Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ulisses dos Santos Borges

Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas

Juiz de Fora

2014

Ulisses dos Santos Borges

Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Borges, Ulisses dos Santos.

Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas / Ulisses dos Santos Borges. – 2014.

121 f. : il.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Matemática. 2. Logaritmo e Exponencial. 3. Modelo Matemático e Aplicações. I. Vasconcelos, Sérgio Guilherme de Assis, orient. II. Título.

Ulisses dos Santos Borges

Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 06 de junho de 2014

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Seme Gebara Neto
Universidade Federal de Minas Gerais

Dedico este trabalho a minha filha Ana Beatriz, a minha esposa Ana Carolina, aos meus pais e aos meus irmãos. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter me dado saúde e força para concluir os meus estudos.

Aos meus pais, que sempre acreditaram no poder dos estudos e me incentivaram sempre neste caminho.

À minha filha, Ana Beatriz, razão da minha vida e força nos momentos difíceis.

À minha esposa, Ana Carolina, por entender a minha ausência devidas as muitas horas dedicadas aos estudos.

Aos meus irmãos: Marzolini, Alessandro, Sandra e Cássio pelo incentivo e apoio.

Aos meus cunhados: Maria Lúcia, Paula e Allann pelo incentivo e pela torcida.

Aos meus dois sobrinhos: João Pedro e Artur, que juntamente com a Ana Beatriz são as crianças que trazem a alegria para a famíla.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT, pelas dificuldades compartilhadas e os momentos alegres vivenciados.

Ao meu orientador, pelas horas dedicadas na confecção deste trabalho e a atenção dispensada.

Aos professores Dr. Sandro Rodrigues Mazorche e Dr. Seme Gebara Neto por terem aceitado o convite para avaliar o meu trabalho.

À todos os professores do PROFMAT da UFJF, pelo aprendizado proporcionado.

Ao Prof. Dr. José Barbosa Gomes, pela seriedade e dedicação na coordenação do PROFMAT-UFJF.

Aos membros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que juntamente com as universidades conveniadas podem oferecer um mestrado nos moldes do PROFMAT; dando a milhares de professores deste país a oportunidade de realizar um curso de mestrado.

“Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da Matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes ... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades. ”

(JOHN NAPIER, 1550 - 1617.)

RESUMO

Neste trabalho pretende-se abordar o ensino de logaritmos e das funções exponenciais e logarítmicas por meio de modelos matemáticos que os caracterizam. Faremos uso das progressões aritméticas e geométricas como pontos importantes no entendimento das funções exponenciais e logarítmicas. E, recomendamos, antes de iniciar o estudo destas funções, fazer um breve estudo daquelas progressões; visto esta ordem não ser comun no Ensino Médio. Por meio de situações problemas, onde a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, se mostram os modelos matemáticos mais adequados, devido as suas caracterizações, procuraremos mostrar as principais características, propriedades e definições dessas duas funções. Estas situações problemas serão dadas em atividades propostas onde pretendemos mostrar o desenvolvimento dos conceitos e propriedades dos logaritmos no decorrer do tempo, exemplificar a caracterização da função logarítmica e da função exponencial e apresentar exemplos de problemas do cotidiano que são modelados por essas funções. Faremos uso, também, de uma planilha eletrônica, em uma das atividades propostas, para mostrar propriedades das funções exponenciais e logarítmicas e a importante constante matemática e, que aparece naturalmente em fenômenos da Natureza. Veremos que a razão inicial do sucesso dos logaritmos, aumentar o poder de computação, perdeu este lugar, nos dias de hoje, para os computadores e as máquinas de calcular. Atualmente, o motivo que fazem com que os logaritmos continuem a merecer destaque no ensino de Matemática é porque a função logarítmica e a função exponencial constituem a única maneira de descrever matematicamente uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade daquela grandeza presente num dado instante.

Palavras-Chave: Matemática. Logaritmo e Exponencial. Modelo Matemático e Aplicações.

ABSTRACT

This work intends to address the teaching of logarithms and exponential and logarithmic functions by means of mathematical models that characterize them. We will use the arithmetic and geometric progressions as main points in understanding of exponential and logarithmic functions. We also recommend that before starting the study of these functions, make a brief study of those progressions, since this order may not be common in High School. Through problem situations, where the logarithmic function and its inverse, the exponential function, it is shown the most appropriate mathematical models, due to its specifications, we will show the main features, properties and definitions of these two functions. These problem situations will be given in proposed activities where we intend to show the development of the concepts and the logarithms properties in the course of time, exemplify the characterization of the logarithmic function and the exponential function and provide examples of everyday problems that are modeled by these functions. We will also use a spreadsheet, in one of the proposed activities, to show properties of the exponential and logarithmic functions and the important mathematical constant "e", which usually appears in natural phenomena. We will see that the initial reason of logarithms success, to increase computing power, lost ground nowadays, for computers and calculators. Currently, the reason that makes the logarithms continue to receive emphasis on the teaching of Mathematics is because the logarithmic function and the exponential function is the only way to describe the magnitude mathematically whose rate of variation is proportional to the quantity of that magnitude in a given moment.

Key-words: Mathematics. Logarithm and Exponential. Mathematical Model and Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAEM	Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
H_a^b	*Faixa de hipérbole*, conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$, $\forall\, a$, $b \in \mathbb{R}^+$, e $0 \leq y \leq 1/x$.
$H(k)_a^b$	Faixa da hipérbole $y = k/x$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$.
IME-USP	Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
$\log x$	Logaritmo decimal de x
$\ln x$	Logaritmo natural de x
$\log_a x$	Logaritmo de x na base a
e	Número de Euler, onde $\ln e = 1$
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
r	Razão da Progressão Aritmética
q	Razão da Progressão Geométrica
a_n	Termo genérico da Progressão Aritmética
g_n	Termo genérico da Progressão Geométrica
PCNEM	Parâmetros Currriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais + (Orientações Educacionais Complementares)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cong$	Aproximadamente
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não contém
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{a/b;\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\Rightarrow$	Símbolo de implicação lógica
$\Leftrightarrow$	Símbolo de equivalência lógica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de logaritmos é um dos conteúdos visto no Ensino Médio, mais especificamente em sua 1ª série. Muitas vezes o ensino deste tema se baseia nas resoluções de equações e cálculos dissociados de situações problemas. Essa ideia vai na direção contrária das orientações dos PCNEM [6] e dos PCN+/Ensino Médio [7] para o ensino de funções, em particular ao ensino das funções exponencial e logarítmica, onde os referidos documentos orientam que o ensino dessas funções seja feito por meio de situações problemas e fenômenos naturais que são modelados pelas características dessas funções. Ambas as funções modelam fenômenos naturais e situações problemas onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente num dado instante.

Neste trabalho, propomos que o ensino das propriedades, ideias, definições e caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas sejam elucidadas e mostradas por meio de problemas contextualizados e situações onde possam aparecer a aplicabilidade das funções exponenciais e logarítmicas. É fundamental que os alunos entendam que as funções exponenciais modelam fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce rapidamente enquanto as funções logarítmicas modelam os fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce lentamente, sendo que as variações de ambas as funções são proporcionais à variavel independente.

Frente essa temática, este trabalho esta organizado da forma que descreveremos, brevemente, a seguir.

No capítulo 2, procuramos descrever os objetivos e o público alvo deste trabalho, juntamente com as dificuldades previstas para o seu entendimento e possível aplicação em sala de aula. Abordamos, também, sobre o que dizem os PCNEM [6] e os PCN+/Ensino Médio [7] a respeito do ensino das funções exponenciais e logarítmicas.

No capítulo 3, fizemos uma pequena abordagem histórica dos logaritmos, onde propomos mostrar o desenvolvimento de seus conceitos e propriedades no decorrer do tempo com os nomes de seus principais protagonistas.

No capítulo 4, apresentamos uma definição formal dos logaritmos nos dias atuais, com caracterização da função exponencial e logarítmica. Mostramos, como consequências dessa definição, as propriedades, teoremas, corolário e observações destas funções.

No capítulo 5, abordamos, sucintamente, as derivadas e integrais das funções exponenciais e logarítmicas, com problemas de aplicação, para um curso de Cálculo a uma variável, comumente chamado Cálculo Diferencial e Integral I. Este capítulo é destinado ao professor.

No capítulo 6, trazemos as ideias das funções exponenciais e logarítmicas com o uso das equações diferenciais ordinárias (EDO), apresentando a sua classificação e teoria de soluções. Concomitantemente, mostramos problemas de aplicação que requerem o uso de uma EDO de 1ª ordem. Este capítulo também é designado ao professor.

Apesar dos tópicos dos capítulos 5 e 6 não serem assunto do Ensino Médio, eles são necessários, visto que o professor deve ter uma visão ampla e não restrita do conteúdo que ministra. Vale o ditado antigo: "O professor deve saber muito mais do que aquilo que vai ensinar!"

No capítulo 7, apresentamos algumas atividades que podem vir a enriquecer as aulas sobre logaritmos no Ensino Médio. Nas Propostas de Atividades de 1 a 4, propomos iniciar a ideia de logaritmos por meio das progressões aritméticas e geométricas, focando em sua principal propriedade: transformar produto em soma. Mostrando, também, é claro, a principal propriedade da função exponencial, inversa da função logarítmica, que é transformar soma em produto. Vale ressaltar que, na maioria das escolas, as funções exponenciais e logarítmicas são estudadas antes do assunto progressões aritméticas e geométricas, pois estas são vistas na 2ª série do Ensino Médio. Entendemos que é possível fazer uso desta proposta, visto que precisaremos somente de noções das progressões aritméticas e geométricas. Estas são simples e podem ser facilmente apreendidas pelos alunos da 1ª série do Ensino Médio num curto intervalo de tempo. O auxílio dessas progressões no ensino dos logaritmos enriquecerão, consideravelmente, o entendimento das ideias principais da função logarítmica e de sua inversa.

Ainda no capítulo 7, mostramos os teoremas de caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas, apresentando, na Proposta de Atividade 5, exercícios que exemplificam tais caracterizações. Nas Propostas de Atividades 6 e 7, mostramos exemplos de situações problemas que são modeladas por meio das funções de tipo exponencial e logarítmica, trazendo, por meio destas atividades, propriedades e ideias importantes dessas duas funções. Também são dados exemplos de aplicações modelados pelas funções exponenciais e logarítmicas, onde podemos ver a importância dos logaritmos naturais como modelos matemáticos. Procuramos mostrar, por meio das atividades e aplicações deste capítulo, que o ensino de Logaritmos no Ensino Médio, deve ser feito, preferencialmente, por meio de situações problemas.

No capítulo 8, trazemos as considerações gerais sobre este trabalho e apresentamos uma proposta de trabalho futuro. Após este capítulo, no Apêncice A, é apresentada a solução dos exercícios de aplicação dados na seção 7.2.9.

Finalizamos com três anexos, com os tópicos assim distribuidos: no Anexo A, demonstramos a fórmula da soma dos n termos de uma PG finita; no Anexo B, apresentamos como calcular 2^{64} sem o auxílio de uma calculadora ou de um computador, usando apenas as propriedades dos logaritmos e uma tábua de logaritmos e, no Anexo C, trazemos uma pequena tábua de logaritmos de números com até duas casas decimais.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

2.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é apresentar aos alunos da 1ª série do Ensino Médio o contéudo Logaritmos visando os seguintes tópicos:

i) apresentar os logaritmos através das progressões aritméticas e geométricas, focando em sua principal propriedade: transformar produto em soma;

ii) por meio de uma visão histórica, mostrar o desenvolvimento de seus conceitos e propriedades no decorrer do tempo;

iii) apresentar uma definição formal dos logaritmos nos dias atuais e a caracterização da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial;

iv) mostrar exemplos de problemas do cotidiano que são modelados por meio da caracterização das funções de tipo exponencial e logarítmica;

v) elucidar a importância dos logaritmos naturais como Modelos Matemáticos para Fenômenos da Natureza;

vi) defender a ideia de que, devido a suas inúmeras aplicações, o conteúdo Logaritmos deve ser trabalhado, prioritariamente, por meio de situações problemas.

Apresentaremos, também, ao professor, tópicos relacionados a derivadas, integrais e equações diferenciais das funções de tipo exponencial e logarítmica, com problemas de aplicação. Apesar destes tópicos não serem assunto do Ensino Médio, eles são necessários, vistos que o professor deve ter uma visão ampliada e não limitada do conteúdo que leciona.

2.2 PÚBLICO ALVO

O público alvo deste trabalho são os alunos da educação básica da série onde se inicia os estudos sobre Logaritmos, geralmente a 1ª série do Ensino Médio, e aos professores de matemática que ministram aulas sobre este assunto.

2.3 PRÉ-REQUISITOS

Os conteúdos que são pré-requisitos para os alunos da 1ª série do Ensino Médio compreenderem a proposta deste trabalho são: noções de conjuntos, potenciação e radiciação, conceito de função (principalmente o conceito de função inversa), funções: afim, quadrática e modular, noções de trigonometria, noções de cinemática, noções de progressões aritméticas e geométricas.

2.4 DIFICULDADES PREVISTAS

Na grande maioria das vezes, todos os assuntos que são pré-requisitos, com exceção de noções de progressões aritméticas e geométricas, antecedem o conteúdo Logaritmos. Mas, no que diz respeito às progressões aritmétics e geométricas, conteúdos geralmente vistos na 2ª série do Ensino Médio, os alunos necessitam apenas de noções básicas, a definição destas progressões. Contudo, esta deficiência pode ser muito facilmente sanada, pelo professor, por meio de uma exposição sobre estas progressões, seguidas de alguns exemplos; visto que estas duas progressões são casos particulares de funções.

Uma outra dificuldade prevista é quanto a caracterização da função tipo exponencial e logarítmica. Muitas vezes, os problemas que envolvem estes tipos de funções são confundidos com variações lineares. Isto se deve ao fato dos alunos da 1ª série do Ensino Médio não terem uma definição do conceito de taxa de variação. Faz-se necessário o professor trabalhar bem a definição das funções tipo exponencial e logarítmica, diferenciando da função afim, visto que esta possui crescimento linear. Sendo assim, entedemos que a correta caracterização das funções estudadas é de suma importância.

As fórmulas da trigonometria que transformam produto em soma, as chamadas fórmulas de Werner, podem ser uma dificuldade para o entendimento dos alunos no tópico onde é abordado a invenção dos Logaritmos por Napier; pois, em algumas escolas, este assunto é tratado após o estudo das funções logarítmicas.

O conteúdo limite pode, também, ser um entrave, visto este assunto ser abordado somente na 3ª série do Ensino Médio, em algumas escolas, e em outras este assunto nem é abordado neste nível de ensino. Sendo assim, recomendamos que o professor trabalhe somente com a noção intuitiva de limites, sem se preocupar neste momento, com um tratamento mais formal e rigoroso.

2.5 OS PCNEM, OS PCN+ E O ESTUDO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Nesta seção faremos um breve levantamento sobre as orientações do Ministério da Educação (MEC), por meio de sua Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC), para o Nível Médio, no ensino de Matemática, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Funções, em particular as funções exponenciais e logarítmicas. Para este estudo nos baseamos em [6] e [7].

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) em seu volume três (Ciências da Natureza, Matemática e sua Tecnologias) temos sugestões de que o critério central de todos os conteúdos que compõem uma disciplina é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

De acordo com [7], o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Os PCN+ orientam ainda que o estudo de funções pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, permitindo o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. No que diz respeito aos problemas de aplicação, estes devem ser motivo e um incentivo para os alunos aprenderem funções e não deixados para o final do livro.

A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. Conhecer como ocorre esta dependência é um fato importante para saber em qual tipo de função tal fenômeno se encaixa.

Temos ainda que, a dependência entre essas grandezas no Ensino Médio, no estudo de funções, são as variáveis dependentes e independentes e a relação entre estas caracterizam determinado tipo de função. Por meio desta caracterização podemos identificar qual função deve modelar determinado problema.

As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável dependente é muito rápido, no caso das funções exponenciais, ou muito lento, no caso das funções logarítmicas; sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas.

Frente ao que foi exposto, podemos perceber que a proposta deste trabalho que é o estudo dos Logaritmos e a definição, caracterização e contextualização da função logarítmica e seu ensino por meio de situações problemas se insere nas orientações dos PCNEM e dos PCN+ para o ensino de funções, em especial no ensino das funções exponencial e logarítmica.

3 CONTEXTO HISTÓRICO DOS LOGARITMOS

Neste capítulo faremos um breve histórico sobre as funções exponenciais e logarítmicas e a ideia a elas associadas. Os dados históricos deste capítulo foram baseados em [5] e [13].

3.1 ANTES DA INVENÇÃO DOS LOGARITMOS DE NAPIER

3.1.1 Na Mesopotâmia

O quarto milênio a.C. foi um período de notável progresso cultural. As civilizações antigas da Mesopotâmia, também chamadas de babilônicas, embora tal designação não seja inteiramente correta; viveram no vale mesopotâmico nessa mesma época e eram uma população de alto nível cultural.

Os babilônios usavam o sistema de numeração posicional sexagesimal, base 60, e até hoje permanecem restos deste sistema como, por exemplo: as unidades de tempo e medida dos ângulos.

Podemos encontrar exemplos da ideia associada a logaritmos e exponenciais com os babilônicos e, dentre outros, citaremos alguns exemplos nos parágrafos abaixo.

Os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere. Uma tableta da Babilônia antiga, da coleção da biblioteca universitária de Yale (número 7289), contém o cálculo da raiz quadrada de dois até três casas sexagesimais. A resposta, em caracteres modernos, pode ser adequadamente escrita como $1; 24, 51, 10$, onde se usa o ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária e uma vírgula para separar posições (ordens) sexagesimais. Este valor para $\sqrt{2}$, na base decimal, é aproximadamente $1,414222$, diferindo por cerca de $0,000008$ do valor exato com até seis casas decimais.

Apesar da eficiência para encontrar raízes quadradas, os escribas mesopotâmicos parecem ter imitado matemáticos aplicados modernos, recorrendo frequentemente às tabelas disponíveis em toda a parte. Na verdade, uma boa parte das tabletas cuneiformes encontradas são "textos tabelas". Entre as tabelas babilônicas encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhante às nossas tabelas de logaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas contendo as dez primeiras potências para diferentes bases.

Uma questão posta numa destas tabletas: "a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado"? Na nossa lingaguem atual seria o mesmo quer dizer: qual o logaritmo de um número x, $(x > 0)$, de um certo número $a\,(1 \neq a > 0)$ como base?

As antigas tabelas exponenciais dos babilônicos continham grandes lacunas. Mas, mesmo assim, não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. Um exemplo do uso prático da interpolação em tabelas exponenciais é o seguinte: "quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar a 20 por cento ao ano?"A resposta dada é 3;47,13,20. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores $(1,12)^3$ e $(1,12)^4$, usando a fórmula para juros compostos $a = P(1+r)^n$, onde r é 20% ou 12/60, e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de $1;12$.

Para detalhes sobre interpolação linear, veja o exemplo do Anexo B deste trabalho e [14], p. 74-79.

3.1.2 Na Grécia Antiga

Na Grécia antiga, viveu um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Arquimedes (287 a.C - 212 a.C). Nesta mesma época, os gregos substituiram o seu sistema de numeração antigo, ático ou herodiânico, por um outro marcadamente superior - o jônio ou alfabético. Isto pode explicar o fato de Arquimedes ter dado sua contribuição à logística, chamada de computação de rotina, que nesta época era vista com desprezo; enquanto que a aritmética era um respeitável assunto de investigação filosófica.

Numa de suas obras chamada *Psammites* (Contador de Areia) Arquimedes se gabava de poder escrever um número maior que o número de grãos de areia necessários para encher o universo.

Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito acidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos - a adição das "ordens"dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100.000.000) corresponde a achar o produto dos números.

3.1.3 Na Arábia

A matemática árabe pode, razoalvelmente, ser dividida em quatro partes:

1) uma aritmética, baseada no princípio posicional;

2) uma algébrica, que embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos dos muçulmanos uma forma caracteristicamente nova e sistemática;

3) uma trigonométrica, cuja substância vinha principalmente da Grécia, mas à qual os arábes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas;

4) uma geométrica que vinha da Grécia, mas para a qual os arábes contribuiram com generalizações aqui e ali.

Com relação a **3)** deve-se notar que Ibn-Yunus (morreu em 1008), contemporâneo de

Alhazen e seu conterrâneo (ambos viveram no Egito), introduziu a fórmula trigonométrica $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y)+\cos(x-y)$. Esta é uma das quatro fórmulas de "produto para soma"que na Europa do século dezesseis serviram, antes da invenção dos logaritmos, para converter produtos em somas pelo método dito de *prosthaphaeresis* (adição e subtração em grego). Em conexão com **4)** houve uma contribuição significativa cerca de um século depois de Alhazen por um homen que no Oriente era tido como cientista mas que no Ocidente é tido como um dos maiores poetas persas, Omar Khayyam (1050-1122).

3.1.4 Na França

No ano de 1484, foi composto na França um manuscrito importantíssimo intitulado: *Triparty en la science des nombres*, de autoria de Nicolas Chuquet (morreu por volta de 1500). A última parte de *Triparty*, de longe a mais importante diz respeito à "Regle des premiers", isto é, a regra da incógnita, ou que chamaríamos de álgebra.

A potência da quantidade desconhecida era indicada por um expoente associado ao coeficiente do termo, de modo que nossas expressões modernas $5x$ e $6x^2$ apareciam em *Triparty* como $.5^1.$ e $.6^2..$ E, expoentes zero e negativos, eram representados de forma que $9x^0$ ficava $.9^0.$ e $9x^{-2}$ era escrito como $.9^{2m}..$ Chuquet escreveu, por exemplo, que $.72^1.$ dividido por $.8^3.$ dá $.9^{2m}.$ - isto é $72x \div 8x^3 = 9x^{-2}$.

As observações de Chuquet sobre relações entre as potências de 2 se relacionam com essas leis, sendo os índices dessas potências colocados numa tabela de 0 a 20, em que as somas dos índices correspondem aos produtos das potências. Exceto por serem grandes as lacunas entre as colunas, isto seria uma tabela de logaritmos em miniatura.

Durante o século seguinte observações semelhantes às de Chuquet seriam repetidas várias vezes e, certamente, tiveram um papel na invenção dos logaritmos.

3.2 OS LOGARITMOS DE NAPIER

3.2.1 John Napier

John Napier (1550-1617) viveu a maior parte de sua vida na majestosa propriedade de Merchiston, perto de Edimburgo, Escócia, e gastou grande parte de suas energias em controvérsias políticas e religiosas de seu tempo. Era violentamente anticatólico e chegou a afirmar que o Papa da igreja católica era o Anticristo.

Para se descontrair de suas polêmicas políticas e religiosas, Napier deleitava-se estudando matemática e ciência, resultando daí, dentre outras invenções: os logaritmos.

Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados, o que colocaria a origem de suas ideis em 1594, aproximadamente. Ele pensava nas sequências em que as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências, método conhecido como prostaférese. Ao saber que no observatório astronômico de Tycho Bache também usava o artifício da prostaférese, Napier publica, finalmente, em 1614 o *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

3.2.2 A Invenção dos Logaritmos

Como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumento de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. A fórmula trigonométrica

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

bem conhecida na época de Napier é visivelmente uma predecessora dessa ideia. Neste caso, o produto de dois números $2\cos(A)\cos(B)$ é substituído pela soma de dois números, $\cos(A+B)$ e $\cos(A-B)$. Pode-se facilmente estender esta fórmula para converter o produto de dois números quaisquer na soma de dois outros números.

Além da fórmula trigonométrica precedente há ainda as três seguintes:

$$2\,\mathrm{sen}(A)\cos(B) = \mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B)$$

$$2\cos(A)\,\mathrm{sen}(B) = \mathrm{sen}(A+B) - \mathrm{sen}(A-B)$$

$$2\,\mathrm{sen}(A)\,\mathrm{sen}(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B).$$

Essas quatro identidades são conhecidas como fórmulas de Werner e eram amplamente usadas, por volta do século XVII, como um método de conversão de produto em somas e diferenças, método conhecido como prostaférese.

Sabemos que Napier estava inteirado do método da prostaférese, pois seria difícil explicar por que ele restringiu seus logaritmos inicialmente aos senos de ângulos. Mas, a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese, e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$$

os da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...$$

então o produto $b^m b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado a soma $m+n$ dos termos da segunda progressão. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondente precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1. Com essa finalidade, Napier tomou $(1 - 1/10^7) = 0,9999999$ para b. Para evitar decimais, ele multiplicou cada potência por 10^7. Então, se

$$N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$$

ele chamava L de "logaritmo"do número N. Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1 - 1/10^7) = 0,9999999$ é 1. Dividindo-se N e L por 10^7, virtualmente se encontrará um sistema de logaritmos na base $1/e$, pois

$$(1 - 1/10^7)^{10^7}$$

fica próximo de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Como é óbvio, deve-se ter em mente que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos. Observando a figura abaixo e as explicações a seguir, podemos ver como Napier mostrou os princípios de seus trabalhos.

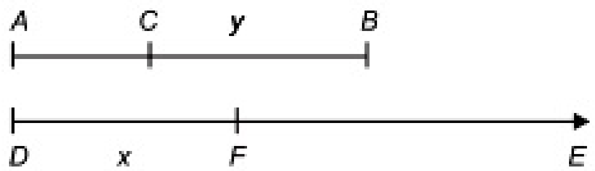

Figura 1 – Segmento de reta e semirreta auxiliar para a geometria dos logaritmos de Napier.

Em termos geométricos, esses princípios, podem ser apresentados como segue:

i) consideremos um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a figura 1;

ii) tomemos o comprimento de AB como unidade, 10^7 no caso de Napier, pois as melhores tábuas de senos que se dispunham estendiam até sete casas;

iii) suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimentos simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial;

iv) admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente igual à distância CB, e que F se mova com velocidade constante igual a velocidade inicial de C (numericamente igual à distância $CB = AB$);

v) Napier definiu então DF como o logaritmo de CB. Isto é, pondo $DF = x$ e $CB = y$,

$$x = Nap \log y$$

Nota-se ainda que, sobre uma sucessão de períodos de tempos iguais, y decresce em progressão geométrica enquanto x cresce em progressão aritmética. Assim, verifica-se o princípio fundamental dos logaritmos, a associação de uma progressão geométrica a uma aritmética. Daí que, por exemplo, se $a/b = c/d$, então

$$Nap\log a - Nap\log b = Nap\log c - Nap\log d$$

que é um dos muitos resultados estabelecidos por Napier.

A definição geométrica de Napier concorda, é claro, com a descrição numérica dada acima. Assim é que temos: $AC = 10^7 - y$ e daí:

$$\text{velocidade de C} = -\frac{dy}{dt} = y.$$

Isto é, $\dfrac{dy}{y} = -dt$ ou, integrando, $\ln y = -t + C$. Calculando-se a constante de integração, temos: fazendo $t = 0$, temos que $y = AB = 10^7$. Assim, obtemos que $C = \ln 10^7$ e portanto:

$$\ln y = -t + \ln 10^7.$$

Por outro lado,

$$\text{velocidade de} \, F = \frac{dx}{dt} = 10^7,$$

de modo que, integrando, $x = 10^7 t$. Donde

$$Nap\log y = x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 10^7 \ln\frac{10^7}{y} = 10^7 \log_{1/e}\frac{y}{10^7}.$$

Isto é, se as distâncias CB e DF fossem divididas por 10^7, a definição de Napier levaria precisamente a um sistema de logaritmos de base $1/e$, como já foi mencionado. É importante salientar que a demonstração dada acima é somente para o professor; portanto, deve ser omitida para o aluno, visto este não ter conhecimento a respeito das equações diferenciais.

O conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e em toda a sua obra sobre logaritmos, mas essa relação não preponderava o seu espírito. Tinha laboriosamnete construído seu sistema com um objetivo - a simplificação de computações, especialmente de produtos e quocientes.

3.2.3 **Henry Briggs e os Logaritmos**

A publicação de Napier, em 1614, de sua obra sobre logaritmos despertou interesse imediato e amplo e entre seus admiradores mais entusiásticos estava o professor Henry Briggs (1561-1631), que lecionava geometria em Oxford. Em 1615, Briggs visitou Napier em sua casa na Escócia e durante este encontro discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Foi no decorrer deste encontro que Briggs propôs a Napier o uso de potências de dez e ambos concordaram que o lagarimto de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse alguma potência conveniente de 10. Deste encontro, nasceram os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos de base 10 e, também, o conceito de base de um sistema de logaritmos.

Em 1617, morre Napier, e Briggs publica seu *Logarithmorum chilias prima* – isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um com quatorze casas decimais. Em 1624, em *Arithmetica logarithmica*, Brigss ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com quatorze casas decimais.

Após a publicação de seu livro *Arithmetica logarithmica*, o trabalho de Briggs com logaritmos podia ser realizado exatamente como hoje, pois para as tabelas de Briggs todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam. Foi a partir deste mesmo livro de Briggs que provém as palavras "mantissa"e "característica", que passaram a ser usadas nas operações que fazem uso das tábuas de logaritmos. Como curiosidade, temos que as primeiras tábuas de logaritmos comuns costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; só no século XVIII começou a praxe atual de só se imprimir a mantissa.

É oportuno dizer que conforme [14], uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número de coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo. Para multiplicar dois números , basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para esquerda, qual número tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. A utilidade original dos logaritmos resulta portanto da seguinte observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos, por mais longo e cansativo que seja, é feito uma única vez. Depois deste trabalho realizado, ninguém precisa mais, por exemplo, efetuar multiplicações; adições bastam. Como exemplo de tábua de logaritmos, veja a que consta no Anexo C deste trabalho.

Para mais informações sobre a construção de tábua de Logaritmos sugerimos [1].

3.2.4 Jobst Bürgi e a Invenção dos Logaritmos

Napier foi, de fato, o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independemente na Suíça por Jobst Bürgi, em 1588, o que seria seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Bürgi só publicou seus resultados em Praga, no ano de 1620, seis anos depois de Napier publicar seu livro *Descriptio*.

A obra de Bürgi, intitulada *Arithmetische und geometrische Progress—Tabulen*, indica que as influências que guiaram seu trabalho foram semelhantes às que operaram no caso de Napier. Ambos partiram das propriedades das sequências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método de prostaférese. As diferenças entre as obras de Napier e Bürgi estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos que usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos. Enquanto que a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica.

É importante frisar que a invenção dos logaritmos foi entusiasticamente adotada em toda a Europa, principalmente na astronomia, pois aumentava o poder de computação dos astrônomo, fazendo surgir o aparecimento de tabelas de logaritmos que eram mais que suficientes para a época.

4 OS LOGARITMOS E A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Neste capítulo faremos uma exposição elementar sobre logaritmos. Os dados referentes a este capítulo são baseados em [14] e [15].

4.1 A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO COMO EXPOENTE

Os livros tradicionais, após mostrarem a validez da propriedade fundamental da potência, à saber: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, onde a é um número real positivo e m, n são números racionais, definem o logaritmo como a seguir.

Dado um número real a, $1 \neq a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a.

Podemos escrever então:

$$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x.$$

Desta definição decorre imediatamente a propriedade fundamental dos logaritmos, que é a seguinte:

$$\log_a(ux) = \log_a u + \log_a x.$$

Para provar isto, basta escrever $\log_a u = v$, $\log_a x = y$. Isto quer dizer que $a^v = u$ e $a^y = x$. Segue-se então que $a^v \cdot a^y = ux$, ou seja, que $a^{v+y} = ux$. Esta última igualdade significa que $v + y = \log_a(ux)$, isto é, que

$$\log_a(ux) = \log_a u + \log_a x.$$

Tomemos, como fez Briggs, o número 10 para base dos logaritmos e vejamos o seguinte exemplo: Qual seria o logaritmo de 3 na base 10?

Por definição, $\log_{10} 3$ é o número y tal que $10^y = 3$.

Suponhamos que $y = \dfrac{p}{q}$ fosse um número racional. Então teríamos:

$$10^{\frac{p}{q}} = 3$$

e portanto

$$10^p = 3^q.$$

A última igualdade é um absurdo, pois 10^p é 1 seguido de p zeros e, evidentemente, $3^q = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$ não tem esta forma.

Assim $\log_{10} 3$ não pode ser um número racional. Logo $y = \log_{10} 3$ é um número irracional tal que $10^y = 3$.

E que significa, afinal de contas, uma potência com expoente irracional? Que significa, por exemplo $10^{\sqrt{2}}$?

Estas são perguntas cruciais, que devem ocorrer imediatamente quando se define o logaritmo como expoente. É possível explicar satisfatoriamente o significado de uma potência com expoente irracional. Por exemplo,$10^{\sqrt{2}}$ é definido assim: tomam-se os valores $1,4; 1,41; 1,414$ etc., aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$. Pode-se mostrar que os números $10^{1,4}$, $10^{1,41}$, $10^{1,414}$ etc. ficam cada vez mais próximos de um número real l. Definimos então $10^{\sqrt{2}} = l$. Assim, tanto mais próximo esteja o número racional r de $\sqrt{2}$, mais próximo estará 10^r de $10^{\sqrt{2}}$.

O desenvolvimento sistemático da teoria das potências com expoente real (racional e irracional), para servir de base ao estudo dos logaritmos, é um processo longo e tedioso.

A maioria dos autores modernos prefere definir logaritmos geometricamente, com base na noção de área de uma figura plana. Este é caminho que adotaremos neste trabalho.

4.2 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Os logaritmos se deixam caracterizar por duas propriedades extremamente simples e naturais, de modo que a escolha do processo de apresentá-los é apenas uma questão de preferência.

Um a função real $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:

(A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

(B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x.

Uma vez que valham as duas propriedades acima, vamos mostrar a frente no Teorema 4.9 que só existe uma maneira de alterar um sistema de logaritmos: multiplicar por uma constante todos os logaritmos desse sistema. Mostraremos, agora, as propriedades que são consequências das propriedades **(A)** e **(B)** vistas acima:

Propriedade 4.1. Uma função $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Demonstração. Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso, resulta de **(A)** que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem-se $L(x) > L(y)$. Em qualquer hipótese, $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$. $\square$

Propriedade 4.2. O logaritmo de 1 é zero.

Demonstração. Por **(B)**, temos: $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$, logo $L(1) = 0$. □

Propriedade 4.3. Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Demonstração. Como L é crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta que $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$. □

Propriedade 4.4. Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

Demonstração. Com efeito, de $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ resulta que $L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1) = 0$, donde $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$. □

Propriedade 4.5. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.

Demonstração. De fato, $L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y)$. □

Propriedade 4.6. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ podemos afirmar que $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Faremos a demonstração desta propriedade por etapas.

Demonstração. Em primeiro lugar, observa-se que a propriedade:

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

se estende para o produto de um número qualquer de fatores. Por exemplo,

$$L(x \cdot y \cdot z) = L(x \cdot y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z).$$

E assim por diante:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \ldots + L(x_n).$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = L(x) + L(x) + \ldots + L(x) = n \cdot L(x).$$

Portanto, a Propriedade 4.6 vale quando $r = n$ é um número natural.

Ela também vale quando $r = 0$ pois, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo

$$L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x).$$

Consideremos, agora o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Então, $\forall\, x > 0$, temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo:

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0,$$

e daí

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n \cdot L(x).$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos:

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo, $q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x)$. Da igualdade $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ resulta que $L(x^r) = (p/q) \cdot L(x) = r \cdot L(x)$. $\square$

Propriedade 4.7. Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.

Demonstração. Suponhamos que nos seja dado um número real β e queremos encontrar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$. Podemos proceder da seguinte maneira: tomamos um natural n tão grande que $n > \dfrac{\beta}{L(2)}$. Como $L(2)$ é positivo, propriedade 4.3, temos $n \cdot L(2) > \beta$. Usando a propriedade 4.6, temos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > \beta$. Basta, agora, escolher $x = 2^n$ e teremos $L(x) > \beta$, mostrando que L é ilimitada superiormente. Mostraremos agora que L é ilimitada inferiormente usando a propriedade 4.4. Vejamos: dado um número real α, podemos encontrar um $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Então, pondo $t = \frac{1}{x}$, teremos $L(t) = -L(x) < \alpha$. $\square$

Observação 4.8. Uma função logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$. Com efeito, se tal fosse o caso, para todo $x > 0$ teríamos

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0), \text{ donde } L(x) = 0.$$

Assim, L seria identicamente nula, contrariando a propriedade **(A)**.

Também não é possível estender satisfatoriamente o domínio da função logarítimica de modo que $L(x)$ seja um número real, definido $\forall\, x < 0$. Para uma discussão sobre logaritmos de números negativos, veja [17], p. 180-186, e [18].

O Teorema 4.9, que será apresentado a seguir, mostra, como já dissemos no início desta seção, que a única maneira de obter uma função logarítmica é que dado uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^+$, então a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$, é também uma função logarítmica.

Então, para estudar logaritmos, basta obter uma função crescente $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$. Todas as demais funções logarírmicas (ou sistemas de logaritmos) resultarão de L pela multiplicação por uma constante conveniente.

Teorema 4.9. Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c.L(x)\ \forall\, x > 0$.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que exista um número real $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos, neste caso, que $L(x) = M(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^+$. De $L(a) = M(a)$, concluimos que $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que exista um $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Consideremos, por exemplo, que seja $L(b) < M(b)$. Escolhamos um número n tão grande que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$L(a^{1/n}) = \frac{L(a)}{n} < M(b) - L(b).$$

Escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Os números c, $2c$, $3c$, $\ldots$ dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo $]L(b),\ M(b)[$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Assim, temos que

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$. Esta contradição mostra que b não existe. Sendo assim, devemos ter $M(x) = L(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$. □

Para mais detalhes sobre Sistemas de Logaritmos veja [19].

Exemplo 4.10. Calcule $\sqrt[n]{a}$, sendo $a \in \mathbb{R}^+\, e\, n \in \mathbb{N}$.

Solução: Suponhamos conhecida uma função logarítmica L. Pela Propriedade 4.6, temos $L(\sqrt[n]{a}) = L(a)/n$. Consultando uma tábua de valores de L encontramos o valor $L(a)$, facilmente o dividimos por n e obtemos $L(\sqrt[n]{a}) = c$, um número conhecido. Novamente usando a tábua (desta vez no sentido inverso) encontramos um número positivo b tal que $L(b) = c$. Pela Propriedade 4.1, de $L(b) = L(\sqrt[n]{a})$ concluímos que $b = \sqrt[n]{a}$.

Teorema 4.11. Toda função logarítmica L é sobrejetora, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um número real positivo x tal que $L(x) = c$.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser obtida em [14], p. 20-21. □

Corolário 4.12. Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$.

O corolário acima mostra que toda tábua de logaritmos pode ser lida tanto da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Dado um número real arbitrário y, podemos buscar na tábua o número $x > 0$ do qual y é o logaritmo. Como vimos acima, esta possibilidade é fundamental para o uso dos logaritmos no cálculo aritmético. A "tabela inversa"dos logaritmos, lida da direita para a esquerda é, na realidade, a tábua dos valores da função exponencial, que definiremos adiante.

Segue-se ainda do Teorema 4.11 que, dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Este número a é chamado de base do sistema de logaritmos L. Para explicitar a base, muitas vezes se escreve $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.

Se L_a e L_b são funções logarítmicas, com $L_a(a) = L_b(b) = 1$ (ou seja, de bases a e b respectivamente) então o Teorema 4.9 assegura a existência de uma constante $c > 0$ tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)\ \forall\, x > 0$. Pondo $x = a$, resulta $L_b(a) = c$. Portanto, temos

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x),\ \forall\, x > 0.$$

Esta é a fórmula da mudança de base de logaritmos.

Tradicionalmente, as bases de logaritmos mais comuns são 10 (porque nossos números são escritos usualmente no sistema de numeração decimal) e $e \cong 2,718281$ (número irracional), base dos logaritmos naturais, relacionados a vários fenômenos naturais e será foco de estudo nas seções seguintes.

4.3 A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO POR MEIO DE ÁREA

4.3.1 Área de uma Faixa de Hipérbole

Primeiro o padre jesuíta belga Gregory Saint Vincem, em 1647, e depois Isaac Newton, em 1660, reconheceram uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos. Embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com os logaritmos naturais, nem tenham reconhecido o número e, suas observações pioneiras mostram que a concepção geométrica de uma função logarítmica é uma idéia muito antiga, com mais de 3 séculos e meio de existência.

Seja

$$H = \{(x, 1/x)\,;\, x > 0\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$; o gráfico que identifica geometricamente H está no primeiro quadrante, sendo representado pela figura 2.

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq 1/x$ chama-se uma *faixa de hipérbole*. Assim, H_a^b é o conjunto do plano limitado pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H. A figura 3 ilustra a faixa de hipérbole aqui descrita.

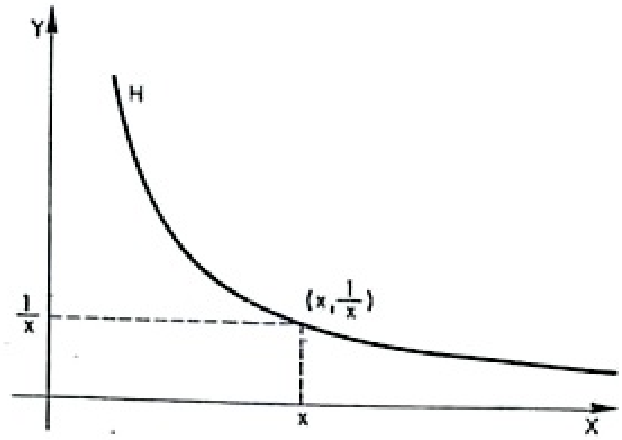

Figura 2 – Hipérbole Equilátera $xy = 1$, $x > 0$.

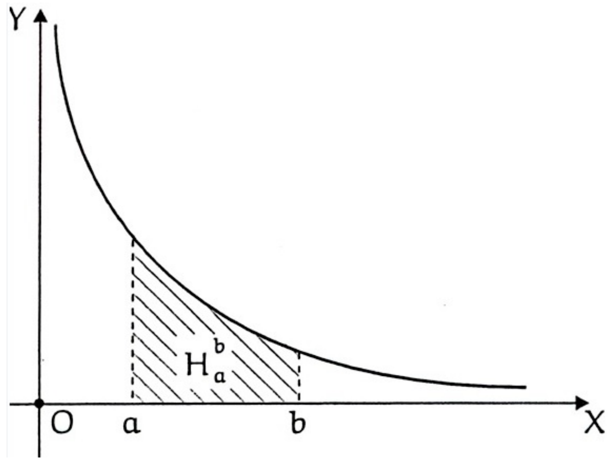

Figura 3 – Faixa de Hipérbole entre $x = a$ e $x = b$.

O fato mais importante a respeito das áreas das faixas de hipérbole é expresso pelo teorema abaixo:

Teorema 4.13. Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Demonstração. Observemos primeiramente o seguinte fato. Dado um retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[ck, dk]$ tem mesma área que o anterior. Observe a figura 4 e a descrição abaixo.

De fato, a área do primeiro é igual a

$$(d - c) \times \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto a área do segundo é

$$(dk - ck) \times \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}.$$

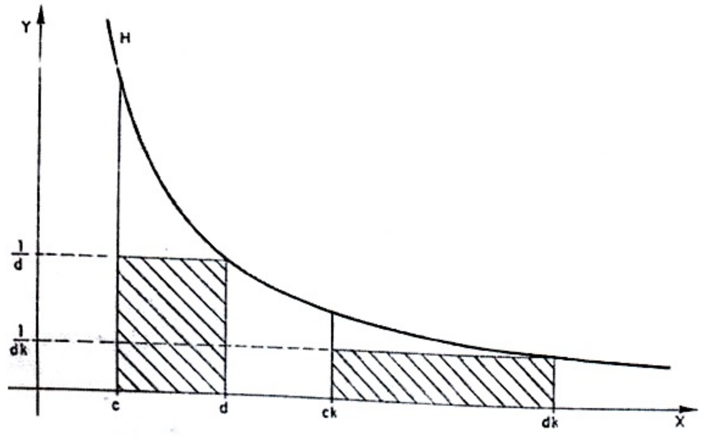

Figura 4 – Os retângulos hachurados têm a mesma área.

Consideremos agora uma reunião de retângulos adjacentes inscritos numa faixa de hipérbole H, cujas bases particionam um intervalo $[a, b]$ no eixo das abscissas, conforme ilustra a figura 5. Chamaremos esta reunião de retângulos de polígono retangular P. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão $[a, b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto um novo polígono retangular P', inscrito na faixa H_{ak}^{bk}. Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P' é igual à de P.

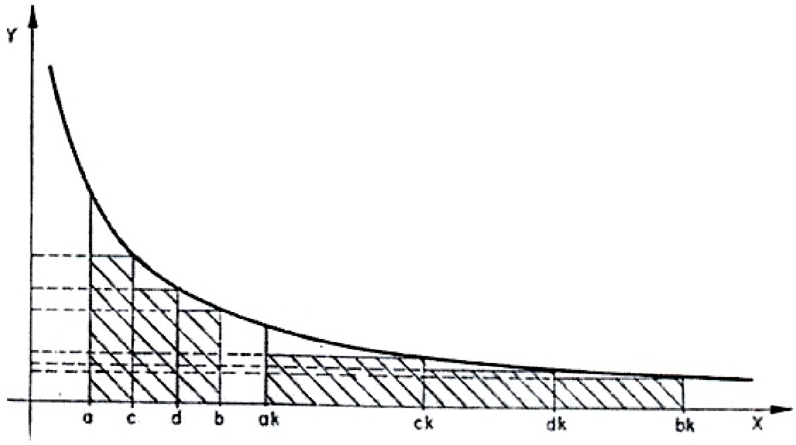

Figura 5 – Os polígonos retangulares P e P' possuem mesma área.

Portanto, concluímos que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. Analogamente, para cada polígono retangular Q' inscrito em H_{ak}^{bk}, existe um outro Q, de mesma área, inscrito em H_a^b. Assim sendo, temos que as áreas destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores e, portanto, são iguais. $\square$

Uma consequência deste teorema é que podemos restringir nossa consideração às áreas das faixas da forma H_1^c, pois:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{b/a}) = \text{Área}(H_1^c),\ c = b/a.$$

Quando $a < b < c$, verificamos que:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c). \quad (*)$$

A fim de manter a validez da igualdade acima para quaisquer a, b, c reais, convencionaremos que

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \ \ e \ \ \text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a).$$

Esta última conversão implica em considerar áreas negativas. Assim, por exemplo, $\text{Á}rea(H_1^2) = -\text{Área}(H_2^1) < 0$. Isto contraria a tradição mas, em compensação, a igualdade $(*)$ acima torna-se válida sem restrições. Provemos esta afirmação.

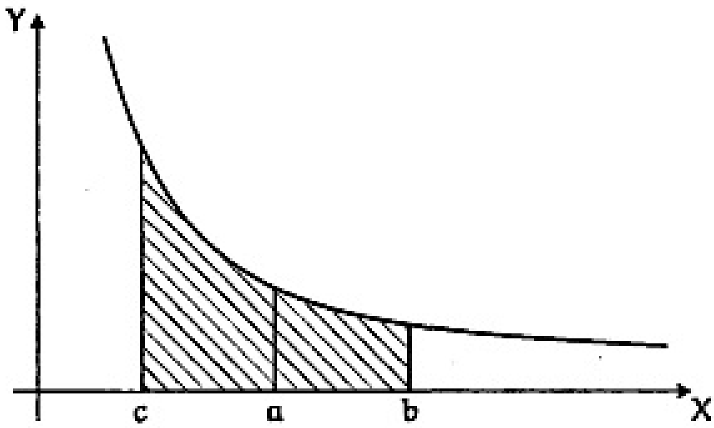

Figura 6 – $\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c)$.

Por exemplo, se $c < a < b$, temos

$$\text{Área}(H_c^b) = \text{Área}(H_c^a) + \text{Área}(H_a^b).$$

Daí segue:

$$\text{Área}(H_a^b) - \text{Área}(H_c^b) = -\text{Área}(H_c^a),$$

ou seja,

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c). \ \ (*)$$

Analogamente, prova-se, a validez da igualdade $(*)$ nos 4 demais casos, que são:

$$a < c < b,\ b < a < c,\ b < c < a \ \ e \ \ c < b < a.$$

Mesmo que se tenha $a = c$, $a = b$, $b = c$ ou $a = b = c$, a igualdade $(*)$ ainda se mantém verdadeira. Isto é trivial, pois $b = a$, por exemplo, faz com que a igualdade se torne

$$\text{Área}(H_a^a) + \text{Área}(H_a^c) = \text{Área}(H_a^c) \ \Rightarrow \ \text{Área}(H_a^c) = \text{Área}(H_a^c).$$

4.3.2 Logaritmos Naturais

Definiremos o logaritmo natural de x, $x \in \mathbb{R}^+$, como a área da faixa H_1^x. Assim, escrevendo $\ln x$ para indicar o logaritmo natural de x, temos:

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x).$$

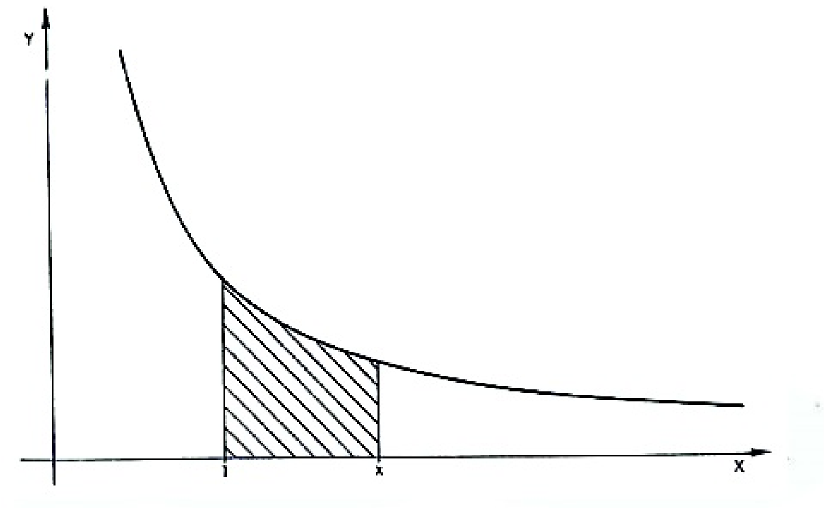

Figura 7 – A área hachurada é numericamente igual a $\ln x$.

Lembremos da convenção de tomar $\text{Área}(H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$ será sempre adotada.

Em particular, quando $x = 1$, H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} &\ln 1 = 0; \\ &\ln x > 0 \ \textit{se} \ x > 1; \\ &\ln x < 0 \ \textit{se} \ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Não está definido $\ln x$ quando $x < 0$.

Fica portanto definida uma função real

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

A cada $x \in \mathbb{R}^+$, a função ln faz corresponder seu logaritmo natural, $\ln x$, definido acima.

Teorema 4.14. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Demonstração. Devemos mostrar que ln goza das propriedades **(A)** e **(B)** vistas na seção 4.2 deste trabalho. Começaremos provando que

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Já vimos que

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy}).$$

Já vimos também que

$$\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_1^y).$$

Segue-se que

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_1^y),$$

isto é,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Provaremos, agora que ln é uma função crescente. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, dizer que $x < y$ significa afirmar que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que

$$\ln y = \ln a + \ln x.$$

Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Portanto $\ln y > \ln x$, provando que ln é uma função crescente. $\square$

Esboçaremos agora o gráfico da função ln. O gráfico da função logaritmo natural é o conjunto

$$G = \{(x, \ln x); x > 0\}.$$

Para traçar o gráfico de ln, lembremos que sendo esta uma função logarítmica, ela é: crescente, ilimitada nos dois sentidos (superior e inferionnente) e sobrejetiva.

Estes fatos mostram que o gráfico de $\ln x$ é uma curva contida no primeiro e no quarto quadrantes, a qual corta o eixo das abscissas em $x = 1$ e que, quando x varia entre 0 e $+\infty$, a ordenada do ponto $(x, \ln x)$ sobre a curva cresce de $-\infty$ a $+\infty$. Plotando vários pontos, o comportamento do gráfico de $\ln x$ parece o apresentado na figura 8.

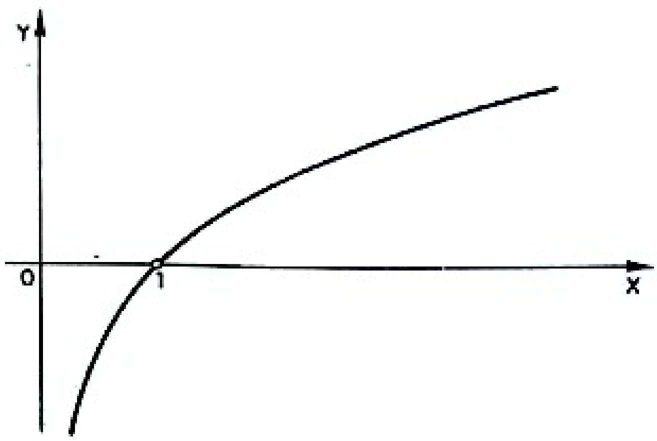

Figura 8 – O gráfico da função $y = \ln x$.

Para uma informação mais precisa sobre o aspecto do gráfico de $\ln x$ precisaríamos de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

4.4 O NÚMERO e E A FUNÇÃO EXPONENCIAL DE BASE e

4.4.1 O número e

Em virtude do Teorema 4.11, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Ele é a base do sistema de logaritmos naturais. Portanto:

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Lembrando o significado geométrico dos logarimos naturais, vemos que a faixa H_1^e tem área 1.

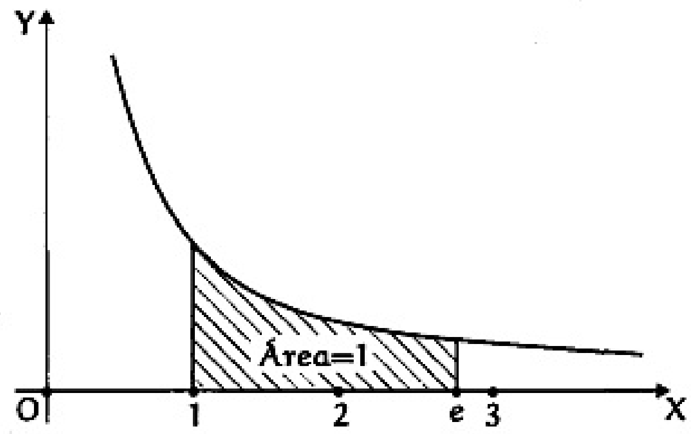

Figura 9 – Área$(H_1^e) = \ln e = 1$.

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante, com 12 algarismos decimais exatos, é $e = 2,718281828459$. A prova da irracionalidade do número e pode ser vista em [23], p. 260-262.

Os logaritmos naturais, de base e, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal. Para mais detalhes, vide [20].

Teorema 4.15. Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.

Demonstração. Se $y = e^r$, então $\ln y = r \cdot \ln e = r$, pois $\ln e = 1$. Reciprocamente, seja $y > 0$ um número real tal que $\ln y = r$. Como $\ln(e^r) = r$ e $\ln$ é uma função biunívoca, concluímos que $y = e^r$. $\square$

Usualmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Noutras palavras, costuma-se introduzir e como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionias da forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n.

Mostraremos agora que o número e, que acabamos de caracterizar pela propriedade Área$(H_1^e) = 1$, é mesmo o valor daquele limite. O argumento que usaremos para dar essa prova se baseia na figura 10. Nesta temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1.

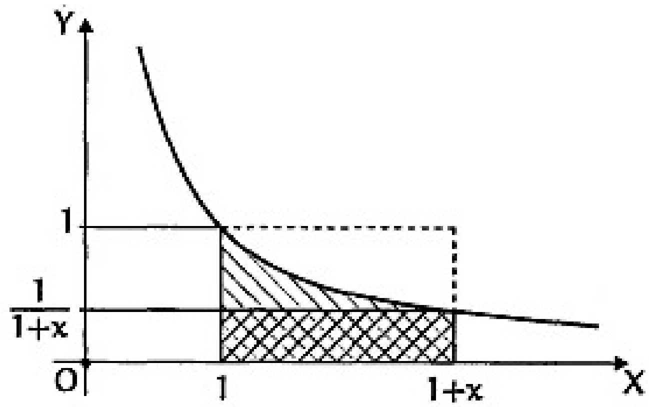

Figura 10 – Área(H_1^{1+x}) e áreas dos retângulos de base x e alturas 1 e $\frac{1}{1+x}$.

Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo por x :

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

portanto:

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ se aproxima de e. Segue-se então das últimas desigualdades que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Seja agora $x < 0$. Como faremos x tender para zero, não faz mal supor $x > -1$ e portanto $-1 < x < 0$. Portanto é válido ainda falar de $\ln(1+x)$. Observamos que o retângulo cuja base mede $-x$ e cuja altura mede 1 está contido na faixa H_{1+x}^1 e esta, por sua vez, está contida no retângulo de mesma base e altura $1/(1+x)$. Comparando as áreas destas figuras, vem

$$-x < -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Dividindo os 3 membros pelo número positivo $-x$ obtemos

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x},$$

ou seja:

$$1 < \ln(1+x)^{1/x} < \frac{1}{1+x}.$$

Logo:

$$e < (1+x)^{1/x} < e^{1/(1+x)}.$$

Quando x tende a zero, $e^{1/(1+x)}$ tende e; então $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Para provar o último limite, podemos, também, fazer $y = 1/x\,(x \neq 0)$, daí temos que $x = 1/y$ e $x \to 0$ é mesmo que $y \to \infty$.

Portanto:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Corolário 4.16. Para $x \neq 0$ valem as igualdades:

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = e^a; \;\; \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Demonstração. As duas afirmações acima são equivalentes, como se observa. Basta então demonstrar a primeira delas. Para isto, faça $u = ax$, donde $1/x = a/u$. Então, quando $x \to 0$, u também tende a zero e portanto

$$(1+ax)^{1/x} = (1+u)^{a/u} = [(1+u)^{1/u}]^a$$

tende para e^a quando $x \to 0$.

Em particular:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Isto se obtém fazendo no corolário acima $a = -1$ e restringindo (na segunda fórmula) x a tomar valores inteiros. $\square$

4.4.2 A Função Exponencial de Base e

Motivados pelo Teorema 4.15, definiremos agora a potência e^x.

Definição 4.17. Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

O corolário 4.12 assegura a existência de e^x e sua unicidade.

Geometricamente $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole H_1^y tenha área x.

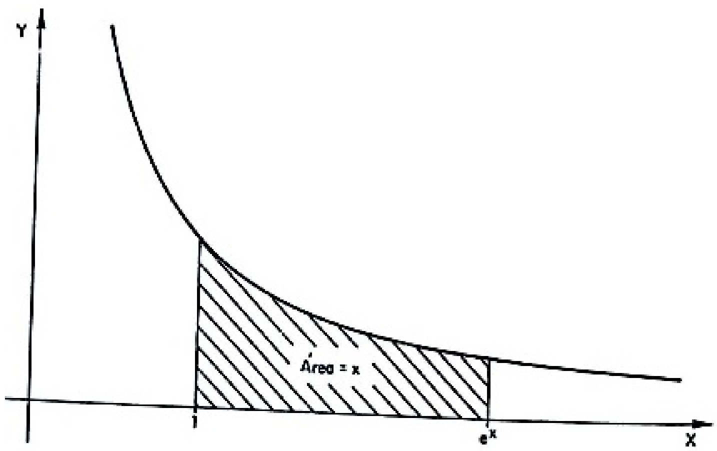

Figura 11 – Área$(H_1^{e^x}) = x$.

Temos que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1 \; \forall \; x > 0$ e que $e^x < 1 \; \forall \; x < 0$. A equivalência abaixo é a definição de e^x:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$

Podemos, agora, tomar e^x mesmo com x irracional. Por exemplo, $e^{\sqrt{2}}$ é simplesmente o número $y > 0$ tal que a área de H_1^y vale $\sqrt{2}$.

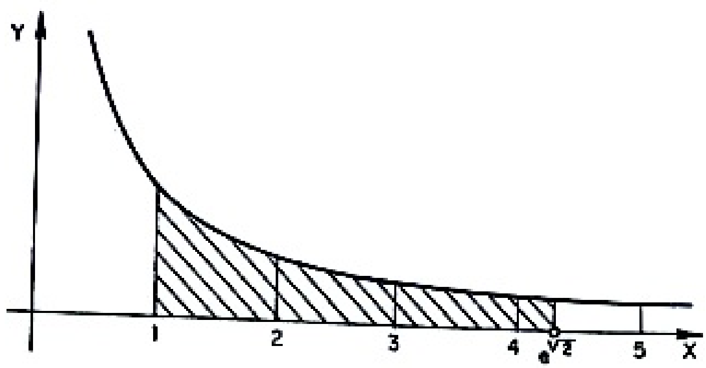

Figura 12 – Área$(H_1^{e^{\sqrt{2}}}) = \sqrt{2}$.

Enquanto $\ln x$ tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x. A correspondência $x \mapsto e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a *função exponencial.*

A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto quer dizer que as igualdades abaixo são válidas para todo x real e todo $y > 0$:

$$\ln(e^x) = x; \quad e^{\ln y} = y.$$

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x, a função logaritmo natural transforma e^x de volta em x. Reciprocamente, a função exponencial leva $\ln y$ em y.

A propriedade fundamental da função exponencial é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 4.18. Para todos os números reais x, y, tem-se

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Demonstração. Como ln é uma função logarítmica, temos:

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y.$$

Assim, $e^x \cdot e^y$ é o número real cujo logaritmo natural é igual a $x + y$.

Por conseguinte, $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. □

Corolário 4.19. Para lodo número real x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Demonstração. Com efeito, sendo evidente que $e^0 = 1$, podemos escrever, em função do Teorema 4.18

$$e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1.$$

Portanto, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. □

Observação 4.20. Uma propriedade adicional da potência e^x é a seguinte $(e^x)^y = e^{xy}$.

Demonstração. Tomando logaritmos naturais, vem: $\ln(e^x)^y = y \cdot \ln e^x$.

Logo: $\ln(e^x)^y = xy$.

Portanto, $(e^x)^y = e^{xy}$. □

Teorema 4.21. A função exponencial $y = e^x$ é crescente e assume todos os valores positivos quando x varia entre $-\infty$ e $+\infty$.

Demonstração. Para mostrar que a função exponencial é crescente, sejam x, y números reais, com $x < y$. Como $x = \ln(e^x)$ e $y = \ln(e^y)$, não podemos ter $e^x = e^y$ pois isto acarretaria $x = y$. Nem podemos ter $e^y < e^x$ porque então seria $\ln(e^y) < \ln(e^x)$, ou seja, $y < x$. Assim, quando $x < y$, deve-se ter $e^x < e^y$.

Para provar que os valores e^x incluem todos os números reais positivos, consideremos um número real qualquer $a > 0$. Tem-se $e^{\ln a} = a$, a é o valor que a função exponencial e^x assume quando $x = \ln a$. □

Observação 4.22. Temos que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Demonstração. Vejamos a prova do primeiro limite. Quando $x > 0$, obtemos que Área$(H_1^{e^x}) = x$ está contida no retângulo de altura 1, com base no segmento $[1, e^x]$, conforme podemos observar na fiigura 13. A área deste retângulo vale $e^x - 1$. Segue-se que:

$$x < e^x - 1,$$

ou seja:

$$e^x > 1 + x, \ \forall\, x > 0.$$

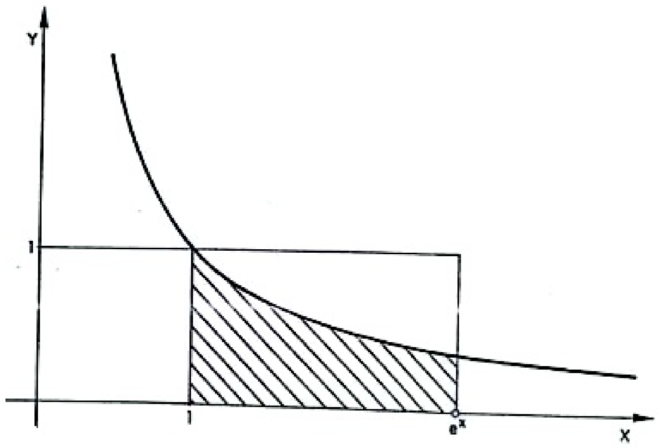

Figura 13 – Área$(H_1^x) < e^x - 1$.

Quando $x \to +\infty$ temos que $(1 + x)$ também tende a $+\infty$. Como vimos, acima, que $e^x > 1 + x$, então $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Para a prova do segundo limite, façamos $y = -x$. Então:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

□

Quanto ao gráfico da função exponencial, ele é o subconjunto E do plano tal que

$$E = \{(x, y);\ y = e^x\}.$$

Como a função exponencial $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é a inversa da função logarítmica $\ln x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, os gráficos de e^x e $\ln x$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Vale lembrar que os pontos que pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares é a diagonal do plano cuja reta é formada pelos pontos (x, x). Como já estudamos o esboço do gráfico da função $\ln x$, então podemos usá-lo para esboçar o gráfico da função e^x. Dado um ponto do plano (x, y) da função e^x o seu simétrico em relação à diagonal é o ponto (y, x) da função $\ln x$, ou seja, é o lugar onde o ponto (x, y) vai cair quando se dobra o plano em torno da diagonal.

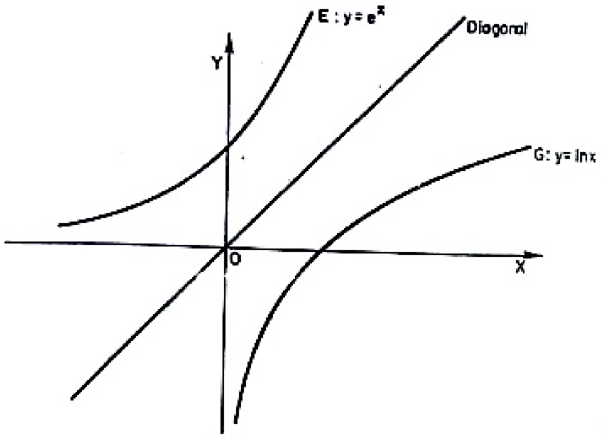

Figura 14 – O gráfico E da função $y = e^x$ a partir do gráfico G da função $y = \ln x$.

4.5 LOGARITMOS COM BASE DIFERENTE DE e

Podemos considerar a hipérbole $y = k/x$, $k \in \mathbb{R}^+$ para definirmos logaritmos em vez de $y = 1/x$. Para cada valor de k escolhido temos um novo sistema de logaritmos. Evidentemente, a escolha mais natural é $k = 1$, por isso os logaritmos que vimos estudando até agora chamam-se *naturais*.

Dados dois pontos de abscissa a e b no eixo dos x, indiquemos com $H(k)_a^b$ a faixa da hipérbole $y = k/x$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$. Quando $k = 1$, continuaremos a indicar com H_a^b a faixa da hipérbole situada entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Podemos afirmar que

$$\text{Área}(H(k)_a^b) = k \times \text{Área}(H_a^b).$$

Com efeito, dado um segmento $[c, d]$ contido em $[a, b]$, um retângulo de base $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = 1/x$, tem altura $1/d$, enquanto que um retângulo de mesma base, inscrito na hipérbole $y = k/x$, tem altura k/d. Logo a área do segundo é k vezes a área do primeiro. Na figura 15 ilustramos as faixas de hipérbole $y = 1/x$ e $y = 2/x$, compreendidas entre as retas $x = a$ e $x = b$, com a relação entre as áreas destas faixas.

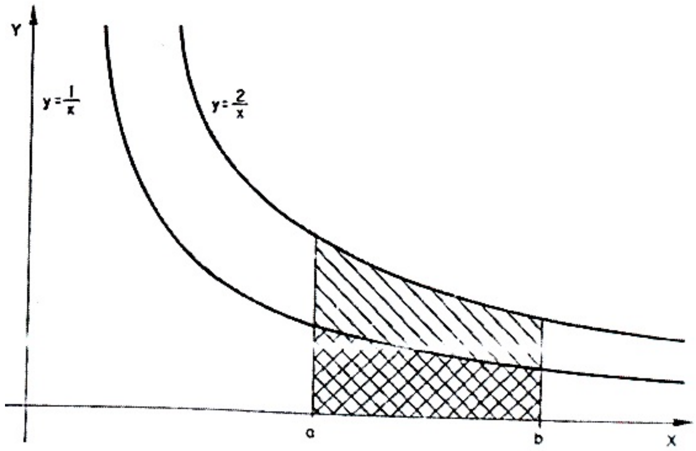

Figura 15 – Área($H(2)_a^b$) $= 2 \times$ Área(H_a^b).

Em consequência do que acabamos de mostrar, fixada uma constante real positiva k, introduzimos um novo sistema de logarimtos, pondo, por definição, para cada $x > 0$:

$$\log x = \text{Área}(H(k)_1^x).$$

Mas, isto equivale a:

$$\log x = k \cdot \ln x.$$

A base do novo sistema de logaritmos é o número $a > 0$ tal que $\log a = 1$. Por conseguinte, a base a fica caracterizada pela propriedade $k \cdot \ln a = 1$, ou seja $k = \frac{1}{\ln a}$ e $a = e^{1/k}$.

A notação para o logaritmo de base a de um número $x > 0$ é:

$$\log_a x.$$

Da maneira como definimos, $\log_a x$ é a área da faixa da hipérbole

$$y = \frac{k}{x} = \frac{1/\ln a}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

compreendida entre 1 e x. Esta definição é, como vemos, complicada. Melhor será simplesmente recordar a fórmula de mudança de bases:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

sendo a base $a > 0$ caracterizada pelo fato:

$$\log_a a = 1.$$

Observação 4.23. Aqui escolhenos a base $a > 1$, $a \in \mathbb{R}^+$, pois $a = e^{1/k} > 1$ sendo $k \in \mathbb{R}^+$. Mas poderíamos ter a real tal que $0 < a < 1$. Para um melhor entendimento sugerimos [14], p. 65.

A função real $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $a > 1$, definida $\forall\, x > 0$, é uma função logarítmica. Pois, usando a fórmula de mudança de bases:

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a},$$

logo:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Exemplo 4.24. Temos que $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$, logo: $\ln x = \log_{10} x \cdot \ln 10$. Assim para obtermos uma tábua de logaritmos naturais basta multiplicarmos todos os logaritmos de uma tábua de logaritmos decimais por $\ln 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \cong 2,3026$, onde o valor de $\log_{10} e$ vem da tábua de logaritmos decimais.

Definição 4.25. Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, a potência a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \cdot \ln a$.

Como consequência da definição acima, temos:

$$\log_b a^x = \frac{\ln a^x}{\ln b} = x \cdot \frac{\ln a}{\ln b},$$

concluindo que:

$$\log_b a^x = x \cdot \log_b a.$$

Em particular, para $b = a$, temos:

$$\log_a(a^x) = x.$$

Temos, também, que:

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln a \quad \Leftrightarrow \quad a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

A função exponencial $y = a^x$ tem propriedades inteiramente análogas às já demonstradas para a exponencial natural $y = e^x$. Por exemplo, vale:

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
ii)$(a^x)^y = a^{xy}$;
iii) Quando $a > 1$, a função $x \mapsto a^x$ é contínua, crescente, com $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$;
iv) Quando $0 < a < 1$, a função $x \mapsto a^x$ é ainda contínua e positiva mas é decrescente, valendo: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Observando o gráfico de uma função exponencial $y = a^x$ (com $a > 1$), nota-se um fato característico relacionado com a variação desta função. Para valores negativos de

x ela cresce muito devagar mas, à medida que x toma valores positivos maiores, $y = a^x$ cresce cada vez mais rapidamente.

Devido a propriedade $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, quando

$$x = c, c + r, c + 2r, \ldots, etc.$$

assume valores numa progressão aritmética, então

$$y = a^c, a^c \cdot a^r, a^c \cdot a^{2r}, \ldots, etc.,$$

varia numa progressão geométrica.

Para mais detalhes sobre crescimentos exponencial e logarítmico veja [14], p. 89-92, e [2].

4.5.1 **Os Logaritmos decimais**

Antes de iniciarmos esta seção, aconselho ao leitor abordá-la com importância reduzida, servindo mais como dado histórico. Acrescento, ainda, que a supressão desta não atrapalha o entendimento do restante do trabalho.

A fim de efetuar operações aritméticas (antes do advento das calculadoras), o sistema de logaritmos mais frequentemente utilizado era o de base 10, isto é, logaritmos decimais. A vantagem de empregá-los resultava de adotarmos o sistema decimal de numeração.

Cientistas e engenheiros, a fim de terem facilmente uma idéia da ordem de grandeza dos números que utilizam, costumam representar todo número positivo x sob a forma

$$x = a \times 10^n,\ 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}.$$

Usaremos a notação log para indicar $\log_{10}$. Assim sendo, escreveremos $\log x$, em vez de $\log_{10} x$.

Dado um número positivo $x = a \times 10^n$, temos $\log x = \log a + \log(10^n)$. e, portanto:

$$\log x = \log a + n.$$

Como $1 \leq a < 10$, temos que $0 \leq \log a < 1$.

Nestas condições, chama-se:

$$\log a = \text{mantissa do logaritmo de } x,$$

$$n = \text{característica de } \log x.$$

Portanto,

$$\log x = \textit{característica} + \textit{mantissa}.$$

A mantissa é sempre um número compreendido entre 0 e 1, podendo ser igual a 0 mas não igual a 1. A mantissa nunca é negativa. A característica de $\log x$ é um número inteiro (positivo, negativo ou zero), o qual pode ser imediatamente encontrado pela posição da vírgula no desenvolvimento de x como fração decimal. Por exemplo,

$$\log 145,3 = \log(1,453 \times 10^2) = \log 1,453 + \log 10^2 = \log 1,453 + 2.$$
$$\log 0,001453 = \log(1,453 \times 10^{-3}) = \log 1,453 + \log 10^{-3} = \log 1,453 - 3.$$

Vemos que se x e y são números decimais que diferem apenas pela posição da vírgula, então $\log x$ e $\log y$ têm a mesma mantissa.

Para achar $\log x$ numa tábua de logaritmos, basta procurar a mantissa, a qual é o logaritmo decimal de um número compreendido entre 1 e 10, isto é, $1 \leq a < 10$. Assim, as tábuas de logaritmos decimais só precisam trazer os logarirtmos dos números maiores do que 1 e menores do que 10. Já comentamos sobre Tábua de Logaritmos na seção 3.2.3 deste trabalho. E, no Anexo C, apresentamos uma pequena tábua de logaritmos decimais dos números de duas casas decimais, desde 1 até $9,99$.

Exemplo 4.26. Usando a tábua logaritmos, calcule $\log 45,3$.

Solução: Temos que $45,3 = 4,53 \times 10$. Então

$$\log 45,3 = \log(4,53 \times 10) = \log 4,53 + \log 10 = \log 4,53 + 1.$$

Porcurando na tábua do Anexo C, achamos $\log 4,53 \cong 0,656098$.

Portanto: $\log 45,3 \cong 1,656098$.

Exemplo 4.27. Determine $\log 368$.

Solução: Temos que $368 = 3,68 \times 10^2$. Então

$$\log 368 = \log(3,68 \times 10^2) = \log 3,68 + \log 10^2 = \log 3,68 + 2.$$

Porcurando na tábua do referido Anexo, achamos $\log 3,68 \cong 0,565848$.

Portanto: $\log 368 \cong 2,565848$.

Exemplo 4.28. Calcular $\log 0,00453$.

Solução: Temos que $0,00453 = 4,53 \times 10^{-3}$. Assim

$$\log 0,00453 = \log(4,53 \times 10^{-3}) = \log 4,53 + \log(10^{-3}) = \log 4,53 - 3.$$

Mas, como já vimos no exemplo 4.26, $\log 4,53 \cong 0,656098$.

Então, $\log 0,00453 \cong 0,656098 - 3$.

O resultado final seria, portanto, $\log 0,00453 \cong -2,343902$. Entretanto, é mais conveniente manter todas as partes fracionárias (mantissas) positivas, e então escrevemos

$$\log 0,00453 \cong \overline{3},656098.$$

Isto significa que $\log 0,00453 \cong -3 + 0,656098$.

Exemplo 4.29. Determine o $\log 4,537$.

Solução: A característica é zero, de modo que $\log 4,537$ é igual a sua própria mantissa. Se nossa tábua de logaritmos fosse maior, poderíamos obter $\log 4,537$ por mera inspeção da tábua. Contando apenas com a tábua que está no Anexo C, o melhor que podemos achar é $\log 4,53 \cong 0,656098$ e $\log 4,54 \cong 0,657056$. Como $4,53 < 4,537 < 4,54$, temos que $0,656098 < \log 4,537 < 0,657056$.

Se quiséssemos encontrar uma aproximação razoável para $\log 4,537$, utilizaríamos o método conhecido como *Interpolação Linear*. No anexo B temos um exemplo de como utilizar este método. Para mais informações sobre *Interpolação Linear* veja [14], p. 74-76.

Vale ressaltar que o advento e a difusão das calculadoras eletrônicas fez desta seção uma página da História. Pois, hoje em dia, as funções logarítmicas são importantes pelas propriedades intrínsecas de que gozam, não como mero instrumento de cálculo aritmético.

5 LOGARITMO E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Este capítulo é destinado ao professor, podendo ser omitido para o aluno do Ensino Médio, visto que este ainda não tem conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. As derivadas e integrais das funções logarítmicas e suas inversas, as funções exponenciais, são os focos principais deste capítulo. Considera-se como pré-requisitos todas as definições, propriedades e teoremas que antecedem o estudas das derivadas e integrais dessas duas funções num curso regular de Cálculo a uma Variável, geralmente intitulado Cálculo Diferencial e Integral I.

A confecção deste capítulo está baseada em [16] e [25].

5.1 A FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL

Seja a um número real maior que 1. Costuma-se definir o logaritmo de um número real x na base a como o expoente $y = \log_a x$ tal que $a^y = x$. Ou seja, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ costuma ser definida como a inversa da exponencial $x \mapsto a^y$. Mas, achamos mais simples definir primeiro o logaritmo e, a partir deste, a exponencial.

Definição 5.1. Definiremos a função logaritmo natural, denotada por ln, $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, pondo para cada $x > 0$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Geometricamente, $\ln x$ pode ser interpretado como a área abaixo do gráfico de $y = 1/t$, $t > 0$, entre $t = 1$ e $t = x$ (figura 16). Temos, também, que $\ln x$ é a área abaixo do gráfico $y = 1/t$, $t > 0$, entre $t = x$ e $t = 1$ (figura 17), porém com sinal negativo.

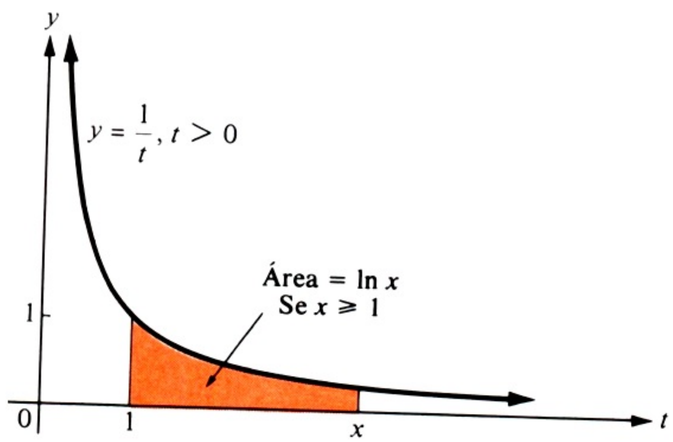

Figura 16 – Área $= \ln x$ se $x \geq 1$.

Segue da Definição 5.1 que

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$$

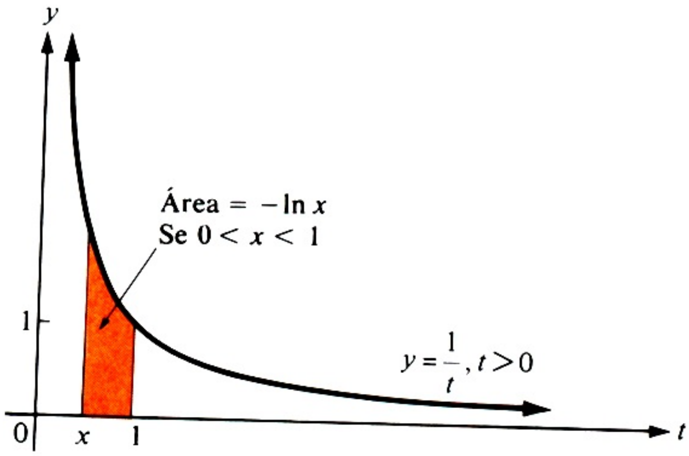

Figura 17 – Área $= -\ln x$ se $0 < x < 1$.

5.1.1 A Derivada do Logaritmo Natural

Como $\ln x = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt$, para $x > 0$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$. Em geral vale o seguinte teorema:

Teorema 5.2. A derivada de $\ln u$

Se u é uma função diferenciável de x e $u > 0$, então

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{d}{dx} u.$$

Demonstração. Pela definição de ln e do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $\dfrac{d}{du} \ln u = 1/u$. Logo, pela regra da cadeia, $\dfrac{d}{dx} \ln u = 1/u \dfrac{d}{dx} u$. □

Exemplo 5.3. Ache $\dfrac{d}{dx} \ln \dfrac{x}{x+3}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{x}{x+3} = \frac{1}{\frac{x}{x+3}} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+3} \right) = \left(\frac{x+3}{x} \right) \left[\frac{3}{(x+3))^2} \right] = \frac{3}{x(x+3)}.$$

Em [3], pp. 149 e 150, encontramos uma definição da derivada da função $\ln x$ usando o conceito de área.

5.1.2 Integrais envolvendo Logaritmos Naturais

O teorema abaixo é uma consequência do Teorema 5.2. Vejamos:

Teorema 5.4. Integração de $1/u$

Para $u \neq 0$, temos que $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para $u \neq 0$, temos

$$\frac{d}{dx}|u| = \frac{d}{dx}\sqrt{u^2} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2}} = \frac{u}{|u|};$$

Logo, pelo Teorema 5.2

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{|u|}\frac{d}{dx}|u| = \frac{1}{|u|}.\frac{u}{|u|} = \frac{u}{|u|^2} = \frac{u}{u^2} = \frac{1}{u}.$$

Reescrevendo a última equação em termos de antidiferenciação, completamos a demonstração do teorema acima. □

Exemplo 5.5. Calcule a integral $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$.

Solução: Faça $u = \ln x$, logo $du = \dfrac{dx}{x}$. Assim:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

5.1.3 Propriedades da Função Logarítmica Natural

Como a função logarítmica natural é definida por $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ para $x > 0$, podemos utilizar as propriedades da integral para obtermos analiticamente as propriedades de $\ln$.

Teorema 5.6. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ tem-se $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Demonstração. Temos que: $\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$.

Na integral $\int_a^{ab} \frac{dt}{t}$, fazendo $t = au$, temos que $dt = a\,du$. Temos, também que $u = 1$ quando $t = a$ e $u = b$ quando $t = ab$. Assim:

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{b} \frac{adu}{au} = \int_1^{b} \frac{du}{u} = \ln b.$$

Logo: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. □

Corolário 5.7. Para todo número racional r, tem-se $\ln(a^r) = r\ln a$.

Demonstração. Para a demonstração deste corolário basta usar a demonstração dada na Propriedade 4.6 deste trabalho, substituindo $L(x)$ por $\ln x$. □

Teorema 5.8. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ tem-se $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Demonstração. Temos que $a = b\dfrac{a}{b}$, logo $\ln a = \ln b\dfrac{a}{b}$. Pelo Teorema 5.6, $\ln a = \ln b + \ln\dfrac{a}{b}$ o que implica

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

□

5.2 A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função inversa da função ln é a a função exponencial, que denotaremos por exp. Logo, por definição, temos:

Definição 5.9. $y = \exp x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$.

5.2.1 Propriedades da Função Exponencial

Como consequência de exp e ln serem funções inversas, temos:

$$\textbf{(1)} \qquad \exp(\ln x) = x, \, \forall \, x > 0.$$

$$\textbf{(2)} \qquad \ln(\exp x) = x, \, \forall \, x \in \mathbb{R}.$$

Com base nas relações **(1)** e **(2)** estabeleceremos as propriedades básicas da função exponencial, explicitadas no teorema abaixo:

Teorema 5.10. Se x e y são dois números reais quaisquer e k é um número racional, então:

(i)$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$,

(ii)$\exp(kx) = (\exp x)^k$,

(iii)$\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

Demonstração. **(i)** Sejam $a = \exp x$ e $b = \exp y$, de maneira que $x = \ln a$ e $y = \ln b$. Pelo Teorema 5.6, temos $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ o que implica $x + y = \ln(ab)$. Segue-se então que

$$exp(x + y) = \exp(\ln(ab)) = ab = (\exp x)(\exp y).$$

(ii) Façamos novamente $a = \exp x$ de modo que $x = \ln a$. Pelo Corolário 5.7, temos $kx = k \ln a = \ln a^k$; logo

$$\exp(kx) = \exp(\ln a^k) = a^k = (\exp x)^k.$$

(iii) Sejam $a = \exp x$ e $b = \exp y$, de modo que $x = \ln a$ e $y = \ln b$. Pelo Teorema 5.8, temos $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ o que implica $x - y = \ln \dfrac{a}{b}$. Segue-se então que

$$\exp(x - y) = \exp\left(\ln \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\exp x}{\exp y}.$$

□

Observação 5.11. Temos que $e = \exp 1$; ou seja, e é o único número real positivo para o qual $\ln e = 1$.

Expliquemos a observação acima: sabemos que, graficamente, e é determinado pela condição de que a área dada pela integral $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln e = 1$. Ora, de acordo com a Definição 5.9, para $x = 1$, temos que:

$$y = \exp 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \ln y.$$

Mas, como $\ln e = 1$ e $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função biunívoca, logo $y = e$. Mas, isto implica que $\exp 1 = e$.

Exemplo 5.12. A velocidade do sinal em um cabo telegráfico submarino é proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, onde x é a razão entre os raios do núcleo e da cobertura do cabo. Para que valor desta razão a velocidade será máxima?

Solução: Seja v a velocidade do sinal em um cabo telegráfico submarino. Como v é proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, temos que $\dfrac{v}{x^2 \ln(1/x)} = k \Rightarrow v = k \cdot x^2 \ln(1/x),\ \forall\, x > 0$, sendo k uma constante de proporcionalidade. De conhecimentos de Cálculo, sabemos que a velocidade v será máxima num ponto x, quando $v'(x) = 0$ e $v''(x) < 0$. Antes de diferenciar v, podemos aplicar o Corolário 5.7 e v fica assim:

$$v = k \cdot x^2 \ln(1/x) = k \cdot x^2 \ln x^{-1} = -k \cdot x^2 \ln x.$$

Então:

$$\begin{aligned} v'(x) &= -k\left[2x \ln x + x^2.\frac{1}{x}\right] = 0 \\ 2x \ln x + x &= 0 \\ -2x \ln x &= x \\ \ln x &= -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1/2} \cong 0,61. \end{aligned}$$

Realmente podemos ver que $x \cong 0,61$ é um máximo, pois:

$$\begin{aligned} v''(x) &= -k\left[2.\ln x + 2x.\frac{1}{x} + 1\right] \\ v''(x) &= -k\,[2.\ln x + 3] \end{aligned}$$

Assim, para $x \cong 0,61$, temos:

$$v''(0,61) \cong -2.01k < 0, \text{ pois } k > 0 \text{ para } x \cong 0,61.$$

Portanto, $x \cong 0,61$ é um ponto de máximo.

Teorema 5.13. Se k é um número racional, então $\exp k = e^k$.

Demonstração. Fazendo $x = 1$ na parte **(ii)** do Teorema 5.10 temos $\exp k = \exp(1)^k$. Mas, temos que $\exp 1 = e$; assim: $\exp k = e^k$. □

Definição 5.14. Se x é um número irracional, definiremos que $e^x = \exp(x)$.

5.2.2 A Derivada e Integral da Função Exponencial

Temos que a derivada da função exponencial é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 5.15. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u \dfrac{d}{dx}u$, onde u é uma função diferenciável de x.

Demonstração. Seja $y = e^u$, logo $u = \ln y$, sendo u uma função diferenciável de x. Diferenciando ambos os membros da última equação em relação a x, temos:

$$u' = (1/y)y' \;\Rightarrow\; y' = yu' \;\Rightarrow\; y' = e^u \frac{d}{dx}u.$$

□

Para mais detalhes sobre derivadas das funções exponencial e logaritmo natural, veja [21].

Exemplo 5.16. Se o valor de uma certa propriedade em um tempo de t anos é dado pela equação $V = 20000 - 10000e^{-0,1t}$, onde V é expresso em reais. Determne a a taxa de mudança de V em relação à t quando este é igual a 5 anos.

Solução: Temos que a taxa de variação de V em relação à t é dada por $\dfrac{dV}{dt}$, onde:

$$\frac{dV}{dt} = -10000e^{-0,1t}.(-0,1).$$

Para t = 5, temos:

$$\frac{dV}{dt} = 1000e^{-0,5} = \frac{1000}{e^{0,5}} \cong 606,53\ reais/ano.$$

Teorema 5.17.

$$\int e^u du = e^u + C$$

Demonstração. Conforme o Teorema 5.15, e^u é a antiderivada de e^u. □

Exemplo 5.18. Calcule $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$.

Solução: Fazendo $u = \operatorname{sen} x$, temos $du = \cos x\, dx$, daí:

$$\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{\operatorname{sen} x} + C.$$

5.3 FUNÇÕES EXPONENCIAIS COM BASES DIFERENTES DE e

Antes de definirmos a derivada e a integral da função exponencial com base diferente de e vejamos alguns teoremas, definições e propriedades que nos auxiliarão.

Teorema 5.19. Se $b > 0$ e k é um número racional, então $b^k = e^{k \ln b}$.

Demonstração. Conforme a parte **(ii)** do Teorema 5.10, temos que $[\exp(\ln b)]^k = \exp(k \ln b)$, isto é,

$$(e^{\ln b})^k = e^{k \ln b}.$$

Como $e^{\ln b} = b$, segue $b^k = e^{k \ln b}$. □

Definição 5.20. Definição de b^x para x irracional

Se $b > 0$ e x é irracional, definimos $b^x = e^{x \ln b}$.

5.3.1 Propriedades Básicas de b^x

Com o uso da equação $b^x = e^{x \ln b}$, $x \in \mathbb{R}$, e as propriedades já demonstradas da função $\exp x$, podemos deduzir as propriedades básicas de b^x, $1 \neq b > 0$ (aqui $b \neq e$).

Teorema 5.21. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e suponhamos que $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então:

i) $b^x b^y = b^{x+y}$.

ii) $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$.

iii) $(b^x)^y = b^{xy}$.

iv) $(ab)^x = a^x b^x$.

v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

vi) $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$.

vii) $\ln b^x = x \ln b$.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser obtida em [25], p. 445. □

Teorema 5.22. Seja u uma função diferenciável de x e c uma constante real. Então, para $u > 0$, temos:

$$\frac{d}{dx}u^c = cu^{c-1}\frac{d}{dx}u.$$

Demonstração.

$$\frac{d}{dx}u^c = \frac{d}{dx}e^{c \ln u} = e^{c \ln u}\frac{d}{dx}(c \ln u) = u^c \left(c\frac{\frac{d}{dx}u}{u} \right) = cu^{c-1}\frac{d}{dx}u.$$

□

5.3.2 A Derivada e Integral das Funções Exponenciais

Nesta subseção mostraremos a derivada e a integral da função exponencial de base b, sendo b um número real positivo e diferente de 1.

Teorema 5.23. Se b é uma constante positiva e u é uma função diferenciável de x então:

$$\frac{d}{dx}b^u = b^u \ln b \, \frac{d}{dx}u.$$

Demonstração.

$$\frac{d}{dx}b^u = \frac{d}{dx}e^{u\ln b} = e^{u\ln b}\frac{d}{dx}(u\ln b) = b^u(\ln b)\,\frac{d}{dx}u.$$

□

Corolário 5.24. Conforme o Teorema 5.23, fazendo $u = x$, temos:

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x \ln b.$$

Teorema 5.25. Sendo $1 \neq b > 0$, temos que:

$$\int b^u \, du = \frac{b^u}{\ln b} + C.$$

Demonstração. Como $\dfrac{d}{dx}b^x = b^x \ln b$, então $\int b^x \ln b \, dx = b^x + D$.

Logo: $\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + \frac{D}{\ln b}$,

ou seja,

$$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C, \text{ onde } \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Substituindo x por u, temos:

$$\int b^u \, du = \frac{b^u}{\ln b} + C.$$

□

Exemplo 5.26. Calcule $\int \frac{5^{\ln x^2}}{x} \, dx$.

Solução: Fazendo $\ln x^2 = t$, temos que $\frac{2x}{x^2}\, dx = dt \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2}$.

Assim:

$$\int \frac{5^{\ln x^2}}{x} \, dx = \frac{1}{2}\int 5^t \, dt = \frac{1}{2}\frac{5^t}{\ln 5} + C.$$

Como $t = \ln x^2$, logo:

$$\int \frac{5^{\ln x^2}}{x} \, dx = \frac{1}{2\ln 5}5^{\ln x^2} + C.$$

5.3.3 Derivada das Funções Logarítmicas

Nesta subseção veremos a derivada das funções logarítimicas com base a, onde a é real e $1 \neq a > 0$.

Teorema 5.27. Seja u uma função diferenciável de x, $u > 0$ e $1 \neq a > 0$. Então, para $u > 0$, temos:

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a}\frac{d}{dx}u.$$

Demonstração.

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{u \ln a}\frac{d}{dx}u.$$

□

Exemplo 5.28. Sendo $f(u) = 3^{\tan u} \log_8 u$, determine $\dfrac{df}{du}$.

Solução: Aplicando a derivada do produto em f, temos:

$$\begin{aligned} f'(u) &= (3^{\tan u})(\ln 3)(\sec^2 u)(\log_8 u) + (3^{\tan u})\left(\frac{1}{u \ln 8}\right) \\ &= 3^{\tan u}\left[(\ln 3)(\sec^2 u)(\log_8 u) + \frac{1}{u \ln 8}\right]. \end{aligned}$$

6 LOGARITMO E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo mostraremos exemplos de aplicações das equações diferenciais ordinárias envolvendo fenômenos naturais que são modelados pela função exponencial e sua inversa, a função logaritmo natural.

Antes de iniciarmos os exemplos, faremos um breve comentário sobre a teoria básica das equações diferenciais.

Ressaltamos que este capítulo é dedicado ao professor, portanto, deve ser omitido ao aluno, e consideramos como pré-requisito conteúdos de um curso preliminar de Cálculo.

Na escrita deste capítulo nos baseamos em [4] e [30].

6.1 AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nesta seção definiremos equação diferencial e mostaremos a classifcação desta quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

Definição 6.1. Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

A seguir mostraremos as classificações das equações diferenciais.

6.1.1 Classificação quanto ao Tipo

Quanto ao tipo as equações diferenciais podem ser classificadas como:

i) equação diferencial ordinária (EDO): quando a equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente.

Exemplo 6.2.

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1. \tag{6.1}$$

$$(y-x)dx + 4xdy = 0. \tag{6.2}$$

ii) equação diferencial parcial (EDP): quando a equação envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo 6.3.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.4}$$

Neste capítulo só nos interessa as equações diferenciais ordinárias, em especial as lineares de 1ª ordem, devido aos problemas de aplicação que são modelados por estas.

6.1.2 Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem de uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação.

Exemplo 6.4.

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x, \quad \text{é uma EDO de 1ª ordem.} \tag{6.5}$$

$$\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{é uma EDP de 4ª ordem.} \tag{6.6}$$

6.1.3 Classificação pela Linearidade

Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observamos duas propriedades características das equações diferenciais lineares:

i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não é linear é dita **não-linear.**

Exemplo 6.5.

$$\text{A equação } xdy + ydx = 0 \tag{6.7}$$

é uma EDO linear de 1ª ordem.

$$\text{A equação } y'' - 2y' + y = 0 \tag{6.8}$$

é uma EDO linear de 2ª ordem.

$$\text{A equação } yy'' - 2y' + y = 0 \tag{6.9}$$

é uma EDO não-linear de 2ª ordem pois o coeficiente de y'' depende de y.

$$\text{A equação } \frac{d^5 y}{dx^5} + y^3 = 0 \tag{6.10}$$

é uma EDO não-linear de 5ª ordem, pois y^3 é uma potência diferente de 1.

6.2 SOLUÇÕES DE UMA EDO

Nesta seção veremos os tópicos básicos relacionados a solução de uma EDO.

Definição 6.6. Qualquer função **f** definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

Exemplo 6.7. Verifique se $y = e^{-x/2}$ é uma solução para a EDO $2y' + y = 0$.

Solução: Temos que $y' = -\frac{1}{2}e^{-x/2}$, logo $2y' + e^{-x/2} = 0$ o que implica $2y' + y = 0$ e $y = e^{-x/2}$ é solução da EDO.

6.2.1 Soluções Explícitas e Implícitas

As soluções de uma EDO são divididas em **implícitas** e **explícitas**; à saber:

i) solução explícita: uma solução para uma EDO é explícita quando pode ser escrita na forma $y = f(x)$.

ii) solução implícita: uma solução para uma EDO é implícita em um intervalo I quando pode ser escrita na forma $G(x, y) = 0$ e ela define uma ou mais soluções explícitas em I.

Exemplo 6.8. Para $-2 < x < 2$, a equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define uma solução implícita para a EDO $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, pois, por derivação implícita:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x}{y}.$$

Exemplo 6.9. A solução do Exemplo 6.7 é explicita.

6.2.2 Número de Soluções

Uma equação diferencial geralmente possui um número infinito de soluções. Por substituição direta podemos verificar que $y = ce^{x^2}$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, satizfaz a EDO $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$.

Verifiquemos: $\dfrac{dy}{dx} = ce^{x^2}.2x = 2x.ce^{x^2} = 2xy$.

As soluções de uma EDO podem ser: **geral** ou **particular**.

i) solução geral: uma solução de uma EDO é chamada de solução geral quando depende de parâmetros arbitrários.

Exemplo 6.10. Na EDO $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, a solução $y = ce^{x^2}$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, é uma solução geral porque a constante c não assume um valor específico.

ii) solução particular: uma solução de uma EDO é chamada de solução particular quando não depende de parâmetros arbitrários.

Exemplo 6.11. Na EDO $\frac{dy}{dx} = 2xy$, a solução $y = 2e^{x^2}$ é uma solução particular porque a constante c assume o valor 2, ou seja, c asume um valor específico. É claro que c poderia assumir qualquer valor real.

6.3 EDO DE 1ª ORDEM – PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Nesta seção estudaremos os problemas que são modelados pelas função exponencial e logaritmo natural. Aplicando técnicas de solução de EDO de 1ª ordem, mostraremos exemplos de suas soluções.

6.3.1 Problema de Valor Inicial

Estamos interessados neste capítulo a resolver uma EDO de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$. O problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Resolva:} & \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \text{Sujeito a:} & y(x_0) = y_0. \end{array} \tag{6.11}$$

é chamado de **Problema de Valor Inicial**.

Teorema 6.12. Teorema de Existênica e Unicidade

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satizfaz o problema de valor incial 6.11.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser obtida em [4], p. 60-63. □

6.3.2 EDO de Variáveis Separáveis

As equações diferenciais de variáveis separáveis de 1ª ordem consiste de equações simples e, na maioria das vezes, de fácil solução.

Definição 6.13. Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**.

6.3.2.1 *Método de Solução*

Considere a EDO separável $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$. Esta equação pode ser escrita como:

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Integrando ambos os membros:

$$\int h(y)dy + C_1 = \int g(x)dx + C_2$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C, \text{ onde } C = C_2 - C_1.$$

6.3.3 **EDO Lineares - Problemas de Aplicação**

Para resolver os problemas deste tópico, escolhemos a técnica de solução de EDO com variáveis separáveis.

6.3.3.1 *Crescimento e Decrescimento*

O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \tag{6.12}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade, ocorre em muitas teorias físicas e fenômenos naturais envolvendo *crescimento* e *decrescimento.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 6.14. É razoável supor que a população de uma certa comunidade cresce proporcionalmente ao número de indivíduos presentes em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará?

Solução: Sejam:

$P(t)$ a população num instante t;

$P(0) = P_0$ a população num instante $t = 0$ (população inicial).

Primeiramente, resolveremos a equação

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{6.13}$$

pois, como foi dito que a população cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante, temos que a taxa de variação da população (derivada de P) é proporcional a população P num instante t.

Resolvendo 6.13 temos:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln P = kt + C$$

$$P(t) = e^{kt}.e^{C}$$

$$P(t) = C_1.e^{kt}.$$

Temos que, para $t = 0 \Rightarrow P(0) = P_0$, logo substituindo na equação acima:

$$P_0 = C_1.e^0$$

$$P_0 = C_1.$$

Então:

$$P(t) = P_0.e^{kt}.$$

Como a população dobrou em 5 anos, $t = 5 \Rightarrow P = 2.P_0$. Substituindo os valores na última equação:

$$2.P_0 = P_0.e^{5k}$$

$$2 = e^{5k}$$

$$\ln 2 = 5k$$

$$k = \frac{\ln 2}{5}$$

$$k \cong 0,13863.$$

Portanto:

$$P(t) = P_0.e^{0,13863t}.$$

A população triplicará quando $P = 3.P_0$, então:

$$3P_0 = P_0.e^{0,13863t}$$

$$3 = e^{0,13863t}$$

$$\ln 3 = 0,13863t$$

$$t \cong 7,92 \text{ anos}.$$

6.3.3.2 *Meia-Vida*

A *meia-vida* é o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial de uma substância radioativa se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento.

Exemplo 6.15. Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após 15 anos, foi detectado que $0,043\%$ da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Solução: Denotando por $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente num instante t e como a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente, temos:

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = \int k\,dt$$

$$\ln A = kt + C$$

$$A = C_1.e^{kt}.$$

Como $A(0) = A_0 \Rightarrow C_1 = A_0$. Logo,

$$A(t) = A_0.e^{kt}.$$

Temos que $A(15) = 99,957\%\,(100\% - 0,043\%)A_0$. Substituinido na última equação:

$$99,957\% A_0 = A_0.e^{15k}$$

$$\ln 0,99957 = 15k$$

$$k \cong -2,867.10^{-5}.$$

Portanto:

$$A(t) = A_0.e^{-2,867.10^{-5}t}.$$

Agora, a meia-vida é o tempo t quando $A(t) = A_0/2$. Assim:

$$\frac{A_0}{2} = A_0.e^{-2,867.10^{-5}t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2,867.10^{-5}t$$

$$t = \frac{\ln 2}{2,867}.10^5 \cong 24176,7 \text{ anos.}$$

6.3.3.3 *Cronologia do Carbono*

A teoria da *cronologia do carbono* se baseia no fato de que o isótopo do carbono 14 é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio. A razão entre a quantidade de C-14 para carbono ordinário na atmosfera parece ser uma constante e, como consequência, a proporção da quantidade de isótopo presente em todos os organismos vivos é a mesma proporção da quantidade na atmosfera.

Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa. Logo, comparando a quantidae proporcional de C-14 presente digamos, em um fóssil, com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma razoável estimativa da idade do fóssil. O método se baseia no conhecimento da meia-vida do carbono radioativo C-14, cerca de 5600 anos.

Exemplo 6.16. Em um pedaço de madeira queimada, ou carvão, verificou-se que $85,5\%$ do C-14 tinha se desintegrado. Determine a idade aproximada dessa madeira. (Foi precisamente este dado que arqueologistas usaram para datar pinturas pré-históricas em uma caverna em Lascaux, França.)

Solução: Seja $A(t)$ a quantidade remanescente de C-14 num instante t. Novamente o ponto de paritda é: $A(t) = A_0.e^{kt}$.

Como a meia-vida do C-14 é o tempo $t = 5600$ quando $A(t) = A_0/2$. Assim:

$$\frac{A_0}{2} = A_0.e^{5600k}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 5600k$$

$$k = -\frac{\ln 2}{5600} \cong -1,2378.10^{-4}.$$

Portanto: $A(t) = A_0.e^{-1,2378.10^{-4}t}$.

Temos que $A(t) = 14,5\%A_0$ num instante t, pois $85,5\%$ se desintegrou. Substituindo este valor de $A(t)$ na última equação, vem:

$$14,5\%A_0 = A_0.e^{-1,2378.10^{-4}t}$$

$$\ln 0,145 = -1,2378.10^{-4}t$$

$$t = \frac{\ln 0,145}{-1,2378}.10^4 \cong 15600\,\text{anos}.$$

Como vimos nos exemplos acima, a taxa de variação de uma variável é proporcional a essa variável num dado instante. Isto é uma característica da função de tipo exponencial e serve de base para um inportante teorema que veremos no próximo capítulo: O Teorema de Caracterização das Funções de tipo Exponencial.

Para mais exemplos, consulte [4], p. 28-35, e [30],p. 106-115.

7 PROPOSTA DE ATIVIDADES DE LOGARITMOS PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo vamos propor algumas atividades alternativas para o ensino de logaritmo num curso de Ensino Médio, mais precisamente na 1ª série deste. Iniciaremos com um breve estudo sobre as progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas(PG), vistos estas progressões serem importantes para o entendimento das propriedades fundamentais das funções de tipo exponencial e logarítmica e, por conseguinte, dos teoremas que as caracterizam.

O breve estudo de PA e PG se faz necessário visto que, na grande maioria das vezes, os livros didáticos não trazem os conteúdos PA e PG no seu 1º volume, adotado na 1ª série do Ensino Médio. E, quando estes conteúdos se encontram nos livros da 1ª série do Ensino Médio, eles vem após o estudo das funções exponencial e logarítmica. Os professores, quase sempre, acompanham a sequência que aparecem nos livros didáticos, ficando a desejar no que diz respeito a caracterização das funções de tipo exponencial e logarítmica.

Pretende-se no decorrer deste capítulo mostrar, com o uso de atividades simples, as principais propriedades das funções de tipo exponencial e logarítmica usando o conceito de PA e PG e caracterizando estas duas funções por meio de seus teoremas de caracterização. Uma abordagem diferente, como já disse acima, da maioria dos livros didáticos que trazem o curso de logaritmo para o Ensino Médio.

É importante, também, frisar que o ensino destas funções devem priorizar a aprendizagem por meio de situações problemas, onde o aluno após caracterizar as funções de tipo exponencial e logarítmica poderá entender porque determinados fenômenos são modelados por estas funções.

7.1 NOÇÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção faremos um breve estudo das Progressões Ariméticas e Geométricas, onde daremos a definição de cada uma delas e mostraremos alguns exemplos, com vista a facilitar o entendimento do assunto Logaritmo.

Para o desenvolvimento desta seção nos baseamos em [22].

7.1.1 Noções Básicas de Progressões Aritméticas

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais.

Exemplo 7.1. Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução: Os valores da produção mensal a partir de janeiro são 400, 430, 460, 490, 520, 550 .... Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mensalmente, raciocinando asssim: se a produção aumente de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta de $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

Definição 7.2. Progressão aritmética é uma sequência na qual a difrença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e a representaremos aqui pela letra r.

Exemplo 7.3. As sequências $(3, 5, 7, \ldots)$ e $(8, 5, 2, \ldots)$ são exemplos de progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 2 e -3.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_4 + 9r$, pois, ao passar de a_4 para o a_{13}, avançamos 9 termos; $a_5 = a_{19} - 14r$, pois retrocedemos 14 termos ao passar de a_{19} para a_5. De modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

A expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$ pode ser vista como a expressão de uma função afim $f(x) = ax + b$, com $x \in \mathbb{N}$, pois:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 - r + nr,$$

fazendo: $a_n = f(x)$, $a_1 - r = b$ e $nr = ax$.

Exemplo 7.4. Em uma progressão aritmética, o quinto termo é 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução: Temos que $a_{20} = a_5 + 15r$, pois ao passar do quinto termo para o vigésimo termo, avançamos 15 termos. Logo, $50 = 30 + 15r$ e $r = \dfrac{4}{3}$.

Analogamente, $a_8 = a_5 + 3r = 30 + 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 34$.

7.1.2 Noções Básicas de Progressões Geométricas

Começaremos esta subseção com alguns exemplos que ajudarão a entender a definição de Progressões Geométricas (PG).

Exemplo 7.5. A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Solução: Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população é de 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por $102\% = 1,02$. Depois de n anos, a população será $P_0 \cdot (1,02)^n$.

Exemplo 7.6. A torcida de certo clube é hoje igual a P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Solução: Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a torcida é 95% da torcida do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a torcida sofre uma multiplicação por $95\% = 0,95$. Depois de n anos, a torcida será $P_0 \cdot 0,95^n$.

Vemos nesses exemplos que se uma grandeza tem taxa de crecimento i, cada valor da grandeza é igual a $1 + i$ vezes o valor anterior.

Definição 7.7. Progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de *razão* da progressão e representaremos aqui por q.

A razão q dada na definição acima é simplesmente o valor $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 7.8. A sequência $(1, 2, 4, 8\,16, \ldots)$ é um exemplo de uma PG com $q = 2$. Assim $1 + i = 2$, o que implica que a taxa de crescimento i é de 100%. Ou seja, cada termo, a partir do 1º, é o dobro do anterior.

Exemplo 7.9. A sequência $(1000, 800, 640, 512, \ldots)$ é uma PG com $q = 0,8 = 80\%$. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20%. Para obter o valor de q basta dividir qualquer termo pelo termo anterior, à partir do primeiro termo. Assim, por exemplo, $q = 800/1000 = 0,8$.

Em uma PG $(g_1, g_2, g_3, \ldots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $g_{14} = g_5 q^9$, pois avançamos 9 termos ao passar de g_5 para g_{14}; $g_4 = \dfrac{g_{12}}{q^8}$, pois ao passar de g_{12} para g_4, retrocedemos 8 termos. De modo geral, $g_n = g_1 q^{n-1}$, pois, ao passar de g_1 para g_n, avançamos $(n - 1)$ termos.

Exemplo 7.10. Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução: Temos que $g_8 = g_5 q^3$, pois avançamos 3 termos ao passar de g_8 para g_5. Logo, $135 = 5q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $g_7 = a_5 q^2 = 5.3^2 = 45$.

7.2 ATIVIDADES ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE LOGARITMO

Nesta seção iremos propor modelos de atividades alternativas que podem enriquecer o ensino do conteúdo Logaritmo num curso de Ensino Médio.

As atividades que apresentaremos nesta seção são inspiradas em [10] e em [27].

7.2.1 Proposta de Atividade 1

Esta atividade ajudará o aluno a identificar a propriedade da função exponencial de transformar PA em PG e de sua inversa, a função logarítmica, que transforma PG em PA.

Atividade 7.11. O professor pede a classe que siga os seguintes passos:

1º) plote uma função exponencial qualquer;

2º) marque no eixo y uma progressão geométrica qualquer;

3º) usando a curva da função exponencial como referência, ache no eixo x os valores correspondentes aos termos da PG no eixo y.

Que conclusão você pode tirar sobre estes valores no eixo x?

Proposta de solução comentada: Usando um software educacional para plotar gráficos (sugerimos o Geogebra [11], software gratuito de geometria dinâmica), o aluno pode imprimir um trecho da função $y = e^x$, $x \geq 0$ por exemplo, e marca, no eixo y, a PG cujo primeiro termo é igual a 1 e cuja a razão q é igual a 2. É claro que poderíamos ter escolhido qualquer uma outra PG não-constante ($q \neq 1$). Escolhemos esta PG, com $g_1 = 1$ e $q = 2$, por simplicidade.

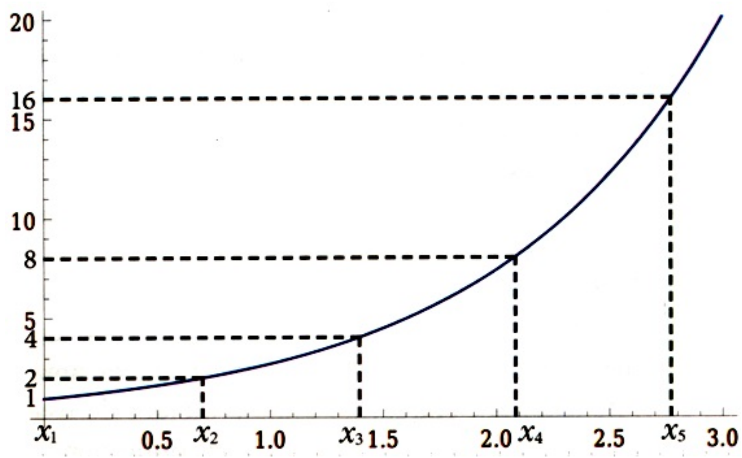

Figura 18 – O gráfico da função $y = e^x$ com PG no eixo y e PA no eixo x.

Sendo assim, marcamos no eixo y a sequência $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ e mantendo a curva $y = e^x$ como referência o aluno pode usar régua e caneta para marcar os valores correspondentes como (x_1, x_2, x_3, x_4, $x_5, \ldots$). Com esse método, o aluno produz a figura 18.

De fato, o aluno usa a régua para marcar, por exemplo, uma linha horizontal de $y = 4$ até a curva de $y = e^x$, depois uma linha vertical da curva até o eixo x, e desse modo obtém, mais ou menos, o valor de x_3. Com o mesmo método, calcula mais ou menos os valores de x_i com i pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, construindo a tabela abaixo.

x_1	0
x_2	$0,65$
x_3	$1,4$
x_4	$2,08$
x_5	$2,76$

Tabela 1 – Possíveis valores aproximados da PA obtida no eixo x.

Após a construção da tabela, o professor intervém com a seguinte pergunta:

— será que estes números, no eixo x, perfazem uma PA?

O aluno então deve calcular a diferença entre os valores do eixo x, obtendo os valores da tabela a seguir.

$x_2 - x_1 = 0,65$
$x_3 - x_2 = 0,75$
$x_4 - x_3 = 0,68$
$x_5 - x_4 = 0,68$

Tabela 2 – Diferença dos valores x_i no eixo x, $x_i - x_{(i-1)}$ com $i \in \{2, 3, 4, 5\}$.

O aluno verifica então que esses valores de x_i se parecem com uma PA cuja razão está em torno de $0,68$; se não fosse o gráfico pequeno demais e sua régua e sua caneta grossas demais os valores se aproximariam mais ainda dos valores exatos.

Na tabela a seguir, mostramos os valores exatos de x_i com três casas decimais.

i	y_i	$x_i = \ln y_i$
1	1	0
2	2	$0,693$
3	4	$1,386$
4	8	$2,079$
5	16	$2,772$

Tabela 3 – Valores exatos da PA x_i, obtida no eixo x, com até 3 casas decimais e i variando de 1 a 5.

Para descobrirmos os valores de x_i, dados na tabela anterior, basta resolvermos a equação $y_i = e^{x_i}$, com i pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aplicando logaritmo natural em ambos os membros, temos: $\ln y_i = x_i$.

Sendo assim, fazendo uso dos valores obtidos na 3ª coluna da tabela 3, vemos que a razão da PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ com três casas decimais é $r = 0,693 = \ln 2 = x_i - x_{i-1}$, com $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Portanto podemos escrever:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0,693 = r$$

$$x_3 = 1,386 = 2r$$

$$x_4 = 2,079 = 3r$$

$$x_5 = 2,772 = 4r.$$

Vemos que a PG, no eixo y,

$$\{1, 2, 4, 8, 16\} \tag{7.1}$$

transforma-se na PA, no eixo x

$$\{0, 0,693, 1,386, 2,079, 2,772\} \tag{7.2}$$

pela função $x = \ln y$. E a mesma PA 7.2 , no eixo x, se transforma na mesma PG 7.1 , no eixo y, pela função $y = e^x$.

Com a atividade acima damos uma importante ideia dos teoremas que caracterizam as funções de tipo exponencial e logarítmica, que serão anunciados mais adiante.

7.2.2 Proposta de Atividade 2

Esta atividade intitulada *Calculadoras Rudimentares* ressalta a importância que tinham os logaritmos, vistos como uma poderosa ferramenta de cálculo algébrico, antes do advento e propagação das máquinas de calcular.

Um dos objetivos desta atividade é ajudar o aluno a entender como as contas podem ser facilitadas com as propriedades das funções logarítmicas e o entendimento de sua propriedade principal: transformar produto em soma.

O aluno adquire, também, o conhecimento de como é construida uma tábua de logaritmos; por meio do contato com a pequena tábua de logaritmos desta atividade.

É aconselhável que esta atividade seja introdutória ao ensino dos logaritmos, podendo ser a apresentação deste conteúdo.

Atividade 7.12. O professor leva para a sala de aula umas folhas pautadas, cada uma com três colunas, cujo título é *Calculadoras Rudimentares*. A primeira coluna já está numerada de 1 a 20. O professor começa a dar instruções a classe:

— Na coluna do meio coloque uma PA que comece com 0.

Comentário: pode ser qualquer PA. Neste exemplo escolhemos a PA com $a_1 = 0$ e razão $r = 2$.

— Na 3ª coluna coloquem uma PG que comece com 1.

Comentário: de novo, pode ser qualquer uma. Neste exemplo escolhemos a PG com $g_1 = 1$ e razão $q = 3$.

— Atenção: por enquanto, estão proibidos de usar calculadora. Vocês têm que fazer as contas à mão.

Conforme orientações acima a tabela de nosso exemplo fica assim:

Linha	PA	PG
1	0	1
2	2	3
3	4	9
4	6	27
5	8	81
6	10	243
7	12	729
8	14	2.187
9	16	6.561
10	18	19.683
11	20	59.049
12	22	177.147
13	24	531.441
14	26	1.594.323
15	28	4.782.969
16	30	14.348.907
17	32	43.046.721
18	34	129.140.163
19	36	387.420.489
20	38	1.162.261.467

Tabela 4 – Calculadora Rudimentar.

Reforçando os comentários realizados anteriormente, enfatizamos que numa sala de aula teremos várias tabelas distintas, pois teremos distintas PA com $a_1 = 0$ e diferentes PG com $g_1 = 1$. Dentre outras, escolhemos a tabela mostrada acima.

Após a construção da tabela, o professor dá, várias vezes, instruções assim:

— Multipliquem o termo da PG na linha 4 pelo termo da PG na linha 10.

O aluno gasta um tempo realizando a conta 27×19.683, para obter 531.441.

— Multipliquem o termo da PG na linha 3 pelo termo da PG na linha 12.

O aluno, após um tempo realizando a conta 9×177.147, obtém 1.594.323.

— Multipliquem o termo da PG na linha 7 pelo termo da PG na linha 14.

O aluno multiplica, laboriosamente, $729 \times 1.594.323$, para obter 1.162.261.467.

É claro que as orientações poderiam ser diferentes, ou seja, poderiamos ter pego outras linhas nas multiplicações e poderíamos, também, continuar a "tortura"por mais um pouco. Mas, com certeza, algum aluno mais esperto em matemática se levantará e dirá:

— Professor, notei que multiplicar um termo da PG por outro termo da PG é equivalente a somar o termo da PA ao lado do primeiro termo da PG com o termo da PA ao lado do segundo termo da PG. Observei que o resultado da adição "cai"na mesma linha que o resultado da multiplicação.

Os outros alunos, após a fala acima, com certeza tentaram ver se isto vale sempre. Neste momento é interessante deixar os alunos usarem uma calculadora para verificar que a proposição acima citada pelo "aluno esperto"é realmente correta.

Após os alunos falarem algumas vezes e perceberem como é tedioso chamar: "o termo da PA, ao lado do termo da PG na linha tal"; o professor deve propor um acordo à classe:

— Daremos um nome para esses termos da PA, já que estamos fazendo a multiplicação dos termos da PG com a ajuda da PA, e já que precisamos, toda hora, nos referir a esse termo da PA. Usaremos o mesmo nome que os antigos usavam: Logaritmo.

O professor pode, neste momento, expor um exemplo com a nova palavra Logaritmo. Assim, se dirige a turma:

— Observem que quando somarmos o logaritmo de 81, que vale 8, ao logaritmo de 59.049, que vale 20, obtemos 28. Como podemos observar 28 é o logaritmo de 4.782.969, que é o resultado da multiplicação de 81 por 59.049. Vemos que ao invés de gastarmos tempo fazendo multiplicações, podemos obter o resultado destas apenas realizando somas.

Após estas observações, o professor deve incitar a turma a ver, com certeza agora com mais facilidade, que a divisão de dois números da PG equivale a subtrair dois números na PA.

Nas aulas seguintes, o professor pode aproveitar para comentar a parte histórica dos logaritmos e explicitar que a descoberta das propriedades logarítmicas de transformar produto em soma e divisão em subtração fez surgir tábuas de logaritmos que facilitaram os cálculos de todos que precisavam fazer multiplicações e divisões difíceis, numa época em que os computadores e máquinas de calcular ainda eram um sonho distante. O professor pode, também, incentivar os alunos a pesquisarem sobre a história dos logaritmos, fazendo com que estes se aprofundem um pouco mais neste tema.

7.2.3 Proposta de Atividade 3

Após a construção da tabela 4, surge naturalmente algumas perguntas. Nesta atividade, procuraremos respondê-las e por meio destas respostas explicitaremos algumas propriedades interessantes da referida tabela.

Atividade 7.13. Pergunta 1: A soma de dois termos da PA é sempre um termo da PA?

Resposta: Pequemos, como exemplo, uma PA de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão r:

$$a_n = (n-1)r. \tag{7.3}$$

Consideremos dois termos desta PA, $a_p = (p-1)r$ e $a_s = (s-1)r$, e façamos a soma destes:

$$\begin{aligned} a_p + a_s &= (p-1)r + (s-1)r \\ &= [(p+s-1)-1]r \\ &= a_{(p+s-1)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Logo, podemos ver que a soma dos termos a_p e a_s dessa PA resulta no termo $a_{(p+s-1)}$ dessa mesma PA.

Pergunta 2: E quanto ao produto de dois termos da PG ao lado de dois termos da PA? É sempre um termo da própria PG?

Resposta: Tomemos uma PG de primeiro termo $g_1 = 1$, razão q e designemos o seu termo genérico por g_n, logo o seu termo geral é:

$$g_n = q^{n-1}. \tag{7.5}$$

Multiplicando os termos g_p e g_s, isto é, os termos que estão ao lado dos a_p e a_s na PA, temos:

$$\begin{aligned} g_p \cdot g_s &= q^{p-1} \cdot q^{s-1} \\ &= q^{(p+s-1)-1} \\ &= g_{(p+s-1)}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Assim provamos que o produto de dois termos da PG é também um termo da PG e que esse produto fica ao lado, na mesma linha, da soma dois termos da PA.

Na pergunta 3, indagaremos sobre uma possível relação entre os termos da PA com os termos da PG. Vejamos!

Pergunta 3: Existe alguma relação entre os termos genéricos a_n da PA e g_n da PG?

Resposta: Para responder a esta pergunta usaremos os conhecimentos do aluno a respeito das funções exponenciais e os adquiridos na realização da **Atividade** 7.11, onde eles aprenderam que uma PG no eixo y é transformada numa PA no eixo x por meio de uma função exponencial. Como o termo genérico da PA é dado por a_n e da PG por g_n, temos que

$$g_n = b^{a_n},\ 1 \neq b > 0. \tag{7.7}$$

Nesse ponto o aluno entende porque a PA deve começar com 0 e a PG com 1, pois: $b^0 = 1$.

Quanto ao valor de b, peguemos, por exemplo, a linha 8 da tabela 4, onde os termos da PA e PG são, respectivamente, $a_8 = 14$ e $g_8 = 2187$. Assim:

$$\begin{aligned} g_8 &= b^{a_8} \\ 2187 &= b^{14} \\ 3^7 &= b^{14} \\ 3 &= b^2 \\ b &= \sqrt{3}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Substituindo 7.8 em 7.7 temos:

$$g_n = (\sqrt{3})^{a_n}. \tag{7.9}$$

Da equação 7.3 e considerando que na construção da tabela 4 tomamos $r = 2$, temos:

$$a_n = 2(n-1). \tag{7.10}$$

Agora substituindo 7.10 em 7.9, vem:

$$g_n = (\sqrt{3})^{2(n-1)}. \tag{7.11}$$

Com a equação 7.9, o aluno entende o essencial: passou a chamar cada termo da PA de logaritmo porque ele é o logarítmo de base $\sqrt{3}$ dos termos da PG, pois:

$$g_n = (\sqrt{3})^{a_n} \Leftrightarrow a_n = \log_{\sqrt{3}} g_n. \tag{7.12}$$

Já com a equação 7.7, também temos a explicação do porquê o produto de dois termos da PG (g_p e g_s) pode ser calculado com a soma de dois termos da PA (a_p e a_s), pois:

$$\begin{aligned} g_p \cdot g_s &= b^{a_p} \cdot b^{a_s} \\ &= b^{a_p + a_s}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Substituindo a equação 7.4 na equação 7.13, temos:

$$\begin{aligned} g_p \cdot g_s &= b^{a_{(p+s-1)}} \\ &= g_{(p+s-1)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nesse ponto da atividade, deve haver algum aluno esperto em matemática que faz a seguinte indagação:

— professor, já que pode ser qualquer PA, desde que comece com 0, e já que pode ser qualquer PG desde que comece com 1, é conveniente escolher uma PA e uma PG mais simples possível. Por que não uma PA cuja diferença é 1 e uma PG cuja razão é 2?

Neste momento devemos comemorar, pois a classe entendeu que, se vai usar a PA para calcular a multiplicação dos termos da PG, então só tem a ganhar se a PA for a mais simples possível; e se vai usar os termos da PG para fazer multiplicação, só tem a ganhar se a PG cresce mais devagar.

Caso nenhum aluno faça a pergunta acima, o professor deve fazê-la e realizar a conclusão decorrente dela.

7.2.4 **Proposta de Atividade 4**

Após os alunos terem realizado as **Atividades** 7.11, 7.12 e 7.13 podemos propor alguns exercícios onde eles poderão praticar o que aprenderam. É oportuno que aproveitemos o momento para demonstrar as propriedades dos logaritmos e as consequências de sua definição. Dentre outras atividades que podemos propor, escolhemos a que segue abaixo.

Atividade 7.14. Plote o gráfico de uma função logarítmica qualquer e marque, no eixo x, uma PG simples, com primeiro termo $g_1 = 1$ e razão $q = 2$. Usando régua e caneta para marcar, no eixo y, os valores correspondentes a cada termo da PG, verifique o que acontece.

Proposta de solução comentada: O aluno pode escolher a função logarítmica $y = \ln x$, por exemplo, e seguindo as instruções pedidas no enunciado da atividade produzir a figura 19.

Com os valores aproximados de a_n da PA obtida no eixo y, o aluno pode construir uma tabela com os valores mais ou menos iguais aos da tabela 5.

Como o aluno já realizou a **Atividade** 7.11, fica mais fácil para ele perceber agora que a PG no eixo x se transformou, por meio da função $y = \ln x$, numa PA no eixo y onde o primeiro termo é $a_1 = 0$ e cuja razão r é mais ou menos igual a $0,7$. Como já foi dito em 7.2.4, aproveitaremos o momento para mostrar as duas ideias principais das funções exponenciais e logarítmicas e demonstrar os teoremas que carcterizam estas duas funções.

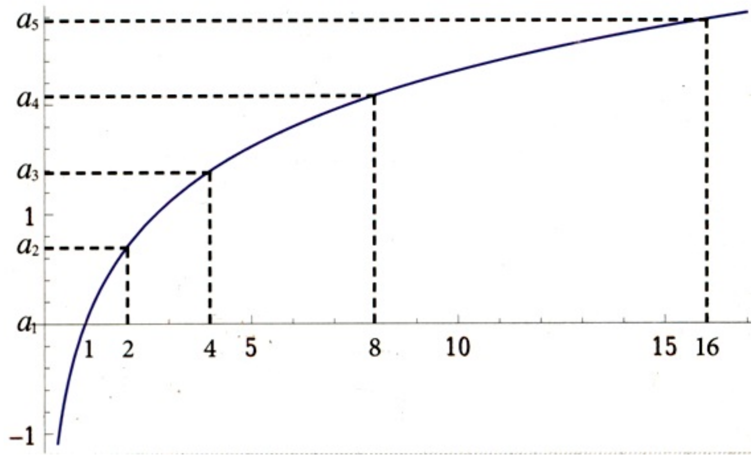

Figura 19 – O gráfico da função $y = \ln x$ com PG no eixo x e PA no eixo y.

n	$g_n =$	$a_n \cong$
1	1	0
2	2	$0,7$
3	4	$1,38$
4	8	$2,1$
5	16	$2,8$

Tabela 5 – Uma PG de termo genérico g_n e uma PA de termo genérico a_n.

7.2.5 Teoremas de Caracterização das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Agora o aluno está em condições de entender as duas ideias fundamentais contidas nas funções exponenciais e logarítmicas. Estas ideias, descritas nas **Observações** 7.15 e 7.20, caracterizam as funções de tipo exponencial e logarítmica, respectivamente.

Observação 7.15. Uma função exponencial transforma soma em produto. No nosso exemplo da **Atividade** 7.11, uma PA no eixo x se transforma numa PG no eixo y por meio de uma função exponencial. Por causa dessa característica, a função exponencial serve para modelar fenômenos nos quais quanto maior o valor da variável independente x, maior o efeito que uma mudança no valor de x provoca sobre o valor da variável dependente y.

Da Observação 7.15, podemos ter os teoremas 7.17 e 7.18 que carcterizam as funções exponenciais, ambos extraídos de [15], p. 183-184 e p. 186, respectivamente.

Antes, porém, de comentarmos sobre os teoremas acima citados, veremos o lema 7.16, extraído de [15], p. 177-178. Este lema nos auxiliará na demonstração do teorema 7.17.

Lema 7.16. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$,devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad \text{e} \quad 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim as potências

$$a^0 = 1, \quad a^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{2}{n}}, \ldots, \quad a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento de $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. □

Teorema 7.17. Caracterização da função exponecial Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad f(nx) = f(x)^n \ \forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{R};\\
&(2) \quad f(x) = a^x \ \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ onde } a = f(1);\\
&(3) \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). A fim de mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2) observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que (1) $\Rightarrow$ (2) suponhamos, a fim de fixar as ideias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente.) Então, pelo Lema 7.16, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2). As implicações restantes, (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) são óbvias. □

Teorema 7.18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência x, 0, $-x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x)$, 1, $g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu (n + 1)-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$,tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Além dos dois teoremas acima, Teoremas 7.17 e 7.18, temos um importante teorema, Teorema 7.19, que caracteriza as funções de tipo exponencial. Mas, antes disso, definiremos funções de tipo exponencial.

Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é cresccente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \tag{7.15}$$

e

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \tag{7.16}$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema 7.19. (Caracterização das funções de tipo exponencial.) Seja a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f continua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x)\cdot f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ para quaisque x, $y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do Teorema 7.17 que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$. $\square$

Observação 7.20. Uma função logarítmica transforma produto em soma. No nosso exemplo da **Atividade** 7.14, uma PG no eixo x se transforma numa PA no eixo y por meio de uma função logarítmica. Por causa dessa característica, a função logarítmica serve para modelar fenômenos nos quais, quanto maior o valor da variável independente x, menor o efeito que uma mudança no valor de x provoca sobre o valor da variável dependente y.

Da Observação 7.20 podemos ter o teorema abaixo, extraído de [15], p. 194-195.

Teorema 7.21. (Caracterização das funções logarítmicas) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para qualquer x, $y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Para fixar as ideias, admitamos f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e sabemos que $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a) \\ &= f(a) + f(a) + \cdots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 = m, \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \\ f(a^{-m}) &= -m. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto:

$$\begin{aligned} m &= f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r) \\ f(a^r) &= \frac{m}{n} = r. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s. \tag{7.20}$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma produtos em somas e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)}, \text{ com } a = 2^{1/b}.$$

Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente:

$$g(x) = \log_a x.$$

$\square$

7.2.6 Proposta de Atividade 5

Nesta seção iremos propor duas atividades que exemplificam a caracterização das funções de tipo exponencial e das funções logarítmicas.

7.2.6.1 *Atividade que Exemplifica a Caracterização da Função Exponencial e de Tipo Exponencial*

Atividade 7.22. Nesta atividade iremos propor que o aluno complete a tabela abaixo para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = 3^x$ considerando $h = 1$. Após, o aluno deve observar o que acontece com as linhas e as colunas da tabela, especialmente com a linha da 5ª coluna, onde está explicitado o quociente $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$, que representa o 1º membro da equação 7.15, sendo que esta caracteriza a função de tipo exponencial.

Proposta de solução comentada: Primeiramente observamos que a função $g(x) = 3^x$ é uma função de tipo exponencial $g(x) = ba^x$ com $b = 1$ e $a = 3$ ou simplesmente uma

x	$g(x) = 3^x$	$g(x+h)$	$g(x+h) - g(x)$	$\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
...	...	...	...	...
k				

Tabela 6 – Tabela do exemplo da Atividade 7.22.

função exponencial $g(x) = a^x$ com $a = 3$. Vale ressaltar que a função $g(x) = 3^x$ foi escolhida por simplicidade, poderia ser qualquer outra função de tipo exponencial, e o valor de $h = 1$ também poderia ser qualquer outro valor real.

Temos que:

$$x = 0 \Rightarrow g(x+h) - g(x) = g(1) - g(0) = 3 - 1 = 2 = 2 \cdot 3^0 \Rightarrow \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{2}{1} = 2;$$

$$x = 1 \Rightarrow g(x+h) - g(x) = g(2) - g(1) = 9 - 3 = 6 = 2 \cdot 3^1 \Rightarrow \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{6}{3} = 2;$$

$$x = 2 \Rightarrow g(x+h) - g(x) = g(3) - g(2) = 27 - 9 = 18 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{18}{9} = 2;$$

Continuando o processo para um valor arbitrário de x, digamos $x = k$, temos:

$$x = k \Rightarrow g(x+h) - g(x) = g(k+1) - g(k) = 3^{k+1} - 3^k = 2 \cdot 3^k \Rightarrow \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{2 \cdot 3^k}{3^k} = 2.$$

Portanto, podemos completar a tabela dada com o processo de construção explicitado acima. Sendo assim, segue a tabela completa.

x	$g(x) = 3^x$	$g(x+h)$	$g(x+h) - g(x)$	$\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$
0	1	3	$2 = 2 \cdot 3^0$	2
1	3	9	$6 = 2 \cdot 3^1$	2
2	9	27	$18 = 2 \cdot 3^2$	2
3	27	81	$54 = 2 \cdot 3^3$	2
4	81	243	$162 = 2 \cdot 3^4$	2
5	243	729	$486 = 2 \cdot 3^5$	2
...	...	...	...	...
k	3^k	3^{k+1}	$2 \cdot 3^k$	2

Tabela 7 – Tabela de valores com resposta da Atividade 7.22.

Na tabela 7 podemos observar que:

i) Os valores de x, no eixo x, formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 0$ e cuja razão é $r = 1$. O termo genérico dessa PA é $a_n = a_1 + (n-1)r = 0 + (n-1) \cdot 1 = n - 1$.

ii) Os valores de $y = g(x)$, no eixo y, formam uma PG cujo primeiro termo $g_1 = 1$ e cuja razão $q = 3$. O termo genérico dessa PG é $g_n = g_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

iii) Relacionando os termos da PA, no eixo x, com os da PG, no eixo y, vemos que se $a_n = n - 1 = k$ então $g_n = 3^{n-1} = 3^{a_n} = 3^k$.

iv) A equação 7.15 que caracteriza uma função de tipo exponencial $g(x) = ba^x$ pode ser verificada. Vale lembrar que, nesse exemplo, $b = 1$ e $a = 3$ porque $g(x) = 3^x$ e h foi considerado com valor igual a 1. Assim sendo, vemos que o quociente dado pela 5ª coluna desta tabela não depende do valor de x, mas apenas do valor de h. Vejamos:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{3^{x+h} - 3^x}{3^x} = \frac{3^x(3^h - 1)}{3^x} = 3^h - 1 = 3^1 - 1 = 2 \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.21}$$

7.2.6.2 *Atividade que Exemplifica a Caracterização da Função Logarítmica*

Atividade 7.23. Nesta atividade iremos propor que o aluno complete a tabela abaixo para a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_3 x$. Após, o aluno deve observar o que acontece com as linhas e as colunas da tabela, especialmente com as linhas das 5ª e 6ª colunas.

i	x_i	$f(x_i) = \log_3 x_i$	$f(x_{i+1})$	$f(x_i \cdot x_{i+1})$	$f(x_i) + f(x_{i+1})$
1	1				
2	3				
3	9				
4	27				
5	81				
6	243				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n-1$	3^{n-2}				
n	3^{n-1}				

Tabela 8 – Tabela do exemplo da Atividade 7.23.

Proposta de solução comentada: Vamos começar completando a 3ª e a 4ª colunas da tabela. Para completar a 3ª coluna usamos a propriedade do logaritmo $\log_a a^k = k$, sendo a real e $1 \neq a > 0$. Assim, temos, por exemplo:

$$f(x_1) = \log_3 1 = 0; \ f(x_2) = \log_3 3 = 1; \ f(x_3) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2;$$

$$\dots$$

$$f(x_n) = \log_3 3^{n-1} = n - 1.$$

Já a 4ª coluna é a 3ª coluna com uma linha adiantada, ou seja: o valor da linha 1 da 4ª coluna é igual ao valor da linha 2 da 3ª coluna; o valor da linha 2 da 4ª coluna é igual ao valor da linha 3 da 3ª coluna e assim sucessivamente. Deste modo a 4ª coluna ficará com um elemento a menos do que a 3ª coluna, pois o elemento da n-ésima linha da 4ª coluna seria igual ao elemento da (n + 1)-ésima linha da 3ª coluna, mas a 3ª coluna vai até a n-ésima linha.

Após completar as 3ª e 4ª colunas, a tabela ficam assim:

i	x_i	$f(x_i) = \log_3 x_i$	$f(x_{i+1})$	$f(x_i \cdot x_{i+1})$	$f(x_i) + f(x_{i+1})$
1	1	0	1		
2	3	1	2		
3	9	2	3		
4	27	3	4		
5	81	4	5		
6	243	5	6		
...	...	...	...	...	...
$n-1$	3^{n-2}	$n-2$	$n-1$		
n	3^{n-1}	$n-1$	—		

Tabela 9 – Tabela do exemplo da Atividade 7.23 com 3ª e 4ª colunas completas.

Completando as 5ª e 6ª colunas temos:

$$\begin{aligned} \text{para } i = 1 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_1 \cdot x_2) = f(1 \cdot 3) = f(3) = 1 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_1) + f(x_2) = f(1) + f(3) = 0 + 1 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } i = 2 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_2 \cdot x_3) = f(3 \cdot 9) = f(27) = 3 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_2) + f(x_3) = f(3) + f(9) = 1 + 2 = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } i = 3 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_3 \cdot x_4) = f(9 \cdot 27) = f(243) = 5 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_3) + f(x_4) = f(9) + f(27) = 2 + 3 = 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } i = 4 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_4 \cdot x_5) = f(27 \cdot 81) = f(3^3 \cdot 3^4) = f(3^7) = 7 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_4) + f(x_5) = f(27) + f(81) = 3 + 4 = 7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } i = 5 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_5 \cdot x_6) = f(81 \cdot 243) = f(3^4 \cdot 3^5) = f(3^9) = 9 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_5) + f(x_6) = f(81) + f(243) = 4 + 5 = 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } i = 6 : \quad & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_6 \cdot x_7) = f(243 \cdot 3^6) = f(3^5 \cdot 3^6) = f(3^{11}) = 11 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_6) + f(x_7) = f(3^5) + f(3^6) = 5 + 6 = 11; \end{aligned}$$

$$\cdots$$

Continuando o processo acima para $i = n - 1$, temos:

$$\begin{aligned} & f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_{n-1} \cdot x_n) = f(3^{n-2} \cdot 3^{n-1}) = f(3^{2n-3}) = 2n - 3 \\ & f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_{n-1}) + f(x_n) = f(3^{n-2}) + f(3^{n-1}) = n - 2 + n - 1 = 2n - 3; \end{aligned}$$

i	x_i	$f(x_i) = \log_3 x_i$	$f(x_{i+1})$	$f(x_i \cdot x_{i+1})$	$f(x_i) + f(x_{i+1})$
1	1	0	1	$f(x_1 \cdot x_2) = 1$	$f(x_1) + f(x_2) = 1$
2	3	1	2	$f(x_2 \cdot x_3) = 3$	$f(x_2) + f(x_3) = 3$
3	9	2	3	$f(x_3 \cdot x_4) = 5$	$f(x_3) + f(x_4) = 5$
4	27	3	4	$f(x_4 \cdot x_5) = 7$	$f(x_4) + f(x_5) = 7$
5	81	4	5	$f(x_5 \cdot x_6) = 9$	$f(x_5) + f(x_6) = 9$
6	243	5	6	$f(x_6 \cdot x_7) = 11$	$f(x_6) + f(x_7) = 11$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-1$	3^{n-2}	$n-2$	$n-1$	$f(x_{n-1} \cdot x_n) = 2n-3$	$f(x_{n-1}) + f(x_n) = 2n-3$
n	3^{n-1}	$n-1$	—	—	—

Tabela 10 – Tabela do exemplo da Atividade 7.23 com todas as colunas completas.

Após explicar como completar as 5ª e 6ª colunas, temos a tabela acima.

Observando a tabela 10, temos que:

i) Os valores de x, no eixo x, formam uma PG cujo primeiro termo é $x_1 = 1$ e cuja razão é $q = 3$. O termo genérico dessa PG, conforme já vimos, é $x_n = x_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.
ii) Os valores de $y = f(x)$, no eixo y, formam uma PA cujo primeiro termo é $f_1 = 0$ e cuja razão é $r = 1$. O termo genérico dessa PA é $f_n = f_1 + (n-1)r = 0 + (n-1) \cdot 1 = n - 1$.
iii) Relacionando os termos da PG, no eixo x, com os da PA, no eixo y, temos que: $x_n = 3^{n-1} = 3^{f_n}$.
iv) O Teorema 7.21 que caracteriza a função logarítmica pode ser verificado; pois: os valores das 5ª e 6ª colunas são iguais, ou seja, $f(x_i \cdot x_{i+1}) = f(x_i) + f(x_{i+1})$. Portanto, cumpre-se a propriedade da função logarítmica de transformar produto em soma. Conforme dito no teorema ora citado, vale:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \ \forall x,\, y \in \mathbb{R}^+,$$

sendo $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva definida por $f(x) = \log_a x$ e $1 \neq a > 0$.

7.2.7 Proposta de Atividade 6

Esta atividade é baseada em uma reportagem da revista Cálculo [28].

No museu Exploratorium, em São Francisco nos Estados Unidos, está exposto uma escultura dinâmica intitulada *Máquina com Concreto*, criada por Arthur Ganso. Esta escultura consiste de um motor que faz barulho conforme gira um eixo, que por sua vez gira uma engrenagem, que dá uma volta completa em torno de seu eixo, aproximadamente, a cada 15 segundos. Este motor está ligado também a outras engrenagens que até parecem paradas; tudo isso sobre um bloco de concreto.

O motor da *Máquina com Concreto* é elétrico; está ligado a um eixo, e faz esse eixo girar a 212 rotações por minuto (rpm). O eixo, por meio de um parafuso, faz a primeira engrenagem girar com velocidade 50 vezes menor que a do próprio eixo, ou seja, faz a primeira engrenagem girar a $\frac{212}{50} = 4,24$ rpm. Ao todo são 12 engrenagens, todas elas ligadas umas às outras por meio de eixos e parafusos, sendo que cada uma gira 50 vezes mais lentamente que a engrenagem anterior. E, o eixo da última engrenagem está fundida no bloco de concreto, não permitindo deste modo que ela se mova.

A pergunta interessante é: faz diferença o fato de que o eixo da última engrenagem esteja fundido no bloco de concreto e não possa girar? A última engrenagem está girando a mais ou menos 1 grau a cada 6 bilhões e 86 milhões de anos, como explicaremos no exercício **(5)** da atividade abaixo. Sendo assim, não faz nenhuma diferença o fato do artista ter fundido a última engrenagem no bloco de concreto.

Atividade 7.24. Após o professor explicar a *Máquina com Concreto* a turma, ele pode pedir aos alunos que façam os exercícios abaixo.
(1) Ache uma função pela qual possa obter a velocidade v, em rpm, de cada engrenagem da máquina em função do número x da engrengem.
(2) Encontre uma função que relaciona o tempo, em segundos, que cada engrenagem em questão gasta para dar uma volta completa em torno de seu eixo?
(3) Determine uma função que representa o tempo que cada engrenagem em questão leva para girar 1 grau?
(4) Use as informações obtidas nas soluções dos exercícios **(1)**, **(2)** e **(3)** para completar a tabela abaixo.

Elemento	Fator de redução da velocidade (em relação ao eixo)	Velocidade	Uma volta completa a cada ...
Eixo ligado ao motor			
1ª engrenagem			
2ª engrenagem			
3ª engrenagem			
4ª engrenagem			
5ª engrenagem			
6ª engrenagem			
7ª engrenagem			
8ª engrenagem			
9ª engrenagem			
10ª engrenagem			
11ª engrenagem			
12ª engrenagem			

Tabela 11 – Tabela da *Máquina com Concreto* a completar.

(5) Como você explicaria a afirmação, dada no texto que abre esta atividade, de que a última engrenagem gira mais ou menos 1 grau a cada 6 bilhões e 86 milhões de anos?

Proposta de solução: **(1)** Sendo v a velocidade de cada engrenagem e x o número da engrenagem, estamos procurando $v = f(x)$, ou seja, procuramos uma função pela qual podemos obter a velocidade de cada engrenagem em relação ao número da engrenagem. Como cada engrenagem gira 50 vezes mais lentamente do que a engrenagem anterior, temos que:

$$f(x+h) = \alpha \cdot f(x),$$

sendo que x, $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que tanto x quanto $(x+h)$ variam de 0 a 12 e α é uma potência de $\dfrac{1}{50}$.

Analisando o acréscimo relativo da função f, dada pelo quociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = \frac{\alpha \cdot f(x) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x)(\alpha-1)}{f(x)} = \alpha - 1,$$

vemos que este dependente apenas de α, que por sua vez depende de h. Como o acréscimo relativo depende apenas de h, mas não de x, pelo Teorema 7.19, a função f é de tipo exponencial; logo:

$$v(x) = b \cdot a^x. \tag{7.22}$$

Representando a velocidade do motor por $v(0) = 212$ rpm, pela equação 7.22, temos:

$$\begin{aligned} v(0) &= b \cdot a^0 = 212 \\ b &= 212 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Substituindo 7.23 em 7.22, temos:

$$v(x) = 212 \cdot a^x. \tag{7.24}$$

Temos que a velocidade da engrenagem 1 é $v(1) = \dfrac{212}{50}$ rpm. Substiutindo este valor de $v(1)$ em 7.24, temos:

$$v(1) = 212 \cdot a^1 = \frac{212}{50} \Rightarrow a = \frac{1}{50}.$$

Logo, a equação 7.24 fica assim:

$$v(x) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x, \tag{7.25}$$

sendo que x é um número inteiro variando de 0 a 12 e v é dado em rpm.

Alternativamente, para chegar a equação 7.25 e considerando $v(0) = 212$ rpm a velocodade do motor, poderíamos ter usado o seguinte raciocínio:

i) engrenagem 1: $v(1) = \frac{1}{50} \cdot v(0) = \frac{1}{50} \cdot 212,$

ii) engrenagem 2: $v(2) = \frac{1}{50} \cdot v(1) = \frac{1}{50^2} \cdot 212,$

iii) engrenagem 3: $v(3) = \frac{1}{50} \cdot v(2) = \frac{1}{50^3} \cdot 212.$

$$\ldots$$

Na engrenagem x: $v(x) = \frac{1}{50^x} \cdot 212 = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}/\, 0 \leq x \leq 12.$
Portanto, a função procurada é $v : A \to \mathbb{R}$, definida por $v(x) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x$, sendo que $A = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\}/\, 0 \leq x \leq 12\}$ e v é dado em rpm.

(2) Na equação $v(x) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x$, v é dado em rpm (voltas por minuto). Se quisermos que v seja dado em rotações (voltas) por segundo, que representaremos por rps, temos que dividir a equação em questão por 60, logo:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{212}{60} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x \\ v(x) &= \frac{53}{15} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Como a velocidade de cada engrenagem é constante, sendo d a distância representando 1 volta, o tempo t de cada engrenagem para a distância de uma volta é dado por:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{d}{v(x)} \\ t(x) &= \frac{1}{\frac{53}{15} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x} \\ t(x) &= \frac{15}{53} \cdot 50^x. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Portanto, a função pedida é $t : A \to \mathbb{R}$, definida por $t(x) = \frac{15}{53} \cdot 50^x$, sendo t dado em segundos e A o conjunto já definido anteriormente.

(3) Pela resposta da questão **(2)**, temos que a equação 7.27 relaciona o tempo gasto por cada engrenagem, em segundos, para dar uma volta completa; ou seja, ter um deslocamento angular de 360º. Sendo assim, para encontramos a função que representa o tempo que cada engrenagem em questão leva para girar 1º, basta dividirmos a equação 7.27 por

360. Designando a função procurada por R, temos que:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \frac{t(x)}{360} \\
R(x) &= \frac{\frac{15}{53} \cdot 50^x}{360} \\
R(x) &= \frac{1}{1272} \cdot 50^x. \qquad (7.28)
\end{aligned}
$$

Logo, a função pretendida é $R : A \to \mathbb{R}$, definida por $R(x) = \dfrac{1}{1272} \cdot 50^x$, sendo R dado em segundos/grau (s/º) e o conjunto A já definido em **(1)**.

(4) Antes de completarmos a tabela 11, explicaremos os elementos que compõem as linhas de cada coluna. Os elementos que compõem a 2ª coluna é de fácil compreensão, pois a velocidade de cada engrenagem sempre diminui $\frac{1}{50}$ em relação à engrenagem anterior.

Quanto aos elementos da 3ª coluna, basta usarmos a equação 7.25. Entre outros, calcularemos:

$$
\begin{aligned}
&v(2) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 = 0,0848\,\text{rpm} = 0,0848 \times 60 = 5,088\,\text{rph}, \\
&v(4) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^4 = 3,392 \cdot 10^{-5}\,\text{rpm} = 3,392 \cdot 10^{-5} \times 60 \times 24 \times 30 \cong 1,4653\,\text{rpmes}, \\
&v(5) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^5 = 6,784 \cdot 10^{-7}\,\text{rpm} = 6,784 \cdot 10^{-7} \times 60 \times 24 \times 365 \cong 0,3566\,\text{rpa}, \\
&v(6) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^6 = 1,3568 \cdot 10^{-8}\,\text{rpm} = 1,3568 \cdot 10^{-8} \times 60 \times 24 \times 365 \times 10^2 \cong 0,7131\,\text{rpsec}, \\
&v(7) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^7 = 2,7136 \cdot 10^{-10}\,\text{rpm} = 2,7136 \cdot 10^{-10} \times 60 \times 24 \times 365 \times 10^3 \cong 0,1426\,\text{rpmil}, \\
&v(12) = 212 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{12} \cong 8,684 \cdot 10^{-19}\,\text{rpm}.
\end{aligned}
$$

Onde consideramos:

- rpm = rotações por minuto,
- rph = rotações por hora,
- rpmes = rotações por mês,
- rpa = rotações por ano,
- rpsec = rotações por século,
- rpmil = rotações por milênio.

A respeito dos valores da 4ª coluna, podemos calculá-los com o auxílio da equação 7.27 ou fazendo o inverso dos valores da 3ª coluna. Como alguns valores desta coluna estão aproximados, os resultados da 4ª coluna seriam afetados por essas aproximações. Sendo assim, optaremos por usar a equação aqui mencionada.

Portanto, como fizemos, anteriormente, para os elementos da 3ª coluna, calcularemos alguns elementos da 4ª coluna. Mas, antes de iniciarmos os cálculos, faz-se necessário

algumas observações:
i) 1 min = 60 s,
ii) 1 h = 3600 s,
iii) 1 d = $3600 \times 24 = 86.400$ s,
v) 1 ano = $86.400 \times 365 = 3,1536 \cdot 10^7$ s,
vi) 10^3 (mil) anos = $3,1536 \cdot 10^{10}$ s,
vii)10^6 (milhões) anos = $3,1536 \cdot 10^{13}$ s,
viii) 10^9 (bilhões) anos = $3,1536 \cdot 10^{16}$ s,
ix) 10^{12} (trilhões) anos = $3,1536 \cdot 10^{19}$ s.
Onde consideramos:
- s = segundo,
- min = minuto,
- h = hora,
- d = dia.

Usando a equação 7.27, seguem os cálculos de alguns elementos da 4ª coluna:

$$t(1) = \frac{15}{53} \cdot 50 = 14,15\text{ s},$$

$$t(2) = \frac{15}{53} \cdot 50^2 \cong 707,55\text{ s} \cong 11\text{min } 48\text{s},$$

$$t(3) = \frac{15}{53} \cdot 50^3 \cong 35.377\text{ s} \cong 9\text{h } 49\text{min } 37\text{s},$$

$$t(4) = \frac{15}{53} \cdot 50^4 \cong 1.768.867\text{ s} \cong 20\text{d } 11\text{h } 21\text{min } 7\text{s},$$

$$t(5) = \frac{15}{53} \cdot 50^5 \cong 88.443.396\text{ s} \cong 1.024\text{ dias},$$

$$t(6) = \frac{15}{53} \cdot 50^6 \cong 4.422.170\text{ s} \cong 140\text{ anos},$$

$$t(9) = \frac{15}{53} \cdot 50^9 \cong 5,5277123 \cdot 10^{14}\text{ s} \cong 1,753 \cdot 10^7\text{ anos},$$

$$t(11) = \frac{15}{53} \cdot 50^{11} \cong 1,381928 \cdot 10^{18}\text{ s} \cong 4,382 \cdot 10^{10}\text{ anos},$$

$$t(12) = \frac{15}{53} \cdot 50^{12} \cong 6,90964 \cdot 10^{19}\text{ s} \cong 2,191 \cdot 10^{12}\text{ anos}.$$

Após explicarmos como são calculados os elementos de cada linha em cada coluna, segue a tabela 11 com suas linhas e colunas preenchidas.

Elemento	Fator de redução da velocidade (em relação ao eixo)	Velocidade	Uma volta completa a cada ...
Eixo ligado ao motor	...	212 rpm	0,283 segundos
1ª engrenagem	$\frac{1}{50}$	4,24 rpm	14,15 segundos
2ª engrenagem	$\frac{1}{50^2}$	5,088 rph	11min 48s
3ª engrenagem	$\frac{1}{50^3}$	0,10176 rph	9h 49min 37s
4ª engrenagem	$\frac{1}{50^4}$	1,4653 rpmes	20d 11h 21min 7s
5ª engrenagem	$\frac{1}{50^5}$	0,3566 rpa	1.024 dias
6ª engrenagem	$\frac{1}{50^6}$	0,7131 rpsec	140 anos
7ª engrenagem	$\frac{1}{50^7}$	0,1426 rpmil	7.011 anos
8ª engrenagem	$\frac{1}{50^8}$	$5,427 \cdot 10^{-12}$ rpm	350.565 anos
9ª engrenagem	$\frac{1}{50^9}$	$1,085 \cdot 10^{-13}$ rpm	$1,753 \cdot 10^7$ anos
10ª engrenagem	$\frac{1}{50^{10}}$	$2,171 \cdot 10^{-15}$ rpm	$8,764 \cdot 10^8$ anos
11ª engrenagem	$\frac{1}{50^{11}}$	$4,342 \cdot 10^{-17}$ rpm	$4,382 \cdot 10^{10}$ anos
12ª engrenagem	$\frac{1}{50^{12}}$	$8,684 \cdot 10^{-19}$ rpm	$2,191 \cdot 10^{12}$ anos

Tabela 12 – Tabela da *Máquina com Concreto* completa.

(5) Para verficarmos essa afirmação, basta usarmos a equação 7.28 para $x = 12$. Assim:

$$R(12) = \frac{1}{1272} \cdot 50^{12} \cong 1,919 \cdot 10^{17}\ s/^{o} \cong 6,086 \cdot 10^{9}\ anos/grau,$$

ou seja, a cada 6 bilhões e 86 milhões de anos, aproximadamente, a 12ª engrenagem gira 1 grau.

7.2.8 **Proposta de Atividade 7**

Nesta seção mostraremos alguns exemplos de situações problemas que podem ser trabalhados com os alunos após eles terem vistos as caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas.

Atividade 7.25. Os exemplos desta atividade ajudaram os alunos a entenderam as propriedades e as principais carcterísiticas das funções exponenciais e logarítmicas.

Exemplo 7.26. Um velho conto chinês afirma que o inventor do jogo de xadrez pediu como remuneração para a sua criação tantos grãos de arroz quantos coubessem no tabuleiro do jogo, dispostos da seguinte maneira: na primeira casa seria colocado um grão, na 2ª casa o dobro, e assim por diante, em cada casa o dobro do número de grãos da casa anterior. A surpresa vem quando se convida o aluno a achar o resultado.

Dado: $\sum_{i=1}^{n} g_i = g_1 + g_2 + \ldots + g_n = \dfrac{g_1(q^n - 1)}{q - 1}$, onde os g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são os termos de uma PG finita de razão $q \neq 1$.

Proposta de solução comentada: Neste exemplo o aluno pode ver o crescimeto rápido da função exponencial, ou seja, pequenas variações na variável independente provocam grandes variações na variável dependente. Para resolver o problema, faremos uso, inicialmente, de uma tabela auxiliar que nos mostrará a quantidade de grãos de arroz contida em cada casa do tabuleiro do jogo de xadrez.

Casa do tabuleiro	Número de grãos de arroz
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
$\ldots$	$\ldots$
p	2^{p-1}
$\ldots$	$\ldots$
64	2^{63}

Tabela 13 – Tabela auxiliar com o número de grãos de arroz de acordo com a casa do tabuleiro de xadrez.

O total de grãos de arroz é dado pela soma dos elementos da 2ª coluna da tabela acima, ou seja, pela soma da quantidade de todos os grãos de arroz contidos em cada casa do tabuleiro de xadrez. Esta adição corresponde a soma de uma PG finita com 64 termos, razão $q = 2$ e primerio termo $g_1 = 1$. Assim:

$$\sum_{n=1}^{64} 2^{n-1} = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{63} = \frac{g_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Os alunos ao verem o resultado de $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$, um número de vinte dígitos, se surpreendem.

Para demonstração da fórmula $S_n = \dfrac{g_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, usada neste exemplo; onde S_n representa a soma dos n termos de uma PG finita, recomendamos que o leitor consulte o Anexo A.

Recomenda-se, também, que o leitor veja o Anexo B sobre como calcular 2^{64} sem um programa de computador e sem uma máquina de calcular e recorrendo a uma tábua de logarítmos.

Exemplo 7.27. A ideia do uso de logaritmos como ferramenta de cálculo pode ser ilustrada com o seguinte exercício: faz-se uma tabela das potências de 2, com expoentes variando de 1 até 20, e pede aos alunos que exercite as quatro operações:

a) 128×512

b) $4096 \div 256$

c) 512^2

d) $\sqrt[5]{32768}$

Proposta de solução comentada: Neste exemplo o aluno pode reconhecer a necessidade primeira dos logaritmos, uma ferramenta que facilita os cálculos. Quanto ao seu contexto histórico, o aluno entenderá que a necessidade de construção de tabelas mais precisas e em outras bases levou a confecção, logo após a descoberta dos logaritmos, de um grande número de tábuas de logaritmos, .

As soluções das letras de **a)** até **d)** são triviais. Mas, mesmo assim, mostraremos:

a)$128 \times 512 = 2^7 \times 2^9 = 2^{16} = 65.536$,

b) $4096 \div 256 = 2^{12} \div 2^8 = 2^4 = 16$,

c) $512^2 = (2^9)^2 = 2^{18} = 262.144$,

d) $\sqrt[5]{32768} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$,

e, com prática, chega-se a simplificação de expressões complicadas como:

$$\frac{64 \times \sqrt[4]{4096}}{\sqrt[6]{\left(256 \div \sqrt{1024}\right)^4}} = \frac{64 \times \sqrt[4]{2^{12}}}{\sqrt[3]{\left(2^8 \div \sqrt{2^{10}}\right)^2}} = \frac{2^6 \times 2^3}{\sqrt[3]{(2^8 \div 2^5)^2}} = \frac{2^9}{\sqrt[3]{(2^3)^2}} = \frac{2^9}{2^2} = 2^7 = 128.$$

Devido ao fato de não podermos calcular, por exemplo, 18^6 com o auxílio de "nossa tabela"(18 não está "tabelado"), ficará evidente para os alunos a vantagem de introduzir uma tabela que não tenha "espaços vazios"entre os números inteiros tabelados. Isso ajuda os alunos a entenderem o que já dissemos acima quanto a procura de tábuas de logaritmos cada vez mais precisas.

O problema dos "espaos vazios"nas tabelas, descrito acima, foi resolvido no século XVII, onde tendo-se experimentado várias bases no lugar de 2; J. Burgi publicou em 1620 uma tabela na base 1,0001, com 8 casas decimais.

Exemplo 7.28. Neste exemplo o aluno poderá ver e comparar o crescimento da função exponencial com o de uma função que ele já conhece, a função quadrática. Ambas de domínio e contradomínio reais. O aluno terá a chance de verificar que o rápido crescimento da função exponencial contrasta com o lento crescimento da função logarítmica. Este exemplo é adaptado de [2], p. 7-9.

O professor deverá colocar a tabela abaixo no quadro e pedir a um aluno que, com o auxílio de uma calculadora, complete-a. E, após isto, o aluno deve fazer comparações e tirar algumas conclusões a respeito do comportamento dessas duas funções quanto ao crescimento.

É importante salientar que todos os valores de x estão em cm e que, durante a execução dos cálculos, o professor deve ir fazendo comentários comparando o crescimento da função exponencial com o crescimento da função quadrática.

x (cm)	$y = x^2$	$y = e^x$
0		
3		
5		
10		
15		
20		
$30,3357$		
$41,39$		
$42,85$		

Tabela 14 – Alguns valores de x para as funções $y = x^2$ e $y = e^x$.

Proposta de solução comentada: Um aluno voluntário deve se dirigir ao quadro e, com o auxílio de uma calculadora, completar as linhas correspondentes às 2ª e 3ª colunas da tabela acima. Nos valores de x correspondentes a $30,3357$, $41,39$ e $42,85$ o professor deve dar uns dados interessantes aos valores que estes números representam para a função $y = e^x$. Estes dados estão explicitados na tabela abaixo, onde consideramos:
distância da Terra ao Sol = 149.500.000 km;
1 ano-luz = $946.728 \cdot 10^7$ km;
$4,3$ anos-luz = $407.093 \cdot 10^8$ km = distância da estrela mais próxima do Sol.

x (cm)	$y = x^2$	$y = e^x$
0	0	1 cm
3	9 cm	20 cm
5	25 cm	148 cm
10	100 cm	220 m
15	225 cm	33 km
20	400 cm	4852 km
$30,3357$	920 cm	distância da Terra ao Sol
$41,39$	1713 cm	1 ano-luz
$42,85$	1836 cm	$4,3$ anos-luz

Tabela 15 – Comparando os valores de $y = x^2$ e $y = e^x$.

Após o aluno completar a tabela, o professor poderá intervir e fazer os seguintes comentários.

Quando um aluno marcar 5 cm no eixo x, ele deverá marcar 25 cm no eixo y para a função $y = x^2$ e quase $1,5$ m no mesmo eixo y para a função $y = e^x$; quando o valor de x for 10 cm, o aluno terá que marcar, no eixo y, $x^2 = 100$ cm e $e^x = 220$ m, a altura de um prédio de mais de 70 andares. Quando x passa por volta de 30 cm e x^2 por volta de 9 m, e^x já está assumindo a distância da Terra ao Sol. E, quando x assumir mais ou menos 40 cm e x^2 estiver por volta de 17 m, e^x estará assumindo o valor de 1 ano-luz. Quando x estiver próximo de 42 cm, x^2 estará por volta de 18 m e e^x estará por volta de $4,3$ anos-luz, ou seja, a distância da estrela (Alfa Centauro) mais próxima de nós.

Assim, podemos ver que uma pequena variação em x, digamos de 5 cm para mais ou menos 42 cm, faz com a função $y = e^x$ passe de mais ou menos $1,5$ m para $4,3$ anos-luz. Esta é uma característica da função exponencial.

Em correspondência ao rápido crescimento da função exponencial está o vagaroso crescimento da função logarítmica. De fato, como estamos lidando com funções que são a inversa uma da outra, isto significa que, na tabela acima, a 3ª coluna representa os valores de x e a 1ª representa os correspondentes valores de $y = \ln x$. Assim, para conseguirmos subir 5 cm no eixo y é preciso fazer $x = 148$ cm; para subir 10 cm é preciso "andar"220 m na horizontal; para subir pouco mais de 40 cm é preciso "andar"1 ano-luz na horizontal.

Contrastando ao que comentamos para a função e^x, vemos que uma grande variação no eixo x, digamos de $x = 1,5$ m para x por volta de 1 ano-luz, faz com que a função $y = \ln x$ passe de 5 cm para mais ou menos 40 cm. Esta é uma carcterística da função logarítmica.

Exemplo 7.29. Neste exemplo o aluno terá a oportunidade de conhecer o método da prostaférese, o artifício usado pelos astrônomos antes da descoberta dos logarítmos. O exercício abaixo foi extraído da avaliação AV2/2012 da disciplina MA11 do PROFMAT, disponível em [26].

Dados números reais positivos x e y, ache α e β tais que

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta.$$

Em seguida mostre como (mediante o uso de uma tabela de funções trigonométricas) esta igualdade pode ser empregada para reduzir o produto de dois números reais positivos quaisquer às operações de soma e divisão por 2.

Proposta de solução: A fórmula do cosseno de uma soma, junto com a observação de que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$, nos dá:

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

e

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y,$$

logo, somando as duas equações acima, temos:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y.$$

Pondo $\alpha = x + y$ e $\beta = x - y$, obtemos a igualdade proposta.

Em seguida, se a e b são números reais positivos quaisquer, dados por suas expressões decimais, deslocando as vírgulas que separam suas partes inteiras (alteração que pode facilmente ser refeita no final), podemos supor que esses números são ambos compreendidos entre 0 e 1. A tabela nos dá x e y tais que $\cos x = a$ e $\cos y = b$. E a igualdade inicial fornece $ab = \cos x \cdot cosy = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$. Na prática, é preciso:
(i) tomar x e y pela tabela;
(ii) calcular $x + y$ e $x - y$;
(iii) obter seus cossenos, também pela tabela;
(iv) somar os cossenos e, por último,
(v) dividir por 2.

Exemplo 7.30. Observando o processo indicado na figura abaixo, onde a partir de um primeiro quadrado de lado 1 cm obtém-se um segundo quadrado, circunscrito ao primeiro, onde os vértices do 1º quadrado são os pontos médios dos lados do 2º. Continuando o processo descrito e sabendo que a = 8.000 km é o lado do quadrado que "cobre" o Brasil, pergunta-se: quantos quadrados são necessários para "cobrir" o Brasil?

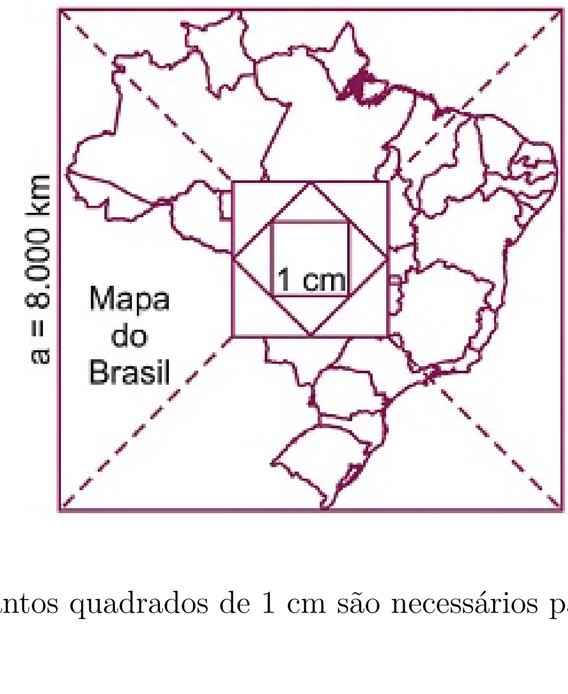

Figura 20 – Quantos quadrados de 1 cm são necessários para cobrir o Brasil?

Proposta de solução comentada: Recomenda-se que o professor deixe que os alunos estimem o resultado e suas estimativas são muito acima do resultado correto.

Os alunos devem chegar ao resultado por tentativas:

1º quadrado → 1 cm de lado,

3º quadrado → 2 cm de lado,

5º quadrado → 4 cm de lado,

....

59º quadrado → 536.870.912 cm ($= 2^{29}$),

61º quadrado → 1.073.741.824 cm ($= 2^{30}$).

Logo o 61º quadrado já tem lado maior que 800.000.000 cm que é igual 8.000 km. Como uma calculadora, sem função exponencial, não resolve o problema, temos uma motivação para tentar obter uma solução rápida e fácil (associo essa procura às biografias de grandes astrônomos e físicos que passaram vidas inteiras fazendo cálculos para obterem seus resultados) utilizando os logaritmos:

se n é ímpar da forma $n = 2k + 1$, então o n-ésimo quadrado tem $2^{\frac{n-1}{2}}$ cm de lado e queremos n de modo que $2^{\frac{n-1}{2}} = 800.000.000$ cm, logo

$$\log 2^{\frac{n-1}{2}} = \log 800.000.000$$
$$\frac{n-1}{2} \log 2 = \log 8 \cdot 10^8 = \log 2^3 + \log 10^8$$
$$\frac{n-1}{2} \cdot \log 2 = 3 \log 2 + 8$$
$$\left(\frac{n-1}{2} - 3\right) \log 2 = 8$$
$$\frac{n-1}{2} = \frac{8}{0,30103} + 3 \cong 29,58$$
$$n \cong 60,16$$

Portanto o 60º quadrado não cobre o Brasil mas o 61º quadrado, sim.

7.2.9 Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Após o professor ter realizado as **Propostoas de Atividades** de **1** até **7**, é oportuno que ele ofereça aos seus alunos alguns exemplos de aplicações. Os alunos terão a oportunidade de verificar que esses exemplos são modelados pelas funções logarítmicas e exponenciais porque estas funções se mostram o modelo matemático mais adequado, devido às suas caracterizações.

Neste momento, vale lembrar aos alunos que as funções exponenciais se mostram o modelo matemático mais adequado aos fenômenos nos quais quanto maior o valor da variável independente, maior o efeito que uma mudança no valor desta variável provoca sobre o valor da variável dependente. Como as funções logarítmicas são as inversas das funções exponenciais, aquelas se mostram o modelo matemático mais adequado aos fenômenos nos quais quanto maior o valor da variável independente, menor o efeito que uma mudança no valor desta variável provoca sobre o valor da variável dependente.

Nos exemplos propostos nesta seção faremos uma amostra de como a função exponencial e^x e a sua inversa $\ln x$ surgem espontaneamente em fenômenos matemáticos ou da vida real, onde a variação de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor desta grandeza num dado instante.

Nesta seção optamos por separar os exemplos por assunto referentes as suas aplicações e as propostas de soluções dos mesmos podem ser encontradas no Apêndice A.

Nos baseamos em [14] para escrever esta seção.

7.2.9.1 *Juros Contínuos*

Considere um capital C, empregado a uma taxa de k por cento ao ano. No fim de um ano, este capital rende juros no valor de $\frac{kC}{100}$. Ponhamos $\alpha = k/100$. Então C renderá juros de αC, ao final de um ano. Decorrido um ano, o capital torna-se igual a $C_1 = C + \alpha C = C(1+\alpha)$. Passados dois anos, o novo capital $C_1 = C(1+\alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se-á igual a $C_1(1+\alpha) = C(1+\alpha)^2$. Em t anos, teremos $C(1+\alpha)^t$.

Se tomarmos uma fração $1/n$ de ano, o capital C, empregado à mesma taxa de juros, deverá render $\frac{\alpha C}{n}$ de juros, de modo que, decorrida a fração $1/n$ de ano, o capital C transforma-se em $C_1 = C + \frac{\alpha C}{n} = C\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$.

Empregando este novo capital C_1 e esperando mais $1/n$ de ano, iremos obter $C_1\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) = C\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2$.

Prosseguindo assim, vemos que, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $1/n$ de ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, quando chegar o fim do ano, em vez de $C(1+\alpha)$, obteremos um capital maior, ou seja, possuiremos $C\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Se desejarmos que os juros sejam capitalizados (isto é, acrescentados ao capital) a cada instante, no fim do ano, o investidor receberá, em troca de seu investimento C, o total de

$$\lim_{x\to\infty} C\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = Ce^{\alpha}.$$

O tipo de transação exemplicada acima, em que os juros são capitalizados continuamente, recebe o nome de *juros contínuos*.

O exemplo a seguir é baseado em [20], p. 10-11.

Exemplo 7.31. Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1 real a juros de 100% ao ano. No final do ano, essa pessoa viria pagar-me e traria 2 reais: 1 que tomara emprestado e 1 dos juros. Isto seria justo? Justifique!

O exemplo acima pode ser ilustrado com um exercício complementar onde o professsor pode pedir para os alunos construirem, com o auxílio de uma planilha eletrônica, uma tabela de valores, onde os juros são capitalizados continuamente. Esta planilha ajudará os alunos a perceberem intuitivamente o processo de aproximação destes juros contínuos pelo número e. Segue, abaixo, o referido exemplo, extraído de [12],p. 31.

Exemplo 7.32. Em uma planilha eletrônica, considere as colunas **A**, **B** e **C**. Nessas colunas realize as seguintes operações:
1) Na coluna **A**, digite nas células **A1**, **A2**, **A3**, **A4,** **A5**, **A6**, **A7**, **A8**, **A9** e **A10**, respectivamente, os valores 1, 2, 3, 4, 6, 12, 365, 8760, 525.600 e 31.536.000.
2) Digite **= 1 + 1/A1** na célula **B1** e **= B1 ∧ A1** na céllula **C1**.
3) Arraste as células **B1** e **C1**, ao longo das colunas **B** e **C**, até o final dos valores digitados na coluna **A**.

Na coluna **C** estamos calculando $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ para n igual a cada um dos valores digitados na coluna **A**. O que você observa nestes cálculos? Como explicar que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ aproxima-se de um número real à medida que n aumenta?

7.2.9.2 *Desintegração Radioativa*

Os átomos de uma substância radioativa possuem uma tendência natural a se desintegrarem. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui. Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante.

Cada substância radioativa possui sua própria constante de proporcionalidade α, sendo que esta é determinada experimentalmente.

Frente ao que foi exposto no texto acima, vemos que o modelo matemático mais adequado para modelar o fenômeno da desintegração radioativa é o modelo exponencial; pois, a característica deste fenômeno natural, onde a quantidade de matéria que se desintegra é proporcional à massa da substância original presente naquele instante, é uma característica da função exponencial e/ou de tipo exponencial.

Senso assim, considere um corpo de massa M_0, formada por uma substância radioatica cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processasse instantaneamente, no fim de cada segundo, sendo M_0 a massa no tempo $t = 0$, decorrido o tempo $t = 1$

segundo, haveria uma perda de αM_0 unidades de massa, restando apenas a massa

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1-\alpha).$$

Decorridos 2 segundos, a massa restante seria

$$M_2 = M_1(1-\alpha) = M_0(1-\alpha)^2.$$

Passados k segundos, restaria a massa $M_t = M_0(1-\alpha)^k$.

Como a desintegração se processa continuamente, procuraremos uma aproximação melhor para o fenômeno. Fixemos um inteiro $n > 0$ e imaginemos que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ de segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo a massa do corpo se reduziria a

$$M_0 - \left(\frac{\alpha}{n}\right) M_0 = M_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Decorrido 1 segundo, teriam ocorrido n desintegrações instantâneas e, efetuadas as n reduções, restaria do corpo a massa $M_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n$. Dividindo o intervalo $[0,\, 1]$ em um número cada vez maior de partes iguais, chegaremos à conclusão de que, ao final de 1 segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$\lim_{x\to\infty} M_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Se quisermos calcular a massa ao fim de t segundos, deveremos dividir o intervalo $[0,\, t]$ em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda de massa será $M_0 \cdot \frac{\alpha t}{n}$. Repetindo o argumento acima chegaremos à expressão

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Exemplo 7.33. Um osso de animal pré-histórico apresenta $1/10$ da quantidade inicial de C^{14} de um osso atual. Quando morreu aquele animal?

Dado: meia-vida do $C^{14} = 5600$ *anos.*

7.2.9.3 *Crescimento Populacional*

O aumento ou diminuição de uma população de uma certa comunidade num instante t é proporcional a população presente neste instante. Como esta é uma característca de uma função de tipo exponencial, podemos modelar o crescimento populacional por meio desta função.

Analogamente ao que demonstramos nos dois itens acima e considerando $P(t)$ a população de uma certa comunidade num tempo t, P_0 a sua população inicial, ou seja, a população para $t = 0$ e α a constante de proporcionalidade, temos que:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{\alpha t}. \tag{7.29}$$

Se $\alpha < 0$ a população irá diminuir com o passar do tempo e se $\alpha > 0$ a população crescerá no decorrer do tempo.

Exemplo 7.34. A população de uma cidade era de 750.000 habitantes no fim de 1950 e 900.000 no fim de 1960. Que população pode-se prever no final do ano de 1970? Quando se espera que a população atinja 1.500.000?

7.2.9.4 *Resfriamento de um Corpo*

Uma situação análoga à da desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio. Como o corpo tem massa muito menor do que a do ambiente que o contém, não afeta a temperatura deste meio. A lei do resfriamento de Newton afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, esta lei se traduz matematicamente assim: chamando D_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ a diferença num instante t qualquer, tem-se $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$ onde a constante α depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

Assim, sendo $T(t)$ a temperatura do objeto num instante t, T_m a temperatura do meio que contém o objeto e $T(0)$ a temperatura inicial do objeto em questão, temos:

$$D(t) = T(t) - T_m,$$

$$D_0 = T(0) - T_m.$$

Exemplo 7.35. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $34,8^o$. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou $34,1^o$. A temperatura do quarto era mantida constante a 20^o. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5^o$.

7.2.9.5 *Concentração de uma Solução*

A concentração de uma solução também é um fenômeno cuja característica permite que ela seja modelada por uma função de tipo exponencial. Vale ressaltar, que a eliminação de algumas substâncias na corrente sanguínea se comportam de maneira análoga. O exemplo abaixo, extraído da avaliação AV3/2011 da dsiciplina MA11 do PROFMAT, disponível em [26], nos ajudará a entender melhor este fenômeno.

Exemplo 7.36. Um reservatório contém uma mistura de água com sal (uma salmoura), que se mantém homogênea graças a um misturador. Num certo momento, são abertas duas torneiras, com igual capacidade. Uma despeja água no reservatório e a outra escoa.

Após 8 horas de funcionamento, verifica-se que a quantidade de sal na salmoura reduziu-se a 80% do que era antes que as torneiras fossem abertas. Que porcentagem do sal inicial permanecerá na salmoura após 24 horas de abertura das torneiras?

7.2.9.6 *A Escala Richter*

A Escala Richter é um exemplo interessante do crescimento logarítmico. Este será exemplicado no exercício abaixo, extraído de [9], unidade 15, p. 11.

Exemplo 7.37. Em algumas situações para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas escalas logarítmicas do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da escala Richter de terremotos. Na escala Richter, a intensidade I, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

Em que E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh, sendo que $E_0 = 10^{-3}$ kWh.
(a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?
(b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau $(k + 1)$ na escala Richter?

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procuramos defender a ideia de que um curso de logaritmos, no Ensino Médio, deve ser feito por meio de situações problemas. Podemos encontrar esta mesma orientação nos Parâmentros Curriculares Nacionais [7], quando em um de seus parágrafos lemos:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Mostramos as aplicações dos logaritmos por meio de situações problemas e as propriedades principais da função logarítmica e de sua inversa, a exponencial. Caracterizamos tais funções e propomos atividades que exemplificam tais caracterizações.

Frente ao que expomos acima, defendemos que o ensino de logaritmos e das funções exponenciais e logarítmicas deve ser focado em aplicações e contextualizações e não como acontece em muitos livros didáticos onde priorizam o cálculo algébrico e o uso de fórmulas prontas que não levam o aluno a entender o modo como uma grandeza esta variando. A grande maioria dos livros didáticos para o Ensino Médio não trazem as caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas, não mostrando assim aos alunos o porquê do uso do modelo exponencial ou logarítmico para determinada situação.

Uma ideia importante que propomos neste trabalho é o ensino das progressões aritméticas e geométricas antes do ensino de logaritmos. Entendemos que esta ordem é importante para o aluno poder entender a ideia principal dos logaritmos: transformar produto em soma. Ajudará, também, nas ideias que virão como consequências desta, como os teoremas de caracterizações e propriedades da função logarítmica e exponencial, esta última com a principal característica de transformar soma em produto. Nesta temática, propomos atividades importantes, em 7.2, que ajudarão os alunos a entenderem as ideias principais dos logaritmos.

Quanto ao ensino de progressões aritméticas e geométricas antes do assunto logaritmos, esta é pouco adotada porque a maioria dos livros didáticos inclui o assunto progressões após logaritmos. Segundo reportagem da revista [27]: "se um autor inclui PA e PG antes dos logaritmos, seu livro vende menos."Assim, a grande maioria dos professores ensinam os conteúdos seguindo o livro didático.

Por meio de atividades propostas, no capítulo 7, apresentamos as propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, sempre priorizando o uso de situações problemas e procurando mostrar que a função exponencial ou logarítmica apresenta-se como o modelo matemático mais adequado devido as suas caracterizações; evitando recorrer ao uso de fórmulas prontas, sem explicar o motivo de seu uso. Explicitamos, também, que a função e^x se mostra um importante modelo matemático para os fenômenos da natureza e do cotidiano e; fizemos uso de uma planilha eletrônica para ilustrar o aparecimento natural da importante constante e em um fenômeno do cotidiano.

É importante destacar que o ensino de logaritmos como mero instrumento de cálculo é uma página da história. Com o advento das potentes e baratas calculadoras portáteis, este uso dos logaritmos não faz sentido.

O ensino dos logaritmos porém nunca perderá o seu valor porque as variações exponenciais e logarítmicas modelam fenômenos onde o crescimento ou decrescimento de uma grandeza são proporcionais ao valor desta grandeza num dado momento. Sendo assim, um estudo das propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a exponencial, sempre será uma importante parte do Ensino de Matemática.

Ao término deste trabalho, não pudemos aplicá-lo devido o assunto logaritmo ser abordado no meio do ano letivo. Assim, como proposta de trabalho futuro, podemos indicar a aplicação das atividades prevista no capítulo 7 e posterior análise quanto ao seu impacto no aprendizado dos alunos ao assunto aqui proposto.

Para a análise mencionada acima, sugerimos que pelo menos cinco professores apliquem o curso de logaritmos segundo a visão deste trabalho e após, por meio de entrevistas e questionários, podemos fazer um levantamento das opiniões dos docentes sobre o curso oferecido. Neste levantamento, deve-se ter como foco principal a possível melhora no aprendizado dos alunos frente aos cursos tradicionais.

Caracterizar as funções logarítmicas e exponenciais e expor as noções de progressões aritméticas e geométricas ainda no 1º ano do Ensino Médio não é uma ideia muito comum, mas acredito fortalecer bastante o entendimento das propriedades da função logarítmica e exponencial. Esta crença se baseia na experiência dos professores do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM), órgão do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), que foram os entrevistados para a reportagem da revista [27].

Sugerimos, também, a análise e comparação dos exercícios sobre função logarítmica e exponencial do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) com as atividades aqui propostas, verificando se estas possuem caracteristicas semelhantes com os exercícios cobrados no referido Exame.

REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de Logaritmos. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 26, n. 26, p. 01-07, 2º sem. 1994.

[2] ÁVILA, G. Números muito grandes. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 25, n. 25, p. 01-09, 1º sem. 1994.

[3] ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável.*, v.1, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2007.

[4] BOYCE, W.E.; DIPRIMA,R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2006.

[5] BOYER, C.B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

[6] BRASIL. SEMTEC/MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.

[7] BRASIL. SEMTEC/MEC. *PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

[8] *BrOffice.* Disponível em <http://ultradownloads.com.br/download/BrOfficeorg/>. Acesso em 08 mar. 2014.

[9] Coleção PROFMAT. *Apostila disciplina MA11: Números, conjuntos e funções elementares.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[10] FRAENKEL, R. Logaritmos - Um curso alternativo. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 04, n. 04, p. 16-20, 1º sem. 1984.

[11] *Geogebra.* Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt.BR>. Acesso em 05 fev. 2014.

[12] GIRALDO, V.; MATTOS, F.; CAETANO, P. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[13] HOWARD, E. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[14] LIMA, E.L. *Logaritmos.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[15] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER,E.; MORGADO,A.C. *A Matemática do Ensino Médio.*, v. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

[16] LIMA, E.L. *Análise Real.*, v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (CNPq), 1997.

[17] LIMA, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[18] LIMA, E.L. Conceitos e Controvérsias – Números negativos têm logaritmo? *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 3, n. 3, p. 20-24, set. 1983.

[19] LIMA, E.L. Sistemas de Logaritmos. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 18, n. 18, p. 24-31, 1º sem. 1991.

[20] LIMA, E.L. Conceitos e Controvérsias – O números "*e*"; por quê? *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 2, n. 2, p. 10-12, 1º sem. 1983.

[21] LIMA, E.L. Sobre a Evolução de algumas ideias matemáticas – Logaritmos. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 6, n. 6, p. 01-02, 1º sem. 1985.

[22] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER,E.; MORGADO,A.C. *A Matemática do Ensino Médio.*, v. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

[23] MAOR, Eli. *e: A história de um número.* Rio de Janeiro: Record, 2004.

[24] *Maxima.* Disponível em <http://www.maxima.sourceforge.net>. Acesso em 02 mar. 2014.

[25] MUNEM, M.A.; FOULIS, D.J.; *Cálculo.*, v.1 Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Cinetíficos, 1982.

[26] *Provas Nacionais do PROFMAT.* Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/memoria/provas>. Acesso: 09 mar. 2014.

[27] SIMÕES, M.; SÔNEGO, D.; Como Estudar e Ensinar Logaritmos? A coisa sem sentido tem sentido há séculos. *Cálculo: Matemática para Todos.* São Paulo, v. 33, n. 33, p. 42-54, out. 2013.

[28] SIMÕES, M. Nada que é Humano é Eterno. *Cálculo: Matemática para Todos.* São Paulo, v. 31, n. 31, p. 58-61, ago. 2013.

[29] *Tábua de Logaritmos Decimais.* Disponível em <www.matematicadidatica.com.br>. Acesso em 23 mar 2014.

[30] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais.*, v. 1. São Paulo: Makron Books, 2001.

APÊNDICE A – Resolução dos Exemplos de Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Apresentaremos abaixo as resoluções dos exemplos de aplicação propostos na seção 7.2.9, intitulada **Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas**.

Resolução do Exemplo 7.31: A resposta para a pergunta realizada é que não seria justo. Nas linhas que seguem daremos a justificativa desta resposta.

O justo seria que eu recebesse e reais. Vejamos por quê. Há um entendimento tácito nessas transações de que os juros são proporcionais ao capital emprestado e ao tempo decorrido entre o empréstimo e o pagamento.

Assim, se meu cliente viesse me pagar seis meses depois do empréstimo, eu receberia apenas $1\frac{1}{2}$ reais. Mas isto quer dizer que, naquela ocasião, ele estava com $1\frac{1}{2}$ real meu e ficou com esse dinheiro mais seis meses, à taxa de 100% ao ano; logo deveria pagar-me $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ reais no fim do ano

Isto me daria $2,25$ reais, mas, mesmo assim, eu não acharia justo. Eu poderia dividir o ano num número arbitrário n de partes iguais. Transcorrido o primeiro período de $\frac{1 \text{ ano}}{n}$, meu capital emprestado estaria valendo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ reais. No fim do segundo período de $\frac{1 \text{ ano}}{n}$, eu estaria com $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ reais, e assim por diante. No fim do ano eu deveria receber $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ reais. Mas, como eu posso fazer esse raciocínio para todo n, segue-se que o justo e exato valor que eu deveria receber pelo meu real emprestado seria $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ reais.

Resolução do Exemplo 7.32: Após realizar as operações descritas em *1)*, *2)* e *3)*, temos a planilha abaixo, confeccionada com o software de uso livre citado em [8].

	A	B	C
1	1	2	2
2	2	1,5	2,25
3	3	1,333333	2,37037
4	4	1,25	2,441406
5	6	1,166667	2,521626
6	12	1,083333	2,613035
7	365	1,00274	2,714567
8	8760	1,000114	2,718127
9	525600	1,000002	2,718279
10	31536000	1	2,718282

Figura 21 – Planilha com os valores das colunas **A**, **B** e **C** calculados.

Após já termos resolvido o exemplo 7.31, o entendimento deste exemplo fica mais fácil e completa a ideia daquele. Podemos pensar que, na coluna **C**, temos os montantes de uma quantia inicial C_0 aplicada na caderneta de poupança a uma taxa de rendimento de 100% ao ano sendo que este montante varia de acordo com os valores dados pela coluna **A**, ou seja, nesta coluna temos o prazo de capitalização no período de um ano: uma vez ao ano (anual) , duas vezes ao ano (semestral), entre outros. Explicaremos, nas linhas abaixo, os valores encontrados pelo software na confecção da planilha.

Portanto, após um ano:

i) para $\mathbf{A1} = 1$, temos uma capitalização anual e $\mathbf{C1} = \left(1 + \dfrac{1}{1}\right)^1 C_0 = 2 \cdot C_0$,

ii) para $\mathbf{A2} = 2$, temos uma capitalização semestral e $\mathbf{C2} = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 C_0 = 2,25 \cdot C_0$,

iii) para $\mathbf{A3} = 3$, temos uma capitalização quadrimestral e $\mathbf{C3} = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^3 C_0 \cong 2,37 \cdot C_0$,

iv) para $\mathbf{A4} = 4$, temos uma capitalização trimestral e $\mathbf{C4} = \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)^4 C_0 \cong 2,441 \cdot C_0$,

v) para $\mathbf{A5} = 6$, temos uma capitalização bimestral e $\mathbf{C5} = \left(1 + \dfrac{1}{6}\right)^6 C_0 \cong 2,522 \cdot C_0$,

vi) para $\mathbf{A6} = 12$, temos uma capitalização mensal e $\mathbf{C6} = \left(1 + \dfrac{1}{12}\right)^{12} C_0 \cong 2,613 \cdot C_0$,

vii)para $\mathbf{A7} = 365$, temos uma capitalização diária e $\mathbf{C7} = \left(1 + \dfrac{1}{365}\right)^{365} C_0 \cong 2,715 \cdot C_0$.

Não existe no mercado financeiro aplicações com prazo inferior a um dia. Mas, hipoteticamente, poderíamos pensar, por exemplo, em capitalização horária ($365 \times 24 = = 8.760$ vezes ao ano), minuto a minuto ($8.760 \times 60 = 525.600$ vezes ao ano) ou segundo a segundo ($525.600 \times 60 = 31.536.000$ vezes ao ano). Assim, continuando os cálculos acima, teríamos:

viii) **A8**, capitalização horária e $\mathbf{C8} = \left(1 + \dfrac{1}{8.760}\right)^{8.760} C_0 \cong 2,718127 \cdot C_0$,

ix) **A9**, capitalização minuto a minuto e $\mathbf{C9} = \left(1 + \dfrac{1}{525.600}\right)^{525.600} C_0 \cong 2,718279 \cdot C_0$,

e, finalmente:

$$\mathbf{C10} = \left(1 + \frac{1}{31.536.000}\right)^{31.536.000} C_0 \cong 2,718282 \cdot C_0 \cong e \cdot C_0,$$

pois **A10** está representanto uma capitalização de segundo a segundo, ou seja, num curto intervalo de tempo, fazendo com o capital inicial seja capitalizado várias vezes ao ano.

Mesmo se pudéssemos diminuir ainda mais o prazo de capitalização e aumentarmos, consequentemente, o número de vezes que o capital inicial é capitalizado durante o ano, sabemos que este capital não aumenta ilimitadamente. Percebemos, intuitivamente, que as três últimas linhas da coluna **C** se aproximam do número de Euler. Se pudéssemos fazer os valores de A1 (valores de n) tendenrem ao infinto, o fator que multiplica o capital C_0 em C1, representado por $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, tenderia a constante e, pois:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Resolução do Exemplo 7.33: Sejam:
M_0 = quantidade incial de C^{14} presente no osso,
$M(t)$ = massa remanescente de C^{14} presente no osso após um período de tempo t,
α = constante de proporcionalidade do C^{14}.
Sabemos que

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}. \tag{A.1}$$

Considere t_1 o tempo decorrido para que o osso apresente $\frac{1}{10}M_0$, assim temos que $M(t_1) = \frac{1}{10}M_0$, donde:

$$\begin{aligned} M(t_1) &= M_0 \cdot e^{-\alpha t_1}, \\ \frac{1}{10}M_0 &= M_0 \cdot e^{-\alpha t_1}, \\ \frac{1}{10} &= e^{-\alpha t_1}. \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos, temos:

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{10} &= -\alpha t_1, \\ -\ln 10 &= -\alpha t_1, \\ \ln 10 &= \alpha t_1. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Como foi dado que a meia-vida do C^{14} é de 5600 anos e que a meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância, temos que $M(5600) = \frac{M_0}{2}$.
Assim para $t = 5600$ em A.1, temos:

$$\begin{aligned} M(5600) &= M_0 \cdot e^{-5600\alpha} \\ \frac{M_0}{2} &= M_0 \cdot e^{-5600\alpha} \\ \frac{1}{2} &= e^{-5600\alpha}. \end{aligned}$$

Tomando logaritmos, temos:

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{2} &= -5600\alpha \\ \ln 2 &= 5600\alpha \\ \alpha &= \frac{\ln 2}{5600} \cong 1,237763 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Substituindo este valor de α em A.2, temos:

$$\ln 10 \cong 1,237763 \cdot 10^{-4}\, t_1$$

$$t_1 \cong 1,86 \cdot 10^4 = 18.600 \text{ anos}.$$

Resolução do Exemplo 7.34: Seja P_0 a população dessa cidade em 1950, logo $P_0 = 750.000$. Como sabemos que $P(t) = P_0 \cdot e^{\alpha t}$ e considerando que em 1960 temos $t = 10$, vem:

$$P(10) = 900.000 = 750.000 \cdot e^{10\alpha}$$

$$1,2 = e^{10\alpha}$$

$$\ln 1,2 = 10\alpha$$

$$\alpha = \frac{\ln 1,2}{10} \cong 0,01823.$$

Logo,

$$P(t) = 750.000 \cdot e^{0,01823t}. \tag{A.3}$$

Em 1970, temos $t = 20$ e sua população é dada por:

$$P(20) = 750.000 \cdot e^{[(0,01823)\cdot 20]}$$

$$P(20) \cong 1.079.953 \text{ habitantes.}$$

Portanto, a população em 1970 é de, aproximadadmente, 1.079.953 habitantes.

Quanto ao tempo necessário para que a população seja de 1.500.000 habitantes, temos da equação A.3 que:

$$P(t) = 1.500.000 = 750.000 \cdot e^{0,01823t}$$

$$2 = e^{0,01823t}$$

$$\ln 2 = 0,01823t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,01823} \cong 38 \text{ anos.}$$

Então a população será de 1.500.000 habitantes, 38 anos após 1960, ou seja, em 1998.

Resolução do Exemplo 7.35: Seja t o tempo transcorrido, em horas, a partir do momento da morte. Temos que $T_m = 20^o$ e $T(0) = 36,5^o$, daí: $D_0 = 36,5^o - 20^o = 16,5^o$. Usando este valor de D_0 e sabendo que $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$, vem:

$$D(t) = 16,5^o \cdot e^{-\alpha t}. \tag{A.4}$$

Considere t_1 o tempo transcorrido deste a morte da vítima até às 23:30 horas, logo: $T(t_1) = 34,8^o$ e, consequentemente, $D(t_1) = T(t_1) - T_m = 34,8^o - 20^o = 14,8^o$. Então, da equação A.4:

$$\begin{aligned} D(t_1) &= 16,5^{\text{o}} \cdot e^{-\alpha t_1} \\ 14,8^{\text{o}} &= 16,5^{\text{o}} \cdot e^{-\alpha t_1} \\ 0,89697 &\cong e^{-\alpha t_1} \\ \ln 0,89697 &\cong -\alpha t_1 \\ \alpha t_1 &\cong 0,10873. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Uma hora depois das 23:30 horas, temos $t = t_1 + 1$, daí $T(t_1 + 1) = 34,1^{\text{o}}$. Assim $D(t_1 + 1) = T(t_1 + 1) - T_m = 34,1^{\text{o}} - 20^{\text{o}} = 14,1^{\text{o}}$. Substituindo este valor em A.4, vem:

$$\begin{aligned} D(t_1+1) &= 16,5^{\text{o}} \cdot e^{-\alpha(t_1+1)} \\ 14,1^{\text{o}} &= 16,5^{\text{o}} \cdot e^{-\alpha t_1 - \alpha} \\ 0,85455 &\cong e^{-\alpha t_1 - \alpha} \\ \ln 0,85455 &\cong -\alpha t_1 - \alpha \\ \alpha &\cong -\alpha t_1 - \ln 0,85455 \\ \alpha &\cong -\alpha t_1 + 0,15718. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Substituindo A.5 em A.6, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong -0,10873 + 0,15718 \\ \alpha &\cong 0,04845. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Da equação A.5, obtemos:

$$\begin{aligned} t_1 &\cong \frac{0,10873}{\alpha} = \frac{0,10873}{0,04845} \\ t_1 &\cong 2,24417 \text{ horas} \cong 2 \text{ horas e } 15 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Portanto, a morte da vítima ocorreu, aproximadamente, 2 horas e 15 minutos antes das 23:30 horas, ou seja, às 21:15 horas.

Resolução do Exemplo 7.36: Seja M_0 a massa de sal existente no início da operação. Decorrido o tempo t, essa massa seria $M(t) = M_0 \cdot a^t$, onde $0 < a < 1$, porque é uma função de tipo exponencial decrescente. Isto se justifica porque, sendo a salmoura da torneira de saída uma amostra da salmoura do tanque, supostamente homogênea, a quantidade de sal que sai por unidade de tempo é proporcional à quantidade de sal no tanque, e isto é o que caracteriza a função de tipo exponencial.

De acordo com os dados do problema, temos:

$$\begin{aligned} M(8) &= M_0 \cdot a^8 = 0,8 \cdot M_0 \\ a^8 &= 0,8. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Após 24 horas, temos:

$$\begin{aligned} M(24) &= M_0 \cdot a^{24} \\ M(24) &= M_0 \cdot (a^8)^3. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Substituindo A.8 em A.9, temos:

$$M(24) = M_0 \cdot (0,8)^3 = 0,512 \cdot M_0 = 51,2\% \cdot M_0.$$

Portanto, após 24 horas de abertura das torneiras, temos $51,2\%$ do sal inicial da salmoura.

Resolução do Exemplo 7.37: No enunciado do exemplo foi dado que $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$ e que $E_0 = 10^{-3}$ kWh. Assim:

(a) para $I = 3$, temos:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \\ \frac{9}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \\ 10^{\frac{9}{2}} &= \frac{E}{10^{-3}} \\ 10^{-3} \cdot 10^{\frac{9}{2}} &= E \\ E &= 10^{\frac{3}{2}} \\ E &= 10\sqrt{10} \text{ kWh.} \end{aligned}$$

para $I = 9$, temos:

$$\begin{aligned} 9 &= \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \\ \frac{27}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \\ 10^{\frac{27}{2}} &= \frac{E}{10^{-3}} \\ 10^{-3} \cdot 10^{\frac{27}{2}} &= E \\ E &= 10^{\frac{21}{2}} \\ E &= 10^{10}\sqrt{10} \text{ kWh.} \end{aligned}$$

(b) Considere E_k a energia liberada por um terremoto de grau k, daí:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_k}{E_0}\right), \\ \frac{3k}{2} &= \log E_k - \log E_0. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Agora seja $E_{(k+1)}$ a energia liberada por um terremoto de grau $(k+1)$, daí:

$$\begin{aligned} k+1 &= \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_{(k+1)}}{E_0}\right), \\ \frac{3(k+1)}{2} &= \log E_{(k+1)} - \log E_0. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Subtraindo A.10 de A.11, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{3(k+1)}{2} - \frac{3k}{2} &= \log E_{(k+1)} - \log E_0 - (\log E_k - \log E_0) \\
\frac{3}{2} &= \log E_{(k+1)} - \log E_k \\
\frac{3}{2} &= \log \left(\frac{E_{(k+1)}}{E_k} \right) \\
\frac{E_{(k+1)}}{E_k} &= 10^{\frac{3}{2}} \\
\frac{E_{(k+1)}}{E_k} &= 10\sqrt{10}. \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Assim podemos ver que, neste exemplo, o aumento de 1 grau na intensidade I de um terremoto faz com que a sua energia liberada E fique multiplicada por $10\sqrt{10}$.

ANEXO A – Fórmula da Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica

A demonstração aqui explicitada foi baseada em [22], p. 28.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (g_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = \dfrac{g_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Demonstração. $S_n = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_{n-1} + g_n$.

Multiplicando por q, obtemos:

$qS_n = g_2 + g_3 + g_4 + \ldots + g_n + g_{n+1}$.

Subtraindo, $S_n - qS_n = g_1 - g_{n+1}$,

isto é, $S_n(1 - q) = g_1 - g_1 q^n$

e, finalmente, $S_n = \dfrac{g_1(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{g_1(q^n - 1)}{q - 1}$. $\square$

ANEXO B – Como calcular 2^{64}?

A escrita do texto a seguir é baseada em [2], p. 4-5.

Hoje em dia é muito fácil calcular 2^{64}. Basta recorrermos a uma calculadora científica ou a um programa de computador, digamos, por exemplo o **Maxima** [24].

Mas, e quando não havia computador? Bem, se fosse há uns 300 anos, eles poderiam recorrer aos logaritmos.

Para efetuar cálculos com a ajuda dos logaritmos, primeiro é preciso dispor de uma tábua dos logaritmos dos números num certo intervalo. Por exemplo, uma tábua dos logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 10.000 já é suficiente para muitos cálculos. Como exemplo, tentemos calcular o número 2^{64}.

Consultando uma tábua de logaritmos decimais, encontramos $\log 2 \cong 0,30103$. Assim: $\log 2^{64} = 64 \times \log 2 \cong 64 \times 0,30103 = 19,26592$. Deste resultado e sabendo que $\log 10^n = n$, podemos concluir: $10^{19} < 2^{64} < 10^{20}$.

Como já vimos na seção 4.5.1, o logaritmo de um número pode sempre ser escrito como a soma de um número inteiro chamado característica e uma parte decimal m tal que $0 \leq m < 1$, chamada mantissa. No caso do número a calcular, 19 é a característica e $0,26592$ é a mantissa de seu logaritmo. As tábuas só dão os valores das mantissas. Mas, ao consultarmos uma tábua, nem sempre encontramos, na coluna dos logaritmos, a mantissa desejada. No caso deste exemplo, ao consultar a tábua, verificamos que o logaritmo $0,26592$ está compreendido entre dois outros que lá se encontram; mais precisamente: $\log 1,844 = 0,26576$ e $\log 1,845 = 0,26600$.

Como o número que possui o logaritmo igual a $0,26592$ não está explícito na tábua, temos que fazer uma interpolação para determiná-lo. Vamos aos cálculos:

$$\frac{\log 1,845 - \log 1,844}{1,845 - 1,844} = \frac{y - \log 1,844}{x - 1,844},$$

onde consideramos $0,26592 = y = \log x$,

$$\frac{0,26600 - 0,26576}{0,001} = \frac{0,26592 - 0,26576}{x - 1,844}$$

$$\frac{0,00024}{0,001} = \frac{0,00016}{x - 1,844}$$

$$0,24 = \frac{0,00016}{x - 1,844}$$

$$24 = \frac{0,016}{x - 1,844}$$

$$24x - 44,256 = 0,016$$

$$x = \frac{44,272}{24} = 1,844666\ldots$$

Como $0,26592 \cong \log 1,844666...$ temos que $\log(1,844666... \times 10^{19}) \cong 19,26592$; e assim segue que $2^{64} \cong 1,844666... \times 10^{19} \cong 18.446.666.666.666.666.666$.

Comparando este valor aproximado com o valor exato calculado anteriormente no exemplo 7.26, verificamos que o erro relativo é inferior a 10^{-5}. Podemos concluir, portanto, que o valor aproximado é muito bom.

ANEXO C – Tábua de Logaritmos Decimais

Neste anexo apresentaremos uma tábua de logaritmos decimas dos números de duas casas decimais, desde 1 até $9,99$. Os valores das mantissas são indicados com 6 algarismos decimais. A tábua em questão está representada pelas figuras 22 e 23, sendo extraída de [29] (com adaptações).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898
29	462398	463893	465383	466868	468347	469822	471292	472756	474216	475671
30	477121	478566	480007	481443	482874	484300	485721	487138	488551	489958
31	491362	492760	494155	495544	496930	498311	499687	501059	502427	503791
32	505150	506505	507856	509203	510545	511883	513218	514548	515874	517196
33	518514	519828	521138	522444	523746	525045	526339	527630	528917	530200
34	531479	532754	534026	535294	536558	537819	539076	540329	541579	542825
35	544068	545307	546543	547775	549003	550228	551450	552668	553883	555094
36	556303	557507	558709	559907	561101	562293	563481	564666	565848	567026
37	568202	569374	570543	571709	572872	574031	575188	576341	577492	578639
38	579784	580925	582063	583199	584331	585461	586587	587711	588832	589950
39	591065	592177	593286	594393	595496	596597	597695	598791	599883	600973
40	602060	603144	604226	605305	606381	607455	608526	609594	610660	611723
41	612784	613842	614897	615950	617000	618048	619093	620136	621176	622214
42	623249	624282	625312	626340	627366	628389	629410	630428	631444	632457
43	633468	634477	635484	636488	637490	638489	639486	640481	641474	642465
44	643453	644439	645422	646404	647383	648360	649335	650308	651278	652246
45	653213	654177	655138	656098	657056	658011	658965	659916	660865	661813
46	662758	663701	664642	665581	666518	667453	668386	669317	670246	671173
47	672098	673021	673942	674861	675778	676694	677607	678518	679428	680336
48	681241	682145	683047	683947	684845	685742	686636	687529	688420	689309
49	690196	691081	691965	692847	693727	694605	695482	696356	697229	698101
50	698970	699838	700704	701568	702431	703291	704151	705008	705864	706718
51	707570	708421	709270	710117	710963	711807	712650	713491	714330	715167
52	716003	716838	717671	718502	719331	720159	720986	721811	722634	723456
53	724276	725095	725912	726727	727541	728354	729165	729974	730782	731589
54	732394	733197	733999	734800	735599	736397	737193	737987	738781	739572

Figura 22 – Mantissa dos logaritmos decimais dos números 100 a 549.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	740363	741152	741939	742725	743510	744293	745075	745855	746634	747412
56	748188	748963	749736	750508	751279	752048	752816	753583	754348	755112
57	755875	756636	757396	758155	758912	759668	760422	761176	761928	762679
58	763428	764176	764923	765669	766413	767156	767898	768638	769377	770115
59	770852	771587	772322	773055	773786	774517	775246	775974	776701	777427
60	778151	778874	779596	780317	781037	781755	782473	783189	783904	784617
61	785330	786041	786751	787460	788168	788875	789581	790285	790988	791691
62	792392	793092	793790	794488	795185	795880	796574	797268	797960	798651
63	799341	800029	800717	801404	802089	802774	803457	804139	804821	805501
64	806180	806858	807535	808211	808886	809560	810233	810904	811575	812245
65	812913	813581	814248	814913	815578	816241	816904	817565	818226	818885
66	819544	820201	820858	821514	822168	822822	823474	824126	824776	825426
67	826075	826723	827369	828015	828660	829304	829947	830589	831230	831870
68	832509	833147	833784	834421	835056	835691	836324	836957	837588	838219
69	838849	839478	840106	840733	841359	841985	842609	843233	843855	844477
70	845098	845718	846337	846955	847573	848189	848805	849419	850033	850646
71	851258	851870	852480	853090	853698	854306	854913	855519	856124	856729
72	857332	857935	858537	859138	859739	860338	860937	861534	862131	862728
73	863323	863917	864511	865104	865696	866287	866878	867467	868056	868644
74	869232	869818	870404	870989	871573	872156	872739	873321	873902	874482
75	875061	875640	876218	876795	877371	877947	878522	879096	879669	880242
76	880814	881385	881955	882525	883093	883661	884229	884795	885361	885926
77	886491	887054	887617	888179	888741	889302	889862	890421	890980	891537
78	892095	892651	893207	893762	894316	894870	895423	895975	896526	897077
79	897627	898176	898725	899273	899821	900367	900913	901458	902003	902547
80	903090	903633	904174	904716	905256	905796	906335	906874	907411	907949
81	908485	909021	909556	910091	910624	911158	911690	912222	912753	913284
82	913814	914343	914872	915400	915927	916454	916980	917506	918030	918555
83	919078	919601	920123	920645	921166	921686	922206	922725	923244	923762
84	924279	924796	925312	925828	926342	926857	927370	927883	928396	928908
85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565

Figura 23 – Mantissa dos logaritmos decimais dos números 550 a 999.