Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Yuri Soncco Apaza

Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Juiz de Fora
2018

Yuri Soncco Apaza

Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Soncco Apaza, Yuri.
Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw / Yuri Soncco Apaza. – 2018.
28 f.

Orientador: Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes
Coorientador: Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

1. Campo de fundo. 2. quebra da simetria de Lorentz. 3. invariância de calibre. 4. modelo Carol-Field-Jackiw. 5.método de Dirac. Yuri, Albert, Everton. II. Quantização de Dirac de modelo Maxwell Carroll-Field-Jackiw

Yuri Soncco Apaza

Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes - Orientador
UFJF

Professor Dr. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador
UFRRJ

Professor Dr. Clifford Neves Pinto
UERJ

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, pelo apoio incondicional até o final de seus dias. A meu pai pelo confiança e carinho que me tem. A meu orientador Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes pela compreensão e confiança. A meu Co-orientador Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pela atenção e apoio em meu trabalho. A todos os meus amigos, que de alguma forma contribuíram para terminar este trabalho. À coordenação da pós-graduação, ao secretário da pós-graduação Domingos e aos professores do Departamento de Física da UFJF. A programa de bolsa de UFJF pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho analisamos os aspectos gerais do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, como as equações de movimento, as ondas eletromagnéticas modificadas pela presença do termo campo de fundo. Encontramos também os vínculos para este sistema e com isso analisamos as relações dos parênteses de Dirac.

Palavras-chave: Campo de fundo, quebra da simetria de Lorentz, invariância de calibre, modelo Carol-Field-Jackiw, método de Dirac.

ABSTRACT

In this work we have analyzed the general aspects of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw model, such as the equation of motion of the electromagnetic waves modified by the presence of the background field. We also have found constraint of this system and with this result we analyzed the parenthesis relations of Dirac.

Key words: Key words: Background field, gauge invariance, Carol-Field-Jackiw model, Dirac method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há mais de 25 anos, Carroll-Field-Jackiw (CFJ) estudaram um modelo teórico que modifica a teoria de Maxwell [4], onde envolve um termo CFJ que representa uma extensão quadridimensional do termo Chern-Simons (SC). O termo de CFJ viola a simetria de Lorentz e CPT, mas preserva a simetria de calibre [10], e é responsável por fornecer uma massa topológica [17] ao campo de calibre, alterando assim a taxa de espalhamento do fóton no vácuo [9]. Este termo CFJ é dado por

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_{\mu}A_{\nu}F_{\alpha\beta}, \tag{1.1}$$

onde: $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita, A_{α} é o quadrivetor potencial, $F_{\alpha\beta}$ é tensor eletromagnético e P_{α} é o campo de fundo responsável pela violação no setor de calibre [16]. Tipicamente, a simetria de Lorentz é quebrada pela presença do quadrivetor constante P, que introduz uma direção privilegiada no espaço-tempo [5]. As componentes temporal e espacial foram discutidas a partir de dados astronômicos e geomagnéticos [14].

A violação da simetria de Lorentz e da CPT é agora tratada como um ingrediente importante da possível extensão do modelo padrão [5]. É por isso que alguns autores se dedicaram a estudar os aspectos físicos deste modelo [2, 3], como uma teoria para um eletromagnetismo modificado que prediz a birrefringência da luz no vácuo [4, 5, 6, 11, 12, 15].

Neste trabalho faremos a quantização do modelo de Maxwell-CFJ (MCFJ) utilizando o formalismo de Dirac [1, 8, 18], onde os vínculos são classificados em primeira e segunda classe (os vínculos de segunda classe permitem uma redução dos graus físicos de liberdade e os vínculos de primeira classe possuem a propriedade fundamental de estarem relacionados a geradores de calibre [13, 18]), que nos levam de forma conveniente aos parênteses de Dirac, os quais são os parênteses que permitem a passagem aos comutadores na mecânica quântica [13].

A ideia central no método de Dirac é a implementação dos vínculos na Hamiltoniana do modelo MCFJ que nos conduz aos parênteses generalizados chamados parênteses de Dirac. Estes parênteses transformam o conjunto de vínculos de segunda classe obtidos numa álgebra, permitindo assim uma implementação consistente pela regra de quantização $\{\ ,\ \} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$, pois assim obtemos a regra que associa a cada observável clássico um operador autoadjunto sobre o espaço de Hilbert.

Neste trabalho estudaremos os aspectos gerais das equações de Maxwell modificado e, as equações de ondas deste modelo MCFJ. Depois, no segundo capítulo será tratado o formalismo de Dirac e finalmente no capítulo final, quantizaremos o modelo MCFJ.

2 ASPECTOS GERAIS DE MODELO MAXWELL CARROLL-FIELD-JACKIW

2.1 Chern-Simons em (3+1) dimensões

O Lagrangiano de Chern-Simons em (3+1) dimensões é uma associação de um tensor dual eletromagnético com um quadrivetor P_μ (campo de fundo) expressado do seguinte jeito [4]:

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{2} P_\mu A_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

onde A_μ é um quadrivetor potencial e, $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual eletromagnético.

Queremos determinar em que condições $\mathcal{L}_{CS}$ será invariante de calibre. Assim, a variação $\delta\,\mathcal{L}_{CS}$ em função de transformação de calibre $\delta A_\mu = \partial_\mu \chi$, é:

$$\delta\,\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{2}\delta(P_\mu A_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} P_\mu (\partial_\nu \chi) \widetilde{F}^{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

onde χ é uma função arbitraria, e levando em consideração que o tensor de intensidade eletromagnética $F^{\mu\nu}$ é invariante de calibre. Assim, integrando (2.2) por partes, temos:

$$\begin{aligned} \delta\,\mathcal{L}_{CS} &= \frac{1}{2}\chi(\partial_\nu P_\mu \widetilde{F}^{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2}\chi \widetilde{F}^{\mu\nu}(\partial_\nu P_\mu) + \frac{1}{2}\chi P_\mu (\partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo, por definição $\partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \delta\,\mathcal{L}_{CS} &= \frac{1}{2}\chi \widetilde{F}^{\nu\mu}(\partial_\nu P_\mu) \\ &= \frac{1}{4}\chi \widetilde{F}^{\mu\nu}(\partial_\nu P_\mu) + \frac{1}{4}\chi \widetilde{F}^{\mu\nu}(\partial_\nu P_\mu) \\ &= \frac{1}{4}\chi \widetilde{F}^{\nu\mu}(\partial_\mu P_\nu - \partial_\nu P_\mu). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para que (2.4) seja invariante de calibre, precisamos que $\delta\,\mathcal{L}_{CS} = 0$, para χ arbitrário. No espaço-tempo plano temos $\partial_\alpha P_\beta = 0$, para qualquer sistema de referência. Portanto, a teoria é invariante de calibre [4].

2.2 Equações de Maxwell Carroll-Field-Jackiw

Nesta seção, consideramos o Lagrangiano formulado por Carroll-Field-Jackiw em 1990 [4], que é invariante de calibre e quebra a simetria de Lorentz, e é descrito como:

$$\mathcal{L}_{CFJ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu}A_{\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} - A_{\mu}J^{\mu}, \tag{2.5}$$

onde $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ é o tensor dual eletromagnético de $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, J^μ densidade de corrente e o tensor Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ($\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ e $\epsilon^{0123} = 1$).

Temos que a equação de Euler-Lagrange para teoria de campos é

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{CFJ}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{CFJ}}{\partial A_\mu} = 0, \tag{2.6}$$

onde $\mathcal{L}_{CFJ}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = \mathcal{L}_{CFJ}$ é a densidade Lagrangiana para coordenadas de campo eletromagnético A^μ e velocidade $\partial_\nu A_\mu$.

Utilizando a equação (2.6), temos para o Lagrangiano de Maxwell CFJ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{CFJ}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\left(-\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}P_\rho A_\sigma \widetilde{F}^{\rho\sigma}\right) \\
&= -2F^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}P_\alpha A_\beta(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma) \\
&= -4F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}P_\alpha A_\beta. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a equação (2.7), calculamos as equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\partial_\mu\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\right] - \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(P_\alpha A_\beta \widetilde{F}^{\alpha\beta})\right] &= 0 \\
+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial A_\nu}(\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}P_\alpha A_\beta(\partial_\rho A_\sigma))\right] + J^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu} & \\
-\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}P_\alpha(\partial_\mu A_\beta) + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}P_\alpha(\partial_\rho A_\sigma)\delta^\nu_\beta + J^\alpha\delta^\nu_\alpha &= 0 \\
-\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}P_\alpha(\partial_\mu A_\beta) + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}P_\alpha(\partial_\rho A_\sigma) + J &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}P_\alpha F_{\rho\sigma} - J^\nu &= 0. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

As equações de movimento para o modelo de MCFJ, são representadas mediante a equação (2.8), onde claramente temos a presença de forma explicita do campo do fundo P_α. É claro que, quando $P_\alpha = 0$ conseguimos as equações de Maxwell usuais, as quais são invariantes de Lorentz e de calibre.

Logo, utilizando a equação de Maxwell modificada em (2.8), podemos obter as duas primeiras equações de MCFJ em forma vetorial, com as seguintes relações:

1. $\partial^i = -\partial_i$, $A^i = -A_i$
2. $F^{0i} = -E^i$
3. $F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k$
4. $(\nabla\phi)_i = \partial_i\phi$
5. $\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i$
6. $(\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ikl}\partial_k A_l$.

Assim, as equações (2.8), quando $\mu = 0$ e $\nu = j$ com $j = 1,\ 2,\ 3$, é:

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon^{0jik}P_0F_{ik} + \frac{1}{2}\epsilon^{ij0k}P_iF_{0k} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk0}P_iF_{k0} + J^j \\
-\partial_0 E^j - \epsilon^{0ijk}\partial_i B^k &= -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0ikl}\epsilon^{0jik}B^l - \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_iE^k + \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_iE^k + J^j \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t\vec{E} &= \vec{P} \times \vec{E} - P_0\vec{B} + \vec{J}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Também quando $\nu = 0$ e $\mu = i$ com $i = 1,\ 2,\ 3$, as equações (2.8) ficam:

$$\begin{aligned}
\partial_i F^{i0} &= J^0 + \epsilon^{i0jk}P_i(\partial_j A_k) \\
\partial_i E_i &= \rho - P_iB^i \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \rho - \vec{P} \cdot \vec{B}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

As outras equações eletromagnéticas, ou as equações homogêneas, não mudam, e são definidas em função de tensor dual eletromagnético como:

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \widetilde{F}^{\nu\mu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \\
&= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu(\partial_\alpha A_{be}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Assim, as equações (2.11), quando $\nu = 0$, é:

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu 0\alpha\beta}\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta) &= 0\\
\epsilon^{0ijk}\partial_i(\partial_j A_k) &= 0\\
\nabla\cdot\vec{B} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Também as equações (2.11), quando $\mu = 0$ e $\nu = j$ com $j = 1,\ 2,\ 3$, fica:

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu j\alpha\beta}\partial_\nu(\partial_\alpha A_\beta) &= 0\\
\epsilon^{0jik}\partial_0(\partial_i A_k)+\epsilon^{ij0k}\partial_i(\partial_0 A_k)+\epsilon^{ijk0}\partial_i(\partial_k A_0) &= 0\\
\epsilon^{0jik}\partial_0(\partial_i A_k)+\epsilon^{0ijk}\partial_i F_{0k} &= 0\\
\partial_t\vec{B}+\nabla\times\vec{E} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

A equação (2.9) representa lei de Ampère modificada e a equação (2.10) representa a lei Gauss modificada e Ampere. A equação (2.9) mostra que a densidade de corrente $\vec{J}$ gera não somente campo magnético, mas também campo elétrico. Também a equação (2.10) mostra que a densidade de carga ρ é fonte de campo elétrico e magnético. Quando consideramos que não existe fonte ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), os campos magnético e elétrico atuam como fontes.

Em eletrodinâmica usual, os campos elétricos e magnéticos se propagam através do espaço em forma de perturbações, denominadas ondas eletromagnéticas. Aplicando um rotacional a equação (2.9) quando $\vec{J} = 0$, obtemos:

$$
\nabla\times(\nabla\times\vec{B})-\partial_t(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\times(\vec{P}\times\vec{E})-P_0(\nabla\times\vec{B}). \tag{2.14}
$$

Utilizando as identidades vetoriais e as equações (2.10), (2.12), (2.13), quando $\rho = 0$, temos:

$$
\nabla^2\vec{B}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} \;=\; -\nabla\times(\vec{P}\times\vec{E})+P_0\nabla\times\vec{B} \tag{2.15}
$$

Aplicando o rotacional a equação (2.13). Temos (2.15) como:

$$
\partial_t\nabla\times\vec{B} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{E}). \tag{2.16}
$$

Utilizando as identidades vetoriais e equações (2.9), (2.10), quando $\vec{J} = 0$ e $\rho = 0$, (2.16) é:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \partial_t (\vec{P} \times \vec{E}) - P_0 \partial_t \vec{B} - \nabla (\vec{P} \cdot \vec{B}) \tag{2.17}$$

Nas equações de onda (2.15) e (2.17) não é possível a separação $\vec{E}$ de $\vec{B}$, por causa dos efeitos da quebra de simetria de Lorentz.

3 FORMALISMO HAMILTONIANO PARA SISTEMAS VINCULADOS

3.1 O método de Dirac

Nesta seção apresentaremos o tratamento Hamiltoniano de sistemas vinculados, foi desenvolvido por Dirac em seu livro "Lectures on Quantum Mechanics" [7]. Antes, porém, faremos uma breve digressão sobre sistemas vinculados e o tratamento especial que deve ser dado ao quantizar pelo método chamado de quantização canônica.

Seja uma teoria clássica que possua um vínculo envolvendo coordenadas e momentos

$$\Gamma(q,p) = 0, \tag{3.1}$$

onde q e p são todas as coordenadas q_i e momentos p_i, respectivamente. Apesar do vínculo possuir valor nulo, os parênteses de Poisson deste vínculo com outra quantidade qualquer, por exemplo, da teoria, pode não ser nulo, o que é incoerente. Por isso, utilizamos a notação

$$\Gamma(q,p) \approx 0, \tag{3.2}$$

onde diz "fracamente igual a zero", significando que a relação acima não é nula, necessariamente, dentro dos parênteses de Poison.

Consideramos, então, que existe uma certa quantidade dinâmica $A(q,p)$, cujo parêntese de Poisson com $\Gamma(q,p)$ seja diferente de zero, isto é:

$$\{A, \Gamma\} \neq 0. \tag{3.3}$$

Na passagem para a Mecânica Quântica, Γ e A se transformam em operadores, que chamaremos de $\hat{\Gamma}$ e $\hat{A}$. Em virtude de (3.1), $\hat{\Gamma}$ é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo Γ deve ser nulo

$$[\hat{A}, \hat{\Gamma}] = 0. \tag{3.4}$$

Mas, pela relação

$$\{A, \Gamma\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{\Gamma}] \tag{3.5}$$

devemos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre $\hat{A}$ e $\hat{\Gamma}$. A regra geral de quantização canônica, dada por (3.5), leva a inconsistências na presença de vínculos.

Foi Dirac quem descobriu a maneira correta de proceder quanto a quantização canônica de vínculos.

Então, começamos com o formalismo Lagrangeano e, em seguida, passa-se para o Hamiltoniano. Sendo, então, um sistema descrito pela Lagrangeana

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \tag{3.6}$$

num espaço de configurações N-dimensional, representado pelas coordenadas generalizadas q_i e velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ com $i = 1,\ 2, ..., N$.

A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feito, primeiramente, pela introdução dos momentos canônicos:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3.7}$$

onde q_i e p_i não são variáveis independentes, entretanto, devem haver sistemas onde a relação dada por (3.7) leva à existência de vínculos. Denotemos estes vínculos, genericamente, por:

$$\phi_m = \phi_m(q_i, p_i), \quad m = 1,\ 2, ..., M \leq N. \tag{3.8}$$

Os vínculos decorrentes diretamente da relação da definição dos momentos são chamados de vínculos primários. Conforme veremos, outros vínculos podem existir, estes tomam os nomes de vínculos secundários, terciários, etc.

Seja, o Hamiltoniano canônico:

$$H_C(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \tag{3.9}$$

Com este procedimento, as equações de movimento no espaço de fase são obtidas trivialmente.

Poderíamos ter seguido um outro caminho, partindo diretamente de (3.9), tomada como definição. É fácil constatar que a Hamiltoniana é, ainda, função de q_i e p_i mesmo para pontos fora da trajetória clássica. Vejamos isto. Sejam variações genéricas de q_i, $\dot{q}_i$ e p_i dadas por δq_i, $\delta \dot{q}_i$ e δp_i. Assim:

$$\delta H_C = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \tag{3.10}$$

Note-se que, para pontos fora da trajetória clássica, as equações de movimento não podem ser usadas. Usando a definição de movimento canônico, dado em (3.7), imediatamente temos:

$$\delta H_C = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{3.11}$$

Como vemos, δH_c é escrita em termos de δq_i e δp_i, o que sugere ser H_C apenas função de q_i e p_i. Novamente, na expressão (3.11) não podemos substituir $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ por $\dot{p}_i$ porque não estamos na trajetória clássica.

Em termos práticos, a passagem para H_C, dado em (3.9), para uma função apenas de q_i e p_i, envolve transformação do tipo:

$$(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i) \tag{3.12}$$

O Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}, \tag{3.13}$$

chamada matriz Hessiana. Quando o determinante da matriz é diferente de zero, as transformações em (3.12) sempre vão possibilitar a determinação do Hamiltoniano $H_C(q_i, p_i)$. Em outras palavras, as equações que definem os momentos canônicos podem ser todas resolvidas para as velocidades em função dos momentos. Isto ocorre para o caso em que não existem vínculos. Na presença de vínculos, a matriz Hessiana é singular e, consequentemente, nem todos os $\dot{q}_i$ podem ser unicamente escritos em termos de q_j e p_j. Considerando que haja M vínculos, haverá M velocidades nestas condições. Portanto, neste caso, o Hamiltoniano não pode ser unicamente determinado em termos de q_i e p_i.

Como já dissemos, na presença de vínculos, a Hamiltoniana não é unicamente determinada em termos de momento e coordenada. A fim de termos uma idéia sobre qual Hamiltoniano usar, efetivamente no formalismo, vamos calcular as equações de movimento no espaço de fases. Seja, então, o princípio de Hamilton com L obtido de (3.9), depois:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_2}^{t_1} (p_i \dot{q}_i - H_C) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} (p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \delta H_C) dt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Isto sugere que δH_C pode ser escrito, de uma maneira geral, como:

$$\delta H_C = \frac{\partial H_C}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_C}{\partial p_i}\delta p_i. \tag{3.15}$$

Assim, substituindo este resultado em (3.14), temos

$$\int_{t_2}^{t_1}\left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_C}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt = 0. \tag{3.16}$$

Como δq_i e δp_i são funções arbitrárias do tempo, concluímos que a integração em (3.16) só é nula se:

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_C}{\partial p_i}\right)\delta p_i = 0 \tag{3.17}$$

Em virtude das M relações de vínculos envolvendo p_i e q_i, nada podemos concluir de (3.17). Por outro lado, das equações (3.2) e (3.8), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \delta\phi_m(q_i, p_i) \\ &\approx \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\delta p_i, \end{aligned} \tag{3.18}$$

que são, ao todo, M equações. Multiplicando cada uma por $\lambda_m = \lambda_m(q_i, p_i)$, e somando o resultado com (3.17), obtemos:

$$0 \approx \left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_C}{\partial q_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\delta p_i \tag{3.19}$$

Temos, agora, M funções arbitrárias $\lambda_m(q_i, p_i)$ (multiplicadores de Lagrange). Assim, é possível obter as seguintes equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \tag{3.20}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_C}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}. \tag{3.21}$$

Efetivamente, é como se tivéssemos definido uma nova Hamiltoniana dada por:

$$\widetilde{H} = H_C + \lambda_m\phi_m \approx H_C \tag{3.22}$$

Como vemos, o preço pago pelos M vínculos é a presença de M multiplicadores de Lagrange. Podemos escrever as equações de Hamilton em termos dos parênteses de Poisson envolvendo $\tilde{H}$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, \widetilde{H}\}, & (3.23) \\ \dot{p}_i &= \{p_i, \widetilde{H}\}. & (3.24) \end{aligned}$$

Conforme dissemos, podem haver mais vínculos. Neste caso, é fácil ver que eles são incorporados à teoria de maneira semelhante ao que fizemos anteriormente. Por exemplo, suponhamos que existam apenas K vínculos secundários ($K + M \leq N$). Temos, então:

$$H = H_C + \lambda_a \phi_a, \quad a = 1,\ 2, ..., M + K, \tag{3.25}$$

onde H é chamada de Hamiltoniano total.

Vejamos, agora como determinar os vínculos secundários, terciários, etc. Seja ϕ_m um dos M vínculos primários. É uma condição de consistência que os vínculos não evoluam com o tempo. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &= \{\phi_m, \widetilde{H}\} \\ &= \{\phi_m, H_C + \lambda_n \phi_n\} \\ &\approx \{\phi_m, H_C\} + \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Da relação (3.26), podemos destacar duas possibilidades, as quais estão relacionados aos parênteses de Poisson entre ϕ_m e ϕ_n ser ou não ser zero fracamente.

Caso 1:

$\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$, se for esse o caso $H = H_C$, assim a equação (3.25) se reduz a:

$$\dot{\phi}_m \approx \{\phi_m, H_C\}, \tag{3.27}$$

que é uma relação de vínculo. Esta pode ser vínculo já conhecido, ou pode ser um novo vínculo. Esse procedimento pode ser repetido até que a relação não gere mais vínculos.

Caso 2:

$\{\phi_m, \phi_n\} \neq 0$, não obtemos uma relação de vínculo, mas sim uma relação com os multiplicadores de Lagrange.

3.1.1 Vínculos de primeira e segunda classe

Esta é uma classificação que está ligada à maneira como os vínculos são obtidos. Ela é apenas, uma questão digamos de organização. Em termos de quantização canônica, não importa como os vínculos foram obtidos. O que importa é que eles existem. Neste sentido, uma classificação mais útil é a seguinte: dentre os vínculos, podem existir alguns que possuem parênteses de Poisson fracamente zero com todos os vínculos da teoria. Estes vínculos são denominados de primeira classe. Já aqueles que possuírem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero são chamados de segunda classe.

3.1.2 Parênteses de Dirac

Quando introduzimos os parênteses de Poisson. Seja a evolução temporal de uma certa quantidade dinâmica $A(q_i, p_i, t)$. Temos, então:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{3.28}$$

Usando as equações de Hamilton dadas por (3.20) e (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \frac{\partial A}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H_C}{\partial q_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H_C\} + \lambda_a\{A, \phi_a\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que $a = 1,\ 2, ..., M + K$ (vide eq. (3.25)). Todos os vínculos estão incluídos, inclusive os decorrentes de fixação de calibre, caso existam.

No caso particular de A ser qualquer um dos vínculos da teoria, vem que:

$$0 = \frac{d\phi_b}{dt} \approx \{\phi_b, H_C\} + \lambda_a\{\phi_b, \phi_a\}. \tag{3.30}$$

Seja C a matriz cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, isto é:

$$C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\} \tag{3.31}$$

Logo, da (3.30) temos que:

$$\lambda_a C_{ba} + \{\phi_b, H_C\} \approx 0,$$

daí,

$$\lambda_a C_{ab} \approx \{\phi_b, H_C\}, \tag{3.32}$$

em que usamos o fato de que a matriz C seja antisimétrica (caso de vínculos bosônicos). Dirac mostrou que a matriz C sempre possui determinante diferente de zero (lembre-se que estamos considerando que todos os vínculos sejam de segunda classe). Assim da eq. (3.32), temos que:

$$\lambda_a C_{ab} C^{-1}_{bc} \approx \{\phi_b, H^{-1}_{bc}\}$$

logo,

$$\lambda_a \approx -C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H_C\}. \tag{3.33}$$

Introduzindo este resultado em (3.29), finalmente temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \{A, H_C\} - \{A, \phi_a\}C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H_C\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H_C\}_D + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.34}$$

em que

$$\{A, H_C\}_D = \{A, H_C\} - \{A, \phi_a\}C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H_C\} \tag{3.35}$$

é o parêntese de Dirac entre A e H_C.

Agora, com sistemas vinculados, temos uma expressão clássica análoga à equação quântica, que é dado por (3.35). Assim, este fato parece sugerir que, no caso de sistemas vinculados, temos a seguinte regra de quantização canônica:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B], \tag{3.36}$$

Em que os parênteses de Dirac entre A e B é definido de forma análoga àquele em (3.35), ou seja,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, B\}. \tag{3.37}$$

Aqui, também, há fortes evidências que sustentam a hipótese dada por (3.36). A mais importante é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente nos termos dos parênteses de Poison, valem fortemente em termos dos parênteses de Dirac. Isto significa que se tomamos o parêntese de Dirac entre um vínculo e uma quantidade qualquer, obtemos zero.

4 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DE MODELO MAXWELL CARRROLL-FIELD-JACKIW

Seja a densidade de Lagrangeana do modelo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CFJ} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}(F_{0k})^2 - \frac{1}{4}(F_{kj})^2 - \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_k A_0 F_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_k A_i F_{j0}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

O momento canônico π^μ associado ao quadrivetor potencial A^μ, para esta densidade de Lagrangiana é:

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial\,\mathcal{L}_{CFJ}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \\ &= F^{0\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha\beta}P_\alpha A_\beta,\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde

$$\begin{aligned}\pi^0 &= 0 \\ \pi^k &= -F^{0k} - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_i A_j.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Assim, utilizando as equações (4.1) e (4.3), encontramos o Hamiltoniano canônico $H_C = \int d^3x\ (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}_{CFJ}) = \int d^3x\ \mathcal{H}_C$. Onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C = &\frac{1}{2}(\pi^k)^2 + \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}\pi^k P_i A_j + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{8}[\epsilon^{0kij}P_i A_j]^2 + \frac{1}{4}(F_{kj})^2 + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_0 A_k F_{ij} \\ &-\frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_k A_0 F_{ij}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Nosso principal interesse é encontrar os vínculos para o Hamiltoniano descrito em (4.4), por isso é importante conhecer os parênteses de Poisson fundamentais, tais como:

$$\begin{aligned}\{A^i(x'), \pi_j(x)\}_{x'_0=x_0} &= \delta^i_j \delta^{(3)}(x'-x), \\ \{A^i(x'), A_j(x)\}_{x'_0=x_0} &= 0, \\ \{\pi^i(x'), \pi_j(x)\}_{x'_0=x_0} &= 0.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Está claro que não podemos proceder à quantização canônica via os parênteses de Poisson acima, pois a teoria apresenta vínculos, assim da relação (4.3), imediatamente identificamos o vínculo primário:

$$\Omega_1 = \pi^0. \tag{4.6}$$

Logo, usando a condição de consistência para Ω_1, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &\approx \{\pi^0, H_C\} + \int d^3x \{\pi^0, \lambda_1 \Omega_1\} \\ &\approx \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} P_k F_{ij} \approx 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

que é um novo vínculo:

$$\Omega_2 = \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} P_k F_{ij} \approx 0, \tag{4.8}$$

onde (4.8) representa lei de Gauss modificada, pela presença do vector campo de fundo. Aplicando novamente condição de consistência para Ω_2, temos:

$$\dot{\Omega}_2 \approx \{\Omega_2, H_c\} + \int d^3x \{\Omega_2, \lambda_1 \Omega_1\} + \int d^3x \{\Omega_2, \lambda_2 \Omega_2\} = 0. \tag{4.9}$$

Portanto o vínculo (4.8) se conserva. Assim não existem mais vínculos neste modelo.

Avaliando o parêntesis de Poisson para Ω_1 e Ω_2, temos:

$$\{\Omega_1, \Omega_2\} = \{\pi^0, \partial_k \pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij} P_k F_{ij}\} = 0. \tag{4.10}$$

Portanto, os vínculos Ω_1 e Ω_2 são de primeira classe. A presença de vínculos de primeira classe na teoria já era esperada, pois ela é uma teoria de calibre. Sendo estes em número de dois, significa que, ao procedermos à fixação calibre, teremos para o campo de fóton apenas dois graus de liberdade, estes dois graus de liberdade podem ser associados aos seus dois estados de polarização.

O fato de existirem dois vínculos de primeira classe significa que devemos encontrar dois vínculos devidos à fixação de calibre. Logo, consideramos a seguinte fixação de calibre

$$\psi_1 = \partial_k A_k. \tag{4.11}$$

Tal que, a condição de consistência da fixação de calibre ψ_1 é:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \{\psi_1, H_C\} + \int d^3x\{\psi_1, \lambda_1\Omega_1\} + \int d^3x\{\psi_1, \lambda_2\Omega_2\} \\ &= -\partial_k\pi^k - \nabla^2 A_0 - \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij} + \nabla^2\lambda_2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Logo, temos que $\Omega_2 \approx 0$ em (4.8). Então $\partial_k\pi^k = -\frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij}$, portanto:

$$\dot{\psi}_1 = -\nabla^2 A_0 + \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij} \approx 0. \tag{4.13}$$

Também temos que:

$$\begin{aligned}\dot{A}_k &= \{A_k, H_C\} + \int d^3x\{A_k, \lambda_1\Omega_1\} + \int d^3x\{A_k, \lambda_2\Omega_2\} \\ &= \pi^k + \frac{1}{2}\epsilon^{okij}P_iA_j + \partial_kA_0 - \partial_k\lambda_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, de (4.3) e (4.14), podemos fixar $\nabla^2\lambda_2 = 0$. Assim, de (4.13) temos um vínculo:

$$\psi_2 = \nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij} \approx 0. \tag{4.15}$$

Aplicando condição de consistência a ψ_2, temos:

$$\dot{\psi}_2 = \nabla^2\lambda_1 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_i\dot{F}_{ij}. \tag{4.16}$$

Os vínculos (4.6), (4.8), (4.11) e (4.15) são de segunda classe, e o conjunto de vínculos da teoria são:

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_1 &= \pi^0 \approx 0 \\ \widetilde{\phi}_2 &= \nabla^2 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij} \approx 0 \\ \widetilde{\phi}_3 &= \partial_kA_k \approx 0 \\ \widetilde{\phi}_4 &= \partial_k\pi^k + \frac{1}{4}\epsilon^{0kij}P_kF_{ij} \approx 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

O próximo passo é a construção dos parênteses de Dirac. Para tal, precisamos de construção de matriz ($C_{ab}(x'-x) = \{\widetilde{\phi}_a, \widetilde{\phi}_b\} \quad a, b = 1, ..., 4$) dos parênteses de Poison dos vínculos em (4.17). Esta construção faremos interativamente.

Usando $\widetilde{\phi}_1$ e $\widetilde{\phi}_2$, temos:

$$\{\widetilde{\phi}_1(x'), \widetilde{\phi}_2(x)\} = \{\pi^0, \nabla^2 A^0\} = -\nabla^2 \delta^3(x'-x), \tag{4.18}$$

e sendo os demais parêntesis de Poison nulos, a matriz C dos vínculos $\widetilde{\phi}_1$ e $\widetilde{\phi}_2$ é:

$$C_{ab}(x',x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta^3(x'-x), \qquad a,\ b = 1,2 \tag{4.19}$$

e a inversa da matriz C é:

$$C^{-1}_{ab}(x',x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2} \delta^3(x'-x), \qquad a,\ b = 1,2. \tag{4.20}$$

Usando a definição dos parênteses de Dirac construimos os seguintes parênteses preliminares:

$$\begin{aligned} \{A^k(x'), \pi_j(x)\}^* &= \{A^i(x'), \pi_j(x)\} - \sum_{a,b}^{2} \int d^3y d^3z \{A^i(x'), \widetilde{\phi}_a(y)\} C^{-1}_{ab}(y,z) \{\widetilde{\phi}_b(z), \pi_j(x')\} \\ &= \delta^i_j \delta^3(x'-x) \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\{A^k(x'), A_j(x)\}^* = 0 \tag{4.22}$$

$$\{\pi^k(x'), \pi_j(x)\}^* = 0 \tag{4.23}$$

$$\{A^0(x'), \pi^k(x)\}^* = -\epsilon^{0kli} P_l \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \delta^3(x'-x) \tag{4.24}$$

$$\{A^k(x'), \pi_0(x)\}^* = 0 \tag{4.25}$$

A matriz C para os vínculos $\widetilde{\phi}_3$ e $\widetilde{\phi}_4$ é:

$$\{\widetilde{\phi}_3(x'), \widetilde{\phi}_4(x)\} = \{\partial_i A_i(x'), \partial_j \pi^j(x)\} = \nabla^2 \delta^3(x'-x), \tag{4.26}$$

os demais parênteses de Poison são nulos. Então a matriz C para os vínculos $\widetilde{\phi}_3$ e $\widetilde{\phi}_4$ é:

$$C_{ab}(x',x) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2\delta^3(x'-x), \qquad a,\ b=3,4 \tag{4.27}$$

e sua inversa é:

$$C^{-1}_{ab}(x',x) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2}\delta^3(x'-x), \qquad a,\ b=3,4. \tag{4.28}$$

Logo, não é difícil verificar, para os vínculos $\widetilde{\phi}_3$ e $\widetilde{\phi}_4$, a siguente matriz:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(x',x) &= \begin{pmatrix} \{\widetilde{\phi}_3,\widetilde{\phi}_3\}^* & \{\widetilde{\phi}_3,\widetilde{\phi}_4\}^* \\ \{\widetilde{\phi}_4,\widetilde{\phi}_3\}^* & \{\widetilde{\phi}_4,\widetilde{\phi}_4\}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2\delta^3(x'-x), \end{aligned} \tag{4.29}$$

e a inversa de $\widetilde{C}$ é:

$$\widetilde{C}^{-1}(x',x)_{ab} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2}\delta^3(x'-x), \qquad a,\ b=3,4. \tag{4.30}$$

Assim, partindo dos parênteses de Dirac preliminares e usando a matriz $\widetilde{C}^{-1}$, podemos construir os parênteses de Dirac para o modelo MCFJ.

Assim, utilizando a definição dos parênteses de Dirac em (3.37) temos:

$$\{A_k(x'),\pi_j(x)\}^D = -\left(\delta^k_j+\frac{\partial^x_k\partial^x_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(x'-x)$$

$$\{A^k(x'),A_j(x)\}^D = 0 \tag{4.31}$$

$$\{\pi_k(x'),\pi_j(x)\}^D = -\frac{1}{2}\epsilon^{0jli}P_l\partial_i\partial_k\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(x'-x)+\frac{1}{2}\epsilon^{0kli}P_l\partial_i\partial_j\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(x'-x) \tag{4.32}$$

$$\{A^0(x'),\pi^k(x)\}^D = -\epsilon^{0kli}P_l\partial_i\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(x'-x) \tag{4.33}$$

$$\{A^k(x'),\pi_0(x)\}^D = 0, \tag{4.34}$$

O resultado obtido para o parêntese de Dirac $\{A_k(x'),\pi_j(x)\}_D$ do modelo de MCFJ coincide com os parênteses de Dirac de Maxwell, mas não para $\{\pi_k(x'),\pi_j(x)\}^D$, pois é uma relação de não-comutatividade em função de vector de campo de fundo, também o parênteses $\{A^0(x'),\pi^k(x)\}^D$ é diferente de zero onde aparece explicitamente o vector campo de fundo. Se consideramos $P_i=0$ podemos observar que temos os parênteses de Dirac de Maxwell.

5 Conclusão

A importância de considerar a violação da simetria de Lorentz é uma necessidade de uma descrição teórica sólida e consistente da violação dessa simetria; é por isso que é dada importância ao modelo de MCFJ que viola a simetria de Lorentz pela presença de campo de fundo no termo Chern-Simons. O campo de fundo pode ser visto como um campo de fundo constante que preenche todo o Universo, introduzindo direcionalidade ao espaço-tempo. Os fótons interagem com esse campo de fundo e experimentam efeitos dependentes de sistema referencial, violando a invariância de Lorentz.

As leis modificadas de Ampere e Gauss, das equações de Maxwell mostram explicitamente a presença dos termos do campo de fundo, a partir do qual podemos detalhar a importância do campo de fundo na criação de uma nova fonte, sem a presença de ρ (densidade) e $\vec{J}$ (corrente). Enquanto as leis de Faraday e Gauss para o magnetismo não são modificadas pelo campo de fundo, porque vem da definição apenas que só depende do tensor dual eletromagnético e não da Lagrangiana. Também as equações de onda Maxwell CFJ mostram que uma separação de campo elétrico e magnético não é possível como o que acontece com o modelo Maxwell que tem solução trivial.

As regras de quantização do modelo Maxwell CFJ apresentam relações diferentes do modelo de Maxwell, pois os parênteses de Dirac entre os momentos canônicos se comportam como uma relação não comutativa com a presença de vetor de campo de fundo que aparece explicitamente nessa relação. Também o parêntese de Dirac entre o potencial escalar e o momento canônico é diferente de zero, ao contrário do modelo de Maxwell. A partir daqui podemos inferir que as propriedades termodinâmicas são diferentes das do modelo de Maxwell.

Outros aspectos que podem ser explorados em trabalhos futuros são as soluções clássicas, onde a influência do campo de fundo pode ser observada em leis como Coulomb e Biot-Savart. Outro aspecto importante é também estudar a birrefringência da luz no vácuo. Também em seu aspecto termodinâmico é possível estudar as leis da radiação de Planck e as leis de Stefan-Boltzmann.

REFERÊNCIAS

[1] A. Hanson, T. R., and Teitelboin, C. *Constrained Hamiltonian Systenas.* Academia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.

[2] Adam, C., and Klinkhamer, F. Causality and CPT violation from and Abelian Chern-Simons-like term. *Nucl. Phys. B 607*, (2001)247.

[3] Andrianov, A., and Soldati, R. Patterns of Lorentz symmetry breaking in QED by CPT-odd interaction. *Phys. Lett. B.*

[4] Carroll, S. M., and Field, G. B. Limits on a Lorentz and parity violating modification of electrodynamics. *Physical Review D. 41*, (1990)1232.

[5] Colladay, D., and Kostelecký, V. A. CPT violation and the Standard Model. *Phys. Rev. D. 55*, (1997)6760.

[6] Colladay, D., and Kostelecký, V. A. Lorentz-violating extension of the Standard Model. *Phys. Rev. D. 58*, (1998)116002.

[7] Dirac, P. A. M. *Lectures on Qunatum Mechanics.* Belf Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.

[8] Gitman, D. M., and Tyutin, I. V. *Quantization of Fields with Constraints.* Springer-Verlag, 1990.

[9] Jackiw, R. Chern-Simons violation of Lorentz and CPT symmetries in electrodynamics. *hep-ph/9811322*.

[10] Jackiw, R., and Kostelecky, V. A. Radiatively induced lorentz and CPT violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett. 82*, (1999)3572.

[11] Kostelecky, V. A., and Mewes, M. Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett. 87*, (2001)251304.

[12] Kostelecky, V. A., and Mewes, M. Signals for Lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett. 66*, (2002)056005.

[13] Medina, J. A. R. Método de Dirac e de Faddeev e Jackiw: um estudo comparativo. Master's thesis, Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2000.

[14] Nodland, B., and Ralston, J. P. Response to Eistein and Bunn's null hypothesis comment on cosmological birefringence. *Phys. Rev. Lett. 78*, (1997)3043.

[15] Richard, P. H. Birefringence of a medium of tenuous parallel cylinders. *Applied Optics 28*, (1989)4030.

[16] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, J., and Santos, C. E. H. Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics. *Phys. Rev. D 78*, (2008)025030.

[17] S. Deser, R. J., and Templeton. Topologically massive gauge theories. *Ann. Phys. 140*, (1982)372.

[18] Sudarshan, E. C. G., and Mukunda, N. *Classical Dynamics: A modem perspective.* John Wiley, 1974.