

Tese de Doutorado

Espaço cósmico emergente, considerações
da teoria de MOND e da termoestatística
não-extensiva

Daniel O. de Souza

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu

Coorientador: Prof. Dr. Jorge Ananias Neto

Juiz de Fora
31 de outubro de 2018

Espaço cósmico emergente, considerações da teoria de MOND e da termoestatística não-extensiva

Daniel Oliveira de Souza

Tese para o Curso de Doutorado em Física, Área da Física Teórica, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em 31 de outubro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. Everton M. C. de Abreu (Orientador)
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof.Dr. Jorge Ananias Neto (Coorientador)
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.Dr. Albert C. R. Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.Dr. Sidney Leonel
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.Dr. Clifford Neves
Universidade do Estado do Rio de Janeiro/Resende

Prof.Dr. José Abdalla Helayel-Neto Neves
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Em memória de meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, tudo que sou e por mais essa conquista.

*Ao meu orientador Prof. **Everton Abreu** , por acreditar em mim e pela orientação paciente e dedicada.*

*Ao meu coorientador Prof. **Jorge Ananias**, pelas correções, conselhos e dicas que muito me valeram.*

A Coodenação de Pós-Graduação.

Aos meus pais (em memória) pelo amor, carinho e apoio.

*A minha esposa, **Julieta**, pelo grande apoio e compreensão.*

Aos meus irmãos pela torcida e incentivo.

Aos meus colegas do curso, pelo conhecimento necessário para a edição desse trabalho.

*A **Universidade Federal de Juiz de Fora** e ao **Departamento de Física**.*

*Ao **Professor Wilson** (em memória), pela excelência na orientação no curso de mestrado e pela introdução ao curso de doutorado.*

*Ao órgão financiador do projeto, **CAPES**.*

Conteúdo

Resumo	1
Abstract	1
1 Introdução	1
2 O Princípio Holográfico	4
3 A Gravidade como Manifestação Entrópica	6
1 A Força Entrópica	7
2 A Lei de Newton pelo Princípio Holográfico	8
3 Correções Gravitacionais	9
4 Espaço Cósmico Emergente	13
5 Considerações sobre a Termodinâmica não-extensiva e o espaço cósmico emergente	18
6 Considerações na Teoria de MOND e a estatística não-extensiva	24
7 Conclusão	34

Resumo

Quando consideramos a física teórica, é antiga a busca das equações da teoria da relatividade geral como equações de estado termodinâmico. Desde então, existem novas conjecturas para compreender a gravidade de outro ponto de vista. Desse modo, podemos aceitar que o campo gravitacional não é um campo fundamental ou emergente, baseado no conhecimento de relatividade, termodinâmica de buracos negros e de diferentes formalismos estatísticos. Uma questão importante que faz parte dessa correspondência gravidade/termoestatística é se a superfície holográfica poderia ser bem definida a partir de uma fonte massiva, para um caso não-relativístico. Desde então, se torna relevante entender melhor o papel da superfície holográfica no conceito da gravidade. Nesta tese, usamos o formalismo de Verlinde e a proposta de Padmanabahn a fim de obter a menor correção quântica para a aceleração gravitacional e obter a teoria modificada da gravitação, por considerar a diferença não-nula entre os graus de liberdade da matéria (e energia escura) e da superfície holográfica. Analisamos, nesse contexto, as condições do universo puro de de Sitter, assim como o atual de modo assintótico, através do princípio holográfico. Essa análise foi feita também no contexto da termoestatística não-extensiva, com a qual analisamos as condições do índice entrópico para o estudo holográfico do cosmo.

Palavras-Chave: Formalismo holográfico de Verlinde, correções quânticas gravitacionais, teoria de MOND

Resumo

An old quest of theoretical physics is to find a way such that the general relativity equations can be written in terms of thermodynamical state equations. Since then, there are new conjectures to fathom gravitation from another point of view. In this way we can finally accept that the gravitational field is not an underlying or emergent field, based on the knowledge of relativity, black holes thermodynamics and different statistical formalisms. An important question that is part of this so-called gravity/thermostatistical correspondence is if the holographic surface could be well defined from a massive source, for the non-relativistic case. Since then, it is relevant to understand better the role of the holographic surface concerning the gravity concept. In this thesis, we used Verlinde's formalism and the Padmanabhan proposition to obtain the lowest quantum correction relative to the gravitational acceleration and, in this way, to obtain a modified gravitation theory, by considering the non-zero difference between the matter degrees of freedom (dark energy) and the holographic surface. In this scenario we have analyzed the de Sitter pure Universe's conditions as well as the current asymptotic mode, through the holographic principle. This analysis was carried out also by using the non-extensive thermostatics. By using this result we have analyzed the entropic indice concerning the cosmic holographic analysis. Keywords: Verlinde's holographic formalism, quantum gravitational corrections, MOND theory

Capítulo 1

Introdução

Um dos maiores desafios da física teórica moderna é unificar a teoria da gravitação, relatividade geral, com a teoria quântica, ou seja, a mecânica quântica. Embora seja um pensamento antigo descrito na literatura, existem dúvidas se o motivo da grande dificuldade em quantizar a relatividade geral seria do fato de se estar trabalhando com uma teoria efetiva. Outra questão seria se a atração gravitacional não é fundamental. Em sua defesa, podemos dizer que a relatividade geral é uma teoria exata que descreve a dinâmica dos objetos que compreendem nosso Universo. Resultados recentes da LIGO [1] apontam para a verificação de ondas gravitacionais previstas pela relatividade geral. Resultado que, acrescentado às várias outras experiências já reconhecidas, reforçam a veracidade da teoria de Einstein. Esses resultados, entretanto, não respondem definitivamente sobre o perfil fundamental da teoria da gravitação universal.

Existem várias evidências teóricas que apontam para o perfil termodinâmico da gravidade. Os trabalhos de J. Bekenstein¹ e S. Hawking² [2, 3, 4], por exemplo, conectam propriedades do buraco negro com as leis da termodinâmica descrevendo a criação de partículas pelo campo gravitacional. A obtenção das equações de Einstein pela entropia proposto por Jacobson[5, 6, 7], onde ele propôs que a gravitação deve ser uma teoria efetiva, é outro exemplo. Nesse caso, ele usou as relações de Clausius $\delta E = T\delta S$ e o conceito de que a matéria presente seja considerada parte da energia do universo. Além disso, podemos mencionar o trabalho de Raamsdonk *et al.* no qual as equações de Einstein são deduzidas pelas leis do emaranhamento.

Esta tese aborda a questão da gravidade apoiado nos estudos do *princípio holográfico*. Esse princípio tem alicerce nos trabalhos de J. Bekenstein e S. Hawking sobre os buracos negros, na década de 1970. A analogia que se faz é entre a superfície de horizonte de um buraco negro e a superfície bidimensional de onde se pode, por difração da luz, obter uma imagem tridimensional (holografia). Dessa superfície de horizonte teria-se informações do buraco negro mediante sua entropia. O

¹Jacob David Bekenstein (1947-2015)

²Stephen Hawking (1942-2018)

tema ganha relevância com os trabalhos de G. t' Hooft³ e L. Susskind⁴ na década de 1990, com os quais aliás o princípio é nomeado como *princípio holográfico* [8, 9].

Nosso trabalho [23] especificamente toma como ponto de partida a proposta de E. Verlinde⁵ [28], o qual também se vale do princípio holográfico para propor que a gravidade de uma partícula massiva seja um resultado espontâneo da modificação de informações (*bits*) no espaço em torno dessa partícula. Verlinde obteve a lei de Newton da gravidade pelo uso de argumentos holográficos. Com a relação entre área-entropia de Bekenstein-Hawking para buracos negros, Verlinde sugeriu que a gravidade é uma manifestação entrópica. A força gravitacional resulta da modificação da entropia da informação, que estaria armazenado em uma esfera holográfica. Considera-se a entropia como a informação relativa à posição dos corpos materiais em torno de um ponto de massa M a uma distância R . Além disso, todos os pontos a essa distância são usados para definir uma superfície esférica Σ imerso em um espaço tridimensional. Quando mudamos os bits de informação localizados nessa superfície, a força aparece como uma reação a essa mudança.

Abordamos ainda três assuntos em nosso trabalho, o primeiro diz respeito ao tema relevante do formalismo da dinâmica Newtoniana modificada ou MOND, do inglês *Modified Newtonian Dynamics*. Ela foi construída por M. Milgrom⁶ [27] para explicar as propriedades gerais de galáxias observadas, como suas velocidades de rotação e a aceleração desses imensos corpos. Segundo observações astronômicas [28, 29], os valores observados das velocidades das galáxias em aglomerados são maiores do que os calculados com a mecânica de Newton. As acelerações das galáxias verificadas pelas observações são extremamente pequenas e, sob essa condição, teria-se uma violação das leis de Newton. Essas acelerações de valor baixo são de propriedades características desses objetos que estão longe de nosso sistema solar.

Um modelo cosmológico baseado nos conceitos de MOND [36, 37, 38] então foi formulado para atender esse limite. O segundo trata do trabalho do físico indiano T. Padmanabhan⁷ [16], onde ele trata da emergência do espaço-tempo como consequência da expansão do Universo e sob o ponto de vista do princípio holográfico. O terceiro tema refere-se à introdução à termoestatística não-extensiva proposta por C. Tsallis⁸ que aborda o conceito de entropia em sistemas mais gerais.

Através da proposta de Verlinde permeamos esses três temas citados acima com os parâmetros da teoria holográfica e da termo-estatística não-extensiva, para estudarmos um modelo de expansão do universo [19, 20].

O trabalho foi organizado de modo que no capítulo 2 descrevemos brevemente alguns pontos do conceito de princípio holográfico. O capítulo 3 está reservada

³Gerardus t'Hooft - físico teórico holandês (1946-)

⁴Leonard Susskind - físico teórico norte-americano (1940-)

⁵Erick Peter Verlinde - físico teórico holandês (1962-)

⁶Mordehai Milgrom - físico israelense (1946-)

⁷Thinakkal Padmanabhan - físico indiano (1931-)

⁸Constantino Tsallis - físico teórico greco-brasileiro (1943-)

à apresentação dos estudos de Verlinde. No capítulo 4, abordamos o modelo de T. Panamadabahn do espaço cósmico emergente. O capítulo 5 está com o tema da termoestatística não-extensiva de Tsallis e o contexto entrópico. O capítulo 6 aborda a descrição da teoria de MOND via teoria termoestatística não-extensiva e no capítulo 7 fazemos as considerações finais com perspectivas de novos trabalhos.

Capítulo 2

O Princípio Holográfico

Um princípio físico pode surgir de uma constatação nova e que, até então, não era reconhecida. Esse princípio ou lei, após inúmeras verificações, se torna a partir daí estabelecida até um fato provar o contrário. Um exemplo disso é a constatação de que a matéria inercial e gravitacional são praticamente iguais. A partir disso, Einstein propõe então o princípio da equivalência e desenvolve a teoria geral da relatividade.

Podemos entender que o *princípio holográfico* é um princípio semelhante a aquele. Sua constatação inexplicável pela teoria vigente é a quantidade de informação limitada em regiões do espaço-tempo. Sua origem deve ser explicada por uma nova teoria.

A ideia central do princípio holográfico é de que uma teoria quântica sem gravitação, e de dimensão definida no espaço-tempo, pode descrever fenômenos físicos que incluem a manifestação de gravidade em espaço-tempo de dimensão superior. Estudos da física dos buracos negros (Jakob Bekenstein [2]; S. Hawking [3]) conduziram para a hipótese de que as teorias de gravidade quântica dentro de um volume correspondem a teorias *sem gravitação* na fronteira desse volume. É uma noção de que a gravidade *emerge* de processos descritos por uma teoria sem gravidade.

Esse desenvolvimento teórico indica que parte dos graus de liberdade microscópicos do sistema são representados holograficamente sobre uma superfície de fronteira, que chamamos de *superfície holográfica*. Aliás, o nome do princípio tem origem no trabalho de G. 't Hooft [8]. Como foi desenvolvido em seu trabalho, a teoria da entropia de uma quantidade de matéria dentro de um espaço limitado descreve que toda a física em uma região do espaço é descrita pelos dados que preenchem a fronteira desse espaço, em um bit por área de Planck. Isso é análogo ao conceito de um *holograma*¹.

Os fundamentos do princípio holográfico repousam sobre os estudos de Bekenstein [2]. Nesses estudos Bekenstein introduziu a noção da entropia dos buracos

¹Holografia é uma tecnologia óptica pela qual uma imagem tridimensional é armazenada em uma superfície bidimensional por meio de um padrão de difração.

negros. Assumindo uma gravidade fraca, uma simetria esférica e outras condições, estabeleceu-se que a entropia em uma região do espaço é limitada pela área de sua fronteira. Baseados nessa “entropia esférica fechada” G. 't Hooft [8] e L. Susskind [9] formularam o princípio holográfico.

Capítulo 3

A Gravidade como Manifestação Entrópica

Nesse capítulo descreveremos o cenário holográfico na visão de Verlinde. Analisamos e interpretamos as condições e detalhes do formalismo, a estrutura lógica do argumento de Verlinde, assim como as consequências conceituais desse formalismo.

Como falamos anteriormente, o formalismo proposto por Verlinde [11] obtém a aceleração gravitacional pelo uso do *princípio holográfico* e pela lei da equipartição de energia. Suas ideias baseiam-se no fato de que a gravitação pode ser considerada universal e independente das micro-estruturas do espaço-tempo. Além disso, ele trouxe novos conceitos a respeito de holografia [8, 9] como o de que o princípio holográfico unifique matéria, gravidade e mecânica quântica.

Um importante conceito usado por Verlinde é a noção de *bit*, entendido como a menor unidade de informação em uma superfície holográfica. Os bits têm, de fato, um papel essencial no formalismo de Verlinde, porque quando o número total de bits satisfaz completamente a lei de equipartição de energia, temos a conhecida fórmula da aceleração clássica da gravidade. O objetivo, portanto, de nosso trabalho é mostrar que quando consideramos que o número total de bits satisfaz o teorema da equipartição, então, em um primeiro momento, podemos obter dois resultados importantes, a correção quântica da aceleração gravitacional e uma teoria tipo *MOND*.

Verlinde mostra que os princípios de Newton, assim como a lei universal de gravitação Newtoniana, surgem naturalmente e inevitavelmente de uma teoria na qual o espaço é *emergente* através de um cenário holográfico. A gravidade seria uma propriedade originária da mudança na informação a respeito das posições dos corpos materiais. Essa variação das informações (matéria e sua posição) seria medida em termos da *entropia* do sistema. As mudanças nessa entropia quando a matéria é deslocada nos conduz para uma *força entrópica*, a qual Verlinde mostra ser a força gravitacional. Sua origem está baseada portanto na tendência do aumento da entropia do sistema, independente da estrutura microscópica do espaço-tempo.

Considera-se uma superfície esférica no espaço tridimensional no qual uma teoria quântica é definida. Embora a teoria quântica não seja explícita admite-se que todas as propriedades físicas lidas na superfície são oriundas da *mudança de informação* no interior da superfície esférica. A área dessa superfície é imaginada como sendo dividida em células pequenas, cada uma com um *bit* de informação. Um estado físico corresponde a uma distribuição de 0's e 1's sobre as células da superfície holográfica e a evolução do tempo desse estado corresponde à mudança de informação.

O número de bits na superfície holográfica é considerado muito grande, por isso admite-se o estudo termodinâmico efetivo ao invés do estudo quântico nesse nível microscópico. E, do ponto de vista termodinâmico, o número de estados possíveis nessa superfície aumenta o valor da entropia para o máximo.

1 A Força Entrópica

Em um sistema de muitos graus de liberdade, a força entrópica desponta como uma força macroscópica, consequência da tendência estatística do crescimento da entropia do sistema em termos microscópicos. A equação que faz a ponte entre esses dois extremos, o micro e o macro-estado é a equação da entropia de Boltzmann-Gibbs [44],

$$S(N, V, E) = k \ln [\Omega(N, V, E)], \quad (3.1)$$

onde k é a constante de Boltzmann e Ω é o número de microestados acessíveis do sistema. N é o número total de partículas, V é o volume onde o sistema está confinado e E é a energia total do sistema. N , V e E definem o macroestado do sistema. Os parâmetros intensivos, temperatura T e pressão p são obtidos da Eq. (3.1) como

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{p}{T}. \quad (3.2)$$

Se derivarmos a segunda equação de (3.2) em relação a uma direção espacial x obtemos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{F}{T}, \quad (3.3)$$

onde F é a força entrópica.

Vamos reproduzir, a seguir, a obtenção da lei de Newton via formalismo de Verlinde.

2 A Lei de Newton pelo Princípio Holográfico

O modelo considera uma superfície esférica como sendo a superfície holográfica com a partícula de massa M localizada em seu centro. Ou seja, a partícula, no seu movimento, carrega com ela, a superfície holográfica. A tela holográfica pode ser imaginada como um depósito de dados para a informação da partícula. O número de bits, os quais são as menores unidades de informação na tela holográfica, é considerado proporcional à área A da tela holográfica

$$N = \frac{A}{l_P^2}, \quad (3.4)$$

onde A representa a área de uma superfície esférica, a saber,

$$A = 4\pi R^2, \quad (3.5)$$

e o fator $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ é o *comprimento de Planck* e l_P^2 é a *área de Planck* ligada à entropia do buraco negro por $A/4l_P^2$. Podemos ver claramente que a conexão entre l_P e \hbar caracteriza l_P como um parâmetro quântico. Isso significa (pelo menos) que sua introdução pode ser considerada uma aproximação semi-clássica.

Vamos supor que os bits formam um sistema termodinâmico em equilíbrio. A *temperatura* T desse sistema relaciona-se com a energia total da partícula através da lei da equipartição de energia

$$E = \frac{1}{2}Nk_B T, \quad (3.6)$$

obtida da termoestatística usual de BG.

Podemos definir agora o M através de

$$E = Mc^2, \quad (3.7)$$

onde, na superfície, o M é uma expressão alternativa para a energia termodinâmica. Mais a frente ela será interpretada como a massa gravitacional total no interior da superfície holográfica.

Vamos imaginar uma outra partícula de massa m , exterior à superfície holográfica, que se aproxima da superfície esférica holográfica de modo que sua distância à superfície modifique Δx . O mesmo intervalo de tempo dessa aproximação ocorre no interior (bulk) da superfície. Como todas as modificações que ocorrem no interior da superfície são descritas pelos bits, a entrada da partícula externa será detectada. A massa do interior aumenta e o número de informações codificadas em *bits* na superfície também aumenta. Seguindo a idéia de Bekenstein, Verlinde entende que esse aumento da massa implicaria no aumento da *entropia* segundo a relação,

$$\Delta S = 2\pi k_b \frac{mc}{\hbar} \Delta x \quad (3.8)$$

A incidência da partícula no interior da superfície é promovida pela *força entrópica* F oriunda do aumento da entropia e segundo a Eq. (3.3) essa força vem da relação

$$F\Delta x = T\Delta S. \quad (3.9)$$

Usando as Eqs. (3.4) a (3.9) encontramos que

$$F = G \frac{Mm}{R^2}. \quad (3.10)$$

Destacamos também que se utilizarmos a equação de Unruh da temperatura do espaço medida por um observador acelerado,

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}, \quad (3.11)$$

junto com as Eqs. (3.4), (3.6), (3.7) e (3.11), chegamos a aceleração gravitacional de Newton,

$$a = \frac{GM}{r^2}, \quad (3.12)$$

onde G é igual a

$$G = l_P^2 c^3 / \hbar. \quad (3.13)$$

Observa-se portanto como é nítida a interação gravitacional Newtoniana entre as partículas de massas M e m e a constante G , entretanto, o parâmetro \hbar , revela o caráter semi-clássico da força gravitacional.

3 Correções Gravitacionais

Como vimos na seção anterior, todos os *bits* da tela holográfica recebem a energia da partícula interna pelo princípio da equipartição, ou seja admite-se que

$$\frac{A}{l_P^2} = \frac{E}{(1/2)k_B T}. \quad (3.14)$$

Neste trabalho, porém, vamos admitir que existe uma diferença entre o número de bits da tela holográfica N_{Sur} e o número de bits que descreve a energia da partícula, N_E , pela lei da equipartição. De modo que atendam à condição

$$N_{Sur} - N_E = \alpha, \quad (3.15)$$

ou seja,

$$\frac{A}{l_P^2} - \frac{E}{(1/2)k_B T} = \alpha, \quad (3.16)$$

onde

$$N_{Sur} \equiv \frac{A}{l_P^2}, \quad (3.17)$$

e

$$N_E \equiv \frac{E}{(1/2)k_B T}. \quad (3.18)$$

Podemos entender que o parâmetro- α mede a diferença entre os elementos quânticos N_{Sur} e os clássicos N_E . Como os números N_{Sur} e N_E são dois números que expressam uma certa quantidade, ou seja, o número de bits, pode-se supor que $\alpha \rightarrow 0$. Faremos aqui porém, duas suposições que usaremos daqui por diante:

$$\alpha \ll 1 \text{ tal que } \alpha \neq 0 \quad (3.19)$$

e que

$$N_{Sur} > N_E, \quad (3.20)$$

que significa que $\alpha > 0$.

Assumindo essas características para α , a tela holográfica terá um número muito pequeno de bits que não descrevem a energia da partícula. Em outras palavras, obteremos um parâmetro constante (α) que é uma medida de quanto a diferença entre resultados quânticos e clássicos no tocante ao número de bits é relevante.

Veremos que essa diferença não é conservada ao nível quântico. Na segunda parte desse trabalho, o parâmetro- α será uma função da temperatura e uma análise termodinâmica será proporcionada.

Mais a frente, quando considerarmos outra estrutura de fundo, faremos outra suposição para α , tal como associá-lo ao *parâmetro de Tsallis*, onde considerações cosmológicas serão discutidas.

Começemos então com a análise da gravidade de Verlinde. Se considerarmos inicialmente que o parâmetro α é uma constante então a Eq. (3.16) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} k_B T &= \frac{2El_P^2}{A - \alpha l_P^2} \\ &= \frac{2El_P^2}{A} \left(1 - \frac{\alpha l_P^2}{A}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fazendo uma expansão binomial na Eq. (3.21) obtemos que

$$k_B T = \frac{2El_P^2}{A} \left(1 + \frac{\alpha l_P^2}{A} + \dots\right), \quad (3.22)$$

onde assumimos que $\alpha l_P^2/A \ll 1$ na equação (3.21). Usando a fórmula da temperatura de Unruh,

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \hbar a c \quad (3.23)$$

e que $E = Mc^2$ na Eq. (3.22) podemos encontrar uma aceleração gravitacional modificada

$$a = \frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha l_P^2}{4\pi r^2} + \dots \right), \quad (3.24)$$

ou seja, temos agora uma aceleração que depende diretamente do quanto N_{Sur} difere de N_E .

E o segundo termo na Eq. (3.24) é a correção quântica não-relativística de primeira ordem da aceleração gravitacional. Existem vários artigos que mostram diferentes resultados para o coeficiente α quando a relatividade geral (ou gravidade) é tratada como uma teoria de campo efetiva. Entre eles, podemos mencionar os artigos de Donoghue [24], Akhundov et al [25] e Bjerrum-Bohr et al [26]. Em um potencial gravitacional de baixa intensidade, como esse, não podemos considerar efeitos relativísticos. As correções gerais então para a energia potencial entre as partículas de massas M e m são

$$V(r) = \frac{GMm}{r} \left(1 + \beta \frac{l_P^2}{r^2} + \dots \right), \quad (3.25)$$

onde o parâmetro β assume a exata definição do potencial em [24]. Ele seria encontrado na expansão pós-Newtoniana. O fator l_P^2/r^2 é adimensional e fornece uma expressão paramétrica para os efeitos quânticos a longas distâncias. Os valores de β podem ser resumidos na tabela abaixo que relaciona os pesquisadores mencionados acima com os respectivos resultados.

Tabela 3.1: Resultados de Publicações

Publicação	β
Donoghue	$-\frac{127}{30\pi^2} (\approx -0,43)$
Akhundov et al.	$-\frac{107}{30\pi^2} (\approx -0,36)$
Bjerrum-Bohr et al.	$\frac{41}{10\pi} (\approx 1,31)$

Usaremos o resultado de que a aceleração gravitacional está associada ao potencial através da equação

$$ma = \left| \frac{dV}{dr} \right|,$$

então das Eqs. (3.24) e (3.25) podemos obter uma conexão entre β e α dada por

$$\beta = \frac{\alpha}{12\pi}. \quad (3.26)$$

Podemos ver na tabela I que os dois primeiros resultados são negativos. Isso significa que o número de bits da teoria da equipartição é menor que o número total de bits da tela holográfica. Esse resultados não são consistentes com nossa proposta porque assumimos que $N_{Sur} \geq N_E$. Portanto apenas o resultado positivo de β , ($\beta = 41/10\pi$) está de acordo com nosso modelo.

O parâmetro α pode ser pensado como um número muito pequeno. Verificamos, por sinal, que se $\alpha = 49$ então o valor de β calculado da Eq. (3.26) está aproximado do valor dado por Bjerrum-Bhor et al [26]. O valor $\alpha = 49$ é extremamente pequeno quando comparado com o número de bits da tela holográfica, Eq. (3.4), com raio de $1m$, isto é $\approx 10^{70}$. Desse modo o valor $\alpha = 49$ pode ser interpretado como uma flutuação na igualdade entre o número de bits da tela holográfica e o número de bits do teorema da equipartição. Um pequeno desvio da igualdade na Eq. (3.14) que nos conduz a correções quânticas na aceleração gravitacional.

Não usaremos o procedimento usual da teoria quântica de campos ou da teoria de campos efetiva para a interação gravitacional. Usaremos apenas as bases do formalismo de Verlinde, o princípio holográfico e o teorema da equipartição para obtermos alguns resultados cosmológicos.

Capítulo 4

Espaço Cósmico Emergente

Esse capítulo está baseado no trabalho de T. Padmanabhan [16]. O autor explica o espaço-tempo emergente, baseando-se nos estudos do princípio holográfico, e encontra uma relação simples que descreve a expansão do universo atual e confronta isso com as evidências da expansão do Universo.

A partir de 1920 vários pesquisadores verificaram que o Universo está em expansão. São eles Vesto Slipher¹ [14], Carl Wirtz² [12], Kunt Lundmark³ [13], Georges Lemaître⁴ e Edwin Hubble⁵ [15]. Esperava-se que essa expansão fosse desacelerada, em vista da atração gravitacional da matéria do Universo. Observações relativamente recentes (1998), entretanto, de uma supernova por duas equipes independentes lideradas por Saul Perlmutter [45] e por Brian Schmidt e Adam Riess [46] respectivamente (ganhadores do Nobel de 2011 por esse trabalho), revelaram que atualmente a razão da expansão é acelerada. A interpretação dessa descoberta é de que o universo seria permeado por uma quantidade misteriosa chamada energia de vácuo ou "energia escura", o que não permitiria o Universo de contrair-se.

Segundo o autor, a concepção de uma estrutura do espaço-tempo emergente não é trivial. Isso se torna viável quando a questão é trabalhada no contexto cosmológico. Nesse contexto, se escolhermos um referencial adequado por meio do qual a radiação de fundo é isotrópica e homogênea, é possível uma diferenciação da emergência do espaço e do tempo. A expansão do Universo pode ser entendida como a emergência do espaço tal qual ocorra o progresso do tempo cósmico.

Para entender como o espaço cósmico emerge podemos usar uma versão específica do *princípio holográfico*. A fim de ilustrar melhor a questão, usamos inicialmente o princípio para o caso do universo de de Sitter⁶. Esse modelo é uma solução totalmente simétrica das equações de Einstein com densidade zero. O modelo não contém matéria nem radiação, prevê o desvio para o vermelho e um universo em

¹Vesto Melvin Slipher - astrônomo estadunidense (1875-1969)

²Carl Wilhelm Wirtz - astrônomo alemão (1876-1939)

³Kunt Lundmark - astrônomo sueco

⁴Georges-Henri Édouard Lemaître - padre jesuíta, astrônomo, cosmólogo belga (1894-1966)

⁵Edwin Powel Hubble - astrônomo estadunidense (1889-1953)

⁶Willem de Sitter - físico, matemático e astrônomo neerlandês(1872 - 1934)

expansão. Essas condições são semelhantes às condições do nosso universo, em seu início primitivo e em tempo futuro.

No universo de de Sitter os graus de liberdade da matéria N_{bulk} são iguais ao número de graus de liberdade da superfície de fronteira do espaço-tempo N_{Sur} ,

$$N_{Sur} = N_{bulk}, \quad (4.1)$$

que engloba a matéria dentro de um volume V , o volume de Hubble. Esse volume é considerado aproximadamente esférico e com um raio H^{-1} tal que

$$N_{Sur} = \frac{4\pi}{L_p^2 H^2} \quad (4.2)$$

ou seja, N_{bulk} é o número dos graus de liberdade de toda a energia igualmente distribuída no espaço do Universo envolvido pela superfície de modo que

$$N_{bulk} = -\frac{2(\rho + 3p)V}{k_B T}, \quad (4.3)$$

onde $(\rho + 3p)V$ é a energia contida dentro do volume de Hubble $4\pi/3H^3$.

Vamos trabalhar com a definição do parâmetro α como na Eq. (3.21), mas em termos da diferença δN . Escrevamos que

$$\alpha = \delta N = N_{Sur} - N_{bulk}. \quad (4.4)$$

Desse modo podemos dizer (e vamos nos referir assim) que o parâmetro cósmico α é uma medida da expansão do Universo, ou do espaço emergente [17]. Veremos, ainda nessa seção, que não consideramos α necessariamente um parâmetro constante. Vamos usar a definição [17] da variação do espaço cósmico como sendo

$$\delta S_{av} = N_{Sur} - \epsilon N_{bulk} \quad (4.5)$$

onde, de [17] temos que

$$\delta S_{av} = \frac{1}{L_p^2} \frac{dV}{dt} = N_{Sur} - \epsilon N_{bulk}, \quad (4.6)$$

onde V é o volume de Hubble nas unidades de Plank e t é o tempo cósmico também nas unidades de Planck. V é o volume do espaço cósmico cercado pelo horizonte aparente. O parâmetro matemático ϵ mantém o termo N_{bulk} positivo na Eq. (4.6) tal como

$$\rho + 3p > 0 \quad \text{com} \quad (\epsilon = -1), \quad (4.7)$$

$$\rho + 3p < 0 \quad \text{com} \quad (\epsilon = +1), \quad (4.8)$$

onde $\rho + 3p > 0$ significa a matéria ordinária considerada na Eq. (4.3) e $\rho + 3p < 0$ significa a energia escura considerada nessa mesma equação.

A Eq. (4.6) seria relativa a qualquer fase do universo e o autor na verdade a eleva ao nível de postulado e mostra sua equivalência com a conhecida equação de Friedmann,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi L_P^2}{3}(\rho + 3p) \quad (4.9)$$

Segundo [17], a Eq. (4.5) pode ser reescrita de modo a melhorar a percepção de sua descrição da evolução do universo, quando separamos a matéria ordinária (que desacelera a expansão) da energia escura (que acelera a expansão), ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = \delta S_{av} = L_P^2(N_{Sur} + N_m - N_{DE}), \quad (4.10)$$

onde N_m é o número de graus de liberdade da matéria ordinária e N_{DE} é o número de graus de liberdade da energia escura.

Substituindo N_{Sur} , dado na Eq. (4.5), dentro da Eq. (4.6) temos que

$$\delta S_{av} = \alpha + (1 + \epsilon)N_{bulk}, \quad \text{ou} \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{L_P^2} \frac{dV}{dt} = \alpha + (1 + \epsilon)N_{bulk}, \quad (4.12)$$

ou seja, a variação do espaço será $\delta S_{av} = \alpha$ se $\rho + 3p < 0$ e $\delta S_{av} = \alpha + 2N_{bulk}$ se $\rho + 3p > 0$. Para $\alpha = 0$ temos um universo de de Sitter e a equipartição holográfica é atendida ($N_{Sur} = N_{bulk}$), onde $|E| = \frac{1}{2}N_{Sur}k_B T$. Lembrando que o universo real não é um universo de de Sitter, mas um resultado assintótico do mesmo.

A seguir, fazemos a análise do parâmetro α , usando o resultado da Eq. (4.12). Se primeiramente começarmos com o caso da matéria ordinária ($\rho + 3p < 0$) podemos escrever que

$$\frac{1}{L_P^2} \frac{dV}{dt} = \alpha \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow V = \alpha L_P^2 t + V_0 \quad \text{se} \quad \rho + 3p < 0,$$

o que, usando a Eq. (4.4), é equivalente à equação padrão de Friedmann. Para $\alpha > 0$ em (4.13) temos a expansão do Universo desde que cresça com o tempo cósmico, ou seja, temos o cenário onde os de graus de liberdade da energia escura predominam, como esperado. Se retornarmos para a Eq. (4.6) e impormos $\rho + 3p > 0$, temos que

$$\frac{1}{L_P^2} \frac{dV}{dt} = \alpha + 2N_{bulk}, \quad (4.14)$$

onde

$$N_{bulk} = \frac{2E}{k_B T} = \frac{2|\rho + 3p|V}{k_B T}, \quad (4.15)$$

e como já dissemos, T é a temperatura do horizonte, $T = H/2\pi$ e $|E| = |\rho + 3p|V$ é a energia dentro do volume de Hubble $V = 4\pi/(3H^3)$. A solução da Eq. (4.14) é dada por

$$V = \frac{1}{\lambda} \left[(\alpha + \lambda V_0) e^{\alpha L_P^2(t-t_0)} - \alpha \right], \quad (4.16)$$

onde $\rho + 3p > 0$ e

$$\lambda = \frac{4(\rho + 3p)}{k_B T}. \quad (4.17)$$

A Eq. (4.16) prova então a expressão para a expansão do volume do espaço-tempo (volume de Hubble) como uma função da diferença dos graus de liberdade $\alpha = \Delta N$.

Na solução da Eq. (4.10) para a matéria ordinária, podemos ver que o valor de $\alpha = -\lambda V_0$ implica em $V = V_0$ na Eq. (4.16), assim como implica em

$$N_{Sur} - N_{bulk} = \alpha \quad (4.18)$$

$$N_{Sur} - N_{bulk} = -\lambda V_0 \quad \text{ou} \quad (4.19)$$

$$N_{Sur} - N_{bulk} = -\frac{4(\rho + 3p)}{k_B T} V_0, \quad \rho + 3p > 0 \quad (4.20)$$

Dessa última relação (4.20), observamos que a diferença de graus de liberdade alcança um valor fixo mínimo e negativo para uma determinada densidade e pressão de matéria ordinária distribuída dentro do volume V_0 . E, portanto, a condição de equipartição holográfica não é atendida. A presença exclusiva de matéria ordinária, nessa solução, implica em uma diferença dos graus de liberdade a qual aponta para um universo em contração. Se impusermos, ainda, a solução de de Sitter $p = -\rho$, ali, sob a condição $\rho + 3p > 0$, apenas confirmamos a conclusão acima, pois $\lambda = 8pV_0/k_B T$ mantém-se positivo.

A condição da Eq. (4.20) atenderia a condição de equipartição holográfica na situação hipotética de a temperatura do cosmo alcançar valores extremamente altos $T \rightarrow \infty$ em relação ao valor de $(\rho + 3p)V_0$. Uma condição do Universo nos seus primeiros estágios.

O objetivo, portanto, de T. Padmanabhan foi propor a emergência do espaço-tempo mediante o princípio holográfico. Começando com o universo estático, isotrópico, homogêneo e sem matéria (universo de de Sitter). O princípio impõe a igualdade entre os graus de liberdade da matéria de uma região do espaço (que já emergiu) e os graus de liberdade de uma superfície (limite fixo entre os espaços emergente e não emergente) que envolve essa matéria, $N_{Sup} = N_{bulk}$. No universo real porém, evidências demonstram que o mesmo está em expansão. Padmanabhan propõe então que a diferença entre os graus de liberdade mencionados acima deveria ser necessária para essa expansão (emergência) do espaço, assim como do

tempo, através da Eq. (4.10). A relevância da relação é verificada pelo autor quando demonstra a sua equivalência com o modelo de expansão do universo de Friedmann.

A análise que fizemos da Eq. (4.10), sob a perspectiva do princípio holográfico, nos mostra que a sua solução mais viável será aquela que considera a predominância de energia escura no Universo. O que corrobora com as observações astronômicas recentes, as quais apontam para uma quantidade predominante de uma desconhecida quantidade de energia "energia de vácuo," ou energia escura.

Nos próximos capítulos, estudaremos, resumidamente, algumas considerações da teoria termoestatística não-extensiva e sua aplicação no estudo do espaço emergente.

Capítulo 5

Considerações sobre a Termoestatística não-extensiva e o espaço cósmico emergente

A termodinâmica teve seu início como ciência física, no século dezenove, nos trabalhos de Carnot¹, Joule², Clausius³ e Kelvin⁴. Nesse século, as duas leis da termodinâmica são estabelecidas e confirmam os resultados práticos da experiência. Ao mesmo tempo, a teoria cinética dos gases, que tinha o objetivo de explicar o comportamento macroscópico dos gases mediante o movimento das moléculas, era um conceito em avanço na época. A compreensão mais abrangente, entretanto, da conexão entre a termodinâmica e a teoria molecular dos gases, começa a partir dos trabalhos de Boltzmann⁵ [44], em 1872. Naqueles anos, a teoria cinética dava lugar a um novo entendimento no estudo de sistema de muitas partículas - a teoria do *ensemble* ou teoria amostral (conjunto de microestados possíveis de um macro-sistema) iniciado independentemente, por Boltzmann, Maxwell e aperfeiçoado por Gibbs⁶.

Um trabalho importante, publicado no final do século dezenove [44], aprofunda a compreensão desse sistema macro de muitos elementos, quando delimita um conceito central e que desempenha um papel crucial na mecânica estatística, o conceito da *entropia*. Nesse trabalho, Boltzmann propõe a seguinte relação entre a entropia (S) e o número de microestados Ω (probabilidade termodinâmica) e escrita pela primeira vez de modo explícito por Planck como sendo

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (5.1)$$

¹Nicolas L Sadi Carnot (1796-1832)

²James Prescott Joule (1818-1889)

³Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888)

⁴Lord Kelvin (William Thomson) (1824-1907)

⁵Ludwig Boltzmann (1844-1906)

⁶Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

onde k_B é uma constante (*constante de Boltzmann*). Como a equação indica, a Eq. (5.1) é o valor absoluto da entropia de um sistema físico e está em termos do número de microestados possíveis acessíveis a esse sistema em conformidade com o macroestado dado. Na Eq. (5.1) a probabilidade termodinâmica é a mesma para todos os microestados acessíveis. Se admitirmos que as probabilidades não sejam iguais, a equação tem uma expressão mais geral,

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (5.2)$$

onde p_i é a probabilidade do sistema estar no seu i -ésimo estado. O somatório ($\sum_{i=1}^W p_i = 1$) é realizado sobre todos os microestados possíveis W em que o sistema pode ser encontrado. A Eq. (5.2) é conhecida como a entropia de BG. A expressão (5.2) foi proposta primeiro por Boltzmann e aperfeiçoada por Gibbs para sistemas mais gerais. É uma das consequências importantes da termo-estatística de BG é a distribuição da energia média por partícula em um sistema de N partículas,

$$E = \frac{1}{2} N k_B T. \quad (5.3)$$

Essa área do conhecimento recebe hoje o nome de *Mecânica Estatística*. E esse ramo da física, baseado na entropia (5.2), tem sucesso na descrição de sistemas que atendam às seguintes condições:

- Sistemas absolutamente *sem* interação ou com interações espaciais de curto alcance;
- Sistemas com memória temporal de *curto* alcance;
- Sistemas cuja evolução no espaço de fase *não* é multi-fractal.

Os sistemas que atendem tais propriedades são chamados sistemas extensivos, pois a entropia é aditiva, ou seja, para dois sistemas independentes A e B,

$$S(A + B) = [S(A)] + [S(B)]. \quad (5.4)$$

Vários autores têm observado porém que a célebre relação de Boltzmann-Gibbs (BG) não representa uma teoria definitiva. Uma vez que essa teoria não responde satisfatoriamente a sistemas cujas propriedades não atendam às citadas acima. De fato, são limites à teoria, tal como há limites nas teorias da mecânica newtoniana.

Além disso, a teoria de BG se aplica a sistemas ditos extensivos, ou seja, que dependam das condições iniciais. Entretanto, sabemos que existem muitos sistemas que não dependem de condições iniciais. São ditos sistemas não-extensivos.

Com o intuito de superar as sérias dificuldades da teoria de BG [44] para aquelas situa es citadas acima, C. Tsallis, em 1988, propo uma teoria termoestatística não-extensiva, a qual   mais geral do que a termo-estatística extensiva de BG. Sua equa o da entropia generalizada   escrita como

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \left(\sum_{i=1}^W p_i = 1; \quad q \in \mathfrak{R} \right) \quad (5.5)$$

onde k   uma constante positiva e W   o número total de microestados possíveis de um sistema. O número real q , o chamado  ndice entrópico ou parâmetro de Tsallis, caracteriza o grau de não-extensividade do funcional S_q . Para $q < 1$ temos eventos pouco prováveis e para $q > 1$, eventos muito prováveis. O grau de cada probabilidade depende do quanto menor ou maior o parâmetro q for. Observe que a Eq. (5.5) volta a ser a equa o original de BG, Eq. (5.2), se adotarmos o limite $q \rightarrow 1$.

Sob essa condi o, a Eq. (5.5) obedece a regra de não-aditividade,

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \left[\frac{S_q(A)}{k} \right] + \left[\frac{S_q(B)}{k} \right] + (1 - q) \left[\frac{S_q(A)}{k} \right] \left[\frac{S_q(B)}{k} \right], \quad (5.6)$$

onde A e B são dois sistemas independentes no sentido de que as probabilidades de $A + B$ ser

$$p_{ij}(A + B) = p_i(A)p_j(B). \quad (5.7)$$

Se adotarmos o limite $q \rightarrow 1$ em (5.6), recupera-se a aditividade da termo-estatística de BG (5.4). Estatisticamente falando, como falamos acima, podemos atribuir $q < 1$ para casos raros. E $q > 1$ para casos mais prováveis.

Outra consequência importante da generaliza o da teoria de BG   a deriva o da nova equa o da equipartilha da energia com o parâmetro de Tsallis [18] para um sistema de N partículas

$$E = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T. \quad (5.8)$$

onde, novamente, para $q = 1$, obtem-se a distribu o de energia conhecida.

Recordamos, do capítulo 4, que Padmanabahn propõe, dentro do princípio holográfico, a expansão do universo como um espaço emergente. Essa expansão seria consequência da diferença entre os graus de liberdade da matéria ordinária (e energia escura) e os graus de liberdade da superfície holográfica (limite do espaço emergente) nas Eqs. (4.6), (4.11) e (4.12). Encontramos duas solu es a partir da

Eq. (4.12), uma com a predominância da energia escura e outra com a predominância da matéria ordinária. As soluções nos conduziram para a conclusão de que para a energia escura, o universo expande, e para a presença exclusiva de matéria ordinária o universo contrai.

Agora vamos analisar o índice entrópico de Tsallis q em uma das soluções da Eq. (4.12) do espaço emergente de Padmanabahn, na qual a matéria ordinária é predominante, a Eq. (4.16)

$$V = \frac{1}{\lambda} [(\alpha + \lambda V_0)e^{\alpha L_P^2(t-t_0)} - \alpha], \quad (5.9)$$

para o caso de $\alpha = -\lambda V_0$, o que implica em $V = V_0$ e

$$N_{Sur} - N_{bulk} = -\lambda V_0 \quad (5.10)$$

ou

$$N_{Sur} - N_{bulk} = -\frac{4(\rho + 3p)}{k_B T} V_0, w \quad \rho + 3p > 0 \quad (5.11)$$

onde

$$\lambda = \frac{4(\rho + 3p)}{k_B T}. \quad (5.12)$$

Antes de iniciarmos a análise, consideremos o resultado de [18], de onde se obtém a lei da equipartição, como uma estimativa termoestatística não-extensiva, dada por

$$E = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T, \quad (5.13)$$

onde q mede a extensividade do sistema, o parâmetro não-extensivo ou parâmetro de Tsallis, como dissemos anteriormente. Com a relação seguinte podemos fazer a equivalência calculada em [21, 22],

$$sT \longrightarrow \frac{2T}{5 - 3q} \quad (5.14)$$

$$E = \frac{1}{2} N k_B T \longrightarrow E = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T. \quad (5.15)$$

e podemos escrever, da definição de λ , Eq. (5.12), que

$$\lambda = \frac{4(\rho + 3p)}{k_B T} \longrightarrow \frac{2(5 - 3q)(\rho + 3p)}{k_B T}, \quad (5.16)$$

então $\alpha = -\lambda V_0$ se torna

$$\alpha = -\frac{2(5 - 3q)(\rho + 3p)}{k_B T} V_0. \quad (5.17)$$

A discussão agora é sobre os possíveis valores de q para esse sistema, no contexto cosmológico. Se, por exemplo, $q = 5/3$, ($\alpha = 0$), o princípio holográfico é obedecido. Por isso, usamos $\lambda \neq 0$ sem um valor específico para q segundo o qual o princípio holográfico é obedecido.

Na verdade, há um limite para o índice entrópico q . Vemos da Eq. (5.13) que não podemos ter $5 - 3q < 0$, ou seja, $q > 5/3$. O que significa, da Eq. (5.17), que não se pode ter $\alpha > 0 \implies N_{Sur} > N_{bulk}$. Logo, o único limite possível referente a q é $q < 5/3$ ($\alpha < 0$) $\implies N_{Sur} < N_{bulk}$. Esse limite de q determina que os graus de liberdade da matéria ordinária seja superior aos graus de liberdade da superfície holográfica. Como consequência, $\alpha < 0$, ou seja, predominância dos graus de liberdade da matéria ordinária, que é o nosso limite superior relativo a α , o que significaria uma contração do universo. Por isso, desde que possamos usar o parâmetro α como um substituto da relação $\rho + 3p$, podemos ver α como uma condição para se ter duas alternativas, ou a predominância dos graus de liberdade da energia escura ou a predominância dos graus de liberdade da matéria ordinária. Podemos questionar se poderíamos fazer o mesmo com o parâmetro q , porém ele está limitado em $q < 5/3$.

De Eq. (5.17) podemos escrever que

$$q = \frac{5}{3} \left[1 + \frac{k_B T}{10V_0(\rho + 3p)} \alpha \right], \quad (5.18)$$

ou seja, quando o princípio holográfico é obedecido, $\alpha = 0$, temos $q = 5/3$. E $\alpha < 0$ e $q < 5/3$ significam um cenário de universo com matéria ordinária em predominância. Mas se recuperarmos o modelo de BG ($q = 1$) temos novamente

$$\alpha = -\frac{4(\rho + 3p)V_0}{k_B T} \quad (5.19)$$

e o princípio holográfico não pode ser obedecido, se todos os termos nessa última equação são positivos. O princípio holográfico seria atendido para a hipótese de $T \rightarrow \infty$ na Eq. (5.19).

De volta ao objetivo do trabalho de Padmanabhan [17], das Eqs. (4.5) e (4.15) podemos escrever que

$$N_{bulk} = -\epsilon \frac{2(\rho + 3p)}{k_B T} V, \quad (5.20)$$

de onde relembramos que $\epsilon = -1$ ($\rho + 3p > 0$) representa os graus de liberdade da matéria ordinária e que $\epsilon = 1$ ($\rho + 3p < 0$), representa os graus de liberdade da energia escura. Da Eq. (4.15), temos que

$$N_{bulk} = -\frac{E}{\frac{1}{2}k_B T} = \frac{2(\rho + 3p)}{k_B T} \quad (5.21)$$

e se $\rho + 3p < 0$, de (5.20) temos o número de graus de liberdade da energia escura.

Vamos reescrever a Eq. (5.20) e usar $p = w\rho$ para obter

$$N_{bulk} = -\epsilon \frac{2(1+3w)\rho}{k_B T} V. \quad (5.22)$$

Sabemos que quando $w < -1/3$ temos os graus de liberdade da energia escura e se $w < 1/3$ temos os graus de liberdade da matéria ordinária.

Se o princípio holográfico for atendido, $N_{Sur} = N_{bulk}$, onde $N_{Sur} = A/L_P^2$ e A é a área da superfície holográfica de raio H^{-1} , ou seja,

$$A = 4\pi H^{-2} \quad \Rightarrow \quad N_{Sur} = N_{bulk} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{l_P^2 H^2} = \frac{2(1+3w)\rho}{k_B T} V, \quad (5.23)$$

e isso representa os graus de liberdade da energia escura e, usando a temperatura de Hubble $T = H/2\pi$, temos que

$$H^2 = \frac{4\pi(1+3w)\rho l_P^2}{k_B T}. \quad (5.24)$$

Substituindo a Eq. (5.14) na Eq. (5.22) temos

$$N_{bulk} = -\frac{(1+3w)(5-3q)V\rho}{k_B T}, \quad (5.25)$$

o que nos mostra que para $w < -1/3$ e de (5.19) temos que $\alpha > 0$ e teremos a predominância dos graus de liberdade, desde que $q < 5/3$. E usando a Eq. (5.14) em (5.24) chegamos em

$$H^2 = -\frac{2\pi(1+3w)(5-3q)V\rho l_P^2}{k_B T}. \quad (5.26)$$

Curiosamente, embora, em (5.25) o valor $q = 5/3$ não tenha significado, em (5.26) significa que não se tem expansão do cosmo, desde que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow a(t) = \text{constante}. \quad (5.27)$$

Capítulo 6

Considerações na Teoria de MOND e a estatística não-extensiva

MOND, *Modified Newtonian Dynamics* ou em português, dinâmica newtoniana modificada, é uma teoria proposta por Mordehai Milgrom [27] na década de 1980 com a intenção de justificar a dinâmica de sistemas gravitacionais, como aglomerados de galáxias e galáxias, o que não é explicada pela teoria newtoniana. Observações mostraram [28] que a curva de rotação de galáxias e as altas velocidades nos aglomerados de galáxias [29] são possíveis no modelo newtoniano para uma quantidade de massa maior do que aquela observada. Outra alternativa para o movimento de rotação irregular das galáxias, é o preenchimento de matéria invisível nas regiões onde a teoria newtoniana é falha, a chamada *matéria escura*. A ausência de detecção de partículas da matéria escura, porém, direciona a teoria de MOND como um modelo matemático adequado para a descrição desse fenômeno percebido com as galáxias.

Depois de proposta, a teoria de MOND tem sido aplicada e testada em galáxias, grupos de galáxias e aglomerados de galáxias. Os resultados fornecidos dispensam a necessidade de matéria escura. Pode-se admitir então que a teoria gravitacional clássica tem seu limite natural para esses sistemas de larga escala. Como sabemos, a teoria de Newton tem seus limites para velocidades próximas à da luz e para sistemas muito pequenos, na escala atômica. Admite-se, porém, um novo limite da teoria gravitacional clássica para a escala dos aglomerados e galáxias, limite esse agora explicado pela teoria de MOND. Assim como as constantes c , a velocidade da luz e h , a constante de Planck, determinam os limites de transição entre a teoria clássica e a teoria da relatividade e quântica, respectivamente, para um sistema físico, uma nova constante entra em cena, a_0 , como fator de transição entre a teoria clássica de Newton e a teoria do movimento de grandes grupos de galáxias ou da própria rotação de uma galáxia.

A teoria de MOND se torna necessária em um sistema onde a aceleração dos corpos está na ordem de grandeza de um determinado valor, a constante a_0 , ou

abaixo dela. Seu valor é estimado em $a_0 \sim 10^{-8} \text{cm/s}^2$. Um valor extremamente pequeno para os parâmetros terrestres e de difícil percepção em sistemas físicos sob experimento em laboratórios. O laboratório para essa teoria é o próprio cosmos de onde se pode constatar seu princípio .

Em termos matemáticos, a teoria de MOND é uma modificação da segunda lei de Newton. Um corpo de prova de massa m' sujeito a uma força resultante F tem a seguinte equação de movimento modificada

$$F = m' \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) a, \quad (6.1)$$

onde $\mu(x)$ é uma função que tem os limites: $\mu(x) \approx 1$, para $x \gg 1$ e $\mu(x) \approx x$, para $x \ll 1$. A função $\mu(x)$ tem várias formas na literatura [30]. O termo a_0 é a aceleração mínima ou *aceleração crítica*. Entende-se que é um parâmetro de transição entre a teoria newtoniana e a teoria de MOND. Corpos com a aceleração da ordem de a_0 ou menores não atendem à segunda lei de Newton e uma partícula de massa m então sob o regime da teoria de MOND, é descrita pela segunda lei de Newton modificada tal como

$$F = m \frac{a^2}{a_0}, \quad (6.2)$$

uma relação agora não linear.

Para efeito de experimento, não seria uma tarefa fácil separar sistemas clássicos nos quais verificaríamos acelerações da ordem de a_0 . Em sistemas como galáxias e aglomerados de galáxias, entretanto, verificamos acelerações dessa ordem [37]. E o campo gravitacional \vec{g} é calculado igualmente a partir do potencial gravitacional V , $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$. A equação de Poisson, entretanto, que associa a distribuição de massa ρ com o campo gravitacional é modificada

$$\vec{\nabla} \left[\mu \left(\frac{g}{a_0} \right) \vec{g} \right] = -4\pi G\rho. \quad (6.3)$$

Quando $\mu(x) = 1$, recuperamos a equação de Poisson original.

A seguir, verificaremos ainda nesse capítulo, um resultado que confirmará a relação de Tully-Fisher [35] para a rotação de galáxias, mediante a teoria de MOND. Esse resultado nos auxilia na obtenção do resultado final desse trabalho. Para isso, vamos admitir um sistema simplificado com a intenção de destacar melhor o resultado.

Vamos admitir uma galáxia como uma esfera perfeita de raio R e com a massa uniformemente distribuída. E um corpo de prova de massa m' situado a uma distância r do centro da galáxia. Devido a simetria esférica da galáxia, podemos

escrever a quantidade de massa interna ao raio r como sendo $m = \rho 4\pi r^3/3$. Com o "teorema de Newton" [39] é possível mostrar que o corpo de prova está sob a ação de força gravitacional apenas por essa massa interna. Logo a equação clássica que descreve a dinâmica do corpo de prova é

$$\frac{Gmm'}{r^2} = \frac{m'v_i^2}{r}, \quad (6.4)$$

onde v_i é a velocidade do corpo de prova m' . Com a propriedade da densidade constante na galáxia, podemos encontrar uma relação entre a massa total da galáxia M e a massa m tal como $m = Mr^3/R^3$ o que implica que a Eq. (6.4) pode determinar a velocidade do corpo de prova como sendo

$$v_i = \sqrt{\frac{GM}{R^3}r}, \quad (6.5)$$

ou seja, para $r < R$, a velocidade do corpo de prova varia linearmente com a sua posição em relação ao centro da galáxia.

Se o corpo de prova está fora da galáxia, caso em que $r > R$, o teorema de Newton afirma que a força gravitacional sobre o corpo de prova é devido a massa total M da galáxia e é como se toda essa massa estivesse concentrada no centro da galáxia. Assim, a equação de movimento do corpo de prova se mostra como

$$\frac{GMm'}{r^2} = m'\frac{v_e^2}{r} \quad (6.6)$$

onde v_e é a velocidade do corpo de prova externo à galáxia. O que implica em

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (6.7)$$

e podemos ver que a velocidade do corpo de prova diminui à medida que se afasta do centro da galáxia.

Os dados observacionais indicam que as galáxias, com alta densidade de estrelas em seu centro, atendem à lei de gravitação de Newton, pois as estrelas estão com acelerações altas em relação a a_0 . A medida que se afasta do centro da galáxia, a densidade das estrelas diminui e com isso suas acelerações também diminuem. Quando se está muito longe do centro da galáxia, as estrelas tem acelerações da ordem de a_0 e a lei clássica da gravitação se torna ineficaz, nessas regiões. Nessa condição a dinâmica dos corpos nessas regiões já está inserida no modelo da teoria de MOND.

Vamos rever as contas acima, para o caso da rotação de uma galáxia, considerando agora que todos os corpos da galáxia estejam sob o regime da teoria de

MOND. Novamente, analisaremos as duas situações: o corpo de prova no interior e no exterior da galáxia de raio R . Para o caso da posição do corpo de prova no interior da galáxia $r < R$, usamos as Eqs. (6.2) e (6.4) e a relação da massa interna $m = Mr^3/R^3$ do interior ao raio r . Nesse caso a velocidade do corpo de prova no interior dessa galáxia será

$$v_i = \left(\frac{GMa_0}{R^3} r^3 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (6.8)$$

ou seja, a velocidade da estrela nessa galáxia, no regime MOND, aumenta com o crescimento do raio, porém cresce na proporção da potência $r^{3/4}$.

Para o caso de um corpo na região externa à galáxia, deve-se atentar novamente para a Eq. (6.6). Toda a massa da galáxia pode ser considerada como concentrada em seu centro, sob a condição porém da Eq. (6.2). Assim a velocidade encontrada é

$$v_e = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}, \quad (6.9)$$

que é a equação de Tully-Fischer.

A velocidade do corpo de prova (estrela) nessa condição agora está constante. Externo à galáxia, a velocidade da estrela alcança um determinado limite e está determinado pelas constantes G , M e a_0 . quando se confronta esse resultado com as medidas das observações [37] fica evidente a conformidade entre a previsão teórica com as observações.

A teoria de MOND explica portanto muito bem o fenômeno das rotações das galáxias, o que confirma também a relação de Tully-Fisher, Eq. (6.9). Segundo essa relação, as galáxias mais luminosas adquirem maiores velocidades, o que significa que são galáxias mais massivas. A relação obedece a proporção entre a luminosidade L e a velocidade de rotação das galáxias v como sendo,

$$L \propto v^4. \quad (6.10)$$

Observa-se que a relação de Tully-Fisher 6.9 está de acordo com a relação da teoria de MOND, Eq. (6.9), elas mantêm a mesma proporcionalidade.

A outra proposta ganha cada vez mais importância no meio científico, a possibilidade de existir matéria escura no espaço. Como foi dito na introdução desse capítulo, ela preencheria a quantidade de massa necessária solicitada pela gravitação newtoniana. A partir dessas evidências, a matéria escura se torna um tema viável que explicaria o fenômeno. Uma matéria invisível, a matéria escura preencheria o restante de massa necessária nos aglomerados de galáxias para explicar suas altas velocidades, assim como as rotações das galáxias, sob o modelo newtoniano. A dificuldade dessa interpretação é o fato de não se conhecer as partículas

fundamentais que constituem a matéria escura. Para maiores esclarecimentos sobre os estudos da matéria escura, consulte o trabalho em [40].

Consideremos, então, a teoria de Tsallis na Eq. (5.5). Seja W o número de microestados, ou seja, o número de diferentes combinações de microestados, combinações que podemos obter em um cenário geral de aplicação da entropia de Tsallis, de modo que W pode ser escrito como

$$W = b \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^n \quad (6.11)$$

onde b é uma constante adimensional, A é a área de uma superfície, l_p é o comprimento de Plank na entropia não extensiva e n é um parâmetro indeterminado que mostra o dimensionamento geral proposto aqui. Se, por exemplo, $n = 3/2$ em (6.11) teríamos uma proporção volumétrica. Nosso objetivo é analisar o que acontece na Eq. (6.11), para um caso geral de n .

O termo na Eq. (6.11) foi calculado através de considerações em gravitação quântica [31] com um termo de correção para a entropia. Em [31], a Eq. (6.11) é a correção volumétrica relativa à lei da área, o qual é motivada também por um modelo para os graus microscópicos englobando a entropia dos buracos negros em gravitação quântica.

Com relação ao nosso trabalho, especificamente, o importante é que (6.11) resulta em um termo de correção de $1/R$ na lei de Newton de MOND, como uma explicação para as curvas *irregulares* de rotação de galáxias. Esse pensamento é o caminho que nos permite usar a estatística não-extensiva de Tsallis. Isso ficará claro mais a frente.

O objetivo aqui é usar a Eq. (6.11) na definição de entropia da Eq. (5.18) e analisar o efeito do parâmetro q , assim como o parâmetro n a fim de prever seus efeitos cosmológicos.

Para começar, recordemos que Verlinde [11] estabeleceu que a entropia ΔS da superfície holográfica Σ conectada a uma partícula teste de massa m movendo-se por uma distância Δx ortogonal à tela pode ser escrita como

$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x, \quad (6.12)$$

o que mostra que a entropia obtida é proporcional à informação perdida da partícula teste, onde $\lambda_m = \hbar/mc$ é o comprimento de onda de Compton, ou seja, podemos escrever

$$\Delta S = 2\pi k_B \Delta x / \lambda_m, \quad (6.13)$$

de onde percebemos que a entropia pode ser calculada pela relação entre a variação da distância da partícula à superfície holográfica e o comprimento de onda Compton, que é uma grandeza semi-clássica.

A expressão geral da força que é governada pela equação da termodinâmica usual é

$$F = T \frac{\Delta S}{\Delta x} = T \frac{dS}{dA} \frac{\Delta A}{\Delta x}, \quad (6.14)$$

onde $A = 4\pi R^2$ é a área da superfície holográfica.

Suponha que tenhamos duas massas, uma é a massa teste de m e a outra, M , que é considerada como sendo a fonte. A tela holográfica será centrada em torno da massa M . A energia da tela holográfica é dada por

$$E = Mc^2. \quad (6.15)$$

Usamos a definição de que os bits de informação são proporcionais à área da superfície holográfica como [32]

$$A = QN, \quad (6.16)$$

onde N é o número de bits e a constante Q a carga fundamental [32] ou o intervalo de área ($\Delta A|_{N=1} = Q$) determinada pela teoria microscópica.

O total de bits de energia na superfície holográfica é dado pela lei da equipartição da energia

$$E = \frac{1}{2} N k_B T. \quad (6.17)$$

Quando a massa teste m está a uma distância

$$\Delta x = \eta \lambda_m, \quad (6.18)$$

da superfície Σ , a entropia da tela holográfica modifica obviamente, onde η é um fator de escala e o gradiente de entropia aponta radialmente do lado de fora para o lado de dentro da tela holográfica, como pode ser visto de

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial A} \Delta A. \quad (6.19)$$

Então, da Eq. (6.16) temos que

$$\Delta A = Q, \quad (6.20)$$

onde assumimos que $\Delta N = 1$. Combinando as equações 6.13, 6.14, 6.18, 6.20 e usando a relação fundamental $l_P^2 = \hbar G/c^3$, temos que

$$F = \frac{GMm}{R^2} \frac{Q^2}{2\pi\eta l_p^2 k_B} \frac{dS}{dA}. \quad (6.21)$$

Definindo convenientemente que $Q^2 = 8\pi\eta l_p^4$, que prova a lei de Newton em primeira ordem assim como em [32] podemos escrever que

$$F = \frac{GMm}{R^2} 4 \frac{l_p^2}{k_B} \frac{dS}{dA}. \quad (6.22)$$

Note que essa expressão é suficientemente geral com intenção de permitir a consideração de qualquer tipo de entropia, o que é a nossa proposta agora. Usaremos a relação particular e bem conhecida da entropia do buraco negro $S = k_b A/4l_p^2$, onde nesse caso, A é a área do horizonte de eventos como vínculo, ou seja, uma superfície que contém o ponto do não retorno. Quanticamente falando, um buraco negro cria e emite partículas como se fosse um corpo negro à uma temperatura T [33].

Podemos obter a lei de Newton da gravidade, $F = GMm/R^2$ da Eq. (6.22). A teoria gravitacional de Newton descreve *como* a lei funciona, mas, não nos diz *porque* essa lei funciona.

Usando as Eqs. (5.5) e (6.11) dentro da Eq. (6.22) encontramos uma lei de gravitação de Newton modificada e escrita tal como

$$F = \frac{GMm}{R^2} n b^{1-p} \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^{n(1-q)-1}. \quad (6.23)$$

Observe que quando fazemos $n = 1/(1-q)$ nessa última equação recuperamos a lei de Newton da gravitação se $b = (1-q)^{\frac{1}{1-q}}$. Na figura 1, plotamos gráficos dessa equação como função do parâmetro q .

Substituindo a Eq. (5.4) na equação da entropia de Tsallis, Eq. (5.5), encontramos de modo direto que

$$S = \frac{A}{4l_p^2}, \quad (6.24)$$

onde negligenciamos a constante $-k_B/(1-q)$, em comparação com o termo A . Observe que a Eq. (6.24) é a equação conhecida da entropia dos buracos negros. Podemos obter portanto a equação dos buracos negros ainda no cenário newtoniano. Podemos pensar que essa equação faz a conexão entre a termodinâmica dos buracos negros e a mecânica gravitacional de Newton. O que sugere uma gravitação emergente termodinâmica. Por outro lado, Botta Cantcheff e Nogales [34] mostraram que podemos encontrar a entropia usual de buracos negros com a lei do volume dos microestados e a entropia não-extensiva de Tsallis (5.5).

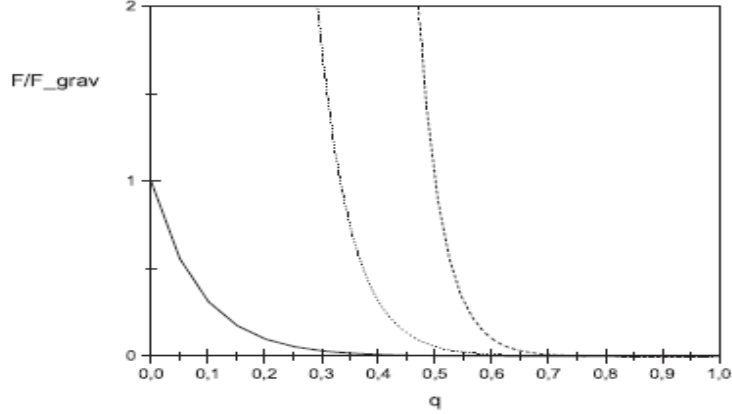


Figura 6.1: A força gravitacional generalizada, normalizada pela lei gravitacional de Newton, como função do parâmetro q , Eq. (6.23). Consideramos o produto nb^{1-q} e $\frac{A}{4l_p^2} = 100000$. A linha sólida representa $n = 1$, a linha pontilhada, $n = 1,5$ e a linha de traços, $n = 2$. versus q .

Para $q = 1$, caso do cenário de BG, e para qualquer b temos

$$F_{q=1} = \frac{GMm}{R^2} n \frac{4l_p^2}{A}, \quad (6.25)$$

o que obviamente não é a segunda lei de Newton. A partir da Eq. (6.23) se adotarmos $n = 1.5/(1 - q)$ podemos escrever

$$F = \frac{GMm}{R^2} \frac{3}{2(1 - q)} b^{1-q} \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^{1/2}, \quad (6.26)$$

$$= \frac{GMm}{R} \frac{3\sqrt{\pi}}{2(1 - q)} \frac{b^{1-q}}{2l_p}, \quad (6.27)$$

onde usamos $A = 4\pi R^2$ e a aproximação de MOND.

Como foi dito no capítulo anterior, o sucesso do modelo teórico de MOND está ligado à capacidade de explicar a maioria das rotações das galáxias. O modelo reproduz muito bem a relação Tully-Fisher [35], Eq. 6.16. Desse modo ela pode ser uma alternativa ao modelo da matéria escura, como já falamos anteriormente.

A partir do movimento rotacional das galáxias, lembremos que a relação de Tully-Fisher é dada por $v^2 = \sqrt{GMa_0}$, onde a_0 , o valor da constante de MOND

(uma escala de aceleração), tem valor de $a_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ e substituindo essa aceleração dentro da Eq. (6.26) temos que

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{1-q} \frac{b^{1-q}}{l_p}, \quad (6.28)$$

então

$$b = \left[\frac{2}{3} (1-q) l_p \sqrt{\frac{a_0}{\pi GM}} \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (6.29)$$

que é um resultado viável para b . Vamos analisar outras consequências desse valor de b , que reproduz MOND, como vimos acima.

Substituindo esse último valor para b dentro da Eq. (6.11) temos

$$W = \left[\frac{2}{3} (1-q) l_p \right] \left(\frac{a_0}{\pi GM} \right)^{\frac{1}{2(1-q)}} \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^n, \quad (6.30)$$

o que não mostra divergência para $M \rightarrow 0$ quando $q > 1$. Isso vincula q diretamente a um sistema não-extensivo, que é um resultado esperado.

A partir da Eq. (6.22) temos a expressão para a força newtoniana. Então,

$$m\ddot{R} = m\ddot{a}r = \frac{GMm}{a^2 r^2} \frac{4l_p^2}{k_B} \frac{dS}{dA}. \quad (6.31)$$

onde R , o raio da tela holográfica, é o horizonte aparente, ou seja, $R(t, r) = a(t)r$, onde r é a coordenada radial de movimento,

$$\implies \ddot{a} = \frac{GM}{a^2 r^3} \frac{4l_p^2}{k_B} \frac{dS}{dA}. \quad (6.32)$$

Baseado em [41], a aceleração na Eq. (6.32) resulta da massa gravitacional, que é a conhecida massa de Tolman-Komar (TK) [42, 43] dada por

$$M = (\rho + 3p) \frac{4\pi}{3} a^3 r^3, \quad (6.33)$$

que é proporcional à função de escala. Substituindo a Eq. (6.32) dentro da Eq. (6.31) encontramos que

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{16\pi}{3} \frac{d}{dt} G(\rho a) \frac{l_p^2}{k_B} \frac{dS}{dA}. \quad (6.34)$$

E a integração de ambos lados então deixa a equação acima como

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{32\pi G}{3k_B} \frac{l_p^2}{a^2} \int d(\rho a^2) \frac{dS}{dA}, \quad (6.35)$$

que é uma versão entrópica da equação de Friedmann e onde usamos a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (6.36)$$

Para calcular portanto a massa ativa, isto é, a massa de TK, devemos resolver a equação diferencial (6.32), a qual pode ser escrita como

$$\ddot{a} = \frac{GM}{a^2 r^3} \frac{4l_p^2}{k_B} \frac{dS}{dA} \quad (6.37)$$

$$= nb^{1-q} \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^{n(1-q)-1}, \quad (6.38)$$

onde usamos a Eq. (6.30). Assim, para $A = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 r^2$, usamos que

$$\ddot{a} = GMnb^{1-q} \left(\frac{\pi}{l_p^2} \right)^{n(1-q)-1} a^{2[n(1-q)-2]} r^{2n(1-q)-5}, \quad (6.39)$$

e para $q = 1$ (o limite BG) temos que

$$\ddot{a} = \frac{GMnl_p^2}{\pi a^4 r^5}, \quad (6.40)$$

que é também uma equação diferencial não-linear que tem solução numérica para o fator de escala. Mas a computação numérica está fora do objetivo desse trabalho e fica como uma perspectiva futura.

Capítulo 7

Conclusão

Nesse trabalho exploramos o papel da superfície holográfica desenvolvida separadamente por Verlinde e Padmanabahn sob o ponto de vista da termodinâmica de Tsallis [23]. Vimos através de um termo de correção generalizada da entropia [32], que está ligado às ideias da teoria de MOND, que o parâmetro q pode se fixado desde que dados cosmológicos viáveis sejam usados. Encontramos que o parâmetro b usado em [32] pode ser fixado de acordo com o cenário físico.

Com esses dados em mente, mostramos que podemos obter a fórmula da entropia do buraco negro e suas considerações entrópicas da lei de Newton. Além disso, através de um escolha conveniente para o parâmetro n derivamos a equação da teoria de MOND para a força de Newton. Da Eq. (6.22) derivamos a generalização da lei da gravitação newtoniana.

Calculamos a velocidade de rotação das galáxias. O resultado nos mostrou um possível valor para o parâmetro b e conseqüentemente o número de microestados, vinculando q a valores muito maiores que 1, quando o caso é muito não-extensivo ($q > 1$). Finalmente, demonstramos a versão entrópica da equação de Friedmann. Mostramos que o fator de escala obedece a uma equação não-linear com solução numérica, o que pode ser um alvo para futuras investigações.

Bibliografia

- [1] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration (Abbout B. P. *et al.*) *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102.
- [2] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. Lett. D*, **7** (1973) 2333; (1974) 3292.
- [3] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43** (1975) 149.
- [4] S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett. D*, **14** (1976) 2460 *The Information Paradox for Black Holes* arXiv 1509.01147.
- [5] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 1260; **116** (2016) 201101.
- [6] C. Eling, R. Guedens and T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 121301.
- [7] R. Guedens, T. Jacobson and S. Sarkas, *Phys. Rev. D*, **85** (2012) 064017.
- [8] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, Conf.Proc. C930308 (1993) 284, arXiv: gr-qc/9310026 | PDF
- [9] L. Susskind, *J. Math. Phys.* 36 (1995) 6377.
- [10] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 1260; *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016)201101; C. Eling, R. Guedens amd T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 121301.
- [11] E. Verlinde, *JHEP* 1104 (2011) 029.
- [12] C. Wirtz, *Astronomische Nachrichten* (1922) 215, 349.
- [13] K. Lundmark, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1925) 85, 865.
- [14] V. Slipher, *Proc. Amer. Phil. Soc.* (1917), 56, 40.
- [15] E. Hubble, *Astrophysical Journal* (1929) 74, 43.
- [16] T. Padmanabhan, *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 25, no. 14 (2010) 1129.
- [17] T. Padmanabhan, "Emergence and expansion of cosmic space as due to the quest for holographic equipartition", arXiv:1206.4916.

- [18] A. R. Plastino and J. A. S. Lima, Phys. Lett. A 260 (1999) 46.
- [19] J. Ananias Neto, Int. J. Theor. Phys. 50 (2011) 3552.
- [20] E. M. C. Abreu, J. Ananias Neto, A. C. R. Mendes and W. Oliveira, Physica A 392 (2013) 5154.
- [21] D. Jiulin, Phys. Lett. A 320 (2004) 347.
- [22] D. Jiulin, Physica A 335 (2004) 107.
- [23] E.M.C. Abreu, J.A. Neto, A.C.R. Mendes e Daniel O. de Souza, EPL 120 (17) 20003;
E.M.C Abreu, J.A. Neto, A.C.R. Mendes e Daniel O. de Souza, *Notes on microstates and Tsallis statistics and entropic gravity formalism* arXiv:1708.04596;
E.M.C Abreu, J.A. Neto, A.C.R. Mendes e Daniel O. de Souza, *Emergence of cosmic space, Gauss-Bonnet gravity, MOND theory and nonextensive considerations* arXiv:1511.02108.
- [24] J. F. Donoghue, Phys. Rev. D50 (1994) 3874.
- [25] A. Akhundov, S. Bellucci and A. Shiekh, Phys. Lett. B 395 (1997) 16.
- [26] N. E. J. Bjerrum-Bohr, John F. Donoghue and Barry R. Holstein, Phys Rev D 67 (2003) 084033.
- [27] M. Milgrom, Astrophys. J. 270 (1983) 365.
- [28] V.C. Rubin, N. Thonnard and W.K. Ford, Jr., Astrophys. J. 225, L107 (1978).
- [29] F. Zwicky, Astrophys. J. 86, 217 (1937).
- [30] M. Milgrom, New Astron.Rev. 46, 741-753 (2002).
- [31] E. R. Livine and D.R. Terno, Nucl. Phys. B, 794 (2008) 138.
- [32] L. Modesto and A. Randono, Entropic corrections to Newton's law, arXiv:1003.1998.
- [33] X-G. He and B-Q. Ma, Chin. Phys. Lett., 27 (2010) 070402.
- [34] M. Botta Cantcheff and J.A.C. Nogales, Int. J. Mod. Phys. A 21 (2006) 3127.
- [35] R.B. Tully and J.R. Fisher, Astron. Astrophys. 54 (1977) 661.
- [36] H.E.S. Velten, Revista Brasileira do Ensino de Física 30, n. 3, 3314 (2008).
- [37] R.H. Sanders and E. Noordermeer, arXiv: astro-ph/0703352 (2007).
- [38] M. Milgrom and R.H. Sanders, arXiv: astro-ph/0611494 (2006).

- [39] J.B. Marion and S. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Saunders College Publishing, Virginia, 2004).
- [40] D.W. Sciama, *Proc. R. Soc. Lond. A* 394 (1984) 1; A. Del Popolo, *Astronomy Reports*, 51, 3 (2007); S. Fiorucci, arXiv:astro-ph/0406285 (2004).
- [41] T. Padmanabhan, *Class. Quantum Grav.*, 21 (2004) 4485.
- [42] R.C. Tolman, *Phys. Rev.*, 35 (1930) 875.
- [43] A. Komar, *Phys. Rev.*, 113 (1959) 934.
- [44] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Course of Theoretical Physics. vol. 5 (3 ed.), Oxford: Pergamon Press, (1980).
- [45] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517 (1999) 565.
- [46] A. Riess et al., *Astrophys. J.* 116 (1998) 1009; C.L. Bennett et al., *Astrophys. J. Suppl.* 148 (2003) 1.