois a dois disjuntos da base  $\{\mathbf{g} : g \in G\}$  de  $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ . Portanto o número de classes de conjugação de  $G$  é igual a  $\dim Z_{\mathbb{C}[\mathbf{G}]}$  que por sua vez é igual ao número de  $V^{(i)}$ .  $\square$

Por exemplo, no caso de  $G = S_3$ , pelo item 3 da Proposição 2.14, temos 3 representações irredutíveis uma vez que  $S_3$  tem 3 classes de conjugação. Além disto, estas representações tem graus 1, 1 e 2 que satisfazem  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$ , pelo Item 2 da Proposição 2.14.

**Proposição 2.15.** Os caracteres irredutíveis de um grupo  $G$  formam uma base ortonormal para o espaço das funções de classe  $R(G)$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.12, sabemos que os caracteres irreduzíveis são ortonormais com respeito a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $R(G)$ . Logo eles são linearmente independentes. Agora, a dimensão  $\dim R(G)$  é o número de classes de conjugação de  $G$  que, pela Parte 3 da Proposição 2.14, é igual ao número de caracteres irreduzíveis. Portanto eles são uma base.  $\square$

## 2.2.9 REPRESENTAÇÕES RESTRITAS E REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS

Dado um grupo  $G$  com um subgrupo  $H$ , vamos apresentar uma maneira de obter representações de  $G$  a partir das representações de  $H$  e representações de  $H$  a partir das representações de  $G$ .

**Definição 2.24.** Considere  $H \leq G$  e a representação matricial  $X$  de  $G$ . A *restrição* de  $X$  a  $H$ , denotada por  $X \downarrow_H^G$ , é dada por

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h)$$

para todo  $h \in H$ . Se  $X$  tem carácter  $\chi$  então denote o carácter de  $X \downarrow_H^G$  por  $\chi \downarrow_H^G$ .

Note que  $X \downarrow_H^G$  é uma representação de  $H$  e que, mesmo que  $X$  seja uma representação irreduzível de  $G$ ,  $X \downarrow_H^G$  não é necessariamente irreduzível em  $H$ . Por exemplo, suponha que  $X$  é uma representação matricial irreduzível de  $G$  de  $\deg X \geq 2$  e que  $H$  é um subgrupo de  $G$  abeliano. A restrição de  $X$  a  $H$  é uma representação redutível, pois, pela Proposição 2.9 toda representação irreduzível de um grupo abeliano tem grau 1.

**Definição 2.25.** Considere  $H \leq G$  e fixe  $t_1, \dots, t_l$  os representantes da classe lateral de  $H$  em  $G$ , isto é,  $G = t_1H \cup \dots \cup t_lH$ , onde a união é disjunta. Se  $Y$  é uma representação de  $H$ , então a correspondente *representação induzida*  $Y \uparrow_H^G$  atribui para cada  $g \in G$  a matriz em blocos

$$Y \uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1}gt_j)) = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_1^{-1}gt_j) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_2^{-1}gt_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1}gt_1) & Y(t_l^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_l^{-1}gt_j) \end{pmatrix},$$

onde  $Y(g)$  é a matriz nula se  $g \notin H$ .

Vamos omitir  $H$  na notação se não houver confusão e escreveremos apenas  $X \uparrow^G$ . Essa notação se aplica também para o carácter correspondente.

Seja  $G = S_3$  e consideres como no Exemplo 2.15,  $H = \{e, (2, 3)\}$  com  $G = H \cup (1, 2)H \cup (1, 3)H$ , onde a união é disjunta. Seja  $Y = 1$  a representação trivial de  $H$  e considere  $X = 1 \uparrow^G$ . Calculando a representação matricial para a transposição  $(1, 2)$ ,

temos

$$\begin{aligned}
Y(e^{-1}(1,2)e) &= Y((1,2)) = 0, & \text{pois } (1,2) \notin H \\
Y(e^{-1}(1,2)(1,2)) &= Y(e) = 1, & \text{pois } e \in H \\
Y(e^{-1}(1,2)(1,3)) &= Y((1,3,2)) = 0, & \text{pois } (1,3,2) \notin H \\
Y((1,2)(1,2)e) &= Y(e) = 1, \\
Y((1,2)(1,2)(1,2)) &= Y((1,2)) = 0, \\
Y((1,2)(1,2)(1,3)) &= Y((1,3)) = 0, & \text{pois } (1,3) \notin H \\
Y((1,3)(1,2)e) &= Y((1,2,3)) = 0, & \text{pois } (1,2,3) \notin H \\
Y((1,3)(1,2)(1,2)) &= Y((1,3)) = 0, \\
Y((1,3)(1,2)(1,3)) &= Y((2,3)) = 1, & \text{pois } (2,3) \in H
\end{aligned}$$

que fornece a matriz

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim como a restrição, a indução não preserva irreduzibilidade.

**Proposição 2.16.** Seja  $H \leq G$  um subgrupo de  $G$ . Sejam  $\{t_1, \dots, t_l\}$  o conjunto de representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$  e o conjunto das suas respectivas classes laterais  $\mathcal{H} = \{t_1H, \dots, t_lH\}$ . Então as matrizes de  $1 \uparrow_H^G$  são idênticas com as matrizes de  $G$  agindo na base  $\mathcal{H}$  para o módulo de classes laterais  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ .

*Demonstração.* Sejam  $X = (x_{i,j})$  e  $Y = (y_{i,j})$  as matrizes para  $1 \uparrow_H^G$  e  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ , respectivamente. Ambas matrizes contém apenas zeros e uns. Para qualquer  $g \in G$ , nós temos que  $x_{i,j}(g) = 1$  se, e somente se  $t_i^{-1}gt_j \in H$ , ou seja,  $gt_jH = t_iH$  que equivale a  $y_{i,j}(g) = 1$  na representação nas classes laterais. Portanto,  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  é um módulo para  $1 \uparrow_H^G$ .  $\square$

Falta apenas mostrar que as representações induzidas são de fato representações.

**Teorema 2.14.** Seja  $H \leq G$  um subgrupo de  $G$ . Suponha que  $\{t_1, \dots, t_l\}$  sejam os representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$ . Seja  $Y$  a representação matricial de  $H$ . Então  $X = Y \uparrow_H^G$  é uma representação de  $G$ .

*Demonstração.* Vamos provar que  $X(g)$  é sempre uma matriz de permutação em blocos, isto é, toda linha e coluna contém exatamente um bloco não nulo  $Y(t_i^{-1}gt_j)$ . Sem perda de generalidade, considere a primeira coluna, os outros casos serão similares. Queremos mostrar que existe um único elemento de  $H$  em  $\{t_1^{-1}gt_1, t_2^{-1}gt_1, \dots, t_l^{-1}gt_1\}$ . Entretanto

$gt_1 \in t_i H$  para exatamente um dos  $t_i$  em nosso conjunto de representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$  e então  $t_i^{-1}gt_1 \in H$  é o elemento que procuramos.

Para mostrar que  $X(g)$  é uma representação matricial, devemos primeiro verificar que  $X(e)$  é a matriz identidade. Isto segue diretamente da definição de indução. Além disto, precisamos mostrar que  $X(g)X(h) = X(gh)$ , para todo  $g, h \in G$ . Considerando apenas o bloco  $(i, j)$  em ambos os lados, é suficiente provar que

$$\sum_k Y(t_i^{-1}gt_k)Y(t_k^{-1}ht_j) = Y(t_i^{-1}ght_j).$$

Para simplificar a notação, seja  $a_k = t_i^{-1}gt_k$ ,  $b_k = t_k^{-1}ht_j$ , e  $c = t_i^{-1}ght_j$ . Note que  $a_k b_k = c$  para todo  $k$ . Reescrevendo, queremos provar que

$$\sum_k Y(a_k)Y(b_k) = Y(c).$$

Agora vamos considerar dois casos. Se  $Y(c) = 0$  então  $c \notin H$ . Segue que  $a_k \notin H$  ou  $b_k \notin H$  para todo  $k$ . Portanto  $Y(a_k)$  ou  $Y(b_k)$  é zero para cada  $k$  e, em ambos os casos,

$$\sum_k Y(a_k)Y(b_k) = 0.$$

Se  $Y(c) \neq 0$  então  $c \in H$ . Seja  $m$  o único índice tal que  $a_m \in H$ . Logo  $b_m = a_m^{-1}c \in H$  e

$$\sum_k Y(a_k)Y(b_k) = Y(a_m)Y(b_m) = Y(a_m b_m) = Y(c). \quad \square$$

Veremos na proposição seguinte que a representação induzida independe da escolha dos representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$ .

**Proposição 2.17.** Considere  $H \leq G$  e uma representação matricial  $Y$  de  $H$ . Sejam  $\{t_1, \dots, t_l\}$  e  $\{s_1, \dots, s_l\}$  dois conjuntos de representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$  dando origem a representações matricial  $X$  e  $Z$ , respectivamente, para  $Y \uparrow^G$ . Então  $X$  e  $Z$  são equivalentes.

*Demonstração.* Sejam  $\chi, \psi$ , e  $\phi$  caracteres de  $X, Y$  e  $Z$ , respectivamente. Então pela Parte 5 do Corolário 2.13 é suficiente mostrar que  $\chi = \phi$ . Nós temos que

$$\chi(g) = \sum_i \text{tr } Y(t_i^{-1}gt_i) = \sum_i \psi(t_i^{-1}gt_i), \quad (2.21)$$

onde  $\psi(g) = 0$  se  $g \notin H$ . Similarmente,

$$\phi(g) = \sum_i \text{tr } Y(s_i^{-1}gs_i) = \sum_i \psi(s_i^{-1}gs_i).$$

Desde que  $t_i$  e  $s_i$  são ambos representantes de classes laterais de  $H$  em  $G$ , nós podemos permutar os índices se necessário para escrever  $t_i H = s_i H$  para todo  $i$ . Assim  $t_i = s_i h_i$ ,

onde  $h_i \in H$  para todo  $i$ , e então  $t_i^{-1}gt_i = h_i^{-1}s_i^{-1}gs_i h_i$ . Portanto  $t_i^{-1}gt_i \in H$  se, e somente se  $s_i^{-1}gs_i \in H$ , e quando ambos pertencem a  $H$ , eles estão na mesma classe de conjugação. Segue que  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(s_i^{-1}gs_i)$ , desde que  $\psi$  é constante na classe de conjugação de  $H$  e zero fora dela. Então nós temos

$$\chi(g) = \sum_i \psi(t_i^{-1}gt_i) = \sum_i \psi(s_i^{-1}gs_i) = \phi(g). \quad \square$$

Agora, vamos encontrar uma fórmula para o carácter de uma representação induzida. Sejam  $H, \psi$ , e os  $t_i$  como na Proposição 2.17. Então  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_i h)$  para qualquer  $h \in H$ . Logo, a Equação (2.21) pode ser reescrita como

$$\psi \uparrow^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_i \sum_{h \in H} \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_i h).$$

Mas, como  $h$  varia sobre  $H$  e os  $t_i$  variam sobre os representantes das classes laterais de  $H$  em  $G$ , os produtos  $t_i h$  variam sobre todos os elementos de  $G$  exatamente uma vez. Portanto, chegamos na identidade

$$\psi \uparrow^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \psi(x^{-1}gx). \quad (2.22)$$

Essa fórmula nos permitirá provar a Reciprocidade de Frobenius a qual relaciona o produto interno dos caracteres das representações restritas e induzidas.

**Teorema 2.15.** [Reciprocidade de Frobenius] Seja  $H \leq G$  um subgrupo de  $G$  e suponha que  $\psi$  e  $\chi$  são caracteres de  $H$  e  $G$ , respectivamente. Então

$$\langle \psi \uparrow^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H \rangle$$

onde o produto interno à esquerda é calculado em  $G$  e o à direita em  $H$ .

*Demonstração.* A partir da definição e da Equação (2.22), temos que

$$\langle \psi \uparrow^G, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \uparrow^G (g) \chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}).$$

Tomando  $y = x^{-1}gx$ , temos que

$$\frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(xy^{-1}x^{-1}).$$

Como  $\chi$  é constante nas classes de conjugação de  $G$ , temos que  $\chi(xy^{-1}x^{-1}) = \chi(y^{-1})$ , para todo  $x \in G$ . Usando o fato de que  $x$  é constante na soma chegamos que

$$\frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1})$$

e, como sabemos que  $\psi$  é zero fora de  $H$ , concluímos que

$$\frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) = \langle \psi, \chi \downarrow_H \rangle. \quad \square$$

### 3 MÓDULO DE PERMUTAÇÃO

Nesse capítulo, iremos construir representações do grupo simétrico naturalmente associadas as partições de  $n$ , que serão chamadas representação de permutação. Apesar dessas representações não serem irredutíveis, sua compreensão nos ajudará a construir para cada partição de  $n$  uma sub-representação irredutível.

Por definição, vamos supor que a álgebra do grupo em que a representação regular opera é sobre espaço vetorial complexo e, portanto, será denotada por  $\mathbb{C}[S_n]$  com a  $S_n$ -ação definida pela multiplicação à esquerda. Deste modo, cada representação irredutível de  $S_n$  está associada a um subespaço  $S_n$ -invariante de  $\mathbb{C}[S_n]$ .

#### 3.1 PARTIÇÕES E TABLEAUX DE YOUNG

Vamos introduzir a noção de tableau de Young a partir das partições de  $n$ . Mostraremos como esses tableaux determinam classes de equivalências que são usadas para construir uma representação de  $S_n$ . Contudo, primeiro apresentaremos algumas notações e definições associadas às partições.

Seja  $A$  um conjunto, então uma *ordem parcial em  $A$*  é uma relação  $\leq$  tal que para todo  $a, b, c \in A$

1.  $a \leq a$ ,
2.  $a \leq b$  e  $b \leq a$  implica  $a = b$ , e
3.  $a \leq b$  e  $b \leq c$  implica que  $a \leq c$ .

Se, em adição, para todo par de elementos  $a, b \in A$  nós temos ou  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ , então  $\leq$  é uma *ordem total* e  $(A, \leq)$  é um *conjunto totalmente ordenado*.

Sabemos que uma partição de um número inteiro positivo  $n$  é uma sequência de números inteiros positivos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  satisfazendo  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$  e  $\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$ .

Por exemplo, o número 4 tem cinco partições  $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$ .

Há duas ordenações importantes em partições de  $n$  que depois serão estendidas aos tableaux de Young.

**Definição 3.1.** (Ordem lexicográfica) Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  e  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  partições de  $n$ . Então  $\lambda \leq \mu$  na *ordem lexicográfica* se,  $\lambda = \mu$ , ou existir algum índice  $i$  tal que

$$\lambda_j = \mu_j \text{ para } j < i \text{ e } \lambda_i < \mu_i.$$

Como pode ser visto pela definição, a ordem lexicográfica é uma ordem total. A *ordem de dominância* que vamos definir abaixo é uma subordem da ordem lexicográfica fundamental para as representações de  $S_n$  e será a mais usada daqui em diante.

**Definição 3.2.** (Ordem de dominância) Suponha que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  e  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  são partições de  $n$ . Então  $\lambda$  domina  $\mu$ , e escrevemos  $\lambda \supseteq \mu$ , se

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$$

para todo  $i \geq 1$ , onde se  $i > l$  (respectivamente  $i > m$ ) então tomamos  $\lambda_i$  (respectivamente,  $\mu_i$ ) sendo zero. Dizemos que  $\lambda$  domina estritamente  $\mu$  se  $\lambda \supseteq \mu$  e  $\lambda \neq \mu$ , denotamos por  $\lambda \triangleright \mu$ .

Por exemplo, dado  $n = 6$ , temos que

- $(3, 3) \supseteq (2, 2, 1, 1)$  desde que  $3 \geq 2$ ,  $3+3 \geq 2+2$ ,  $3+3 \geq 2+2+1$ ,  $3+3 \geq 2+2+1+1$ ;
- $(4, 1, 1) > (3, 3)$  mas  $(3, 3)$  e  $(4, 1, 1)$  são incomparáveis na ordem de dominância, pois,  $3 \leq 4$  mas  $3+3 \geq 4+1$ .

O conjunto de todas as partições de  $n$  é um conjunto parcialmente ordenado pela definição acima. A ordem  $>$  contém a ordem parcial  $\triangleright$ . Veremos na proposição a seguir que  $\lambda \supseteq \mu$  implica que  $\lambda \geq \mu$  mas a implicação inversa é falsa em geral.

**Proposição 3.1.** Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  e  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  partições de  $n$  com  $\lambda \supseteq \mu$ . Então  $\lambda \geq \mu$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\lambda \neq \mu$ . Então existe algum índice  $i$  correspondente ao menor número tal que  $\lambda_i \neq \mu_i$ . Assim,  $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j$  e  $\sum_{j=1}^i \lambda_j > \sum_{j=1}^i \mu_j$  pois  $\lambda \triangleright \mu$ . Então  $\lambda_i > \mu_i$  e, portanto,  $\lambda > \mu$ .  $\square$

Para explicitar melhor essas duas ordens, vamos ilustrar o que ocorre para  $n = 6$ . Na ordem lexicográfica, temos a seguinte distribuição

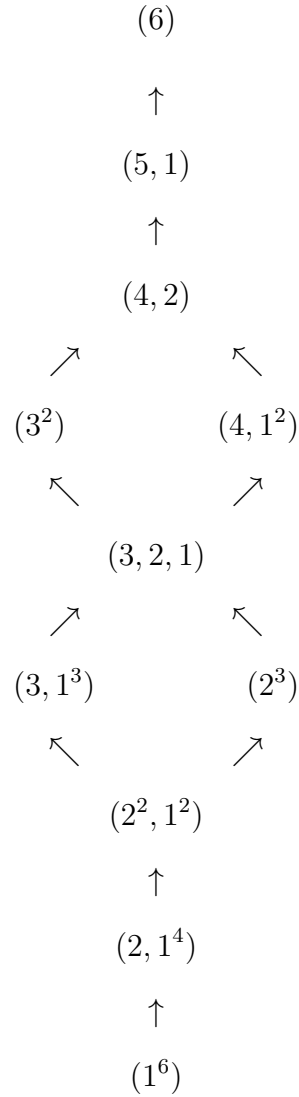
$$(6) > (5, 1) > (4, 2) > (4, 1^2) > (3^2) > (3, 2, 1) > (3, 1^3) > (2^3) > (2^2, 1^2) > (2, 1^4) > (1^6).$$

Por sua vez, a ordem da dominância não é uma ordem total, mas podemos descrevê-la através do diagrama de Hasse.

**Definição 3.3.** Se  $(A, \leq)$  é um conjunto parcialmente ordenado e  $b, c \in A$ , então dizemos que  $b$  é *coberto* por  $c$  (ou  $c$  cobre  $b$ ), escrevemos  $b \prec c$  (ou  $c \succ b$ ), se  $b < c$  e não existe  $d \in A$  com  $b < d < c$ . O *diagrama de Hasse de  $A$*  consiste de vértices representando os elementos de  $A$  com uma flecha do vértice  $b$  até o vértice  $c$  se  $b$  é coberto por  $c$ .



Segue abaixo o diagrama de Hasse com a ordem da dominância das partições de 6.



Uma maneira alternativa para representar partições se dá através de diagramas.

**Definição 3.4.** Suponha que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ . O diagrama de Ferrers ou forma de  $\lambda$  é uma matriz de  $n$  pontos tendo  $l$  linhas justificadas à esquerda com a linha  $i$  contendo  $\lambda_i$  pontos para  $1 \leq i \leq l$ . Ou seja, é o conjunto

$$[\mathcal{D}_\lambda] := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 1 \leq i \leq l, j = 1, \dots, \lambda_i\}.$$

Por exemplo, se  $\lambda = (3, 2, 1, 1)$  temos o seguinte diagrama de Ferrers e podemos usar células no lugar de pontos.



Como sabemos que o número de representações irredutíveis do  $S_n$  é igual ao número de partições do  $n$  concluímos que há uma bijeção entre diagramas de Ferrers e representações irredutíveis de  $S_n$ .

**Definição 3.5.** Suponha  $\lambda \vdash n$ . Um *tableau de Young de forma  $\lambda$*  é uma matriz  $t$  obtida preenchendo as células do diagrama de Ferrers de  $\lambda$  com os números  $1, 2, \dots, n$  bijectivamente.

Ou seja, temos a bijeção

$$t : [\mathcal{D}_\lambda] \longleftrightarrow \{1, \dots, n\}$$

onde,

$$t = \begin{array}{cccc} t(1, 1) & \dots & & t(1, \lambda_1) \\ t(2, 1) & \dots & & t(2, \lambda_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ t(l, 1) & \dots & & t(l, \lambda_l) \end{array}$$

e  $t_{i,j}$  representa a entrada de  $t$  na posição  $(i, j)$ . Para qualquer forma  $\lambda \vdash n$  há exatamente  $n!$  tableaux de Young.

Um tableau de Young de forma  $\lambda$  é também chamado  $\lambda$ -tableau e denotado por  $t^\lambda$ , ou podemos escrever  $\text{sht} = \lambda$ .

Se  $\lambda = (2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ , então os possíveis  $\lambda$ -tableaux são

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}.$$

**Lema 3.1.** (Lema da dominância para partições) Sejam  $t^\lambda$  e  $s^\mu$  tableaux de forma  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente. Se, para cada índice  $i$ , os elementos da linha  $i$  de  $s^\mu$  estão todos em diferentes colunas de  $t^\lambda$ , então  $\lambda \supseteq \mu$ .

*Demonstração.* Uma vez que os elementos da linha 1 em  $s^\mu$  estão todos em diferentes colunas de  $t^\lambda$ , podemos ordenar as entradas de cada coluna de  $t^\lambda$  de modo que todos os elementos da linha 1 em  $s^\mu$  ocorram na primeira linha de  $t_{(1)}^\lambda$ . Os elementos da linha 2 em  $s^\mu$  estão todos também em diferentes colunas de  $t^\lambda$  e, portanto em  $t_{(1)}^\lambda$ , reordenando as entradas em cada coluna de  $t_{(1)}^\lambda$  de modo que todos os elementos das linhas 1 e 2 em  $s^\mu$  ocorram na primeira e segunda linhas de  $t_{(2)}^\lambda$ . Por indução, ordenando cada coluna de  $t^\lambda$ , todos os elementos das linhas  $1, 2, \dots, i$  de  $S^\mu$  ocorrem nas primeiras  $i$  linhas de  $t_{(i)}^\lambda$ . Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i &= \text{número de elementos nas primeiras } i \text{ linhas de } t_{(i)}^\lambda \\ &\geq \text{número de elementos de } s^\mu \text{ nas primeiras } i \text{ linhas de } t_{(i)}^\lambda \\ &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.1.** Sejam  $t^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 1 & 3 & & & \\ \hline 6 & & & & \\ \hline \end{array}$  e  $s^\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & 8 & & \\ \hline \end{array}$ .

Note que os elementos de cada linha em  $s^\mu$  estão todos em diferentes colunas em  $t^\lambda$  e, usando o procedimento da demonstração do Lema 3.1, temos que os elementos da primeira linha de  $s^\mu$  estão todos na primeira linha e em diferentes colunas em  $t_{(1)}^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 8 & 5 & & & \\ \hline 6 & & & & \\ \hline \end{array}$  e os elementos da primeira, segunda e terceira linhas de  $s^\mu$  estão todos na primeira, segunda e terceira linhas e em diferentes colunas em  $t_{(2)}^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 6 & 5 & & & \\ \hline 8 & & & & \\ \hline \end{array}$ . Portanto, concluímos que  $\lambda \supseteq \mu$ .

### 3.2 TABLÓIDES

Existe uma ação natural de  $S_n$  no conjunto dos  $\lambda$ -tableaux. Seja  $\lambda \vdash n$ . Considere  $\pi$  um elemento de  $S_n$  e  $t = (t_{i,j})$  um  $\lambda$ -tableau. Definimos  $\pi t$  como sendo o tableau que tem na linha  $i$  a imagem por  $\pi$  dos números na linha  $i$  de  $t$ , ou seja,  $\pi t = (\pi(t_{i,j})) = ((\pi t)_{i,j})$ .

Por exemplo,  $(1, 6, 7, 8, 4, 5)(2, 3) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 8 & 1 & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline 5 & 4 & 6 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$ .

Como a ação de  $S_n$  nos tableaux é transitiva, podemos obter todos os outros tableaux de forma  $\lambda = (4, 3, 1)$  por permutação.

**Definição 3.6.** Suponha que o tableau  $t$  tenha linhas  $R_1, R_2, \dots, R_l$  e colunas  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Então definimos dois subgrupos de  $S_n$

$$R_t = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \dots \times S_{R_l}$$

$$C_t = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \dots \times S_{C_k}.$$

onde  $R_t$  é a linha estabilizadora de  $t$  e  $C_t$  é a coluna estabilizadora de  $t$ , isto é,

$$R_t = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma \text{ fixa os elementos de cada linha de } t, \text{ como conjunto} \}$$

$$= \{ \sigma \in S_n \mid \text{para todo } i, \text{ ambos } i \text{ e } \sigma(i) \text{ pertencem a mesma linha} \}$$

$$C_t = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma \text{ fixa os elementos de cada coluna de } t, \text{ como conjunto} \}$$

$$= \{ \sigma \in S_n \mid \text{para todo } i, \text{ ambos } i \text{ e } \sigma(i) \text{ pertencem a mesma coluna} \}.$$

Se  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline \end{array}$ , então  $R_t = S_{\{1,3,7\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{2,6\}}$  e  $C_t = S_{\{1,2,4\}} \times S_{\{3,5,6\}} \times S_{\{7\}}$ ,

onde  $|R_t| = 3!2!2!$  e  $|C_t| = 3!3!1!$ .

**Definição 3.7.** Um tablóide de forma  $\lambda$ , ou  $\lambda$ -tablóide, é uma classe de equivalência de tableaux de Young, onde dois  $\lambda$ -tableaux  $t_1$  e  $t_2$  são equivalentes por linhas,  $t_1 \sim t_2$ , se as

linhas correspondentes dos dois tableaux contêm os mesmos elementos, não necessariamente na mesma ordem. Essa classe de equivalência é denotada por

$$\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$$

onde  $\text{sh } t = \lambda$ . Vamos omitir as linhas verticais de um tableau para representar um tablóide.

$$\text{Se } t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \text{ então } \{t\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \right\} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}}.$$

A classe de equivalência por linhas pode ser expressa como  $\{t\} = R_t t$ . Por exemplo, tomando  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$  e  $\sigma t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}$ , onde  $\sigma = (1, 3, 2)(4, 5) \in R_t$ , ambos tableaux possuem  $\{1, 2, 3\}$  na primeira linha e  $\{4, 5\}$  na segunda linha, então  $t \sim \sigma t$ .

Assim,  $t_1 \sim t_2$  se, e somente se,  $t_2 = \sigma t_1$  para algum  $\sigma \in R_{t_1}$  que por sua vez ocorre se, e somente se,  $R_{t_1} = R_{t_2}$ . Como  $R_t$  é o estabilizador de  $\{t\}$  em  $S_n$  temos que  $|\{t\}| = |R_t| = \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_l! =: \lambda!$ .

**Proposição 3.2.** Se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$  então o número de tableaux em qualquer classe de equivalência é  $\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_l! \stackrel{\text{def}}{=} \lambda!$ . Portanto o número de  $\lambda$ -tablóides é  $\frac{n!}{\lambda!}$ .

*Demonstração.* Como há exatamente  $n!$  tableaux de Young e o número de tableaux de Young em qualquer classe de equivalência é  $\lambda!$ , o resultado segue.  $\square$

**Lema 3.2.** Sejam  $t$  um tableau e  $\pi$  uma permutação. Então

1.  $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$ ;
2.  $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ .

*Demonstração.* 1. Denote as linhas de  $t$  por  $R_1, \dots, R_l$  e seja  $\sigma \in R_{\pi t}$ . Então temos  $\sigma(\pi R_i) = (\pi R_i)$  onde  $i = 1, \dots, l$ . Logo  $\pi^{-1} \sigma \pi(R_i) = (R_i), i = 1, \dots, l$ . Obtemos que  $\pi^{-1} \sigma \pi \in R_t$  e, portanto,  $\sigma \in \pi R_t \pi^{-1}$ .

2. Denotando as colunas de  $t$  por  $C_1, \dots, C_k$ , obtemos de maneira similar ao item 1 que  $\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}$ , onde  $\sigma \in C_{\pi t}$ .  $\square$

Dado um subconjunto  $H \subseteq S_n$ , definimos os seguintes elementos de  $\mathbb{C}[S_n]$ :

$$H^- = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \sigma \quad \text{e} \quad H^+ = \sum_{\sigma \in H} \sigma.$$

Em particular, definiremos agora dois elementos de  $\mathbb{C}[S_n]$  de grande importância em nosso estudo da decomposição de  $\mathbb{C}[S_n]$ .

**Definição 3.8.** Seja  $\lambda \vdash n$ . Para um  $\lambda$ -tableau  $t$  definimos

$$k_t = C_t^- = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\sigma,$$

$$r_t = R_t^+ = \sum_{\sigma \in R_t} \sigma.$$

**Lema 3.3.** Sejam  $t$  um tableau e  $\pi$  uma permutação. Então

1.  $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$ ;
2.  $r_{\pi t} = \pi r_t \pi^{-1}$ .

*Demonstração.* 1. Por definição, temos  $k_{\pi t} = \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\sigma)\sigma$ . Agora, pela parte 2 do Lema 3.2, temos que

$$\begin{aligned} k_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \text{sgn}(\sigma)\sigma = \sum_{\tau \in C_t} \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\tau)\text{sgn}(\pi^{-1})\pi\tau\pi^{-1} \\ &= \sum_{\tau \in C_t} \pi \text{sgn}(\tau)\tau\pi^{-1} = \pi \left( \sum_{\tau \in C_t} \text{sgn}(\tau)\tau \right) \pi^{-1} = \pi k_t \pi^{-1}. \end{aligned}$$

2. Por definição, temos que  $r_{\pi t} = \sum_{\sigma \in R_{\pi t}} \sigma$ . Agora, pela parte 1 do Lema 3.2, temos que

$$r_{\pi t} = \sum_{\sigma \in \pi R_t \pi^{-1}} \sigma = \sum_{\tau \in R_t} \pi\tau\pi^{-1} = \pi \left( \sum_{\tau \in R_t} \tau \right) \pi^{-1} = \pi r_t \pi^{-1}. \quad \square$$

O objetivo agora é construir uma família de módulos de  $S_n$  associada a cada partição. O método é resumido da seguinte forma. Primeiro, considere uma coleção de tablóides para cada partição. Depois, defina uma ação de  $S_n$  nessa coleção. Então finalmente, formamos o módulo conhecido como o módulo de permutação  $M^\lambda$ . Esses módulos serão, em geral, redutíveis, no entanto, dentro de cada módulo, existem módulos irredutíveis.

A ação de  $S_n$  nos tableaux induz uma ação nos tablóides deixando  $\pi\{t\} = \{\pi t\}$

$$\pi \frac{\overline{i} \ \overline{j}}{\overline{k}} = \frac{\overline{\pi(i)} \ \overline{\pi(j)}}{\overline{\pi(k)}}.$$

Essa ação está bem definida. De fato, se supusermos que  $\{t\} = \{s\}$  então existe  $\sigma \in R_t$  tal que  $\sigma t = s$ . Como  $\pi s = \pi \sigma \pi^{-1} \pi t$ , pela parte 1 do Lema 3.2, temos que  $\pi \sigma \pi^{-1} \in R_{\pi t}$ , concluímos que  $\{\pi t\} = \{\pi s\}$ .

Estendendo em  $\mathbb{C}$  a ação de  $S_n$  no conjunto de tablóides, obtemos o seguinte  $S_n$ -módulo.

**Definição 3.9.** Suponha que  $\lambda \vdash n$ . Seja

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\},$$

onde  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  é uma lista completa de  $\lambda$ -tablóides. Então  $M^\lambda$  é chamado o módulo de permutação correspondente a  $\lambda$  e  $\varphi^\lambda : S_n \rightarrow \text{GL}(M^\lambda)$  é a representação de permutação.

**Exemplo 3.2.** Se  $\lambda = (n)$ , vemos que  $M^{(n)} = \mathbb{C}\{\overline{1 \ 2 \ \dots \ n}\}$  e uma vez que este tablóide é fixado por  $S_n$ ,  $M^{(n)}$  é o módulo correspondente a representação trivial uni-dimensional.

**Exemplo 3.3.** Se  $\lambda = (1^n)$  então  $t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$  e cada classe de equivalência consiste de um único tableau. Esse tableau pode ser identificado como uma permutação em uma linha. Como a ação de  $S_n$  é preservada, esse módulo corresponde a representação regular, isto é,

$$M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}[S_n].$$

**Exemplo 3.4.** Se  $\lambda = (n-1, 1)$  então há  $n$  distintos  $(n-1, 1)$ -tablóides, com tableaux representantes

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \dots & n \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \dots, \quad t_n = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array}.$$

Cada  $\lambda$ -tablóide é unicamente determinado pelos elementos na segunda linha que é um número de 1 a  $n$ . Assim, pode ser escrito como

$$M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\}.$$

E esse módulo é correspondente a representação definida.

**Exemplo 3.5.** Sejam as partições de  $n = 3$ ,  $\lambda = (3)$ ,  $\lambda = (2, 1)$  e  $\lambda = (1^3)$ . Vamos calcular os caracteres dos módulos  $M^\lambda$ . Denotaremos o carácter de  $M^\lambda$  por  $\phi^\lambda$

	$(1^3)$	$(2, 1)$	$(3)$
$\phi^3$	1	1	1
$\phi^{(2,1)}$	3	1	0
$\phi^{(1^3)}$	6	0	0

**Definição 3.10.** Um  $G$ -módulo  $M$  é cíclico se existe um  $v \in M$  tal que  $M = \mathbb{C}G \cdot v$  onde  $G \cdot v = \{g \cdot v \mid g \in G\}$ . Neste caso, dizemos que  $M$  é gerado por  $v$ .

Note pela Definição 3.10 que o módulo  $M^\lambda$  é cíclico, já que qualquer tablóide pode ser levado a qualquer outro tablóide de mesma forma por alguma permutação de  $S_n$ , pois  $S_n$  age nos tablóides transitivamente. Então podemos denotar o módulo de permutação da seguinte forma

$$M^\lambda = \mathbb{C}S_n\{t^\lambda\}.$$

**Proposição 3.3.** Se  $\lambda \vdash n$  então  $M^\lambda$  é cíclico, gerado por qualquer  $\lambda$ -tablóide dado. Mais ainda,  $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ , que é o número de  $\lambda$ -tablóides.

Vamos agora associar a cada  $\lambda \vdash n$  um subgrupo do  $S_n$ . Recordando que se  $X$  é um conjunto qualquer então  $S_X$  é o conjunto das permutações de  $X$ .

**Definição 3.11.** Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ . Então o correspondente subgrupo de Young de  $S_n$  é

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,\dots,n\}}.$$

onde  $S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,\dots,n\}} = S_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+1,\dots,\lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+\lambda_l\}}$ .

Por essa definição, temos que  $S_{(3,2,1,1)} = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6\}} \times S_{\{7\}} \cong S_3 \times S_2 \times S_1 \times S_1$ .

Se tomarmos o subgrupo de Young  $S_\lambda$  correspondente a partição  $\lambda$  e induzir a representação trivial em  $S_\lambda$  a  $S_n$ , teremos a representação  $1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$  e, conseqüentemente, obtemos seu correspondente módulo de permutação  $M^\lambda$ . De fato, se  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  são os representantes das classes laterais para  $S_\lambda$  então, pela Proposição 2.16, o espaço vetorial

$$V^\lambda = \mathbb{C}\{\pi_1 S_\lambda, \pi_2 S_\lambda, \dots, \pi_k S_\lambda\}$$

é um módulo para nossa representação induzida.

Seja  $S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times S_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,\dots,n\}}$ , podemos pensar em  $S_\lambda$  sendo modelado pelo tablóide

$$\{t^\lambda\} = \frac{\begin{array}{cccc} \overline{1} & \overline{2} & \overline{\dots} & \overline{\lambda_1} \\ \lambda_1 + 1 & \lambda_1 + 2 & \dots & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots & & & \\ \overline{n - \lambda_l + 1} & \overline{\dots} & & \overline{n} \end{array}}{\quad} \quad (3.1)$$

As classes  $\pi S_\lambda$  correspondem de alguma maneira com os tablóides  $\{\pi t^\lambda\}$ .

**Teorema 3.1.** Considere  $\lambda \vdash n$  com subgrupo de Young  $S_\lambda$  e tablóide  $\{t^\lambda\}$  como em (3.1). Então  $V^\lambda = \mathbb{C}S_n S_\lambda$  e  $M^\lambda = \mathbb{C}S_n \{t^\lambda\}$  são isomorfos como  $S_n$ -módulos.

*Demonstração.* Seja  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  representantes das classes laterais para  $S_\lambda$ . Defina a aplicação

$$\theta : V^\lambda \longrightarrow M^\lambda$$

por  $\theta(\pi_i S_\lambda) = \{\pi_i t^\lambda\}$  para  $i = 1, \dots, k$  e estenda linearmente. Temos que  $\theta$  é um  $S_n$ -isomorfismo de módulos. Pela Proposição 2.16,  $M^\lambda \cong 1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n} = \mathbb{C}(S_n/S_\lambda) = V^\lambda$ .  $\square$

Observe que se o  $\lambda$ -tableau  $t$  é um tableau onde as entradas  $1, \dots, n$  aumentam em ordem crescente ao longo das linhas então  $S_\lambda = R_t$ .

### 3.3 LEMA DO SINAL

Dados quaisquer dois  $\lambda$ -tablóides  $\{t\}, \{s\}$  na base de  $M^\lambda$ , podemos definir o produto interno em  $M^\lambda$  em que

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{t\} = \{s\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

O produto interno é  $S_n$ -invariante, ou seja,  $\langle \pi u, \pi v \rangle = \langle u, v \rangle$  para todo  $\pi \in S_n$  e  $u, v \in M^\lambda$ . Estendendo por linearidade obtemos um produto interno em  $M^\lambda$ , isto é, dados  $u = \sum_t \alpha_t \{t\}$  e  $v = \sum_s \beta_s \{s\} \in M^\lambda$ , onde as somas estão sobre os distintos tablóides, temos

$$\langle u, v \rangle = \sum_{t,s} \alpha_t \beta_s \langle \{t\}, \{s\} \rangle = \sum_j \alpha_j \beta_j.$$

Se  $U \subseteq M^\lambda$ , o espaço ortogonal a  $U$  é dado por

$$U^\perp = \{v \in M^\lambda \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Antes de enunciar o próximo resultado, recordamos que  $H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi$  para qualquer subconjunto  $H \subseteq S_n$  e temos definido o produto interno em  $M^\lambda$  por (3.2). Se  $H = \{\pi\}$  então denotamos  $H^-$  por  $\pi^-$ .

**Lema 3.4.** [Lema do sinal] Seja  $H \leq S_n$  um subgrupo.

1. Se  $\pi \in H$  então  $\pi H^- = H^- \pi = (\text{sgn} \pi) H^-$ ; além disso,  $\pi^- H^- = H^-$ .
2. Para quaisquer  $u, v \in M^\lambda$  temos  $\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$ .
3. Se a transposição  $(b, c) \in H$  então podemos fatorar  $H^- = k(e - (b, c))$ ,  $k \in \mathbb{C}[S_n]$ .
4. Se  $t$  é um tableau com  $b, c$  na mesma linha de  $t$  e  $(b, c) \in H$  então  $H^- \{t\} = 0$ .

*Demonstração.* 1. Temos que

$$\pi H^- = \pi \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \sigma = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma$$

Fazendo  $\tau = \pi \sigma$ ,

$$\begin{aligned} \pi H^- &= \sum_{\tau \in H} \text{sgn}(\pi^{-1} \tau) \tau = \sum_{\tau \in H} \text{sgn}(\pi^{-1}) \text{sgn}(\tau) \tau \\ &= \text{sgn}(\pi^{-1}) \left( \sum_{\tau \in H} \text{sgn}(\tau) \tau \right) = \text{sgn}(\pi) H^-. \end{aligned}$$

Finalmente, temos que  $\pi^- H^- = (\text{sgn} \pi) \pi \left( \sum_{\sigma \in H} (\text{sgn} \sigma) \sigma \right) = (\text{sgn} \pi) (\text{sgn} \pi) H^- = H^-$ .



2. Usando o fato que o produto interno em  $M^\lambda$  é  $S_n$ -invariante temos que  $\langle H^-u, v \rangle = \sum_{\pi \in H} \langle (\text{sgn}\pi)\pi u, v \rangle = \sum_{\pi \in H} \langle u, (\text{sgn}\pi^{-1})\pi^{-1}v \rangle$ . Tomando  $\tau = \pi^{-1}$  temos que  $\langle H^-u, v \rangle = \sum_{\tau \in H} \langle u, (\text{sgn}\tau)\tau v \rangle = \langle u, H^-v \rangle$ .
3. Considere o subgrupo  $K = \{e, (b, c)\}$  de  $H$ . Selecione os representantes das classes laterais à esquerda  $\pi_1, \dots, \pi_s$  para  $K$  em  $H$  e escreva  $H$  como união disjunta de suas classes laterais à esquerda, ou seja,  $H = \bigcup_{i=1}^s \pi_i K = \pi_1 K \cup \pi_2 K \cup \dots \cup \pi_s K$ , onde  $\pi_i K = \{\pi_i, \pi_i(b, c)\}$  e  $\pi_i^- = (\text{sgn}\pi_i)\pi_i$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 H^- &= \sum_{i=1}^s ((\text{sgn}\pi_i)\pi_i + \text{sgn}(\pi_i(b, c))(\pi_i(b, c))) \\
 &= \sum_{i=1}^s ((\text{sgn}\pi_i)\pi_i + \text{sgn}(\pi_i)\text{sgn}(b, c)(\pi_i(b, c))) \\
 &= \sum_{i=1}^s ((\text{sgn}\pi_i)\pi_i - \text{sgn}(\pi_i)(\pi_i(b, c))) \\
 &= \sum_{i=1}^s ((\text{sgn}\pi_i)\pi_i(e - (b, c))) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^s \pi_i^-\right)(e - (b, c)).
 \end{aligned}$$

4. Por hipótese  $(b, c)\{t\} = \{t\}$ . Logo,  $H^-\{t\} = k(e - (b, c))\{t\} = k(\{t\} - \{t\}) = 0$ .  $\square$

Nosso objetivo para os próximos capítulos é construir um conceito de representação irredutível de  $S_n$  correspondente a cada tableau de Young. Iremos abordar duas construções dos módulos irredutíveis de  $M^\lambda$ , a primeira abordagem será via construção por politablóides (Capítulo 4) enquanto que a segunda será via simetrizadores de Young (Capítulo 5).

## 4 MÓDULOS DE SPECHT

Sabemos que o módulo  $M^\lambda$  não é irredutível em geral. No entanto, como em qualquer representação, os módulos de permutações podem ser decompostos em módulos irredutíveis de  $S_n$ .

Veremos adiante que podemos definir uma ordem no conjunto de partições de  $n$  de tal maneira que o primeiro módulo  $M^{\lambda_1}$  é irredutível e o denotamos por  $S^{\lambda_1}$ , o segundo módulo  $M^{\lambda_2}$  se decompõe em cópias de  $S^{\lambda_1}$  e um novo módulo irredutível  $S^{\lambda_2}$  e, em geral, cada módulo  $M^{\lambda_k}$  irá se decompor em várias cópias de  $S^{\lambda_i}$  para  $i < k$  e um novo módulo irredutível  $S^{\lambda_k}$ . No final, obtemos uma sequência de  $S_n$  módulos irredutíveis  $S^{\lambda_1}, S^{\lambda_2}, S^{\lambda_3}, \dots$ , chamados módulos de Specht. Antes de podermos defini-los, precisamos da noção de um politablóide.

**Definição 4.1.** Se  $t$  é um tableau então o politablóide associado é dado por

$$\mathbf{e}_t = k_t\{t\}.$$

Note que se  $t$  tem colunas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  então  $k_t$  se fatora como  $k_t = k_{C_1}k_{C_2}\dots k_{C_k}$  onde  $k_{C_i} = \sum_{\pi \in S_{C_i}} \text{sgn}(\pi)\pi$ ,  $i = 1, \dots, k$ . De fato, sabemos que  $C_t = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \dots \times S_{C_k}$  e, argumentando com indução em  $k$ , é suficiente mostrar que para qualquer dois subgrupos  $H, K \leq S_n$  distintos

$$\sum_{\pi \in HK} \text{sgn}(\pi)\pi = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma)\sigma \sum_{\tau \in K} \text{sgn}(\tau)\tau.$$

Isso é verdade uma vez que todo  $\pi \in HK$  tem fatoração única,  $\pi = \sigma\tau = \tau\sigma$  para algum  $\sigma \in H$  e  $\tau \in K$ . Lembrando que  $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$ , a observação acima segue.

Observe que o politablóide  $\mathbf{e}_t$  depende da escolha do  $\lambda$ -tableau  $t$  e não apenas do tablóide  $\{t\}$ . Vamos ilustrar isto tomando  $\lambda = (3, 2)$ .

Seja  $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$ . Então temos que  $k_{t_1} = k_{C_1}k_{C_2}k_{C_3} = (e - (3, 4))(e - (1, 5))$  e

$$\mathbf{e}_{t_1} = k_{t_1}\{t_1\} = \overline{\frac{4 \ 1 \ 2}{3 \ 5}} - \overline{\frac{3 \ 1 \ 2}{4 \ 5}} - \overline{\frac{4 \ 5 \ 2}{3 \ 1}} + \overline{\frac{3 \ 5 \ 2}{4 \ 1}}.$$

Agora seja  $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$ . Então temos que  $k_{t_2} = (e - (1, 3))(e - (2, 5))$  e

$$\mathbf{e}_{t_2} = k_{t_2}\{t_2\} = \overline{\frac{1 \ 2 \ 4}{3 \ 5}} - \overline{\frac{3 \ 2 \ 4}{1 \ 5}} - \overline{\frac{1 \ 5 \ 4}{3 \ 2}} + \overline{\frac{3 \ 5 \ 4}{1 \ 2}}.$$

Temos que  $\mathbf{e}_{\{t_1\}} \neq \mathbf{e}_{\{t_2\}}$  apesar de  $\{t_1\} = \{t_2\}$ .

**Lema 4.1.** Seja  $t$  um tableau e  $\pi$  uma permutação. Então

$$\mathbf{e}_{\pi t} = \pi \mathbf{e}_t.$$

*Demonstração.* Basta observar que  $\mathbf{e}_{\pi t} = k_{\pi t}\{\pi t\} = \pi k_t \pi^{-1}\{\pi t\} = \pi k_t\{t\} = \pi \mathbf{e}_t$ .  $\square$

**Definição 4.2.** Para qualquer partição  $\lambda$ , o correspondente módulo de Specht  $S^\lambda$  é o submódulo de  $M^\lambda$  gerado pelos politablóides  $\mathbf{e}_t$ , onde  $t$  é de forma  $\lambda$ . Temos que  $\varphi^\lambda : S_n \rightarrow \text{GL}(S^\lambda)$  é a representação de Specht associada a  $\lambda$ .

**Proposição 4.1.** Os  $S^\lambda$  são módulos cíclicos gerados por qualquer  $\lambda$ -politablóide, isto é,

$$S^\lambda = \mathbb{C}S_n \mathbf{e}_t.$$

*Demonstração.* Segue como consequência do Lema 4.1 uma vez que  $\pi \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{\pi t}$ .  $\square$

**Exemplo 4.1.** Suponha  $\lambda = (n)$ . Então  $\{t\} = \overline{1 \ 2 \ \dots \ n}$ ,  $k_t = e$  e temos que  $\mathbf{e}_{1 \ 2 \ \dots \ n} = \overline{1 \ 2 \ \dots \ n}$  é o único politablóide. Logo,  $S^{(n)}$  corresponde a representação trivial.

**Exemplo 4.2.** Seja  $\lambda = (1^n)$  e fixe  $t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$ . Temos que  $C_t = S_n$  e, portanto,  $k_t = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) \sigma$ . Pelo Lema 4.1, temos que para qualquer permutação  $\pi$ ,

$$\mathbf{e}_{\pi t} = \pi \mathbf{e}_t = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) \pi \sigma \{t\}.$$

Substituindo  $\pi \sigma$  por  $\tau$  temos  $\sigma = \pi^{-1} \tau$  e

$$\mathbf{e}_{\pi t} = \sum_{\tau \in S_n} (\text{sgn} \pi^{-1} \tau) \tau \{t\} = (\text{sgn} \pi^{-1}) \sum_{\tau \in S_n} (\text{sgn} \tau) \tau \{t\} = (\text{sgn} \pi) \mathbf{e}_t$$

pois  $\text{sgn} \pi^{-1} = \text{sgn} \pi$ . Temos que todo politablóide é um múltiplo escalar de  $\mathbf{e}_t$ , isto é,

$$S^{(1^n)} = \mathbb{C}\{\mathbf{e}_t\} = \mathbb{C}\left[\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) \sigma \{t\}\right].$$

Observando a ação de  $\pi \in S_n$  nos elementos da base de  $S^{(1^n)}$ , para qualquer elemento do grupo temos que  $\pi \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{\pi t} = \text{sgn} \pi \mathbf{e}_t$ . Portanto  $S^{(1^n)}$  corresponde a representação sinal.

**Exemplo 4.3.** Se  $\lambda = (n-1, 1)$  então cada tablóide é unicamente determinado pelos elementos da segunda linha que é um número de 1 a  $n$ . Por abuso de notação, vamos escrever os  $(n-1, 1)$ -tablóides como

$$\{t\} = \frac{\overline{i \ \dots \ j}}{\underline{k}} = \frac{\overline{1 \ \dots \ \hat{k} \ \dots \ n}}{\underline{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{k}.$$

Temos que  $k_t = (e - (i, k))$  e  $\mathbf{e}_t = \mathbf{k} - \mathbf{i}$ .

Seja  $\{t_k\} = \frac{\overline{1 \dots \hat{k} \dots n}}{k} = k$ . Então o politablóide de  $t_k$  é dado por

$$\mathbf{e}_{t_k} = \begin{cases} \mathbf{k} - \mathbf{1}, & \text{se } k \neq 1; \\ \mathbf{1} - \mathbf{2}, & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Um elemento  $a \in S^{(n-1,1)}$  é da forma  $a = \alpha_1 \mathbf{e}_{t_1} + \alpha_2 \mathbf{e}_{t_2} + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_{t_n}$ . Assim,

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1(\mathbf{1} - \mathbf{2}) + \alpha_2(\mathbf{2} - \mathbf{1}) + \alpha_3(\mathbf{3} - \mathbf{1}) + \dots + \alpha_n(\mathbf{n} - \mathbf{1}) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n)\mathbf{1} + (\alpha_2 - \alpha_1)\mathbf{2} + \alpha_3\mathbf{3} + \dots + \alpha_n\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Tomando  $c_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$ ,  $c_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $c_3 = \alpha_3, \dots$ ,  $c_n = \alpha_n$ , vemos que satisfazem  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0$ . Logo

$$S^{(n-1,1)} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \dots + c_n\mathbf{n} \mid c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0\}.$$

Segue que  $\dim S^{(n-1,1)} = n - 1$  e podemos tomar  $\mathcal{B} = \{\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}, \dots, \mathbf{n} - \mathbf{1}\}$  como base.

Calculando a ação de  $\pi \in S_n$  em  $\mathcal{B}$ , vemos que o carácter correspondente é o número de pontos fixos de  $\pi$  menos um. Portanto  $S^{(n-1,1)}$  é o módulo encontrado no final do Exemplo 2.24.

A soma direta da representação do Exemplo 2.24 e da representação trivial é igual a representação definida  $S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n)} = M^{(n-1,1)}$ . Veremos a justificativa dessa afirmação mais adiante.

Retomando o caso de  $S_3$ , que tem três representações irredutíveis, podemos notar que essas representações são as descritas nos exemplos acima: a representação trivial, sinal e padrão. Nesse caso, as representações irredutíveis são exatamente os módulos de Specht. Veremos que isso é verdade em geral.

#### 4.1 O TEOREMA DO SUBMÓDULO

Na seção anterior, construímos um módulo Specht para cada classe de conjugação de  $S_n$ . Agora vamos mostrar que os  $S^\lambda$ 's constituem de fato um conjunto completo de  $S_n$ -módulos irredutíveis, isto é, os módulos de Specht são, a menos de isomorfismos, todos os  $S_n$ -módulos irredutíveis. Antes de provarmos esse importante resultado desta seção, precisamos de algumas ferramentas.

**Lema 4.2.** Sejam  $t = t^\lambda$  um  $\lambda$ -tableau e  $s = s^\mu$  um  $\mu$ -tableau onde  $\lambda, \mu \vdash n$ . Se  $k_t\{s\} \neq 0$ , então  $\lambda \supseteq \mu$ . E se  $\lambda = \mu$  então  $k_t\{s\} = \pm \mathbf{e}_t$ .

*Demonstração.* Suponha que  $b$  e  $c$  são dois elementos distintos que aparecem na mesma linha de  $s^\mu$ . Segue que não podem estar na mesma coluna de  $t^\lambda$  pois, se estivessem, a

transposição  $(b, c)$  pertenceria a  $C_t$  e, pelo item 3 do Lema 3.4,  $k_t = C_t^- = k(e - (b, c))$  para algum  $k \in \mathbb{C}[S_n]$ . Pelo item 4 do Lema 3.4, teríamos que  $C_t^- \{s\} = K_t \{s\} = 0$ , o que contradiz a hipótese. Então, pelo Lema 3.1 (Lema da dominância), temos que  $\lambda \trianglerighteq \mu$ .

Se  $\lambda = \mu$  então devemos ter  $\{s\} = \pi\{t\}$  para algum  $\pi \in C_t$ , pelo mesmo argumento do Lema da dominância. Pela parte 1 do Lema 3.4 (Lema do sinal), temos que  $k_t \{s\} = k_t \pi \{t\} = (\text{sgn} \pi) k_t \{t\} = \pm \mathbf{e}_t$ .  $\square$

**Lema 4.3.** Se  $u \in M^\mu$  e  $\text{sh } t = \mu$  então  $k_t u$  é um múltiplo de  $\mathbf{e}_t$ .

*Demonstração.* Como  $u \in M^\mu$ , segue que  $u$  é uma combinação linear de  $\mu$ -tablóides  $u = \sum_i c_i \{s_i\}$ , onde  $s_i$  são  $\mu$ -tableaux e  $c_i \in \mathbb{C}$ . Pelo Lema 4.2, como  $\text{sh } t = \mu$  então  $k_t \{s_i\} = \pm \mathbf{e}_t$  e  $k_t u = \sum c_i k_t \{s_i\} = \left( \sum_i \pm c_i \right) \mathbf{e}_t$ .  $\square$

**Teorema 4.1.** [Teorema do Submódulo] Sejam  $U$  um submódulo de  $M^\mu$  e  $t$  um  $\mu$ -tableau qualquer. Então  $U \supseteq S^\mu = \mathbb{C}S_n \mathbf{e}_t$  ou  $U \subseteq S^{\mu^\perp} = \{v \in M^\mu \mid \langle v, x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in S^\mu\}$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 4.3 existem  $u \in U$  e um  $\mu$ -tableau  $t$  tal que,  $f \mathbf{e}_t = k_t u$  para algum  $f \in \mathbb{C}$ . Suponha que  $f \neq 0$ . Então  $f \mathbf{e}_t = k_t u \in U$ , desde que  $U$  é submódulo. Portanto  $\mathbf{e}_t \in U$  e, como  $S^\mu$  é cíclico,  $S^\mu \subseteq U$ .

Por outro lado, suponha que temos  $k_t u = 0$ , para todo  $u \in U$  e para todo  $\mu$ -tableau  $t$ . Afirmamos que  $U \subseteq S^{\mu^\perp}$ . De fato, aplicando a parte 2 do Lema 3.4 (Lema do sinal), obtemos  $\langle u, \mathbf{e}_t \rangle = \langle u, k_t \{t\} \rangle = \langle k_t u, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0$ . Como  $\mathbf{e}_t$  gera  $S^\mu$  e  $\langle u, \mathbf{e}_t \rangle = 0$ ,  $\forall u, t$ , temos  $U \subseteq S^{\mu^\perp}$ .  $\square$

**Corolário 4.2.** Seja  $\mu$  uma partição de  $n$ . Então  $S^\mu$  é irredutível.

*Demonstração.* Seja  $U$  um submódulo não nulo de  $S^\mu$ . Em particular,  $U$  é um submódulo de  $M^\mu$ . Então, pelo Teorema 4.1,  $S^\mu \subseteq U$  ou  $U \subseteq S^{\mu^\perp}$ . Essa última continência implica que  $U \subseteq S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ . Portanto  $U = S^\mu$  ou  $U \subseteq S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ .

Como  $\mathbb{C}$  é um corpo com característica zero então  $S^\mu \cap (S^\mu)^\perp = 0$  pois se  $\langle v, v \rangle = \sum_s \alpha_s^2 \langle \{t\}, \{t\} \rangle = \sum_s \alpha_s^2 = 0$  implica que  $v = 0$ . Logo  $U = S^\mu$  ou  $U = 0$ .  $\square$

Note que esse resultado vale para qualquer corpo de característica zero.

**Proposição 4.2.** Suponha que  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  é não nulo. Então  $\lambda \trianglerighteq \mu$ , e se  $\lambda = \mu$  então  $\theta$  é multiplicação por um escalar.

*Demonstração.* Como  $\theta \neq 0$ , há algum vetor da base  $\mathbf{e}_t \in S^\lambda$  tal que  $\theta(\mathbf{e}_t) \neq 0$ . Como  $M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda^\perp}$ , podemos estender  $\theta$  para um elemento do  $\text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$  tomando

$\theta(S^{\lambda^\perp}) = 0$ . Disto temos que

$$0 \neq \theta(\mathbf{e}_t) = \theta(k_t\{t\}) = k_t\theta(\{t\}) = k_t\left(\sum_i c_i\{s_i\}\right),$$

onde  $s_i$  são  $\mu$ -tableaux e  $c_i \in \mathbb{C}$ . Logo, existe um  $\mu$ -tablóide  $\{s_k\}$  tal que  $k_t\{s_k\} \neq 0$  e, pelo Lema 4.2, temos que  $\lambda \supseteq \mu$ .

No caso em que  $\lambda = \mu$ , pelo Lema 4.3,  $\theta(\mathbf{e}_t) = k_t\theta(\{t\}) = k_t u = c\mathbf{e}_t$  onde  $c$  é uma constante e  $u = \theta(\{t\}) \in M^\mu$ . Então, para qualquer permutação  $\pi$ , temos  $\mathbf{e}_{\pi t} \in S^\lambda$  e  $\theta(\mathbf{e}_{\pi t}) = \theta(\pi\mathbf{e}_t) = \pi\theta(\mathbf{e}_t) = \pi(c\mathbf{e}_t) = c\mathbf{e}_{\pi t}$ . Portanto  $\theta$  é multiplicação por  $c$ .  $\square$

**Teorema 4.3.** Os  $S^\lambda$ 's para  $\lambda \vdash n$  formam uma lista completa de  $S_n$ -módulos irredutíveis.

*Demonstração.* Já sabemos pelo Corolário 4.2 que os  $S^\lambda$  são irredutíveis. Assim, como já temos o número certo de módulos para formar um conjunto completo, é suficiente mostrar que eles são dois a dois não equivalentes. Se  $S^\lambda \cong S^\mu$ , como  $S^\mu \subseteq M^\mu$ , nós temos que existe um homomorfismo  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  não nulo. Pela Proposição 4.2, temos que  $\lambda \supseteq \mu$ . Similarmente, existe um homomorfismo  $\theta \in \text{Hom}(S^\mu, M^\lambda)$  não nulo. Uma vez que  $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ , temos que  $\mu \supseteq \lambda$ , isto é,  $\lambda = \mu$ .  $\square$

Portanto, temos a seguinte relação

$$\{\text{Classes de conjugação de } S_n\} \longleftrightarrow \{\text{Módulos de Specht } S^\lambda\}.$$

**Teorema 4.4.** O módulo de permutação decompõe-se como

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$$

com a multiplicidade da diagonal  $m_{\mu\mu} = 1$ .

*Demonstração.* Se  $S^\lambda$  aparece em  $M^\mu$  com coeficiente não nulo, deve existir  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  não nulo de modo que, pela Proposição 4.2, segue que  $\lambda \supseteq \mu$ .

Se  $\lambda = \mu$ , pela segunda parte da Proposição 4.2 nós temos que  $\dim \text{Hom}(S^\mu, M^\mu) = 1$ . Pela Proposição 2.11,  $\dim \text{Hom}(S^\mu, M^\mu)$  é a multiplicidade de  $S^\mu$  em  $M^\mu$  e assim

$$m_{\mu\mu} = \dim \text{Hom}(S^\mu, M^\mu) = 1. \quad \square$$

Os coeficientes  $m_{\lambda\mu}$  têm uma interpretação combinatória que será discutida na Seção 7.3.

**Exemplo 4.4.** Vamos obter a tabela de caracteres irredutíveis do  $S_4$  a partir da decomposição fornecida pelo Teorema 4.4. Para  $n = 4$ , temos os módulos associados às partições (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1<sup>2</sup>) e (1<sup>4</sup>). Já sabemos que  $M^{(4)}$  é a representação trivial (Exemplo

3.2),  $M^{(3,1)}$  é a representação definida (Exemplo 3.4) e que  $M^{(1^4)}$  é a representação regular (Exemplo 3.3). Vamos analisar separadamente os casos  $(2, 2)$  e  $(2, 1, 1)$ .

Considere agora o módulo cíclico  $M^{(2,2)} = \overline{\mathbb{C}[S_4]\{t^{(2,2)}\}}$  com  $\dim M^{(2,2)} = 6$ . Uma base para  $M^{(2,2)}$  é obtida por  $\{t^{(2,2)}\} = \{a\} = \frac{1}{3} \frac{2}{4}$ ,  $\{b\} = (1, 3)\{a\}$ ,  $\{c\} = (1, 4)\{a\}$ ,  $\{d\} = (2, 3)\{a\}$ ,  $\{e\} = (2, 4, 3)\{a\}$  e  $\{f\} = (2, 4)(1, 3)\{a\}$ , isto é,

$$\{a\} = \frac{1}{3} \frac{2}{4}, \{b\} = \frac{2}{1} \frac{3}{4}, \{c\} = \frac{2}{1} \frac{4}{3}, \{d\} = \frac{1}{2} \frac{3}{4}, \{e\} = \frac{1}{2} \frac{4}{3}, \{f\} = \frac{3}{1} \frac{4}{2}.$$

Podemos observar que, como se trata de um  $(2, 2)$ -tablóide, apenas os dois ciclos e os dois-dois ciclos agindo nos elementos da base irão fixar alguns deles. No caso desses dois tipos cíclicos, o traço da matriz da representação é igual a 2. Por exemplo, se  $\pi = (1, 2)$  então  $\pi\{a\} = \{a\}$ ,  $\pi\{b\} = \{d\}$ ,  $\pi\{c\} = \{e\}$ ,  $\pi\{d\} = \{b\}$ ,  $\pi\{e\} = \{c\}$ ,  $\pi\{f\} = \{f\}$  e

$$X(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, considere  $M^{(2,1,1)} = \mathbb{C}S_4\{t^{(2,1,1)}\}$  onde  $\dim M^{(2,1,1)} = 12$ .

Como os elementos da base são  $(2, 1, 1)$ -tablóides, apenas os dois ciclos agindo nesses elementos irão fixar alguns deles. Por exemplo, se  $\sigma = (1, 2)$  então  $\sigma$  fixa apenas os tablóides  $\{\tau\} = \frac{1}{3} \frac{2}{4}$  e  $\{\gamma\} = \frac{1}{4} \frac{2}{3}$ .

Deste modo, obtemos os caracteres dos  $M^\lambda$ 's na ordem lexicográfica reversa.

24	1	6	8	6	3
$S_4$	$(1^4)$	$(2,1,1)$	$(3,1)$	$(4)$	$(2,2)$
$M^{(4)}$	1	1	1	1	1
$M^{(3,1)}$	4	2	1	0	0
$M^{(2,2)}$	6	2	0	0	2
$M^{(2,1,1)}$	12	2	0	0	0
$M^{(1^4)}$	24	0	0	0	0

Como  $M^{(4)}$  é irredutível, então  $M^{(4)} = S^{(4)}$ .

Pelo Teorema 4.4, como  $(4) \supseteq (3, 1)$ , temos que  $M^{(3,1)} \cong S^{(3,1)} \oplus m_j S^{(4)}$  onde  $m_j = \langle \chi_{M^{(3,1)}}, \chi_{S^{(4)}} \rangle = \frac{1}{4!}(1.4 + 6.1.2 + 1.8) = 1$ . Então há uma cópia de  $S^{(4)}$  em  $M^{(3,1)}$  e

subtraindo o carácter de  $M^{(3,1)}$  pelo carácter de  $S^{(4)}$ , encontramos o carácter de  $S^{(3,1)}$ .

$S_4$	$(1^4)$	$(2,1,1)$	$(3,1)$	$(4)$	$(2,2)$
$S^{(4)}$	1	1	1	1	1
$S^{(3,1)}$	3	1	0	-1	-1
$M^{(2,2)}$	6	2	0	0	2
$M^{(2,1,1)}$	12	2	0	0	0
$M^{(1^4)}$	24	0	0	0	0

Procedendo de modo análogo, como  $(4) \supseteq (3,1) \supseteq (2,2)$ , temos que  $M^{(2,2)} \cong S^{(2,2)} \oplus m_i S^{(4)} \oplus m_j S^{(3,1)}$  onde

$$m_i = \langle \chi_{M^{(2,2)}}, \chi_{S^{(4)}} \rangle = \frac{1}{4!}(6 + 12 + 6) = 1$$

$$m_j = \langle \chi_{M^{(2,2)}}, \chi_{S^{(3,1)}} \rangle = \frac{1}{4!}(3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3) = 1$$

e, portanto,  $M^{(2,2)} \cong S^{(2,2)} \oplus S^{(4)} \oplus S^{(3,1)}$ . Subtraindo o carácter de  $S^{(4)}$  e de  $S^{(3,1)}$  obtemos o carácter de  $S^{(2,2)}$ , isto é,

$$\chi_{S^{(2,2)}} = \chi_{M^{(2,2)}} - \chi_{S^{(4)}} - \chi_{S^{(3,1)}}.$$

Deste modo, temos que

$S_4$	$(1^4)$	$(2,1,1)$	$(3,1)$	$(4)$	$(2,2)$
$S^{(4)}$	1	1	1	1	1
$S^{(3,1)}$	3	1	0	-1	-1
$S^{(2,2)}$	2	0	-1	0	2
$M^{(2,1,1)}$	12	2	0	0	0
$M^{(1^4)}$	24	0	0	0	0

Agora, como  $(4) \supseteq (3,1) \supseteq (2,2) \supseteq (2,1,1)$ , temos que

$$M^{(2,2,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus m_i S^{(4)} \oplus m_j S^{(3,1)} \oplus m_k S^{(2,2)} \text{ onde}$$

$$m_i = \langle \chi_{M^{(2,2,1)}}, \chi_{S^{(4)}} \rangle = 1$$

$$m_j = \langle \chi_{M^{(2,2,1)}}, \chi_{S^{(3,1)}} \rangle = \frac{1}{4!}(36 + 12) = 2$$

$$m_k = \langle \chi_{M^{(2,2,1)}}, \chi_{S^{(2,2)}} \rangle = 1$$

e, portanto,  $M^{(2,1,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus S^{(4)} \oplus 2S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}$ . Segue que  $\chi_{S^{(2,2,1)}} = \chi_{M^{(2,1,1)}} - \chi_{S^{(4)}} - 2\chi_{S^{(3,1)}} - \chi_{S^{(2,2)}}$  fornecendo a seguinte tabela.

$S_4$	$(1^4)$	$(2,1,1)$	$(3,1)$	$(4)$	$(2,2)$
$S^{(4)}$	1	1	1	1	1
$S^{(3,1)}$	3	1	0	-1	-1
$S^{(2,2)}$	2	0	-1	0	2
$S^{(2,1,1)}$	3	-1	0	1	-1
$M^{(1^4)}$	24	0	0	0	0



Por fim, como  $(4) \supseteq (3, 1) \supseteq (2, 2) \supseteq (2, 1, 1) \supseteq (1^4)$ ,

$$M^{(1^4)} \cong S^{(1^4)} \oplus m_i S^{(4)} \oplus m_j S^{(3,1)} \oplus m_k S^{(2,2)} \oplus m_l S^{(2,1,1)} \text{ onde}$$

$$m_i = \langle \chi_{M^{(1^4)}}, \chi_{S^{(4)}} \rangle = 1$$

$$m_j = \langle \chi_{M^{(1^4)}}, \chi_{S^{(3,1)}} \rangle = 3$$

$$m_k = \langle \chi_{M^{(1^4)}}, \chi_{S^{(2,2)}} \rangle = 2$$

$$m_l = \langle \chi_{M^{(1^4)}}, \chi_{S^{(2,1,1)}} \rangle = 3$$

e assim  $M^{(1^4)} \cong S^{(1^4)} \oplus S^{(4)} \oplus 3S^{(3,1)} \oplus 2S^{(2,2)} \oplus 3S^{(2,1,1)}$ . Disto seque que  $\chi_{S^{(1^4)}} = \chi_{M^{(1^4)}} - \chi_{S^{(4)}} - 3\chi_{S^{(3,1)}} - 2\chi_{S^{(2,2)}} - 3\chi_{S^{(2,1,1)}}$  e assim obtemos a tabela completa de caracteres de  $S_4$ .

$S_4$	$(1^4)$	$(2,1,1)$	$(3,1)$	$(4)$	$(2,2)$
$S^{(4)}$	1	1	1	1	1
$S^{(3,1)}$	3	1	0	-1	-1
$S^{(2,2)}$	2	0	-1	0	2
$S^{(2,1,1)}$	3	-1	0	1	-1
$S^{(1^4)}$	1	-1	1	-1	1

Embora tenhamos provado que os módulos de Specht são irredutíveis, ainda sabemos pouco sobre suas propriedades. Nos capítulos seguintes, vamos explorar algumas peculiaridades que caracterizam estes módulos.

## 5 SIMETRIZADORES DE YOUNG

Nesse capítulo, nosso objetivo é construir uma outra versão dos módulos irredutíveis de  $S_n$ . Vamos considerar uma sub-representação irredutível de  $M^\lambda$  que corresponderá unicamente a  $\lambda$ , construída a partir dos simetrizadores de Young.

### 5.1 SIMETRIZADORES DE YOUNG

**Definição 5.1.** Sejam  $\mathbb{C}[S_n]$  a álgebra de grupo de  $S_n$  e  $\lambda \vdash n$ . Dado um  $\lambda$ -tableau de Young  $t$  qualquer, o simetrizador de Young é definido por

$$y_t = r_t k_t = \sum_{p \in R_t} p \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q)q = \sum_{\substack{p \in R_t \\ q \in C_t}} \text{sgn}(q)pq. \quad (5.1)$$

Como  $k_t$  e  $r_t$  são ambos elementos de  $\mathbb{C}[S_n]$  então seu produto  $y_t$  é também um elemento de  $\mathbb{C}[S_n]$ . Temos que  $R_t \cap C_t = \{e\}$ , pois se  $\pi \in S_n$  é tal que fixa os elementos nas suas linhas e colunas, então deve deixar cada elemento inalterado, isto é, para todo  $a = 1, \dots, n$  temos  $R_i \cap C_j = \{a\}$  para quaisquer  $i, j$ . Tomando  $\pi \in R_t \cap C_t$  temos  $\pi(a) \in R_i \cap C_j = \{a\}$ , isto é,  $\pi(a) = a$  e, portanto,  $\pi = e$ .

Observe em  $y_t$  que, como  $p$  e  $q$  variam ao longo de todos os elementos de  $R_t$  e  $C_t$ , respectivamente, e  $R_t \cap C_t = \{e\}$ , os produtos  $pq$  assim obtidos são todos distintos. De fato, sejam  $p, p' \in R_t$  e  $q, q' \in C_t$ , suponha que  $p \cdot q = p' \cdot q'$ , isto é,  $(p')^{-1} \cdot p = q \cdot (q')^{-1}$ . Temos que  $(p')^{-1} \cdot p, q \cdot (q')^{-1} \in R_t \cap C_t = \{e\}$  e então  $p = p'$  e  $q = q'$ .

Portanto  $y_t = \sum_{\substack{p \in R_t \\ q \in C_t}} \text{sgn}(q)pq$  é a soma  $\sum \pm g$ , sobre todos os  $g \in S_n$  que podem ser escritos como  $p \cdot q$  com coeficiente  $\pm 1$  correspondente ao sinal de  $q$ . Em particular,  $y_t \neq 0$  e o coeficiente de  $e$  em  $y_t$  é 1. Veremos mais adiante que  $y_t$  é um elemento idempotente a menos de um fator.

**Lema 5.1.** Para  $\pi \in S_n$  temos  $y_{\pi t} = \pi y_t \pi^{-1}$ .

*Demonstração.* Veja que

$$\begin{aligned} y_{\pi t} &= \sum_{p \in R_{\pi t}} p \sum_{q \in C_{\pi t}} \text{sgn}(q)q = \sum_{\substack{p \in R_{\pi t} \\ q \in C_{\pi t}}} \text{sgn}(q)pq \\ &= \sum_{\substack{p_1 \in R_t \\ q_1 \in C_t}} \text{sgn}(q_1)(\pi p_1 \pi^{-1})(\pi q_1 \pi^{-1}) = \pi \left( \sum_{\substack{p_1 \in R_t \\ q_1 \in C_t}} \text{sgn}(q_1)p_1 q_1 \right) \pi^{-1} \\ &= \pi y_t \pi^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Definição 5.2.** Para cada  $\lambda \vdash n$  denotamos  $V_\lambda = \mathbb{C}S_n y_t$  o  $S_n$ -módulo associado a  $\lambda$ .

**Proposição 5.1.** Sejam  $\lambda \vdash n$  e  $t_1, t_2$   $\lambda$ -tableaux. Temos que  $\mathbb{C}[S_n]y_{t_1} \cong \mathbb{C}[S_n]y_{t_2}$  como  $S_n$ -módulos.

*Demonstração.* Como  $S_n$  age transitivamente nos tableaux, existe  $\sigma \in S_n$  tal que  $t_2 = \sigma t_1$ , pelo Lema 5.1 temos  $y_{t_2} = \sigma y_{t_1} \sigma^{-1}$ , logo  $\mathbb{C}[S_n]y_{t_2} = \mathbb{C}[S_n]\sigma y_{t_1} \sigma^{-1} = (\mathbb{C}[S_n]y_{t_1})\sigma^{-1}$ .

Considere  $\theta : \mathbb{C}[S_n]y_{t_1} \mapsto (\mathbb{C}[S_n]y_{t_1})\sigma^{-1}$  como sendo a aplicação linear  $x \mapsto x\sigma^{-1}$ , desde que  $x \in \mathbb{C}[S_n]y_{t_1}$  temos  $x = ay_{t_1}$  para algum  $a \in \mathbb{C}[S_n]$  e então  $x\sigma^{-1} = (a\sigma^{-1})\sigma y_{t_1} \sigma^{-1} = a\sigma^{-1}y_{t_2} \in \mathbb{C}[S_n]y_{t_2}$ . A aplicação  $\theta$  está bem definida.

Temos que  $\theta$  é um homomorfismo de  $S_n$ -módulos, isto é, dado  $\pi \in S_n$  temos que  $\theta(\pi x) = \pi\theta(x)$  e como o  $\text{Ker}(\theta) = \{0\}$  e  $\text{Im}(\theta) = \mathbb{C}[S_n]y_{t_2}$ , logo  $\theta$  é um isomorfismo de  $S_n$ -módulos, portanto  $\mathbb{C}[S_n]y_{t_1} \cong \mathbb{C}[S_n]y_{t_1}\sigma^{-1} = \mathbb{C}[S_n]y_{t_2}$ .  $\square$

**Exemplo 5.1.** Considere  $\lambda = (n)$ .

Então  $k_t = e$ ,  $y_t = r_t = \sum_{\pi \in S_n} \pi$  e  $\sigma y_t = y_t$  para todo  $\sigma \in S_n$  de modo que

$$V_{(n)} = \mathbb{C}S_n \left( \sum_{\pi \in S_n} \pi \right) = \mathbb{C}y_t$$

é o módulo correspondente à representação trivial.

**Exemplo 5.2.** Considere  $\lambda = (1^n)$ .

Então  $r_t = e$ ,  $y_t = k_t = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi$  e  $\sigma y_t = \text{sgn}(\sigma)y_t$  para todo  $\sigma \in S_n$  tal que

$$V_{(1^n)} = \mathbb{C}S_n \left( \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi \right)$$

é o módulo correspondente à representação sinal.

**Exemplo 5.3.** Tomando  $\lambda = (2, 1) \vdash 3$  e  $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ .

Então temos que  $R_t = \{e, (1, 2)\}$  e  $C_t = \{e, (1, 3)\}$  e

$$r_t = e + (1, 2)$$

$$k_t = e - (1, 3)$$

$$y_t = (e + (1, 2))(e - (1, 3))$$

$$y_t = e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2).$$

A multiplicação à direita por  $y_t$  com cada elemento de  $S_3$  nos dá,

$$\begin{aligned}
ey_t &= y_t \\
(1, 3, 2)y_t &= (1, 3, 2) + (2, 3) - (1, 2) - (1, 2, 3) \\
(1, 2, 3)y_t &= (1, 2, 3) + (1, 3) - (2, 3) - e = -y_t - (1, 3, 2)y_t \\
(1, 2)y_t &= (1, 2) + e - (1, 3, 2) - (1, 3) = y_t \\
(2, 3)y_t &= (2, 3) + (1, 3, 2) - (1, 2, 3) - (1, 2) = (1, 3, 2)y_t \\
(1, 3)y_t &= (1, 3) + (1, 2, 3) - e - (2, 3) = -y_t - (1, 3, 2)y_t.
\end{aligned}$$

Como todos os produtos podem ser expressados como combinação linear de  $y_t$  e  $(1, 3, 2)y_t$ , então o subespaço gerado pela multiplicação à esquerda de  $y_t$  com  $\mathbb{C}[S_3]$  é de dimensão 2, ou seja,

$$V_{(2,1)} = \mathbb{C}\langle y_t, (1, 3, 2)y_t \rangle.$$

**Lema 5.2.** Suponha que não existem  $i, j$  que estão simultaneamente na mesma linha de  $t$  e na mesma coluna de  $gt = t'$ ,  $g \in S_n$ . Então existem  $p \in R_t$  e  $q \in C_t$  tais que  $g = p \cdot q$ .

*Demonstração.* Seja  $l$  o número de linhas de  $t$ . Temos, por hipótese, que os elementos da primeira linha de  $t$  estão em diferentes colunas em  $gt = t'$ . Logo, existem  $q'_1 \in C_{t'} = C_{gt} = gC_tg^{-1}$  e  $p_1 \in R_t$  tais que  $p_1t$  e  $q'_1t'$  tem a mesma primeira linha. Considerando os elementos da segunda linha de  $t$  em  $q'_1t'$  eles aparecem abaixo da primeira linha e não estão na mesma coluna de  $q'_1t'$ . Logo, existem  $q'_2 \in C_{q'_1t'} = C_{t'}$  e  $p_2 \in R_t$  tais que  $p_2p_1t$  e  $q'_2q'_1t'$  tem as mesmas duas primeiras linhas. Repetindo o argumento para o resto do tableau  $t$ , obteremos  $q' = q'_l \cdots q'_2q'_1 \in C_{t'}$  e  $p = p_l \cdots p_2p_1 \in R_t$  tais que  $pt = q't' = q'gt$  e assim  $p = q'g$ . Como  $q' \in C_{t'} = gC_tg^{-1}$ , existe  $q \in C_t$  tal que  $q' = gq^{-1}g^{-1}$ . Portanto, temos que  $q = g^{-1}(q')^{-1}g$  e  $g = pq$ .  $\square$

**Lema 5.3.** 1. Para  $p \in R_t$ , temos que  $p \cdot r_t = r_t \cdot p = r_t$ .

2. Para  $q \in C_t$ , temos que  $(\text{sgn}(q)q) \cdot k_t = k_t \cdot (\text{sgn}(q)q) = k_t$ .

3. Para todo  $p \in R_t$  e  $q \in C_t$ ,  $p \cdot y_t(\text{sgn}(q)q) = y_t$  e, a menos de uma multiplicação por escalar,  $y_t$  é o único elemento em  $\mathbb{C}[S_n]$  que satisfaz essa igualdade.

*Demonstração.* Se  $p \in R_t$  então  $p \cdot r_t = p \sum_{\sigma \in R_t} \sigma = \sum_{\sigma \in R_t} p\sigma = r_t$ . Se  $q \in C_t$  então

$$(\text{sgn}(q)q) \cdot k_t = (\text{sgn}(q)q) \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\sigma = \text{sgn}(q) \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(q)\text{sgn}(q\sigma)q\sigma = k_t.$$

Similarmente, obtemos  $r_t \cdot p = r_t$  e  $k_t \cdot (\text{sgn}(q)q) = k_t$ .

Observe agora que, pelos itens 1 e 2,  $p \cdot y_t(\text{sgn}(q)q) = p \cdot r_t \cdot k_t(\text{sgn}(q)q) = r_t \cdot k_t = y_t$ , para todo  $p \in R_t$  e  $q \in C_t$ . Tome  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ . Podemos escrever  $x = \sum_{g \in S_n} n_g g$ , onde

$n_g \in \mathbb{C}$ . Se  $x$  satisfaz a condição do item 3 então  $\sum_{g \in S_n} n_g g = \sum_{g \in S_n} n_g p \cdot g \cdot (\text{sgn}(q)q) = \text{sgn}(q) \sum_{g \in S_n} n_g p \cdot g \cdot q = \text{sgn}(q) \sum_{g \in S_n} n_{pgq} g$ , para todo  $p \in R_t$  e  $q \in C_t$ . Então temos  $n_{pgq} = \text{sgn}(q^{-1})n_g = \text{sgn}(q)n_g$ . Em particular, tomando  $g = e$ ,  $n_{pq} = \text{sgn}(q)n_e$ .

Se  $g \in R_t C_t = \{pq \mid p \in R_t, q \in C_t\}$  então

$$x = \sum_{g \in S_n} n_g g = \sum_{g \in R_t C_t} n_g g = \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} n_{pq} pq = \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q) n_e pq = n_e y_t.$$

Portanto, é suficiente verificar que  $n_g = 0$  se  $g \notin R_t C_t$ .

Suponha que  $g \notin R_t C_t$ . Então, pelo Lema 5.2, existem dois inteiros distintos que estão na mesma linha em  $t$  e na mesma coluna em  $gt = t'$ . Segue que  $\pi$  é a transposição desses dois inteiros  $\pi = (i, j) = p$  e assim  $\pi \in R_t$  e  $\pi \in C_{t'}$ . Então existe  $q \in C_t$  tal que  $\pi = gqg^{-1}$ . Sabemos que dois elementos em  $S_n$  são conjugados se eles tem o mesmo tipo cíclico. Como  $q = g^{-1}\pi g$  e  $\pi$  é uma transposição temos que  $q$  é também uma transposição. Temos então  $pgq = pgg^{-1}pg = g$  e  $n_g = n_{pgq} = \text{sgn}(q)n_g = -n_g$  e, como  $\mathbb{C}$  tem característica zero, temos que  $n_g = 0$ .  $\square$

**Lema 5.4.** Sejam  $t$  e  $s$ , respectivamente, um  $\lambda$ -tableau e  $\mu$ -tableau quaisquer. Lembrando que  $r_t = \sum_{p \in R_t} p$  e  $k_s = \sum_{q \in C_s} \text{sgn}(q)q$ .

1. Se  $\lambda > \mu$  então, para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ ,  $r_t \cdot x \cdot k_s = 0$ . Mais ainda,  $k_s \cdot x \cdot r_t = 0$ . Em particular, se  $\lambda > \mu$  então  $y_t \cdot y_s = 0$ .
2. Para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ ,  $y_t \cdot x \cdot y_t =$  é um múltiplo escalar de  $y_t$ . Em particular,  $y_t \cdot y_t = n_t y_t$ , para algum  $n_t \in \mathbb{C}$ .
3. Se  $\lambda \neq \mu$  então  $y_t \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot y_s = 0$ . Em particular,  $y_t \cdot y_s = 0$ .

*Demonstração.* 1. Tome  $x \in S_n$ . Note que se tomarmos  $s' = xs$ , teremos que  $s'$  é também um tableau de forma  $\lambda$ . Então é suficiente mostrar que  $r_t \cdot k_{s'} = 0$ , pois  $0 = r_t \cdot k_{xs} = r_t x k_s x^{-1} = 0$  e isso implica que  $r_t x k_s = 0$ .

Como  $\lambda > \mu$ , então, pelo Lema 3.1 (Lema da dominância para partições), temos que  $\mu \not\leq \lambda$ . Assim, pelo Lema 5.2, existem dois inteiros na mesma coluna de  $t$  e na mesma linha de  $s'$ . Se  $\pi$  é a transposição desses dois inteiros, então  $r_t \cdot \pi = r_t$  e  $\pi k_{s'} = \text{sgn}(\pi^{-1})k_{s'} = -k_{s'}$  e  $r_t k_{s'} = r_t \cdot \pi \cdot \pi \cdot k_{s'} = -r_t k_{s'}$ . Portanto,  $r_t k_{s'} = 0$  pelo fato de  $\mathbb{C}$  ter característica zero. Em particular,  $y_t \cdot y_s = (r_t k_t) \cdot (r_s k_s) = r_t (k_t \cdot r_s) k_s$ . Como  $k_t r_s \in \mathbb{C}[S_n]$ , temos que  $y_t \cdot y_s = 0$ .

2. Afirmamos que, para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ , existe  $n_t \in \mathbb{C}$  tal que  $y_t \cdot x \cdot y_t = n_t y_t$ . De fato, para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ ,  $p_1 \in R_t$ ,  $q_1 \in C_t$  temos, pela parte 3 do Lema 5.3, que  $p_1 y_t = y_t$

tomando  $q = e \in C_t$  e que  $y_t q_1 = \text{sgn}(q_1) y_t$  tomando  $p = e \in R_t$ . Então

$$p_1 (y_t x y_t) q_1 = (p_1 y_t) x (y_t q_1) = \text{sgn}(q_1) y_t x y_t$$

isso implica que  $p_1 (y_t x y_t) \text{sgn}(q_1) q_1 = y_t x y_t$ . Pela parte 3 do Lema 5.3, existe  $n_t \in \mathbb{C}$  tal que  $y_t x y_t = n_t y_t$ . Em particular, para  $x = e$ ,  $y_t y_t = n_t y_t$  para algum  $n_t \in \mathbb{C}$ .

3. Se  $\lambda > \mu$  temos, pela parte 1, que  $r_t \cdot x \cdot k_s = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ . Então  $y_t x y_s = (r_t k_t) x (r_s k_s) = r_t (k_t x r_s) k_s = 0$  pois  $k_t x r_s \in \mathbb{C}[S_n]$ .

Se  $\lambda < \mu$  temos, pela parte 1, que  $k_t \cdot x \cdot r_s = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{C}[S_n]$ . Então  $y_t x y_s = (r_t k_t) x (r_s k_s) = r_t (k_t x r_s) k_s = 0$ .  $\square$

**Exemplo 5.4.** Sejam  $\lambda, \mu$  partições de  $n$ ,  $t$   $\lambda$ -tableau e  $s$   $\mu$ -tableau. Suponha que existam  $i, j$  que estão simultaneamente na mesma linha de  $s$  e na mesma coluna de  $t$ . Tomando  $\tau = (i, j)$  temos que  $\tau \in R_s$  e  $\tau \in C_t$  e, portanto,  $k_t r_s = k_t \tau r_s = -k_t r_s$ , logo  $k_t r_s = 0$ . Assim,  $y_t y_s = 0$ . Mas podemos ter  $y_s y_t \neq 0$ .

Se tomarmos  $\lambda = \mu = (2, 1) \vdash 3$  e  $t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ ,  $t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$ , pelo Exemplo 5.3 temos

$$y_{t_1} = e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2).$$

De forma análoga, encontramos

$$y_{t_2} = e + (2, 3) - (1, 2) - (1, 3, 2).$$

Note que 1 e 2 estão na mesma linha de  $t_1$  e na mesma coluna de  $t_2$  e, por essa observação que fizemos acima, temos que  $y_{t_2} y_{t_1} = 0$ . Porém

$$\begin{aligned} y_{t_1} y_{t_2} &= (e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2))(e + (2, 3) - (1, 2) - (1, 3, 2)) \\ &= 3((2, 3) - (1, 3) + (1, 2, 3) - (1, 3, 2)) \neq 0. \end{aligned}$$

## 5.2 OS MÓDULOS IRREDUTÍVEIS $V_\lambda$

Embora  $y_t$  não seja idempotente ele é múltiplo escalar de um elemento idempotente de  $\mathbb{C}[S_n]$ . Veremos no próximo teorema que  $y_t$  gera um ideal minimal à esquerda de  $\mathbb{C}[S_n]$ , ou seja um  $S_n$ -módulo irredutível, e daremos a descrição das representações irredutíveis de  $S_n$ . Contudo, antes de enuncia-ló, iremos fazer menção a um lema que será importante para a demonstração desse teorema.

**Lema 5.5.** Seja  $I \neq 0$  um ideal à esquerda de um anel  $R$ . Se  $I$  é um termo da decomposição de  $R$  em uma soma direta então  $I^2 \neq 0$ .

*Demonstração.* Uma vez que  $I$  é um termo da decomposição de  $R$  em uma soma direta, existe um ideal à esquerda  $J$  de  $R$  tal que  $I \oplus J = R$ . Em particular, existem  $i \in I$  e  $j \in J$

tais que  $1 = i + j$ . Multiplicando ambos os lados por  $i$  à esquerda, obtemos  $i = i^2 + ij$ . Então  $I^2 \neq 0$  pois, caso contrário,  $i = ij \in IJ \subset I \cap J = 0$  e  $1 = j \in J$ . Assim, teríamos  $J = R$  e, conseqüentemente,  $I = 0$ .  $\square$

**Teorema 5.1.** 1. Cada  $V_\lambda = \mathbb{C}S_n y_t$  é uma representação irredutível de  $S_n$ , onde  $t$  é uma  $\lambda$ -tableau qualquer.

2. Se  $\lambda \neq \mu$  então  $V_\lambda$  e  $V_\mu$  não são isomorfos.

*Demonstração.* 1. Seja  $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t$ , para um dado  $y_t$ . Assuma que  $V_\lambda = W_1 \oplus W_2$ , onde  $W_1$  e  $W_2$  são submódulos de  $V_\lambda$ . Então, pelo Lema 5.4, temos que  $y_t W_i \subseteq y_t V_\lambda \subset \mathbb{C}y_t$ . Então  $y_t W_i$  é zero ou unidimensional.

Afirmamos que  $y_t V_\lambda \neq 0$ , isto é, que o número  $n_\lambda$  do Lema 5.4 não é nulo. Para ver isto, consideramos a projeção de  $\mathbb{C}[S_n]$  em  $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t$  que é dada pela multiplicação à direita por um elemento  $\varphi \in \mathbb{C}[S_n]$ . Esse elemento  $\varphi$  deve pertencer a  $V_\lambda$  pois  $1 \cdot \varphi = \varphi$  e, pela definição de uma projeção  $\varphi = \varphi^2 \in V_\lambda \cdot V_\lambda$ . Suponha que  $y_t V_\lambda = 0$ . Então  $V_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t V_\lambda = 0$  e  $\varphi = \varphi^2 \in V_\lambda V_\lambda = 0$ . Segue pelo Lema 5.5 que  $V_\lambda = 0$ . Entretanto, sabemos que, como o elemento não nulo  $y_t \in V_\lambda$ , temos que o módulo à esquerda  $V_\lambda \neq 0$ .

Agora, vamos mostrar que um dos  $y_t W_i$  deve ser igual a  $\mathbb{C}y_t$ , uma vez que  $y_t V_\lambda = y_t W_1 \oplus y_t W_2$  e  $y_t V_\lambda \neq 0$ . Como  $y_t W_i \subseteq W_i$ , um dos  $W_i$  contém  $y_t$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $W_1$  contém  $y_t$ . De maneira similar à prova anterior, mostramos que  $y_t W_1 \neq 0$  e, portanto, devemos ter  $y_t W_1 = \mathbb{C}y_t$ . Então

$$V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t = \mathbb{C}[S_n](\mathbb{C}y_t) = \mathbb{C}[S_n](y_t W_1) \subset W_1 \quad (5.2)$$

e  $W_2 W_2 \subset \mathbb{C}[S_n]y_t W_2 = 0$ , o que implica que  $W_2 = 0$  e  $V_\lambda = W_1$ . A inclusão à direita em (5.2) segue do fato que  $W_1$  é um submódulo de  $V_\lambda$ , isto é, é invariante sob a ação de  $\mathbb{C}[S_n]$ .

2. Podemos assumir sem perda de generalidade, que  $\lambda > \mu$ . Então  $y_t V_\lambda = \mathbb{C}y_t \neq 0$  e  $y_t V_\mu = y_t \mathbb{C}[S_n]y_s = 0$ , onde  $s$  é um  $\mu$ -tableau. Como  $V_\lambda$  e  $V_\mu$  tem  $\mathbb{C}[S_n]$ -ações distintas, então eles não podem ser  $S_n$ -módulos isomorfos.  $\square$

Em suma, temos que cada partição dá origem a um  $S_n$ -módulo irredutível  $V_\lambda$ . Mais ainda, vimos que partições distintas dão origem a módulos inequivalentes entre si, logo os módulos  $V_\lambda$  são a menos de isomorfismo, todos os módulos irredutíveis de  $S_n$ .

**Proposição 5.2.** Se  $I$  é um ideal minimal à esquerda do anel  $R$  então ou  $I^2 = 0$  ou  $I$  é gerado por algum idempotente não nulo.

*Demonstração.* Suponha que  $I^2 \neq 0$ . Então existe  $a \in I$  tal que  $Ia \neq 0$  e, desde que  $Ia$  é um ideal à esquerda contido em  $I$ ,  $Ia = I$  ( $I$  é minimal). Em particular, existe  $c \in I$  tal que  $a = ca$ . Seja  $J = \{x \in I; xa = 0\}$ . Então  $J$  é um ideal à esquerda contido em  $I$  e, uma vez que  $c \notin J$  temos que  $J = 0$ . Por outro lado,  $c^2 - c \in J$ , assim sendo  $c^2 = c$ . Agora  $Rc$  é um ideal à esquerda contido em  $I$  e, uma vez que  $c \neq 0$  (pois se fosse  $a = 0$  e  $Ia = 0$ ), obtemos  $Rc \neq 0$ . Então  $I = Rc$ .  $\square$

Sabemos pelo Teorema 5.1 que  $V_\lambda$  é irredutível, e desde que o elemento não nulo  $y_t \in V_\lambda$ , temos que o módulo à esquerda  $V_\lambda \neq 0$ . Segue pelo Lema 5.5 que  $V_\lambda^2 \neq 0$ . Logo devemos ter que  $V_\lambda$  é gerado por algum idempotente não nulo. Observe que se tomarmos  $x = n_t^{-1}y_t$  de modo que  $x^2 = x \neq 0$  então  $x$  é um idempotente e teremos que  $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t = \mathbb{C}[S_n]x$ .

Sabemos pelo Lema 5.4 que  $y_t y_t = n_t y_t$ . Vamos agora encontrar o valor de  $n_t$ .

**Lema 5.6.** Para qualquer  $\lambda \vdash n$  e qualquer  $\lambda$ -tableau  $t$ , tem-se que  $n_t = \frac{n!}{\dim V_\lambda}$ .

*Demonstração.* Seja  $F$  o operador  $\mathbb{C}$ -linear de  $\mathbb{C}[S_n]$  definido por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}[S_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \\ x &\longmapsto xy_t \end{aligned}$$

Vamos considerar a matriz de  $F$  com respeito à  $\mathbb{C}$ -base natural de  $\mathbb{C}[S_n]$ , consistindo dos elementos  $\sigma_1 = (e), \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}$  de  $S_n$ . Se  $y_t = \sum n_i \sigma_i, n_i \in \mathbb{C}$ , temos que

$$\begin{aligned} F(\sigma_1) &= \sigma_1 \cdot y_t = n_1 \sigma_1 + \dots \\ F(\sigma_2) &= \sigma_2 \cdot y_t = \dots + n_1 \sigma_2 + \dots \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ F(\sigma_j) &= \sigma_j \cdot y_t = \dots + \dots + n_1 \sigma_j + \dots \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Queremos saber o traço da matriz  $F$  e, para isto, atentamos para os elementos na diagonal principal. Veja que  $\sigma_j \cdot \sigma_i = \sigma_j$  se, e somente se,  $\sigma_i = e$ . Então a  $j$ -ésima posição de  $\sigma_j \cdot y_t$  tem coeficiente  $n_1$ . O traço da matriz de  $F$  nessa base é  $n_1 n!$ , como  $n_1 = 1$ , então o traço da matriz de  $F$  nessa base é

$$\text{tr}(F) = n!. \quad (5.3)$$

Agora computando o traço da matriz de  $F$  em uma base diferente, temos que obter o mesmo resultado já que o traço independe da escolha da base. Essa base consiste em uma base para  $\ker(F)$  unida com a pré-imagem de uma base para  $\text{im}(F) = V_\lambda$ .

$$\begin{aligned} F|_{V_\lambda} : V_\lambda &\longrightarrow V_\lambda \\ y_t &\longmapsto y_t y_t = n_t y_t \end{aligned}$$



Se  $z \in V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t$  então  $z = wy_t, w \in \mathbb{C}[S_n]$ . Logo,  $F(z) = zy_t = wy_t^2 = wn_t y_t = n_t z$ . Seja  $\{v_1, \dots, v_{n!}\}$  uma base de  $\mathbb{C}[S_n]$  tal que  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é uma base de  $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]y_t$ , onde a  $\dim \mathbb{C}[S_n]y_t \geq 1$  pois  $y_t$  é um elemento não nulo de  $V_\lambda$ , isto é,

$$\begin{aligned} F(v_1) &= v_1 y_t = n_t v_1 \\ F(v_2) &= v_2 y_t = n_t v_2 \\ &\vdots = \vdots = \vdots \\ F(v_k) &= v_k y_t = n_t v_k \\ F(v_{k+1}) &= v_{k+1} y_t = + \dots + 0 \\ &\vdots = \vdots = \vdots \\ F(v_{n!}) &= v_{n!} y_t = + \dots + 0. \end{aligned}$$

Veja que  $zy_t \in \mathbb{C}[S_n]y_t = V_\lambda$  para  $z = v_{k+1}, \dots, v_{n!}$  logo  $F(v_{k+1}), \dots, F(v_{n!})$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de  $V_\lambda$ .

$$\begin{bmatrix} n_t I_{V_\lambda} & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo, temos que

$$\text{tr}(F) = n_t \dim V_\lambda. \quad (5.4)$$

Igualando as Equações (5.3) e (5.4), temos que  $n_t \dim V_\lambda = n!$ .  $\square$

### 5.3 COMPARAÇÃO DOS MÓDULOS DE SPECHT E DOS MÓDULOS GERADOS PELOS SIMETRIZADORES DE YOUNG

Veremos agora como os simetrizadores de Young se relacionam com a construção dos módulos de Specht.

Seja  $H \leq G$ . Definimos  $\mathbb{C}[G/H]$  como o espaço vetorial cuja base é formada pelas classes laterais  $gH, g \in G$ . Existe uma representação natural  $\pi$  de  $G$  em  $\mathbb{C}[G/H]$  definida por  $\pi(g_1)g_2H = g_1g_2H$ .

**Lema 5.7.** Se  $a = \sum_{h \in H} h \in \mathbb{C}[G]$  então  $\mathbb{C}[G]a \cong \mathbb{C}[G/H]$  como representações.

*Demonstração.* Primeiro, note que  $ha = a$  para todo  $h \in H$ . Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow \mathbb{C}[G]a \\ gH &\longmapsto ga \end{aligned}$$

está bem definida. Estendendo essa aplicação por linearidade, obtemos  $\phi : \mathbb{C}[G/H] \rightarrow \mathbb{C}[G]a$ . Temos que  $\phi$  é claramente sobrejetiva. Agora vamos mostrar a injetividade. Sejam

$g_i \in G$  os representantes para as classes laterais de  $H$  em  $G$ , de modo que qualquer  $x \in \mathbb{C}[G/H]$  pode ser reescrito como  $x = \sum_i c_i g_i H$ ,  $c_i \in \mathbb{C}$ . Então  $\phi(x) = \sum_i \sum_{h \in H} c_i g_i h$ . Uma vez que os elementos  $g_i h$  nessa soma são mutuamente distintos, segue que  $\ker(\phi) = 0$ .  $\square$

**Teorema 5.2.** Seja  $\lambda \vdash n$ . Então todo  $S_n$ -módulo irredutível  $S^\lambda$  é isomorfo ao  $S_n$ -módulo irredutível  $V_\lambda$ .

*Demonstração.* Seja  $M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t\} | \{t\} \text{ é um } \lambda\text{-tablóide}\}$ . Pelo Teorema 3.1, sabemos que  $M^\lambda \cong \mathbb{C}[S_n/R_i]$ . Pelo Lema 5.7, temos que  $\mathbb{C}[S_n/R_i] \cong \mathbb{C}[S_n]r_t$  e, portanto, temos que

$$M^\lambda \cong \mathbb{C}\left\{\sum_{\sigma \in R_t} \sigma t \mid t \text{ é um } \lambda\text{-tableau}\right\}. \quad (5.5)$$

O módulo de Specht é definido por  $S^\lambda = \mathbb{C}\{k_t \{t\} | \{t\} \text{ é um } \lambda\text{-tablóide}\}$ . Pelo isomorfismo (5.5), temos que

$$S^\lambda \cong \mathbb{C}\left\{k_t \sum_{\sigma \in R_t} \sigma t \mid t \text{ é um } \lambda\text{-tableau}\right\}.$$

Usando o fato de que  $S_n$  age transitivamente nos tableaux, temos que

$$S^\lambda \cong \mathbb{C}\left\{k_{\pi t_1} \sum_{\sigma \in R_{\pi t_1}} \sigma \pi t_1 \mid \pi \in S_n\right\} \text{ onde } t_1 \text{ é um } \lambda\text{-tableau qualquer.}$$

Na álgebra de grupo, isso corresponde a

$$\begin{aligned} S^\lambda &\cong \mathbb{C}\left\{k_{\pi t_1} \sum_{\sigma \in R_{\pi t_1}} \sigma \pi \mid \pi \in S_n\right\} \subset \mathbb{C}S_n \\ &= \mathbb{C}\{k_{\pi t_1} r_{\pi t_1} \pi \mid \pi \in S_n\} \\ &= \mathbb{C}\{\pi k_{t_1} \pi^{-1} \pi r_{t_1} \pi^{-1} \pi \mid \pi \in S_n\} \\ &= \mathbb{C}\{\pi k_{t_1} r_{t_1} \mid \pi \in S_n\} \\ &= \mathbb{C}[S_n]k_{t_1} r_{t_1} \\ &= \mathbb{C}[S_n]y_{t_1} \\ &= V_\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

Se  $n = 3$ , seja  $\lambda = (2, 1)$ , pelo Exemplo 4.3 temos que

$$\begin{aligned} S^{(2,1)} &= \mathbb{C}\left\{\frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}}, \quad \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}}, \quad \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}}\right\} \\ &= \mathbb{C}\left\{\frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}}, \quad \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}}\right\}. \end{aligned}$$

No Exemplo 5.3, encontramos  $V_{(2,1)} = \mathbb{C}\langle y_t, (1, 3, 2)y_t \rangle$ . Pelo Teorema 5.2, temos que  $S^{(2,1)} \cong V_{(2,1)}$ . Então para essa partição temos duas formas de escrever um  $S_3$ -módulo

irredutível. Note que o processo que utilizamos no Exemplo 5.3 para encontrar  $V_{(2,1)}$  requer mais trabalho do que o processo para encontrar  $S^{(2,1)}$  e, além disso, podemos visualizar melhor os elementos da base de  $S^{(2,1)}$ .

No caso geral, é importante também destacar que cada uma destas abordagens tem suas vantagens próprias dependendo do contexto. O método dos simetrizadores de Young surge de modo mais natural como um caso particular do fato de que módulos irredutíveis são dados por ideais gerados por elementos idempotentes e obtidos pela projeção correspondente. Entretanto, neste processo, é necessário assumir que o corpo tenha característica zero. Por outro lado, a abordagem dada pelos módulos de Specht permite a construção de  $S_n$ -módulos irredutíveis sobre qualquer corpo (veja James [JA]). Além disto, este método fornece uma descrição mais clara dos módulos como veremos no capítulo seguinte ao descrever uma base destes módulos.

## 6 BASE PARA O MÓDULO DE SPECHT

Em geral, os politablóides que geram  $S^\lambda$  não são linearmente independentes. Por exemplo, como vimos no Exemplo 4.2, qualquer par de politablóides em  $S^{(1^n)}$  são linearmente dependentes. Nossa tarefa nessa seção é encontrar de maneira explícita uma base adequada para  $S^\lambda$ . Para isso, introduziremos o conceito de tableau padrão para determinarmos um subconjunto que formará uma base para o módulo de Specht  $S^\lambda$ .

### 6.1 TABLEAUX PADRÃO

**Definição 6.1.** Um tableau  $t$  é padrão se as linhas e colunas de  $t$  estão em uma sequência crescente. O número de todos  $\lambda$ -tableaux padrão é denotado por  $f^\lambda$ . Um tablóide  $\{t\}$  é um tablóide padrão se existe um tableau padrão na classe de equivalência  $\{t\}$ . Um politablóide  $\mathbf{e}_t$  é um politablóide padrão se  $t$  é um tableau padrão.

**Exemplo 6.1.** Tomando  $n = 9$  e  $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ , temos que  $t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 5 & 8 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$  é padrão, mas

$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 3 & 8 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$  não é.

**Exemplo 6.2.** Os únicos tableaux padrões para  $\lambda = (2, 1)$  são  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$  e  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ .

### 6.2 LEMA DA DOMINÂNCIA PARA TABLÓIDE LINHA E TABLÓIDE COLUNA

**Definição 6.2.** Uma composição de  $n$  é uma sequência ordenada de inteiros não negativos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  tais que  $\sum_i \lambda_i = n$ . Os inteiros  $\lambda_i$  são chamados de *partes* da composição.

Note que não há uma condição de decrescimento nas partes de uma composição. Portanto  $(1, 3, 2)$  e  $(3, 2, 1)$  são ambas composições de 6, mas apenas a segunda é uma partição. As definições de um diagrama de Ferrers e tableaux são estendidas para composição de uma maneira óbvia. Contudo não há  $\lambda$ -tableau padrão se  $\lambda$  não é uma partição.

A ordem de dominância nas composições é definida exatamente como na Definição 3.2, neste caso  $\lambda_1, \dots, \lambda_i$  e  $\mu_1, \dots, \mu_i$  são apenas as primeiras  $i$  partes das suas respectivas composições.

Agora suponha que  $\{t\}$  é um tablóide com  $\text{sh } t = \lambda \vdash n$ . Para cada índice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , seja  $\{t^i\}$  o tablóide formado por todos elementos menores ou iguais a  $i$  em  $\{t\}$  e  $\lambda^i$  a composição que é a forma de  $\{t^i\}$ .

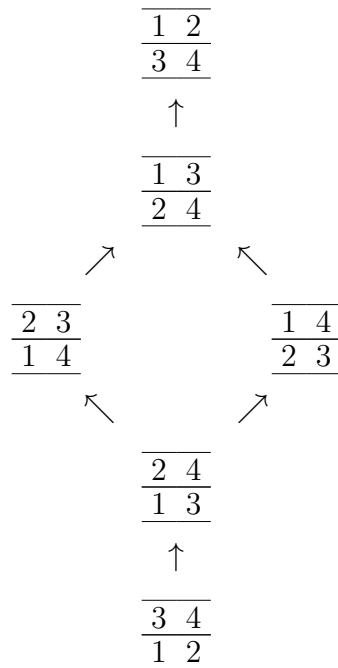
**Exemplo 6.3.** Considere  $\{t\} = \overline{\frac{2 \ 4}{1 \ 3}}$ . Então

$$\begin{aligned} \{t^1\} &= \overline{\frac{\emptyset}{1}}, & \{t^2\} &= \overline{\frac{2}{1}}, & \{t^3\} &= \overline{\frac{2}{1 \ 3}}, & \{t^3\} &= \overline{\frac{2 \ 4}{1 \ 3}}, \\ \lambda^1 &= (0, 1), & \lambda^2 &= (1, 1), & \lambda^3 &= (1, 2), & \lambda^4 &= (2, 2). \end{aligned}$$

A ordem de dominância nos tablóides é determinada pela ordem de dominância nas composições correspondentes.

**Definição 6.3.** Sejam  $\{s\}$  e  $\{t\}$  dois tablóides com sequências de composição  $\lambda^i$  e  $\mu^i$  respectivamente. Então  $\{s\}$  domina  $\{t\}$ , escrevemos  $\{s\} \supseteq \{t\}$  se  $\lambda^i \supseteq \mu^i$  para todo  $i$ .

O diagrama de Hasse para essa ordenação dos  $(2, 2)$ -tablóides é como segue:



Onde  $\overline{\frac{2 \ 3}{1 \ 4}}$  e  $\overline{\frac{1 \ 4}{2 \ 3}}$  são incomparáveis.

Assim como para partições, há o Lema da dominância para tablóides.

**Lema 6.1.** (Lema da Dominância para tablóides linha)

Se  $k < l$  e  $k$  está em uma linha inferior em relação a linha que contém  $l$  em  $\{t\}$ , então

$$\{t\} \triangleleft (k, l)\{t\}.$$

*Demonstração.* Suponha que  $\{t\}$  e  $(k, l)\{t\}$  tenham sequências de composição  $\lambda^i$  e  $\mu^i$ , respectivamente. Temos que  $k < l$  está na linha superior à linha que contém  $l$  em  $(k, l)\{t\}$  então para  $i < k$  ou  $i \geq l$  teremos que  $\lambda^i = \mu^i$ .

Agora considere o caso onde  $k \leq i \leq l$ . Se  $r$  e  $q$  são as linhas de  $\{t\}$  nas quais  $k$  e  $l$  aparecem, respectivamente, então  $\lambda^i = \mu^i$  com a  $q$ -ésima parte diminuída por 1 e a  $r$ -ésima parte acrescentada por 1. Desde que  $q < r$  por suposição,  $\lambda^i \triangleleft \mu^i$ .  $\square$

**Exemplo 6.4.** Sejam  $\{t\} = \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \end{array}}$  e  $\{s\} = (4, 7)\{t\} = \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 8 \end{array}}$  com as seguintes sequências de composição

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= (0, 1) & \mu^1 &= (0, 1) \\ \lambda^2 &= (1, 1) & \mu^2 &= (1, 1) \\ \lambda^3 &= (1, 2) & \mu^3 &= (1, 2) \\ \lambda^4 &= (1, 3) & \mu^4 &= (2, 2) \\ \lambda^5 &= (2, 3) & \mu^5 &= (3, 2) \\ \lambda^6 &= (3, 3) & \mu^6 &= (4, 2) \\ \lambda^7 &= (4, 3) & \mu^7 &= (4, 3) \\ \lambda^8 &= (4, 4) & \mu^8 &= (4, 4) \end{aligned}$$

O Lema da dominância põe uma restrição em que tableaux podem aparecer em um politablóide padrão.

**Corolário 6.1.** Se  $t$  é padrão e  $\{s\}$  aparece em  $\mathbf{e}_t$ , então  $\{t\} \supseteq \{s\}$ .

*Demonstração.* Seja  $s = \pi t$ , onde  $\pi \in C_t$ , de modo que  $\{s\}$  aparece em  $\mathbf{e}_t = k_t\{t\}$ . Nós induzimos no número de inversões de coluna em  $s$ , isto é, o número de pares  $k < l$  na mesma coluna de  $s$  tal que  $k$  está na linha inferior do que  $l$ . Dado qualquer par,

$$\{s\} \triangleleft (k, l)\{s\}$$

pelo Lema 6.1. Desde que  $(k, l)\{s\}$  aparece em  $\mathbf{e}_t$  e tem menos inversões do que  $\{s\}$ , então, por indução  $(k, l)\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ , pois se desfizemos todas as inversões do tableau  $s$  o tablóide resultante deve ser o tablóide padrão  $\{t\}$ . Assim sendo  $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ .  $\square$

Dado  $t$ , considere suas classes de equivalência da coluna, ou tablóide coluna,

$$[t] \stackrel{\text{def}}{=} C_t t = \{\pi t \mid \pi \in C_t\}$$

Isto é, o conjunto de todos tableaux obtidos reorganizando os elementos dentro das colunas. Nós omitimos as linhas do tableau para denotar o tablóide coluna, como em

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \middle| 2 \middle| 4 \right| = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ 1 & & \end{array} \right] \right\}$$

As classes de equivalência da coluna são parcialmente ordenadas de maneira semelhante à ordem parcial sobre as classes de equivalência de linha, usaremos o mesmo símbolo como para linhas e usaremos colchetes para as classes de equivalência para fazer a distinção.

Suponha que  $[t]$  é um tablóide coluna com  $\text{sh } t = \lambda \vdash n$ . Para cada índice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , seja  $[t^i]$  o tablóide coluna formado por todos elementos menores ou iguais a  $i$  em  $[t]$  e  $\lambda^i$  a composição que é a forma de  $[t^i]$ . Seja  $[t] = \left| \begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & \end{array} \right|$ , então

$$[t^1] = |1|, \quad [t^2] = \left| \begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline 1 & \end{array} \right|, \quad [t^3] = \left| \begin{array}{c|c|c} 2 & & \\ \hline 1 & 3 & \end{array} \right|, \quad [t^4] = \overline{\left| \begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \right|},$$

$$\lambda^1 = (1, 0), \quad \lambda^2 = (2, 0), \quad \lambda^3 = (2, 1), \quad \lambda^4 = (2, 2).$$

**Definição 6.4.** Sejam  $[s]$  e  $[t]$  dois tablóides colunas com sequências de composição  $\lambda^i$  e  $\mu^i$  respectivamente. Então  $[s]$  domina  $[t]$ , escrevemos  $[s] \trianglerighteq [t]$  se  $\lambda^i \trianglerighteq \mu^i$  para todo  $i$ .

**Lema 6.2.** (Lema da Dominância para tablóides colunas) Se  $k < l$  e  $k$  está em uma coluna à direita de  $l$  em  $[t]$ , então  $[t] \triangleleft (k, l)[t]$  na ordem de dominância da coluna.

Considere os seguintes tablóides coluna:

$$[t] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \end{array} \right|, \quad [t_1] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \end{array} \right|, \quad [t_2] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \end{array} \right|, \quad [t_3] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \end{array} \right|, \quad [t_4] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \end{array} \right|,$$

$$[t_5] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \end{array} \right|.$$

Sabemos que  $[\pi t] \triangleright [t]$  para  $\pi \neq e$ , onde  $\pi$  são tomados de forma que os elementos de  $\{2, 4, 5, 6\}$  estão aumentando nas colunas de  $\pi t$ . Observe que,

$$[t_1] = (4, 5)[t] \triangleright [t];$$

$$[t_2] = (5, 6)(4, 5)[t] = (4, 6, 5)[t] \triangleright (4, 5)[t] = [t_1];$$

$$[t_3] = (2, 4)(4, 5)[t] = (2, 4, 5)[t] \triangleright (4, 5)[t] = [t_1];$$

$$[t_4] = (2, 4)(4, 6, 5)[t] = (2, 4, 6, 5)[t] \triangleright (4, 5, 6)[t] = [t_2] \text{ e } [t_4] = (5, 6)(2, 4, 5)[t] = (2, 4, 6, 5)[t] \triangleright (2, 4, 5)[t] = [t_3];$$

$$[t_5] = (4, 5)(2, 4, 6, 5)[t] = (2, 5)(4, 6)[t] \triangleright (2, 4, 6, 5)[t] = [t_4].$$

Temos a seguinte tabela das composições dos tablóides colunas.

$[t]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (1, 1, 0)$	$\lambda^3 = (1, 1, 1)$	$\lambda^4 = (1, 2, 1)$	$\lambda^5 = (2, 2, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$
$[t_1]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (1, 1, 0)$	$\lambda^3 = (1, 1, 1)$	$\lambda^4 = (2, 1, 1)$	$\lambda^5 = (2, 2, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$
$[t_2]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (1, 1, 0)$	$\lambda^3 = (1, 1, 1)$	$\lambda^4 = (2, 1, 1)$	$\lambda^5 = (3, 1, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$
$[t_3]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (2, 0, 0)$	$\lambda^3 = (2, 0, 1)$	$\lambda^4 = (2, 1, 1)$	$\lambda^5 = (2, 2, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$
$[t_4]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (2, 0, 0)$	$\lambda^3 = (2, 0, 1)$	$\lambda^4 = (2, 1, 1)$	$\lambda^5 = (3, 1, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$
$[t_5]$	$\lambda^1 = (1, 0, 0)$	$\lambda^2 = (2, 0, 0)$	$\lambda^3 = (2, 0, 1)$	$\lambda^4 = (3, 0, 1)$	$\lambda^5 = (3, 1, 1)$	$\lambda^6 = (3, 2, 1)$

Observe que  $[t_2]$  e  $[t_3]$  são incomparáveis. Esses  $(3, 2, 1)$ -tablóides coluna podem ser diagramados

$$\begin{array}{c}
 [t_5] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{array} \right| \\
 \uparrow \\
 [t_4] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & \\ 5 & & \end{array} \right| \\
 \nearrow \quad \nwarrow \\
 [t_2] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array} \right| \quad [t_3] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right| \\
 \nwarrow \quad \nearrow \\
 [t_1] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right| \\
 \uparrow \\
 [t] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array} \right|
 \end{array}$$

### 6.3 POLITABLOIDES PADRÕES

Reservaremos as duas próximas subseções para provar o seguinte teorema.

**Teorema 6.2.** O conjunto  $\{\mathbf{e}_t : t \text{ é um } \lambda\text{-tableau padrão}\}$  é uma base para  $S^\lambda$ . A dimensão de  $S^\lambda$  é o número de  $\lambda$ -tableaux padrão.

Primeiro, para provar que os politablóides  $\mathbf{e}_t$  são linearmente independentes impomos uma ordenação parcial aos tablóides de forma  $\lambda$ . Em seguida, para provarmos que o conjunto gera  $S^\lambda$ , introduzimos um procedimento chamado de *algoritmo de endireitamento*, usado para escrever um politablóide arbitrário como combinação de politablóides padrão.

#### 6.3.1 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Nessa subseção nós provaremos que o conjunto dos politablóides padrões de uma dada forma  $\lambda$  é de fato linearmente independente.

**Definição 6.5.** Seja  $(A, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado. Então um elemento  $b \in A$  é o máximo se  $b \geq c$  para todo  $c \in A$ . Um elemento  $b$  é um elemento maximal se não existe  $c \in A$  com  $c > b$ . Elemento mínimo e minimal são definidos analogamente.



Portanto um elemento máximo é maximal, mas o inverso não é necessariamente verdade. É importante manter essa distinção em mente no próximo resultado. Observe pela definição que um elemento máximo é único. O Corolário 6.1 diz que  $\{t\}$  é o tablóide máximo em  $\mathbf{e}_t$ .

Se  $v = \sum_i c_i \{t_i\} \in M^\mu$ , então dizemos que  $\{t_i\}$  aparece em  $v$  se  $c_i \neq 0$ .

**Lema 6.3.** Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_m$  elementos de  $M^\mu$ . Suponha que para cada  $v_i$ , podemos escolher um tablóide  $\{t_i\}$  aparecendo em  $v_i$ , tal que

1.  $\{t_i\}$  é máximo em  $v_i$ , ou seja,  $\{t_i\} \supseteq \{t_j\}$  para todo  $\{t_j\}$  aparecendo em  $v_i$ .
2. Os  $\{t_i\}$  são todos distintos

Então  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são independentes.

*Demonstração.* Ordene os tableaux de forma que  $\{t_1\}$  é maximal entre os  $\{t_i\}$ , isto é, não existe  $\{t_i\} \triangleright \{t_1\}$ , apesar que alguns possam ser incomparáveis com ele. Portanto as condições 1 e 2 garantem que  $\{t_1\}$  aparece apenas em  $v_1$ . De fato,  $\{t_1\}$  ocorrer em  $v_i$ ,  $i > 1$ , então  $\{t_1\} \triangleleft \{t_i\}$  contradizendo a escolha a maximalidade de  $\{t_1\}$ . Segue que em qualquer combinação linear

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$$

devemos ter  $c_1 = 0$ , porque não há outra maneira para cancelar  $\{t_1\}$ . Por indução em  $m$ , o resto dos coeficientes devem ser também zero. Removendo  $v_1$  da coleção, podemos repetir o raciocínio com os vetores restantes até chegarmos a um único, que é trivialmente independente.  $\square$

Devemos notar duas coisas sobre esse lema. Primeiro, não é suficiente apenas ter o  $\{t_i\}$  maximal em  $v_i$ , pois, se tomarmos  $\{t_1\}$  maximal em  $v_1 = \{t_1\} + \{t_2\}$  e  $\{t_2\}$  maximal em  $v_2 = c(\{t_1\} + \{t_2\})$ , com  $c \in \mathbb{C}$  e  $\{t_1\}, \{t_2\}$  incomparáveis, temos que  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente dependentes. Também, não usamos propriedades especiais de  $\supseteq$  na prova, então o resultado permanece verdadeiro para qualquer ordem parcial em tablóides.

Agora temos todos os ingredientes para provar a independência da base padrão.

**Proposição 6.1.** O conjunto  $\{\mathbf{e}_t : t \text{ é um } \lambda\text{-tableau padrão}\}$  é linearmente independente.

*Demonstração.* Pelo Corolário 6.1,  $\{t_i\}$  é máximo em  $\mathbf{e}_{t_i}$  e, por hipótese, os  $\{t_i\}$  são todos distintos, uma vez que os tableaux padrão são todos distintos. Portanto o Lema 6.3 se aplica.  $\square$

### 6.3.2 GERADORES

Nessa seção iremos mostrar que os  $\lambda$ -politablóides padrões geram  $S^\lambda$ , isto é, se  $t$  é um  $\lambda$ -tableau arbitrário, então  $\mathbf{e}_t$  é uma combinação linear de  $\lambda$ -politablóides padrões. Para isso usamos um procedimento conhecido como *algoritmo de endireitamento*. A ideia básica é: escolhendo um tableau arbitrário  $t$ , devemos mostrar que  $\mathbf{e}_t$  é uma combinação linear dos politablóides padrões.

Podemos assumir que os elementos das colunas de  $t$  estão em ordem crescente, caso não, há  $\sigma \in C_t$  tal que  $s = \sigma t$  tem os elementos das colunas em ordem crescente. Então pelos Lemas 4.1 e 3.4 temos  $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_{\sigma t} = \sigma \mathbf{e}_t = (\text{sgn } \sigma) \mathbf{e}_t$ . Portanto,  $\mathbf{e}_t$  é uma combinação linear de politablóides padrão sempre que  $\mathbf{e}_s$  for uma combinação linear de politablóides padrão.

Devemos então analisar os elementos das linhas de  $t$  para que possamos escrever o politablóide  $\mathbf{e}_t$  como combinação linear de  $\lambda$ -politablóides padrões. Primeiro nós precisamos definir

**Definição 6.6.** Uma *linha descendente* de  $t$ , é um par de elementos adjacentes em uma linha de  $t$  que não estão em ordem crescente na linha.

Agora suponha que nós podemos encontrar permutações  $\pi$  tal que

1. Em cada tableau  $\pi t$ , uma certa linha descendente de  $t$ , foi eliminada, e
2. O elemento  $g = e + \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \pi$  da álgebra de grupo satisfaz  $g \mathbf{e}_t = 0$ . Então

$$\mathbf{e}_t = - \sum_{\pi} \mathbf{e}_{\pi t}$$

Assim expressamos  $\mathbf{e}_t$  em termos de politablóides que estão mais perto de serem padrões, e a indução aplica-se para obter  $\mathbf{e}_t$  como uma combinação de politablóides.

Os elementos da álgebra de grupo que realiza essa tarefa são os elementos de Garnir.

**Definição 6.7.** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos disjuntos de inteiros positivos e escolha permutações  $\pi$  tais que

$$S_{A \cup B} = \bigcup_{\pi \in \Pi} \pi(S_A \times S_B) \quad (6.1)$$

onde a união em (6.1) é disjunta e  $\Pi$  é o conjunto de todas permutações que são representantes das classes laterais para  $S_A \times S_B$  em  $S_{A \cup B}$ . Então um elemento de Garnir correspondente é

$$g_{A,B} = \sum_{\pi \in \Pi} (\text{sgn } \pi) \pi = \Pi^- \quad (6.2)$$

Embora  $g_{A,B}$  dependa dos representantes das classes laterais e não apenas de  $A$  e  $B$ , como não são únicos podemos padronizar a escolha dos  $\pi$ 's. Talvez a maneira mais simples para obter um representante da classe lateral é como o seguinte.

O grupo  $S_{A \cup B}$  age em todos os pares ordenados  $(A', B')$  tais que  $|A'| = |A|$ ,  $|B'| = |B|$  e  $A' \cup B' = A \cup B$  na maneira óbvia.

Se para cada possível  $(A', B')$  tomarmos  $\pi \in S_{A \cup B}$  tal que

$$\pi(A, B) = (A', B')$$

então a coleção de tais permutações formam o conjunto dos representantes das classes laterais.

**Exemplo 6.5.** Suponha que  $A = \{5, 6\}$  e  $B = \{2, 4\}$ . Então o conjuntos dos pares correspondentes e as possíveis permutações são:  $(A', B') \in$

$\{(\{5, 6\}, \{2, 4\}), (\{4, 6\}, \{2, 5\}), (\{2, 6\}, \{4, 5\}), (\{4, 5\}, \{2, 6\}), (\{2, 5\}, \{4, 6\}), (\{2, 4\}, \{5, 6\})\}$

$$g_{A,B} = e - (4, 5) - (2, 5) - (4, 6) - (2, 6) + (2, 5)(4, 6)$$

Devemos enfatizar que para qualquer par  $(A', B')$  dado, há muitas diferentes escolhas para a permutação  $\pi$  enviar  $(A, B)$  para aquele par.

O elemento de Garnir associado com um tableau  $t$  é usado para eliminar uma descente  $t_{i,j} > t_{i,j+1}$ .

**Definição 6.8.** Seja  $t$  um tableau e sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos da  $j$ -ésima e  $(j + 1)$ -ésima colunas de  $t$ , respectivamente. O elemento de Garnir associado a  $t$  (e  $A, B$ ) é  $g_{A,B} = \sum_{\pi \in \Pi} (\text{sgn } \pi) \pi$  onde o  $\pi$  é escolhido de forma que os elementos de  $A \cup B$  estejam crescendo verticalmente de cima para baixo nas colunas de  $\pi t$ .

Na prática, sempre tomamos  $A$  (respectivamente  $B$ ) para ser todos os elementos abaixo de  $t_{i,j}$  (respectivamente, acima de  $t_{i,j+1}$ ) como na Figura 1:

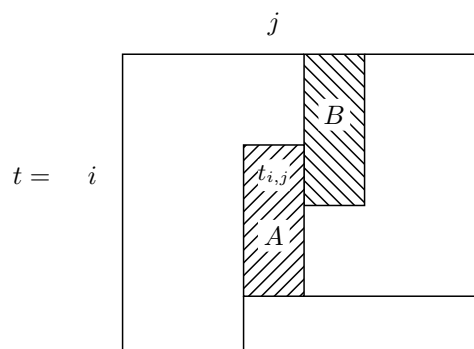


Figura 1 – diagrama AB

Observe que se  $\pi_1, \dots, \pi_l$  são representantes das classes laterais para  $S_A \times S_B$  em  $S_{A \cup B}$ , podemos tomá-los de modo que  $\pi_1 t, \pi_2 t, \dots, \pi_l t$  são todos os tablóides cuja as entradas são iguais as entradas  $t$  exceto nas posições ocupadas por  $A \cup B$ , onde entradas crescem verticalmente de cima para baixo nas posições ocupadas por  $A \cup B$ .

**Exemplo 6.6.** Se usarmos o tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

Com a descende  $5 > 4$ , então os conjuntos  $A$  e  $B$  são os mesmos do Exemplo 6.5. Cada  $(A', B')$  tem um correspondente  $t'$  que determina uma permutação em  $g_{A,B}$ :

$$t' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$$g_{A,B} = e - (4, 5) + (2, 4, 5) + (4, 6, 5) - (2, 4, 6, 5) + (2, 5)(4, 6).$$

**Proposição 6.2.** Sejam  $t$ ,  $A$  e  $B$ , e seja como na definição de um elemento de Garnir. Se  $|A \cup B|$  é maior que o número de elementos na coluna  $j$  de  $t$  então  $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$ .

*Demonstração.* Primeiro, afirmamos que

$$S_{A \cup B}^- \mathbf{e}_t = 0 \quad (6.3)$$

onde  $S_{A \cup B}^- = \sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} (\text{sgn } \sigma) \sigma$ .

Considere qualquer  $\sigma \in C_t$ . Como  $|A \cup B|$  é maior que o número de elementos na coluna  $j$  de  $t$ , deve haver  $a, b \in A \cup B$  tal que  $a$  e  $b$  estão na mesma linha de  $\sigma t$ . Temos que  $(a, b) \in S_{A \cup B}$ , pela parte 4 do Lema do sinal (Lema 3.4) temos que  $S_{A \cup B}^- \{\sigma t\} = 0$ . Desde que isso é verdade para todos os  $\sigma$  aparecendo em  $k_t$ ,  $S_{A \cup B}^- k_t \{t\} = 0$ , logo a afirmação segue.

Como  $S_{A \cup B} = \bigcup_{\pi} \pi(S_A \times S_B)$  então  $\sigma = \pi \cdot \tau$ , onde  $\tau \in S_A \times S_B$  e  $\pi \in \Pi$ . Logo,

$$\begin{aligned} S_{A \cup B}^- &= \sum_{\pi} \sum_{\tau} (\text{sgn}(\pi\tau)) \pi\tau \\ &= \sum_{\pi} (\text{sgn}(\pi)) \pi \sum_{\tau} (\text{sgn}(\tau)) \tau \\ &= g_{A,B} \sum_{\tau} (\text{sgn} \tau) \tau \\ &= g_{A,B} (S_A \times S_B)^-, \end{aligned}$$

onde  $g_{A,B} = \sum_{\pi \in \Pi} (\text{sgn}(\pi)) \pi$  e  $(S_A \times S_B)^- = \sum_{\tau \in S_A \times S_B} (\text{sgn}(\tau)) \tau$ . Substituindo isto dentro da equação (6.3)

$$g_{A,B} (S_A \times S_B)^- \mathbf{e}_t = 0 \quad (6.4)$$

e precisamos apenas nos preocupar sobre a contribuição de  $(S_A \times S_B)^-$ . Mas temos  $S_A \times S_B \subseteq C_t$ .

Se  $\sigma \in S_A \times S_B$  então pela parte 1 do Lema do sinal

$$\sigma^- \mathbf{e}_t = \sigma^- C_t^- \{t\} = C_t^- \{t\} = \mathbf{e}_t.$$

Portanto  $(S_A \times S_B)^- \mathbf{e}_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} (\text{sgn} \sigma) \sigma \mathbf{e}_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \mathbf{e}_t = |S_A \times S_B| \mathbf{e}_t$  e dividindo a equação (6.4) por esta cardinalidade produzimos a proposição.  $\square$

Esse resultado nos permitirá escolher uma linha descendente em  $t$  para poder escrever  $\mathbf{e}_t$  como combinação linear de politablóides que podem ser padrão, ou estão mais próximas ser padrão quando comparados com  $t$ .

Do Exemplo 6.6 temos que  $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$  e isso implica que  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{t_2} - \mathbf{e}_{t_3} - \mathbf{e}_{t_4} + \mathbf{e}_{t_5} - \mathbf{e}_{t_6}$  onde  $t_2, \dots, t_6$  são o segundo à sexto tableau no Exemplo 6.6. Note que nenhum desses tableaux tem a descente encontrada na segunda linha de  $t$  e que em todos esses tableaux as entradas das colunas são crescentes. Quando eliminamos a descente na linha 2 de  $t$  pode acontecer de introduzirmos uma descente em algum outro lugar, por exemplo na linha 1 de  $t_3$ . Esse exemplo é um caso especial de um resultado mais geral que leva a um algoritmo para escrever um politablóide arbitrário como uma combinação linear de politablóides padrão. Portanto precisamos de alguma medida de padronização que faz  $t_2, \dots, t_6$  mais perto de ser padrão do que  $t$  e isso é fornecido pela ordem de dominância para tableaux colunas. O próximo teorema nos dará uma maneira de obter os graus das representações irredutíveis de  $S_n$ .

**Teorema 6.3.** O conjunto

$$Z_\lambda = \{ \mathbf{e}_t : t \text{ é um } \lambda\text{-tableau padrão} \} \quad (6.5)$$

gera  $S^\lambda$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note que, se  $\mathbf{e}_t \in \mathbb{C}Z_\lambda$  então  $\mathbf{e}_u \in \mathbb{C}Z_\lambda$ , onde  $u \in [t]$ . De fato, temos que  $u = \sigma t$  para algum  $\sigma \in C_t$  logo  $\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_{\sigma t} = \sigma \mathbf{e}_t = (\text{sgn}(\sigma)) \mathbf{e}_t$ .

Ordenando as classes de equivalência, o conjunto parcialmente ordenado de tablóides colunas tem um elemento máximo  $[t_0]$ , onde  $t_0$  é obtido numerando as células de cada coluna consecutivamente de cima para baixo com os números de 1 a  $n$ , preenchendo as colunas da esquerda para direita. Começando com o tableau  $t_0$ , temos que  $\mathbf{e}_{t_0} \in \mathbb{C}Z_\lambda$  pois  $t_0$  é um tableau padrão e terminamos para esta classe de equivalência.

Agora escolha qualquer tableau  $t$ . Suponha, por indução, que se  $[s] \triangleright [t]$  então  $\mathbf{e}_s \in \mathbb{C}Z_\lambda$ . Provaremos que  $\mathbf{e}_t \in \mathbb{C}Z_\lambda$ . O caso base é satisfeito pelo tablóide máximo  $t_0$ .

Se  $t$  é padrão, obviamente  $\mathbf{e}_t$  está em  $\mathbb{C}Z_\lambda$ . Suponha que  $t$  não é padrão, sem perda de generalidade podemos supor que as entradas de  $t$  estão em ordem crescente nas colunas,

pois, pela nossa primeira observação temos que quaisquer dois politablóides provenientes de tableaux na mesma classe de equivalência de colunas são múltiplos escalares um do outro. Assim, já descartamos as colunas descentes.

Desde que  $t$  não é padrão, há alguma linha que não está aumentando, ou seja deve existir uma linha descente. Então, para um par de colunas adjacentes, digamos a  $j$ -ésima e  $(j + 1)$ -ésima cujas entradas são  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$  e  $b_1 < b_2 < \dots < b_q$  respectivamente, tais que  $a_i > b_i$  para algum  $i$ . Assim,

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & & b_1 \\
 \wedge & & \wedge \\
 a_2 & & b_2 \\
 \wedge & & \wedge \\
 \vdots & & \vdots \\
 \wedge & & \wedge \\
 a_i & > & b_i \\
 \wedge & & \wedge \\
 \vdots & & \vdots \\
 & & \wedge \\
 \wedge & & b_q \\
 a_p & & 
 \end{array}$$

Tomando  $A = \{a_i, \dots, a_p\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_i\}$  temos que o elemento de Garnir associado é  $g_{A,B} = \sum_{\pi \in \Pi} (\text{sgn} \pi) \pi$ . Pela Proposição 6.2, temos que  $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$ , o que implica que

$$\mathbf{e}_t = - \sum_{\pi \neq e} (\text{sgn} \pi) \mathbf{e}_{\pi t}. \quad (6.6)$$

Como  $b_1 < \dots < b_i < a_i < \dots < a_p$  pelo Lema 6.2 temos que  $[\pi t] \triangleright [t]$  para  $\pi \neq e$ . Pela hipótese de indução  $\mathbf{e}_{\pi t} \in \mathbb{C}Z_\lambda$ , portanto  $\mathbf{e}_t \in \mathbb{C}Z_\lambda$ .  $\square$

**Exemplo 6.7.** Voltando ao Exemplo 6.6, utilizamos o algoritmo de endireitamento em  $t$  e sabemos que  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{t_2} - \mathbf{e}_{t_3} - \mathbf{e}_{t_4} + \mathbf{e}_{t_5} - \mathbf{e}_{t_6}$ .

Por simplicidade, escreveremos

$$\mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} + \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

Observe que os tableaux  $t_2$  e  $t_4$  são os únicos padrão. Pelo Teorema 6.3 sabemos que  $\mathbf{e}_t$  pode ser escrito como combinação linear de politablóides padrão. Para obtermos essa combinação vamos repetir o processo utilizando novamente o algoritmo de endireitamento para escrever os politablóides  $\mathbf{e}_{t_3}$ ,  $\mathbf{e}_{t_5}$  e  $\mathbf{e}_{t_6}$  como combinação de politablóides padrão.

Seja  $t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$ , tome  $A = \{4, 5\}$  e  $B = \{3\}$ . Temos o seguinte tableau abaixo

$A'$	$B'$	$\pi$	$\pi t_3$
$\{4, 5\}$	$\{3\}$	$e$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 5\}$	$\{4\}$	$(3, 4)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 4\}$	$\{5\}$	$(3, 5, 4)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$

a partir disso podemos escrever,  $e_{t_3} = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$

Seja  $t_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$ , tome  $A = \{4, 6\}$  e  $B = \{3\}$  então temos o tableau

$A'$	$B'$	$\pi$	$\pi t_5$
$\{4, 6\}$	$\{3\}$	$e$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 6\}$	$\{4\}$	$(3, 4)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 4\}$	$\{6\}$	$(3, 6, 4)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$

$$\text{e obtemos } \mathbf{e}_{t_5} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

Agora, seja  $t_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$ , tome  $A = \{5, 6\}$  e  $B = \{3\}$ , obtemos o tableau

$A'$	$B'$	$\pi$	$\pi t_6$
$\{5, 6\}$	$\{3\}$	$e$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 6\}$	$\{5\}$	$(3, 5)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$
$\{3, 5\}$	$\{6\}$	$(3, 6, 5)$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$

$$\text{ent\~{a}o temos que } \mathbf{e}_{t_6} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Finalmente encontramos os politabl\~{o}ides padr\~{a}o na qual  $\mathbf{e}_t$  \u00e9 composto. Assim,

$$\mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} + \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} + \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} - \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} -$$

$$\mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} + \mathbf{e} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} .$$

Olhando para algumas consequ\u00eancias do Teorema 6.3 , temos o teorema a seguir:

**Teorema 6.4.** Para qualquer parti\u00e7\~{a}o  $\lambda$ :

1.  $\{\mathbf{e}_t : t \text{ \u00e9 um } \lambda - \text{ tableau padr\~{a}o}\}$  \u00e9 uma base para  $S^\lambda$
2.  $\dim S^\lambda = f^\lambda$ , e
3.  $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ .



*Demonstração.* As primeiras duas partes são imediatas da Proposição 6.1 e do Teorema 6.2. Para a terceira parte, segue da Proposição 2.14 que,

$$\sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 = |S_n|,$$

substituindo a parte 2 desse teorema nessa equação, obtemos o resultado desejado.

Veremos mais adiante que esse item tem uma prova combinatória usando a correspondência de Robinson-Schensted.  $\square$

#### 6.4 REPRESENTAÇÃO NATURAL DE YOUNG

Agora que temos uma base para os módulos de Specht, nessa seção iremos ilustrar como obter, para cada  $\lambda \vdash n$ , uma representação matricial de  $S_n$  nessa base padrão. Essas representações formam o que é conhecido como representação natural de Young.

Como toda permutação em  $S_n$  é um produto de transposições,  $S_n$  é gerado pelas transposições  $(k, k+1)$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , assim é preciso encontrar apenas as matrizes correspondentes a esses elementos do grupo.

Se  $t$  é um tableau padrão, nós obtemos a  $t$ -ésima coluna da matriz para  $\pi \in S_n$  expressando  $\pi \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{\pi t}$  como uma soma de politablóides padrões.

Quando  $\pi = (k, k+1)$ , há três casos a se considerar:

1. Se  $k$  e  $k+1$  estão na mesma coluna de  $t$ , então  $(k, k+1) \in C_t$  e pelo Lema 3.4

$$(k, k+1) \mathbf{e}_t = (\text{sgn } \pi) \mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_t.$$

2. Se  $k$  e  $k+1$  estão na mesma linha de  $t$ , então  $(k, k+1)t$  tem uma descende naquela linha. Aplicando o apropriado elemento de Garnir, pela equação (6.6) nós obtemos

$$(k, k+1) \mathbf{e}_t = - \sum_{\pi \neq e} (\text{sgn } \pi) \mathbf{e}_{\pi(k, k+1)t}.$$

Veja que  $[\pi(k, k+1)t] \supseteq [(k, k+1)t]$  pois  $\pi \in \Pi$  é escolhido de forma que os elementos de  $A \cup B$  estão aumentando nas colunas de  $\pi(k, k+1)t$ .

Note que  $(k, k+1)[(k, k+1)t] = [t] \triangleright [(k, k+1)t]$  e que todos os outros tablóides colunas são da forma  $\pi[(k, k+1)t]$ , onde  $\pi \in \Pi$ , pelo Teorema 2.3 sabemos que  $S_n$  é gerado por transposições adjacentes e por isso podemos escrever  $\pi = \sigma(k, k+1)$ , onde  $\sigma$  é um produto de transposições adjacentes. Assim, temos que  $\pi[(k, k+1)t] = \sigma(k, k+1)[(k, k+1)t] = \sigma[t] = [t'] \triangleright [t]$ .

Portanto,  $(k, k+1) \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t \pm$  outros politablóides  $\mathbf{e}_{t'}$  tal que  $[t'] \triangleright [t]$ .

3. Se  $k$  e  $k+1$  não estão na mesma linha ou na mesma coluna de  $t$ , note que se trocarmos os dois elementos não introduzimos uma linha ou uma coluna descende,

então o tableau  $t' = (k, k + 1)t$  é padrão. Os elementos que estão na linha de  $k + 1$  à esquerda e os elementos que estão acima de  $k + 1$  são todos menores que  $k + 1$ , e nenhum deles é  $k$ , então esses elementos são todos menores que  $k$ . Da mesma forma, todos os elementos que estão na linha de  $k$  à direita e os elementos que estão abaixo de  $k$  são maiores que  $k$ , e nenhum deles é  $k + 1$ , então todos são maiores que  $k + 1$ . Temos que

$$(k, k + 1)\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{t'}.$$

Embora não tenhamos uma expressão explícita para o restante dos termos, iremos computá-los repetindo a aplicação de 1 a 3. Este é o algoritmo de endireitamento mencionado no início da Seção 6.3.2.

**Exemplo 6.8.** Vamos computar as matrizes para a representação de  $S_3$  correspondente a  $\lambda = (2, 1)$ . Os dois tableaux padrões de forma  $\lambda$  são :  $t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$  e  $t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ .

Nós escolhemos os índices de forma que  $[t_1] \triangleright [t_2]$ . Isso faz com que os cálculos no caso 2 sejam mais fáceis. Assim,

$$\mathbf{e}_{t_1} = (e - (1, 2))\{t_1\} = \frac{\overline{1 \ 3}}{2} - \frac{\overline{2 \ 3}}{1}$$

e

$$\mathbf{e}_{t_2} = (e - (1, 3))\{t_2\} = \frac{\overline{1 \ 2}}{3} - \frac{\overline{3 \ 2}}{1}.$$

Para a transposição  $(1, 2)$  nós temos

$$(1, 2)\mathbf{e}_{t_1} = \frac{\overline{2 \ 3}}{1} - \frac{\overline{1 \ 3}}{2} = -\mathbf{e}_{t_1}$$

conforme previsto pelo caso 1.

Como  $(1, 2)t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$  tem uma descende na linha 1, podemos encontrar um elemento de Garnir. Tomando  $A = \{2, 3\}$  e  $B = \{1\}$ , temos que  $(A', B') : (23, 1), (13, 2), (12, 3)$  e assim temos os seguintes tableaux

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = (1, 2)t_2, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = t_2 \quad \text{e} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} = t_1$$

com elemento de Garnir

$$g_{A,B} = e - (1, 2) + (1, 3, 2).$$

Sabemos que  $g_{A,B}\mathbf{e}_{(1,2)t_2} = 0$ , portanto,

$$\mathbf{e}_{(1,2)t_2} - \mathbf{e}_{t_2} + \mathbf{e}_{t_1} = 0,$$

ou

$$(1, 2)\mathbf{e}_{t_2} = \mathbf{e}_{t_2} - \mathbf{e}_{t_1}.$$

Esse resultado é um exemplo do caso 2, e pode ser obtido mais facilmente simplesmente observando que

$$(1, 2)\mathbf{e}_{t_2} = \frac{\overline{1 \ 2}}{3} - \frac{\overline{3 \ 1}}{2}$$

e expressando isso como uma combinação linear dos  $\mathbf{e}_{t_i}$ .

Reunindo todas essas informações nós obtemos a matriz

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A transposição  $(2, 3)$  é mais fácil de lidar pois o caso 3 sempre se aplica.

$$(2, 3)t_1 = t_2$$

e

$$(2, 3)t_2 = t_1.$$

portanto  $(2, 3)\mathbf{e}_{t_1} = \mathbf{e}_{t_2}$  e  $(2, 3)\mathbf{e}_{t_2} = \mathbf{e}_{t_1}$ , e nós obtemos a matriz

$$X((2, 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desde que as transposições adjacentes geram  $S_n$ , todas outras matrizes devem concordar também. Logo,

$$X((1, 3)) = X((2, 3)(1, 2)(2, 3)) = X((2, 3))X((1, 2))X((2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X((1, 2, 3)) = X((1, 2)(2, 3)) = X((1, 2))X((2, 3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X((1, 3, 2)) = X((2, 3)(1, 2)) = X((2, 3))X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 7 MULTIPLICIDADE DOS MÓDULOS $S^\lambda$ EM $M^\mu$

Nesse capítulo, veremos que será muito útil ter informações sobre homomorfismos de  $S^\lambda$  a  $M^\mu$  onde  $\lambda$  e  $\mu$  são partições de  $n$ . Em particular, gostaríamos de uma base para  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . Para isso, precisamos pensar na maneira como descrevemos  $M^\mu$ ; a descrição dos módulos de permutação que vimos não é suficiente e, por isso, agora veremos uma descrição alternativa, em termos do tableau que permite repetições de entradas. Como resultado, veremos outra maneira de encontrar a multiplicidade dos módulos de Specht  $S^\lambda$  em  $M^\mu$ .

### 7.1 TABLEAU SEMIPADRÃO

**Definição 7.1.** Um *tableau de Young generalizado de forma  $\lambda$* , é uma matriz  $T$  obtida pela substituição dos pontos de  $[D_\lambda]$  com inteiros positivos, onde repetições são permitidas. O *tipo* ou *conteúdo* de  $T$  é a composição  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  onde  $\mu_i$  é igual o número de vezes que  $i$  ocorre em  $T$ . O conjunto de todos tableaux de Young generalizado de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$  é denotado por  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , ou seja,

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T : T \text{ tem forma } \lambda \text{ e conteúdo } \mu\}$$

Usaremos letras maiúsculas para denotar tableaux generalizados.

Uma dessas matrizes é

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

de forma  $(3, 2)$  e conteúdo  $(2, 0, 1, 2)$ .

Nós mostraremos que  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  é uma nova cópia de  $M^\mu$ . Existe uma ação bem definida de  $S_n$  nos tableaux generalizados de modo que  $M^\mu \cong \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  como módulos. Fixe um  $\lambda$ -tableau  $t$  de conteúdo  $(1^n)$  e tome  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ . Seja  $T(i)$  a entrada de  $T$  que ocorre na mesma posição como  $i$  na tableau fixa  $t$ . Se  $\lambda = (3, 2)$  e  $\mu = (2, 2, 1)$ , tomando  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$ ,

e  $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}$ , temos

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) \\ \hline T(4) & T(5) & \\ \hline \end{array}, \quad (7.1)$$

então  $T(1) = T(5) = 2$ ,  $T(2) = T(3) = 1$ , e  $T(4) = 3$ .

Quando as entradas das linhas de  $t$  estão em uma sequência crescente temos a

descrição canônica de  $T$ , isto é,

$$\begin{array}{ccccccc}
 T(1) & & T(2) & & \dots & & T(\lambda_1) \\
 T(\lambda_1 + 1) & & T(\lambda_1 + 2) & & \dots & & T(\lambda_1 + \lambda_2) \\
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \dots \\
 T(\lambda_1 + \dots + \lambda_{l-1} + 1) & T(\lambda_1 + \dots + \lambda_{l-1} + 2) & \dots & T(n) & & & 
 \end{array} \tag{7.2}$$

Vamos definir a ação de  $S_n$  em  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  por

$$(\pi T)(i) \stackrel{\text{def}}{=} T(\pi^{-1}i)$$

onde  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ ,  $\pi \in S_n$  e  $1 \leq i \leq n$ .

Para visualizarmos a ação de  $S_n$  nos tableaux generalizados vamos calcular a ação da permutação  $\pi = (1, 2, 4)$  em  $T$ , considerando a descrição canônica de  $T$  como em (7.1), temos que

$$(1, 2, 4)T = \frac{T((1, 4, 2) 1) \quad T((1, 4, 2) 2) \quad T((1, 4, 2) 3)}{T((1, 4, 2) 4) \quad T((1, 4, 2) 5)} = \frac{T(4) \quad T(1) \quad T(3)}{T(2) \quad T(5)}$$

ou seja,

$$(1, 2, 4) \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}}.$$

**Exemplo 7.1.** Sejam  $t = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \end{array}}$  e  $T = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & \end{array}}$ , temos

$$T = \frac{T(1) \quad T(3) \quad T(4) \quad T(5)}{T(2)}, \text{ então}$$

$$T(1) = T(3) = 2 \text{ e } T(2) = T(4) = T(5) = 1.$$

Para visualizarmos a ação de  $S_n$  nos tableaux generalizados vamos calcular a ação das permutações  $(1, 2)$  e  $(1, 3, 2)$  em  $T$ .

$$\begin{aligned}
 (1, 2)T &= \frac{T((1, 2)1) \quad T((1, 2)3) \quad T((1, 2)4) \quad T((1, 2)5)}{T((1, 2)2)} \\
 &= \frac{T(2) \quad T(3) \quad T(4) \quad T(5)}{T(1)} \\
 &= \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & \end{array}}.
 \end{aligned}$$

$$(1, 3, 2)T = \frac{T(3) \quad T((2) \quad T(4) \quad T((5)}{T(1)} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & \end{array}}.$$

Agora, dado qualquer tablóide  $\{s\}$  de forma  $\mu$ , vamos produzir um tableau  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  deixando  $T(i)$  igual ao número da linha na qual  $i$  aparece em  $\{s\}$ , onde  $T(i)$  aparece como da descrição canônica de  $T$ . Suponha  $\mu = (2, 2, 1)$  e  $\{s\} = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}}$ .

Como os números 2 e 3 estão na primeira linha de  $\{s\}$ , então definimos  $T(2) = T(3) = 1$ . De modo análogo, tomamos  $T(1) = T(5) = 2$  e  $T(4) = 3$ . Assim,  $T$  é o seguinte tableau de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}.$$

A forma de  $\{s\}$  torna-se o conteúdo de  $T$ , como desejado, pois há  $\mu_i$  entradas em  $T$  com valor  $i$  assim como há  $\mu_i$  entradas na primeira linha de  $\{s\}$ .

Dado qualquer tableau generalizado  $T$  de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$  podemos obter um  $\mu$ -tablóide da seguinte maneira: Se  $T(k) = i$  colocamos  $k$  na linha  $i$  de  $\{s\}$ . Apesar de  $\pi \in S_n$  agir nos elementos de  $\{s\}$ , substituindo  $i$  por  $\pi i$ , a permutação  $\pi$  age nos lugares em  $T$ , movendo  $T(i)$  para posição de  $T(\pi i)$ . Observe que se  $T$  corresponde a  $\{s\}$ ,  $\pi T$  corresponde a  $\pi\{s\}$ .

Sejam  $\lambda, \mu, t, T$  e  $\pi = (1, 2, 4)$  como anteriormente, o  $\mu$ -tablóide correspondente a  $T$  é  $\{s\} = \begin{array}{c} \underline{2 \ 3} \\ \underline{1 \ 5} \\ \underline{4} \end{array}$  e o  $\mu$ -tablóide correspondente a  $\pi T$  é  $\{\pi s\} = \begin{array}{c} \underline{3 \ 4} \\ \underline{2 \ 5} \\ \underline{1} \end{array}$ .

Com essa ação, temos o que precisamos para apresentar a nova descrição de  $M^\mu$ . Para ver porque esta ação que definimos é a definição correta para tornar  $\theta$  um isomorfismo de módulo, considere  $\theta(\{s\}) = T$  e  $\pi \in S_n$ . Portanto queremos  $\theta(\pi\{s\}) = \pi T$ . Mas isso nos obriga a estabelecer

$$\begin{aligned} (\pi T)(i) &= \text{número da linha de } i \text{ em } \pi\{s\} \\ &= \text{número da linha de } \pi^{-1}i \text{ em } \{s\} \\ &= T(\pi^{-1}i). \end{aligned}$$

Provamos que a aplicação  $\{s\} \xrightarrow{\theta} \mathbf{T}$  é uma bijeção entre bases de  $M^\mu$  e  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ , então são espaços vetoriais isomorfos, ou seja:

**Proposição 7.1.** Para quaisquer partições  $\lambda$  e  $\mu$ , os módulos  $M^\mu$  e  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  são isomorfos.

Pela Proposição 2.11, a multiplicidade de  $S^\lambda$  em  $M^\mu$  é dada por  $\dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ , iremos primeiro construir certos homomorfismos de  $M^\lambda$  para  $M^\mu$  usando nossa descrição do último em termos do tableau generalizado e então restringir a  $S^\lambda$ . As classes de equivalência de linha e coluna de um tableau generalizado  $T$ , são denotadas por  $\{T\}$  e  $[T]$ , respectivamente, e são definidas de maneira óbvia. Por exemplo, temos que  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  são equivalentes por linhas se  $T_2 = \pi T_1$  para algum  $\pi \in R_t$ . Tomando  $T$  e  $t$  como anteriormente temos que  $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}$  é equivalente a  $T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$  pois  $(1, 2)(4, 5) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$ , onde  $(1, 2)(4, 5) \in R_t$ .

Seja  $\{t\} \in M^\lambda$  o tablóide associado com um tableau  $t$  de forma  $\lambda$  e conteúdo  $(1^n)$ .

**Definição 7.2.** Seja  $t$  um  $\lambda$ -tableau fixo. Usando a ciclicidade de  $M^\lambda$  podemos escrever  $M^\lambda = \mathbb{C}S_n\{t\}$ . Para cada  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , o homomorfismo correspondente a  $T$  é a aplicação  $\theta_T \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$  dada por

$$g\{t\} \xrightarrow{\theta_T} g \sum_{S \in \{T\}} S,$$

onde  $g \in S_n$ . Estendendo esse homomorfismo por linearidade em  $\mathbb{C}$ , note que  $\theta_T$  é na realidade um homomorfismo dentro de  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ , mas que não deve causar problemas em relação a Proposição 7.1, pois  $\text{Hom}(M^\lambda, M^\mu) \cong \text{Hom}(M^\lambda, \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}])$ .

A aplicação  $\theta_T$  está bem definida. Seja  $\{t_1\} = g_1\{t\}$ , temos que  $\{t_1\} = \{t\}$  se, e somente se  $t_1 = \pi t$  para algum  $\pi \in R_t$ . Assim, temos que  $g_1\{t\} = \pi\{t\}$  e portanto  $\theta_T(\{t_1\}) = \theta_T(\pi\{t\}) = \pi \sum_{S \in \{T\}} S = \sum_{S \in \{T\}} S = \theta_T\{t\}$ .

**Exemplo 7.2.** Se  $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}$ , observe que esse tableau tem forma  $\lambda = (3, 2)$  e conteúdo  $\mu = (2, 2, 1)$ , então

$$\theta_T\{t\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_T((1, 2, 4)\{t\}) &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} \\ &= (1, 2, 4)\theta_T\{t\}. \end{aligned}$$

Agora nós obtemos elementos de  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  deixando

$$\bar{\theta}_T \text{ é a restrição de } \theta_T \text{ a } S^\lambda.$$

Se  $t$  um tableau de forma  $\lambda$  e conteúdo  $(1^n)$ , então

$$\bar{\theta}_T(\mathbf{e}_t) = \bar{\theta}_T(k_t\{t\}) = k_t(\theta_T\{t\}) = k_t\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

Essa última expressão poderia vir a ser zero, forçando assim  $\bar{\theta}_T$  ser a aplicação zero pela ciclicidade de  $S^\lambda$ . Isso ocorre na situação descrita na próxima proposição.

**Proposição 7.2.** Sejam  $\lambda, \mu \vdash n$ . Se  $t$  é o  $\lambda$ -tableau fixo e  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , então  $k_t T = 0$  se e somente se  $T$  tem dois elementos iguais na mesma coluna.

*Demonstração.* Se  $k_t T = 0$ , então  $T + \sum_{\substack{\pi \in C_t \\ \pi \neq e}} (\text{sgn } \pi) \pi T = 0$ . Então, devemos ter  $T = \pi T$  para algum  $\pi \in C_t$  com  $\text{sgn } \pi = -1$ . Devemos ter que os elementos correspondentes para qualquer ciclo não trivial de  $\pi$  são iguais e estão na mesma colunas. Como o  $\pi$  não é a

identidade temos que pelo menos um ciclo não trivial e pelo menos dois elementos são iguais.

Agora suponha que  $T(i) = T(j)$  estão na mesma coluna de  $T$ . Então  $(e-(i, j))T = 0$ . Mas  $e-(i, j)$  é um fator de  $k_t$  pela parte 3 do Lema do sinal (Lema 3.4) então  $k_t T = 0$ .  $\square$

Para eliminar os elementos triviais de  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  faremos o seguinte. Utilizando a Proposição 7.2 podemos possivelmente eliminar os  $\bar{\theta}_T$  triviais, concentrando-nos no análogo de tableaux padrão para tableaux com repetições.

**Definição 7.3.** Um tableau generalizado é semipadrão se suas entradas nas linhas são crescentes ou não decrescentes, e se suas entradas nas colunas são crescentes. Vamos denotar  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$  como o conjunto de todos  $\lambda$ -tableaux semipadrão de conteúdo  $\mu$ .

Note que um tableau semipadrão  $T$  de forma  $\lambda$  e conteúdo  $(1^n)$  é padrão, pois cada inteiro de 1 a  $n$  aparece exatamente uma única vez no tableau.

O tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

é semipadrão, enquanto

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

não é.

Agora, sejam  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$  e  $\mu = (3, 3, 2, 1)$  o tableau de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$ .

Observe que  $T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$  é o único semi-padrão.

Os homomorfismos correspondente aos tableaux semipadrão são aqueles que procuramos. Especificamente, iremos mostrar que eles formam uma base para  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . Pretendemos provar que homomorfismos  $\bar{\theta}_T$  com  $T$  em  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  formam uma base para  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ , são chamados de homomorfismos semipadrão.

## 7.2 A BASE SEMI-PADRÃO PARA $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$

Essa seção é dedicada a provar o seguinte teorema

**Teorema 7.1.** O conjunto  $\{\bar{\theta}_T : T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  é uma base para  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$

Em muitas maneiras a prova será similar a dada no Capítulo 6 para mostrar que os politablóides padrões formam uma base para  $S^\lambda$ . Como sempre, precisamos de uma ordem parcial apropriada. A ordem de dominância e a ordem de dominância coluna para o tableau generalizado são definidas exatamente da mesma forma como para tableaux sem repetições (ver Definição 6.3).



**Exemplo 7.3.** Se  $[S] = \left| \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \end{array} \right| 1$  e  $[T] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \end{array} \right| 2$  então  $[S]$  corresponde a sequência de composições

$$\lambda^1 = (0, 1, 1), \lambda^2 = (1, 2, 1), \lambda^3 = (2, 2, 1),$$

enquanto  $[T]$  tem

$$\mu^1 = (1, 1, 0), \mu^2 = (2, 1, 1), \mu^3 = (2, 2, 1)$$

desde que  $\lambda^i \leq \mu^i$  para todo  $i$ ,  $[S] \leq [T]$ .

**Exemplo 7.4.** Na Figura 2, ilustramos o diagrama de Hasse para tablóides coluna de forma  $\lambda = (3, 2)$  e conteúdo  $\mu = (2, 2, 1)$

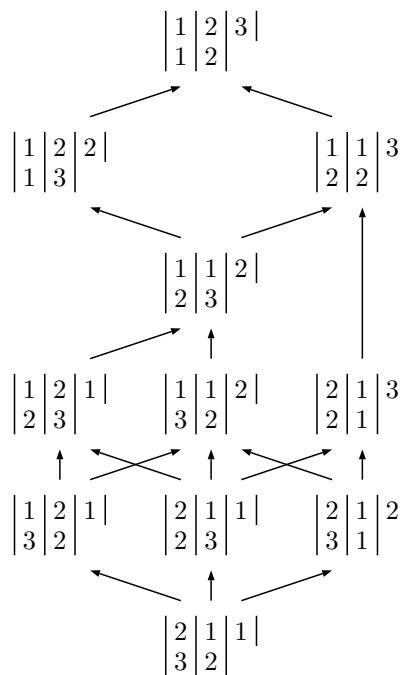


Figura 2 – diagrama de Hasse para os tablóides coluna de forma  $(3, 2)$  e conteúdo  $(2, 2, 1)$ .

O Lema da dominância para tablóides (Lema 6.1) e o Corolário 6.1 tem análogos nessa configuração. Suas provas, sendo similares, serão omitidas.

**Lema 7.1.** (Lema da dominância para tableaux generalizados) Seja  $k$  em uma coluna à esquerda de  $l$  em  $T$  com  $k < l$ . Então

$$[T] \triangleright [S],$$

onde  $S$  é o tableau obtido por trocar  $k$  e  $l$  em  $T$ .

**Corolário 7.2.** Se  $T$  é semipadrão e  $S \in \{T\}$  é diferente de  $T$  então

$$[T] \triangleright [S].$$

Portanto, se  $T$  é semipadrão, então  $[T]$  é a maior classe de equivalência que aparece em  $\theta_T\{t\} = \sum_{S \in [T]} S$ .

Antes de provar a independência de  $\bar{\theta}_T$ , devemos citar alguns fatos gerais sobre espaços vetoriais.

Seja  $V$  um espaço vetorial e escolha uma base fixa  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Se  $v \in V$ , então dizemos que  $b_i$  aparece em  $v$  se  $v = \sum_i c_i b_i$  com  $c_i \neq 0$ . Suponha que  $V$  é dotado de uma relação de equivalência e de uma ordem parcial  $\triangleright$ , iremos denotar as classes de equivalência por  $[v]$ . Podemos generalizar o Lema 6.3 como segue.

**Lema 7.2.** Sejam  $V$  e  $\mathcal{B}$  como antes e considere um conjunto de vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ . Suponha que para todo  $i$  existe  $b_i \in \mathcal{B}$  aparecendo em  $v_i$  tal que

1.  $[b_i] \triangleright [b]$  para todo  $b \neq b_i$  aparecendo em  $v_i$ , e
2. Os  $[b_i]$  são todos distintos.

Então, os  $v_i$  são linearmente independentes.

Também precisamos de um simples lema sobre independência de transformações lineares.

**Lema 7.3.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais e sejam  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  aplicações lineares de  $V$  para  $W$ . Se existe um  $v \in V$  tal que  $\theta_1(v), \theta_2(v), \dots, \theta_m(v)$  são independentes em  $W$ , então os  $\theta_i$  são independentes como transformações lineares.

*Demonstração.* Suponha que não sejam independentes. Então há constantes  $c_i$  não todas nulas, tais que  $\sum_i c_i \theta_i$  é uma aplicação nula. Mas então  $\sum_i c_i \theta_i(v) = 0$  para todo  $v \in V$ , uma contradição a hipótese do lema.  $\square$

**Proposição 7.3.** O conjunto

$$\{\bar{\theta}_T : T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$$

é linearmente independente.

*Demonstração.* Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_m$  os elementos de  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ . Pelo Lema 7.3, é suficiente mostrar que  $\bar{\theta}_{T_1} \mathbf{e}_t, \bar{\theta}_{T_2} \mathbf{e}_t, \dots, \bar{\theta}_{T_m} \mathbf{e}_t$  são independentes, onde  $t$  é o nosso tableau fixo. Para todo  $i$ , temos

$$\bar{\theta}_{T_i} \mathbf{e}_t = \theta_{T_i} k_t \{t\} = k_t \theta_{T_i} \{t\}.$$

Agora  $T_i$  é semipadrão, então  $[T_i] \triangleright [S]$  para qualquer tableau  $S$  em  $\theta_{T_i} \{t\}$  (Corolário 7.2). O mesmo é verdade para tableaux de  $k_t \theta_{T_i} \{t\}$ , desde que as permutações em  $k_t$  não mudam as classes de equivalência de coluna. Também, os  $[T_i]$  são todos distintos, desde que

nenhuma classe de equivalência tem mais de um tableau semipadrão. Consequentemente o  $k_t\theta_{T_i}\{t\} = \bar{\theta}_{T_i}\mathbf{e}_t$  satisfaz as hipóteses do Lema 7.2, tornando-os independentes.  $\square$

Para provar que os  $\bar{\theta}_T$  geram  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ , precisamos do lema abaixo

**Lema 7.4.** Considere  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . Escreva

$$\theta\mathbf{e}_t = \sum_T c_T T,$$

onde  $t$  é o tableau fixo de forma  $\lambda$ .

1. Se  $\pi \in C_t$  e  $T_1 = \pi T_2$  então  $c_{T_1} = (\text{sgn}\pi)c_{T_2}$ .
2. Todo  $T_1$  com uma repetição em alguma coluna tem  $c_{T_1} = 0$ .
3. Se  $\theta$  não é a aplicação nula, então existe um tableau semipadrão  $T_2$  tendo  $c_{T_2} \neq 0$ .

*Demonstração.* 1. Desde que  $\pi \in C_t$  e  $T_1 = \pi T_2$  temos

$$\pi(\theta\mathbf{e}_t) = \theta(\pi(k_t\{\mathbf{t}\})) = \theta((\text{sgn}\pi)k_t\{\mathbf{t}\}) = (\text{sgn}\pi)(\theta\mathbf{e}_t)$$

assim sendo,  $\theta\mathbf{e}_t = \sum_T c_T T$  implica

$$\pi \sum_T c_T T = \pi(\theta\mathbf{e}_t) = (\text{sgn}\pi)(\theta\mathbf{e}_t) = (\text{sgn}\pi) \sum_T c_T T$$

comparando coeficientes de  $\pi T_2$  na esquerda e  $T_1$  na direita temos  $c_{T_2} = (\text{sgn}\pi)c_{T_1}$ .

2. Por hipótese, existe  $(i, j) \in C_t$  com  $(i, j)T_1 = T_1$  mas então  $c_{T_1} = -c_{T_1}$  pelo que acabamos de provar, forçando seu coeficiente ser zero.
3. Desde que  $\theta \neq 0$ , podemos escolher  $T_2$  com  $c_{T_2} \neq 0$  tal que  $[T_2]$  é maximal. Afirmamos que  $T_2$  pode ser tomada semipadrão. Pelas partes 1 e 2, podemos escolher  $T_2$  de modo que suas colunas aumentem estritamente.

Suponha por contradição que existe uma descende na linha  $i$ . Portanto,  $T_2$  tem um par de colunas como o seguinte

$$\begin{array}{c}
b_1 \\
\wedge \\
b_2 \\
\wedge \\
\vdots \\
\wedge \\
a_i > b_i \\
\wedge \\
\vdots \\
\wedge \\
a_p
\end{array}$$

Escolha  $A = \{a_i, \dots, a_p\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_i\}$ , e seja  $g_{A,B} = \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \pi$  o elemento de Garnir associado. Temos que

$$g_{A,B}(\sum_T c_T T) = g_{A,B}(\theta \mathbf{e}_t) = \theta(g_{A,B} \mathbf{e}_t) = \theta(0) = 0.$$

Agora  $T_2$  aparece em  $g_{A,B}T_2$  com coeficiente 1, desde que as permutações em  $g_{A,B}$  movem distintos elementos de  $T_2$ . Então para cancelar  $T_2$  na equação anterior, deve haver um  $T \neq T_2$  com  $\pi T = T_2$  para algum  $\pi$  em  $g_{A,B}$ . Portanto,  $T$  é apenas  $T_2$  com algumas das  $a_j$ 's e  $b_k$ 's trocadas. Mas então  $[T] \triangleright [T_2]$  pelo Lema da dominância para tableaux generalizados (Lema 7.1). Isso contradiz nossa escolha de  $T_2$ .  $\square$

Estamos agora na posição de provar que os  $\bar{\theta}_T$  geram o  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ .

**Proposição 7.4.** O conjunto

$$\{\bar{\theta}_T : T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$$

gera  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ .

*Demonstração.* Escolha qualquer  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  e escreva

$$\theta \mathbf{e}_t = \sum_T c_T T \tag{7.3}$$

considere

$$L_\theta = \{S \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0 : [S] \leq [T] \text{ para algum } T \text{ aparecendo em } \theta \mathbf{e}_t\}.$$

Na terminologia de conjuntos parcialmente ordenados,  $L_\theta$  corresponde ao ideal de ordem inferior gerado pelo  $T$  em  $\theta \mathbf{e}_t$ . Provaremos esta proposição por indução em  $|L_\theta|$ .

Se  $|L_\theta| = 0$ , então  $\theta$  é a aplicação nula pela parte 3 do Lema 7.4. Tal  $\theta$  é certamente gerado pelo  $L_\theta$ .

Se  $|L_\theta| > 0$ , então na equação (7.3) podemos encontrar um tableau semipadrão  $T_1$  com  $c_{T_1} \neq 0$ . Além disso, segue da prova da parte 3 do Lema 7.4 que nós podemos escolher  $[T_1]$  maximal entre aqueles tableaux que aparecem na soma. Agora considere

$$\theta_1 = \theta - c_{T_1} \bar{\theta}_{T_1}.$$

Afirmamos que  $L_{\theta_1}$  é um subconjunto de  $L_\theta$  com  $T_1$  removido. Primeiro de tudo, todo  $S$  aparecendo em  $\bar{\theta}_{T_1}(\mathbf{e}_t)$  satisfaz  $[S] \leq [T_1]$ , então  $L_{\theta_1} \subseteq L_\theta$ . Além disso, pela parte 1 do Lema 7.4, todo  $S$  com  $[S] = [T_1]$  aparece com o mesmo coeficiente em  $\theta \mathbf{e}_t$  e  $c_{T_1} \bar{\theta}_{T_1} \mathbf{e}_t$ . Logo  $T_1 \notin L_{\theta_1}$ , desde que  $[T_1]$  é maximal. Por indução,  $\theta_1$  está no gerado de  $\bar{\theta}_T$  e então  $\theta$  também.  $\square$

Isso completa a prova da proposição e do Teorema 7.1. Assim temos que  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu) \cong \mathbb{C}\{\bar{\theta}_T : T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ .

### 7.3 NÚMEROS DE KOSTKA E A REGRA DE YOUNG

Nessa seção apresentaremos os números de Kostka que nos darão outra maneira de encontrar a multiplicidade dos módulos de Specht.

Os números de Kostka contam tableaux semipadrão.

**Definição 7.4.** Os números de Kostka são a cardinalidade dos  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ , isto é:

$$K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|.$$

Como um corolário imediato do Teorema da base semipadrão (Teorema 7.1), nós temos a regra de Young.

**Teorema 7.3.** (Regra de Young) A multiplicidade de  $S^\lambda$  em  $M^\mu$  é igual ao número de tableaux semipadrões de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$ , isto é

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} K_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

Note que pelo Teorema 4.4, podemos restringir essa soma direta para  $\lambda \supseteq \mu$ .

**Exemplo 7.5.** No Exemplo 4.4 vimos uma forma de encontramos a decomposição do módulo de permutação  $M^{(2,1,1)}$ , agora veremos outra forma de encontrar tal decomposição. Suponha que  $\mu = (2, 1, 1)$ . Então as possíveis partições  $\lambda \supseteq \mu$  e os  $\lambda$ -tableaux de conteúdo  $\mu$  associados são:

$\lambda \trianglerighteq \mu$	(2, 1, 1)	(2, 2)	(3, 1)	(4)
$[\mathcal{D}_\lambda]$				
$\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$	$T : \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$			

Portanto pela regra de Young, temos que a multiplicidade de  $S^\lambda$  em  $M^{(2,1,1)}$  é igual ao número de tableaux semipadrão de forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$ , isto é,

$$M^{(2,1,1)} \cong S^{(2,1,1)} \oplus S^{(2,2)} \oplus 2S^{(3,1)} \oplus S^{(4)}.$$

**Exemplo 7.6.** Para qualquer  $\mu$ ,  $K_{\mu\mu} = 1$ . Isso é por que o único  $\mu$ -tablóide de conteúdo  $\mu$  é o único com todos 1's na linha 1, todos os 2's na linha 2, etc. Vimos esse resultado no Teorema 4.4.

**Exemplo 7.7.** Para qualquer  $\mu$ ,  $K_{(n)\mu} = 1$ . Obviamente há apenas uma maneira para arranjar uma coleção de números em ordem crescente. Também, do ponto de vista teórico de uma representação, temos que  $M^\mu$  deve conter exatamente uma cópia de  $S^{(n)}$ .

**Exemplo 7.8.** Para qualquer  $\lambda$ ,  $K_{\lambda(1^n)} = f^\lambda$ , ou seja, o número de tableaux padrão de forma  $\lambda$ . De fato, qualquer tableau semipadrão de conteúdo  $(1^n)$  é na realidade padrão, cada entrada é um valor de 1 a  $n$ , então não há repetições. Isso diz que

$$M^{(1^n)} = \bigoplus_{\lambda} f^\lambda S^\lambda.$$

Mas  $M^{(1^n)}$  é a representação regular, do Exemplo 3.3 e,  $f^\lambda = \dim S^\lambda$  (Teorema 6.2). Portanto, isso é meramente o caso especial da Proposição 2.14 parte 1, onde  $G = S_n$ .

**Exemplo 7.9.** Quando  $\lambda \triangleleft \mu$  nós temos que  $K_{\lambda\mu} = 0$ . Do fato de  $\lambda \triangleleft \mu$ , temos

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i < \mu_1 + \dots + \mu_i.$$

Observe que não cabem todas as entradas 1's na primeira  $i$  linha de um tableau de forma  $\lambda$ , então temos entradas repetidas em alguma coluna, portanto não há um tableau generalizado semipadrão com forma  $\lambda$  e conteúdo  $\mu$  nesse caso.

## 8 RESTRIÇÃO E INDUÇÃO DOS MÓDULOS DE SPECHT

Suponha que temos uma representação irredutível  $S^\lambda$  de  $S_n$  e queremos encontrar sua representação induzida em  $S_{n+1}$ . Intuitivamente, veremos pelo Teorema de Ramificação que a representação induzida é simplesmente a soma direta de todas as representações correspondentes aos diagramas de Young obtidos por adicionar uma nova célula ao diagrama de Young original.

A representação induzida da representação correspondente ao módulo  $S^{(2,1)}$  de  $S_3$  para  $S_4$  é

$$S^{(2,1)\uparrow S_4} = \text{Ind}_{S_3}^{S_4} \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

Analogamente, a representação restrição pode ser encontrada removendo uma célula do diagrama de Young.

$$S^{(2,1)\downarrow S_2} = \text{Res}_{S_2}^{S_3} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Essas duas operações correspondem a remover ou adicionar um nó ao diagrama de Ferrers para  $\lambda$ .

**Definição 8.1.** Se  $[\mathcal{D}_\lambda]$  é um diagrama, então um *canto interno* de  $[\mathcal{D}_\lambda]$  é um nó  $(i, j) \in [\mathcal{D}_\lambda]$  que se for removido, o resto do diagrama ainda é o diagrama de Ferrers de uma partição. Qualquer partição obtida por tal remoção será denotada por  $\lambda^-$ . Um *canto externo* de  $[\mathcal{D}_\lambda]$  é um nó  $(i, j) \notin [\mathcal{D}_\lambda]$  que se for adicionado ao diagrama, produz um diagrama de Ferrers de uma partição. Qualquer partição obtida por tal adição será denotada por  $\lambda^+$ .

Note que os cantos internos de  $[\mathcal{D}_\lambda]$  são exatamente aqueles nós no fim de uma linha e coluna de  $[\mathcal{D}_\lambda]$ . Já um canto externo deve ser adicionado de forma que esteja no fim de uma linha e fim de uma coluna.

**Exemplo 8.1.** Seja  $\lambda = (5, 4, 4, 2)$ ,  $[\mathcal{D}_\lambda] = \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & & \end{array}$ . Iremos representar os cantos

internos com nós ampliados ( $\bullet$ ) e os cantos externo com nós abertos ( $\circ$ ) no seguinte diagrama:

$$[\mathcal{D}_\lambda] = \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \circ & & & & \\ \circ & & & & & & \end{array}$$

Depois da remoção podemos ter as partições  $\lambda^- : (4, 4, 4, 2), (5, 4, 3, 2), (5, 4, 4, 1)$ , então

$$[\mathcal{D}_{\lambda^-}] : \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array}, \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & \end{array}, \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \end{array}.$$

Enquanto que depois da adição, podemos ter as partições  $\lambda^+ : (6, 4, 4, 2), (5, 5, 4, 2), (5, 4, 4, 3)$  e  $(5, 4, 4, 2, 1)$ , então

$$[\mathcal{D}_{\lambda^+}] : \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array}, \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array}, \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \end{array}, \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array}.$$

Essas são exatamente as partições que ocorrem na restrição e indução. Em particular,

$$S^{(5,4,4,2)} \downarrow_{S_{14}} \cong S^{(4,4,4,2)} \oplus S^{(5,4,3,2)} \oplus S^{(5,4,4,1)}$$

e

$$S^{(5,4,4,2)} \uparrow_{S_{16}} \cong S^{(6,4,4,2)} \oplus S^{(5,5,4,2)} \oplus S^{(5,4,4,3)} \oplus S^{(5,4,4,2,1)}$$

Antes de provar a regra de Ramificação, precisamos de um resultado sobre dimensões.

**Lema 8.1.** Seja  $f^\lambda$  o número de todos tableaux padrão de forma  $\lambda$ . Temos que

$$f^\lambda = \sum_{\lambda^-} f^{\lambda^-}.$$

*Demonstração.* Todo tableau padrão de forma  $\lambda \vdash n$  tem  $n$  em um dos cantos internos. Uma vez que  $n$  é a maior entrada no tableau, deve estar no final da linha e da coluna para que o tableau seja padrão. Assim  $n$  deve ocorrer em um canto interno. Isso significa que podemos descrever qualquer tableau padrão escolhendo o canto interno contendo  $n$ , removendo esse canto e preenchendo o resto com um tableau padrão de forma  $\lambda^- \vdash n - 1$ . Assim o número de  $\lambda$ -tableaux padrões é a soma da quantidade de todas  $\lambda^-$  tableaux padrões. □



**Lema 8.2.** Seja  $V$  um módulo com submódulo  $W$ . Considere o espaço vetorial quociente  $V/W = \{v + W : v \in V\}$ . Então  $V/W$  é um  $G$ -módulo. Mais ainda,

$$V \cong W \oplus (V/W).$$

*Demonstração.* Se  $W$  é um submódulo de  $V$  então a  $G$ -ação em  $V$  define uma ação em  $V/W$  se colocarmos  $g(v+W) := g(v) + W$ . Seja  $v'$  na mesma classe que  $v$  então  $v - v' \in W$  e assim  $g(v - v') \in W$ , isto é,  $g(v) + W = g(v') + W$ .

Podemos identificar  $V/W$  com  $W^\perp$  desde que  $W \oplus W^\perp = V$ . Todo elemento  $v \in V$  pode ser escrito como  $u + w$  onde  $u \in W^\perp$  e  $w \in W$ . Restringindo a projeção  $\pi : V \rightarrow V/W$  a  $W^\perp$  induzimos um isomorfismo de  $W^\perp$  a  $V/W$ ,  $W^\perp \cong V/W$ .  $\square$

**Teorema 8.1.** (Regra de Ramificação) Se  $\lambda \vdash n$ , então:

1.  $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}$ , e
2.  $S^\lambda \uparrow^{S^{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$

*Demonstração.* Sejam os cantos internos de  $\lambda$  aparecendo nas linhas  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ . Para cada  $i$  seja  $\lambda^i$  denotada a partição  $\lambda^-$  obtida por remover a célula canto na linha  $r_i$ . Mais ainda, se  $n$  esta no fim da linha  $r_i$  do tableau  $t$  (respectivamente, na linha  $r_i$  do tablóide  $\{t\}$ ), então  $t^i$  (respectivamente,  $\{t^i\}$ ) será o tableau obtido por remover o  $n$ .

Agora dado qualquer grupo  $G$  com módulo  $V$  e submódulo  $W$ , pela Lema 8.2 temos que

$$V \cong W \oplus (V/W),$$

onde  $(V/W)$  é o espaço quociente. Portanto é suficiente encontrar uma cadeia de subespaços

$$\{0\} = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \dots \subset V^{(k)} = S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}$$

tal que  $V^{(i)}/V^{(i-1)} \cong S^{\lambda^i}$  como  $S_{n-1}$  módulos para  $1 \leq i \leq k$ . Podemos ver isso

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} = V^{(k)} \cong V^{(k-1)} \oplus (V^{(k)}/V^{(k-1)}) \cong V^{(k-1)} \oplus S^{\lambda^k}$$

e similarmente  $V^{(k-1)} \cong V^{(k-2)} \oplus S^{\lambda^{k-1}}$ , fazendo isso passo a passo.

Seja  $V^{(i)}$  o espaço vetorial gerado pelos politablóides padrão  $e_t$ , onde  $n$  aparece em  $t$  no fim de uma das linhas de  $r_1$  a  $r_i$ . Mostraremos que os  $V^{(i)}$  são os módulos desejados da seguinte forma.

Defina a aplicação  $\theta_i : M^\lambda \rightarrow M^{\lambda^i}$ , estendendo linearmente

$$\{t\} \xrightarrow{\theta_i} \begin{cases} \{t_i\}, & \text{se } n \text{ está na linha } r_i \text{ de } \{t\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$\theta_i$  é um  $S_{n-1}$  homomorfismo, desde que  $n$  é fixado por  $S_{n-1}$ . Além disso, para um tableau padrão  $t$  temos

$$\mathbf{e}_t \xrightarrow{\theta_i} \begin{cases} \mathbf{e}_{t_i}, & \text{se } n \text{ está na linha } r_i \text{ de } t, \\ 0, & \text{se } n \text{ está na linha } r_j \text{ de } t \text{ onde } j < i. \end{cases} \quad (8.1)$$

Isso é porque qualquer tablóide aparecendo em  $\mathbf{e}_t$ ,  $t$  padrão, tem  $n$  na mesma linha que  $t$  ou na linha maior do que em  $t$ .

Se considerarmos que se  $n$  está na linha  $r_i$  então de todos os tablóides que aparecem em  $\mathbf{e}_t$ , apenas aqueles que levam  $n$  nessa linha não são levados para zero por  $\theta_i$ . As permutações em  $C_t$  deixando  $n$  fixado são exatamente aquelas em  $C_{t_i}$ .

Se  $n$  aparece acima da linha  $r_i$ , então uma vez que é a última entrada em sua coluna, essa coluna não pode ter entradas na linha  $r_i$ , portanto como usamos  $C_t$  para permutar os elementos de cada coluna, todos os tablóides que aparecem em  $\mathbf{e}_t = C_t^-$  serão enviados para zero por  $\theta_i$ .

Desde que os politablóides padrões formam uma base para o correspondente módulo de Specht, as duas partes de (8.1) mostram que

$$\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}. \quad (8.2)$$

Cada politablóide padrão  $\mathbf{e}_{t_i} \in S^{\lambda^i}$  vem de algum politablóide  $\mathbf{e}_t \in M^\lambda$ . Todos esses  $\mathbf{e}_t$  tem  $n$  na linha  $r_i$ , então todos estão em  $V^{(i)}$ . Os  $\lambda^i$ -politablóides geram  $S^{\lambda^i}$ . Se  $t$  tem  $n$  acima da linha  $r_i$ ,  $\theta(\mathbf{e}_t) = 0$  e então

$$V^{(i-1)} \subseteq \text{Ker } \theta_i \quad (8.3)$$

da equação (8.3) podemos construir a cadeia

$$\{0\} = V^{(0)} \subseteq V^{(1)} \cap \text{Ker } \theta_1 \subseteq V^{(1)} \subseteq V^{(2)} \cap \text{Ker } \theta_2 \subseteq V^{(2)} \subseteq \dots \subseteq V^{(k)} = S^\lambda. \quad (8.4)$$

mas da equação (8.2)

$$\dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \text{Ker } \theta_i} = \dim \theta_i V^{(i)} = f^{\lambda^i}.$$

Pelo Lema 8.1, as dimensões desses quocientes somadas

$$\dim S^\lambda = \sum_{i=1}^k f^{\lambda^i} = \sum_{i=1}^k \dim(S^{\lambda^i})$$

Devemos ter  $V^{(i-1)} = V^{(i)} \cap \text{Ker}(\theta_i)$ , para  $i, \dots, k$  desde que não há mais espaço para mais módulos pelo argumento de contagem do que é  $\dim S^\lambda$ . Além disso

$$\frac{V^{(i)}}{V^{(i-1)}} \cong \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \text{Ker} \theta_i} \cong S^{\lambda^i}.$$

Para a segunda parte nós usaremos a Reciprocidade de Frobenius (Teorema 2.15). As partes 1 e 2 podem ser mostradas equivalentes pelo mesmo método.

Seja  $\chi^\lambda$  o carácter de  $S^\lambda$ . Se  $S^\lambda \uparrow^{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{\mu \vdash n+1} m_\mu S^\mu$ , então tomando os caracteres  $\chi^\lambda \uparrow^{S_{n-1}} \cong \sum_{\mu \vdash n+1} m_\mu \chi^\mu$ . Pela parte 2 do Corolário 2.13, as multiplicidades são dadas por

$$m_\mu = \langle \chi^\lambda \uparrow^{S_{n-1}}, \chi^\mu \rangle.$$

Utilizando a Reciprocidade de Frobenius (Teorema 2.15) temos

$$\langle \chi^\lambda \uparrow^{S_{n-1}}, \chi^\mu \rangle = \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \downarrow_{S_n} \rangle,$$

Pela parte 1 desse teorema temos que

$$\langle \chi^\lambda, \chi^\mu \downarrow_{S_n} \rangle = \langle \chi^\lambda, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle.$$

Agora utilizando a parte 4 do Corolário 2.13 obtemos que

$$\langle \chi^\lambda, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \mu^-, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição de  $\mu^-$  e  $\lambda^+$  podemos reescrever

$$\langle \chi^\lambda, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \lambda^+, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Como  $\lambda$  vem de  $\mu$  removendo um canto interno então  $\mu$  vem de  $\lambda$  adicionando um canto externo

$$S^\lambda \uparrow^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}.$$

□

## 9 RESULTADOS COMBINATÓRIOS

O Teorema 6.4 mostra que qualquer resultado sobre os módulos irredutíveis para  $S_n$  é passível de uma interpretação combinatória em termos de contagem de tableaux padrão. Por isso, seria interessante ter provas combinatórias, isto é, bijetivas, destes resultados.

### 9.1 O ALGORITMO DE ROBINSON-SCHENSTED

Nessa seção, vamos desenvolver apenas as propriedades mais importantes do algoritmo de Robinson-Schensted que nos permite apresentar a prova combinatória da parte 3 do Teorema 6.4.

Muitos resultados sobre representação do grupo simétrico podem ser abordados de forma puramente combinatória. O link crucial entre esses dois pontos de vista é o fato que o número de tableaux de Young padrão de uma dada forma é o grau da representação irredutível correspondente. Falaremos do algoritmo de Robinson-Schensted que fornece uma prova bijetiva da identidade

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

Se desconsiderarmos sua origem, essa identidade pode ser considerada como uma declaração puramente combinatória. Isso diz que o número de elementos em  $S_n$  é igual ao número pares de tableaux padrão da mesma forma  $\lambda$ , com  $\lambda$  variando sobre todas partições de  $n$ . Portanto, deve ser possível dar uma prova dessa fórmula puramente combinatória, isto é, bijetiva. A correspondência de Robinson-Schensted faz exatamente isso.

A bijeção é denotada por

$$\pi \xleftrightarrow{R-S} (P, Q),$$

onde  $\pi \in S_n$  e  $P, Q$  são  $\lambda$ -tableaux padrão,  $\lambda \vdash n$ . Primeiramente, descrevemos a aplicação que, dada uma permutação, produz um par de tableaux. Suponha que  $\pi$  é escrito na notação 2-linhas como

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}.$$

Construímos uma sequência de pares de tableaux

$$(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), \dots, (P_n, Q_n) = (P, Q), \quad (9.1)$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são *inseridos* nos  $P$ 's e  $1, 2, \dots, n$  são *localizados* nos  $Q$ 's de modo a forma de  $P_k$  seja igual a forma de  $Q_k$  para todo  $k$ .

**Definição 9.1.** Dizemos que  $P$  é um tableau parcial se  $P$  é um tableau com entradas distintas cujas linhas e colunas aumentam. Um tableau parcial será padrão se estes elementos são precisamente  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

As operações de *inserção* e *localização* irão agora ser descritas.

**Definição 9.2.** Seja  $P$  um tableau parcial e seja um elemento  $x$  que não está em  $P$ . Para inserir  $x$  em  $P$ , procedemos com o seguinte algoritmo:

RS1- Seja  $R :=$  a primeira linha de  $P$ , onde  $:=$  significa substituição.

RS2- ENQUANTO  $x$  é menor que algum elemento da linha  $R$ , FAÇA

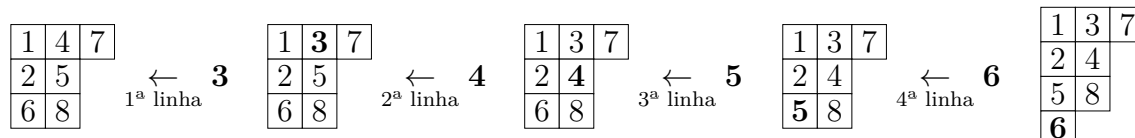
RSa- Seja  $y$  o menor elemento maior que  $x$  e substitua  $y$  por  $x$  em  $R$ . A inserção de  $x$  em  $R$  é denotada por  $R \leftarrow x$

RSb- Seja  $x := y$  e  $R :=$  a próxima linha para baixo de  $P$ .

RS3- Agora  $x$  é maior que todo elemento de  $R$ , então coloque  $x$  no fim da linha  $R$  e pare.

Em resumo, esse procedimento permite que o elemento que entra em uma linha  $R$  substitua o menor elemento maior do que ele e insere esse elemento que foi substituído na próxima linha, até que esteja como no passo RS3, onde o elemento é maior que todos os elementos da linha  $R$  em que ele estará inserido e o coloca no final desta linha. Isso inclui o caso em que essa linha está vazia, onde se torna uma nova linha.

**Exemplo 9.1.** Para ilustrar, suponha que  $x = 3$  e  $P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & 8 & \\ \hline \end{array}$ . Pelo algoritmo acima, temos que



Onde o 3 substitui 4, onde o 4 por sua vez substitui 5, posteriormente o 5 substitui 6 e finalmente o 6 forma uma nova linha. Os elementos inseridos estão em negrito. Note que sempre que colocamos para fora um elemento  $y$  o elemento estritamente abaixo dele já é maior do que  $y$  e que a inserção muda a forma de um tableau adicionando uma única célula para a forma.

Se o resultado da inserção de  $x$  em  $P$  produz o tableau  $P'$ , escrevemos

$$r_x(P) = P'.$$

Note que as regras de inserção foram cuidadosamente escritas para que  $P'$  ainda tenha linhas e colunas crescentes.

A localização de um elemento em um tableau é ainda mais fácil que inserção.

**Definição 9.3.** Suponha que  $Q$  é um tableau parcial de forma  $\mu$  e que  $(i, j)$  é uma canto externo de  $\mu$ . Se  $k$  é maior que todo elemento de  $Q$ , então para colocar  $k$  em  $Q$  na célula  $(i, j)$ , meramente coloque  $Q_{i,j} := k$ .

A restrição em  $k$  garante que o novo tableau é ainda um tableau parcial.

**Exemplo 9.2.** Se tomarmos  $Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$ , colocando  $k = 8$  na célula  $(i, j) = (3, 2)$

teremos  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 7 & 8 & \\ \hline \end{array}$ .

Finalmente podemos descrever como construir a sequência (9.1) da permutação

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}$$

Começamos com um par  $(P_0, Q_0)$  de tableaux vazios. Assumindo que  $(P_{k-1}, Q_{k-1})$  foi construído, defina  $(P_k, Q_k)$  por

$$\begin{aligned} P_k &= r_{x_k}(P_{k-1}), \\ Q_k &= \text{colocar } k \text{ em } Q_{k-1} \text{ na célula } (i, j) \text{ onde a inserção termina.} \end{aligned}$$

O processo acaba em  $(P_n, Q_n)$ .

Note que a definição de  $Q_k$  garante que  $\text{sh } P_k = \text{sh } Q_k$  para todo  $k$ . Chamamos  $P = P_n$  o  $P$ -tableau, ou tableau inserção de  $\pi$  e escrevemos  $P = P(\pi)$ . Similarmente,  $Q = Q_n$  é chamado  $Q$ -tableau, ou tableau localização, e denotamos por  $Q = Q(\pi)$ .  $(P, Q) = (P_n, Q_n)$ .

**Exemplo 9.3.** Agora consideramos um exemplo do algoritmo completo. Números em negrito são usados para os elementos da linha inferior de  $\pi$  e conseqüentemente também para os elementos de  $P_k$ . Seja

$$\pi = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{array} = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \tag{9.2}$$

Então os tableaux construídos pelo algoritmo são

$$\begin{aligned} P_k : P_0 &= \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 6 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 6 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & 4 & 4 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ \hline 2 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = P \\ Q_k : Q_0 &= \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 4 & 4 \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 4 & 4 \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 6 & & & & \\ \hline \end{array} = Q \end{aligned}$$

Então

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

O teorema principal sobre esta correspondência é o seguinte

**Teorema 9.1.** (Algoritmo de Robinson-Schensted) A aplicação

$$\pi \xleftrightarrow{R-S} (P, Q)$$

é uma bijeção entre elementos de  $S_n$  e pares de tableaux padrão do mesmo tipo  $\lambda \vdash n$ .

*Demonstração.* Para mostrar que temos uma bijeção, é suficiente criar uma inversa, denotamos esta correspondência por " $(P, Q) \xleftrightarrow{S-R} \pi$ ". Nós simplesmente revertemos o precedente algoritmo passo a passo.

Começamos definindo  $(P_n, Q_n) = (P, Q)$ . Assumindo que  $(P_k, Q_k)$  foi construído, vamos encontrar  $x_k$  que é o  $k$ -ésimo elemento de  $\pi$  e depois  $(P_{k-1}, Q_{k-1})$ . Para evitar o subscrito duplo no que se segue, usamos  $P_{i,j}$  para representar a  $(i, j)$  entradas de  $P_k$ .

Encontre a célula  $(i, j)$  contendo  $k$  em  $Q_k$ . Desde que este é o maior elemento em  $Q_k$ ,  $P_{i,j}$  deve ter sido o último elemento a ser deslocado na construção de  $P_k$ . Nós podemos agora usar o seguinte procedimento para deletar  $P_{i,j}$  de  $P$ . Por conveniência, assumimos a existência de uma linha zero vazia acima da primeira linha de  $P_k$ .

SR1- Seja  $x := P_{i,j}$  e apague  $P_{i,j}$ .

seja  $R :=$  a  $(i - 1)$ -ésima linha de  $P_k$ .

SR2- Enquanto  $R$  não é a linha zero de  $P_k$ , faça

SRa- Seja  $y$  o maior elemento de  $R$  menor que  $x$  e substitua  $y$  por  $x$  em  $R$ .

SRb- seja  $x := y$  e  $R :=$  a próxima linha acima

SR3- Agora  $x$  foi removido da primeira linha, então seja  $x_k := x$

É fácil ver que  $P_{k-1}$  é  $P_k$  após o processo de exclusão que acabamos de descrever e  $Q_{k-1}$  é  $Q_k$  com o  $k$  apagado. Continuando nesse caminho, acabamos recuperando todos os elementos de  $\pi$  em ordem reversa.

Temos estabelecido, pois, que o algoritmo de Robinson-Schensted é uma bijeção entre o grupo simétrico  $S_n$  e  $\{(P, Q) \mid P, Q \text{ são tableaux padrões de mesma forma } \lambda \vdash n\}$ . Em particular, temos

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n! \quad \square$$

Iremos finalizar essa seção com um exemplo que ilustra a ordem inversa da correspondência.

**Exemplo 9.4.** Já sabemos pelo Teorema 9.1 que a aplicação  $\pi \xleftrightarrow{R-S} (P, Q)$  é uma bijeção. Usaremos  $P$  e  $Q$  do Exemplo 9.3, para visualizar o algoritmo inverso ao algoritmo utilizado

nesse exemplo. Se temos que

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

iremos encontrar a permutação  $\pi$  associada a este par. Para isso iremos utilizar o algoritmo descrito na demonstração do Teorema 9.1.

- Para  $k = 7$ , iremos encontrar  $x_7$  que é o 7º elemento de  $\pi$  e com isso encontraremos  $(P_6, Q_6)$ . Sabemos que 7 está na célula (1,4) de  $Q_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$ , como 7 é o maior elemento em  $Q_7$ , nós temos que  $P_{1,4}$  é o último elemento a ser deslocado na construção de  $P_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$ . Vamos então deletar  $P_{1,4}$  de  $P_7$ . Seja  $x := P_{1,4} = 7$ , apagando 7 de  $P_7$

nós temos  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$  e como 7 foi removido da primeira linha, logo  $x_7 := 7$ .

- Para  $k = 6$ , agora nós encontraremos  $x_6$  que é o 6º elemento de  $\pi$  e através disso encontraremos agora  $(P_5, Q_5)$ . Como 6 é o maior elemento em  $Q_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$  e se encontra na célula (3,1) o último elemento a ser deslocado na construção de  $P_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$  é o  $P_{3,1}$ .

Vamos deletar  $P_{3,1}$  de  $P_6$ . Seja  $x := P_{3,1} = 4$ , apagando 4 de  $P_6$ , temos  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ . Como estamos na linha dois de  $P_6$  iremos continuar o procedimento, seja 2 o maior elemento da segunda linha menor que 4, substituindo 2 por 4 temos  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ . Agora estamos na primeira linha de  $P_6$ , seja  $x := 2$ , 1 é o maior elemento da primeira linha menor que 2, substituindo 1 por 2, temos  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ . Então temos que o 1 foi removido da primeira linha, logo  $x_6 := 1$ .

Fazendo o mesmo procedimento para  $k = 5, 4, 3, 2, 1$ , nós encontramos que  $x_5 := 5$ ,  $x_4 := 6$ ,  $x_3 := 3$ ,  $x_2 := 2$  e  $x_1 := 4$ . Logo encontramos  $\pi = (4, 2, 3, 6, 5, 1, 7)$  construída pelo algoritmo, como queríamos.



## REFERÊNCIAS

- [DF] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. *Abstract algebra. 3th ed.* John Wiley and Sons, Inc, 2004.
- [FH] FULTON, W.; HARRIS, J. *Representation theory - A first course.* Springer-Verlag, 1991.
- [JA] JAMES, G. *The Representation Theory of the Symmetric Groups.* Springer-Verlag, 1978.
- [JL] JAMES, G.; LIEBECK, M. *Representations and characters of groups. 2th ed.* Cambridge University Press, 2001.
- [RH] ROSENGREN, H. *Representations of the symmetric group.* University of Gothenburg, p.8, 2015. Disponível em: <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMA200/A15/symmetric.pdf>.
- [RJ] ROTMAN, J.J. *Advanced Modern Algebra, 2th ed.* Prentice Hall, 2003.
- [SA] SAGAN, B. E. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. 2th ed.* Springer, Vol. 203, 2000.
- [SJ] SANTOS, J. P. M. *Representation Theory of Symmetric Groups.* Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~ggranja/joaopedro.pdf>.
- [ST] STEINBERG, B. *Representation theory of finite groups: an introductory approach.* Springer, 2011.
- [WF] FULTON, W. *Young Tableaux: with applications to representation theory and geometry.* Cambridge University Press, 1997.