

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Mestrado Acadêmico em Matemática

William da Silva Pedretti

Intermitência e Análise das Taxas de Mixing e Scaling

Juiz de Fora

2014

William da Silva Pedretti

Intermitência e Análise das Taxas de Mixing e Scaling

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Sistemas Dinâmicos, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2014

Pedretti, William da Silva.

Intermitência e Análise das Taxas de Mixing e Scaling / William da Silva Pedretti.

2014. 61 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática)—Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

1. Introdução. 2. Preliminares. 3. Sequências de Renovação e Intermitência. 4. Mixing e Scaling. I. Título.

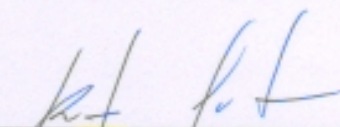
WILLIAM DA SILVA PEDRETTI

INTERMITÊNCIA E ANÁLISE DAS TAXAS DE MIXING E SCALING

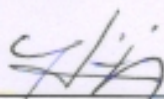
Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



Prof. Dr. Rogério Casagrande
Mestrado Acadêmico em Matemática
UFJF



Profa. Dña. Maria José Pacífico
IM - UFRJ

Juiz de Fora, 28 de março de 2014

A minha família que sempre esteve presente, principalmente nos momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, e poder desfrutá-la.

Agradeço a meus pais pelo apoio incondicional durante todos os anos de minha vida acadêmica, principalmente nos momentos difíceis. Meu pai João e minha mãe Rosângela deram-me muita força e sempre incentivaram-me a seguir em frente, acreditar em mim mesmo e persistir na realização de meus sonhos. Mesmo longe, sempre pude contar com eles, com meu irmão Ulisses e de forma mais geral, com toda minha família, especialmente com meus avós: José, Francisca e Maria, no qual sempre estive presente em suas orações inclusive na de minhas tias: Carmem, Daniela, Raquel, Rosemeire e Rosilda. O apoio dessa família e de outros familiares não citados foram fundamentais para a realização do mestrado ter sido tão gratificante.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, especialmente a meu Orientador Prof. Regis Castijos Alves Soares Junior, primeiramente por ter aceitado o papel de orientador, pela dedicação, paciência, incentivos, por todos ensinamentos compartilhados durante a confecção da dissertação e das dúvidas que surgiram durante os estudos. Suas críticas e sugestões foram de grande importância, no que diz respeito, à aprendizagem e de minha formação como pesquisador.

Gostaria de agradecer a Prof^a Maria José Pacífico e o Prof. Rogério Casagrande, por terem participado da banca examinadora e pelas sugestões e críticas que ajudaram a melhorar ainda mais este trabalho.

Com grande carinho, gostaria de agradecer a Lélia Riani. Pela paciência em alguns momentos e por ter sido tão importante na reta final do mestrado. Seu apoio e incentivos foram fundamentais para mim.

Agradeço a meus amigos pelo apoio e força em todos os momentos partilhados, especialmente os amigos do mestrado: Ceili, Gisele, Marianna, Wilker, Rafael e Yamashita. Eles foram minha segunda família durante este período longe de casa.

Agradeço a todos funcionários que contribuíram de forma direta ou indiretamente para minha formação.

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que permitiu concluir os estudos durante o mestrado satisfatoriamente.

RESUMO

Desde o trabalho de Pomeau e Maneville [27] o estudo de intermitência vem ocorrendo cada vez mais ao longo dos anos. Gaspard e Wang [17] introduziram uma função geradora de sequências de renovação decorrentes da distribuição de tempos de retorno, e a partir disto vários trabalhos vêm sendo desenvolvidos nesse ambiente, devido às ricas propriedades que possuem.

Neste trabalho estaremos interessados em obter uma estimativa polinomial exata para o comportamento assintótico da taxa de mixing quando a medida invariante é finita e da taxa de scaling quando a medida é infinita, ambos casos abordados por Isola [20]. Para isto analisaremos o comportamento assintótico dos coeficientes da série de Taylor obtidos da função geradora da sequência de renovação. Esta série define uma função holomorfa no disco aberto unitário que converge em todo ponto exceto para $z = 1$, onde possui uma singularidade não-polar.

Palavras-chave: Intermitência. Taxa de Mixing. Taxa de Scaling.

ABSTRACT

Since the work of Pomeau and Maneville [27] the study of intermittency has been happening increasingly over the years. Gaspard and Wang [17] introduced a generating function of renewal sequences arising from the distribution of return times, and from this several studies have been developed in this environment due to the rich properties they have.

In this work we are interested to obtain an exact polynomial estimate for the asymptotic behavior of the mixing rate when the invariant measure is finite and of the scaling rate when the measure is infinite, both cases addressed by Isola [20]. For this we analyze the asymptotic behavior of the coefficients of the Taylor series obtained from the generating function of the renewal sequence. This series defines a holomorphic function in the unit open disk and it converges at every point except for $z = 1$ where it has a non-polar singularity.

Key-words: Intermittency. Mixing Rate. Scaling Rate.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	INTRODUÇÃO HISTÓRICA	10
1.2	APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS RESULTADOS	11
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	MEDIDA E INTEGRAÇÃO	14
2.1.1	Conceitos de Topologia Geral	14
2.1.2	Álgebras e σ -álgebras de conjuntos	15
2.1.3	Espaços de Medida	16
2.1.4	Funções Integráveis	18
2.1.5	Convergência em Medida	20
2.2	PROBABILIDADE	21
2.3	APLICAÇÕES DE MARKOV	23
2.3.1	Recorrência e Periodicidade	24
2.4	CONCEITOS DE TEORIA ERGÓDICA	25
2.4.1	Mixing	27
2.5	DINÂMICA SIMBÓLICA	28
2.6	TEOREMA TAUBERIANO	28
3	SEQUÊNCIAS DE RENOVAÇÃO E INTERMITÊNCIA	30
3.1	CONSTRUÇÃO DO NOSSO PROBLEMA	30

3.2	A CADEIA ENUMERÁVEL DE MARKOV	33
3.3	MEDIDA INVARIANTE E TEMPOS DE RETORNO	35
3.4	A FUNÇÃO GERADORA DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE RE- TORNO	39
3.5	FUNÇÃO GERADORA DA SEQUÊNCIA DE RENOVAÇÃO	41
4	MIXING E SCALING	51
4.1	TAXA DE MIXING	51
4.2	TAXA DE SCALING	57
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

No estudo de sistemas dinâmicos, intermitência é a alternância irregular de fases que são aparentemente periódicas e de dinâmica caótica, ou de diferentes formas de dinâmica (intermitência induzida pela crise). Neste cenário destacamos a dinâmica de "Pomeau-Manneville", caracterizada por fazer a transição para o caos, devido a intermitência. Pomeau e Manneville descreveu três tipos de intermitências, nos quais um sistema quase periódico tem explosões de caos. Os modelos (tipo I, II e III) correspondem uma abordagem à bifurcação tipo sela-nó, à bifurcação Hopf, e uma bifurcação de duplicação de período. O modelo tipo I é uma bifurcação local, onde dois pontos fixos ou pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico colidem e se anulam mutuamente. Este modelo é bastante estudado por ter soluções caóticas para determinados valores de parâmetros e condições iniciais, exemplo disto é a intermitência no modelo de Lorenz estudadas por Pomeau e Manneville [27]. O modelo tipo II consiste no aparecimento ou desaparecimento de uma órbita periódica através de uma alteração local nas propriedades de estabilidade de um ponto fixo. Já o modelo tipo III consiste numa bifurcação, no qual o sistema muda para um novo comportamento com o dobro do período do sistema original, ou seja, existem dois pontos de tal forma que a aplicação dinâmica de cada um deles produz outro ponto. Para mais detalhes veja Kuznetsov [23] e Pomeau e Manneville [27].

Em nosso trabalho, estudaremos o modelo de intermitência tipo I apresentados por Pomeau e Manneville [27], onde consideraram uma classe de aplicações suaves f definidas no intervalo fechado $[0, 1]$, aplicados em si mesmo. Estas aplicações são expansoras em toda parte exceto para um ponto fixo neutro na origem e determinam um caso mais simples de sistemas dinâmicos caóticos com comportamento estatístico anômalo. Aaronson [2] verificou que estes tipos de aplicações podem possuir uma medida invariante não normalizável que é σ -finita, feitas por Thaler [32] para transformações em $[0, 1]$ e posteriormente por Campanino e Isola [4] para transformações expansoras definidas neste

mesmo intervalo; ou então podem deixar uma medida de probabilidade invariante possuir uma taxa polinomial de decaimento de correlações, feitas por Isola [19]. Posteriormente Liverani [24] e Young [35] fizeram outras observações destas propriedades para intermitência e de uma forma mais geral, no formalismo termodinâmico, estas aplicações podem apresentar transições de fases e funções zeta-dinâmicas com singularidades não polares cujos trabalhos de Prellberg [28], Lopes [25], Gallavotti [16] e Isola [20], respectivamente, retratam este tipo de ambiente com mais detalhes.

Para o nosso caso, consideramos uma família a um parâmetro de transformações de intervalos intermitentes e linearizados, que foram introduzidas por Gaspard e Wang [17] e posteriormente somente por Wang [34], visto que suas propriedades estatísticas equivalem a de uma cadeia de Markov com espaço de estado enumerável, tratadas por Fisher [14] e sucessivamente por Gallavotti [16] para o modelo de mecânica estatística.

O objetivo deste texto é estudar a função geradora de sequências de renovação, sendo que essas são decorrentes da distribuição de tempos de retorno dadas a partir de regiões onde a aplicação é uniformemente expansora. Um dos resultados que teremos é que este tipo de aplicação define um holomorfismo no disco unitário exceto no ponto $z = 1$ onde tem uma singularidade não-polar. Além disso esta aplicação possui uma série de potências onde podemos avaliar o comportamento assintótico de seus coeficientes.

Por fim, mostraremos que a taxa de decaimento de correlações ou então que o comportamento assintótico da taxa de mixing possui um valor exato e não somente estimativas superiores ou inferiores para a taxa quando a medida invariante σ -finita e absolutamente contínua é finita. Além disso, também mostraremos que o comportamento assintótico da taxa de scaling possui um valor exato para a taxa, porém para uma medida invariante σ -finita que não é normalizável por ser infinita. Esses resultados estão enunciados de maneira mais precisa na próxima seção.

1.2 APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Estamos interessados em analisar o comportamento assintótico das Taxas de Mixing e Scaling quando o valor M , definido na Seção 3.3, é finito ou infinito. Para o primeiro caso, dada uma medida μ , definimos a taxa de Mixing $\mu_n(E)$ de um conjunto E como:

$$\mu_n(E) := \frac{\mu(E \cap f^{-n}(E)) - (\mu(E))^2}{(\mu(E))^2},$$

e além disso, definimos $\mu_n(f)$ como sendo a velocidade de decaimento assintótico das sequências $\{\mu_n(E)\}$ com $E \in B^+$. A partir do Teorema 3.5.2 que nos dá o comportamento assintótico dos coeficientes da série de Taylor da função $\phi(z)$ definida na Seção 3.5, obtemos o

Teorema A. *Se $M < \infty$ então $\mu_n(f) = G_1 n^{1-(1/s)}$, onde G_1 é uma constante que depende de parâmetros da aplicação f .*

Já quando M é infinito, dada uma medida ν , definimos a taxa de Scaling $\sigma_n(E)$ de um conjunto E como

$$\sigma_n(E) := \frac{\nu(E \cap f^{-n}(E))}{(\nu(E))^2},$$

e além disso, definimos $\sigma_n(f)$ como sendo a taxa de decaimento assintótico das sequências $\{\sigma_n(E)\}$ com $E \in B^+$. Assim, novamente pelo Teorema 3.5.2, obtemos o

Teorema B. *Se $M = \infty$, temos que*

$$\sigma_n(f) = \begin{cases} G_2 n^{-1+\frac{1}{s}}, & \text{se } s > 1, \\ \frac{1}{\log n}, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

onde G_2 é uma constante que também depende de parâmetros da aplicação f .

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos resultados gerais da Teoria da Medida e Integração, Probabilidade, Aplicações de Markov, Conceitos de Teoria Ergódica, Dinâmica Simbólica e o Teorema Tauberiano que serão necessários para as provas no decorrer deste trabalho. Nestes ressaltamos o Teorema Tauberiano para séries de potências (Teorema 2.5) obtidos por Feller [12] e o Teorema 3.5.1 que serão de extrema importância para a prova do Teorema 3.5.2.

No Capítulo 3 damos início a Construção do nosso problema (feita em Isola [20]) que é obtida a partir de uma transformação suave de intervalo intermitente $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que são expansoras em toda parte exceto para um ponto fixo neutro na origem. Este tipo de transformação consiste no modelo de intermitência tipo 1 de Pomeau e Manneville [27] que nos fornece um exemplo mais simples de sistemas dinâmicos caóticos com comportamento estatístico anômalo. Além disso, neste capítulo contém a prova do Teorema 3.5.2 que esta baseada no comportamento assintótico dos coeficientes da série de Taylor.

No Capítulo 4 definimos as Taxas de Mixing e de Scaling, apresentando o Teorema A e Teorema B, onde analisamos o comportamento assintótico das taxas no caso em que a medida invariante é finita e infinita, respectivamente, sendo que a prova desses teoremas segue como consequência da construção do nosso problema juntamente com o Teorema 3.5.2.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e ferramentas básicas para que possamos ter um melhor entendimento do nosso trabalho. Na Seção 2.1 apresentaremos conceitos de Medida e Integração, no qual, são fundamentais para a construção que faremos. Na Seção 2.2 apresentamos uma introdução a teoria da Probabilidade e conceitos como densidade de probabilidade, valor esperado e processo estocástico. Na Seção 2.3 abordamos a cadeia de Markov, no qual, fazemos uma analogia na Seção 3.2. Na Seção 2.5 trazemos alguns resultados da Dinâmica Simbólica, cuja construção será realizada na Seção 3.2 e usada na Seção 3.3. Por fim, na Seção 2.6 discutimos sobre o teorema Tauberiano e apresentamos o Teorema 2.5 que será usado na prova do Teorema 3.5.2.

2.1 MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Apresentamos nesta seção, alguns resultados clássicos da teoria da medida. Para mais detalhes veja Bartle [3], Royden [30] e Rudin [31].

Dado um conjunto $A \subset X$, denotaremos por $A^c = X \setminus A$, o complementar de A em relação a X .

2.1.1 Conceitos de Topologia Geral

Definição 2.1.1. Sejam X um conjunto qualquer e $P(X)$ o conjunto das partes de X . Uma *topologia* em X é uma família $\Gamma \subset P(X)$ que têm as seguintes propriedades:

- T1. Os elementos \emptyset e X pertencem a Γ .
- T2. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Gamma$ sempre que $U_\alpha \in \Gamma$, para todo $\alpha \in I$.
- T3. Se U_1 e $U_2 \in \Gamma$ então $U_1 \cap U_2 \in \Gamma$.

Definição 2.1.2. Um *espaço topológico* é um par (X, Γ) , onde X é um conjunto e Γ uma topologia em X . Dizemos ainda que $U \subset X$ é *aberto* se $U \in \Gamma$.

2.1.2 Álgebras e σ -álgebras de conjuntos

Definição 2.1.3. Seja X um conjunto. Uma *álgebra* de conjuntos em X é uma família não vazia $\mathbb{A} \subset P(X)$ com as seguintes propriedades:

A1. $E \cup F \in \mathbb{A}$ sempre que $E, F \in \mathbb{A}$.

A2. $E^c \in \mathbb{A}$ sempre que $E \in \mathbb{A}$.

Proposição: 2.1.4. Se \mathbb{A} é uma álgebra em X , então:

1. os elementos \emptyset e X pertencem a \mathbb{A} .

2. Se $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathbb{A}$ e $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathbb{A}$.

Demonstração.

1. Se E e E^c pertencem a \mathbb{A} então podemos escrever $X = E \cup E^c \in \mathbb{A}$ e assim $X^c = \emptyset \in \mathbb{A}$.

2. Se $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathbb{A}$, pois a união finita de elementos de \mathbb{A} está em \mathbb{A} por indução, além disso a união finita de seus complementares E_i^c também está e $\bigcap_{i=1}^n E_i = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c \right)^c \in \mathbb{A}$. □

Exemplos:

1. Se X é um conjunto e $E \subset X$, então: $P(X), \{\emptyset, X\}, \{\emptyset, E, E^c, X\}$ são álgebras.

2. Seja \mathbb{A} o conjunto de todas as uniões finitas de intervalos da forma: $(a, b], (-\infty, b]$ e $(a, +\infty)$. Então \mathbb{A} é uma álgebra em \mathbb{R} .

Definição 2.1.5. Seja X um conjunto. Uma σ -álgebra Σ em X é uma álgebra com a seguinte propriedade:

A3. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$ se $E_i \in \Sigma$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$.

Proposição: 2.1.6. Se (E_i) é uma sequência em Σ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$.

Demonstração. Note que $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c \right)^c \in \Sigma$, já que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$. \square

Exemplos:

1. Se X é um conjunto e $E \subset X$ então $\{\emptyset, X\}, P(X), \{\emptyset, E, E^c, X\}$ são σ -álgebras.
2. Se F é uma família de σ -álgebras em X então a interseção dos elementos dessa família $\bigcap F$ é uma σ -álgebra em X .

Definição 2.1.7. Seja $S \subset P(X)$. A menor σ -álgebra que contém S é chamada de σ -álgebra gerada por S , denotada por $\Sigma(S)$.

Definição 2.1.8. Seja (X, Γ) um espaço topológico. A σ -álgebra $\Sigma(\Gamma)$ é chamada σ -álgebra de Borel em X , denotada por \mathbb{B}_X .

Observação 2.1.9. Note que \mathbb{B}_X é também gerado por fechados e contém todos os abertos, fechados, união enumerável de fechados, interseção enumerável de abertos.

Definição 2.1.10. Um *espaço mensurável* é uma par (X, Σ) , onde X é um conjunto e Σ uma σ -álgebra em X . Os conjuntos em Σ são chamados *conjuntos mensuráveis*. Além disso se (X, Σ_1) e (Y, Σ_2) são espaços mensuráveis, dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é *mensurável* se $f^{-1}(E) \in \Sigma_1$ para todo $E \in \Sigma_2$.

2.1.3 Espaços de Medida

Definição 2.1.11. Sejam X um conjunto e Σ uma σ -álgebra em X . Uma *medida* em (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ com as seguintes propriedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Se (E_i) é uma sequência disjunta em Σ então $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$
(chamada σ -aditiva).

Denotaremos por (X, Σ, μ) o espaço de medida.

Observação 2.1.12. Se $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{A}$ são conjuntos disjuntos, então

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i).$$

Definição 2.1.13. Dizemos que uma medida μ em (X, Σ) é:

- **finita.** Se $\mu(E) < \infty$ para todo conjunto $E \in \Sigma$. Em particular se $\mu(X) = 1$, μ é chamado de *medida de probabilidade* em X .

- **σ -finita.** Se existe uma sequência (E_i) em Σ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.14. Seja X um espaço topológico. Uma medida μ de Borel em X é uma medida definida em \mathbb{B}_X .

Exemplos:

1. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\Sigma = P(\mathbb{N})$. Defina

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ +\infty, & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Temos que μ é uma medida σ -finita e, além disso, definida desta forma, é chamada de “medida de contagem”.

2. Sejam X um conjunto não-vazio e $\Sigma = P(X)$. Dado qualquer $p \in X$, consideremos a função $\delta_p : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ dada por:

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in A, \\ 0, & \text{se } p \notin A. \end{cases}$$

A medida δ_p é medida de probabilidade e usualmente é designada como sendo a *medida de Dirac* no ponto p .

Definição 2.1.15. Dizemos que um espaço de medida (X, Σ, μ) é *completo* (ou que μ é uma medida completa) se para todo $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ e $F \subset N$ implicar que $F \in \Sigma$.

Definição 2.1.16. Seja X um conjunto não vazio. Uma *medida exterior* em X é uma função $\lambda : P(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$.
2. $\lambda(E) \leq \lambda(F)$, se $E \subset F$.
3. Se (E_i) é uma sequência de subconjuntos de X então

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

(chamada de σ -subaditiva).

Observação 2.1.17. Note que se $E \subset X$, então para todo $A \subset X$, $\lambda(A) \leq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c)$, pois $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$.

Teorema: 2.1.18. (Teorema da Extensão de Carathéodory). Seja λ uma medida exterior em X . Definimos

$$\Sigma_\lambda := \{A \subset X; \lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \text{ para todo } E \subset X\}.$$

Então Σ_λ é uma σ -álgebra de conjuntos de X gerado pela medida exterior λ . Defina $m : \Sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ por $m(A) := \lambda(A)$ para $A \in \Sigma_\lambda$. Então (X, Σ_λ, m) é um espaço de medida completo.

Definição 2.1.19. A medida m obtida pela aplicação do Teorema 2.1.18 com respeito a medida exterior λ é chamada de *medida de Lebesgue em \mathbb{R}* . Dizemos que $E \subset \mathbb{R}$ é λ -*mensurável* (ou *Lebesgue mensurável* ou *mensurável*) se para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c)$, no qual estes são chamados *conjuntos de Lebesgue* ou *Lebesgue mensurável*.

De forma mais geral, podemos definir a medida m de Lebesgue em \mathbb{R}^n . Seja $A \in \mathbb{R}^n$, no qual, A é o produto cartesiano de n intervalos $\{x_i \in \mathbb{R} : -\infty < a_i < x_i \leq b_i \leq +\infty\}$, definimos a medida do conjunto A como:

$$m(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Observação 2.1.20. A medida de Lebesgue é a generalização padrão dos conceitos de comprimento na reta, área no plano e volume no espaço; onde é definida para uma ampla família de subconjuntos do \mathbb{R}^n , cuja família é uma σ -álgebra e contém os conjuntos abertos e conjuntos fechados.

Definição 2.1.21. Uma *medida com sinal* em (X, Σ) é uma função $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ com as seguintes propriedades:

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. ν assume no máximo um dos valores $-\infty$ ou $+\infty$.
3. $\nu\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ para qualquer sequência disjunta $(E_i) \subset \Sigma$.

Além disso, se a função $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ satisfaz (1) e (3), dizemos que é uma *medida positiva*.

Observação 2.1.22. Toda medida positiva é uma medida com sinal.

Definição 2.1.23. Sejam μ uma medida positiva e ν uma medida com sinal ambas definidas em (X, Σ) . Dizemos que ν é *absolutamente contínua* em relação a μ se $\nu(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$.

Definição 2.1.24. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dados $A, B \subseteq X$, dizemos que $A = B \pmod{\mu}$ se $\mu(A \Delta B) = 0$, ou seja, $\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$.

2.1.4 Funções Integráveis

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida positiva fixado. Além disso, definimos a função característica de um conjunto $E \subset X$ dada por:

$$1_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Definição 2.1.25. Uma *função simples* $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é a combinação linear de funções características de conjuntos mensuráveis, ou seja, se a_1, \dots, a_n são valores distintos de uma função simples φ , e se definirmos $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$, então sua representação padrão é $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, onde 1_{A_i} é a função característica de $A_i \in \Sigma$.

Definição 2.1.26. Se φ é uma função simples mensurável em X , da forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i},$$

com α 's distintos dois a dois e se $E \in \Sigma$, definimos

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Note que a convenção $0 \cdot \infty = 0$ é adotada aqui e pode acontecer que $\alpha_i = 0$ para algum i e que $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ é mensurável e $E \in \Sigma$, definimos

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E \varphi d\mu,$$

sendo o supremo tomado sobre todas as funções simples mensuráveis φ tais que $0 \leq \varphi \leq f$.

Definição 2.1.27. Dado $E \in \Sigma$ e $f = f^+ - f^-$ com $\int f^+ d\mu < \infty$ ou $\int f^- d\mu < \infty$ onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Além disso dizemos que f é *integrável* em E se $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ são finitas.

Denotemos por $M(\Sigma)$ o espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, Σ -mensuráveis e $L(\mu, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f \in M(\Sigma)$ que são integráveis.

Para cada $p \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , consideremos $\mathbb{L}_p(\mu)$ definido por:

$$\mathbb{L}_p(\mu) = \{f \in M(\Sigma) \text{ tal que } \int |f|^p d\mu < \infty\}.$$

No qual a sua norma $\|\cdot\|$ é definida por:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, diremos que $\mathbb{L}_\infty(\mu)$ é o espaço das funções tais que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para quase todo ponto (q.t.p) $x \in X$. Denotamos por

$$\mathbb{L}_\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; \text{ existe um } M > 0; \mu(\{x; f(x) > M\}) = 0\}.$$

No qual a sua norma $\|\cdot\|_\infty$ é dada por:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0; \mu(\{x; f(x) > M\}) = 0\}.$$

Seja \mathbb{P} uma partição com respeito a medida μ de um espaço de probabilidades (X, Σ, μ) , isto é

- Se A_i e A_j pertencem a \mathbb{P} com $i \neq j$ então temos que $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, ou seja,
$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{A_i \in \mathbb{P}} A_i\right) = 0.$$

Definição 2.1.28. Chamamos de *densidade de probabilidade* a uma função $\rho \in \mathbb{L}_1(\mu)$ tal que $\rho \geq 0$ e $\|\rho\| = 1$, no qual, ρ induz uma medida de probabilidade ν_ρ dada por:

$$0 \leq \nu_\rho(A) := \int_A \rho d\mu \leq 1 \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

Definição 2.1.29. Dizemos que uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ para todo } \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1 \text{ e para todo } a < x < y < b.$$

Além disso f é dita *côncava* se $(-f)$ é convexa em (a, b) .

2.1.5 Convergência em Medida

Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis definida de X em \mathbb{C} .

Definição 2.1.30. Dizemos que:

- A sequência (f_n) converge *quase uniformemente* para f se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $E_\varepsilon \in \Sigma$ com $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $X - E_\varepsilon$.
- A sequência (f_n) converge *q.t.p* para f se existe um $M \subset X$ com $\mu(M) = 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in X \setminus M$ existe um $N(\varepsilon, x)$ tal que $n \geq N(\varepsilon, x)$ implica $|f_n - f| < \varepsilon$.

Definição 2.1.31. Sejam (X, Σ, m) um espaço de medida, p_n e p probabilidades em X . A probabilidade p_n converge *fracamente* para p se

$$\int_X f dp_n \rightarrow \int_X f dp,$$

para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e limitada. (Notação: $p_n \xrightarrow{\text{frac}} p$).

Seja (Y, Σ, m) um espaço de probabilidade, e suponhamos que $g : Y \rightarrow X$ é uma função mensurável. A distribuição de g é a medida de probabilidade em X dada por:

$$m \circ g^{-1}(\Sigma) = m(\{y \in Y : g(y) \in \Sigma\}).$$

A função mensurável $g_n : Y \rightarrow X$ converge em distribuição para a função mensurável g com distribuição p_g se $m \circ g_n^{-1} \xrightarrow{\text{frac}} p_g$.

2.2 PROBABILIDADE

Em teoria da probabilidade, um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias, onde muitas vezes é usado para representar a evolução de algum valor aleatório ou sistema, ao longo do tempo, sendo que em vez de descrever um processo que só pode evoluir de um modo (como é o caso, por exemplo, de soluções de uma equação diferencial), ele permite algumas indeterminações, pelo fato que mesmo sabendo a condição inicial (ou ponto de partida), existem uma infinidade de direções em que o processo pode evoluir. No caso simples de tempo discreto, um processo estocástico equivale a uma sequência de variáveis aleatórias, conhecidos como uma série de tempo (por exemplo, a cadeia de Markov, que será vista na Seção 2.3). Um outro tipo de base de um processo estocástico é um campo aleatório, cujo domínio é uma região do espaço. Em outras palavras, uma função aleatória cujos argumentos são extraídos a partir de um intervalo de valores que mudam constantemente (tempo contínuo). Uma abordagem para processos estocásticos é tratá-los como funções de um ou de vários argumentos deterministas (entradas, na maioria dos casos considerados como tempo) cujos valores são variáveis aleatórias: quantidades não-deterministas que têm certas distribuições de probabilidade.

Nesta seção abordaremos processos estocásticos e a distribuição de probabilidade, sendo que essa atribui uma probabilidade a cada subconjunto mensurável dos resultados possíveis de um experimento aleatório. Exemplos disto são encontrados em experimentos cujo espaço amostral é não-numérico, onde a distribuição é uma distribuição categórica; experimentos cujo espaço amostral é codificada por distintas variáveis aleatórias, onde a distribuição pode ser especificada por uma função de massa de probabilidade (caso discreto); e experimentos com espaços amostrais codificados por variáveis aleatórias contínuas, no qual a distribuição pode ser especificadas por uma função de densidade de probabilidade (caso contínuo). Experimentos mais complexos, como os que envolvem processos estocásticos definidos no tempo contínuo, pode exigir o uso de medidas de probabilidade mais gerais. Para mais detalhes veja Chung [7], Feller [11] e [13], e Knill [21].

Seja (Ω, Σ, P) um espaço de probabilidade. Se $A \in \Sigma$, interpretaremos $P(A)$ como a "probabilidade de ocorrer o evento A ".

Exemplo: Escolhendo um número real aleatório no intervalo $[0, 2]$, tomamos $\Omega = [0, 2]$ e Σ é a σ -álgebra de Borel de $[0, 2]$. A probabilidade de um intervalo $[a, b] \subset [0, 2]$ é

$$P([a, b]) = \frac{b - a}{2}.$$

Definição 2.2.1. Uma *variável aleatória* é uma aplicação $\bar{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Σ -mensurável,

dada pelo evento $\overline{X}(\omega)$, que vale para todo ω pertencente a Ω . A condição de mensurabilidade significa que dado dois números reais $a \leq b$, o conjunto de todos os resultados de ω que satisfaz $a \leq \overline{X}(\omega) \leq b$ é um evento. Denotaremos este evento por $\{a \leq \overline{X} \leq b\}$ ao invés de $\{\omega \in \Omega : a \leq \overline{X}(\omega) \leq b\}$.

Observação 2.2.2. Note que:

- a variável aleatória define uma σ -álgebra $\{\overline{X}^{-1}(A), A \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathbb{A}$, chamada σ -álgebra gerada por \overline{X} .
- a variável aleatória define uma medida de probabilidade na σ -álgebra de Borel $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ dada por $P_{\overline{X}} = P \circ \overline{X}^{-1}$, isto é,

$$P_{\overline{X}}(A) = P(\overline{X}^{-1}(A)) = P(\{\omega : \overline{X}(\omega) \in A\}).$$

Definição 2.2.3. A medida de probabilidade $P_{\overline{X}}$ definida acima é dita *distribuição* de \overline{X} . Além disso, dizemos que uma variável aleatória \overline{X} tem uma *densidade de probabilidade* $f_{\overline{X}}$ se $f_{\overline{X}}(x)$ é uma função não-negativa em \mathbb{R} e mensurável com respeito a σ -álgebra de Borel, tal que

$$P\{a < \overline{X} < b\} = \int_a^b f_{\overline{X}}(x)dx,$$

para todo $a < b$.

Observação 2.2.4. Note que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{X}}(x)dx = 1$ e assim, dizemos que variáveis aleatórias são *absolutamente contínuas* se admitem uma densidade de probabilidade.

Definição 2.2.5. Dizemos que uma variável aleatória \overline{X} é *discreta* se ela assume uma quantidade finita ou uma quantidade enumerável de diferentes valores x_k . Variáveis aleatórias discretas não têm densidades e sua lei é caracterizada pela função de probabilidade:

$$p_k = P(\overline{X} = x_k).$$

Exemplo: A função característica de um conjunto E , dada por

$$1_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in E, \\ 0, & \text{se } \omega \notin E. \end{cases}$$

pode ser vista como uma variável aleatória de um espaço de probabilidade. A lei de probabilidade é chamada de *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p = P(E)$.

Definição 2.2.6. A função $F_{\overline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$F_{\overline{X}}(x) = P(\overline{X} \leq x) = P_{\overline{X}}((-\infty, x]),$$

é dita *função de distribuição* da variável aleatória \overline{X} .

Observação 2.2.7. A função de distribuição $F_{\overline{X}}$ é não-decrescente, contínua a direita e com

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\overline{X}}(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\bar{X}}(x) = 1.$$

Observação 2.2.8. Se a variável aleatória \bar{X} é absolutamente contínua com densidade $f_{\bar{X}}$, então

$$F_{\bar{X}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\bar{X}}(y) dy,$$

e se, além disso, a densidade é contínua, então $F'_{\bar{X}}(x) = f_{\bar{X}}(x)$.

Definição 2.2.9. Definimos o *valor esperado* ou *esperança matemática* de uma variável aleatória \bar{X} , como sendo a integral de \bar{X} com respeito a medida de probabilidade P , dada por:

$$E(\bar{X}) = \int_{\Omega} \bar{X} dP.$$

Um caso particular da definição acima, é quando \bar{X} é uma variável discreta que toma valores x_1, x_2, \dots em A_1, A_2, \dots , respectivamente. Então temos que neste caso o valor esperado é dada pela série infinita

$$E(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k), \quad (2.1)$$

desde que a série seja absolutamente convergente, caso contrário, dizemos que o valor esperado de \bar{X} não existe.

Observação 2.2.10. Note que $E(1_A) = P(A)$. Assim, a noção de valor esperado é uma extensão da noção de probabilidade.

Definição 2.2.11. Um *processo estocástico* com espaço de estado S é uma coleção de variáveis aleatórias $\{\bar{X}_t, t \in T\}$ definidas em um espaço de probabilidade (Ω, Σ, P) . O conjunto T é chamado de *conjunto de parâmetros*. Se $T = \mathbb{N}$, o processo é chamado de *processo de parâmetro discreto*. Caso T não seja enumerável, o processo é chamado de *processo contínuo*.

Observação 2.2.12. O índice t da definição acima pode representar o tempo e assim, podemos interpretar \bar{X}_t como "estado" ou "posição" do processo no tempo t .

Na próxima seção abordaremos um processo estocástico com tempo discreto, a *cadeia de Markov*.

2.3 APLICAÇÕES DE MARKOV

Nesta seção introduziremos alguns resultados relativo a cadeia de Markov definidas sobre um espaço de probabilidade. Para mais detalhes veja Aaronson [1], Chung [8] e Gallager [15]. Seja I um conjunto enumerável, que será o espaço de estado dos processos estocásticos estudados nesta seção. A distribuição de probabilidade π em I é formada por números $0 \leq \pi_i \leq 1$ tal que $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$. Além disso, diremos que uma matriz

$P = (p_{ij}, i, j \in I)$ é *estocástica*, se $0 \leq p_{ij} \leq 1$ e para cada $i \in I$ tivermos

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1.$$

Isto significa que as linhas da matriz formam uma distribuição de probabilidades em I . Se I tem n elementos, então P é uma matriz quadrada $n \times n$ e, de uma forma mais geral, P será uma matriz infinita. Uma cadeia de Markov será um processo estocástico de tempo discreto com espaço de estados I sobre um espaço de probabilidade finita. Denotaremos a probabilidade de se mover do estado i para o estado j em uma etapa dada por: $P(j|i) = p_{ij}$, onde a matriz estocástica P é dada por:

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemplo: A matriz P definida por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz estocástica.

Definição 2.3.1. Dizemos que um processo estocástico $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma *cadeia de Markov com distribuição inicial π e matriz estocástica P* , se para cada $n \geq 0$, com $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in I$ obtermos que

- $P(X_0 = i_0) = \pi_{i_0}$.
- $P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$.

O segundo item é uma versão especial da chamada *propriedade de Markov* que refere-se a "falta de memória" de um dado sistema estocástico.

2.3.1 Recorrência e Periodicidade

Definição 2.3.2. Dizemos que um estado i tem *período K* se houver retorno ao estado i em múltiplos de K passos de tempo. Assim definimos K como

$$K = m.d.c.\{n : P(X_n = i | X_0 = i) > 0\},$$

onde "m.d.c" é o máximo divisor comum.

Observação 2.3.3. Note que se $K = 1$ então o retorno ao estado i pode ocorrer em tempos irregulares. Neste caso dizemos que o estado é *aperiódico*, ou seja, existe um

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$

$$P(X_n = i | X_0 = i) > 0.$$

Além disso, dizemos que a cadeia de Markov é *aperiódica* se todo estado i do processo for aperiódico.

Definição 2.3.4. O estado i é dito *transitório* se, dado que começamos no estado i , existe uma probabilidade não-nula que nunca retornará ao estado i . Consideremos uma variável aleatória T_i como tempo de primeiro retorno ao estado i , dada por:

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i | X_0 = i\}.$$

Denotaremos o número $P(T_i = n)$, como sendo a probabilidade do tempo de primeiro retorno ao estado i após n passos. Portanto, temos que o estado i é transitório se

$$P(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_i = n) < 1.$$

Definição 2.3.5. O estado i é dito *recorrente* se ele não é transitório, ou seja

$$P(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_i = n) = 1.$$

Definição 2.3.6. Definimos o *tempo de recorrência média* no estado i como sendo o tempo de retorno esperado

$$M_i = E[T_i] = \sum_{n=1}^{\infty} nP(T_i = n).$$

- O estado i é dito *recorrente positivo* se M_i é finita, caso contrário dizemos que o estado i é *recorrente nulo*.

2.4 CONCEITOS DE TEORIA ERGÓDICA

Nesta seção apresentamos uma introdução a Teoria Ergódica e conceitos como Conservatividade, Recorrência, Função Tempo de Primeiro Retorno e Mixing. Para mais detalhes veja Aaronson [1] e [2], Chernov [5] e [6], Walters [33] e Zhang [36].

Definição 2.4.1. Sejam (X, Σ_1, m_1) , (Y, Σ_2, m_2) espaços de probabilidade.

1. Uma transformação $f : X \rightarrow Y$ *preserva medida* se f é mensurável e $m_1(f^{-1}(A_2)) = m_2(A_2)$, para todo $A_2 \in \Sigma_2$.
2. Diremos que $f : X \rightarrow Y$ é uma *transformação invertível* que preserva medida se f preserva medida, é bijetiva e f^{-1} também preserva medida.

Quando $X = Y$ e $f : X \rightarrow X$ e satisfaz (1), diremos que m_1 é *f-invariante*.

Definição 2.4.2. Uma transformação não singular f de X é dita *recorrente* se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |h \circ f^n - h| = 0,$$

q.t.p, para todo $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Além disso, diremos que uma permutação S de um conjunto finito E (que preserva a medida de contagem) é *periódica*, se existe um p tal que $S^p \equiv Id$.

Observação 2.4.3. Note que toda permutação periódica S é recorrente, pois $h \circ S^{pn} = h$, para todo $n \geq 0$ e $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável.

Definição 2.4.4. Seja f uma transformação não-singular do espaço de medida (X, Σ, m) . O conjunto $W \subset X$ é chamado *errante* para f , se os conjuntos $\{f^{-n}(W)\}_{n \in \mathbb{N}}$ são disjuntos. Denotamos por $W = W(f)$ a coleção de conjuntos errantes mensuráveis. A *parte dissipativa* da transformação não singular f é $\mathfrak{D}(f) = \cup W(f)$ a união mensurável da coleção de conjuntos errantes para f . O conjunto $\mathfrak{C}(f) = X \setminus \mathfrak{D}(f)$ é a *parte conservativa* da transformação f .

Definição 2.4.5. A transformação singular f é chamada (*totalmente*) *dissipativa* quando $\mathfrak{D}(f) = X(\text{mod } m)$ e *conservativa* quando $\mathfrak{C}(f) = X(\text{mod } m)$.

Observação 2.4.6. Qualquer transformação que preserva uma probabilidade é conservativa. Porém nem toda transformação que preserva uma medida σ -finita infinita é conservativa. De fato, basta tomar a translação $x \mapsto x + 1$ em \mathbb{R} equipado com borelianos e a medida de Lebesgue, que é totalmente dissipativa.

Definição 2.4.7. Uma transformação não-singular T de um espaço de medida (X, Σ, m) é dita *ergódica*, se

$$A \in \Sigma, T^{-1}(A) = A \pmod{m} \quad \text{implica} \quad m(A) = 0 \text{ ou } m(A^c) = 0.$$

Teorema: 2.4.8. (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e m uma medida T -invariante finita. Seja $A \subset X$ um conjunto mensurável qualquer com $m(A) > 0$. Então para m -q.t.p. $x \in A$ existem infinitos valores de n para os quais $T^n \in A$.*

Observação 2.4.9. De forma mais geral, o Teorema é válido também para um espaço de medida infinita, desde que satisfaça a outras hipóteses (veja Aaronson [1], p.17).

Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e m uma medida T -invariante finita. Dado um conjunto mensurável $A \subset X$ com $m(A) > 0$, considere a função *tempo de primeiro retorno* $r_A : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida por:

$$r_A(x) = \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}. \quad (2.2)$$

Observação 2.4.10. Caso o conjunto da direita seja vazio então $r_A(x) = \infty$, ou seja, de acordo com o Teorema 2.4.8 isto só ocorre para um conjunto de pontos com medida nula.

Denotaremos por $C_0 = \{x \in A : T^n(x) \notin A \text{ para todo } n \geq 1\}$, como sendo o conjunto dos pontos de A que nunca retornam a A ; e $C_1 = \{x \in X : T^n(x) \notin A \text{ para todo } n \geq 0\}$,

como sendo o conjunto dos pontos de X que nunca entram em A . Além disso note que pelo Teorema 2.4.8 temos que $m(C_0) = 0$. O próximo resultado mostra que a função dada em (2.2) é integrável.

Teorema: 2.4.11. (Teorema de Kac). *Seja $T : X \rightarrow X$, m uma medida invariante e um subconjunto $A \subset X$ com medida positiva. Então a função r_A é integrável e*

$$\int_A r_A dm = m(X) - m(C_1).$$

2.4.1 Mixing

Nesta subseção apresentaremos uma definição para a transformação mixing (misturadora), cujo espaço de medida é finita. Em seguida faremos uma comparação com o decaimento de funções de correlação.

Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação invertível que preserva a medida de probabilidade m e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. A aplicação f é dita *observável*.

Definição 2.4.12. Consideremos (X, \mathbb{A}, m, T) um sistema dinâmico que preserva uma medida finita m . O sistema é dito *mixing* se para qualquer $A, B \in \mathbb{A}$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A \cap T^{-n}(B)) = m(A)m(B).$$

Observação 2.4.13. Notemos que a definição usual de mixing não poder ser estendida para um espaço de medida infinita, pois basta tomarmos todo o espaço X e um conjunto de medida invariante de medida finita, no qual obteremos uma sequência constante que não pode convergir para o produto das medidas, ou seja:

$$m(B) < \infty \text{ e } m(B) = m(T^{-n}(X) \cap B) \rightarrow m(X)m(B) = \infty \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

A velocidade do mixing é caracterizada pela taxa de decaimento de correlações, definida abaixo.

Definição 2.4.14. Dado um par qualquer de funções integráveis (observáveis) $f, g \in L_2(X, m)$, as *correlações* de $f \circ T^n$ e g é definida por:

$$C_{f,g}(n) = \left| \int_X (f \circ T^n)g dm - \int_X f dm \int_X g dm \right|, n \in \mathbb{N}.$$

Assim uma transformação $T : X \rightarrow X$ é mixing se, e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{f,g}(n) = 0,$$

para quaisquer $f, g \in L_2(X, m)$. Além disso, denotaremos por $C_f(n)$ como sendo a *função de autocorrelação* quando $f = g$.

Uma propriedade do estudo de correlações, diz respeito a sua taxa de decaimento, ou seja, a velocidade de convergência de $C_{f,g}(n) \rightarrow 0$. A seguir apresentamos dois tipos de convergência que são comuns em aplicações:

Definição 2.4.15. Dizemos que as correlações decaem *exponencialmente* se

$$|C_{f,g}(n)| \leq k_1 e^{-\alpha n}, \quad (2.3)$$

para algum $\alpha > 0$ e $n > 0$, sendo k_1 uma constante. Dizemos que as correlações decaem *polinomialmente* se

$$|C_{f,g}(n)| \leq k_2 n^{-\alpha}, \quad (2.4)$$

para algum $\alpha > 0$ e $n > 0$, sendo k_2 uma constante.

2.5 DINÂMICA SIMBÓLICA

Nesta seção abordaremos conceitos de dinâmica simbólica que mais tarde serão úteis para a construção que faremos do nosso problema. Para um melhor entendimento veja Devaney [9], Campanino e Isola [4] e Robinson [29].

Definição 2.5.1. Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) | s_i = 0 \text{ ou } 1\}$. Dizemos que Σ_2 é um *espaço de sequências* sobre os símbolos 0 e 1. Além disso, podemos considerar o espaço Σ_n consistindo de sequências infinitas de inteiros entre 0 e $n - 1$. Elementos de Σ_2 são cordas infinitas de inteiros como $(01001\dots)$ ou $(0101\dots)$. Podemos tornar Σ_2 um espaço métrico da seguinte maneira: Dadas duas sequências $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$, definimos a distância entre eles por:

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Desde que $|s_i - t_i|$ seja 0 ou 1, cuja série infinita é dominada pela série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Exemplo: Considere $s = (0000\dots)$ e $t = (111\dots)$ então $d[s, t] = 2$.

Definição 2.5.2. Definimos a aplicação *shift* $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por:

$$\sigma(t_0 t_1 t_2 \dots) = (t_1 t_2 t_3 \dots).$$

Observação 2.5.3. A transformação *shift* “ignora” a primeira entrada da sequência e desloca todas as outras entradas de uma posição para a direita.

2.6 TEOREMA TAUBERIANO

Nesta seção abordaremos sobre o teorema Tauberiano, no qual, será fundamental para provarmos o Teorema 3.5.2. Para mais detalhes veja Feller [12], Hardy [18] e Korevaar [22].

Seja μ uma medida definida em $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de tal modo que a transformada de

Laplace

$$\omega(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\mu,$$

existe para $\lambda > 0$. De forma geral, o comportamento de ω próximo da origem determina exclusivamente o comportamento assintótico de $\mu(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ e vice-versa. Historicamente, qualquer relação que descreve o comportamento assintótico de μ em função dos termos de ω é dito *Teorema Tauberiano*, enquanto que teoremas descrevendo o comportamento de ω em termos de μ é dito *Abeliano*. Em nosso trabalho estaremos interessados em relacionar o Teorema Tauberiano para séries de potências, para isto, existe uma versão em Feller[12] que enunciaremos logo após algumas definições.

Definição 2.6.1. A *função gama* é definida para todos os números complexos, exceto os números inteiros negativos e nulo, no qual é dada por:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Definição 2.6.2. Seja L uma função positiva definida em $[0, +\infty]$. Diremos que L *varia lentamente* para ∞ se para todo t fixado, tivermos que:

$$\frac{L(tz)}{L(z)} \rightarrow 1, \quad \text{com } z \rightarrow \infty.$$

Agora estamos aptos a enunciar o *Teorema Tauberiano para séries de potência*.

Teorema: 2.6.3. Seja $u_n \geq 0$ uma sequência e $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ uma série que converge para $0 \leq z < 1$. Se L é uma função que varia lentamente para ∞ e $0 \leq \rho < \infty$ então

$$H(z) \sim \frac{1}{(1-z)^\rho} L\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad \text{com } z \rightarrow 1^-, \quad (2.5)$$

e

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^\rho L(n), \quad \text{com } n \rightarrow \infty,$$

são equivalentes. Além disso, se a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e $0 < \rho < \infty$, então (2.5) equivale a:

$$u_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n), \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

3 SEQUÊNCIAS DE RENOVAÇÃO E INTERMITÊNCIA

Neste capítulo iniciamos a apresentação dos resultados desse texto. Primeiro faremos a construção do nosso problema na Seção 3.1, onde trazemos uma analogia a cadeia de Markov na Seção 3.2. Na Seção 3.3 analisaremos a medida invariante e consequências da função tempo de retorno, no qual demonstraremos a Proposição 3.16 que será fundamental para a prova do Teorema 3.5.2. Em seguida, apresentamos na Seção 3.4 a função geradora de distribuição de tempos de retorno que será construída a partir da análise do comportamento do nosso sistema dinâmico. Por último, definimos na Seção 3.5 a função geradora da sequência de renovação e, além disso, demonstraremos o Teorema 3.5.2 que será fundamental para a prova dos principais resultados.

3.1 CONSTRUÇÃO DO NOSSO PROBLEMA

Definição 3.1.1. Sejam q, r, s três parâmetros reais satisfazendo $0 < q < 1, s > 0$ e $r + 1 = q^{-s}$. Seja além disso $d_n \downarrow 0$ a sequência definida por:

$$d_0 = 1, \quad d_n = (1 + nr)^{-\frac{1}{s}}, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Proposição: 3.1.2. A sequência d_n definida em (3.1) é uma sequência de Kaluza, isto é,

$$0 < d_n \leq d_0 = 1 \quad e \quad d_n^2 \leq d_{n-1}d_{n+1}, \quad (3.2)$$

que é equivalente a afirmar que $d_{n+1} - 2\lambda d_n + \lambda^2 d_{n-1} \geq 0$ para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Note que $d_1 = q$.

- $d_n = \frac{1}{(1 + nr)^{\frac{1}{s}}} < 1$, para todo $n \geq 1$.

De fato: $r = \frac{1}{q^s} - 1, 0 < q < 1$ e $s > 0$ temos que $\frac{1}{q^s} > 1$. Logo $r > 0$.

Assim $(1 + nr) > 1$ implica $(1 + nr)^{\frac{1}{s}} > 1$, portanto

$$0 < d_n = \frac{1}{(1 + nr)^{\frac{1}{s}}} < 1.$$

- $d_n^2 \leq d_{n-1}d_{n+1}$.

De fato:

$$\begin{aligned}
 d_{n-1}d_{n+1} &= [1 + (n-1)r]^{-\frac{1}{s}} [1 + (n+1)r]^{-\frac{1}{s}} \\
 &= [(1 + (n-1)r)(1 + (n+1)r)]^{-\frac{1}{s}} \\
 &= [1 + (n+1)r + (n-1)r + r^2(n^2 - 1)]^{-\frac{1}{s}} \\
 &= (1 + nr + r + nr - r + r^2n^2 - r^2)^{-\frac{1}{s}} \\
 &= [(1 + nr)^2 - r^2]^{-\frac{1}{s}},
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 d_n^2 &= d_n d_n \\
 &= (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} \\
 &= (1 + nr)^{-\frac{2}{s}} \\
 &= [(1 + nr)^2]^{-\frac{1}{s}}.
 \end{aligned}$$

Como $r > 0$ e $s > 0$ segue que $(1 + nr)^2 - r^2 < (1 + nr)^2$ implica que

$$[(1 + nr)^2 - r^2]^{\frac{1}{s}} < [(1 + nr)^2]^{\frac{1}{s}}.$$

Assim $[(1 + nr)^2 - r^2]^{-\frac{1}{s}} > [(1 + nr)^2]^{-\frac{1}{s}}$, portanto $d_n^2 < d_{n-1}d_{n+1}$.

- A equivalência, é o mesmo que dizer que o discriminante $\Delta < 0$, ou seja,

$$4d_n^2 - 4d_{n+1}d_{n-1} < 0$$

Logo $d_n^2 < d_{n-1}d_{n+1}$ para todo $\lambda > 0$. □

Podemos notar que os números d_n 's geram uma partição enumerável \mathbb{P} de $[0, 1]$ em intervalos $A_n = [d_n, d_{n-1}]$, $n \geq 1$.

Definição 3.1.3. *Consideraremos*

$$\rho_n := m(A_n) = d_{n-1} - d_n,$$

onde m denota a medida de Lebesgue.

Recordamos as seguintes definições: sejam f e g duas funções definidas sobre o conjunto dos números reais. Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow \infty$ se existe um $M \in \mathbb{R}$ e um x_0 tal que $\frac{|f(x)|}{g(x)} \leq M$, para todo $x > x_0$.

Além disso, quando $s \in \mathbb{Q}$, a série binomial é dada por:

$$(x + y)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^{s-k} y^k,$$

onde $s \in \mathbb{C}$ e $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Proposição: 3.1.4. *Temos que $\rho_{n+1} < \rho_n$ e tem um comportamento assintótico dado por:*

$$\rho_n = (r/s)(1 + nr)^{-1-\frac{1}{s}} + O((1 + nr)^{-2-\frac{1}{s}}). \quad (3.3)$$

Demonstração.

$$\rho_n - \rho_{n+1} = d_{n-1} - d_n - (d_n - d_{n+1}) = d_{n-1} - 2d_n + d_{n+1},$$

temos que para $\lambda = 1$,

$$d_{n-1} - 2d_n + d_{n+1} > 0,$$

e assim,

$$\rho_n - \rho_{n+1} > 0.$$

Portanto $\rho_{n+1} < \rho_n$ para qualquer $n \geq 1$.

Utilizando a serie binomial para números complexos, temos que:

$$\begin{aligned} \rho_n &= d_{n-1} - d_n = (1 + (n-1)r)^{-\frac{1}{s}} - (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} \\ &= ((1 + nr) + (-r))^{-\frac{1}{s}} - (1 + nr)^{-\frac{1}{s}}, \text{ (aplicando a serie ao 1º membro)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{s}}{k} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}-k} \cdot (-r)^k - (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} \\ &= \binom{-\frac{1}{s}}{0} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} + \binom{-\frac{1}{s}}{1} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}-1}(-r) + \binom{-\frac{1}{s}}{2} \\ &\quad (1 + nr)^{-\frac{1}{s}-2}(-r)^2 + \dots + \binom{-\frac{1}{s}}{k} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}-k}(-r)^k + \dots - (1 + nr)^{-\frac{1}{s}} \\ &= \frac{r}{s}(1 + nr)^{-\frac{1}{s}-1} + \frac{1+s}{2s^2}(1 + nr)^{-\frac{1}{s}-2}(r^2) + \dots + \\ &\quad (-1)^k \frac{(1+s)(1+2s)\dots(1+s(k-1))}{s^k k!} (1 + nr)^{-\frac{1}{s}-k}(-r)^k + \dots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho_n = \frac{r}{s}(1 + nr)^{-\frac{1}{s}-k} + O((1 + nr)^{-\frac{1}{s}-2}).$$

□

Fixando $A_0 = [0, 1]$, definimos $p_k = \frac{m(A_k)}{m(A_{k-1})}$, $k \geq 1$ e consideremos a

aplicação afim por partes $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - d_1}{p_1}, & \text{se } x \in A_1, \\ d_{k-1} + \frac{x - d_k}{p_k}, & \text{se } x \in A_k, \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

A figura abaixo mostra o comportamento do gráfico da aplicação f :

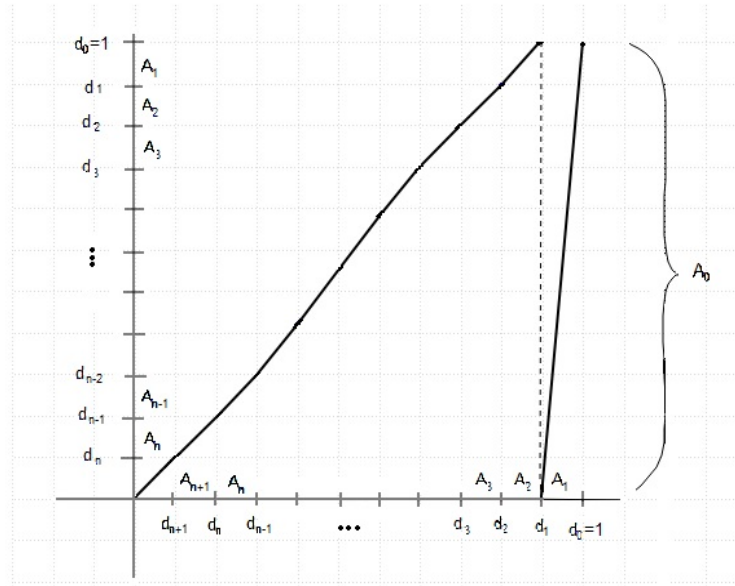


Figura 1: Gráfico de f

Esta aplicação introduz um modelo simplificado para uma aplicação de intervalo intermitente cujo comportamento quando $x \rightarrow 0^+$ é dado por:

$$f(x) = x + ux^{1+s} + O(x^{1+s+\varepsilon}),$$

onde $u = \frac{r}{s}$ e $\varepsilon > 0$. Faremos agora algumas observações a respeito da aplicação f :

Observação 3.1.5. O ponto fixo na origem é neutro: $f'(0) = 1$, e $f'(x)$ é apenas Holder contínua em $x = 0$, com expoente s . Ou seja, $|f'(x) - f'(y)| \leq k|x - y|^s$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Observação 3.1.6. Pode ser notado que se $\psi_0(x)$ denota o ramo inverso da aplicação f definida de $[0, 1]$ em $[0, q]$, então temos que $d_n = \psi_0^n(1)$, e a sequência d_n é Kaluza se, e somente se, ψ_0 é côncavo.

Observação 3.1.7. Por último, observamos ainda que $f(A_n) = A_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, de modo que \mathbb{P} é uma partição de Markov para a aplicação f .

3.2 A CADEIA ENUMERÁVEL DE MARKOV

O processo de iteração $x_n = f^n(x)$, com f definida em (3.4) e x escolhido aleatoriamente segundo a medida de Lebesgue, é isomorfo (mod 0) a cadeia de Markov com espaço de estado N e matriz de transição $P = (p_{ij})$ dada por:

$$P = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Para ver isto, seja X o conjunto residual de pontos em $(0, 1]$ que não são preimagens de 1 com respeito a aplicação f , a saber, $X = (0, 1] \setminus \{d_n\}_{n \geq 0}$. Seja, além disso, Ω o conjunto de todas as sequências $\omega = (\omega_0 \omega_1 \dots)$, $\omega_i \in \mathbb{N}$, tais que dado ω_i então

$$\omega_{i-1} = \omega_i + 1 \quad \text{ou} \quad \omega_{i-1} = 1.$$

Então a aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\varphi(\omega) = x, \quad \text{se} \quad f^j(x) \in A_{\omega_j}, \quad j \geq 0,$$

é uma bijeção entre Ω e X , no qual a aplicação f conjuga com shift σ em Ω segundo o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Então temos que o processo estocástico em Ω dado por $x_i(\omega) = \omega_i$, $i \geq 0$, é uma cadeia de Markov com probabilidade condicional:

$$p_{ij} = P(x_n(\omega) = j \mid x_{n-1}(\omega) = i) = \frac{m(f^{-1}(A_j) \cap A_i)}{m(A_i)},$$

que coincide com os valores da matriz em (3.5). Como o m.d.c $\{n : \rho_n > 0\} = 1$ a cadeia é aperiódica e recorrente. Consideremos a sequência infinita t_1, t_2, \dots de sucessivos tempos de entrada no estado 1:

$$t_1 = \inf\{i \geq 0 : \omega_i = 1\},$$

e, para $j \geq 2$, definimos

$$t_j = \inf\{i > t_{j-1} : \omega_i = 1\}.$$

Seja além disso $r_j = t_{j+1} - t_j$, dada pela sequência entre os tempos de retornos. O estado 1 sendo recorrente, os números r_j são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, ou seja, têm a mesma distribuição de probabilidade e são mutuamente independentes sobre a probabilidade $P_1(\cdot) = P(\cdot \mid x_0(\omega) = 1)$.

Sua distribuição é $P_1(r_j = n) = \rho_n$ e seu valor esperado é dado por

$$E_1(r_j) = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n, \quad (3.6)$$

que pode ser finito (cadeia recorrente-positiva) ou infinita (cadeia recorrente-nula) desde que $s < 1$ ou $s \geq 1$.

A última igualdade acima pode ser verificado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(d_{n-1} - d_n) \\ &= d_0 - d_1 + (2d_1 - 2d_2) + (3d_2 - 3d_3) + (4d_3 - 4d_4) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((n-1)d_{n-2} - (n-1)d_{n-1}) + (nd_{n-1} - nd_n) + \dots \\
& = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{n-1} + d_n + \dots \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} d_n.
\end{aligned}$$

□

Mais especificamente, podemos definir uma família de momentos

$$M^{(l)} = E_1(r_j^l) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^l \rho_n, \quad l \geq 0, \quad (3.7)$$

e dizemos que a cadeia tem *grau ergódico* l se $M^{(l)} < \infty$ mas $M^{(l+1)} = \infty$.

Note que $M^{(0)} = E_1(r_j^0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^0 \rho_n = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = 1$, de modo que a cadeia tem grau mínimo zero (caso recorrente-nulo). Finalmente, a equação de estado estacionário é dada por:

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{in},$$

que é formalmente resolvida por $\pi_n = \pi_1 d_{n-1}$, $n \geq 1$.

No caso recorrente-positivo obtemos $\pi_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \right)^{-1}$.

3.3 MEDIDA INVARIANTE E TEMPOS DE RETORNO

Utilizando a dinâmica simbólica desenvolvida na seção anterior, observamos que a aplicação f preserva uma medida σ -finita absolutamente contínua ν , cuja densidade e é dada por:

$$e(x) = \frac{\pi_n}{\rho_n \pi_1} = \frac{d_{n-1}}{\rho_n}, \quad d_n < x \leq d_{n-1}. \quad (3.8)$$

Note que:

$$\nu(A_n) = \int_{A_n} e(x) dm = d_{n-1} = \sum_{l \geq n} m(A_l), \quad (3.9)$$

que segue da definição de ρ_n .

Mais especificamente, para $E \subseteq A_n$ obtemos,

$$\nu(E) = \frac{m(E)}{m(A_n)} d_{n-1}. \quad (3.10)$$

Seja $\tau : X \rightarrow \mathbb{N}$ o tempo de primeira passagem no intervalo A_1 , isto é,

$$\tau(x) = 1 + \min\{n \geq 0 : f^n(x) \in A_1\}, \quad (3.11)$$

tal que A_n é o fecho do conjunto $\{x \in X : \tau(x) = n\}$. Por outro lado, a função tempo de retorno $r : X \rightarrow \mathbb{N}$ no intervalo A_1 é dado por

$$r(x) = \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in A_1\} = \tau \circ f(x). \quad (3.12)$$

Consideremos o conjunto B_n como sendo o fecho de $\{x \in A_1 : r(x) = n\}$.

Lema: 3.3.1. $B_n = A_1 \cap f^{-1}(A_n)$.

Demonstração. Primeiramente note que:

$x \in A_1$ e $r(x) = n$ então $x \in A_1$ e $f^n(x) \in A_1$, mas $f^j(x) \notin A_1$ para $1 \leq j < n$.

Pela construção de f , temos que $x \in A_1$ e $x \in f^{-1}(A_n)$.

Agora seja $x \in B_n$. Então pela observação acima equivale a dizer que $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, onde $x_k \in A_1$ e $f(x_k) \in A_n$ para todo k , ou seja,

$$x \in \overline{A_1 \cap f^{-1}(A_n)} = A_1 \cap f^{-1}(A_n),$$

pois A_1 e $f^{-1}(A_n)$ são conjuntos fechados.

Reciprocamente, seja $x \in A_1 \cap f^{-1}(A_n)$, ou seja, $x \in A_1$ e $x \in f^{-1}(A_n)$.

Mas $x \in f^{-1}(A_n)$ implica que

$$f^n(x) \in A_1 \quad \text{e} \quad f^j(x) \notin A_1$$

para $1 \leq j < n$.

Logo $x \in A_1$ e $r(x) = n$, portanto $x \in B_n$ e vale a igualdade. \square

Proposição: 3.3.2. *Temos que:*

$$\nu(B_n) = \frac{m(A_1 \cap f^{-1}(A_n))}{m(A_1)} = m(A_n). \quad (3.13)$$

Demonstração. Como $B_n \subseteq A_1$ então por (3.10) temos que:

$$\nu(B_n) = \frac{m(A_1 \cap f^{-1}(A_n))}{m(A_1)} d_0 = \frac{m(A_1 \cap f^{-1}(A_n))}{m(A_1)} = \frac{m(A_1) \cdot m(A_n)}{m(A_1)} = m(A_n),$$

pois analisando o gráfico de interseção de A_1 com a pré-imagem de A_n com respeito a função f que é dada por $f(x) = \frac{x - d_1}{p_1}$, se $x \in A_1$, temos a seguinte relação trigonométrica:

$\alpha = \frac{m(A_n)}{m(f^{-1}(A_n) \cap A_1)}$, onde “ α ” é o coeficiente angular da função f , logo temos que:

$$\alpha = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{m(A_1)} = \frac{m(A_n)}{m(f^{-1}(A_n) \cap A_1)}$$

Portanto $m(f^{-1}(A_n) \cap A_1) = m(A_n)m(A_1)$. \square

De (3.9) e (3.13), temos a seguinte cadeia de identidades formais:

$$\begin{aligned} \nu([0, 1]) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l \geq n} m(A_n) \\ &= \int_0^1 \tau(x) m(dx), \end{aligned}$$

e além disso

$$\begin{aligned} \nu([0, 1]) &= \sum_{n=1}^{\infty} nm(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\nu(B_n) = \int_{A_1} r(x)\nu(dx) = M^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De fato:

A última igualdade segue do fato que B_n é o fecho dos elementos $x \in A_1$ onde $r(x) = n$, então a área da região compreendida pelo gráfico de r é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\nu(B_n) := \int_{A_1} r(x)\nu(dx),$$

enquanto que as outras igualdades são de fácil verificação. \square

Estas identidades são uma versão da fórmula de Kac. Note que (3.14) torna-se mais significativa sob o pressuposto que todos os termos envolvidos são finitos e utilizaremos a convenção $M \equiv M^{(1)}$, no qual obtemos a seguinte dicotomia: ou $M < \infty$ e então existe uma medida de probabilidade $\mu = \frac{\nu}{M}$ f -invariante absolutamente contínua ou se $M = \infty$ então μ não é normalizável e não existe uma medida de probabilidade absolutamente contínua, isto é, o ergódico $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}$ converge fracamente para o delta de Dirac em 0.

Definição 3.3.3. Definimos uma família recursiva de caudas formais $d_n^{(l)}$, com $l \geq 0$ a partir de d_n da seguinte maneira:

$$d_n^{(0)} = d_n \quad e \quad d_n^{(l)} = \sum_{L > n}^{\infty} d_L^{(l-1)} \quad \text{para } l > 0. \quad (3.15)$$

Notação: Dizemos que a_n e b_n são *assintoticamente equivalentes* quando $n \rightarrow \infty$ e escrevemos $a_n \sim b_n$, se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição: 3.3.4. Se $s < \frac{1}{l}$ com $l \geq 1$, então de (3.1) e (3.3) os termos $d_n^{(k)}$ são finitos

para $0 \leq k \leq l$ e satisfazem

$$d_n^{(k)} \sim C_k(1 + (n+k)r)^{k-\frac{1}{s}}, \quad (3.16)$$

onde $C_k = \frac{s^k}{r^k(1-s)(1-2s)\dots(1-ks)}$.

Demonstração. Para $k = 0$ temos que

$$d_n^{(0)} = d_n \sim (1 + nr)^{-\frac{1}{s}}.$$

Agora para $k = 1$ consideraremos a *função Zeta de Hurwitz* (ver (25.15.1) em [26] e para mais detalhes veja Isola[19] e Lopes[25])

$$\zeta\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^{\frac{1}{s}}} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + L\right)^{\frac{1}{s}}},$$

com $s < 1$, $r > 0$ e suas representações (ver (25.15.4) e (25.15.5) em [26]) dadas por:

$$\zeta\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) = \zeta\left(\frac{1}{r} + n + 1, \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{r^{\frac{1}{s}}} \sum_{L=0}^n \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + L\right)^{\frac{1}{s}}}$$

e

$$\zeta\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^s} \left(\sum_{L=0}^n \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + L\right)^{\frac{1}{s}}} + \frac{\left(\frac{1}{r} + n\right)^{1-\frac{1}{s}}}{\frac{1}{s} - 1} - \frac{1}{s} \int_n^{\infty} \frac{x - [x]}{\left(\frac{1}{r} + x\right)^{1+\frac{1}{s}}} dx \right).$$

Temos que

$$\begin{aligned} d_n^{(1)} &= \sum_{L=n+1}^{\infty} d_L = \zeta\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r} + n + 1\right) = \zeta\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^{\frac{1}{s}}} \sum_{L=0}^n \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + L\right)^{\frac{1}{s}}} \\ &= \frac{1}{r^{\frac{1}{s}}} \left(\frac{\left(\frac{1}{r} + n\right)^{1-\frac{1}{s}}}{\frac{1}{s} - 1} - \frac{1}{s} \int_n^{\infty} \frac{x - [x]}{\left(\frac{1}{r} + x\right)^{1+\frac{1}{s}}} dx \right) \\ &= \frac{s}{r(1-s)} (1 + nr)^{1-\frac{1}{s}} \left(1 - \frac{r^{1-\frac{1}{s}}(1-s)}{s^2(1+nr)^{1-\frac{1}{s}}} \int_n^{\infty} \frac{x - [x]}{\left(\frac{1}{r} + x\right)^{1+\frac{1}{s}}} dx \right). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^{(1)}}{\frac{s}{r(1-s)}(1 + (n+1)r)^{1-\frac{1}{s}}} = 1.$$

Portanto $d_n^{(1)} \sim C_1(1 + (n+1)r)^{1-\frac{1}{s}}$.

Para $k = 2$, note que

$$d_n^{(2)} = \sum_{L=n+1}^{\infty} d_L^{(1)}.$$

Mas $d_L^{(1)} \sim C_1(1 + (n+1)r)^{1-\frac{1}{s}}$ e assim, podemos aplicar o mesmo processo acima, agora

para

$$\zeta\left(\frac{1}{s} - 1, \frac{1}{r} + 1\right) = \frac{C_1}{r^{\frac{1}{s}-1}} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + 1 + L\right)^{\frac{1}{s}-1}},$$

e obtermos

$$d_n^{(2)} \sim C_2(1 + (n+2)r)^{2-\frac{1}{s}}.$$

Repetimos este processo até a função

$$\zeta\left(\frac{1}{s} - k, \frac{1}{r} + k\right) = \frac{C_k}{r^{\frac{1}{s}-k}} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r} + k + L\right)^{\frac{1}{s}-k}},$$

com $s < \frac{1}{k}$, no qual, obtermos o resultado desejado. \square

Além disso temos que $M^{(l)}$ é finito se, e somente se $d_n^{(l)}$ também é finito, e um importante caso especial do comportamento assintótico de $d_n^{(1)}$, quando $s < 1$ é dado por:

$$d_{n-1}^{(1)} = \nu(x \in X : \tau(x) > n) \sim C_1(rn)^{1-\frac{1}{s}} = Cn^{1-\frac{1}{s}}, \quad (3.17)$$

onde $C = \frac{s}{r^{\frac{1}{s}}(1-s)}$.

De fato:

Temos que

$$d_{n-1}^{(1)} \sim C_1(1 + nr)^{1-\frac{1}{s}},$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{C_1(1 + nr)^{1-\frac{1}{s}}}{C_1(rn)^{1-\frac{1}{s}}} \right] = 1.$$

Ou seja,

$$C_1(1 + nr)^{1-\frac{1}{s}} \sim C_1(rn)^{1-\frac{1}{s}}.$$

Logo

$$d_{n-1}^{(1)} \sim C_1(rn)^{1-\frac{1}{s}}.$$

\square

3.4 A FUNÇÃO GERADORA DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE RETORNO

Nesta seção construiremos nossa sequência de renovação, a partir da análise do comportamento do nosso sistema dinâmico. Para isso note que o elemento A_n da partição enumerável de Markov \mathbb{P} introduzido na Seção 3.1 e na Seção 3.2 pode ser visto como o “ n -ésimo estado” para nosso sistema dinâmico. Além disso o número ρ_n pode ser interpretado como sendo a probabilidade m de que uma *primeira passagem* no estado 1 ocorra

após n iteradas. Consideremos a quantidade

$$u_n := m(f^{-(n-1)}(A_1)) \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

dado pela probabilidade- m de observar a *passagem* no estado 1 depois de $n - 1$ iteradas, sendo o primeiro tempo de passagem ou não. Para analisarmos todas as possibilidades envolvidas no nosso sistema dinâmico, podemos escrever u_n da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{r=1}^n m(f^l(x) \notin A_1, 0 \leq l < r-1, f^{r-1}(x) \in A_1, f^{n-1}(x) \in A_1) \\ &= \sum_{r=1}^n m(\tau(x) = r) m(f^{n-1}(x) \in A_1 \mid \tau(x) = r) \\ &= \sum_{r=1}^n \rho_r m(f^{n-1}(x) \in A_1 \mid \tau(x) = r). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De acordo com a dinâmica estabelecida pelo nosso sistema e levando em conta o processo de iteração $x_n = f^n(x)$ (visto na Seção 3.2), notamos que a cada passagem no estado 1, nosso sistema dinâmico estabelece um novo ciclo a ser percorrido até chegar novamente nesse estado, ou seja, como se o sistema reiniciasse a cada passagem no estado 1. Logo, ainda podemos simplificar um dos termos em (3.18) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} m(f^{n-1}(x) \in A_1 \mid \tau(x) = r) &= m(f^{n-1}(x) \in A_1 \mid f^{r-1}(x) \in A_1) \\ &= m(f^{n-r}(x) \in A_1 \mid x \in A_1) \\ &= m(f^{n-r-1}(x) \in A_1) = u_{n-r}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_n = \sum_{r=1}^n \rho_r u_{n-r}, \quad (3.19)$$

onde a sequência u_n satisfaz a relação de recorrência:

$$u_0 = 1 \text{ e } u_n = \rho_n + u_1 \rho_{n-1} + \cdots + u_{n-1} \rho_1 \text{ para } n \geq 1. \quad (3.20)$$

Em outras palavras, u_0, u_1, \dots é a *sequência de renovação* associada a sequência ρ_n .

Proposição: 3.4.1. *Temos que*

$$u_n = \nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)).$$

Demonstração. Podemos escrever $\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))$ da seguinte maneira:

$$\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) = \sum_{r=1}^n \nu(f^l(x) \notin A_1, 0 \leq l < r, f^r(x) \in A_1, f^n(x) \in A_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^n \nu(r(x) = r) \nu(f^n(x) \in A_1 \mid r(x) = r) \\
&= \sum_{r=1}^n \nu(B_r) \nu(f^n(x) \in A_1 \mid r(x) = r).
\end{aligned}$$

e por (3.13), temos que:

$$\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) = \sum_{r=1}^n \rho_r \nu(f^n(x) \in A_1 \mid r(x) = r).$$

Mas segue ainda que:

$$\begin{aligned}
\nu(f^n(x) \in A_1 \mid r(x) = r) &= \nu(f^n(x) \in A_1 \mid f^r(x) \in A_1) \\
&= \nu(f^{n-r}(x) \in A_1 \mid x \in A_1) \\
&= \nu(f^{-(n-r)}(A_1) \cap A_1).
\end{aligned}$$

Logo $\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) = \sum_{r=1}^n \rho_r \nu(A_1 \cap f^{-(n-r)}(A_1))$, e comparando com (3.19), segue que $u_n = \nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))$. \square

Desta maneira podemos interpretar como sendo a probabilidade- ν de observar o *retorno* no estado 1 depois de n iteradas. Fixando $u_n^{(1)} := \nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))$, vemos que $u_n^{(1)}$ satisfaz a relação de recorrência:

$$u_0^{(1)} = 1 \quad e \quad u_n^{(1)} = u_0^{(1)} \nu(B_n) + \cdots + u_{n-1}^{(1)} \nu(B_1) \quad \text{para } n \geq 1, \quad (3.21)$$

onde B_n é o fecho de $\{x \in A_1 : r(x) = n\}$.

Por outro lado, sabemos que $\nu(B_n) = m(A_n) \equiv \rho_n$ e, comparando com (3.20), temos que $u_n^{(1)} \equiv u_n$, para todo n .

3.5 FUNÇÃO GERADORA DA SEQUÊNCIA DE RENOVACÃO

Nesta seção analisaremos resultados obtidos através da construção da sequência de renovação u_n , que se resume ao estudo da função geradora $\phi(z)$ obtida a partir de u_n , no qual, é definida da seguinte maneira:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \stackrel{(1)}{=} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n\right)^{-1} \stackrel{(2)}{=} \left((1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n\right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Temos que (1), é verificada da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n \right)^{-1},$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} (1 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots + u_n z^n) + \dots - (\rho_1)z - (u_1 \rho_1 + u_0 \rho_2)z^2 - \dots \\ - (u_{n-1} \rho_1 + \dots + u_1 \rho_{n-1} + \rho_n)z^n = 1. \end{aligned}$$

Mas u_n satisfaz a seguinte relação: $u_n = \rho_n + u_1 \rho_{n-1} + \dots + u_{n-1} \rho_1$.
Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n &= 1 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots + u_n z^n + \dots \\ &\quad - u_1 z - u_2 z^2 - u_3 z^3 - \dots - u_n z^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Temos que (2), segue da seguinte maneira:

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n \right)^{-1} = \left((1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \right)^{-1},$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+1} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_n z^n + \dots - z - d_1 z^2 - d_2 z^3 - \dots - d_n z^{n+1} - \dots \\ - 1 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 + \dots + \rho_n z^n + \dots = 0. \end{aligned}$$

Mas $\rho_n = d_{n-1} - d_n$.

Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+1} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n &= 1 + (d_1 - d_0)z + (d_2 - d_1)z^2 + \dots \\
+(d_n - d_{n-1})z^n + \dots - 1 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 &+ \dots + \rho_n z^n + \dots \\
&= 1 - \rho_1 z - \rho_2 z^2 - \dots - \rho_n z^n - \dots \\
&- 1 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 + \dots + \rho_n z^n + \dots \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Antes de enunciar e demonstrar o teorema que será fundamental para a prova do Teorema A e do Teorema B, precisaremos do seguinte resultado:

Teorema: 3.5.1. *Se $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ é convergente para $|z| < 1$ e $d_n > 0$ é uma sequência de Kaluza com $d_0 = 1$, então*

$$\frac{1}{p(z)} = 1 - h_1 z - h_2 z^2 - \dots - h_n z^n - \dots,$$

onde $h_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \leq 1$. Além disso, se $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1$.

Demonstração. Ver Hardy [18], Teorema 22. □

O próximo teorema pode ser visto como uma generalização do teorema de renovação provado por Erdős, Feller e Pollard [10]. Este resultado foi feito por Isola [20] e abordado tanto o caso finito quanto o caso infinito.

Teorema: 3.5.2. *A série de potência da função $\phi(z)$ em (3.22) define uma função holomorfa no disco aberto unitário e converge em quase todo ponto do círculo unitário com exceção de $z = 1$, onde tem uma singularidade não-polar. Além disso, existem constantes $G_1(s, r)$ e $G_2(s, r)$ de modo que temos o seguinte comportamento assintótico dos coeficientes u_n :*

(a) para $s < 1$ temos que $w_n := Mu_n - 1 \sim G_1 n^{1-\frac{1}{s}}$.

(b) para $s \geq 1$ temos que

$$u_n \sim \begin{cases} G_2 n^{-1+(\frac{1}{s})}, & \text{se } s > 1; \\ \frac{1}{\log n}, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$0 \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n} = \frac{1}{M} < 1,$$

lembrando que:

$$M \equiv M^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n.$$

Afirmação: A função $D(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ não tem zeros para $|z| \leq 1$ com $z \neq 1$.

Demonstração da afirmação. Para $|z| \leq 1$, segue de (3.22), desde que $\rho_n > 0$ e portanto

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n \right| < 1.$$

Além disso, a partir da identidade acima, os zeros de $D(z)$, deveriam ser da forma $e^{i\theta}$, com $0 < \theta < 2\pi$.

Agora, se $D(e^{i\theta}) = 0$ então de (3.22) implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{in\theta} = 1$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\theta) + i \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \sin(n\theta) = 1$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\theta) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \sin(n\theta) = 0.$$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\theta) = 1$ implica que $\cos(n\theta) = 1$ para todo $n \geq 1$, já que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = 1$.

Assim $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Contradição, pois $0 < \theta < 2\pi$.

E assim encerramos a demonstração da afirmação. \square

Portanto a função $\frac{1}{D(z)}$ não tem singularidades para $|z| < 1$ e podemos expandí-la em uma série de potências:

$$\frac{1}{D(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n.$$

Note que $\gamma_0 = 1$, pois segundo a relação acima, temos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \\ &= \gamma_0 d_0 + (\gamma_0 d_1 + \gamma_1 d_0)z + (\gamma_0 d_2 + \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_0)z^2 + \end{aligned}$$

$$\dots + (\gamma_0 d_n + \gamma_1 d_{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} d_1 + \gamma_n d_0) z^n + \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_0 d_0 = \gamma_0 \\ 0 &= \gamma_0 d_1 + \gamma_1 d_0 \\ 0 &= \gamma_0 d_2 + \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_0 \\ &\vdots \\ 0 &= \gamma_0 d_n + \gamma_1 d_{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} d_1 + \gamma_n d_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $h_n = -\gamma_n$, ($n \geq 1$). Por (3.1.2) podemos aplicar o Teorema 3.5.1 para a sequência d_n e obtermos

$$h_n \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n \leq 1.$$

Além disso, se $M = \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1$ e a série $D(z)$ é convergente para $|z| \leq 1$.

Para mostrarmos (b), considere primeiramente $s > 1$ e note que

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n h_k, \end{aligned} \tag{3.23}$$

pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n}{(1-z)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= u_0 = 1 \\ \gamma_1 &= u_1 - u_0 = u_1 - 1 \\ \gamma_2 &= u_2 - u_1 = u_2 - (1 + \gamma_1) \\ &\vdots \\ \gamma_n &= u_n - u_{n-1} = u_n - (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com isto,

$$u_1 = 1 + \gamma_1$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 1 + \gamma_1 + \gamma_2 \\
&\vdots \\
u_n &= 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1} + \gamma_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto $u_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k$ e assim se $M = \infty$, a sequência u_n decresce monotonicamente para 0.

Assim de (3.22) o comportamento assintótico quando $z \rightarrow 1^-$ de

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim G'_2 n^{-1+\frac{1}{s}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

equivale ao comportamento assintótico de

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim \frac{G'_2}{(1-z)^{-1+\frac{1}{s}}}, \quad z \rightarrow 1^-,$$

com $G'_2 = \frac{s}{r^{-\frac{1}{s}}(s-1)}$.

Logo temos que

$$\frac{1}{(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim \frac{G'_2}{(1-z)^{\frac{1}{s}}}, \quad z \rightarrow 1^-,$$

e pelo Teorema 2.5 segue então que

$$u_n \sim G_2 n^{-1+\frac{1}{s}},$$

onde $G_2 = \frac{G'_2 \Gamma(1 - \frac{1}{s}) \sin(\frac{\pi}{s})}{\pi}$ e G_2 é uma função constante que varia lentamente no infinito.

Agora para $s = 1$, temos que o comportamento assintótico quando $z \rightarrow 1^-$ de

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim \frac{1}{\log n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

equivale ao comportamento assintótico de

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim \left(\log \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)^{-1}, \quad z \rightarrow 1^-.$$

Logo temos que

$$\frac{1}{(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} \sim \frac{1}{1-z} \log \left(\frac{1}{1-z} \right), \quad z \rightarrow 1^-,$$

e pelo Teorema 2.5 segue então que

$$u_n \sim \frac{1}{\log n},$$

e assim concluímos a prova de (b).

Para $s < 1$, note que $u_n \rightarrow \frac{1}{M}$ quando $n \rightarrow \infty$, pois de (3.23) temos que

$$u_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \frac{1}{D(1)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} d_k} = \frac{1}{M}. \quad (3.24)$$

Agora temos que a relação

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n}$$

implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n}, \quad (3.25)$$

no qual $d_n^{(1)}$ foi definido em (3.15) e

$$w_n = M u_n - 1 \quad (n \geq 0). \quad (3.26)$$

de fato:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (M u_n - 1) z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \\ &= M \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \\
&= M \sum_{n=0}^{\infty} z^n - [d_0 + (d_0 + d_1)z + (d_0 + d_1 + d_2)z^2 + \dots \\
&\quad \left(\sum_{k=0}^n d_k \right) z^n + \dots] \\
&= M \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n d_k \right) z^n \\
&= \left(M - \sum_{k=0}^n d_k \right) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} z^n.
\end{aligned}$$

Além disso temos que a sequência w_n é positiva e decresce monotonicamente para 0, pois podemos escrever $w_n = M \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k$, já que de (3.26) e de (3.24) tiramos que

$$\begin{aligned}
w_n &= Mu_n - 1 = M \sum_{n=1}^{\infty} h_n - Mh_1 - \dots - Mh_n \\
&= M \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n - \sum_{k=1}^n h_k \right) \\
&= M \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k,
\end{aligned}$$

e novamente por (3.26) $w_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Primeiramente colocaremos $\frac{1}{2} \leq s < 1$, e por (3.16) temos que o termo $d_0^{(1)}$ é finito, logo o termo $d_n^{(1)}$ é finito mas a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} z^n$ é divergente para $z = 1$, pois de (3.25), quando $z \rightarrow 1^-$ temos que (ver (3.17))

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)}}{M} \sim \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Cn^{1-1/s}}{M}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Fazendo uma aproximação da série acima pela integral, temos que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} Cn^{1-1/s}}{M} \sim \frac{sC}{(2s-1)M} n^{2-1/s}, \quad n \rightarrow \infty,$$

e para este valor de s , aplicando o Teorema 2.5 equivale ao comportamento assintótico de

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \sim \frac{G'_1}{M(1-z)^{2-1/s}}, \quad z \rightarrow 1^-,$$

onde $G'_1 = \frac{sC}{(2s-1)}$. Como foi mostrado, w_n é uma sequência monótona, e assim, novamente pelo Teorema 2.5 segue que

$$w_n \sim \frac{1}{\Gamma(2 - \frac{1}{s})} n^{1-1/s} \frac{G'_1}{M},$$

ou ainda

$$w_n \sim G_1 n^{1-1/s},$$

$$\text{onde } G_1 = \frac{sG'_1}{M(s-1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{s}) \sin(\frac{\pi}{s})}{\pi}.$$

De forma mais geral, usando novamente (3.16), temos que se $\frac{1}{l+1} \leq s < \frac{1}{l}$, com $l > 1$, então para $k \leq l$ o termo $d_0^{(k)}$ é finito, logo o termo $d_n^{(k)}$ é finito mas a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} z^n$ é divergente para $z = 1$. Neste caso, (3.25) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} z^n \\ &= (z-1)^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} z^n + \sum_{k=2}^l (z-1)^{k-2} (d_0^{(k-1)} + d_0^{(k)}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Colocando em evidência o termo $(-1)^{l-1}(1-z)^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} z^n$ em (3.27), temos que

$$(-1)^{l-1}(1-z)^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} z^n \left(1 + \frac{\sum_{k=2}^l (-1)^{k-l-1} (1-z)^{k-l-1} (d_0^{(k-1)} + d_0^{(k)})}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} z^n} \right). \quad (3.28)$$

Aplicando o mesmo raciocínio usado anteriormente, mas agora para este valor de s , de

(3.16) temos que

$$\frac{(1-z)^{l-1}}{M} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(l)} \sim \frac{G'_1}{M} (1-z)^{l-1} n^{l+1-1/s}, \quad n \rightarrow \infty,$$

sendo que o termo entre parênteses de (3.28) tende a 1 e $G'_1 = \frac{sC_l}{sl-1}$. Assim aplicando novamente o Teorema 2.5, isto equivale ao comportamento assintótico de

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \sim \frac{G'_1}{M(1-z)^{2-1/s}}, \quad z \rightarrow 1^-,$$

e assim temos que

$$w_n \sim \frac{1}{\Gamma(2 - \frac{1}{s})} n^{1-1/s} \frac{G'_1}{M},$$

ou ainda

$$w_n \sim G_1 n^{1-1/s},$$

$$\text{onde } G_1 = \frac{sG'_1}{M(s-1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{s}) \sin(\frac{\pi}{s})}{\pi}.$$

Resta mostrar que $z = 1$ é uma singularidade não-polar para $\phi(z)$. Para isto, de (3.16) temos que se $s \geq 1$ então $(1-z)\phi(z) \rightarrow 0$ apesar de $\phi(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow 1^-$. Além disso, se $\frac{1}{l+1} \leq s < \frac{1}{l}$ então denotando por $F_l(z)$ a expressão em (3.27), obtemos novamente por (3.16) que $(z-1)^l F_l(z) \rightarrow 0$, mas $(z-1)^{l-1} F_l(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow 1^-$. Assim a afirmação segue então para cada uma destas afirmações, em particular para $\phi(z)$. \square

4 MIXING E SCALING

Neste capítulo analisaremos o comportamento assintótico das taxas de Mixing e de Scaling, dadas a partir dos coeficientes da função geradora $\phi(z)$. Este comportamento gera dois teoremas que são o objetivo de estudo deste trabalho, o Teorema A que analisa o comportamento assintótico da taxa de Mixing quando a medida invariante é finita e o Teorema B que analisa o comportamento assintótico da taxa de Scaling quando a medida invariante é infinita.

4.1 TAXA DE MIXING

Nesta seção, provaremos o Teorema A. Para isto, precisaremos de alguns resultados que construirão sua demonstração no decorrer do texto. Como consequência do Teorema 3.5.2, dado $U \in L^2([0, 1], \mathbb{B}, \nu)$ podemos considerar a série de potência formal $S_U(z)$ dada por:

$$S_U(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \nu(U \cdot U \circ f^n).$$

Proposição: 4.1.1. *Para $U = 1_{A_1}$, função característica do intervalo A_1 , temos que*

$$\nu(1_{A_1} \cdot 1_{A_1} \circ f^n) = \nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) = u_n, \quad (4.1)$$

e portanto

$$S_{1_{A_1}}(z) = \phi(z). \quad (4.2)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \nu(1_{A_1} \cdot 1_{A_1} \circ f^n) &= \int_{[0,1]} 1_{A_1} \cdot 1_{A_1} \circ f^n d\nu = \int_{[0,1]} 1_{A_1} \cdot 1_{f^{-n}(A_1)} d\nu \\ &= \int_{[0,1]} 1_{A_1 \cap f^{-n}(A_1)} d\nu = \nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) \\ &= u_n, \end{aligned}$$

sendo que a ultima igualdade acima foi verificada na Seção 3.5. □

Assumindo que $s < 1$ e que $M < \infty$, usando (4.2) obtemos a função geradora da função de autocorrelação da medida de probabilidade $\mu = \frac{\nu}{M}$ para a função observável

1_{A_1} dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n [\mu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) - (\mu(A_1))^2] = (\mu(A_1))^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \quad (4.3)$$

onde $\mu(A_1) = \frac{1}{M}$ e os w'_n s são definidos na afirmação (a) do Teorema 3.5.2.

De fato:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n [\mu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) - (\mu(A_1))^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\frac{\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))}{M} - \left(\frac{\nu(A_1)}{M} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\left(\frac{\nu(A_1)}{M} \right)^2 \left(M \frac{\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))}{(\nu(A_1))^2} - 1 \right) \right] \\ &= (\mu(A_1))^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n M \frac{\nu(A_1 \cap f^{-n}(A_1))}{(\nu(A_1))^2} - 1. \end{aligned}$$

O resultado segue de (4.1), (3.26) e pelo fato que $(\nu(A_1))^2 = 1$.

□

Proposição: 4.1.2. *O comportamento assintótico de w_n em (4.3) é dado por:*

$$\mu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) - (\mu(A_1))^2 \sim G_1 (\mu(A_1))^2 n^{1-\frac{1}{s}}. \quad (4.4)$$

Demonstração. Da parte (a) do Teorema 3.5.2, temos que $w_n = M u_n - 1 \sim G_1 n^{1-\frac{1}{s}}$. Comparando os coeficientes que acompanham z^n de (4.3) segue que

$$(\mu(A_1))^2 w_n \sim (\mu(A_1))^2 G_1 n^{1-\frac{1}{s}}.$$

Logo $\mu(A_1 \cap f^{-n}(A_1)) - (\mu(A_1))^2 \sim G_1 (\mu(A_1))^2 n^{1-\frac{1}{s}}$.

□

Agora faremos uma construção análoga a (3.21) para um conjunto A_k qualquer. Para isso, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, $k > 1$, definiremos $u_n^{(k)} = \nu(A_k \cap f^{-n}(A_k))$.

Observação 4.1.3. Note que $u_n^{(k)} = 0$ para $0 < n < k$, pois podemos interpretar $u_n^{(k)}$ como sendo o conjunto dos pontos que “saem” de A_k e retornam n iteradas depois em A_k . Logo, para $0 < n < k$ as iterações não terão retornado à A_k e portanto $\nu(A_k \cap f^{-n}(A_k))$ é zero.

Proposição: 4.1.4. *A partir da definição de $u_n^{(k)}$, obtemos a seguinte relação de recorrência:*

$$\frac{u_n^{(k)}}{\nu(A_k)} = u_0 \rho_n + \dots + u_{n-k} \rho_k, \quad n \geq k. \quad (4.5)$$

Demonstração. Fazendo uma construção análoga a demonstração da Proposição 3.4.1,

obtemos que

$$u_n^{(k)} = \nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) = \sum_{r=k}^n \nu(r_{A_k}(x)) u_{n-r}^{(k)},$$

onde $r_{A_k}(x)$ denota a função tempo de retorno em A_k .

A partir de (3.9) e (3.10) temos que

$$\nu(r_{A_k}(x)) = \nu(A_k \cap f^{-r}(A_k)) = \frac{m(A_k \cap f^{-r}(A_k))}{m(A_k)} \nu(A_k),$$

mas por uma análise nas pré-imagens obtemos que

$$m(A_k \cap f^{-r}(A_k)) = m(A_k) \nu(B_r).$$

Substituindo este último resultado na equação anterior temos que

$$u_n^{(k)} = \sum_{r=k}^n \nu(A_k) \nu(B_r) u_{n-r}^{(k)}.$$

E assim segue o resultado. □

A proposição anterior garante a seguinte relação:

$$\frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) = \phi(z) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n, \quad (4.6)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) &= \frac{1}{M\mu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n M\mu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) \\ &= \phi(z) \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n. \end{aligned}$$

Com isto

$$\sum_{n=k}^{\infty} z^n \mu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) = \mu(A_k) \phi(z) \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n.$$

Logo

$$\sum_{n=k}^{\infty} z^n [\mu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) - (\mu(A_k))^2] = \mu(A_k) \phi(z) \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n - \sum_{n=k}^{\infty} (\mu(A_k))^2 z^n.$$

Portanto

$$\sum_{n=k}^{\infty} z^n [\mu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) - (\mu(A_k))^2] = (\mu(A_k))^2 \left[\frac{1}{\mu(A_k)} \phi(z) \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \right]. \quad (4.7)$$

E assim, obtemos uma expressão para a função geradora da função correlação de 1_{A_k} a partir de (4.7).

Proposição: 4.1.5. *O termo que está em colchetes na equação (4.7), pode ser decomposto em $S_k(z) + R_k(z)$ com*

$$S_k(z) = \frac{\sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n}{\nu(A_k)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n w_n \quad (4.8)$$

e

$$R_k(z) = \frac{\sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n}{\nu(A_k)(1-z)} - \sum_{n=k}^{\infty} z^n = -\frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} d_n z^n. \quad (4.9)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} S_k(z) + R_k(z) &= \frac{\sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n}{\nu(A_k)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n w_n + \frac{\sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n}{\nu(A_k)(1-z)} - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \\ &= \frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n (Mu_n - 1) + \frac{1}{\nu(A_k)(1-z)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \\ &= \frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n \left(M\phi(z) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) + \frac{1}{\nu(A_k)(1-z)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \\ &= \frac{M}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} \phi(z) \rho_n z^n - \frac{1}{\nu(A_k)(1-z)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n + \frac{1}{\nu(A_k)(1-z)} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n \\ &\quad - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \\ &= \frac{1}{\mu(A_k)} \phi(z) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} z^n \rho_n - \sum_{n=k}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

□

Agora utilizaremos o seguinte Lema que pode ser encontrado em Chung [8] p.20.

Lema: 4.1.6. *Seja $\{s_n\}_{n \geq 0}$ uma seqüência de números não negativos, com os termos nem todos nulos simultâneamente. Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\sum_{m=0}^n s_m} = 0$$

então, sempre que a seqüência $\{t_n\}_{n \geq 0}$ de números reais tiver um limite, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^n s_m t_{n-m}}{\sum_{m=0}^n s_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Note que a sequência $s_n = \rho_{k+n}$ satisfaz as hipóteses do Lema anterior, pois

$$\frac{\rho_{k+n}}{\sum_{m=0}^n \rho_{k+m}} \sim \frac{\rho_{k+n}}{\nu(A_k)} = \frac{d_{k+n-1} - d_{k+n}}{d_{k-1}} \rightarrow 0 \quad \text{para } (n \rightarrow \infty).$$

E assim, reescrevendo $S_k(z)$ como $\frac{1}{\nu(A_k)} \sum_{n=k}^{\infty} b_n z^n$, onde $b_n = \sum_{m=0}^{n-k} w_{n-k-m} \cdot \rho_{k+m}$, aplicamos o resultado do Lema com $t_m = w_m$ e $s_m = \rho_{k+m}$.

Logo vemos que o coeficiente de z^n (com $n \geq k$) em $S_k(z)$ tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\frac{\sum_{m=0}^{n-k} \rho_{k+m} \cdot w_{n-k-m}}{\sum_{m=0}^{n-k} \rho_{k+m}} \sim \frac{\sum_{m=0}^{n-k} \rho_{k+m} \cdot w_{n-k-m}}{\nu(A_k)} \sim w_n, \quad (4.10)$$

onde (3.9) foi usado para garantir a equivalência assintótica anterior para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ fixado. Colocando (4.7), (4.10) juntamente com a afirmação (a) do Teorema 3.5.2 e (3.16), temos que:

$$\mu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) - (\mu(A_k))^2 \sim G_1(\mu(A_k))^2 n^{1-(1/s)}. \quad (4.11)$$

Observação 4.1.7. Note que este comportamento assintótico é válido para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, mas não há uniformidade em k , pois necessita de valores cada vez maiores para que se tenha o limite.

Agora consideraremos um subconjunto qualquer de Borel $E \subseteq A_k$, com $m(E) > 0$. Pela Observação 4.1.3, temos que $\mu(E \cap f^{-n}(E)) = 0$ para $0 < n < k$, e

$$\frac{\nu(E \cap f^{-n}(E))}{\nu(E)} = u_0 m(f^{-(n-k)}(E) \cap A_n) + \dots + u_{n-k} m(E), \quad (4.12)$$

para $n \geq k$, pois sempre que $F \subseteq B_l$, temos que $\nu(F) = m(H)$ com $H = f(F) \subseteq A_l$. Portanto a função geradora da função de correlação de 1_E é exatamente o mesmo que (4.7), desde que A_k seja substituído por E e ρ_n por $m(f^{-(n-k)}(E) \cap A_n)$ ($n \geq k$). Seguindo o raciocínio acima, juntamente com o fato de que $\nu(E) = \sum_{l \geq 0} m(f^{-l}(E) \cap A_{k+l})$, temos que:

$$\mu(E \cap f^{-n}(E)) - (\mu(E))^2 \sim G_1(\mu(E))^2 n^{1-(1/s)}. \quad (4.13)$$

De forma totalmente análoga, podemos mostrar que (4.13) vale para $E \subseteq \bigcup_{l \in G} A_l$, onde $G \subset \mathbb{Z}^+$ é conjunto finito qualquer.

Definição 4.1.8. Seja \mathbb{B} a σ -álgebra de Borel em $[0, 1]$. Dado $E \subset \mathbb{B}$, definimos a taxa de Mixing $\mu_n(E)$ do conjunto E como:

$$\mu_n(E) := \frac{\mu(E \cap f^{-n}(E)) - (\mu(E))^2}{(\mu(E))^2}. \quad (4.14)$$

A taxa de mixing não é uniforme em $E \subset \mathbb{B}$, pois como vimos, devemos analisar a interseção do conjunto E com cada conjunto A_k . E assim, podemos ter que analisar uma quantidade enumerável de interseções. Porém a taxa de mixing pode ser redefinida para um conjunto B^+ da seguinte maneira:

$$B^+ := \bigcup_{\epsilon} \{E \in \mathbb{B} : m(E) > 0, E \subseteq [0, 1] \setminus (0, \epsilon)\}.$$

Uma consequência da nossa discussão é o seguinte resultado:

Lema: 4.1.9. *Seja $E, F \in B^+$. Então $\mu_n(E) \sim \mu_n(F)$.*

Logo podemos definir a taxa de mixing $\mu_n(f)$ de uma aplicação f como a velocidade de decaimento assintótico das sequências $\{\mu_n(E)\}$, com $E \in B^+$. Resumindo, de (4.13) juntamente com o Lema 4.1.9, temos que quando $M < \infty$ então $\mu_n(f) = G_1 n^{1-(1/s)}$, encerrando a demonstração do Teorema A.

Observação 4.1.10. Seja $E \subset \mathbb{B}$, com $0 < m(E) < 1$, e $E^c = [0, 1] \setminus E$. Temos a seguinte identidade

$$\frac{\mu(E^c \cap f^{-n}(E^c))}{\mu(E^c)} + \frac{\mu(E^c \cap f^{-n}(E))}{\mu(E^c)} = 1.$$

Além disso, μ sendo f -invariante, temos que

$$\frac{\mu(E \cap f^{-n}(E))}{\mu(E)} + \frac{\mu(E^c \cap f^{-n}(E))}{\mu(E)} = 1.$$

Podemos ainda subtrair $\mu(E) + \mu(E^c) = 1$ a partir destas duas relações, multiplicamos as identidades resultantes por $\mu(E^c)$ e $\mu(E)$, respectivamente, e comparamos os resultados até obtermos o seguinte:

$$\mu(E \cap f^{-n}(E)) - (\mu(E))^2 = \mu(E^c \cap f^{-n}(E^c)) - (\mu(E^c))^2.$$

Assumimos que $E \subset B^+$ tal que $E^c \not\subset B^+$, assim, pela identidade acima, utilizando o Lema 4.1.9 e o Teorema 3.5.2 temos que:

$$\mu_n(E^c) = \left(\frac{\mu(E)}{\mu(E)^c} \right)^2 G_1 n^{1-(1/s)}, \quad E \subset B_+, \quad 0 < m(E) < 1.$$

Podemos utilizar este fato, por exemplo, para avaliar a taxa de mixing do conjunto $D_k = \bigcup_{l>k} A_l$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$.

Observação 4.1.11. Ressaltamos que o Teorema A nos dá a exata taxa de mixing da aplicação f , não apenas um limite para ela. Em particular, melhoram todos os limites

conhecidos previamente. Os resultados acima podem ser visto como afirmações sobre o decaimento de correlações para funções testes tão simples como a características de um conjunto em B^+ . Isso faz com que a taxa de mixing (como foi definida acima) seja determinada simplesmente pela distribuição de tempos de retorno: $\nu\{x \in X : \tau(x) > n\}$. Por outro lado, quando lidamos com funções de correlação de uma classe mais ampla de observáveis, espera-se um comportamento mais rico, dependendo das propriedades de suavidade das funções envolvidas.

4.2 TAXA DE SCALING

Nesta seção detalharemos a prova do Teorema B que também será construída no decorrer do texto. Começamos com a seguinte definição:

Definição 4.2.1. Quando $M = \infty$, dado $E \subset \mathbb{B}$ com $\nu(E) > 0$, podemos definir a *taxa de Scaling* $\sigma_n(E)$ de E como:

$$\sigma_n(E) := \frac{\nu(E \cap f^{-n}(E))}{(\nu(E))^2}.$$

Note que $\sigma_n(A_1) = u_n$. Além disso, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, usando (4.6) e o Lema 4.1.6 para $t_m = u_m$ e $s_m = \rho_{k+m}$, em $\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$, onde $c_n = \sum_{m=0}^{n-k} \rho_{k+m} \cdot u_{n-k-m}$, temos que

$$\nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) \sim \nu(A_k) \sum_{m=0}^{n-k} \rho_{k+m} \cdot u_{n-k-m} \sim (\nu(A_k))^2 u_n. \quad (4.15)$$

Observação 4.2.2. Note que a segunda equivalência acima segue de (4.10) substituindo w_n por u_n , onde é válido para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ fixado.

Logo, se colocarmos (4.6), (4.15) juntamente com a afirmação (b) do Teorema 3.5.2, temos que se $s > 1$ então

$$\nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) \sim (\nu(A_k))^2 G_2 n^{-1+(1/s)}, \quad (4.16)$$

ou

$$\nu(A_k \cap f^{-n}(A_k)) \sim (\nu(A_k))^2 \frac{1}{\log n}, \quad (4.17)$$

para $s = 1$.

De uma maneira mais geral, podemos construir um raciocínio análogo ao que foi feito na seção anterior, ou seja, podemos considerar um subconjunto de Borel $E \subseteq A_k$ com $m(E) > 0$ e mostrar que para $s > 1$ temos que

$$\nu(E \cap f^{-n}(E)) \sim (\nu(E))^2 G_2 n^{-1+(1/s)}, \quad (4.18)$$

ou então

$$\nu(E \cap f^{-n}(E)) \sim (\nu(E))^2 \frac{1}{\log n}, \quad (4.19)$$

para $s = 1$.

Logo, teremos que $\sigma_n(E) \sim u_n$ para todo $E \in B^+$. Assim, definimos a taxa de scaling $\sigma_n(f)$ de uma aplicação f como a taxa de decaimento assintótico das sequências $\{\sigma_n(E)\}$, $E \in B^+$, que como consequência da afirmação (b) do Teorema 3.5.2, obtemos que se $M = \infty$, então

$$\sigma_n(f) = \begin{cases} G_2 n^{-1+\frac{1}{s}}, & \text{se } s > 1, \\ \frac{1}{\log n}, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

encerrando a demonstração do Teorema B.

Da forma como foi definida a taxa de scaling, podemos calcular outros objetos que surgem naturalmente na teoria ergódica de transformações que preservam medidas infinitas, a saber, a *taxa errante* $W_n(f)$ e a *sequência de retorno* $r_n(f)$. Segundo Thaler [32], sob certas condições de regularidade, uma transformação real com pontos fixos indiferentes possuem uma medida invariante infinita equivalente a medida de Lebesgue. Além disso, ele mostrou que para uma dada transformação f , a classe dos conjuntos com a mesma taxa errante mínima é grande o suficiente para fornecer um isomorfismo invariante. A taxa errante $W_n(E)$ de um conjunto de Borel E é dada por

$$W_n(E) = \nu \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(E) \right).$$

Assim como nos casos anteriores, a taxa errante também não é uniforme para $E \subset \mathbb{B}$, mas podemos redefini-la para o mesmo conjunto B^+ , onde obtemos o seguinte resultado

$$W_n(E) \sim W_n(F), \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{para todo } E, F \in B^+.$$

Desta maneira, definimos $W_n(f)$ como a taxa de crescimento das sequências $\{W_n(E)\}$, com $E \in B^+$ (sendo que em nosso caso, isto é simplesmente dado pelas somas parciais $\sum_{k=0}^n d_k$) e quando $n \rightarrow \infty$ temos que $W_n(f) \sim W_n(E)$, para qualquer $E \in B^+$. Estes resultados estão feitos com detalhes no artigo da referência citada acima (veja o Teorema 3).

Por outro lado, a existência de $r_n(f)$ é o que faz a transformação f ser dual ergódica pontualmente, ou seja,

$$\frac{1}{r_n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k U \rightarrow e.m(U),$$

para qualquer $U \in \mathbb{L}_1([0, 1], \mathbb{B}, \nu)$, sendo que P aqui é o operador dual para f agindo em $\mathbb{L}_1([0, 1], \mathbb{B}, \nu)$, satisfazendo

$$\int PU.G dm = \int U.G \circ f dm.$$

Neste caso Aaronson [2] mostrou que transformações dual ergódicas pontualmente possuem conjuntos com taxas errantes minimais (veja Teorema 3.8.3, p.134).

Porém, note que a propriedade não implica que as somas parciais

$$\frac{1}{r_n} \sum_{k=0}^{n-1} U \circ f^k,$$

converge em m -q.t.p para o número $\nu(U)$. Pelo contrário, pode ser visto em Aaronson [2] e Campanino e Isola [4] que não vale, nem mesmo para uma sequência particular de constantes r_n . Porém, se a sequência r_n é (assintoticamente equivalente para) a sequência de retorno, então as somas parciais converge em medida para $\nu(U)$. Agora, essas quantidades pode ser obtidas colocando juntos o Teorema B e equivalências assintóticas, no qual obtemos:

$$W_n(f) \sim \frac{n}{\sum_{k=0}^n \sigma_k}, \quad r_n(f) \sim \sum_{k=0}^n \sigma_k.$$

REFERÊNCIAS

- [1] Aaronson, J., *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, (AMS, 1997).
- [2] Aaronson, J., *The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measures*, J. d' Analyse Mathématique Vol. 39, p. 203-234 (1981).
- [3] Bartle, R. G., *The Elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley e Sons, Inc., New York, (1995).
- [4] Campanino, M. and Isola, S., *Infinite invariant measures for non-uniformly expanding transformations of $[0,1]$: weak law of large numbers with anomalous scaling*, Forum. Mathem. Vol. 8, p. 71-92 (1996).
- [5] Chernov, N., *Decay of correlations in dispersing billiards*, J. Statist. Phys. Vol. 94, p. 513-556 (1999).
- [6] Chernov, N., and Markarian, R. *Chaotic Billiards*, (AMS, 2006)
- [7] Chung, K. L., *A Course in Probability Theory*, (AP, 2001).
- [8] Chung, K. L., *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, (Springer, 1967).
- [9] Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Boston University, (1989)
- [10] Erdős, P.; Feller, W. and Pollard, H., *A property of power series with positive coefficients*, Bull. AMS Vol. 55, p. 201-204 (1949).
- [11] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, Vol.1, (Wiley, New York, 1970).
- [12] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, Vol.2, (Wiley, New York, 1970).
- [13] Feller, W. *Fluctuation theory of recurrent events*, TAMS, Vol. 67, p. 99-119 (1949).
- [14] Fisher, M. E., *The theory of condensation and the critical point*, Phys. Vol. 3, p. 255-283 (1967).
- [15] Gallager, R. G., *Discrete Stochastic Processes*, Kluwer, Boston, (1996).
- [16] Gallavotti, G., *Funzioni zeta e insiemi basilari*, Accad. Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat. Vol. 61, p. 309-317 (1976).
- [17] Gaspard, P. and Wang, X.-J., *Sporadicity: between periodic and chaotic dynamical behaviors*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, Vol. 85, p. 4591-4595 (1988).

- [18] Hardy, G. H., *Divergent Series*, (Oxford, 1989).
- [19] Isola, S., *Dynamical zeta functions and correlation functions for intermittent interval maps*, preprint (1997).
- [20] Isola, S., *Renewal sequences and intermittency*, Journal of Statistical Physics Vol. 97, p. 263-280 (1999).
- [21] Knill, O., *Probability and Stochastic Processes with Applications*, (Overseas Press, 2009).
- [22] Korevaar, J., *Tauberian Theory*, (Springer, 2004)
- [23] Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, (Springer, 2004)
- [24] Liverani, C., Saussol, B. and Vaienti, S., *A probabilistic approach to intermittency*, preprint (1997)
- [25] Lopes, A. O., *The zeta function, non-differentiability of the pressure and critical exponent of transition*, Adv. in Math. Vol. 101, p. 133-165 (1993).
- [26] National Institute of Standards Technology. *25 Zeta and Related Functions*, Digital Library of Mathematical Functions, <http://dlmf.nist.gov/25.11>
- [27] Pomeau, Y. and Manneville, P., *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Comm. Math. Phys. Vol. 74, p. 189-197 (1980).
- [28] Prellberg, T. and Slawny, J., *Maps of interval with indifferent fixed points: thermodynamic formalism and phase transitions*, J. Stat. Phys. Vol. 66, p. 503-514 (1992)
- [29] Robinson, C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, (CRC, 1994).
- [30] Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, (1988).
- [31] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, (1987).
- [32] Thaler, M., *Transformations on $[0,1]$ with infinite invariant measures*, Israel J. Math Vol. 46, p. 67-96 (1983).
- [33] Walters, P., *An introduction to ergodic theory*, Graduate texts in mathematics 79, Springer-Verlag, New York, (1982).
- [34] Wang, X.-J., *Statistical physics of temporal intermittency*, Phys. Rev. A. Vol. 40, p. 6647 (1989).
- [35] Young, L.-S., *Recurrence times and rates of mixing*, Israel J. Math, Vol. 110, p. 153-188 (1999).
- [36] Zhang, H. K., *Decay of Correlations on Non-Hölder Observables*, International Journal of Nonlinear Science Vol. 1749, p. 3889-3897 (2011).